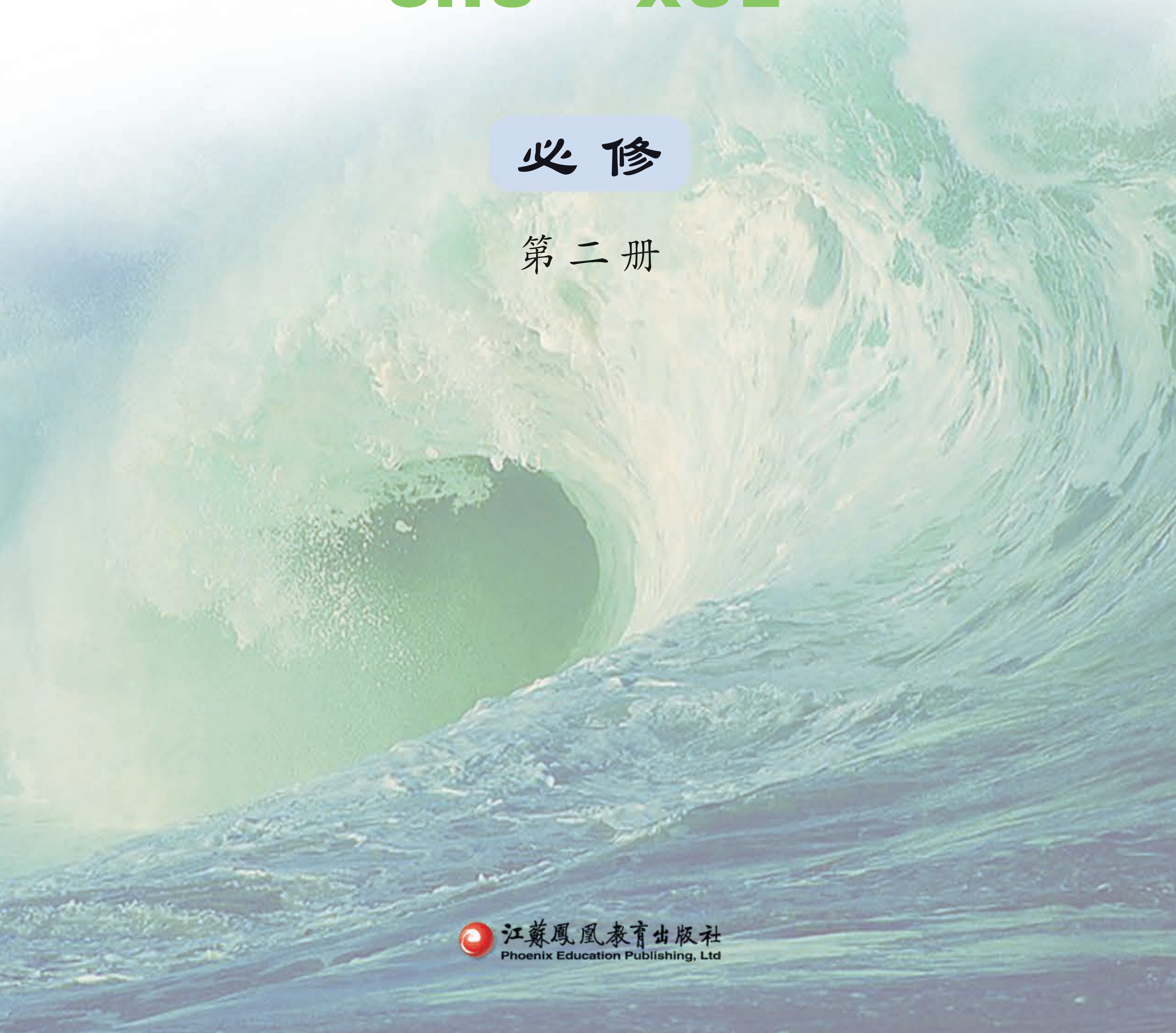
国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHU XUE



必修

第二册

江苏凤凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

普通高中教科书

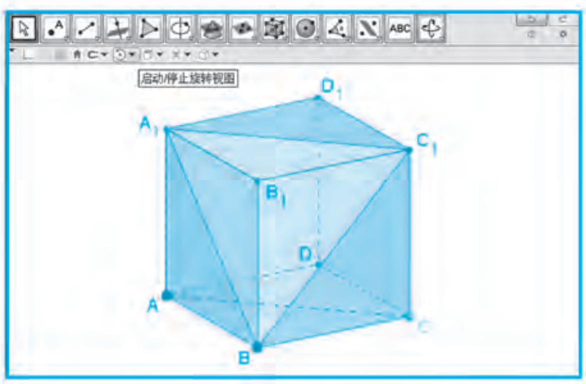
数学

SHU XUE

必修

第二册

苏教版高中数学教材编写组 编著



江苏凤凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

主　　编　单　墫　李善良

副 主 编　葛　军　徐稼红　石志群

本册主编　徐稼红

编写人员　陈光立　樊亚东　李善良　徐稼红　石志群　葛　军

　　　　　孙旭东　张松年　仇炳生　于　明　单　墫

责任编辑　田　鹏

大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学，高中阶段的数学学习生活有趣吗？

我们知道，数学是高中阶段的重要学科，不仅是学习物理、化学等学科的基础，而且可以帮助我们认识世界，改造世界，创造新的生活，对我们的终身发展有较大的影响.

怎样学习数学？

第一，要学会发现问题、提出问题. 面对各种情境（生活的、数学的、科学的），我们需要学会观察、实验、归纳，学会从特殊到一般、从具体到抽象、从模糊到清晰，大胆地提出数学问题.

第二，要尝试分析并解决所提出的问题. 通过抽象、推理、建模、运算等多种活动，建立数学理论，并运用这些数学理论去解决问题.

第三，要学会回顾反思. 在解决完问题之后，要思考：我们是如何解决这个问题的，从中可以得到哪些启发，还能提出哪些问题.

在数学学习过程中，我们要主动地学习数学基础知识、基本技能，自觉地感悟基本数学思想，不断积累数学活动经验，提升数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等核心素养，并逐步学会用数学眼光观察世界、用数学思维思考世界、用数学语言表达世界.

通过数学学习，我们会发现数学非常奇妙，非常有趣. 数学将给我们以新奇和动力，我们的思维水平会不断提高，我们的创造能力会得到发展. 我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、本章回顾、本章测试等内容构成一个完整的体系. 它体现了教科书的基本要求，是所有学生应当掌握的内容，相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接、问题与探究、应用与建模，以及习题中的“思考·运用”“探究·拓展”等. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，相信你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\overrightarrow{AB}$	向量$\overrightarrow{AB}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模(或长度)
$\|\overrightarrow{AB}\|$	向量$\overrightarrow{AB}$的模(或长度)
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线)
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda \boldsymbol{a}$	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积
i	虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$
$\mathbf{C}$	复数集
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
$\|z\|$，$\|a+b\mathrm{i}\|$	复数 z 的模，$a+b\mathrm{i}$ 的模
$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a \subset \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a /\!/ \alpha$	直线 a 平行于平面 α
$\alpha /\!/ \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp \alpha$	直线 a 垂直于平面 α
$\alpha-AB-\beta$(或 $\alpha-l-\beta$)	棱为 AB,面为 α，β的二面角(或棱为 l,面为 α，β的二面角)
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
$\bar{x}$	样本平均数
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	n 个实数 a_1，a_2，…，a_n 的和
$P(A)$	事件 A 的概率
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件

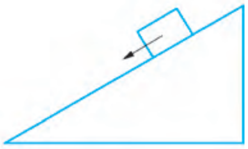
第9章　平面向量

- 平面向量
  - 向量概念
  - 向量运算
    - 向量的加减法
    - 向量的数乘
    - 向量的数量积
  - 向量基本定理及坐标表示
    - 平面向量基本定理
    - 向量坐标表示与运算
    - 向量平行的坐标表示
  - 向量应用

深入地探索和研究自然界，乃是数学发展的最为丰富的源泉，也是数学发现的最有成效的一种方法.

——傅里叶

冬天到了，大雪过后，白雪皑皑. 如果你穿上滑雪板，站在被雪覆盖的、平滑的斜坡上，你会感到有一个力拉着你向下滑行，而且斜坡越陡，这个力就越大，下滑的加速度也越大.



同样地，把木块放置在光滑的斜面上，木块将向下滑动. 斜面的坡度越大，木块下滑的加速度也越大.

- 这些运动中含有哪些物理量?
- 用怎样的数学模型刻画这些物理量?
- 怎样运用这样的数学模型去解决问题?

9.1 向量概念

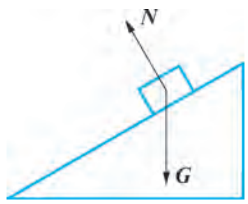


图 9-1-1

把木块放置在光滑的斜面上，根据物理学知识知道，斜面上的木块受到两个力的影响：重力 $\boldsymbol{G}$ 与斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$. 重力的方向竖直向下，支持力的方向与斜面垂直(图 9-1-1).

木块在重力与支持力的合力作用下，会沿斜面向下运动，其运动的加速度为正，下滑的速度越来越快.

木块滑动后就会产生位置的变化，物理上用“位移”来刻画这种变化.

● 力、速度、加速度、位移这些量有什么共同特征?

在现实生活中，有些量(如距离、身高、质量等)只有大小，而另外一些量(如力、速度、加速度、位移等)既有大小又有方向.

我们把既有大小又有方向的量叫作**向量**(vector).

向量常用一条有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用小写字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 来表示(图 9-1-2).

用小写字母 a 表示向量时，印刷用粗体 $\boldsymbol{a}$，书写用 $\vec{a}$.

图 9-1-2

向量$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量的**长度**(或称为**模**)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

我们规定，长度为 0 的向量称为**零向量**(null vector)，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量的方向是任意的.

长度等于 1 个单位长度的向量，叫作**单位向量**(unit vector).

思 考

平面上起点在定点 O 的单位向量，其终点的集合是什么图形?

方向相同或相反的非零向量叫作**平行向量**(parallel vectors). 在图 9-1-3 中，向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是一组平行向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 我们规定**零向量与任一向量平行**.

所有长度相等且方向相同的向量都看作相同的向量，而不管它们的起点位置如何. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相同的向量，也称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图9-1-4，在 $\square ABCD$ 中，向量$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{DC}$ 长度相等且方向

相同,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

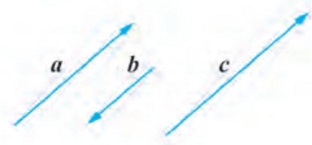


图 9－1－3

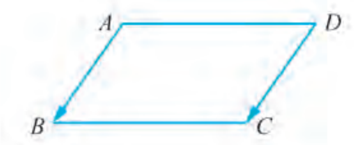


图 9－1－4

本章学习的向量都是平面内的自由向量.它们仅由方向和大小确定,而与起点位置无关.

由此可知,将一个向量平移后所得的向量与原向量是相同的向量.图 9－1－5 中,向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 两两平行,可以通过平移使得 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 落在同一直线上,所以,任意一组平行向量都可以平移到同一条直线上.因此平行向量又称为**共线向量**(collinear vectors).

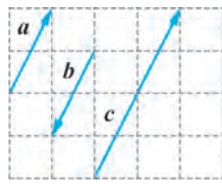


图 9－1－5

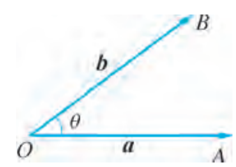


图 9－1－6

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\angle AOB=\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 9－1－6).

当 $\theta=0^\circ$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;

当 $\theta=180^\circ$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向;

当 $\theta=90^\circ$ 时,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 1 已知 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,在图 9－1－7 所标出的向量中:

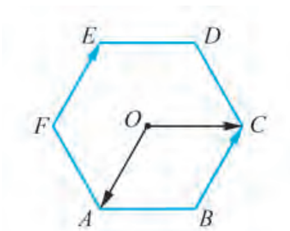


图 9－1－7

(1) 试找出与$\overrightarrow{FE}$共线的向量;

(2) 确定与$\overrightarrow{FE}$相等的向量;

(3) $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{BC}$相等吗?

解 (1) 与$\overrightarrow{FE}$共线的向量有$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{OA}$.

(2) $\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$长度相等且方向相同,则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.

(3) 虽然$\overrightarrow{OA}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$,且$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{BC}|$,但它们方向相反,所以这两个向量并不相等.

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等,方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**,记作$-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ 与$-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量.并且规定**零向量的相反向量仍是零向量**.于是,对任意一个向量 $\boldsymbol{a}$,总有

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

例 2 在图 9－1－8(1)中的 4×5 方格纸中有一个向量$\overrightarrow{AB}$,分别以图中的格点为起点和终点作向量,其中与$\overrightarrow{AB}$相等的向量有多少

个？与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量有多少个($\overrightarrow{AB}$除外)？

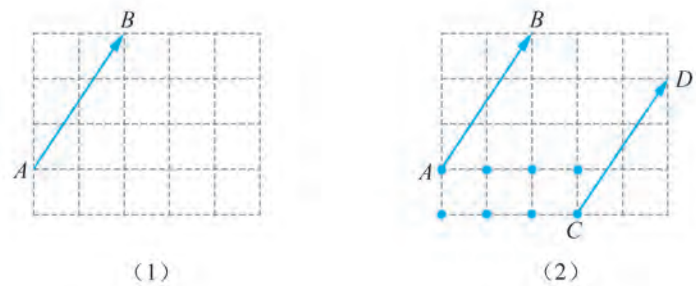


图 9-1-8

分析 与$\overrightarrow{AB}$相等的向量应当满足“等长且同向”，首先要确定这些向量的起点. 在方格纸的格点中，除去点 A 外，符合题意的起点还有 7 个(图 9-1-8(2)). 与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量除了与$\overrightarrow{AB}$方向相同的向量外，还有与$\overrightarrow{AB}$方向相反的向量.

解 当向量$\overrightarrow{CD}$的起点 C 是图 9-1-8(2)中所圈的格点时，可以作出与$\overrightarrow{AB}$相等的向量. 这样的格点共有 8 个，除去点 A 外，还有 7 个，所以共有 7 个向量与$\overrightarrow{AB}$相等.

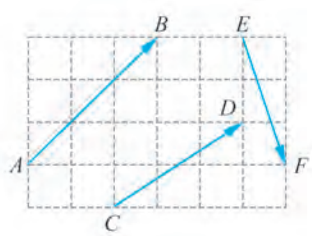
与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量(除$\overrightarrow{AB}$外)共有 $7\times2+1=15$(个).

练 习

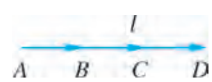
1. 在下列命题中，哪些是正确的？
(1) 若两个向量相等，则它们的起点和终点分别重合；
(2) 模相等的两个平行向量是相同的向量；
(3) 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；
(4) 两个相同的向量的模相等；
(5) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $0°$.

2. 设点 O 是正三角形 ABC 的中心，则向量$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{CO}$是(　　).
A. 相同的向量　　B. 模相等的向量
C. 共线向量　　D. 共起点的向量

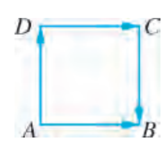
3. 写出图中所示各向量的长度(小正方形的边长为 1).



(第 3 题)



(第 4 题)



(第 5 题)

4. 如图，在直线 l 上，找出与$\overrightarrow{AB}$平行的向量.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，找出与$\overrightarrow{AB}$垂直的向量.

习题 9.1

感受 · 理解

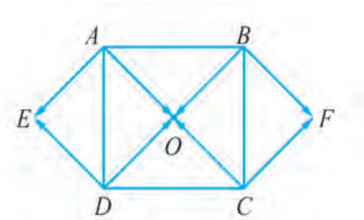
1. 已知点 O 是正方形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，在以点 O,A,B,C,D 这 5 点中任意一点为起点，另一点为终点的所有向量中，写出：

(1) 与$\overrightarrow{BC}$相等的向量；

(2) 与$\overrightarrow{OB}$长度相等的向量；

(3) 与$\overrightarrow{DA}$共线的向量.

2. 长度相等的向量是相同的向量吗？相同的向量是共线向量吗？平行于同一个非零向量的两个向量是共线向量吗？请举例说明.



（第 3 题）

3. 如图，点 O 为正方形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，四边形 $OAED$，$OCFB$ 都是正方形. 在图中所示的向量中：

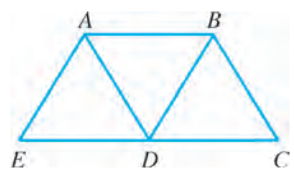
(1) 分别写出与$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$相等的向量；

(2) 写出与$\overrightarrow{AO}$共线的向量；

(3) 写出与$\overrightarrow{AO}$的模相等的向量；

(4) 判断向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$是否相等；

(5) 写出与$\overrightarrow{AO}$垂直的向量.



（第 4 题）

4. 如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABDE$ 都是平行四边形.

试回答下列问题：

(1) 与$\overrightarrow{AB}$相等的向量是________；

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}|=3$，则 $|\overrightarrow{EC}|=$ ________.

5. 下列命题中，正确的是________.（填序号）

① 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；　② 若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$；

③ 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；　④ 若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$.

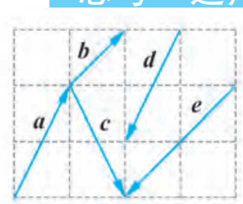
6. 判断下列说法是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$；

(2) 单位向量均相等；

(3) 任一向量与它的相反向量不相等.

思考 · 运用



（第 7 题）

7. 在如图所示的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$ 中（小正方形的边长为 1），是否存在：

(1) 共线向量？

(2) 相反向量？

(3) 相同的向量？

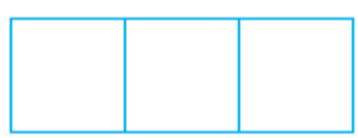
(4) 模相等的向量？

若存在，分别写出这些向量.

8. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

探究 · 拓展

9. 如图，以 1×3 方格纸中的格点为起点和终点的所有非零向量中，有多少种大小不同的模？有多少种不同的方向？


（第 9 题）

9.2 向量运算

把木块放置在光滑的斜面上，重力 $\boldsymbol{G}$ 与斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 的合力是一个沿斜面向下的力，因而，木块向下滑动(图 9－2－1(1)). 如果斜面并不光滑，斜面就对木块产生摩擦力 $\boldsymbol{f}$. 这时，木块的运动状态就取决于 $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{f}$ 的合力(图 9－2－1(2)).

图 9－2－1

从运算角度看，求几个力的合力就可以看作是对几个向量实施某种运算的结果. 换句话说，向量与实数一样也能进行运算. 那么，

● 向量如何进行运算呢?

9.2.1 向量的加减法

类比实数的加法，我们联想到，物理中位移的合成，以及速度的合成和力的合成，都可以看成向量的加法.

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(图 9－2－2)，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{OB}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

求两个向量和的运算叫作**向量的加法**.

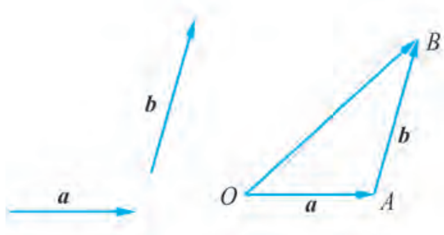


图 9－2－2

如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，怎样作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 呢?

根据向量加法的定义得出的求向量和的方法，称为**向量加法的三角形法则**.

任一向量与其相反向量的和是零向量，即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

对于零向量和任一向量 $\boldsymbol{a}$，我们规定

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

向量的加法满足交换律、结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

下面我们通过作图方式加以验证.

如图 9-2-3，作▱$OABC$，使$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$.

因为 $$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

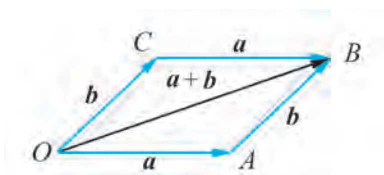


图 9-2-3

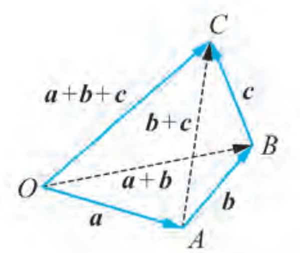


图 9-2-4

图 9-2-3 还表明，对于任意两个不共线的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，我们还可以通过作平行四边形来求这两个向量的和. 分别作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OC 为邻边作▱$OABC$，则以 O 为起点的对角线表示的向量$\overrightarrow{OB}$就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 我们把这种方法叫作**向量加法的平行四边形法则**.

同样，根据图 9-2-4 可以验证，向量的加法也满足结合律.

思 考

如果平面内有 n 个向量依次首尾连接组成一条封闭折线，这 n 个向量的和是什么？

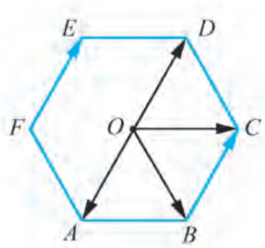


图 9-2-5

例 1 如图 9-2-5，O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，作出下列向量：

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$；　(2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$；　(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}$.

解 (1) 因为四边形 $OABC$ 是以 OA，OC 为邻边的平行四边形，OB 为其对角线，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.

(2) 因为$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$方向相同且长度相等，所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$是相同的向量，从而$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同，长度为$\overrightarrow{BC}$长度的 2 倍，因此，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$可用$\overrightarrow{AD}$表示，即 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

(3) 因为$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{FE}$是一对相反向量，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\boldsymbol{0}$.

例 2 在长江南岸某渡口处，江水以 12.5 km/h 的速度向东流，渡船在静水中的速度为 25 km/h. 渡船要垂直地渡过长江，其航向应如何确定？

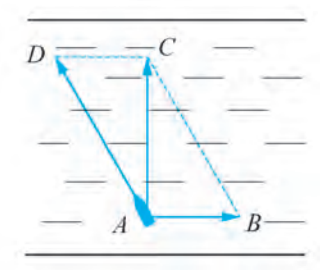


图 9-2-6

分析 如图 9-2-6，渡船的实际速度$\overrightarrow{AC}$、船的静水速度$\overrightarrow{AD}$与水速$\overrightarrow{AB}$应满足$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

解 如图 9-2-6，设$\overrightarrow{AB}$表示水流的速度，$\overrightarrow{AD}$表示渡船在静水中的速度，$\overrightarrow{AC}$表示渡船实际垂直过江的速度.

因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，因为

$$\angle ACD=90^\circ,$$

$$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=12.5,$$

$$|\overrightarrow{AD}|=25,$$

所以 $\angle CAD=30^\circ$.

答 渡船要垂直地渡过长江，其航向应为北偏西 30°.

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

（第 1 题）

2. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

（第 2 题）

3. 已知点 O 是▱$ABCD$ 的两条对角线的交点，则下面结论中正确的是（　　）.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{BD}$　　D. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$

4. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$；

(3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}$.

5. 在$\triangle ABC$ 中，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\neq\mathbf{0}$.

6. 判断下列说法是否正确：

(1) 设点 O 为四边形 $ABCD$ 所在平面内一点，若 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$，则

四边形 $ABCD$ 为平行四边形； ( )

(2) 在矩形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$. ( )

与实数的减法类似，我们定义，向量的减法是向量加法的逆运算.

若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 求两个向量差的运算，叫作**向量的减法**.

根据向量减法的定义和向量加法的三角形法则，我们可以得到向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图方法.

例 3 如图 9-2-7(1)，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

如果 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，怎样作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 呢？

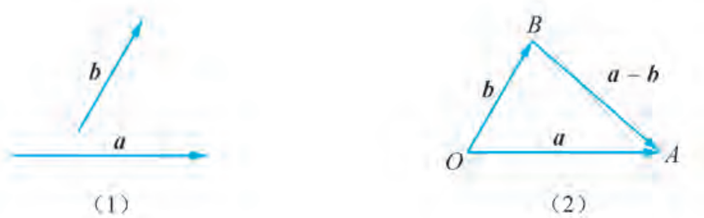


图 9-2-7

作法 如图 9-2-7(2)，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.

因为 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，即 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，

所以
$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

这就是说，当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 起点相同时，从 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由向量加法的结合律可知，

$$[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a},$$

所以
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这里，我们用到了向量减法的定义.

这表明：减去一个向量等于加上这个向量的相反向量.

思 考

你能画图说明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 吗？

例 4 如图 9-2-8，点 O 是 $\square ABCD$ 的两条对角线的交点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，求证：$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$.

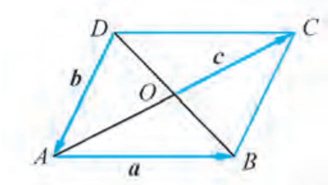


图 9-2-8

分析 要证 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，只要证 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}$.

证明 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以
$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}.$$

因为
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

所以 $$b+c=\overrightarrow{OA}+a,$$

即 $b+c-a=\overrightarrow{OA}$.

本题还可以通过

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$$

来证明，或者从

$$c-a=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$$

来证明.

你还可以用其他方法来证明吗？

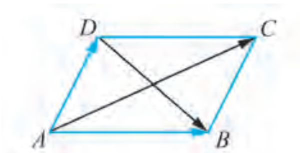
思　考

任意一个非零向量是否一定可以表示为两个不共线的向量的和？

练　习

1. 如图，已知向量 a，b，求作向量 $a-b$.

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，用 a，b 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$.
3. 已知 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}$，试判断下列结论是否正确：
   (1) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}$；　(2) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OE}$；
   (3) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OM}$；　(4) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{MO}$.
4. 化简：
   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AD}$；　(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$.
5. 若非零向量 a 和 b 互为相反向量，则下列说法中错误的是（　　）.
   A. $a\parallel b$　B. $a\neq b$　C. $|a|\neq|b|$　D. $b=-a$
6. 在△ABC 中，D 是 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AB}=c$，$\overrightarrow{AC}=b$，$\overrightarrow{BD}=a$，$\overrightarrow{AD}=d$，则下列结论中成立的是________.（填序号）
   ① $d-a=b$；② $d-a=-b$；③ $d-a=c$；④ $d-a=-c$.

习题 9.2(1)

感受・理解

1. 设 A，B，C 是平面内任意三点，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.
2. 当向量 a，b 满足什么条件时，$|a+b|=|a|+|b|$ 成立？
3. 已知 a，b 是两个不共线的向量.
   (1) 求作向量 $a+b$ 和 $a-b$；
   (2) 向量 a，b 满足什么位置关系时，$|a+b|=|a-b|$？（不要求证明）

4. 一质点从点 A 出发，先向北偏东 30°方向运动了 4 cm 到达点 B，再从点 B 向正西方向运动了 3 cm 到达点 C，又从点 C 向西南方向运动了 4 cm 到达点 D，试画出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 以及$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

5. 在正三角形 ABC 中，下列各等式成立的是________.（填序号）

① $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|$；

② $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$；

③ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$；

④ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}|$.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东走 3 n mile”，向量 $\boldsymbol{b}$ 表示“向北偏东 30°走 3 n mile”，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示什么？

7. 化简下列各式：

（1）$-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CO}$；

（2）$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})$.

8. 在$\triangle ABC$ 中，若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$\angle BAC=$________.

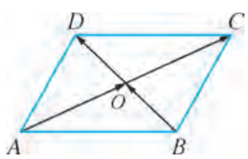
9. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，则下列哪几个等式是成立的？

（1）$|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$；

（2）$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$；

（3）$|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|$；

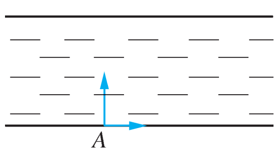
（4）$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}|^2$.



（第 10 题）

10. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

思考 • 运用



（第 11 题）

11. 如图，一艘船从 A 点出发，以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶，同时，河水的流速为2 km/h，求船实际航行速度的大小与方向（用与水流方向的夹角表示）.

12. 飞机从甲地按南偏东 10°的方向飞行 2 000 km 到达乙地，再从乙地按北偏西 70°的方向飞行 2 000 km 到达丙地，那么丙地在甲地的什么方向？丙地离甲地多远？

13. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

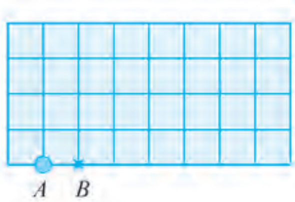
14. 证明：当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，

（1）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（2）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

探究 • 拓展

15. 已知 P 为四边形 $ABCD$ 所在平面内一点，且向量$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PD}$满足等式$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$. 试根据题意作图，观察四边形 $ABCD$ 的形状. 你发现四边形 $ABCD$ 有什么特殊的性质？并说明你的依据.



（第 16 题）

16. 如图，中国象棋的半个棋盘上有一只“马”，开始下棋时，它位于点 A，这只“马”第一步有几种可能的走法？试在图中画出来. 它能否从点 A 走到与它相邻的点 B？它能否从任一交叉点出发，走到棋盘上的其他任何一个交叉点？

9.2.2 向量的数乘

质点从点 O 出发做匀速直线运动，如果经过 1 s 的位移对应的向量用 $\boldsymbol{a}$ 表示，那么，

● 在同方向上经过 3 s 的位移所对应的向量应该怎样表示呢？

如图 9-2-9，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$. 与实数的乘法类似，我们把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记作 $3\boldsymbol{a}$，即 $\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}$. 由向量的几何意义可知，$3\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 3 倍，即 $|3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$，$3\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

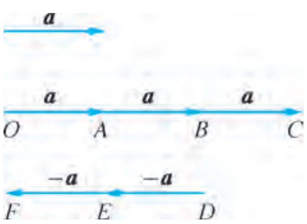


图 9-2-9

同样，由图 9-2-9 可知，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=2(-\boldsymbol{a})$. 显然 $2(-\boldsymbol{a})$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 2 倍，即 $|2(-\boldsymbol{a})|=2|\boldsymbol{a}|$，$2(-\boldsymbol{a})$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，于是 $2(-\boldsymbol{a})=-2\boldsymbol{a}$.

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算，叫作**向量的数乘**.

特别地，当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

向量数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何意义是：当 $\lambda>0$ 时，把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的相同方向放大或缩小；当 $\lambda<0$ 时，把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的相反方向放大或缩小（图 9-2-10）.

图 9-2-10

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，λ，μ 为实数，可以验证向量的数乘满足下面的运算律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

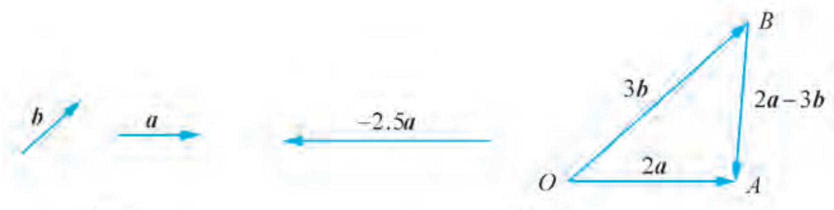
(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法和数乘统称为**向量的线性运算**.

例 1 如图9-2-11(1)，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，求作向量 $-2.5\boldsymbol{a}$ 和向量 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

作法 如图 9－2－11(2)所示.



(1) (2)

图 9－2－11

向量$-2.5\boldsymbol{a}$ 的长度是$\boldsymbol{a}$ 的长度的 2.5 倍,方向与$\boldsymbol{a}$ 的方向相反.以 O 为起点,分别作 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{b}$, 连接 BA,则

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}.$$

例 2 计算:

(1) $3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$;

(2) $2(2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})-3(-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$.

解 (1) 原式 $=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$.

(2) 原式 $=4\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}+9\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}=13\boldsymbol{a}$.

思 考

向量的数乘与实数的乘法有哪些相同点和不同点?

练 习

1. 如图,已知向量$\boldsymbol{a}$,求作向量$2\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{a}$.

(1) (2)

(第 1 题)

2. 计算:

(1) $3(-4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$; (2) $6(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

3. 如图,已知向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,求作向量$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

(1) (2)

(第 3 题)

(第 4 题)

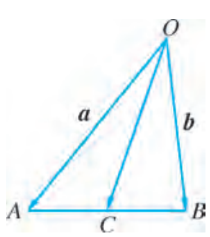
4. 如图,已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求作向量:

(1) $-2\boldsymbol{a}$; (2) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; (3) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

5. 已知$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$是两个不共线的向量,向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2$, 求$4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$(用$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$表示).

6. 已知非零向量$\boldsymbol{a}$,求向量$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的模.

7. 如图,在△OAB 中,C 是 AB 的中点. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 试用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{OC}$.



(第 7 题)

例 3 如图 9-2-12，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，求证：$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线，并用 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.

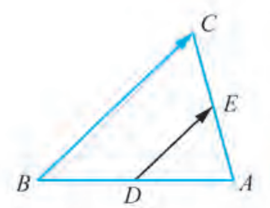


图 9-2-12

证明 因为 D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $$DE \parallel BC,$$

即 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线.

又 $DE = \dfrac{1}{2}BC$，且 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向，

所以 $$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda \in \mathbf{R}$），则称向量 $\boldsymbol{b}$ 可以用非零向量 $\boldsymbol{a}$ 线性表示.

从上面的例 3 中我们看到，如果两个向量共线，那么其中的一个向量可以由另一个（非零）向量的数乘来表示，即线性表示.

一般地，对于两个向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$，有如下的**向量共线定理**：

> 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，如果有一个实数 λ，使
> $$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a},$$
> 那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量；反之，如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量，那么有且只有一个实数 λ，使
> $$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}.$$

证明 根据向量数乘的定义可知，对于向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量.

反过来，如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ 是共线向量，那么

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，令 $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，令 $\lambda = -\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；

当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时，令 $\lambda = 0$.

从而有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

假设有两个实数 λ，λ'，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} = \lambda'\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = (\lambda - \lambda')\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

$$|\lambda - \lambda'||\boldsymbol{a}| = 0.$$

因为 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$，所以 $\lambda - \lambda' = 0$，

即 $$\lambda = \lambda'.$$

故有且仅有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

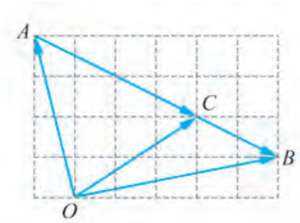


图 9-2-13

例 4 如图 9-2-13，已知 O 为直线 AB 外一点，点 C 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$（$\lambda \neq -1$）. 求证：$\overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$.

为了方便起见，有时将 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$ 写成 $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$ $(\lambda\neq 0)$.

分析 将已知条件中的 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}$ 用$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 来表示，进而得出$\overrightarrow{OC}$用$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$表示的式子.

证明 因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，

又$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，所以$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，

即
$$(1+\lambda)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}.$$

又因为 $\lambda\neq-1$，即 $1+\lambda\neq 0$，

所以
$$\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

当$\lambda=1$时，你能得到什么结论？

思 考

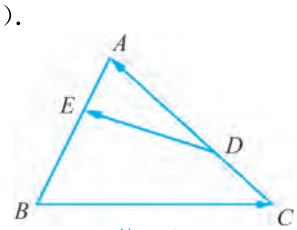
上例的结论可写成如下形式：$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$，这表明：起点为 O，终点为直线 AB 上一点 C 的向量$\overrightarrow{OC}$可以用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示. 那么两个不共线的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$可以表示平面内任一向量吗？

练 习

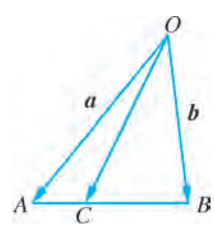
1. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，求证：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线.
2. 设 λ 为实数，已知 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 2，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$，求 λ 的值.
3. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$，求证：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量.
4. 如图，已知点 C 是直线 AB 上一点，且 $AB=2BC$，试用$\overrightarrow{AB}$分别表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$.

（第 4 题）

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{CD}{DA}=\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$，记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，求证：$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在$\triangle OAB$ 中，C 是 AB 上一点，且 $CB=2AC$. 设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{OC}$.
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 是实数，求证：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线.

习题 9.2(2)

感受·理解

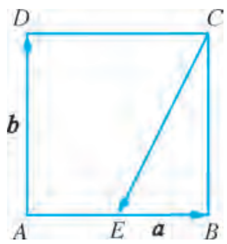
1. 计算：

   (1) $3(5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-2(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

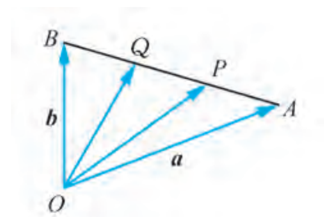
   (2) $4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})-2(-3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c})$.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，且 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，求向量 $\boldsymbol{x}$.
3. 已知 D，E，F 分别为$\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 的中点，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=$

$\boldsymbol{b}$. 给出下列五个命题：① $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；② $\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$；③ $\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$；④ $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$；⑤ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$. 其中正确的命题是________.（填序号）

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，若 E 是 AB 的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{CE}$.



（第 4 题）

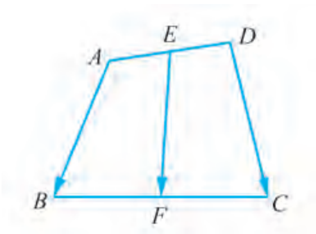


（第 5 题）

5. 如图，点 P，Q 是线段 AB 的三等分点，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$.

6. 已知 $\overrightarrow{MP}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，求证：$M$，$P$，$Q$ 三点共线.

7. 如图，在任意四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AD，BC 的中点.
求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.



（第 7 题）

8. 设 λ 为实数，已知点 P 在直线 MN 上，且 $|\overrightarrow{MP}|=2|\overrightarrow{PN}|$，$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$，求 λ 的值.

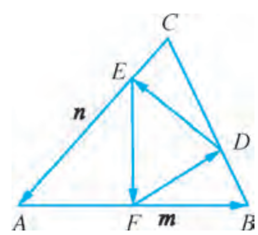
思考 · 运用

9. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，你能判断 A，B，C 三点之间的位置关系吗？为什么？

10. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的向量，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

11. 设 a，b 均为实数，已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，$a+b=1$，求证：$A$，$B$，$P$ 三点共线.

12. 如图，D，E，F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上的点，且 $AF=\dfrac{1}{2}AB$，$BD=\dfrac{1}{3}BC$，$CE=\dfrac{1}{4}CA$. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{n}$，试用 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 分别表示$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$.



（第 12 题）

探究 · 拓展

13. 证明：如果存在不全为 0 的实数 s，t，使得 $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量；如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $s=t=0$.

14. 在第 5 题中，当点 P，Q 三等分线段 AB 时，有 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 如果点 A_1，A_2，…，A_{n-1} 是 AB 的 $n(n\geqslant 3)$ 等分点，你能得到什么结论？请证明你的结论.

9.2.3 向量的数量积

前面我们学习了向量的线性运算：加法、减法和数乘，它们运算的结果还是一个向量. 那么，

● 向量与向量能否"相乘"呢？

先看一个实际问题：一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下发生了位移 $\boldsymbol{s}$，那么该力对此物体所做的功为多少？

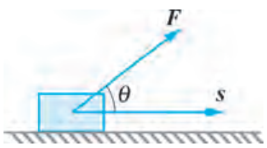


图 9－2－14

我们知道，如果力 $\boldsymbol{F}$ 与物体位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ（图 9－2－14），那么 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 应为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

如果把功 W 看成两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的某种运算结果，那么这个结果是一个数量，它不仅与两个向量的长度有关，而且还与这两个向量的夹角有关. 这是一种新的运算.

> 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角是 θ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（scalar product），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即
>
> $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$
>
> 我们规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

数量积亦称为"内积"或"点积".

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 不是零向量，而 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 是零向量.

可见，前面提到的力所做的功 W，就是力 $\boldsymbol{F}$ 与在其作用下物体产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

根据向量数量积的定义，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，可以由

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

求得.

根据定义，还可以得到

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\text{ 是两个非零向量}),$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\text{ 或 }|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 可以简写为 $\boldsymbol{a}^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，分别在下列条件下求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

（1）$\theta=135^\circ$；（2）$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

解 （1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\times3\times\cos135^\circ=-3\sqrt{2}$.

（2）当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$\theta=0^\circ$ 或 180°.

若 $\theta=0°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=6$;

若 $\theta=180°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=-6$.

(3) 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,如图 9-2-15,$\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$,过点 A 作 $\overrightarrow{OB}$ 所在直线的垂线,垂足为点 A_1. 我们将上述由向量 $\boldsymbol{a}$ 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影,向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影向量**(projection vector).

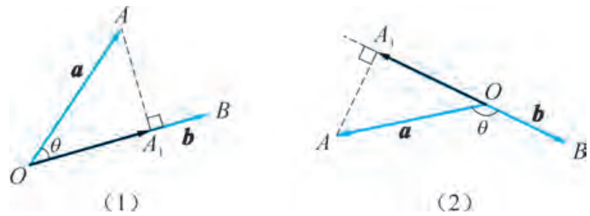


图 9-2-15

可以看到,通过投影,由向量 $\boldsymbol{a}$ 得到了与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线和垂直的两个向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 和 $\overrightarrow{A_1A}$,三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OA_1}$ 和 $\overrightarrow{A_1A}$ 构成一个直角三角形. 下面我们考察投影向量与向量的数量积之间的关系.

设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,由图 9-2-15 可知:

$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的单位向量.

当 θ 为锐角时,$\overrightarrow{OA_1}=|\overrightarrow{OA_1}|\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;

当 θ 为钝角时,$\overrightarrow{OA_1}=-|\overrightarrow{OA_1}|\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

可以验证,当 $\theta=0$,$\dfrac{\pi}{2}$,π 时,$\overrightarrow{OA_1}=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 均成立.

综上,对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$$(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

因为
$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{b}|}$$
$$=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\cdot\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\boldsymbol{b}.$$

因此,向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和实数 λ,向量的数量积满足下列运算律:

向量的数量积满足结合律吗?

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

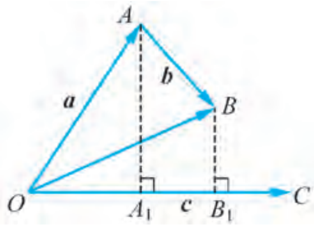


图 9-2-16

由向量的数量积的定义不难验证运算律(1)(2)的正确性.

对运算律(3),我们用投影向量的概念进行证明. 如图 9-2-16,任取一点 O,作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},$$

则
$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

设 $AA_1\perp OC$ 于 A_1, $BB_1\perp OC$ 于 B_1,则向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量分别为 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ 和 $\overrightarrow{OB_1}$. 当点 O, A_1, B_1, C 按从左到右的顺序排列时(图 9-2-16),有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=\overrightarrow{OB_1}\cdot\boldsymbol{c}=|\overrightarrow{OB_1}||\boldsymbol{c}|=(|\overrightarrow{OA_1}|+|\overrightarrow{A_1B_1}|)|\boldsymbol{c}|\\&=|\overrightarrow{OA_1}||\boldsymbol{c}|+|\overrightarrow{A_1B_1}||\boldsymbol{c}|=\overrightarrow{OA_1}\cdot\boldsymbol{c}+\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$

对 O, A_1, B_1, C 的其他排列顺序,上式也成立.

例 2 已知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60°的两个单位向量, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$. 求证: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

分析 要证明两个非零向量垂直,只需证明它们的数量积为 0.

解 依题意,得 $\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=1$, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$.

因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\cdot(5\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)\\&=5\boldsymbol{e}_1^2-8\boldsymbol{e}_2^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=5-8+6\times\frac{1}{2}=0,\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

练 习

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$,分别根据下列所给 θ 的值,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$:

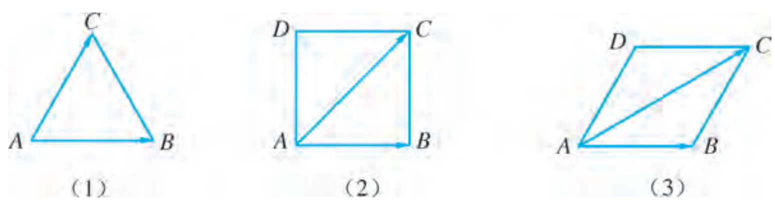
(1) $\theta=30^\circ$; (2) $\theta=45^\circ$; (3) $\theta=90^\circ$.

2. 分别根据下列条件,求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(1) 如图(1),在正三角形 ABC 中, $AB=1$;

(2) 如图(2),在正方形 $ABCD$ 中, $AB=1$;

(3) 如图(3),在菱形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $\angle BAD=60^\circ$.



(第 2 题)

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 60°,求 $|\boldsymbol{b}|$.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，当 θ 分别等于 $60°$，$135°$时，求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，并图示其意义.

6. 证明：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

7. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 $60°$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$； (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

8. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，试判断下列结论是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

习题 9.2(3)

感受·理解

1. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，分别根据下列所给 θ 的值求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $\theta=60°$； (2) $\theta=135°$； (3) $\theta=150°$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，求 $|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$，求$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2$.

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$的值.

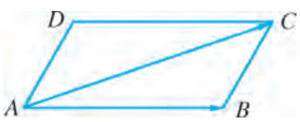
7. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $60°$的两个单位向量，$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

(1) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) 求证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

8. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

9. 证明：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$. 如何构造一个图形解释这个公式的几何意义？



(第 10 题)

10. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，$\angle BAD=60°$. 求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值； (2) $\cos\angle BAC$.

思考·运用

11. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$，求证：$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

12. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，且$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

13. 设 k 为实数，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 垂直？

14. 设 M，P，Q 为平面内三点，求证 $|\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}|\leqslant|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{MQ}|$，并确定等号成立的条件.

探究·拓展

15. 在△ABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，判断△$ABC$ 的形状.

9.3 向量基本定理及坐标表示

木块放置在斜面上，设 $\boldsymbol{F}_1$ 是垂直于斜面向下的力，$\boldsymbol{F}_2$ 是平行于斜面向下的力，则 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$（图 9－3－1），即重力 $\boldsymbol{G}$ 分解为力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，从而 $\boldsymbol{G}$ 可以用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 来表示. 这里，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 是不共线的两个力.

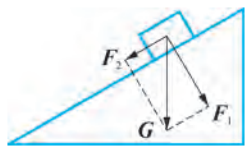


图 9－3－1

那么，

● 平面内任一向量是否可以用两个不共线的向量来表示呢?

9.3.1 平面向量基本定理

我们知道，设 $\boldsymbol{e}$ 为非零向量，对于任意实数 λ，$\lambda\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{e}$ 共线的向量. 反过来，对于任一与 $\boldsymbol{e}$ 共线的向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$.

如图 9－3－2，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，对于任意实数 λ_1，λ_2，根据向量的运算法则，我们很容易作出平面内一个新的向量 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 反过来，

● 对于平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，是否存在实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 成立呢?

如图 9－3－3，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$. 过点 C 作平行于 OB 的直线，交直线 OA 于点 M；过点 C 作平行于 OA 的直线，交直线 OB 于点 N，则有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

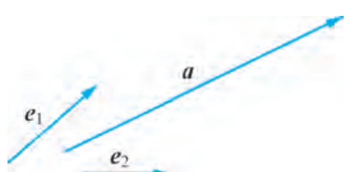


图 9－3－2

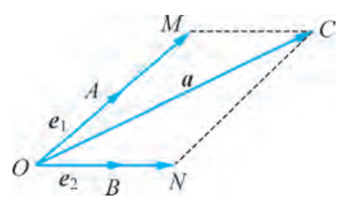


图 9－3－3

因为

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},$$

所以

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

于是，我们有下面的定理：

平面向量基本定理 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

我们把两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫作这个平面的一组**基底**(base).

由平面向量基本定理知，平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一组基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示成 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式. 我们称 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解. 当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 所在直线互相垂直时，这种分解也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**正交分解**(orthogonal decomposition).

思 考

平面向量基本定理与前面所学的向量共线定理，在内容和表述形式上有什么区别和联系？

例 1 如图 9－3－4，▱$ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 M，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用基底 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

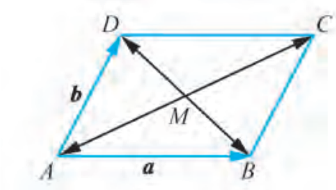


图 9－3－4

分析 利用关系式 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 来求解.

解 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

因为平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

从而 $$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

例 2 如图 9-3-5,质量为 m 的物体静止地放在斜面上,斜面与水平面的夹角为 θ,求斜面对物体的摩擦力 $\boldsymbol{f}$.

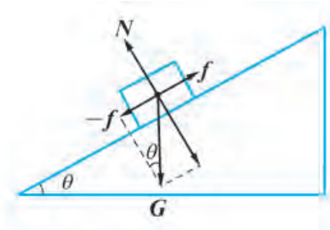


图 9-3-5

解 物体受到三个力:

重力 $\boldsymbol{G}$(方向竖直向下,大小为 mg N),斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$(方向与斜面垂直向上,大小记为 p N),摩擦力 $\boldsymbol{f}$(方向与斜面平行向上,大小记为 f N).

因为物体静止,所以上述三个力的合力为零,即

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},$$

则
$$-\boldsymbol{f}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N},$$

所以
$$(-\boldsymbol{f})\cdot(-\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N})\cdot(-\boldsymbol{f})=\boldsymbol{G}\cdot(-\boldsymbol{f})$$
$$=|\boldsymbol{G}||-\boldsymbol{f}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

即
$$|-\boldsymbol{f}|^2=|\boldsymbol{G}||-\boldsymbol{f}|\sin\theta,$$

从而
$$|-\boldsymbol{f}|=|\boldsymbol{G}|\sin\theta=mg\sin\theta\ (\text{N}).$$

答 斜面对于物体的摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为 $mg\sin\theta$ N,方向与斜面平行向上.

例 3 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内的一组基底,$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2$,求证:$A,B,D$ 三点共线.

分析 欲证 A,B,D 三点共线,只需证明共起点的两个向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线,即证明 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

证明 因为
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+(4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2)$$
$$=15\boldsymbol{e}_1-10\boldsymbol{e}_2=5(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB},$$

能否选择其他公共起点来证明?

所以 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线.

又因为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 有公共的起点 A,所以 A,B,D 三点共线.

练　习

（第 1 题）

1. 如图，已知向量 e_1，e_2，求作下列向量：

（1）$3e_1+2e_2$；　　（2）$2e_1-e_2$.

2. 若 e_1，e_2 是平面内的一组基底，则下面的四组向量中不能作为一组基底的是（　　）.

A. e_1+e_2 和 e_1-e_2　　B. $3e_1-2e_2$ 和 $4e_2-6e_1$

C. e_1+3e_2 和 e_2+3e_1　　D. e_2 和 e_1+e_2

3. 设 a，b 是两个不共线的向量，若实数 λ，μ 满足 $3\lambda a+(10-\mu)b=2\lambda b+(2\mu+1)a$，则 $\lambda=$________，$\mu=$________.

4. 设 k 为实数，若 e_1，e_2 是两个不共线的向量，满足 e_1+ke_2 与 ke_1+e_2 共线，则 $k=$________.

习题 9.3(1)

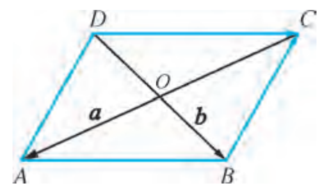
感受・理解

1. 如图，已知向量 e_1，e_2，求作下列向量：

（1）$-2e_1+3e_2$；

（2）$2.5e_1+1.5e_2$.

（第 1 题）



（第 2 题）

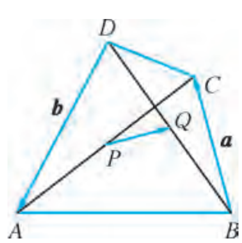
2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，试用基底 a，b 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{DC}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，用向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$.

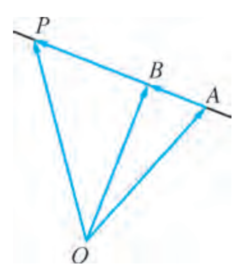
思考・运用

4. 设 e_1，e_2 是平面内的一组基底，$\overrightarrow{AB}=3e_1+2e_2$，$\overrightarrow{AC}=4e_1-e_2$，$\overrightarrow{AD}=5e_1-4e_2$，求证：$B$，$C$，$D$ 三点共线.

5. 如图，P，Q 分别是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的中点，设 $\overrightarrow{BC}=a$，$\overrightarrow{DA}=b$，且 a，b 不是共线向量，试用基底 a，b 表示向量 $\overrightarrow{PQ}$.



（第 5 题）



（第 6 题）

探究・拓展

6. 如图，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t\in\mathbf{R}$），试用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$.

9.3.2 向量坐标表示与运算

在平面直角坐标系内，任意一点 P 都可以用有序实数对 $(x,\ y)$ 来表示，而点 P 唯一对应着以原点 O 为起点，P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$. 自然地，我们会想到，

● 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 也能用一对有序实数来表示吗?

1. 向量的坐标表示

如图 9－3－6，在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴正方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 作为基底，对于平面内的向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对有序实数 $(x,\ y)$，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 上的投影向量.

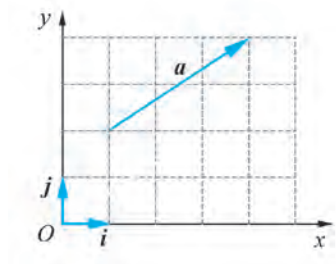


图 9－3－6

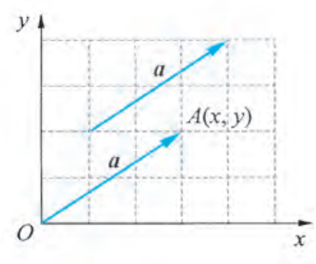


图 9－3－7

我们把有序实数对 $(x,\ y)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的(直角)坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(x,\ y).$$

如图 9－3－7，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，即有 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，则 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 $(x,\ y)$ 就是终点 A 的坐标；反过来，点 A 的坐标 $(x,\ y)$ 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

例 1 如图 9－3－8，已知 O 是坐标原点，点 A 在第一象限，$|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$，$\angle xOA=60^\circ$. 求向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

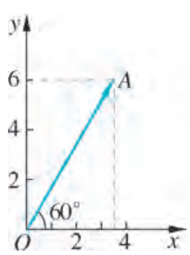


图 9－3－8

解 设点 $A(x,\ y)$，则

$$x=4\sqrt{3}\cos 60^\circ=2\sqrt{3},$$

$$y=4\sqrt{3}\sin 60^\circ=6,$$

即 $A(2\sqrt{3},\ 6)$，所以 $\overrightarrow{OA}=(2\sqrt{3},\ 6)$.

2. 向量线性运算的坐标表示

当向量用坐标表示时，向量的和、差以及向量数乘也都可以用相应的坐标来表示.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}\\&=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).\end{aligned}$$

同理得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),\ \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1).$$

于是,我们有

已知向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$ 和实数 λ,那么

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1).$$

如图 9-3-9,若 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)\\&=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).\end{aligned}$$

这就是说,**一个向量的坐标等于该向量终点的坐标减去起点的坐标**.

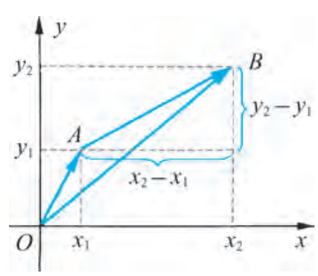


图 9-3-9

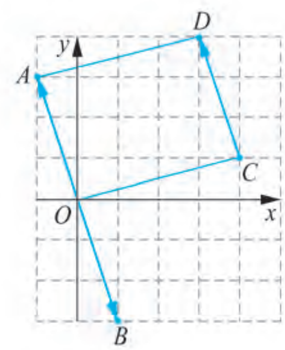


图 9-3-10

例 2 如图 9-3-10,已知 $A(-1,\ 3)$, $B(1,\ -3)$, $C(4,\ 1)$, $D(3,\ 4)$,求向量$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CD}$的坐标.

四边形$OCDA$是平行四边形吗?

解 $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 3)$, $\overrightarrow{OB}=(1,\ -3)$,

$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=(1,\ -3)$,

$\overrightarrow{CD}=(3,\ 4)-(4,\ 1)=(-1,\ 3)$.

例 3 用向量的坐标运算解 9.3.1 节的例 2.

解 如图 9-3-11,记方向垂直于斜面向下、大小为 1 N 的力为 $\boldsymbol{e}_1$,方向平行于斜面向下、大小为 1 N 的力为 $\boldsymbol{e}_2$. 以$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$为基底建立平

面直角坐标系，得 **N**，**f**，**G** 三个力的坐标分别为

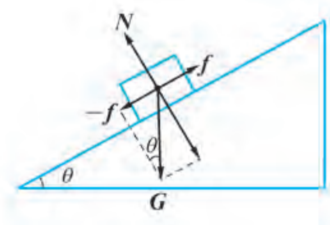


图 9-3-11

$$\boldsymbol{N}=(-p,\ 0),\ \boldsymbol{f}=(0,\ -f),\ \boldsymbol{G}=(mg\cos\theta,\ mg\sin\theta).$$

由 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$，得

$$(mg\cos\theta,\ mg\sin\theta)+(-p,\ 0)+(0,\ -f)=(0,\ 0),$$

从而有 $mg\sin\theta-f=0$，即 $f=mg\sin\theta$.

答 斜面对于物体的摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为 $mg\sin\theta$ N，方向与斜面平行向上.

例 4 已知 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，P 是直线 P_1P_2 上一点，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}(\lambda\neq-1)$，求点 P 的坐标.

解 设 $P(x,\ y)$，则

$$\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,\ y-y_1),$$

$$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,\ y_2-y).$$

由 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，得

$$(x-x_1,\ y-y_1)=\lambda(x_2-x,\ y_2-y),$$

于是

$$\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x),\\ y-y_1=\lambda(y_2-y).\end{cases}$$

因为 $\lambda\neq-1$，所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\[2mm] y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$$

这个公式叫作线段定比分点的坐标公式．试与 9.2.2 节的例 4 进行比较．

因此，点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

当 $\lambda=1$ 时，就得到线段 P_1P_2 的中点 $M(x,\ y)$ 的坐标公式

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\[2mm] y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$$

练 习

1. 若 $\boldsymbol{a}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，则

(1) $-\boldsymbol{a}=$ ________；　(2) $-\boldsymbol{b}=$ ________；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ ________；　(4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ ________；

(5) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=$ ________；　(6) $-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$ ________.

2. 在平面直角坐标系中，若 $A(-2,3)$，$B(3,2)$，则 $\overrightarrow{AB}=$ ________.

3. 已知点 $B(3,4)$，$\overrightarrow{AB}=(5,5)$，求点 A 的坐标.

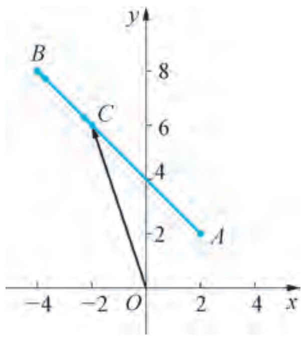
4. 已知 O 是坐标原点，点 A 在第二象限，且 $|\overrightarrow{OA}|=2$，$\angle xOA=150^\circ$，求 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

5. 在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(3,2)$，$B(-3,1)$，$C(1,-1)$，D 是 BC 的中点，求 $\overrightarrow{AD}$ 的坐标.

6. 已知作用在原点的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2,3)$，$\boldsymbol{F}_3=(-1,-4)$，求它们的合力的坐标.

7. 设 x，y 为实数，已知点 $A(1,2)$，$B(3,2)$，向量 $\boldsymbol{a}=(x+3, x-3y-4)$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等，求 x，y 的值.

8. 如图，已知 O 是坐标原点，$A(2,2)$，$B(-4,8)$，且 $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$，求 $\overrightarrow{OC}$ 的坐标.



(第 8 题)

习题 9.3(2)

感受·理解

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,4)$，$\boldsymbol{b}=(5,2)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 及其起点 A 的坐标，求终点 B 的坐标：

(1) $\boldsymbol{a}=(4,5)$，$A(2,3)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-3,-5)$，$A(3,7)$.

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(3,5)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-2)$，求 $\overrightarrow{AD}$ 的坐标.

4. 设 m，n 为实数，若 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{BC}=(m,n)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,4)$，$\overrightarrow{DA}=(-5,-3)$，求 m，n 的值.

5. 已知点 $A(-3,-2)$，$B(5,6)$，线段 AB 的中点坐标为________.

6. 已知点 $A(7,1)$，$B(-2,-4)$，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$，求点 C 的坐标.

7. 已知点 $O(0,0)$，$A(1,3)$，$B(-2,4)$，且 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$，求 A'，B' 两点及 $\overrightarrow{A'B'}$ 的坐标.

8. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，$D(6,2)$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

思考·运用

9. 已知点 $A(2,3)$，$B(5,4)$，$C(7,10)$，且点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，当 λ 为何值时，点 P

(1) 在直线 $y=x$ 上?

(2) 在第四象限?

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(7,-4)$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 作为基底表示 $\boldsymbol{c}$.

探究·拓展

11. 已知点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，O 是坐标原点，点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha+\beta=1$，求点 C 的坐标 x，y 满足的关系式.

3. 向量数量积的坐标表示

若两个向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，如何用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标来表示它们的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$?

设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量，则

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

因为 $$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$$

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1\boldsymbol{i}\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})+y_1\boldsymbol{j}\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

由此可知，两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

特别地，设 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，则 $\boldsymbol{a}^2=x^2+y^2$，即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

思 考

对于平面内两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，试用向量方法推导两点间的距离公式

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，它们的夹角为 θ，由向量数量积的定义，可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

特别地，

若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$；
若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -2)$，求 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

解 因为 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+(-1)\times(-2)=8,$$

$$\boldsymbol{a}^2=2^2+(-1)^2=5,$$

$$\boldsymbol{b}^2=3^2+(-2)^2=13,$$

所以 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2$

$=3\times5-7\times8+2\times13=-15.$

例 2 已知点 $A(2,3)$，$B(4,-1)$，$C(-2,1)$，求：

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值；

(2) $\angle ACB$ 的大小；

(3) 点 A 到直线 BC 的距离.

解 依题意，得 $\overrightarrow{CA}=(2,3)-(-2,1)=(4,2)$，

$\overrightarrow{CB}=(4,-1)-(-2,1)=(6,-2).$

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4\times6+2\times(-2)=20.$

(2) 因为 $\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{20}{\sqrt{20}\times\sqrt{40}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $$\angle ACB=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 点 A 到直线 BC 的距离为

$$d=|\overrightarrow{CA}|\sin\angle ACB=\sqrt{20}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}.$$

你还有别的方法来求点 A 到直线 BC 的距离吗？

例 3 设 k 为实数，已知直角三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，求 k 的值.

分析 题中未明确哪个角是直角，需分类讨论.

解 若 $\angle A=90^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，于是

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+3\times k=0,$$

解得 $$k=-\frac{2}{3};$$

若 $\angle B=90^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，又

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3),$$

于是 $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-1)+3\times(k-3)=0,$$

解得 $$k=\frac{11}{3};$$

若 $\angle C=90^\circ$，则 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，

于是 $$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-1)+k(k-3)=0,$$

解得 $$k=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

综上，所求 k 的值为 $-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{11}{3}$ 或 $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

练 习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(3, -2)$，$\boldsymbol{c}=(-2, 1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2, -8)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-8, 16)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
3. 求下面各组中两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：
   (1) $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3}, 2)$；
   (2) $\boldsymbol{a}=(1, 1)$，$\boldsymbol{b}=(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(4, -2)$，$\boldsymbol{b}=(6, -1)$，求：
   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$；(3) $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.
5. 已知点 $A(2, 1)$，$B(4, 2)$，$C(0, 1)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为________.
6. 已知点 $A(-2, 1)$，$B(6, -3)$，$C(0, 5)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3, 4)$，求与向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标.
8. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，且相互不共线，有下列命题：
   ① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；
   ② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；
   ③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直；
   ④ $(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-16|\boldsymbol{b}|^2$.
   其中，是真命题的有(　　).
   A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ②④

习题 9.3(3)

感受 · 理解

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}, \sqrt{5})$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{b}|=2$，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.
2. 已知点 $A(0, 1)$，$B(6, 4)$，$C(4, 8)$，$D(-2, 5)$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，求 a_1，a_2，b_1，b_2 满足的关系式.
4. 已知 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(-1, 8)$，$\overrightarrow{OB}=(-4, 1)$，$\overrightarrow{OC}=(1, 3)$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.
5. 已知点 $A(-3, 5)$，$B(1, 10)$，$C(2, 1)$，求：
   (1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值；
   (2) $\angle ACB$ 的大小；
   (3) 点 A 到直线 BC 的距离.
6. 已知点 $A(1, 0)$，$B(0, 1)$，$C(2, 5)$，求：
   (1) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 的模；
   (2) $\cos\angle BAC$.
7. 设 $\boldsymbol{a}=(x, 3)$，$\boldsymbol{b}=(2, -1)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，求 x 的取值范围.

思考 · 运用

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(-3, 2)$.
   (1) 求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；
   (2) 当 k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 垂直？

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(6,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,k)$，当 k 为何值时，

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$？

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角？

10. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，求：

(1) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

探究・拓展

11. 对于任意的 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，试用向量方法证明不等式

$$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos 75°,\sin 75°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 15°,\sin 15°)$，试分别计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 及 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$. 比较两次计算结果，你能发现什么？

9.3.3 向量平行的坐标表示

向量及其运算的坐标表示，使我们能用代数方法研究几何问题. 前面已经学习了两个互相垂直的向量的坐标之间的关系，那么，

● 两个平行向量的坐标之间有怎样的关系？

考察两个向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$.

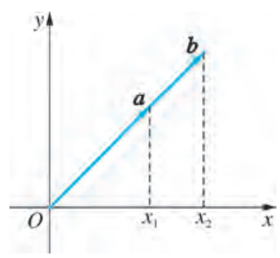


图 9－3－12

由图 9－3－12 可知，当 x_1，x_2，y_1，y_2 均不为 0 时，

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2},$$

即

$$x_1y_2-x_2y_1=0.$$

一般地，

> 设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)(\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0})$，则
>
> $$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0.$$

当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时，由于 $\mathbf{0}$ 与任意向量平行，故 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 恒成立.

证明 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，

因为 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，所以 x_1，y_1 不全为 0. 不妨假设 $x_1\neq 0$.

(1) 如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，那么存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，

即 $$(x_2, y_2)=\lambda(x_1, y_1)=(\lambda x_1, \lambda y_1),$$

所以 $$\begin{cases}x_2=\lambda x_1,\\ y_2=\lambda y_1.\end{cases}$$

故 $$x_1y_2-x_2y_1=x_1(\lambda y_1)-(\lambda x_1)y_1=0.$$

(2) 反之，如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$，

那么，由 $x_1\neq 0$，可得 $y_2=\dfrac{x_2}{x_1}y_1$.

所以 $(x_2, y_2)=\left(x_2, \dfrac{x_2}{x_1}y_1\right)=\dfrac{x_2}{x_1}(x_1, y_1)$.

令 $\lambda=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

故 $$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}.$$

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1, 0)$，$\boldsymbol{b}=(2, 1)$，当实数 k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 平行？并确定此时它们是同向的还是反向的.

解 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1, 0)-(2, 1)=(k-2, -1)$,

$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(1, 0)+3(2, 1)=(7, 3)$.

由向量平行的条件可得 $3(k-2)-(-1)\times 7=0$,

所以 $k=-\dfrac{1}{3}$. 此时，

$$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(-\frac{7}{3}, -1\right)=-\frac{1}{3}(7, 3)=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}).$$

因此，这两个向量是反向的.

例 2 已知点 O，A，B，C 的坐标分别为 $(0, 0)$，$(3, 4)$，$(-1, 2)$，$(1, 1)$，是否存在常数 t，使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 成立？

解 设存在常数 t，使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，

即 $$t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$$

成立，这表明向量 $\overrightarrow{AC}$ 应与 $\overrightarrow{OB}$ 平行.

因为 $\overrightarrow{AC}=(-2, -3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1, 2)$，

且 $$(-2)\times 2-(-1)\times(-3)\neq 0,$$

所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 不平行.

因此，不存在常数 t，使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 成立.

练 习

1. 与向量 $\boldsymbol{a}=(12, 5)$ 平行的单位向量的坐标为________.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1, -2)$，$\boldsymbol{b}=(2, 4)$，求证：$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.

3. 设 y 为实数，若向量 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,y)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 y 的值．
4. 已知$\square ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，求第四个顶点 D 的坐标．
5. 已知点 $A(0,-2)$，$B(2,2)$，$C(3,4)$，求证：A，B，C 三点共线．
6. 已知点 $A(-1,-2)$，$B(3,8)$.
   (1) 若$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$，求点 C 的坐标；
   (2) 若$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AD}$，求点 D 的坐标.

习题 9.3(4)

感受・理解

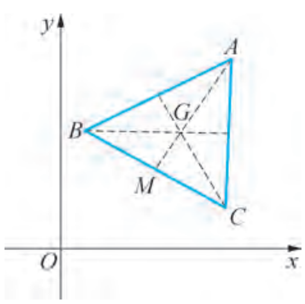
1. 当实数 x 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x,-6)$ 平行？
2. 设 x 为实数，已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,x)$，且$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)$，求 x 的值.
3. 已知梯形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(-1,2)$，$B(3,4)$，$D(2,1)$，且 $AB\parallel DC$，$AB=2CD$，求点 C 的坐标.
4. 设 a 为实数，已知点 $A(1,-3)$和 $B(8,-1)$，且点 $C(2a-1,a+2)$在直线 AB 上，求 a 的值．
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，当实数 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行？并确定此时它们是同向的还是反向的.
6. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(1,0)$，$B(4,3)$，$C(2,4)$，$D(0,2)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形．

思考・运用

7. 设 k 为实数，若向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$，当 k 为何值时，A，B，C 三点共线？
8. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，求证：向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不平行．
9. 已知直角梯形 $ABCD$ 的三个顶点分别为 $A(3,-2)$，$B(6,0)$，$C(7,5)$，求顶点 D 的坐标.

探究・拓展

10. 已知三角形的三条中线交于一点 G（也称为三角形的重心），且点 G 将每条中线分为 $2:1$ 的两段（如图，$AG:GM=2:1$）. 设$\triangle ABC$ 三个顶点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，求证：
    (1) 点 G 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$；
    (2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.



（第 10 题）

9.4 向量应用

向量是既有大小又有方向的量，它既有代数特征，又有几何特征. 通过向量可以实现代数问题与几何问题的互相转化，所以向量是数形结合的桥梁. 同时，向量也是解决许多物理问题的有力工具.

● 如何用向量的方法解决数学和物理中的有关问题?

例 1 如图 9－4－1(1)，无弹性的细绳 OA，OB 的一端分别固定在 A，B 处，同样的细绳 OC 下端系着一个称盘，且使得$OB \perp OC$，试分析 OA，OB，OC 三根绳子受力的大小，并判断哪根绳受力最大.

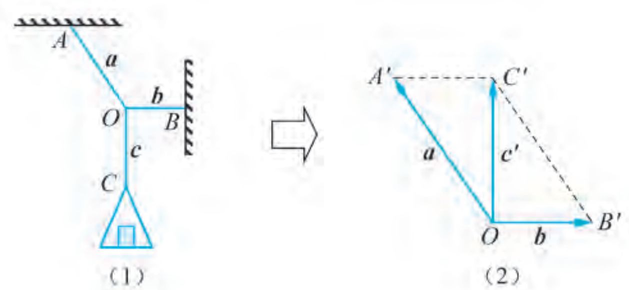


图 9－4－1

解 设 OA，OB，OC 三根绳子所受的力分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的合力为 $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

所以 $$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}'|.$$

如图 9－4－1(2)，在$\square OB'C'A'$中，因为

$$\overrightarrow{OB'} \perp \overrightarrow{OC'},\ \overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{OA'},$$

所以 $$|\overrightarrow{OA'}|>|\overrightarrow{OB'}|,\ |\overrightarrow{OA'}|>|\overrightarrow{OC'}|,$$

即 $$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{c}|.$$

故细绳 OA 受力最大.

例 2 已知：$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$.

求证：$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$.

证明 因为 $$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC},$$

所以 $$\begin{cases}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}=0, \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0, & ①\\ \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0. & ②\end{cases}$$

②－①,得 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$,

即 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

所以 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

思　考

你能画一个几何图形来解释例 2 吗?

例 3　已知直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$,用向量的方法求直线 l 上任意一点 $P(x, y)$的坐标 x, y 满足的条件.

分析　由$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{P_1P_2}$共线的条件可推得点 $P(x, y)$的坐标满足的条件.

解　依题意,得

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1), \overrightarrow{P_1P}=(x-x_1, y-y_1).$$

因为 P,P_1,P_2 三点都在直线 l 上,所以$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{P_1P_2}$是共线向量,从而

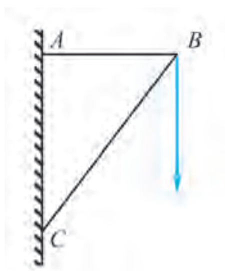
$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1). \qquad (*)$$

把(*)中的(x, y)改为(x_3, y_3),我们就可以得到证明三点共线的一种方法.

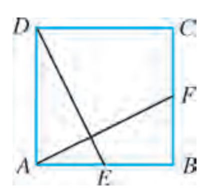
这就是点 $P(x, y)$的坐标 x, y 满足的条件.

练　习

1. 如图,一个三角形角铁支架 ABC 安装在墙壁上,$AB:AC:BC=3:4:5$,在 B 处挂一个 6 kg 的物体,求角铁 AB 与 BC 所受力的大小(取 $g=10\ \text{m/s}^2$).

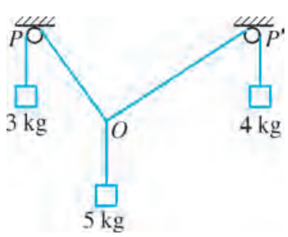


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是边 AB,BC 的中点,用向量的方法证明:$DE\perp AF$.
3. 用向量的方法证明:在$\triangle ABC$ 中,$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$.
4. 用向量的方法证明:平行四边形两条对角线的平方和等于一组邻边平方和的两倍.
5. 若直线 l 经过原点且与向量$\boldsymbol{a}=(2, 3)$垂直,求直线 l 上任意一点 $P(x, y)$的坐标 x, y 满足的条件.
6. 如图,一根细绳穿过两个定滑轮 P,P',且两端分别挂有质量为 3 kg, 4 kg 的重物. 现在两个滑轮之间的绳上挂一个质量为 5 kg 的重物,恰巧使得系统处于平衡状态,问:此时绳子形成的角$\angle POP'$多大?

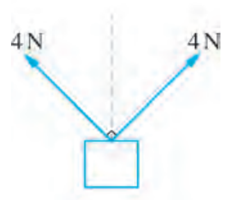


(第 6 题)

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，证明：四边形 $ABCD$ 是矩形.

习题 9.4

感受·理解



（第 1 题）

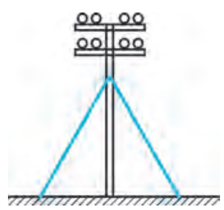
1. 如图，夹角为 90° 的两根绳子提起一个重物，每根绳子用力 4 N，求物体的重力.

2. 某人在静水中游泳的速度为 $\sqrt{3}$ m/s，河水自西向东的流速为 1 m/s，此人朝正南方向游去，求他的实际前进方向和速度.

3. 已知 $A(-2, 1)$，$B(2, -2)$，$C(-3, -5)$，$D(3, 3)$.
   (1) 求证：$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$；
   (2) 求 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

思考·运用


（第 5 题）

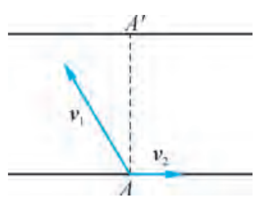
5. 如图，为了防止电线杆倾斜，在两侧对称地用钢丝绳把它拉紧. 已知每条钢丝绳的拉力都是 500 N，每条钢丝绳与电线杆的夹角都是 θ，两条钢丝绳拉力的合力大小为 F.
   (1) 如果 $\theta=30^\circ$，求 F 的大小；
   (2) 试研究：当 $0^\circ<\theta<90^\circ$ 时，随着 θ 的增大，F 的变化趋势.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，试用向量的方法证明：$a=b\cos C+c\cos B$.

7. 在平面直角坐标系中，已知 $A(3, 4)$，$B(5, 12)$，O 为坐标原点，$\angle AOB$ 的平分线交线段 AB 于点 D，求点 D 的坐标.

8. 已知向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 满足条件 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，求证：$\triangle ABC$ 是正三角形.

探究·拓展



（第 9 题）

9. 长江某段南北两岸平行，如图，江面宽度 $d=1$ km. 一艘游船从南岸码头 A 出发航行到北岸. 已知游船在静水中的航行速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的大小为 $|\boldsymbol{v}_1|=10$ km/h，水流的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小为 $|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h. 设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 $\theta(0^\circ<\theta<180^\circ)$，北岸的点 A' 在 A 的正北方向.
   (1) 当 $\theta=120^\circ$ 时，试判断游船航行到达北岸的位置是在 A' 的左侧还是右侧，并说明理由.
   (2) 当 $\cos\theta$ 多大时，游船能到达 A' 处？需要航行多长时间？（不必近似计算）
   (3) 当 $\theta=120^\circ$ 时，游船航行到达北岸的实际航程是多少？

10. （阅读题）设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l 上的两个不同的点，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. 我们把向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 及与它平行的非零向量都称为直线 l 的**方向向量**. 当直线 l 与 x 轴不垂直时，$\dfrac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{P_1P_2}=(1, k)$ $\left(\text{其中 } k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\text{ 叫作直线 } l \text{ 的斜率}\right)$，也是直线 l 的一个方向向量.

    如果直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且它的一个方向向量是 $(1, k)$，试用向量共线的方法推导直线 l 上任意一点 $P(x, y)$ 的坐标 x，y 满足的关系式.

问题与探究

由平面向量到空间向量的推广

学习了平面向量及其运算之后，我们解决了平面内有关点、直线的位置关系和度量问题. 那么，能否进一步拓展视野，将向量由二维推广到三维，建立相应的概念、运算及其性质，用空间向量研究空间中有关点、直线、平面的位置关系和度量问题呢？

实际上，早在19世纪，数学家就已经将平面向量扩展到了空间向量，并给出了空间向量的表示方法、运算法则，也建立了相应的理论.

请同学们独立地完成下面的研究工作.

1. 给出空间向量的概念及空间向量的线性运算和数量积的法则.
2. 给出空间向量基本定理，并给出上述概念和运算的坐标表示.
3. 查阅有关资料完善你的研究成果.

阅　读

向量源自力学

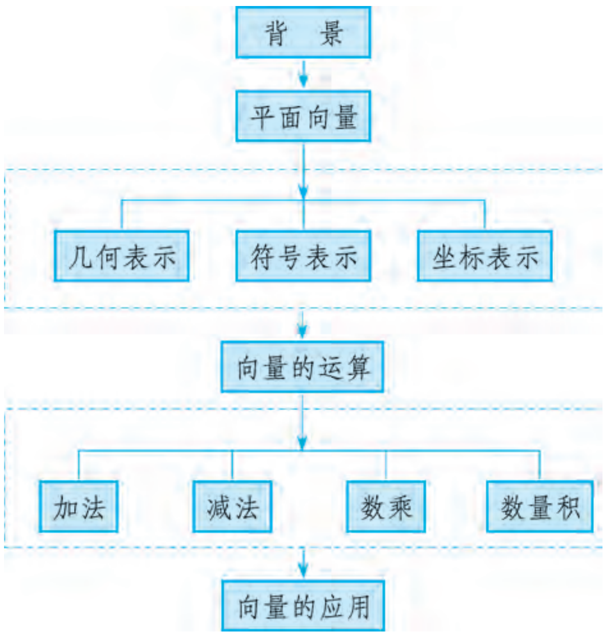
1586年，荷兰数学家、物理学家斯蒂文(S. Stevin，1548—1620)在其著作《静力学原理》中，首先在两力互成直角的情形下，引进了力的三角形法则(或平行四边形法则). 但是他未能推广到力取任意方向的一般情况. 牛顿(I. Newton，1642—1727)在《自然哲学的数学原理》一书中作为三个运动定律的推论，才明确提出了力的合成与分解定理.

1788年，法国数学家、物理学家拉格朗日(J. L. Lagrange，1736—1813)在《分析力学》中把带有方向的物理量数学化，即用数学方法来表示它们. 例如，他不仅用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 $\boldsymbol{f}$，而且把 $\boldsymbol{f}$ 置于空间直角坐标系中，并沿坐标轴把 $\boldsymbol{f}$ 分解为三个分力 $\boldsymbol{f}_x$，$\boldsymbol{f}_y$ 和 $\boldsymbol{f}_z$. 这些分力作为坐标轴上的有向线段，可以简单地用数来表示. 这样，在力学中关于力、速度和加速度的所有方程，都可以转化为联系它们分量的关于 x，y，z 的三个方程.

拉格朗日没有使用“向量(vector)”一词. 直到1844年，德国数学家格拉斯曼(H. G. Grassmann，1809—1877)才引入有向线段的记号，称之为向量，并引入向量的一般运算. 他创立了具有 n 个分量的超复数和 n 维向量等概念，并且有效地定义了 n 维向量的各种运算.

本章回顾

本章我们主要学习了向量的概念、表示及运算，平面向量基本定理，向量共线、垂直的条件，向量在几何和物理问题中的简单应用.



学习本章应注意类比，如向量的运算法则及运算律可与实数相应的运算法则及运算律进行类比. 而从一维情形下向量共线定理，到二维情形下平面向量基本定理，进而今后推广到三维情形下空间向量基本定理，又可进行类比.

向量是数形结合的载体. 在本章学习中，一方面通过数形结合来研究向量的概念和运算；另一方面，我们又以向量为工具，数形结合地解决数学和物理的有关问题. 同时，向量的坐标表示为我们用代数方法研究几何问题提供了可能，丰富了我们研究问题的范围和手段.

复 习 题

感受・理解

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，求下列向量的坐标：

(1) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-2,2)$，$B(3,1)$，$C(5,4)$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,10)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(5,0)$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$.

4. 已知$\triangle OAB$的两个顶点分别为原点O和$A(5,2)$,且$\angle A=90^\circ$,$AB=AO$.求:

(1) 点B的坐标;

(2) $\overrightarrow{AB}$的坐标.

5. 设$\boldsymbol{a}=(2,-7)$,$\boldsymbol{b}=(x,y)$,$\boldsymbol{c}=(3,5)$,若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,求实数$x$,$y$的值.

6. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$,$\boldsymbol{b}=(3,2)$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求$\boldsymbol{a}$的坐标.

7. 设A,B,C,D为平面内的四点,已知$A(3,1)$,$B(-2,2)$,且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

(1) 若C点坐标为$(-1,4)$,求D点坐标;

(2) 原点为O,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$,求$P$点坐标.

8. 已知点$A(-1,1)$,$B(2,-1)$.

(1) 若C是线段AB的中点,求C点坐标;

(2) 若直线AB上的点D满足$\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{BD}$,求$D$点坐标.

9. 设m为实数,若$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是不共线的两个向量,且$A$,$B$,$C$三点共线,求$m$的值.

10. 已知$A(6,1)$,$B(0,-7)$,$C(-2,-3)$,试确定$\triangle ABC$的形状.

11. 设a,b为实数,已知$A(a,1)$,$B(3,5)$,$C(7,3)$,$D(b,-1)$是菱形的四个顶点,求a,b的值.

12. 设k为实数,已知$\boldsymbol{a}=(-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,若$(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,求$k$的值.

13. 已知$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为120°,求:

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$的值;

(2) $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的值.

思考·运用

14. 在$\triangle ABC$中,$AB=3$,$BC=4$,$CA=5$,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值.

15. 已知$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个向量,若向量$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,试用$\boldsymbol{m}$,$\boldsymbol{n}$表示向量$\boldsymbol{p}$.

16. 已知D,E,F分别是$\triangle ABC$的边BC,CA,AB的中点,P是平面内任意一点.求证:$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$.

17. 设k为实数,已知$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$是两个不共线的向量,向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是共线向量,求$k$的值.

18. 已知坐标平面内$\overrightarrow{OA}=(1,5)$,$\overrightarrow{OB}=(7,1)$,$\overrightarrow{OM}=(1,2)$,$P$是直线$OM$上的一个动点.当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取最小值时,求$\overrightarrow{OP}$的坐标,并求$\cos\angle APB$的值.

19. 设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$都是单位向量,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,求$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$的最小值.

20. 设λ为实数,已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45^\circ$,且$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$,求$\lambda$的值.

21. 已知向量$\boldsymbol{a}=(3,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=9$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4$,求向量$\boldsymbol{c}$的坐标.

22. 已知非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$,求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

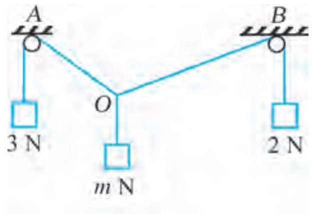
探究·拓展

23. 已知向量$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$,$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求证:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

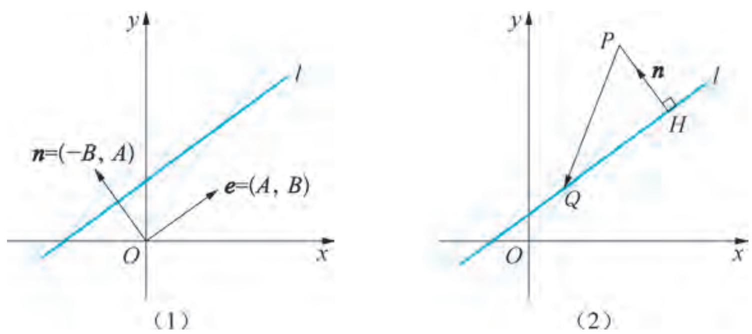
(2) 是否存在不等于 0 的实数 k 和 t，使向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$？如果存在，试确定 k 与 t 的关系；如果不存在，请说明理由.

24. 如图，一根绳穿过两个定滑轮，且两端分别挂有重力为 3 N，2 N 的重物. 现在两个滑轮之间的绳上挂一个重力为 m N 的重物，恰好使得系统处于平衡状态，求正数 m 的取值范围.



(第 24 题)

25. (阅读题)我们把与直线 l 垂直的向量称为直线 l 的**法向量**. 设 $\boldsymbol{e}=(A, B)$ 是直线 l 的一个方向向量(参见习题 9.4 第 10 题)，那么 $\boldsymbol{n}=(-B, A)$ 就是直线 l 的一个法向量(图(1)). 借助直线的法向量，我们可以方便地计算点到直线的距离.



(第 25 题)

已知 P 是直线 l 外一点，$\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的一个法向量，在直线 l 上任取一点 Q，那么 $\overrightarrow{PQ}$ 在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量为 $(|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ (θ 为向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 的夹角)，其模就是点 P 到直线 l 的距离 d，即 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ (图(2)). 据此，请解决下面的问题：已知点 $A(-4, 0)$，$B(2, -1)$，$C(-1, 3)$，求点 A 到直线 BC 的距离.

本章测试

一、填空题

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=6$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为________.
2. 设 k 为实数,若向量 $\boldsymbol{a}=(k,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 k 的值为________.
3. 已知点 $A(3,0)$,$B(2,1)$,$C(1,4)$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为________.
4. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $120°$,若向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{e}_2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为________.
5. 设点 $A(1,3)$,$B(-3,n)$,$C(m+2,-1)$.若 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$,则 mn 的值为________.
6. 设 k 为实数,向量 $\boldsymbol{a}=(-2,k)$,$\boldsymbol{b}=(2,k-3)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 k 的值为________.

二、选择题

7. 若向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$,$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　).

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

8. 在▱$ABCD$ 中,AC 为一条对角线.若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$,$\overrightarrow{AC}=(1,3)$,则 $\overrightarrow{BD}=$(　　).

A. $(-2,-4)$　　B. $(3,5)$　　C. $(-3,-5)$　　D. $(2,4)$

9. 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是单位向量,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. $-\sqrt{2}$

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

三、解答题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,求:

(1) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2) 向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

12. 在△ABC 中,已知 $AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2,-4)$,$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-8,16)$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
14. 设 x 为实数,已知 $A(1,2)$,$B(3,4)$,$C(2x,x+5)$ 三点在同一条直线上,求 x 的值.
15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $135°$,且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$(其中 $x\in\mathbf{R}$).当 $|\boldsymbol{c}|$ 取最小值时,求 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的大小.

第 10 章　三角恒等变换

- 三角恒等变换
  - 两角和与差的三角函数
    - 两角和与差的余弦
    - 两角和与差的正弦
    - 两角和与差的正切
  - 二倍角的三角函数
  - 几个三角恒等式

A mathematician, like a painter or poet, is a maker of pattern.

—G. H. Hardy

在《数学(必修第一册)》第 7 章中,我们从点的数学表示开始初步研究了圆周上一点的运动,并用正弦函数 $y=\sin x$ 来刻画周期运动. 与周期运动相关的另一个基本问题是“周期运动的叠加”.

设点 Q 在半径为 b 的圆 P 上运动,同时,点 P 在半径为 a 的圆 O 上运动. O 为定点,P, Q 两点的初始位置如图 1 所示,其中 φ_0 为定角,且 P,Q 两点以相同的角速度按逆时针方向运动,这时,点 Q 的运动应该如何刻画?

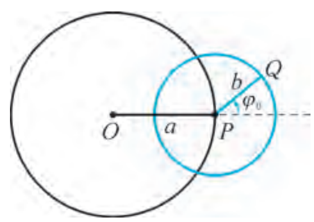


图 1

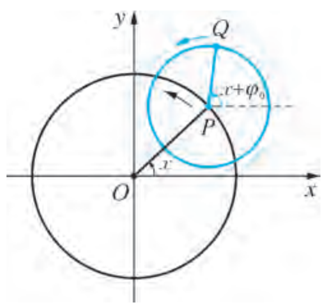


图 2

我们用向量的方法分析如下:

如图 2,设 $\overrightarrow{OP}=(a\cos x, a\sin x)$,则

$$\overrightarrow{PQ}=(b\cos(x+\varphi_0), b\sin(x+\varphi_0)).$$

由 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$,可知

$$\overrightarrow{OQ}=(a\cos x+b\cos(x+\varphi_0), a\sin x+b\sin(x+\varphi_0)).$$

先看一个简单的特例:令 $a=b=1$, $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$,则

$$\overrightarrow{OQ}=(\cos x-\sin x, \sin x+\cos x).$$

● 对于函数 $y=\sin x+\cos x$,我们猜想它仍然表示一个简谐运动,即 $\sin x+\cos x$ 能够恒等变形为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式. 果真如此吗?

10.1 两角和与差的三角函数

由向量的数量积运算法则，可知

$$\cos x+\sin x=(\cos x,\ \sin x)\cdot(1,1)；$$

另一方面，

$$(\cos x,\ \sin x)\cdot(1,\ 1)=\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\cos\theta$$
$$=\sqrt{2}\cos\theta,$$

其中 θ 为向量$(\cos x,\ \sin x)$与向量$(1,\ 1)$的夹角. 于是有

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

这是一个有趣的等式，在回答了 $\sin x+\cos x$ 可以化为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的同时，还告诉我们 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$可以用 x 的三角函数与$\frac{\pi}{4}$ 的三角函数来表示. 这又启发我们联想到更一般的问题：

● $\cos(\alpha-\beta)$ 能否用 α 的三角函数与 β 的三角函数来表示？

10.1.1 两角和与差的余弦

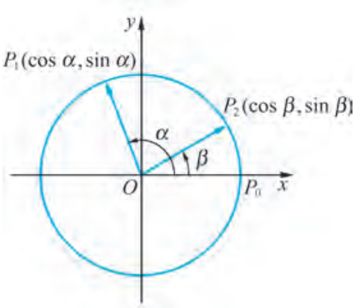


图 10-1-1

把 $\cos(\alpha-\beta)$ 看成两个向量夹角的余弦，考虑用向量的数量积来研究.

如图 10-1-1，在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 轴为始边分别作角 α,β，其终边分别与单位圆交于 $P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\ \sin\beta)$，则 $\angle P_1OP_2=\alpha-\beta$. 由于余弦函数是周期为 2π 的偶函数，所以，我们只需考虑 $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$ 的情况.

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$，

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$

因为 $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$，所以 $\alpha-\beta$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

另一方面，由向量数量积的坐标表示，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\qquad(C_{(\alpha-\beta)})$$

这就是**两角差的余弦公式**.

探 究

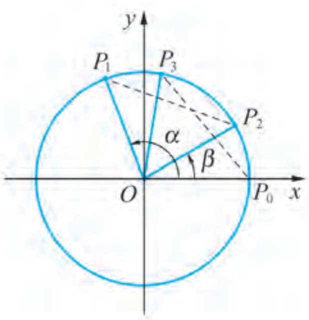


图 10-1-2

如图 10-1-2，在平面直角坐标系 xOy 中，单位圆 O 与 x 轴正半轴交于点 P_0. 以 Ox 轴为始边分别作出角 α, β, $\alpha-\beta$, 其终边分别和单位圆交于点 P_1，P_2，P_3. 由 $|\overrightarrow{P_0P_3}|=|\overrightarrow{P_2P_1}|$，你能否导出两角差的余弦公式？

在两角差的余弦公式中，用$-\beta$代替β,就可以得到

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta),\end{aligned}$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{(\alpha+\beta)})$$

这就是两角和的余弦公式.

思 考

"用$-\beta$代替β"的换元方法体现在图形上具有什么几何意义？你能直接利用向量的数量积推出两角和的余弦公式吗？

在《数学(必修第一册)》第 7 章中，我们曾经学习过许多诱导公式，这些诱导公式都可以看成和(差)角公式的特例，因此也可以由和(差)角公式推出.

例 1 利用两角和(差)的余弦公式证明下列诱导公式：

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；　　(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

证明 (1) 由公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$$

所以 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

(2) 在上式中，用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代换 α，可以得到

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

即 $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

例 2 利用两角和(差)的余弦公式，求 $\cos 75^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\sin 15^\circ$，$\tan 15^\circ$.

可用图 10-1-3 验证计算结果.

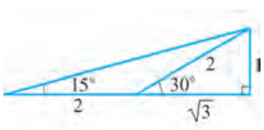


图 10-1-3

解 $$\begin{aligned}\cos 75^\circ&=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\sin 15^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

例 3 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，$\cos\beta = -\frac{3}{5}$，$\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

分析 由公式 $C_{(\alpha+\beta)}$ 可知，欲求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值，应先计算 $\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的值.

解 由 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，得

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

又由 $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，得

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

由两角和的余弦公式得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{3}\times\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{8+3\sqrt{5}}{15}.\end{aligned}$$

思　考

在上例中，你能求出 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值吗？

练　习

1. 利用两角和(差)的余弦公式证明：

(1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$；　　(2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$.

2. 利用两角和(差)的余弦公式化简：

(1) $\cos 58^\circ \cos 37^\circ + \sin 58^\circ \sin 37^\circ$；

(2) $\cos(60^\circ+\theta) - \cos(60^\circ-\theta)$；

(3) $\cos(60^\circ+\theta) + \cos(60^\circ-\theta)$；

(4) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

3. 利用两角和(差)的余弦公式，求 $\cos 105^\circ$ 的值.

4. 化简：

(1) $\cos 100^\circ\cos 40^\circ + \sin 80^\circ\sin 40^\circ$；　(2) $\cos 80^\circ\cos 55^\circ - \cos 10^\circ\cos 35^\circ$；

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 15^\circ$；　　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 15^\circ$.

5. 已知 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$的值.

6. 已知 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

习题 10.1(1)

感受·理解

1. 化简：

(1) $\cos 24^\circ \cos 36^\circ - \cos 66^\circ \cos 54^\circ$；

(2) $\cos 58^\circ \sin 37^\circ + \sin 122^\circ \sin 53^\circ$；

(3) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$；

(4) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$；

(5) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$；

(6) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$.

2. (1) 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$的值；

(2) 已知 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$，$\theta\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，求 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

3. (1) 已知 α，β都是锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 α，β都是第二象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

思考·运用

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，求 $\cos\alpha\cos\beta$ 和 $\sin\alpha\sin\beta$ 的值.

5. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{1}{4}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

6. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值.

7. 设 O 为坐标原点，$P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 为单位圆上的两点，且 $\angle P_1OP_2=\theta$，求证：$x_1x_2+y_1y_2=\cos\theta$.

8. 求 $y=\cos x-\sin x$ 的最大值和最小值.

探究·拓展

9. 试用向量的方法推导两角和的余弦公式.

10.1.2 两角和与差的正弦

回顾 10.1.1 节的例 2 中求 $\sin 15^\circ$的过程，我们先将 $\sin 15^\circ$转化为 $\cos 75^\circ$，再利用两角和的余弦公式来计算. 而 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$，那么，有没有两角和(差)的正弦公式呢?

事实上，

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

即

通过诱导公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，可以实现正弦、余弦函数间的转化.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha+\beta)})$$

这就是**两角和的正弦公式**.

在两角和的正弦公式中,用$-\beta$代替β,就可以得到

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

即

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha-\beta)})$$

这就是**两角差的正弦公式**.

思 考

能不能利用同角三角函数的关系,从 $C_{(\alpha\pm\beta)}$ 推导出 $S_{(\alpha\pm\beta)}$?这样做有什么困难?

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

解 由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 得 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

又由 $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 得 $\sin\beta=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{-6+4\sqrt{5}}{15}.$$

例 2 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α, β均为锐角,求$\sin\alpha$的值.

分析 把角α看成角$\alpha+\beta$与β的差,即$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, 再用两角差的正弦公式求解.

解 由α, β均为锐角,可知$0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$, 从而

$$\sin\beta>0,\ \sin(\alpha+\beta)>0.$$

由 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

由 $\cos\beta=\frac{4}{5}$, 得

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

由公式 $S_{(\alpha-\beta)}$，可得

$$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$
$$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}.$$

例 3 求函数 $y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 的最大值.

本题还有其他解法吗?

解 $y=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 y 取得最大值 1.

探究

在本章引言中，我们用向量的方法得到点 Q 的坐标，即 $\overrightarrow{OQ}=(a\cos x+b\cos(x+\varphi_0), a\sin x+b\sin(x+\varphi_0))$，并对 $a=b=1$，$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 这一特例进行了研究.

如果 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，那么

$$\overrightarrow{OQ}=(\sqrt{3}\cos x-\sin x, \sqrt{3}\sin x+\cos x).$$

试探索：

(1) 函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 是否为周期函数；

(2) 函数 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$ 的单调区间和值域.

练习

1. 下列等式中恒成立的是(　　).

A. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$

C. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

D. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2. 化简 $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$，得(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sin 4^\circ$　　D. $\cos 4^\circ$

3. 化简 $\sin 200^\circ\cos 140^\circ-\cos 160^\circ\sin 40^\circ$，得(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sin 20^\circ$　　C. $\cos 20^\circ$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 化简：

(1) $\sin 11^\circ\cos 29^\circ+\cos 11^\circ\sin 29^\circ$；　(2) $\cos 24^\circ\cos 69^\circ+\sin 24^\circ\sin 111^\circ$；

(3) $\sin^2 22.5^\circ-\cos^2 22.5^\circ$；　(4) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；

(5) $\frac{1}{2}\sin 15^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ$；　(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^\circ+\frac{1}{2}\cos 15^\circ$.

5. 求值：(1) $\sin 105^\circ$；　(2) $\cos 165^\circ$.

6. 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

7. 已知 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\theta$ 的值.

8. (1) 将 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$ 化为 $A\sin(x+\theta)$ 的形式；

(2) 求函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的最大值和最小值.

例 4 证明：$\frac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B)=\frac{\sin B}{\sin A}$.

分析 将等式中的角统一用 $A+B$ 及 A 来表示.

证明 因为

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\sin[(A+B)+A]-2\cos(A+B)\sin A}{\sin A}\\&=\frac{\sin(A+B)\cos A+\cos(A+B)\sin A-2\cos(A+B)\sin A}{\sin A}\\&=\frac{\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A}{\sin A}\\&=\frac{\sin[(A+B)-A]}{\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}=\text{右边},\end{aligned}$$

所以等式成立.

例 5 求 $\frac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 的值.

将 10° 表示为 $30^\circ-20^\circ$，从而将待求式中的角统一用 20° 来表示.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\\&=\frac{2(\cos 30^\circ\cos 20^\circ+\sin 30^\circ\sin 20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\\&=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 6 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{5}$，求 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

解 将已知条件按两角和(差)的正弦公式展开，得

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3},\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{5},\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{2}=\frac{7}{30},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{2}=\frac{13}{30}.\end{cases}$$

从而得 $$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{7}{30}\times\frac{30}{13}=\frac{7}{13}.$$

思 考

从例 6 的解题过程可以看出，只要知道 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 的值，就可以求出 $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$的值. 据此你能推出用$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$的正弦与余弦表示 $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$和$\cos\alpha\cos\beta$的式子吗?

练 习

1. 已知α，β都为锐角，$\sin\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

(1) 试用α与$\alpha+\beta$表示β；(2) 求 $\sin\beta$与 $\cos\beta$的值.

2. 证明：

(1) $\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\tan A+\tan B$；(2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\tan\alpha$.

3. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

4. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

5. 已知 $\sin\alpha-\cos\beta=-\frac{2}{3}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$，求 $\sin(\alpha-\beta)$的值.

习题 10.1(2)

感受·理解

1. 化简：

(1) $\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x$；

(2) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$；

(3) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$；

(4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

2. 计算：

(1) $\sin 14^\circ\cos 16^\circ+\sin 16^\circ\cos 14^\circ$；

(2) $\sin 21^\circ\cos 81^\circ-\sin 69^\circ\cos 9^\circ$；

(3) $\cos(70^\circ+\alpha)\sin(170^\circ-\alpha)-\sin(70^\circ+\alpha)\cos(10^\circ+\alpha)$；

(4) $(\tan 75^\circ-\tan 15^\circ)\cos 75^\circ\cos 15^\circ$.

3. 已知 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$的值.

4. 已知 $\cos\theta=\frac{5}{13}$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$；(2) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$；(3) $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

5. 已知α，β都是锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

6. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$；　　(2) $y=\sin x-\cos x$；

(3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$；　　(4) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$.

7. 已知函数 $f(x)=\sin x$，求证：

(1) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\cos h-1}{h}\sin x+\dfrac{\sin h}{h}\cos x$；

(2) $\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=\dfrac{\sin h}{h}\cos(x+h)$.

8. 证明：

(1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$；

(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

9. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=a$，$\sin(\alpha-\beta)=b$，求证：

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(a+b)$；　(2) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}(a-b)$.

10. 用两种方法求 $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$ 的值.

思考・运用

11. 已知 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$.

(1) 用 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 表示 2α；(2) 求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

12. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{7}{9}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，

(1) 已知 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值；

(2) 已知 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$，求 $\cos C$ 的值.

14. 设 α，β 都是锐角，

(1) 判断 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的大小，并说明理由；

(2) 判断 $\cos(\alpha+\beta)$ 与 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的大小，并说明理由.

探究・拓展

15. 求下列函数的最大值和最小值：

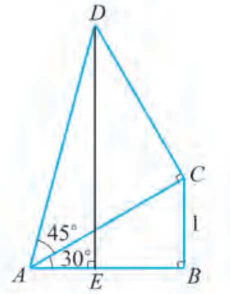
(1) $y=\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x$；

(2) $y=a\sin x+b\cos x$（a，b 均为正数）.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为直角，$DE\perp AB$ 于点 E，$AC\perp DC$，已知 $BC=1$.

(1) 若 $\angle BAC=30^\circ$，$\angle DAC=45^\circ$，试求 $\triangle ADE$ 各边的长度，由此推出 75° 的三角函数值；

(2) 设 $\angle BAC=\alpha$，$\angle DAC=\beta$（α，β，$\alpha+\beta$ 均为锐角），试由图推出求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的公式.



（第 16 题）

10.1.3 两角和与差的正切

回顾 10.1.1 节的例 2 中求 $\tan 15^\circ$ 的过程，我们先分别求出 $\sin 15^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$，再由同角三角函数关系求出 $\tan 15^\circ$. 那么，

● 能否由 $\tan 45^\circ$ 和 $\tan 30^\circ$ 直接求出 $\tan 15^\circ$ 呢？

利用公式 $S_{(\alpha\pm\beta)}$ 和 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，我们不难推出两角和与差的正切公式.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

所以，对使等式两边都有意义的 α 和 β，都有

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\qquad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\qquad (T_{(\alpha-\beta)})$$

$S_{(\alpha+\beta)}$，$C_{(\alpha+\beta)}$，$T_{(\alpha+\beta)}$ 统称为和角公式，$S_{(\alpha-\beta)}$，$C_{(\alpha-\beta)}$，$T_{(\alpha-\beta)}$ 统称为差角公式.

这就是**两角和(差)的正切公式**.

思　考

两角和与差的正切公式在结构上有什么特点？

例 1 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

分析 本题既可以根据方程解出 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 的值，再代入公式计算，也可以不解方程，通过计算 $\tan\alpha+\tan\beta$，$\tan\alpha\tan\beta$ 的值来求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

解法 1 解方程得

$$\tan\alpha=-6,\ \tan\beta=1 \text{ 或 } \tan\alpha=1,\ \tan\beta=-6.$$

代入两角和的正切公式，得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6+1}{1+6}=-\frac{5}{7}.$$

一般地，若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个根，则有 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

解法 2 因为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根，所以

$$\tan\alpha+\tan\beta=-5,\ \tan\alpha\tan\beta=-6.$$

因此，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{5}{7}$.

例 2 证明：$\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\sqrt{3}$.

分析 由 $15^\circ=60^\circ-45^\circ$（也可写成 $45^\circ-30^\circ$），利用两角差的正切公式，可以求出 $\tan 15^\circ$ 的值.

或者由 $1=\tan 45^\circ$，等式左边的结构与 $\tan(\alpha+\beta)$ 相似，考虑运用两角和的正切公式.

或者由 $\sqrt{3}=\tan 60^\circ$，$60^\circ=45^\circ+15^\circ$，考虑运用两角和的正切公式.

证法 1 因为 $\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times 1}=2-\sqrt{3},$$

所以
$$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\frac{1+2-\sqrt{3}}{1-2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

证法 2
$$\frac{1+\tan15^\circ}{1-\tan15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}$$
$$=\tan(45^\circ+15^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}.$$

证法 3 因为 $\sqrt{3}=\tan 60^\circ=\tan(45^\circ+15^\circ)$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ},$$

所以
$$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\sqrt{3}.$$

例 3 如图 10－1－4，有三个相同的正方形相接，求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

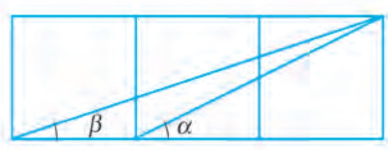


图 10－1－4

证明 由图 10－1－4 可知

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=\frac{1}{3},$$

从而得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1.$$

由 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 能直接得到 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 吗?为什么?

因为 $\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta\in(0,\ \pi)$.

在区间 $(0,\ \pi)$ 内,正切值为 1 的角只有 1 个,即 $\tan\frac{\pi}{4}=1$.

故
$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

练　习

1. (1) 已知 $\tan\alpha=3$,求 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 已知 $\tan\alpha=-2$,$\tan\beta=5$,求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

2. 求下列各式的值:

(1) $\tan 75^\circ$;　　(2) $\tan 15^\circ$;

(3) $\tan 105^\circ$;　　(4) $\frac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中,$\tan A=2$,$\tan B=5$,求 $\tan C$ 的值.

4. 已知 $\tan\alpha$,$\tan\beta$ 是方程 $3x^2+5x-1=0$ 的两根,求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

5. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$,$\tan\alpha=-2$,求 $\tan\beta$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha=3$,$\tan\beta=2$,$\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,求证:$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

例 4 在斜三角形 ABC 中,求证:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

分析 将要证的等式与两角和(差)的正切公式比较,它们都含有正切的和与积,因此可考虑运用两角和的正切公式.

证明 在斜三角形 ABC 中,有 $A+B+C=\pi$,即 $A+B=\pi-C$,且 A,B,$A+B$ 都不等于 $\frac{\pi}{2}$,所以

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C),$$

即
$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$$

即
$$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C,$$

从而
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

思　考

一般地,当角 α,β,γ 满足什么条件时,等式

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

成立?

例 5 如图 10-1-5,两座建筑物 AB,CD 的高度分别是 9 m 和 15 m,从建筑物 AB 的顶部 A 处看建筑物 CD 的张角 $\angle CAD=45^\circ$,求建筑物 AB 和 CD 的底部之间的距离 BD.

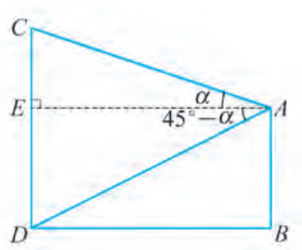


图 10-1-5

分析 作 $AE\perp CD$ 于点 E,有 $BD=AE$.设 AE 为 x,只需建立

关于 x 的方程即可.

解 如图 10-1-5，作 $AE\perp CD$ 于点 E.

因为 $AB\parallel CD$，$AB=9$ m，$CD=15$ m，

所以 $DE=9$ m，$EC=6$ m.

设 $AE=x$，$\angle CAE=\alpha$.

因为 $\angle CAD=45^\circ$，所以 $\angle DAE=45^\circ-\alpha$.

在 Rt$\triangle AEC$ 和 Rt$\triangle AED$ 中，有

$$\tan\alpha=\frac{6}{x},\ \tan(45^\circ-\alpha)=\frac{9}{x}.$$

因为 $$\tan(45^\circ-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha},$$

所以 $$\frac{9}{x}=\frac{1-\frac{6}{x}}{1+\frac{6}{x}}.$$

化简，得 $$x^2-15x-54=0,$$

解得 $x=18$，$x=-3$（舍去）.

答 两座建筑物底部之间的距离 BD 等于 18 m.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，已知 $\tan A$，$\tan B$ 是方程 $3x^2-7x+2=0$ 的两根，求$\tan C$的值.
2. 证明：$\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha=\tan 3\alpha\tan 2\alpha\tan\alpha$.
3. 证明：$\tan 95^\circ-\tan 35^\circ-\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan 95^\circ\tan 35^\circ$.
4. 化简：$\dfrac{\tan 39^\circ+\tan 81^\circ+\tan 240^\circ}{\tan 39^\circ\tan 81^\circ}$.
5. 如图，在某开发区内新建两栋高楼 AB，CD（AC 为水平地面），P 是AC 的中点，在点 P 处测得两楼顶的张角 $\angle BPD=45^\circ$，$AB=AC=50$ m. 试求楼 CD 的高度（测量仪器的高度不计）.

（第 5 题）

习题 10.1(3)

感受·理解

1. 化简：

(1) $\dfrac{\tan 58^\circ+\tan 92^\circ}{1+\tan 58^\circ\tan 88^\circ}$；　(2) $\dfrac{\tan 2\theta-\tan\theta}{1+\tan 2\theta\tan\theta}$；

(3) $\tan 83^\circ+\tan 37^\circ-\sqrt{3}\tan 83^\circ\tan 37^\circ$；　(4) $\dfrac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}$.

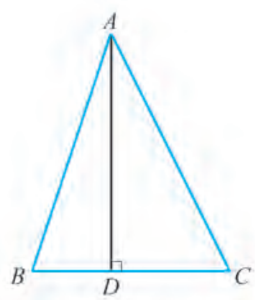
2. （1）已知 $\tan x=\frac{1}{7}$，$\tan y=-3$，求 $\tan(x-y)$ 的值；

（2）已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，且 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$270^\circ<\beta<360^\circ$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

3. 证明：

（1）$\tan(x+y)\tan(x-y)=\frac{\tan^2x-\tan^2y}{1-\tan^2x\tan^2y}$；

（2）$\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.



（第 4 题）

4. 如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，$BD:DC:AD=2:3:6$，求 $\angle BAC$ 的大小.

5. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

6. 在锐角三角形 ABC 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\tan(A-B)=-\frac{1}{3}$，求 $\sin B$，$\cos C$ 的值.

思考・运用

7. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $3x^2+5x-7=0$ 的两根，求下列各式的值：

（1）$\tan(\alpha+\beta)$；　（2）$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$；　（3）$\cos^2(\alpha+\beta)$.

8. 证明：

$$\begin{aligned}&\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)\\=&\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A).\end{aligned}$$

9. （1）已知 $\alpha+\beta=45^\circ$，求证：$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=2$；

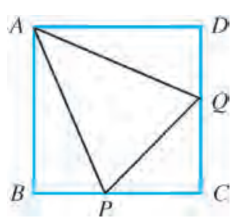
（2）已知 $(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=2$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

10. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$，$\tan\beta=\frac{3}{4}$，

求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

探究・拓展

11. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，P，Q 分别在 BC，CD 上，且 $PB+QD=PQ$，利用两角和(差)的正切公式证明：$\angle PAQ=\frac{\pi}{4}$.



（第 11 题）

10.2 二倍角的三角函数

上一节,我们讨论了 $\alpha+\beta$ 的三角函数用 α,β 的三角函数来表示.当 $\alpha=\beta$ 时,$\alpha+\beta=2\alpha$,此时,

● $\sin 2\alpha$ 能否用 α 的三角函数来表示?

事实上,只要在 $S_{(\alpha+\beta)}$,$C_{(\alpha+\beta)}$,$T_{(\alpha+\beta)}$ 公式中,令 $\beta=\alpha$,就可以得到下面的结果:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

其中,公式 $C_{2\alpha}$还可以变形为

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1, \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha. \qquad (C_{2\alpha})$$

这里的"倍角",实际上专指"二倍角",遇到"三倍角"等名称时,"三"字等不能省去.

以上这些公式都叫作**倍角公式**.倍角公式是和角公式的特例.

有了倍角公式,就可以用角 α 的三角函数表示二倍角 2α 的三角函数.

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,求 $\sin 2\alpha$,$\cos 2\alpha$,$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

于是 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{12}{13}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}$,

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\left(-\frac{120}{169}\right)\times\left(-\frac{169}{119}\right)=\frac{120}{119}.$$

例 2 证明：$\dfrac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$.

分析 等式的左边较繁，需对它进行化简，并注意将 2θ 的三角函数化成 θ 的三角函数.

证明 左边 $=\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-(1-2\sin^2\theta)}{1+2\sin\theta\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)}$

$$=\frac{2\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\text{右边}.$$

因此，等式成立.

练 习

1. 利用倍角公式求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$；　(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$；

(3) $1-2\sin^2 15°$；　(4) $\dfrac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$；

(5) $(\sin 15°-\cos 15°)^2$；　(6) $2\sin 20°\cos 20°-2\cos^2 25°$.

2. 已知 $\sin\alpha=0.8$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$ 的值.

4. 证明：

(1) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$；　(2) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$；

(3) $1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$；　(4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$；

(5) $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$；　(6) $\sqrt{1-\sin 80°}=\cos 40°-\sin 40°$.

5. 化简：

(1) $4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2 2\alpha$；　(2) $\dfrac{1+2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

例 3 化简 $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$.

解法 1 由倍角公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，得

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

公式
$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，
$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，
$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
都可由倍角公式变形得到.

$$\text{原式}=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)=\frac{1}{2}.$$

解法 2 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2-\sin^2\alpha$$

$$=\frac{3}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}.$$

例 4 证明：$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=1$.

证明 左边 $=\sin 50^\circ\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$

$$=\sin 50^\circ\cdot\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\cdot\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\cdot\frac{\cos(60^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=1=\text{右边}.$$

因此，等式成立.

例 5 在半圆形钢板上截取一块矩形材料，使矩形的一边落在半圆的直径上，怎样截取能使这个矩形的面积最大？

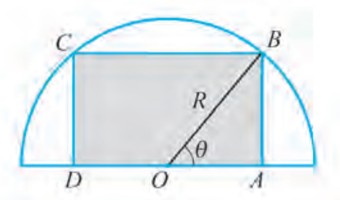


图 10-2-1

解 如图 10-2-1，设 $\angle AOB=\theta$，且 θ 为锐角，半圆的半径为 R. 面积最大的矩形 $ABCD$ 必内接于半圆 O，且两边长分别为

$$AB=R\sin\theta,$$
$$DA=2OA=2R\cos\theta.$$

这个矩形的面积为

$$S_{\text{矩形}ABCD}=AB\cdot DA=R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=R^2\sin 2\theta.$$

所以，当 $\sin 2\theta=1$（θ 为锐角），即 $\theta=45^\circ$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积取得最大值 R^2，此时，$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

答 当这个矩形在半圆直径上的两个顶点到圆心的距离都是半圆半径的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍时，所截取的矩形的面积最大.

思 考

在一个圆的所有内接矩形中，怎样的矩形面积最大？

练 习

1. 化简：

(1) $(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^2$；

(2) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$；

(3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；

(4) $\sqrt{2+\cos 20^\circ-\sin^2 10^\circ}$；

(5) $\frac{1}{1-\tan\theta}-\frac{1}{1+\tan\theta}$；

(6) $\sqrt{1-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\quad(0<\alpha<\pi)$.

2. 证明：

(1) $\cos^2(A+B)-\sin^2(A-B)=\cos 2A\cos 2B$；

(2) $\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\cos 2\theta$.

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，且 α，β 都是锐角，求 $\alpha+2\beta$ 的值.

4. 求函数 $y=\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$ 的最大值和最小值.

习题 10.2

感受·理解

1. 求下列各式的值：

(1) $\sin 112^\circ 30'\cos 67^\circ 30'$；

(2) $\sin^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ$；

(3) $\sin^2\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}$；

(4) $1-2\cos^2 750^\circ$；

(5) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$.

2. 化简：

(1) $\sin^2\frac{\pi}{16}-\cos^2\frac{\pi}{16}$；

(2) $\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$；

(3) $\frac{\tan\frac{5\pi}{24}}{1-\tan^2\frac{5\pi}{24}}$；

(4) $\frac{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}$；

(5) $\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$；

(6) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$.

3. 已知 $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $180^\circ<\varphi<270^\circ$，求 $\sin 2\varphi$，$\cos 2\varphi$，$\tan 2\varphi$ 的值.

4. 已知 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$，试确定角 α 所在的象限.

5. (1) 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，求 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值；

(3) 已知 $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$，化简 $\sqrt{1-\sin\alpha}+\sqrt{1+\sin\alpha}$；

(4) 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$\tan\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{1}{3}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

6. 证明：

(1) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$；

(2) $\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{2}{\tan 2\theta}$；

(3) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=2\tan 2\alpha$；

(4) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

(5) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$；

(6) $\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\tan 2\theta}=\frac{1}{\sin 2\theta}$.

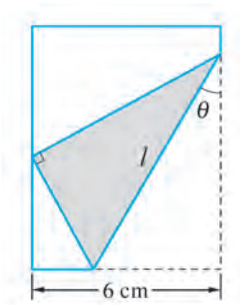
思考・运用

7. 用 $\sin\alpha$ 表示 $\sin 3\alpha$.

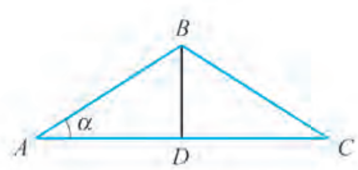
8. 求值：$\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$.

9. 已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，且 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$m\neq 1$. 求证：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$.

10. 如图，将矩形纸片的右下角折起，使得该角的顶点落在矩形的左边上，那么折痕长度 l 取决于角 θ 的大小. 探求 l，θ 之间的关系式，并导出用 θ 表示 l 的函数表达式.



（第 10 题）



（第 12 题）

探究・拓展

11. 试说明 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin^2 x$ 的图象之间有什么样的关系.

12. 如图，屋顶的断面图是等腰三角形 ABC，其中 $AB=BC$，横梁 AC 的长为定值 $2l$，$\angle BAC=\alpha$. 试问：当 α 为多大时，雨水从屋顶(屋顶面为光滑斜面)上流下所需的时间最短？

10.3 几个三角恒等式

观察下列学过的两组公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, ①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; ②

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, ③

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. ④

● 尝试一下，对①②③④做一些“运算”，例如①+②，①−②，等等，看看能得到些什么？

(1) 由①+②，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

所以 $$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

(2) 由①−②，得

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$

所以 $$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

(3) 由③+④，得

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

所以 $$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

(4) 由③−④，得

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

所以 $$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

于是有

本节公式不要求记忆.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

这组公式中，每个等式左边为三角函数乘积的形式，而等式右边为三角函数和与差的形式，通常称之为三角函数的**积化和差公式**.

例 1 求 $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$的值.

解 原式$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

在积化和差的公式中，如果令 $\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$，那么

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2},\ \beta=\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

把 α，β 的值代入积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

就有

$$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin\varphi),$$

所以 $$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

同样可得

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2},$$
$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2},$$
$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

把上面四个等式中的字母 θ，φ 换成 α，β，就有

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

这组公式中，每个等式左边为三角函数和与差的形式，而等式右边为三角函数乘积的形式，通常称之为三角函数的**和差化积公式**.

例 2 把下列各式化为积的形式：

(1) $\sin 114^\circ + \sin 26^\circ$;

(2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

解 (1) 原式 $= 2\sin\frac{114^\circ+26^\circ}{2}\cos\frac{114^\circ-26^\circ}{2}$

$= 2\sin 70^\circ\cos 44^\circ$.

(2) 原式 $= 2\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$

$= 2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\alpha$.

练 习

1. 把下列各式化为和或差的形式：

(1) $2\sin 70^\circ\cos 20^\circ$; (2) $\cos 80^\circ\sin 20^\circ$;

(3) $\cos 68^\circ\cos 52^\circ$; (4) $\sin 121^\circ\sin 59^\circ$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sin 105^\circ\cos 75^\circ$; (2) $\cos 37.5^\circ\cos 22.5^\circ$;

(3) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$.

3. 证明下列各恒等式：

(1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos 2\alpha$;

(2) $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ=\frac{1}{4}$;

(3) $\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ=\frac{1}{8}$.

4. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\sin 24^\circ+\sin 36^\circ$; (2) $\sin(15^\circ+\alpha)-\sin(15^\circ-\alpha)$;

(3) $\cos x+\cos 3x$; (4) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\frac{\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}$; (2) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\cos 10^\circ$.

6. 证明：$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

由 $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$，得

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

即 $$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha,\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha.$$

所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

当$\frac{\alpha}{2}$所在的象限能够确定时，这三个公式中根号前的符号可以确定. 一般情况，应保留“±”. 这组公式通常称为三角函数的**半角公式**.

另一方面，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

即

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

例 3 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

解 $$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 设 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$，求证：

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}. \tag{1}$$

证明 由二倍角公式，得

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

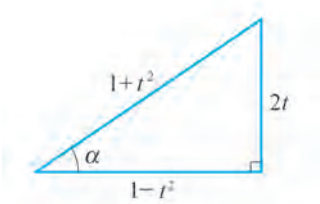


图 10－3－1

再由同角三角函数间的关系，得

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

图 10－3－1 中的直角三角形可以帮助我们更好地理解公式(1).

练 习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

2. 已知 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，且 θ 为第三象限角，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=-2$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\theta=\frac{b}{a}$，求证：$a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=a$.

链 接

一般地，由下列函数

$$1,\ \cos kx,\ \cos 2kx,\ \cos 3kx,\cdots$$

$$\sin kx,\ \sin 2kx,\ \sin 3kx,\ \cdots$$

中的若干个函数的和所得到的函数仍是周期函数. 法国数学家傅里叶(J. B. J. Fourier，1768—1830)发现，几乎所有的周期函数都能用这些函数的和(一般为无穷和)来表示.

在图形计算器中作出函数 $f_1(x)=\cos 2\pi x$，$f_2(x)=-\cos 2\pi x$，$f_3(x)=\cos 2\pi x\cos 16\pi x$ 的图象(图 10－3－2).

在学习物理中的相关内容(如简谐运动、波的传播、交流电等)时，注意利用三角函数知识来分析和理解.

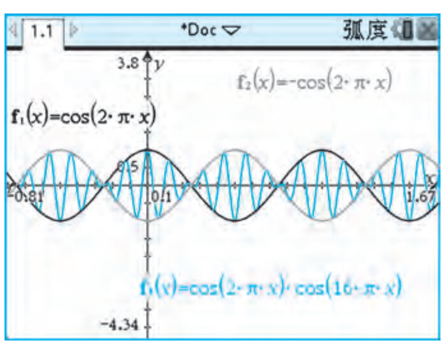


图 10－3－2

从图中可以发现，函数 $f_3(x)$ 的图象夹在两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图象之间.

无线电波是将控制信号(带有信息的低频信号)叠加在载波上传播的，主要有调幅 AM(amplitude modulation)和调频 FM(frequency modulation)两种形式. 调幅广播，控制信号改变(调制)载波的振幅，而载波的频率不变. 调频广播，控制信号改变(调制)载波的频率，但载波的振幅保持不变(图 10-3-3).

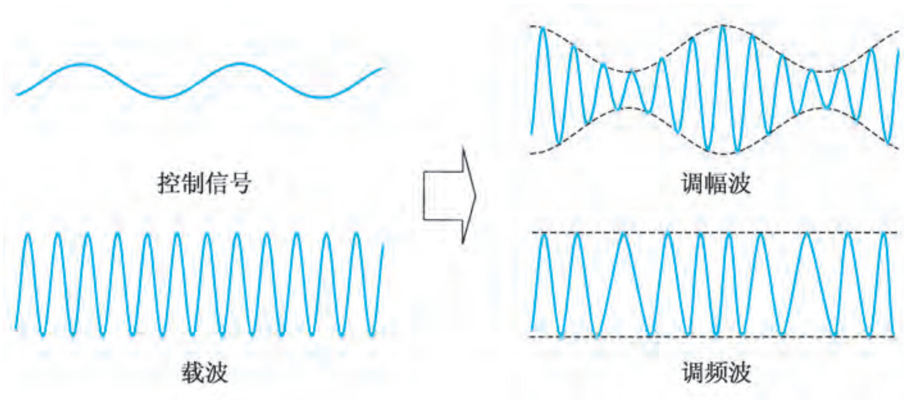


图 10-3-3

习题 10.3

感受·理解

1. 求下列各式的值：

(1) $\sin 135^\circ\cos 15^\circ$；　(2) $\sin 75^\circ\sin 15^\circ$；

(3) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$；　(4) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$.

2. 把下列各式化为和或差的形式：

(1) $\sin 2x\sin x$；

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$；

(3) $\sin(135^\circ-3x)\cos(45^\circ+x)$；

(4) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

3. 把下列各式化为积的形式：

(1) $\sin 18^\circ+\cos 27^\circ$；　(2) $\sin 50^\circ-\cos 50^\circ$；

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$；　(4) $\sin x+\cos x$.

4. 证明下列恒等式：

(1) $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$；

(2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\tan 3\alpha$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\cos 140^\circ$；

(2) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$.

6. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，且 $180^\circ<\theta<270^\circ$，求 $\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$ 的值.

思考·运用

7. 在$\triangle ABC$中，求证：

（1）$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$；

（2）$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

8. 证明：

（1）$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$；

（2）$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=\frac{3}{2}$.

9. 设$\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b$，求$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$的值.

10. 试用不同的方法求$\tan 15°$的值.

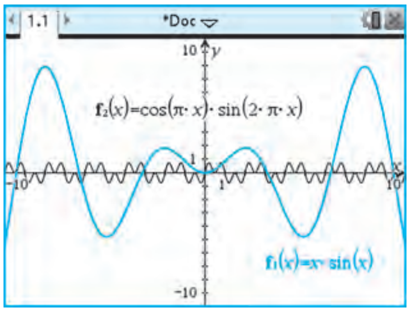
探究·拓展

11. 证明：

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=0$.

12. 把$1+\sin\theta+\cos\theta$化成积的形式.

13.（操作题）在图形计算器中作出函数$f_1(x)=x\cdot\sin x$，$f_2(x)=\cos\pi x\cdot\sin 2\pi x$的图象，请写出作图步聚.



（第 13 题）

问题与探究

正弦函数与余弦函数的叠加

在《数学(必修第一册)》第 7 章里，通过对函数图象的考察，我们已经知道，函数 $g(x)=A\sin(x+\theta)$ 和 $f(x)=A\sin x\ (A\neq 0)$ 具有相同的周期和振幅. 在学习了和角公式以后，我们可以对它们的关系作进一步的研究.

将 $g(x)=A\sin(x+\theta)$ 依和角公式展开，有

$$g(x)=a\sin x+b\cos x,$$

其中 $a=A\cos\theta, b=A\sin\theta$，且 $a^2+b^2=A^2\neq 0$.

一般地，我们把 $a\sin x+b\cos x$（其中实数 a,b 不全为 0）称为正弦函数与余弦函数的叠加.

容易看出，形如 $A\sin(x+\theta)$ 或 $A\cos(x+\theta)$ 的函数都是正弦函数与余弦函数的叠加. 反过来，是不是所有的正弦函数与余弦函数的叠加都可以化成 $A\sin(x+\theta)$ 或 $A\cos(x+\theta)$ 的形式呢?

在本章开始时，我们曾研究过一个简单的例子：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x+\cos x\\&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

回到一般的情形，将函数

$$f(x)=a\sin x+b\cos x\ (a^2+b^2\neq 0)$$

改写为 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$.

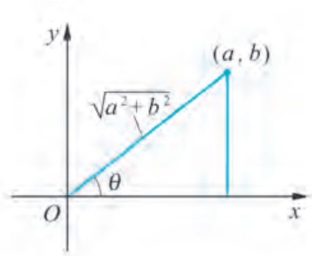


图 1

因为 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 与 $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的平方和是 1，所以如图 1，存在角 $\theta\in[0, 2\pi)$，使得

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta).$$

由此可见，任意的正弦函数与余弦函数的叠加函数 $f(x)$ 都可以化成 $A\sin(x+\theta)$ 或 $A\cos(x+\theta)$ 的形式，而且周期不变.

上面的结论在物理学中有广泛的应用. 例如，两个同频率的正弦交流电相加，得到的是一个同频率的正弦交流电. 利用该结论，我们

也可以解释声波的共振现象.

(1) 你能求出函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅和周期吗?

(2) 矩形 $ABCD$ 所在平面与地面垂直,A 点在地面上, $AB=a$, $BC=b$, AB 与地面成 θ 角(图 2).

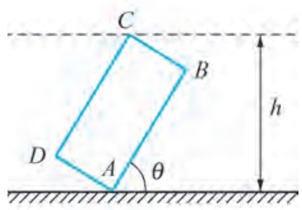


图 2

若记点 C 到地面的距离为 h,试用 θ 的函数表示 h,并求出 h 的最大值.

(3) 在本章引言中,我们用向量的方法得到点 Q 的坐标,即 $\overrightarrow{OQ}=(a\cos x+b\cos(x+\varphi_0),\ a\sin x+b\sin(x+\varphi_0))$, 并分别对 $a=b=1$, $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 以及 $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 进行了研究,试用两种方法将 $y=a\sin x+b\sin(x+\varphi_0)$ 化为 $A\sin(x+\theta)$ 的形式,并求 y 的最大值.

阅 读

弦表与托勒密定理

托勒密(C. Ptolemy,约 90—168)所著《天文集》第一卷中载有弦表,并且讲述了制作弦表的原理. 该原理包括几个公式,其中之一就相当于

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

托勒密推导此公式时主要依据下面定理:在圆的内接四边形中,两条对角线的乘积等于两组对边乘积的和.

如图 3,设四边形 $ABCD$ 为圆 O 的内接四边形,且 AD 为圆 O 的直径,$AD=120$. 又设 $\angle AOB=\beta$, $\angle AOC=\alpha>\beta$, 用 $\mathrm{crd}\,\theta$ 表示大小为 θ 的圆心角所对的弦的长度.

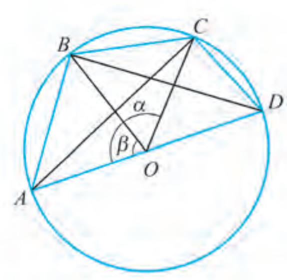


图 3

依据上面的定理,得

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD-AB\cdot CD,$$

$$120\,\mathrm{crd}(\alpha-\beta)=\mathrm{crd}\,\alpha\cdot\mathrm{crd}(180^\circ-\beta)-\mathrm{crd}\,\beta\cdot\mathrm{crd}(180^\circ-\alpha),$$

这就是托勒密推导出来的公式. 我们运用公式

$$\mathrm{crd}\,\theta=120\sin\frac{\theta}{2},$$

得

$$120^2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=120^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ-\beta}{2}-120^2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2},$$

即

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

将$\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$换成 α, β,即得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

由于上述几何定理在托勒密制作弦表时起了重要作用,故被后人称为托勒密定理.

根据公式:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

当知道两个角的正弦值和余弦值,就可以计算出两角和的正弦值和余弦值. 例如,从 $\sin 1^\circ$和 $\cos 1^\circ$开始,令 $\alpha=1^\circ$, $\beta=1^\circ$,就可以推出 $\sin 2^\circ$和 $\cos 2^\circ$. 然后令 $\alpha=1^\circ$, $\beta=2^\circ$,就可以推出 $\sin 3^\circ$和 $\cos 3^\circ$,等等.

根据公式:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},$$

由 $\cos 90^\circ=0$,从 $\theta=90^\circ$开始,反复取半角,可得任意小的角度的正弦值和余弦值(托勒密计算到了 0.25°的正弦值和余弦值). 然后,计算出上述小角度的所有整数倍角的正、余弦值.

总之,从若干特殊角的函数值出发,适当运用三角公式,就能够计算出任意角的正弦值和余弦值. 这是一项非凡的壮举,它让天文学家们忙碌了一千多年.

本章回顾

本章我们重点学习了两组三角恒等式：和角公式、倍角公式，并以它们为工具，研究了三角函数式的化简、计算、恒等式的证明等的问题.

$$
\begin{tikzcd}
C_{(\alpha-\beta)} \arrow[r] \arrow[d] & S_{(\alpha-\beta)} \arrow[r] \arrow[d] & T_{(\alpha-\beta)} \arrow[d] \\
C_{(\alpha+\beta)} \arrow[r] \arrow[d] & S_{(\alpha+\beta)} \arrow[r] \arrow[d] & T_{(\alpha+\beta)} \arrow[d] \\
C_{2\alpha} & S_{2\alpha} \arrow[r] & T_{2\alpha}
\end{tikzcd}
$$

在本章的学习中，化归的数学思想和方法被多次运用，其中，既有从已知到未知的化归（如由余弦的差角公式，推出其余的和或差角公式等），也有从一般到特殊的化归（如从和角公式推出倍角公式）. 有了化归思想，就可以理解三角恒等式推导和变形的思路.

复 习 题

感受 · 理解

1. （1）已知 $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值；

（2）已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

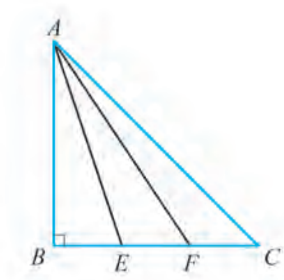
2. 已知 α 是第一象限角，且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\alpha+4\pi)}$ 的值.

3. 证明：

（1）$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)$；

（2）$\dfrac{1+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{2}$.

4. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle B=90^\circ$，点 E，F 将 BC 三等分，求 $\angle EAF$，$\angle FAC$ 的正切值.



（第 4 题）

5. 已知等腰三角形 ABC 的腰长为底边长的 2 倍，求顶角 A 的正弦、余弦和正切的值.

6. 化简：

（1）$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$；

（2）$\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)$；

(3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$.

7. 已知 $\sin \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha$ 是第二象限角，且 $\tan(\alpha+\beta)=1$，求 $\tan \beta$ 的值.

8. 求值：$\dfrac{\sin 15^\circ \cos 5^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 15^\circ \cos 5^\circ - \cos 20^\circ}$.

9. 求下列各函数的周期和值域：

(1) $y=\sin x \cos x$； (2) $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$.

10. 求函数 $y=\cos 2x-2\cos x+1$ 的值域.

11. 已知电流 $I=I_{\mathrm{m}}\sin \omega t$，电压 $V=V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：电功率

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin 2\omega t.$$

思考・运用

12. 已知 $2\cos(2\alpha+\beta)+3\cos\beta=0$，求 $\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha$ 的值.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，求角 C 的大小.

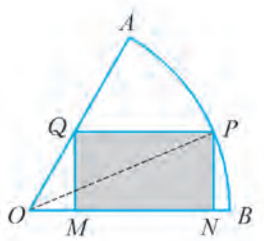
14. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

15. 设 m 为实数，已知 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=m-1$，求 m 的取值范围.

16. 已知函数 $y=\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x$，$x\in \mathbf{R}$.

(1) 求函数的最小正周期；

(2) 求函数的最大值.



(第 17 题)

17. 如图，在半径为 R、圆心角为 60° 的扇形的弧 AB 上任取一点 P，作扇形的内接矩形 $PNMQ$，使点 Q 在 OA 上，点 M，N 在 OB 上，求这个矩形面积的最大值及相应的 $\angle AOP$ 的大小.

探究・拓展

18. (1) 求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)$ 的值；

(2) 求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)$ 的值.

19. (阅读题)由倍角公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，可知 $\cos 2x$ 可以表示为 $\cos x$ 的二次多项式. 对于 $\cos 3x$，我们有

$$\begin{aligned}\cos 3x&=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\\&=(2\cos^2 x-1)\cos x-2(\sin x\cos x)\sin x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x\\&=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

可见 $\cos 3x$ 可以表示为 $\cos x$ 的三次多项式.

一般地，存在一个 n 次多项式 $P_n(t)$，使得 $\cos nx=P_n(\cos x)$，这些多项式 $P_n(t)$ 称为切比雪夫(P. L. Tschebyscheff) 多项式. 请尝试求出 $P_4(t)$，即用一个 $\cos x$ 的四次多项式来表示 $\cos 4x$.

利用结论

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

求出 $\sin 18^\circ$ 的值.

(提示：$3\times 18^\circ=90^\circ-2\times 18^\circ$)

本章测试

一、填空题

1. $\sin 21^\circ\cos 39^\circ+\cos 21^\circ\sin 39^\circ=$________.

2. 若 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan 2\alpha=$ ________.

3. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，若 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ________.

4. 化简：$\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos 2\alpha}=$ ________.

5. 函数 $y=\sin x\cos x\cos 2x$ 的周期是________，值域是________.

6. 若 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2$，$\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\theta=$ ________.

二、选择题

7. 已知 $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　　）.

A. $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$

C. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　D. $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

8. 若 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，则 $\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=$（　　）.

A. $2\sin x$　　B. $2\cos x$

C. $-2\sin x$　　D. $-2\cos x$

9. 已知 $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，若 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，则 $\sin\alpha$ 的值为（　　）.

A. $\dfrac{16}{65}$　　B. $\dfrac{33}{65}$

C. $\dfrac{56}{65}$　　D. $\dfrac{63}{65}$

10. 函数 $f(x)=\cos 2x-6\cos x+1$ 的值域是（　　）.

A. $\left[-\dfrac{9}{2},\ +\infty\right)$　　B. $\left[-\dfrac{9}{2},\ -4\right]$

C. $[-4,\ 8]$　　D. $\left[-\dfrac{9}{2},\ 8\right]$

三、解答题

11. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

12. 已知 α，β 均为锐角，$\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\tan\beta=\dfrac{2}{3}$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

13. 证明：$\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x$.

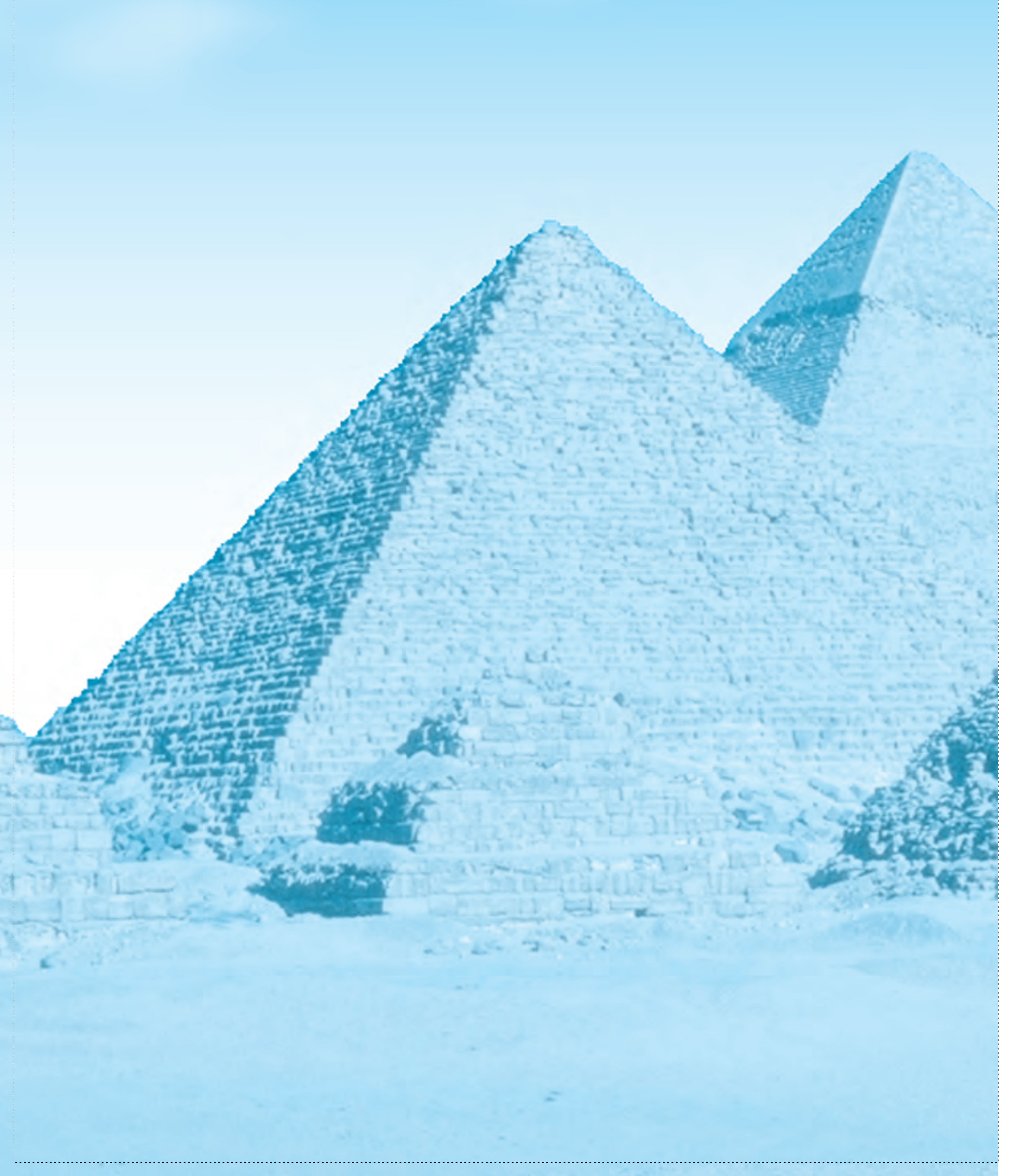
14. 已知 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$，$\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，求下列各式的值：

（1）$\frac{2\sin^2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$；

（2）$\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$.

15. 求函数 $f(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x$ 的周期、最大值和最小值.

第 11 章　解三角形



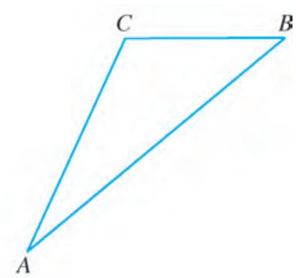
解三角形

- 余弦定理
- 正弦定理
- 余弦定理、正弦定理的应用

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求.

——柯朗

从金字塔的建造到尼罗河两岸的土地丈量，从大禹治水到都江堰的修建，从天文观测到精密仪器的制造……人们都离不开对几何图形的测量、设计和计算.



例如，确定待建隧道的长度，测量河流两岸码头之间的距离，计算卫星的高度……

许多实际问题都可以转化为求三角形的边或角的问题.

如果这个三角形是直角三角形，那么可以利用直角三角形中的边角关系，例如利用勾股定理、锐角的三角函数等进行计算. 但许多情况下，所得到的三角形不一定是直角三角形. 那么，

- 任意三角形的边与角之间存在怎样的关系？
- 如何利用这些关系解决实际问题？

11.1 余弦定理

许多实际问题都可以转化为三角形中边与角的计算问题，而边和角分别涉及长度和方向两个要素，这让我们想到数形结合的有力工具——向量.

在$\triangle ABC$中，有向量等式$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$. 从这个等式出发，我们来探索三角形中的边角关系.

● 如何将向量等式$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$数量化？

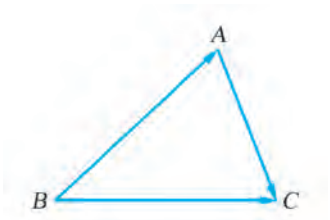


图 11-1-1

因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$（图 11-1-1），

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\\&=|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-A)+|\overrightarrow{AC}|^2\\&=c^2-2cb\cos A+b^2,\end{aligned}$$

本章如无特别说明，a，b，c分别表示$\triangle ABC$中角A，B，C所对边的长.

即
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

上述等式表明，三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 这样，我们得到**余弦定理**(cosine theorem)：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

余弦定理可以看作勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例.

思　考

尝试用勾股定理证明余弦定理.

余弦定理也可以写成如下形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

我们把三角形的三个角和三条边叫作三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫作**解三角形**.

用余弦定理来解三角形,其结果唯一确定吗? 为什么?

例 1 根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01,角度精确到 0.1°):

(1) 已知 $b=3$, $c=1$, $A=60°$,求 a;

(2) 已知 $a=4$, $b=5$, $c=6$,求 A.

解 (1) 由余弦定理,得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 60°=7,$$

所以
$$a=\sqrt{7}\approx 2.65.$$

(2) 由余弦定理,得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=0.75,$$

所以
$$A\approx 41.4°.$$

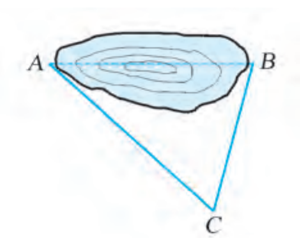


图 11-1-2

例 2 A, B 两地之间隔着一个水塘(图 11-1-2),现选择另一点 C,测得 $CA=182\text{ m}$, $CB=126\text{ m}$, $\angle ACB=63°$,求 A,B 两地之间的距离(精确到 1 m).

解 由余弦定理,得

$$\begin{aligned}AB^2&=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos C\\&=182^2+126^2-2\times182\times126\cos 63°\\&\approx 28\,178.18(\text{m}^2),\end{aligned}$$

所以
$$AB\approx 168\text{ m}.$$

答 A,B 两地之间的距离约为 168 m.

例 3 用余弦定理证明:在 $\triangle ABC$ 中,当 C 为锐角时,$a^2+b^2>c^2$;当 C 为钝角时,$a^2+b^2<c^2$.

证明 当 C 为锐角时, $\cos C>0$.

由余弦定理,得

怎样用余弦定理判定一个三角形是锐角三角形、直角三角形或钝角三角形?

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2,$$

即
$$a^2+b^2>c^2.$$

同理可证,当 C 为钝角时, $a^2+b^2<c^2$.

利用余弦定理,可以解决以下两类解三角形的问题:

(1) 已知三边,求三个角;

(2) 已知两边和它们的夹角,求第三边和其他两个角.

练 习

1. 在$\triangle ABC$中，
   (1) 已知$a=6$，$b=5$，$c=4$，求$\cos C$；
   (2) 已知$A=60^\circ$，$b=4$，$c=7$，求a；
   (3) 已知$a=7$，$b=5$，$c=3$，求A；
   (4) 已知$a=7$，$b=8$，$\cos C=\dfrac{13}{14}$，求c.
2. 若三条线段的长分别为 5，6，7，则用这三条线段(   ).
   A. 能组成直角三角形　　B. 能组成锐角三角形
   C. 能组成钝角三角形　　D. 不能组成三角形
3. 若$\triangle ABC$的三边a，b，c满足$c^2<a^2+b^2$，此三角形是锐角三角形吗？
4. 在$\triangle ABC$中，已知$a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$，求C.
5. 在$\triangle ABC$中，已知$(a+b+c)(a-b+c)=ac$，求B.
6. 两游艇自某地同时出发，一艇以 10 km/h 的速度向正北方向行驶，另一艇以 7 km/h的速度向北偏东 45°的方向行驶. 问：经过 40 min，两艇相距多远(精确到 0.01 km)？

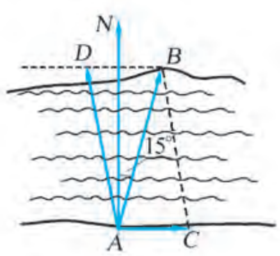


图 11-1-3

例 4 在长江某渡口处，江水以 5 km/h 的速度向东流. 一渡船从长江南岸的A码头出发，预定要在 0.1 h 后到达北岸的B码头(图 11-1-3). 设$\overrightarrow{AN}$为正北方向，已知B码头在A码头北偏东 15°的方向上，并与A码头相距 1.2 km. 该渡船应按什么方向航行？速度是多少(角度精确到 0.1°，速度精确到 0.1 km/h)？

解 如图 11-1-3，船按$\overrightarrow{AD}$方向开出，$\overrightarrow{AC}$方向为水流方向，以AC为一边、AB为对角线作▱$ACBD$，其中

$$AB=1.2(\text{km}),\ AC=5\times0.1=0.5(\text{km}).$$

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$$BC^2=1.2^2+0.5^2-2\times1.2\times0.5\cos(90^\circ-15^\circ)\approx1.38(\text{km}^2),$$

所以
$$AD=BC\approx1.17(\text{km}).$$

因此，船的航行速度为$1.17\div0.1=11.7(\text{km/h})$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$$\cos\angle ABC=\frac{1.2^2+1.17^2-0.5^2}{2\times1.2\times1.17}\approx0.9113,$$

所以
$$\angle ABC\approx24.3^\circ.$$

因此，$\angle DAN=\angle DAB-\angle NAB=\angle ABC-15^\circ\approx9.3^\circ$.

答 渡船应按北偏西 9.3°的方向，并以 11.7 km/h 的速度航行.

例 5 在$\triangle ABC$中，已知$a\cos B=b\cos A$，求证：$\triangle ABC$为等腰三角形.

证明 由余弦定理,得

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

整理,得 $$a^2=b^2.$$

因为 $a>0$, $b>0$,所以 $a=b$.

因此,$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

例 6 如图 11-1-4,AM 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,求证:

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

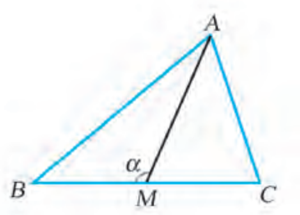


图 11-1-4

证明 设$\angle AMB=\alpha$,则$\angle AMC=180^\circ-\alpha$.

在$\triangle ABM$ 中,由余弦定理,得

$$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\alpha.$$

在$\triangle ACM$ 中,由余弦定理,得

$$AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos(180^\circ-\alpha).$$

因为 $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, $BM=MC=\frac{1}{2}BC$,

所以 $$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{1}{2}BC^2,$$

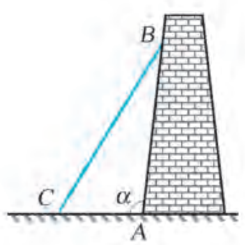
从而 $$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

思 考

我们曾经用平面几何的方法证明过结论:“平行四边形各边的平方和等于两条对角线的平方和.”想一想,这个结论与例 6 有何联系?

练 习

1. 在$\triangle ABC$ 中,如果 $a:b:c=2:3:4$,求 $\cos C$ 的值.
2. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=c\cos B$,试判断$\triangle ABC$ 的形状.
3. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a^2-b^2=(a\cos B+b\cos A)^2$,试判断$\triangle ABC$ 的形状.
4. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=2$, $b=3$, $C=60^\circ$,求证:$\triangle ABC$ 为锐角三角形.
5. 在$\triangle ABC$ 中,设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{3}$,求 AB 的长(精确到 0.01).
6. 如图,长为 7 m 的梯子 BC 靠在斜壁上,梯脚 C 与壁基 A 相距 1.5 m,梯顶 B 在沿着壁向上 6 m 的地方,求壁面和地面所成的角 α(精确到 0.1°).



(第 6 题)

习题 11.1

感受·理解

1. 在$\triangle ABC$中，

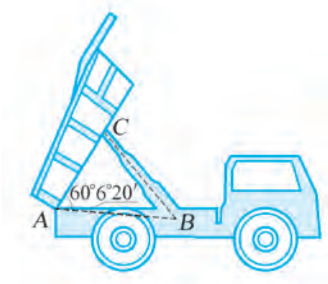
(1) 已知$a=24$，$b=13$，$C=108^\circ$，求c，B；

(2) 已知$b=2$，$c=10$，$A=42^\circ$，求a，C；

(3) 已知$a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，求最小的内角.

2. 牵牛星和织女星分别距离地球约 17 光年和 26 光年，从地球上观测这两颗星的张角为34°，求牵牛星与织女星之间的距离(精确到 0.01 光年).

3. 在$\square ABCD$中，已知$AB=12\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$，$A=60^\circ$，求平行四边形两条对角线的长.



（第 4 题）

4. 自动卸货汽车的车箱采用液压机构，设计时需要计算油泵顶杆BC的长度(如图). 已知车箱的最大仰角为60°，油泵顶点B与车箱支点A之间的距离为1.95 m，AB与水平线之间的夹角为$6^\circ20'$，AC的长为 1.40 m，试计算BC的长(精确到 0.01 m).

5. 在$\triangle ABC$中，已知$c=2a\cos B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求A的大小.

7. 用余弦定理证明：在$\triangle ABC$中，

(1) $a=b\cos C+c\cos B$；

(2) $b=c\cos A+a\cos C$；

(3) $c=a\cos B+b\cos A$.

这三个关系式也称为射影定理.

思考·运用

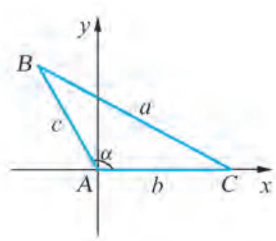
8. 用余弦定理证明：平行四边形两条对角线平方的和等于四条边平方的和.

9. 试用向量的方法证明第 7 题中的结论.

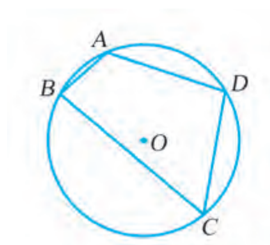
10. 在$\triangle ABC$中，已知$BC=a$，$AC=b$，且a，b是方程$x^2-13x+40=0$的两个根，$C=60^\circ$，求AB的长.

探究·拓展

11. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=\alpha$，$AC=b$，$AB=c$. 建立如图所示的平面直角坐标系，利用两点间的距离公式计算BC^2，并由此证明余弦定理.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. (1) 如图，在圆的内接四边形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求$\cos A$的值；

(2) 在圆的内接四边形$ABCD$中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，求$\cos A$的值(用a，b，c，d表示).

11.2 正弦定理

在上节中,我们通过等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 两边同时"平方",将向量等式转化为数量等式,进而推出了余弦定理. 为了进一步探索三角形的边角关系,

● 还有其他途径将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化吗?

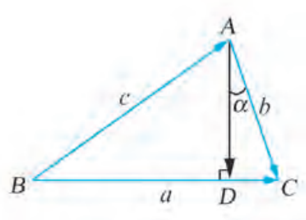


图 11-2-1

在△ABC 中,不妨设 C 为最大角,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D, $\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角为 α (图 11-2-1).

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$,

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

即
$$0=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AD}|\cos(90^\circ+B)+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\alpha.$$

当 C 为锐角或直角时,$\alpha=90^\circ-C$;当 C 为钝角时,$\alpha=C-90^\circ$. 于是有

$$-c\sin B+b\sin C=0,$$

即
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可得
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

所以
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

上述等式表明,三角形的各边与它所对角的正弦的比相等. 这样,我们得到**正弦定理**(sine theorem):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

思 考

在图 11-2-1 中,若 C 为锐角,则 $\sin B=\frac{AD}{c}$,$\sin C=\frac{AD}{b}$, 所以 $c\sin B=b\sin C$. 请利用这个思路,证明正弦定理.

例 1 如图 11-2-2,在△ABC 中, $A=30^\circ$, $C=100^\circ$, $a=10$, 求 b,c(精确到 0.01).

解 因为 $A=30^\circ$, $C=100^\circ$,所以 $B=50^\circ$.

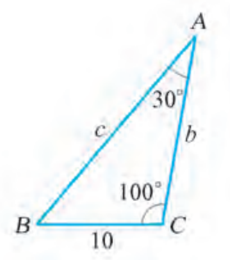


图 11-2-2

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,所以

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 15.32,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 100^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 19.70.$$

因此,b,c 的长分别为 15.32 和 19.70.

例 2 根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01,角度精确到0.1°):

(1) $a=16$,$b=26$,$A=30^\circ$;

(2) $a=30$,$b=26$,$A=30^\circ$.

解 (1) 由正弦定理,得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{26\sin 30^\circ}{16}=\frac{13}{16},$$

所以 $B_1\approx 54.3^\circ$ 或 $B_2=180^\circ-54.3^\circ=125.7^\circ$.

因为 $B_2+A=125.7^\circ+30^\circ=155.7^\circ<180^\circ$,所以 B_2 也符合要求,从而 B 有两解(图 11-2-3):

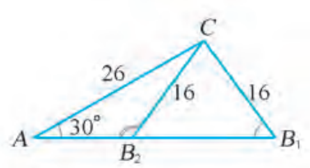


图 11-2-3

$$B_1=54.3^\circ \text{ 或 } B_2=125.7^\circ.$$

当 $B_1=54.3^\circ$ 时,

$$C_1=180^\circ-(A+B_1)=180^\circ-(30^\circ+54.3^\circ)=95.7^\circ,$$

$$c_1=\frac{a\sin C_1}{\sin A}=\frac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 31.84;$$

当 $B_2=125.7^\circ$ 时,

$$C_2=180^\circ-(A+B_2)=180^\circ-(30^\circ+125.7^\circ)=24.3^\circ,$$

$$c_2=\frac{a\sin C_2}{\sin A}=\frac{16\sin 24.3^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 13.17.$$

(2) 由正弦定理,得

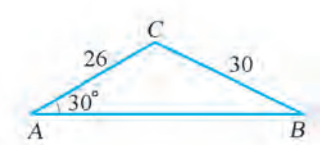


图 11-2-4

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{26\sin 30^\circ}{30}=\frac{13}{30},$$

所以 $B_1=25.7^\circ$ 或 $B_2=180^\circ-25.7^\circ=154.3^\circ$.

因为 $B_2+A=154.3^\circ+30^\circ=184.3^\circ>180^\circ$,所以 B_2 不符合要求,从而 B 只有一解(图 11-2-4),

我们还可以这样来舍去 B_2:因为 $b<a$,所以 $B<A$,即 $B<30^\circ$,故 $B_2=154.3^\circ$ 不符合要求.

$$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(30^\circ+25.7^\circ)=124.3^\circ,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{30\sin 124.3^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 49.57.$$

利用正弦定理，可以解决以下两类解三角形的问题：

(1) 已知两角和任一边，求其他两边和一角；

(2) 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

练　习

1. 一个三角形的两个内角分别为 30°和 45°，如果 45°角所对边的长为 8，那么 30°角所对边的长为(　　).

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{6}$

2. 在$\triangle ABC$ 中，

(1) 已知 $A=75°$, $B=45°$, $c=3\sqrt{2}$，求 a, b；

(2) 已知 $A=30°$, $B=120°$, $b=12$，求 a, c.

3. 根据下列条件解三角形：

(1) $b=40$, $c=20$, $C=25°$；

(2) $b=13$, $a=26$, $B=30°$；

(3) $A=45°$, $C=30°$, $c=10$.

4. 判断下列结论是否正确，若不正确，试举例说明；若正确，请说明理由.

(1) 若 A, $B\in(0, \pi)$，且 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$；

(2) 若 A, B 是三角形的两个内角，且 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$.

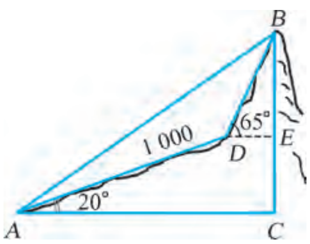


图 11-2-5

例 3　如图 11-2-5，某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 35°，沿倾斜角为 20°的斜坡前进 1 000 m 后到达 D 处，又测得山顶的仰角为 65°，求山的高度 BC(精确到 1 m).

分析　要求 BC，要先求出 AB，为此考虑解$\triangle ABD$.

解　过点 D 作 $DE\parallel AC$，交 BC 于 E.

因为 $\angle DAC=20°$，所以$\angle ADE=160°$，于是

$$\angle ADB=360°-160°-65°=135°.$$

又因为 $\angle BAD=35°-20°=15°$，所以 $\angle ABD=30°$.

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得

$$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{1\,000\sin 135°}{\sin 30°}=1\,000\sqrt{2}(\mathrm{m}).$$

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$BC=AB\sin 35°=1\,000\sqrt{2}\sin 35°\approx 811(\mathrm{m}).$$

答　山的高度约为 811 m.

例 4　在$\triangle ABC$ 中，已知 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解　令 $\dfrac{a}{\sin A}=k$，由正弦定理，得

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

代入已知条件，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

即

$$\tan A=\tan B=\tan C.$$

通过正弦定理，可以实现边角互化.

又因为 $A, B, C\in(0, \pi)$，所以 $A=B=C$.

故 $\triangle ABC$ 为正三角形.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线(图 11－2－6)，用正弦定理证明：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

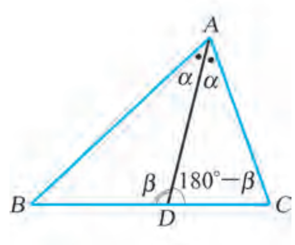


图 11－2－6

证明 设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle BDA=\beta$，则 $\angle CAD=\alpha$，$\angle CDA=180^\circ-\beta$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中分别运用正弦定理，得

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\alpha}.$$

又因为 $\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$，所以

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC},$$

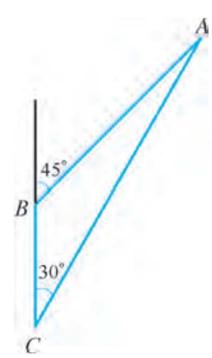
即

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

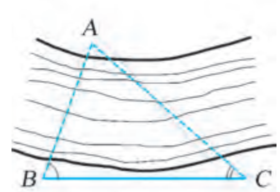
你能用平面几何的方法来证明例 5 的结论吗？

练　习

1. 已知轮船 A 和轮船 B 同时离开 C 岛，A 船沿北偏东 30°的方向航行，B 船沿正北方向航行(如图). 若 A 船的航行速度为 40 n mile/h，1 h 后，B 船测得 A 船位于 B 船的北偏东 45°的方向上，则此时 A，B 两船相距________n mile.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩 A，B(如图). 要测算出 A，B 两点间的距离，测量人员在岸边定出基线 BC，测得 $BC=78.35$ m，$B=69°43'$，$C=41°12'$，试计算 AB 的长(精确到 0.01 m).

3. 在一座 10 m 高的观测台顶测得对面一水塔塔顶的仰角为 $60°$，塔底的俯角为 $45°$，求水塔的高度.

4. 在$\triangle ABC$中，若 $A=60°$，$a=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$（　　）.

A. 2　　　　B. $\dfrac{1}{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状：

(1) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$；　　　　(2) $a\cos A=b\cos B$.

习题 11.2

感受・理解

1. 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知 $A=135°$，$B=15°$，$c=1$，求这个三角形的最长边的长；

(2) 已知 $A=26°$，$C=47°$，$b=16$，求 a，c，B；

(3) 已知 $a=6$，$b=6\sqrt{3}$，$B=120°$，求 c；

(4) 已知 $\sqrt{2}a=2b\sin A$，求 B.

2. 根据下列条件解三角形：

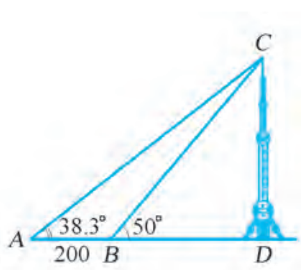
(1) $A=30°$，$B=105°$，$c=\sqrt{2}$；

(2) $a=14$，$b=7\sqrt{6}$，$B=60°$；

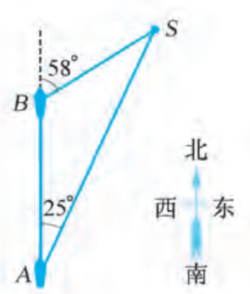
(3) $b=47$，$c=38$，$C=110°$；

(4) $b=25$，$c=12$，$C=23°$.

3. 如图，从 A 点和 B 点测得上海东方明珠电视塔塔顶 C 的仰角分别为 $38.3°$ 和 $50°$（A，B 两点与塔底 D 点在同一条直线上），$AB=200$ m，求东方明珠电视塔的高度（精确到 1 m）.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，一艘船以 42 n mile/h 的速度向正北方向航行. 从 A 处看灯塔 S 位于船北偏东 $25°$的方向上，30 min 后船航行到 B 处，从 B 处看灯塔 S 位于船北偏东 $58°$的方向上. 求灯塔 S 与 B 之间的距离（精确到 0.1 n mile）.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

6. 在$\triangle ABC$中，已知 $a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思考・运用

7. 在任意三角形中，作一边上的高，就可以将边角关系问题转化为解直角三角形问题. 仿照这种方法，在$\triangle ABC$中，设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，证明三角形的面积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，并运用这一结论解决下面的问题：

(1) 在$\triangle ABC$中,已知$a=2$, $b=3$, $C=150°$,求$S_{\triangle ABC}$;

(2) 在$\triangle ABC$中,已知$c=10$, $A=45°$, $C=30°$,求b和$S_{\triangle ABC}$;

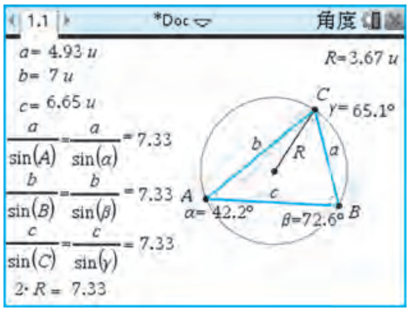
(3) 证明正弦定理.

8. 在$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$,求证:$\triangle ABC$为正三角形.

9. 在$\triangle ABC$中,$\angle BAC$的外角平分线交BC的延长线于D,用正弦定理证明:$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

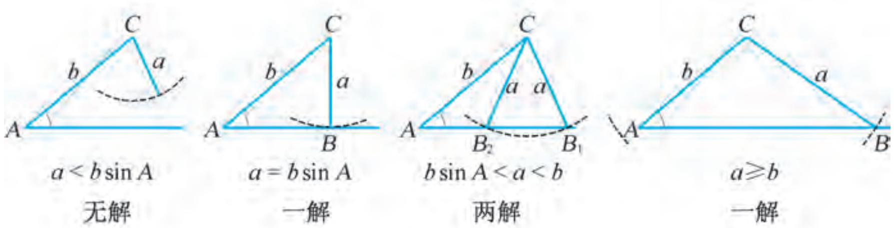
探究・拓展

10. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,斜边c等于$\mathrm{Rt}\triangle ABC$外接圆的直径$2R$,故有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$,这一关系对任意三角形也成立吗(如图)?探索并证明你的结论.



(第 10 题)

11. (阅读题)在已知三角形的两边a, b和一边的对角A,求角B时,如果A为锐角,那么可能出现以下情况(如图):



(第 11 题)

如果A为钝角,那么可能会出现哪几种情况?试画出草图加以说明.

11.3 余弦定理、正弦定理的应用

余弦定理、正弦定理体现了三角形中边角之间的关系，在测量学、运动学、力学、电学等许多领域有着广泛的应用.

● 怎样利用余弦定理、正弦定理解决与测量和几何计算有关的实际问题？

应用余弦定理、正弦定理解决实际问题时，首先，要根据题意建立数学模型——三角形；其次，利用余弦定理、正弦定理来解三角形；最后，根据问题的实际意义，对解三角形所得的结论加以检验、取舍. 在运算过程中，应根据实际需要进行近似计算.

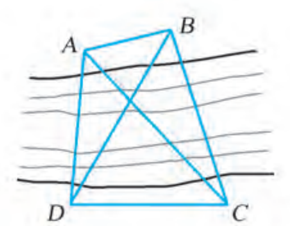


图 11-3-1

例 1 如图 11-3-1，为了测量河对岸 A，B 两点之间的距离，在河岸这边取点 C，D，测得 $\angle ADC=85°$，$\angle BDC=60°$，$\angle ACD=47°$，$\angle BCD=72°$，$CD=100$ m. 设 A，B，C，D 在同一平面内，试求 A，B 两点之间的距离(精确到 1 m).

解 在 $\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=85°$，$\angle ACD=47°$，则 $\angle DAC=48°$.

又 $DC=100$ m，由正弦定理，得

$$AC=\frac{DC\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\frac{100\sin 85°}{\sin 48°}\approx 134.05(\text{m}).$$

在 $\triangle BDC$ 中，$\angle BDC=60°$，$\angle BCD=72°$，则 $\angle DBC=48°$.

又 $DC=100$ m，由正弦定理，得

$$BC=\frac{DC\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\frac{100\sin 60°}{\sin 48°}\approx 116.54(\text{m}).$$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB\\&=134.05^2+116.54^2-2\times134.05\times116.54\cos(72°-47°)\\&\approx 3\,233.95(\text{m}^2),\end{aligned}$$

所以 $AB\approx 57(\text{m})$.

答 A，B 两点之间的距离约为 57 m.

例 2 如图 11-3-2，某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信

方位角是从指北方向线顺时针转到目标方向线的角.

号. 我海军舰艇在 A 处获悉后，测出该渔轮在方位角为 $45°$、距离为 10 n mile 的 C 处，并测得该渔轮正沿方位角为 $105°$ 的方向，以 9 n mile/h的速度向小岛靠拢. 我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救. 求舰艇的航向和靠拢渔轮所需的时间（角度精确到 $0.1°$，时间精确到 1 min）.

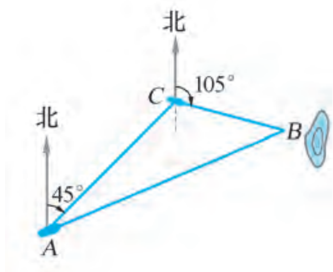


图 11－3－2

解 设舰艇收到信号后 x h 在 B 处靠拢渔轮，则 $AB=21x$，$BC=9x$. 又 $AC=10$，$\angle ACB=45°+(180°-105°)=120°$.

由余弦定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB,$$

即 $$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times10\times9x\cos120°,$$

化简，得 $$36x^2-9x-10=0,$$

解得 $x=\frac{2}{3}$（负值舍去），$\frac{2}{3}\text{h}=40\text{ min}$.

由正弦定理，得

$$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin\angle ACB}{AB}=\frac{9x\sin120°}{21x}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle BAC\approx21.8°$，方位角为 $45°+21.8°=66.8°$.

答 舰艇应沿着方位角为 $66.8°$的方向航行，经过 40 min 就可靠拢渔轮.

例 3 作用于同一点的三个力 F_1，F_2，F_3 平衡. 已知 $F_1=30\text{ N}$，$F_2=50\text{ N}$，F_1 与 F_2 之间的夹角是 $60°$，求 F_3 的大小与方向（精确到 $0.1°$）.

解 F_3 应和 F_1，F_2 的合力 F 平衡，所以 F_3 和 F 在同一直线上，并且大小相等，方向相反.

如图 11－3－3，在$\triangle OF_1F$ 中，由余弦定理，得

$$F=\sqrt{30^2+50^2-2\times30\times50\cos120°}=70(\text{N}).$$

再由正弦定理，得

$$\sin\angle F_1OF=\frac{50\sin120°}{70}=\frac{5\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle F_1OF\approx38.2°$，从而 $\angle F_1OF_3\approx141.8°$.

答 F_3 为 70 N，F_3 和 F_1 间的夹角为 141.8°.

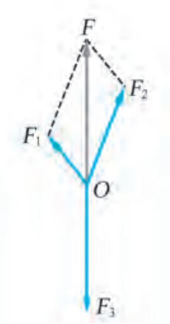


图 11-3-3

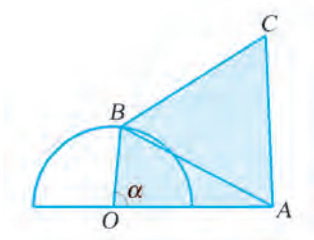


图 11-3-4

例 4 如图 11-3-4，半圆 O 的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，$OA=2$，B 为半圆上任意一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC. 问：点 B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？

分析 四边形 $OACB$ 的面积由点 B 的位置唯一确定，因此可设 $\angle AOB=\alpha$，再用 α 的三角函数来表示四边形 $OACB$ 的面积.

解 设 $\angle AOB=\alpha$. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得

$$AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\alpha=5-4\cos\alpha.$$

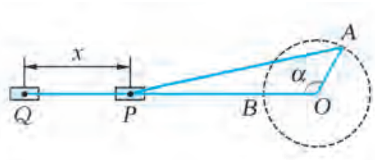
于是，四边形 $OACB$ 的面积为

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\\&=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)\\&=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5}{4}\sqrt{3}=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{4}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

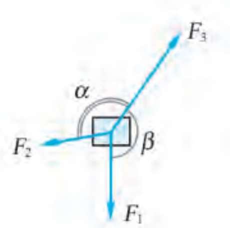
因为 $0<\alpha<\pi$，所以当 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$，即 $\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$ 时，四边形 $OACB$ 的面积最大.

练习

1. 曲柄连杆机构的示意图如图所示. 当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在 Q 的位置. 当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转角 α 时，P 和 Q 之间的距离是 x cm. 已知 $OA=25$ cm，$AP=125$ cm，根据下列条件，求 x 的值（精确到 0.1 cm）：
   (1) $\alpha=50°$； (2) $\alpha=135°$.



（第 1 题）



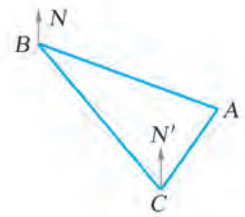
（第 2 题）

2. 如图，用两根绳子牵引重为 $F_1 = 100\ \mathrm{N}$ 的物体，两根绳子的拉力分别为 F_2，F_3，此时平衡. 如果 $F_2 = 80\ \mathrm{N}$，F_2 与 F_3 的夹角 $\alpha = 135°$.

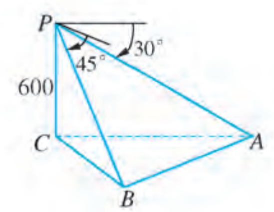
   (1) 求 F_3 的大小(精确到 1 N)；

   (2) 求 F_3 与 F_1 的夹角 β 的值(精确到 0.1°).

3. 如图，货轮在海上以 40 n mile/h 的速度由 B 向 C 航行，航行的方位角 $\angle NBC = 140°$，A 处有灯塔，其方位角 $\angle NBA = 110°$. 在 C 处观察灯塔 A 的方位角 $\angle N'CA = 35°$. 由 B 到 C 需航行 0.5 h，求 C 到灯塔 A 的距离(精确到0.01 n mile).



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，某人在高出海面 600 m 的山上 P 处，测得海面上的航标 A 在正东方向，俯角为 30°，航标 B 在南偏东 60°的方向上，俯角为 45°，求这两个航标间的距离.

习题 11.3

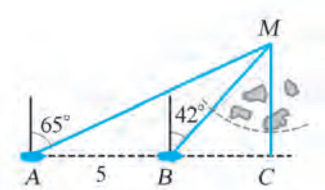
感受 · 理解

1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$.

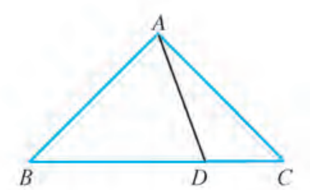
2. 从 200 m 高的电视塔塔顶 A 测得地面上某两点 B，C 的俯角分别为 30° 和 45°，$\angle BAC = 45°$，求这两个点之间的距离(精确到 0.1 m).

3. 飞机的航线和山顶在同一个铅直平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 600 km/h，飞行员看到山顶的俯角为 18°30′，经过 288 s 后又看到山顶的俯角为 81°，求山顶的海拔高度(精确到 1 m).

4. 如图，一船由西向东航行，测得某岛的方位角为 65°，前进5 km后测得此岛的方位角为 42°. 已知该岛周围 3 km 内有暗礁，如果继续东行，有无触礁危险？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B = 45°$，D 是边 BC 上一点，$AD = 10$，$AC = 14$，$DC = 6$，求 AB 的长.

6. 作用于同一点的三个力 F_1，F_2，F_3 平衡，且 F_1，F_2 的夹角为 θ_3，F_2，F_3 的夹角为 θ_1，F_3，F_1 的夹角为 θ_2. 求证：$\dfrac{F_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{F_2}{\sin\theta_2} = \dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$.

7. 把一根长为 30 cm 的木条锯成两段，分别作钝角三角形 ABC 的两边 AB 和 BC，且 $\angle ABC = 120°$. 如何锯断木条，才能使第三条边 AC 最短？

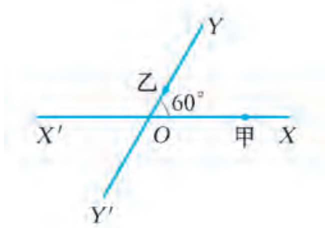
思考·运用

8. 如图，有两条相交成 $60°$ 角的直路 XX'，YY'，交点是 O. 甲、乙分别在 OX，OY 上，起初甲离 O 点 3 km，乙离 O 点 1 km. 后来甲沿 XX' 的方向，乙沿 $Y'Y$ 的方向，同时以 4 km/h 的速度步行.

(1) 起初两人间的距离是多少？

(2) t h 后两人间的距离是多少？

(3) 什么时候两人间的距离最短？



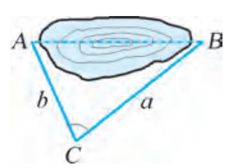
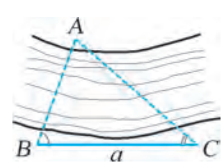
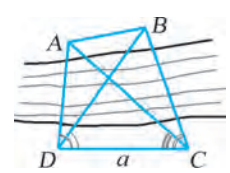
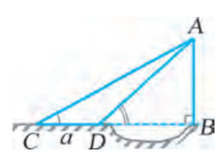
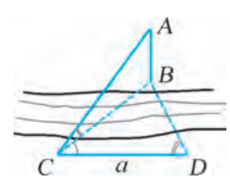
（第 8 题）

（第 9 题）

9. 如图，A，B，C 为山脚两侧共线的三点，在山顶 P 处测得三点的俯角分别为 α，β，γ. 计划沿直线 AC 开通穿山隧道，为求出隧道 DE 的长度，你认为还需要直接测量出 AD，EB，BC 中的哪些线段的长度？根据条件，并把你认为需要测量的线段长度作为已知量，写出计算隧道 DE 长度的运算步骤.

探究·拓展

10. 解三角形在测量上有着广泛的应用，下面各图描述了测量中的一些基本问题，你能根据图示说出求解 AB 的过程吗？

<table>
<tr><td rowspan="2">求距离</td><td>两点间不可达又不可视</td><td>两点间可视但不可达</td><td>两点都不可达</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">求高度</td><td>底部可达</td><td colspan="2">底部不可达</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

问题与探究

海伦-秦九韶公式

海伦(Heron,约公元 1 世纪)是古希腊亚历山大时期的数学家,以他的名字命名的“海伦公式”是几何学中的著名公式,它给出了由三角形的三边长 a, b, c 计算面积的公式

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right).$$

我国南宋时期杰出的数学家秦九韶(约 1202—1261),在其所著《数书九章》里,独立地给出由三角形的三边求其面积的“三斜求积术”. 该书第五卷第二题是:

秦九韶(约 1202—1261),四川安岳人. 1247 年写成名著《数书九章》,共 18 章,内列 81 题,分为九大类.

“问有沙田一段,有三斜,其小斜一十三里,中斜一十四里,大斜一十五里,里法三百步,欲知为田几何.”

“答曰:田积三百一十五顷.”

“术曰:以少广求之. 以小斜幂并大斜幂,减中斜幂,余半之,自乘于上;以小斜幂乘大斜幂,减上,余四约之,为实;一为从隅,开平方得积.”

这里的大斜、中斜和小斜分别为三角形的三边的长.

“三斜求积”用式子可表示为

$$\text{面积}^2=\frac{1}{4}\left[\text{小}^2\cdot\text{大}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2}\right)^2\right].$$

式中“大”“中”和“小”分别指“大斜”“中斜”和“小斜”.

如果三边的长用字母 a, b 和 c 表示,那么三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

“三斜求积”公式的证明已经失传,吴文俊教授根据我国古代几何证明的传统特点作了一个补证.

图 1

如图 1,作大斜上的高分大斜成两部分,作为勾股形的弦和股,由于三角形面积等于“$\frac{1}{2}\times$高$\times$大”这一事实是我国古代数学家早就知道的,所以问题归结为怎样求高,而高又可以通过股与小求得,因此只要求出股就可以了.

根据刘徽得出的公式

$$\text{股}=\frac{(\text{股弦和})^2-\text{勾}^2}{2\times\text{股弦和}},$$

知道由股弦和与勾^{2}可以求股,所以问题又归结为求勾^{2}与股弦和. 这很简单,因为

$$\text{股弦和}=\text{大},\text{勾}^2=\text{弦}^2-\text{股}^2=\text{中}^2-\text{小}^2,$$

所以

$$股=\frac{(股弦和)^2-勾^2}{2\times 股弦和}=\frac{大^2-(中^2-小^2)}{2\times 大},$$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2\times 大}\right)^2,$$

从而得到“三斜求积”公式.

请你解答下列问题:

(1) 将吴文俊教授的证法用代数语言表达出来;

(2) 证明“海伦公式”与“三斜求积”公式是等价的;

(3) 用余弦定理和正弦定理证明“三斜求积”公式或“海伦公式”.

阅读

流星不是地球蒸发物

仰望星空,时有流星划过天际.“流星,飞走天空,可能有一秒时的凝望,然而这一瞥的光明,已长久遗留在人的心怀里.”(引自冰心《繁星·春水》)人们赞美流星,是因为它燃烧着走完自己的全部路程.

流星是什么? 自古以来人们做过无数种猜测. 古希腊哲学家亚里士多德说,那是地球的蒸发物. 后来还有人认为,流星是地球上的磷火升空后的燃烧现象.

10 世纪阿拉伯天文学家阿尔·库希(al-Kuhi)设计出一种方案,通过两个观察者异地同时观测同一颗流星来测定流星的高度. 18 世纪与 19 世纪之交,德国天文学家本森伯格(J. Benzenberg,1777—1846)和布兰第斯(H. W. Brandes,1777—1834)独立采用同样的方法测定流星的高度.

如图 2,设有两个观察者在地球上 A,B 两地同时观察到一颗流星 S,仰角分别是 α 和 β(MA,MB 表示当地的地平线).

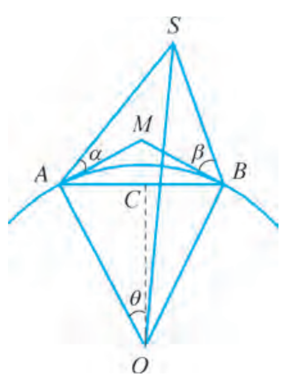


图 2

由 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度 l 和地球的半径 R,可求得 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 $2\theta=\frac{l}{2\pi R}\times 360^\circ$,则 $AB=2R\sin\theta$. 在 $\triangle SAB$ 中,$\angle SAB=\theta+\alpha$,

$\angle SBA=\theta+\beta$，故由 AB 的大小可以求得 SA；在 $\triangle SAO$ 中，$\angle SAO=\angle OAM+\angle MAS=90^\circ+\alpha$，可求得 OS，再减去地球半径 R，就得到流星 S 的高度. 但是，阿尔·库希当时还不知道三角形的正弦定理，而关于余弦定理，中世纪的数学家只知道《原本》中的几何形式，因此他的方法非常繁琐.

阿拉伯学者阿布·瓦法（Abū'l-Wafā，940—998）首先提出并证明了球面三角形的正弦定理，而平面三角形的正弦定理的证明最先是纳绥尔丁·图西（Nasir-Din-Tusi，1201—1274）给出的.《论四边形》被称为是纳绥尔丁最重要的数学论著，是数学史上流传至今最早的三角学专著，书中他明确陈述了正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 他的工作完成了球面三角和平面三角的系统化，使三角学脱离天文学而成为数学的独立分支.

有了余弦定理和正弦定理，我们可以方便地解决流星高度问题.

在图 2 中，设 $\alpha=23.2^\circ$，$\beta=44.3^\circ$，$l=500(\text{km})$，$R=6\,371(\text{km})$，则

$$\theta=\frac{1}{2}\times\frac{500}{2\pi R}\times 360^\circ\approx 2.248\,3^\circ.$$

从而得

$$AB=2R\sin\theta\approx 499.870\,8(\text{km}).$$

在 $\triangle SAB$ 中，$\angle SAB=\theta+\alpha=25.448\,3^\circ$，$\angle SBA=\theta+\beta=46.548\,3^\circ$，所以 $\angle ASB=108.003\,4^\circ$.

由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin\angle ASB}=\dfrac{AS}{\sin\angle SBA}$，得 $AS\approx 381.565\,5(\text{km})$.

在 $\triangle SAO$ 中，$\angle SAO=90^\circ+\alpha=113.2^\circ$.

由余弦定理得

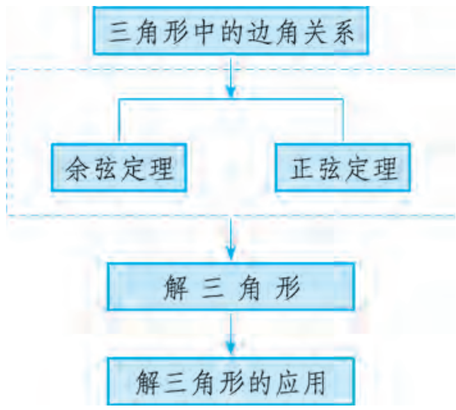
$$OS=\sqrt{AS^2+R^2-2AS\cdot R\cos\angle SAO}\approx 6\,530.738\,2(\text{km}).$$

再减去地球半径，最后求出流星的高度为 $h\approx 159.738\,2$ km.

我们知道，云层最高不超过 15 km，所以可以断定流星不是地球蒸发物，它一定是天外来客！正是余弦定理和正弦定理帮助人们迈出正确认识流星的第一步！

本章回顾

本章我们借助平面向量研究了三角形中的边角关系，主要学习了余弦定理、正弦定理，以及余弦定理、正弦定理在解决实际问题中的简单应用.



余弦定理、正弦定理是反映三角形边、角关系的重要定理. 利用余弦定理、正弦定理，可以将三角形中边的关系与角的关系进行相互转化，从而有助于问题的解决. 另外，许多几何、物理以及实际问题也可以转化为解三角形的问题来研究.

复 习 题

感受 · 理解

1. 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知$a=1$，$A=60^\circ$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求C；

(2) 已知$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，求A；

(3) 已知$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$B=150^\circ$，求b.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a-b=c\cos B-c\cos A$，判断$\triangle ABC$的形状.

3. 海上A，B两个小岛相距 10 n mile，从A岛望C岛和B岛所成的视角为60°，从B岛望C岛和A岛所成的视角为75°，求B岛和C岛之间的距离.

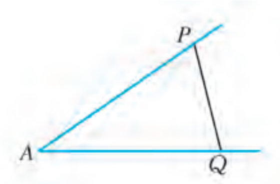
4. 在O点的正上方有气球P，从O点的正西方向上的A处，测得气球P的仰角为45°，同时从O点南偏东45°方向上的B处，测得气球P的仰角为60°，A，B两点间的距离为 200 m. 问：气球P离地面约多少米(精确到 1 m)？

5. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$135^\circ$，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$120^\circ$，$|\boldsymbol{c}|=2$，求$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.

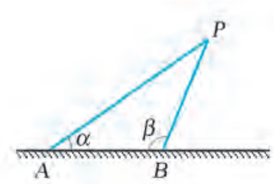
6. 在$\triangle ABC$中，已知$2a=b+c$，$\sin^2 A=\sin B\sin C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思考 · 运用

7. 如图，已知$\angle A$为定角，P，Q分别在$\angle A$的两边上，PQ为定长. 当P，Q处于什么位置时，$\triangle APQ$的面积最大？



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 外轮除特许外，不得进入离我国海岸线 d n mile 以内的区域. 如图，设 A，B 是相距 s n mile 的两个观察站，一外轮在 P 点，测得 $\angle BAP=\alpha$，$\angle ABP=\beta$. 问：α，β 满足什么关系时就该向外轮发出警告，令其退出我国海域？

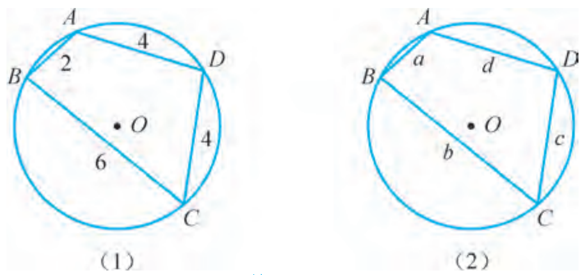
探究・拓展

9. 试由余弦定理推导出正弦定理.

10. (1) 如图(1)，在圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

(2) 如图(2)，设圆 O 的内接四边形的边长分别为 a，b，c，d，试证明其面积为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\quad\left(p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)\right).$$



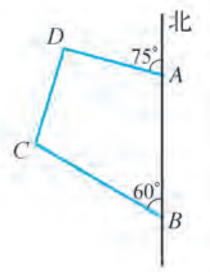
（第 10 题）

本章测试

说明：本测试题中，a，b，c 分别表示$\triangle ABC$中角 A，B，C 所对边的长，$S_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$的面积.

一、填空题

1. 在$\triangle ABC$中，若 $a=8$，$b=7$，$B=30°$，则 $\sin A=$ ________.
2. 在$\triangle ABC$中，若 $b=4\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，$A=120°$，则 $a=$ ________.
3. 在$\triangle ABC$中，若 $A=60°$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $a=$ ________.
4. 在$\triangle ABC$中，若 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$，则 $A=$ ________.
5. 在$\triangle ABC$中，若 $a\cos B+b\cos A=a$，则$\triangle ABC$的形状是____________.
6. 如图，海岸线上有相距 5 n mile 的两座灯塔 A，B，灯塔 B 位于灯塔 A 的正南方向. 海上停泊着两艘轮船，甲船位于灯塔 A 的北偏西 75° 方向，与 A 相距$3\sqrt{2}$ n mile 的D处；乙船位于灯塔B的北偏西 60° 方向，与B相距 5 n mile 的 C 处. 两艘轮船之间的距离为________ n mile.



（第 6 题）

二、选择题

7. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，则 $A=$（　　）.

   A. 150°　　B. 120°　　C. 90°　　D. 60°

8. 在$\triangle ABC$中，若 $a=2\sqrt{3}$，$A=30°$，则$\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$的值为（　　）.

   A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 2

9. 已知 A，B 两地间的距离为 10 km，B，C 两地间的距离为 20 km. 若测得$\angle ABC=120°$，则 A，C 两地间的距离为（　　）.

   A. 10 km　　B. $\sqrt{3}$ km　　C. $10\sqrt{5}$ km　　D. $10\sqrt{7}$ km

10. 在$\triangle ABC$中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，则 $C=$（　　）.

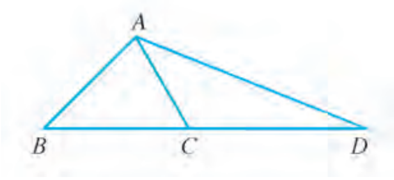
   A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

三、解答题

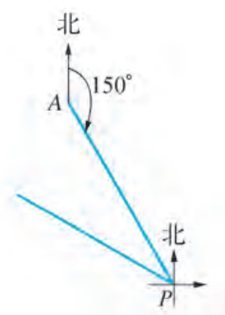
11. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=4\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$A=45°$，求 B.
12. 在$\triangle ABC$中，已知 $A=30°$，$B=105°$，$a=20$，求 c 和$S_{\triangle ABC}$.

13. 在△ABC 中，已知 $\tan A=\frac{1}{4}$，$\tan B=\frac{3}{5}$. 若△ABC 最长边的长为$\sqrt{17}$，求最短边的长.

14. 如图，在△ABC 中，$AB=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$CD=5$，$\angle ABC=45°$，$\angle ACB=60°$，求 AD 的长.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，某海滨城市 A 附近海面上有一台风，在城市 A 测得该台风中心位于方位角为 150°、距离为 400 km 的海面 P 处，并以 70 km/h 的速度沿北偏西 60°的方向移动. 如果台风侵袭的范围是半径为 250 km 的圆形区域. 问：几小时后该城市开始受到台风侵袭？（$\sqrt{3}\approx1.732$）

第 12 章　复　　数

复数

- 复数的概念
- 复数的运算
- 复数的几何意义
- 复数的三角形式*

虚数是奇妙的人类精神寄托，它好像是存在与不存在之间的一种两栖动物.

——莱布尼茨

16 世纪，意大利数学家卡尔丹（G. Cardano，1501—1576）在讨论问题“将 10 分成两部分，使两者的乘积等于 40”时，认为把答案写成“$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$”就可以满足要求：

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=5+5=10,$$

$$\begin{aligned}(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})&=5\times 5-\sqrt{-15}\times\sqrt{-15}\\&=25-(-15)\\&=40.\end{aligned}$$

我们知道，在实数集内，一个正数有两个平方根，它们互为相反数，0 的平方根是 0. 然而，$\sqrt{-15}$ 表示什么意义呢？

你也许会觉得这个问题有点可笑，因为任何实数的平方是非负数，所以负数没有平方根，因此，$\sqrt{-15}$没有意义.

尽管当时的数学家都认为“$5+\sqrt{-15}$”和“$5-\sqrt{-15}$”这两个式子没有意义，是虚构的、想像的，但在解决许多问题时，使用类似于“$\sqrt{-15}$”这样的式子却带来极大的方便.

那么，

- $\sqrt{-15}$真的是无意义的、虚幻的吗？
- $\sqrt{-15}$能作为数吗？

12.1 复数的概念

从社会生活来看，为了满足生活和生产实践的需要，数的概念也在不断地发展着：为了计数的需要产生了自然数，为了测量等需要产生了分数，为了刻画具有相反意义的量产生了负数，为了解决度量正方形对角线长的问题产生了无理数，等等.

从数学内部来看，数集是在按某种“规则”不断扩充的.

在自然数集中，加法和乘法总可以实施. 但是，由于小数不能减大数，方程 $x+4=0$ 无解. 为此引入负数，数集扩充到整数集.

在整数集中，加法、减法和乘法总可以实施. 但是，由于除法只能解决整除的问题，方程 $3x-2=0$ 无解. 为此引入分数，数集扩充到有理数集.

在有理数集中，加法、减法、乘法和除法（除数不为 0）总可以实施. 但是，开方的结果可能不是有理数，方程 $x^2-2=0$ 无解. 为此引入无理数，数集扩充到实数集.

在实数集中，加法、减法、乘法和除法（除数不为 0）总可以实施，并解决了正数的开方问题.

从自然数集、整数集、有理数集到实数集，每一次数的概念的发展，新的数集都是在原来数集的基础上“添加”了一种新的数得来的. 在新的数集中，原有的运算及其性质仍然适用，同时解决了某些运算在原来数集中不是总可以实施的矛盾.

现在，在实数集中，我们又面临方程 $x^2+1=0$ 无解、负数不能开平方的问题. 这表明，数的概念需要进一步发展，实数集需要进一步扩充.

● 实数集应怎样扩充呢？

为了使方程 $x^2+1=0$ 有解，使实数的开方运算总可以实施，实数集的扩充就从引入平方等于 -1 的“新数”开始.

虚数（imaginary）这个名称是法国哲学家、数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）给出的，写在 1637 年出版的《几何》中.

为此，我们引入一个新数 i，叫作**虚数单位**（imaginary unit），并规定：

（1）$i^2=-1$；

（2）实数可以与 i 进行四则运算，进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立.

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再与实数 a 相加. 由于满足乘法交换律及加法交换律，从而可以把结果写成 $a+bi$. 这样，数的范围又扩充了，出现了形如 $a+bi$（$a,b\in\mathbf{R}$）的数，我们把它们叫作**复数**（complex number）. 全体复数所组成的集合叫作**复数集**（set of complex numbers)，记作 **C**.

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+bi\ (a,b\in \mathbf{R})$，其中 a 与 b 分别叫作复数 z 的**实部**(real part) 与**虚部**(imaginary part).

当且仅当 $b=0$ 时，z 是实数 a；当 $b\neq 0$ 时，z 叫作**虚数**(imaginary number).

特别地，当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，$z=bi$ 叫作**纯虚数**(pure imaginary number). 具体说来，

本章如无特别说明，a，b，c，d 均表示实数.

$$\text{复数 } z=a+bi\begin{cases}\text{实数 }(b=0),\\ \text{虚数 }(b\neq 0)(\text{当 } a=0 \text{ 时为纯虚数}).\end{cases}$$

例 1 写出复数 4，$2-3i$，0，$-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i$，$5+\sqrt{2}i$，$6i$ 的实部与虚部，并指出哪些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数.

解 4，$2-3i$，0，$-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i$，$5+\sqrt{2}i$，$6i$ 的实部分别是 4，2，0，$-\frac{1}{2}$，5，0，虚部分别是 0，-3，0，$\frac{4}{3}$，$\sqrt{2}$，6.

4，0 是实数；$2-3i$，$-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i$，$5+\sqrt{2}i$，$6i$ 是虚数，其中 $6i$ 是纯虚数.

例 2 实数 m 取什么值时，复数 $z=m(m-1)+(m-1)i$ 是：

(1) 实数？　(2) 虚数？　(3) 纯虚数？

分析 由 $m\in\mathbf{R}$ 可知 $(m-1)$，$m(m-1)$ 都是实数，根据复数 $a+bi$ 是实数、虚数或纯虚数的条件可以分别确定 m 的值.

解 (1) 当 $m-1=0$，即 $m=1$ 时，复数 z 是实数.

(2) 当 $m-1\neq 0$，即 $m\neq 1$ 时，复数 z 是虚数.

(3) 当 $m(m-1)=0$ 且 $m-1\neq 0$，即 $m=0$ 时，复数 z 是纯虚数.

思　考

$a=0$ 是复数 $z=a+bi$ 为纯虚数的充分条件吗？

如果两个复数的实部与虚部分别相等，那么我们就说这两个复数相等，即

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\ b=d.\end{cases}$$

这就是说，**两个复数相等的充要条件是它们的实部和虚部分别相等**.

例 3 已知 $(x+y)+(x-2y)i=(2x-5)+(3x+y)i$，求实数 x，y 的值.

解 根据两个复数相等的充要条件，可得

$$\begin{cases} x+y=2x-5, \\ x-2y=3x+y, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases}$$

练　习

1. （口答）在复数 $1-2i$，$2+\sqrt{3}$，$\frac{1}{2}i$，$-5+\sqrt{2}i$，0，$7+(\sqrt{5}-2)i$ 中，哪些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数？其中虚数的实部与虚部分别是什么？

2. 下列结论中，正确的是（　　）.

A. $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$　　B. $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{C}\subseteq\mathbf{R}$

C. $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$　　D. $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{C}$

3. 实数 m 取什么值时，复数 $z=(m+1)+(m-2)i$ 是：

（1）实数？　　（2）虚数？　　（3）纯虚数？

4. 复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是虚数，求实数 m 的取值范围.

5. 求以 $-\sqrt{5}+2i$ 的虚部为实部、以 $2i^2+\sqrt{5}i$ 的实部为虚部的复数.

6. 求满足下列条件的实数 x，y 的值：

（1）$(x-3y)+(2x+3y)i=5+i$；

（2）$2x^2-5x+3+(y^2+y-6)i=0$.

习题 12.1

感受·理解

1. 给出下列命题：

① 自然数集是非负整数集；

② 实数集与复数集的交集为实数集；

③ 实数集与虚数集的交集是 $\{0\}$；

④ 纯虚数集与实数集的交集为空集.

其中，假命题是________.（填序号）

2. 对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 $a=0$，则 $a+bi$ 为纯虚数

B. 若 $a-bi=3+2i$，则 $a=3$，$b=2$

C. 若 $b=0$，则 $a+bi$ 为实数

D. 若 $a=b=0$，则 z 不是复数

3. 实数 m 取什么值时，复数 $z=m(m+1)+(m^2-1)i$ 是：

（1）实数？　　（2）虚数？　　（3）0？

4. 设 m 为实数，已知复数 $z=(m^2+3m-4)+(m^2-2m-24)i$ 是纯虚数，求 m 的值.

5. 求满足下列条件的实数 x，y 的值：

（1）$\left(\frac{1}{2}x-y\right)+\left(4x+\frac{2}{3}y\right)i=5+14i$；

（2）$(x+y)-xyi=-2+15i$；

（3）$(x^2-x-2)+(2y^2+5y+2)i=0$.

思考·运用

6. 给出下列命题：

① 任意两个复数都不能比较大小；

② 若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则当且仅当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，$z=0$；

③ 若 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，且 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=z_2=0$；

④ 若 $x+y\mathrm{i}=1+\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{C})$，则 $x=y=1$.

其中，____________是假命题.（填序号）

7. 设 m 为实数，若集合 $M=\{1,2,(m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)\mathrm{i}\}$，$N=\{-1,3\}$，且 $M\cap N=\{3\}$，求 m 的值.

探究·拓展

8. 设 M 是一个非空集合，f 是一种运算. 如果对于集合 M 中任意两个元素 p，q，实施运算 f 的结果仍是集合中的元素，那么就说集合 M 对于运算 f 是“封闭的”. 已知集合 $M=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},\ a,\ b\in\mathbf{Q}\}$，试验证 M 对于加法、减法、乘法和除法（除数不为 0）运算是封闭的.

12.2 复数的运算

我们知道，虚数单位 i 与实数一起可以按照实数的运算法则进行运算. 那么，

● 任意两个复数按照怎样的法则进行运算呢?

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$, $z_2=c+d\mathrm{i}$ 是任意两个复数，复数的加法按照以下的法则进行运算：

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.$$

显然，两个复数的和仍是一个复数.

容易验证，复数的加法满足交换律、结合律，即对任何 z_1, z_2, $z_3\in\mathbf{C}$，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

我们把满足

$$(c+d\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$$

的复数 $x+y\mathrm{i}(x, y\in\mathbf{R})$ 叫作复数 $a+b\mathrm{i}$ 减去 $c+d\mathrm{i}$ 所得的差，记作

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i}).$$

根据复数的加法法则和复数相等的定义，有

$$c+x=a,\ d+y=b,$$

即 $$x=a-c, y=b-d,$$

所以 $$x+y\mathrm{i}=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

于是，我们得到复数的减法法则：

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

复数的减法是复数的加法的逆运算.

由此可见，**两个复数相加(减)就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加(减)**.

例 1 计算 $(1-3\mathrm{i})-(2+5\mathrm{i})+(-4+9\mathrm{i})$.

解 原式 $=(1-2-4)+(-3-5+9)\mathrm{i}=-5+\mathrm{i}$.

复数的乘法按照以下的法则进行运算：

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2,$$

即

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

显然，两个复数的积仍是一个复数.

复数的乘法法则与多项式的乘法法则是类似的，只是在运算过程中要把 i^2 换成 -1，然后把实部与虚部分别合并.

容易验证，复数的乘法满足交换律、结合律以及分配律，即对任何 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$，有

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

例 2 计算 $(-2-i)(3-2i)(-1+3i)$.

解 原式 $=(-8+i)(-1+3i)=5-25i$.

例 3 计算 $(a+bi)(a-bi)$.

解 原式 $=a^2-abi+abi-b^2i^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$.

思考

设 $x, y \in \mathbf{R}$，在复数集内，你能将 x^2+y^2 分解因式吗？

我们把实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫作互为**共轭复数**. 复数 $z=a+bi$ 的共轭复数记作 $\overline{z}$，即

$$\overline{z}=a-bi.$$

当复数 $z=a+bi$ 的虚部 $b=0$ 时，$z=\overline{z}$. 也就是说，实数的共轭复数是它本身.

练习

1. 计算：

(1) $(5-3i)+(7-5i)-4i$；

(2) $(-2-4i)-(-2+i)+(1+7i)$；

(3) $i+i^2+i^3+i^4$.

2. 若复数 $z_1=1+3i$，$z_2=-2+ai$，且 $z_1+z_2=b+8i$，$z_2-z_1=-3+ci$，则实数 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________.

3. 计算：

(1) $(2-3i)(-5+i)$； (2) $(1+i)(2+i)(3+i)$；

(3) $(1-2i)(1+2i)$； (4) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$.

4. 分别写出复数 $3-5i$，$-1+2i$，$-5i$，8 的共轭复数.

5. 证明：$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

6. 求满足下列条件的复数 z：

(1) $z+i-3=3-i$； (2) $\overline{z}+(3-4i)=1$；

(3) $(3-i)z=4+2i$； (4) $(\sqrt{2}-i)z=\sqrt{2}+i$.

7. 已知复数 $z=1+i$，实数 a, b 满足 $az+2b\overline{z}=(a+2z)^2$，求 a, b 的值.

复数的乘方是相同复数的积. 根据复数乘法的运算律，实数范围内正整数指数幂的运算律在复数范围内仍然成立. 即对任何 z, z_1, $z_2\in\mathbf{C}$ 及 m, $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$z^m z^n = z^{m+n},$$

$$(z^m)^n = z^{mn},$$

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

在计算复数的乘方时，要用到虚数单位 i 的乘方，对于 i 的正整数指数幂，易知

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1.$$

一般地，如果 $n\in\mathbf{N}^*$，那么我们有

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$$

例 4　设 $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求证：

(1) $1+\omega+\omega^2 = 0$；　　(2) $\omega^3 = 1$.

证明　(1) 因为

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

所以　$1+\omega+\omega^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0.$

(2) $$\omega^3 = \omega\omega^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1.$$

思　考

如果把例 4 中的 ω 换成 $\overline{\omega}$，那么欲证的两个等式还成立吗？在复数范围内，你能写出方程 $x^3 = 1$ 的 3 个根吗？

我们把满足

$$(c+di)(x+yi) = a+bi\ (c+di\neq 0)$$

的复数 $x+yi(x,\ y\in\mathbf{R})$ 叫作复数 $a+bi$ 除以 $c+di$ 所得的商，记作 $\frac{a+bi}{c+di}$ 或 $(a+bi)\div(c+di)$.

例 5　计算 $\frac{2-i}{3-4i}$.

解法 1　设 $\frac{2-i}{3-4i} = x+yi\ (x,\ y\in\mathbf{R})$，则

根据复数相等的充要条件，运用待定系数法求复数，是常用的方法之一.

$$(3-4\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=2-\mathrm{i},$$

即 $$(3x+4y)+(3y-4x)\mathrm{i}=2-\mathrm{i},$$

所以 $$\begin{cases}3x+4y=2,\\3y-4x=-1,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}x=\dfrac{2}{5},\\[2mm]y=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

因此 $$\frac{2-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

可以证明：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1z}{z_2z}$$

(z_1，z_2，$z\in\mathbf{C}$，且 z_2，z 均不为 0).

解法 2 $$\frac{2-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\frac{(2-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{25}$$

$$=\frac{10+5\mathrm{i}}{25}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

一般地，我们有

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

因为 $c+d\mathrm{i}\neq0$，所以 $c^2+d^2\neq0$.

由此可见，两个复数的商仍是一个复数.

例 6 在复数集 **C** 内解下列方程：

(1) $z^2+4=0$；

(2) $z^2-10z+40=0$.

解 (1) 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,\ y\in\mathbf{R})$，则

$$(x+y\mathrm{i})^2+4=0,$$

即 $$(x^2-y^2+4)+2xy\mathrm{i}=0,$$

所以 $$\begin{cases}x^2-y^2+4=0,\\2xy=0,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=0,\\y=-2.\end{cases}$$

因此 $$z=2\mathrm{i}\text{ 或 }z=-2\mathrm{i}.$$

(2) 配方，得

$$(z-5)^2=-15.$$

仿(1)，得

$$z-5=\sqrt{15}\mathrm{i}\text{ 或 }z-5=-\sqrt{15}\mathrm{i}.$$

所以 $$z=5+\sqrt{15}\mathrm{i}\text{ 或 }z=5-\sqrt{15}\mathrm{i}.$$

当 $a>0$ 时，方程 $z^2+a=0$ 的根为

$$z_1=\sqrt{a}\mathrm{i},$$
$$z_2=-\sqrt{a}\mathrm{i}.$$

练　习

1. 计算：

(1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^{2}$；　　(2) $(1-\mathrm{i})^{4}$；

(3) $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{3}$；　　(4) $\mathrm{i}+\mathrm{i}^{2}+\mathrm{i}^{3}+\cdots+\mathrm{i}^{100}$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{\mathrm{i}}$；　　(2) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(3) $\frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；　　(4) $\frac{2-5\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$；

(5) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{18}$；　　(6) $\frac{(1+\mathrm{i})^{4}(4+3\mathrm{i})}{3-4\mathrm{i}}$.

3. 已知 $z_1=-2+\mathrm{i}$，$z_1z_2=-5+5\mathrm{i}$，求 z_1+z_2.

4. 已知复数 $z=\frac{1}{1-\mathrm{i}}$，求 z 的共轭复数 $\overline{z}$.

5. 设 a 为实数，若 $z_1=a+2\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，求 a 的值.

6. 在复数集 **C** 内解下列方程：

(1) $4z^2+1=0$；　　(2) $z^2-z+1=0$.

习题 12.2

感受・理解

1. 计算：

(1) $(5+4\mathrm{i})+(-3-3\mathrm{i})$；

(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i})+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i})$；

(3) $(3+2\mathrm{i})-7\mathrm{i}-(2-3\mathrm{i})$；

(4) $(0.5+1.3\mathrm{i})-(1.2+0.7\mathrm{i})+(1-0.4\mathrm{i})$；

(5) $[(a-b)+(a+b)\mathrm{i}]-[(a+b)+(a-b)\mathrm{i}]$；

(6) $(4-2\mathrm{i})-(6+\mathrm{i}^{3})+\mathrm{i}^{2}$.

2. 计算：

(1) $(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$；　　(2) $(1-\mathrm{i})(-4+3\mathrm{i})$；

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；　　(4) $(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^{2}$.

3. 计算：

(1) $(1+\mathrm{i})^{10}$；　　(2) $\mathrm{i}^{2n-3}+\mathrm{i}^{2n-1}+\mathrm{i}^{2n+1}+\mathrm{i}^{2n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$；

(3) $\frac{5+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$；　　(4) $\frac{(1+2\mathrm{i})^{2}}{3+4\mathrm{i}}+\frac{(2+\mathrm{i})^{2}}{4-3\mathrm{i}}$；

(5) $\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}^{3}}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}$；　　(6) $\frac{-2\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+2\sqrt{3}\mathrm{i}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2\,020}$.

4. 设 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求证：

(1) $z^2=-\overline{z}$；

(2) $z^3=-1$；

(3) $z^2-z+1=0$.

5. 已知 $z_0=3+2\mathrm{i}$，复数 z 满足 $zz_0=3z+z_0$，求 z.

6. 已知$\frac{1}{1-\mathrm{i}}+\frac{1}{2+3\mathrm{i}}=x+y\mathrm{i}$，求实数 x，y 的值.

思考·运用

7. 证明：z 为实数的充要条件是 $\overline{z}=z$.

8. 在复数集 $\mathbf{C}$ 内解下列方程：

(1) $z^4=1$；　　(2) $9z^2+16=0$；

(3) $z^2-4z+5=0$；　　(4) $2z^2-3z+5=0$.

9. 在复数范围内分解因式：

(1) a^4-b^4；　　(2) x^2+4；

(3) x^2+2x+5；　　(4) $a^2+b^2+c^2+2ab$.

10. 已知 $z^2=-7-24\mathrm{i}$，求复数 z.

11. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$z_1z_2=0$，求证：z_1，z_2 中至少有 1 个是 0.

12. 设 z_1 是复数，$z_2=z_1-\mathrm{i}\cdot\overline{z_1}$，已知 z_2 的实部是 -1，求 z_2 的虚部.

13. 已知 $f(n)=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求集合$\{x\mid x=f(n),\ n\in\mathbf{N}^*\}$中元素的个数.

探究·拓展

14. 在复数范围内，证明 $x^4+4=(x-1-\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})(x+1+\mathrm{i})$，并由此写出 -1 的 4 个四次方根.

15. 规定 $\mathrm{i}^0=1$，$\mathrm{i}^{-m}=\frac{1}{\mathrm{i}^m}\ (m\in\mathbf{N}^*)$，求证：$\mathrm{i}^{4n}=1$，$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$ 对一切 $n\in\mathbf{Z}$ 都成立.

12.3 复数的几何意义

我们知道,实数与数轴上的点是一一对应的,实数可以用数轴上的点来表示. 那么,

● 复数能否也可以用点来表示呢?

根据复数相等的定义可知,任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 都可以由一个有序实数对 $(a,\ b)$ 唯一确定,而有序实数对 $(a,\ b)$ 与平面直角坐标系中的点是一一对应的. 因此,可以用直角坐标系中的点 $Z(a,\ b)$ 来表示复数 $z=a+b\mathrm{i}$.

如图 12-3-1,原点 $O(0,\ 0)$ 表示实数 0,x 轴上的点 $A(-2,\ 0)$ 表示实数 -2,y 轴上的点 $B(0,\ 1)$ 表示纯虚数 i,点 $C(1,\ 2)$ 表示复数 $1+2\mathrm{i}$ 等.

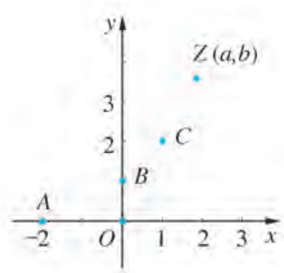


图 12-3-1

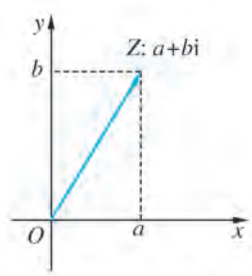


图 12-3-2

复数的这种几何表示也称为阿甘得图(Argand diagram).

我们把建立了直角坐标系来表示复数的平面叫作**复平面**(complex plane),x 轴叫作**实轴**(real axis),y 轴叫作**虚轴**(imaginary axis). 实轴上的点都表示实数,除原点外,虚轴上的点都表示纯虚数.

因为复平面内的点 $Z(a,\ b)$ 与以原点为起点、以 $Z(a,\ b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应(原点 $O(0,\ 0)$ 与零向量对应),所以复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 也可以用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示(图 12-3-2).

因此,复数 $z=a+b\mathrm{i}$、复平面内的点 $Z(a,\ b)$ 和平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间的关系可用图 12-3-3 来表示.

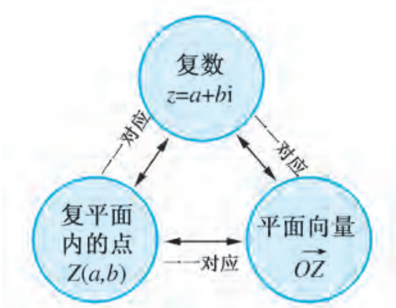


图 12-3-3

为方便起见，常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或向量 $\overrightarrow{OZ}$，并且规定相等的向量表示同一个复数.

在图 12-3-2 中，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫作复数 $z=a+bi$ 的**模**(module)(或绝对值)，记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$. 如果 $b=0$，那么 $z=a+bi$ 就是实数 a，它的模等于 $|a|$(即实数 a 的绝对值). 由模的定义可知

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

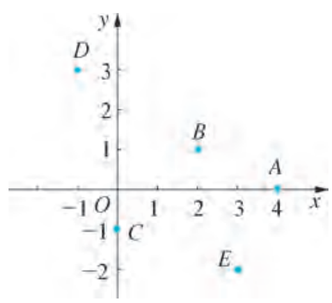
思 考

z，$\bar{z}$ 与 $|z|$ 之间有什么关系?

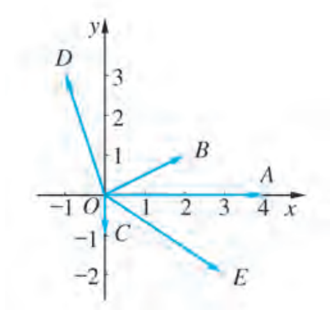
例 1 在复平面内，分别用点和向量表示下列复数:

$$4,\ 2+i,\ -i,\ -1+3i,\ 3-2i.$$

解 如图 12-3-4(1)，点 A，B，C，D，E 分别表示复数 4，$2+i$，$-i$，$-1+3i$，$3-2i$. 如图 12-3-4(2)，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ 分别表示复数 4，$2+i$，$-i$，$-1+3i$，$3-2i$.



(1)



(2)

图 12-3-4

例 2 已知复数 $z_1=3+4i$，$z_2=-1+5i$，试比较它们模的大小.

解 因为 $$|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

$$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26},$$

所以 $$|z_1|<|z_2|.$$

例 3 设 $z\in\mathbf{C}$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?

(1) $|z|=2$; (2) $2<|z|<3$.

解 (1) 因为 $|z|=2$，即 $|\overrightarrow{OZ}|=2$，所以满足 $|z|=2$ 的点 Z 的集合是以原点为圆心、2 为半径的圆(图 12-3-5(1)).

(2) 不等式 $2<|z|<3$ 可化为不等式组 $\begin{cases}|z|>2,\\|z|<3.\end{cases}$ 不等式 $|z|>2$ 的解集是圆 $|z|=2$ 外部所有的点组成的集合，不等式 $|z|<3$ 的解集是圆 $|z|=3$ 内部所有的点组成的集合，这两个集合的交集就是上述不等式组的解集. 因此，满足条件 $2<|z|<3$ 的点 Z

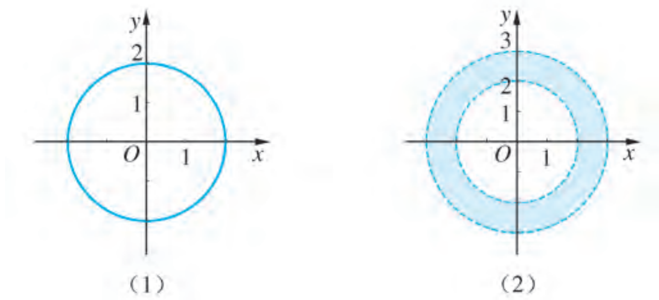


图 12-3-5

的集合是以原点为圆心、分别以 2 和 3 为半径的两个圆所夹的圆环，但不包括圆环的边界(图 12-3-5(2)).

复数的加法具有怎样的几何意义呢？

如图 12-3-6(1)，设向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$ 对应，且$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线，以$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 为两条邻边画 ▱ OZ_1ZZ_2，则对角线 OZ 所表示的向量$\overrightarrow{OZ}$ 就是与复数$(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$ 对应的向量. 这就是复数加法的几何意义.

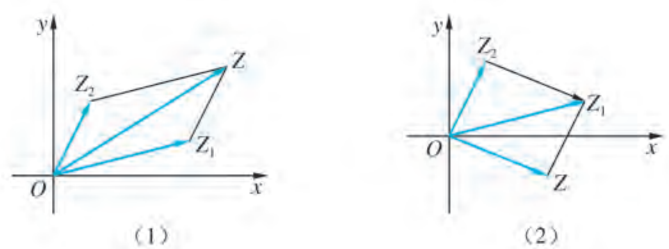


图 12-3-6

根据复数减法的定义以及复数加法的几何意义，可以得到复数减法的几何意义.

如图 12-3-6(2)，若向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数 z_1，z_2对应，则它们的差 z_1-z_2对应着向量$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$，即向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$.

如果作 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{Z_2Z_1}$，那么点 Z 对应的复数就是z_1-z_2. 这就是复数减法的几何意义.

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，则 $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$，故

$$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{OZ}|=|\overrightarrow{Z_2Z_1}|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

这表明：

两个复数的差的模就是复平面内与这两个复数对应的两点间的距离.

练　习

1. 在复平面内，分别用点表示复数 $2-3\mathrm{i}$，$5\mathrm{i}$，-3，$-5+\mathrm{i}$ 及其共轭复数.

2. 分别求出复数 $4-3\mathrm{i}$，$5+\mathrm{i}$，$-12-5\mathrm{i}$，$-3+7\mathrm{i}$，$4\mathrm{i}$，-6 的模.

3. 设 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$) 与复平面内的点 $Z(a，b)$对应，当 a，b 满足什么条件时，点 Z 位于：

(1) 实轴上？　　(2) 虚轴上(原点除外)？

(3) 实轴的上方？　　(4) 虚轴的左侧？

4. 已知复数 $6+5\mathrm{i}$ 和 $-3+4\mathrm{i}$.

(1) 在复平面内作出与这两个复数对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$；

(2) 写出向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 表示的复数.

5. 在 $\square ABCD$ 中，点 A,B,C 分别对应复数 $2+\mathrm{i}$，$4+3\mathrm{i}$，$3+5\mathrm{i}$，求点 D 对应的复数.

6. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $1+\mathrm{i}$，若点 A 对应的复数为 $1+3\mathrm{i}$，求点 B 对应的复数.

7. 证明：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

习题 12.3

感受·理解

1. 已知复数 4，$5\mathrm{i}$，$-1-4\mathrm{i}$，$2-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$3\mathrm{i}+2$.

(1) 在复平面内分别作出与这些复数对应的向量；

(2) 分别写出这些复数的共轭复数，并求它们的模.

2. 设 m 为实数，已知复数 $z=(m-2)+(m^2-9)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第四象限，求 m 的取值范围.

3. 在复平面内，一个正方形的 3 个顶点对应的复数分别是 $1+2\mathrm{i}$，$-2+\mathrm{i}$，0，求第四个顶点对应的复数.

4. 设复数 $z_1=4-3\mathrm{i}$，$z_2=1+2\mathrm{i}$，问：复数 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ 在复平面内所对应的点位于第几象限？

5. 根据复数加法的几何意义，证明：$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

6. 已知 $\overline{z}=(|z|-1)+5\mathrm{i}$，求复数 z.

7. 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，若 $|z_1|=5$，$z_2=3+4\mathrm{i}$，z_1z_2 是纯虚数，求 z_1.

8. 已知在复平面内，动点 Z 与复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 对应，问：满足等式 $|z-2|=1$ 的点 Z 的集合是什么图形？

思考·运用

9. 在复平面内，已知定点 M 与复数 $m=1+2\mathrm{i}$ 对应，动点 Z 与复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 对应，问：满足不等式 $|z-m|\leqslant 2$ 的点 Z 的集合是什么图形？

10. 在复平面内，若复数 z 满足 $|z+1|=|z-\mathrm{i}|$，则 z 所对应的点的集合是什么图形？

11. 已知 Z_1,Z_2 是复平面内的两个定点，点 Z 在线段 Z_1Z_2 的垂直平分线上，根据复数的几何意义，写出它们所对应的复数 z，z_1，z_2 满足的关系式.

探究·拓展

12. (1) 已知复数 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，$z_3=1+2\mathrm{i}$，复数 $2z_1$，$2z_2$，$2z_3$ 的几何意义分别是什么？复数 $\mathrm{i}\cdot z_1$，$\mathrm{i}\cdot z_2$，$\mathrm{i}\cdot z_3$ 的几何意义又分别是什么？

(2) 已知复数 z 以及常数 $k\ (k>0)$，复数 kz 和 $\mathrm{i}\cdot z$ 的几何意义分别是什么？

12.4 复数的三角形式*

由复数的几何意义可以知道，复数 $z=a+bi$ $(a, b\in \mathbf{R})$、复平面内的点 $Z(a, b)$ 和平面向量$\overrightarrow{OZ}$之间存在着一一对应的关系.

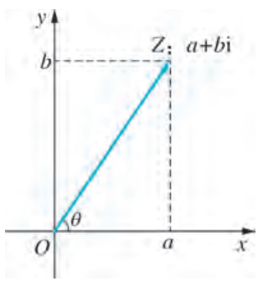


图 12-4-1

如图 12-4-1，以 x 轴的非负半轴为始边、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线（起点是原点 O）为终边的角 θ 叫作**复数 $z=a+bi$ 的辐角**(argument). 例如，$\frac{\pi}{4}$ 就是复数 $z=1+i$ 的一个辐角，而$\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$ 也都是复数 $z=1+i$ 的辐角.

如果复数 $z=a+bi$ 的模为 r，辐角为 θ，那么，

● 复数 $z=a+bi$ 能否用 r，θ 表示呢？

很明显，任一非零的复数 $z=a+bi$ 的辐角有无限个值，这些值相差 2π 的整数倍. 我们把其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值叫作复数 $z=a+bi$ 的**辐角主值**，记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$. 易知，每一个非零的复数 $z=a+bi$ 都有唯一确定的模与辐角主值；反过来，复数的模与辐角主值可以唯一确定这个复数.

由此可以得到

> 两个非零的复数相等，当且仅当它们的模与辐角主值分别相等.

复数 $z=0$ 在复平面内与原点 $O(0, 0)$对应，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是零向量，这时复数的模为 0，辐角是任意的.

由任意角三角函数的定义知道：

> 设复数 $z=a+bi$ $(z\neq 0)$ 的辐角为 θ，则
> $$\cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r},$$
> 其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

确定复数 z 的辐角后，就可以进一步确定该复数的辐角主值 $\arg z$.

例 1 求复数 $1+i$，$-1-i$，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}i$ 的辐角主值.

解 设这 4 个复数的模分别为 r_1，r_2，r_3，r_4，辐角主值分别为 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4.

---

* 本节为选学内容.

因为 $$r_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

所以 $$\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

又 $0\leqslant\theta_1<2\pi$，故 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$.

同理，可以求得

$$r_2=\sqrt{2},\ r_3=\sqrt{2},\ r_4=\sqrt{2},$$

$$\theta_2=\frac{5\pi}{4},\ \theta_3=0,\ \theta_4=\frac{3\pi}{2}.$$

故 4 个复数的辐角主值分别为 $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$，0，$\dfrac{3\pi}{2}$.

从这个例子可以看出，对于给定的复数 $z=a+bi$，根据 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 可以求出该复数的模，根据 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ 就可以确定该复数的辐角主值.

由公式

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

得 $$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta.\end{cases}$$

故 $a+bi=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

因此，复数 $z=a+bi$ 也就可以用复数的模 r 和辐角 θ 来表示：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$.

$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为**复数 z 的三角形式**，而 $a+bi$ 称为**复数 z 的代数形式**.

从前面的讨论可以看到，知道了一个复数的代数形式，就可以求出它的模和辐角（通常只要写出一个辐角），从而可以将这个复数表示为三角形式.

例 2 把下面的复数表示成三角形式：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$； (2) -2.

解 (1) 因为 $$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2,$$

所以
$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

故
$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}.$$

从而
$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 因为
$$r=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2,$$

所以
$$\arg(-2)=\pi,$$

故
$$-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi).$$

思　考

对于复数 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$2\left(\cos\dfrac{13\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{13\pi}{6}\right)$是它的三角形式吗？$2\left[\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\right]$是它的三角形式吗？由此，你能得出更一般的结论吗？

例 3 求复数 $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$的模与辐角.

解法 1 因为
$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i},$$

所以
$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$$

从而
$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2},\\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$$

故
$$\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{5\pi}{3}.$$

因此，这个复数的模为 2，辐角为 $\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

解法 2 因为 $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}$，$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}$，

所以
$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

由此可知，这个复数的模为 2，辐角为 $-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

这两个解法得到的辐角表达式不一样，你能给出解释吗？

练　习

1. 求下列复数的模与辐角主值：

(1) $-1+\mathrm{i}$；　　(2) $-\sqrt{2}$；

(3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；　　(4) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

2. 把下列复数表示成三角形式：

(1) $-5+5\mathrm{i}$；　　(2) $3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$；

(3) $-4\mathrm{i}$；　　(4) 13.

3. 把下列复数表示成三角形式，并求出它们的模与辐角主值：

(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；　　(2) $-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $2(\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin 165^\circ)$；　　(4) $-\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}$.

4. 利用 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，把复数 $\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$ 表示成三角形式.

如果把复数 z_1，z_2 分别写成三角形式：

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

那么，根据复数的乘法法则，就有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=[r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

这就是说，**两个复数相乘，其积的模等于这两个复数的模的积，其积的辐角等于这两个复数的辐角的和.**

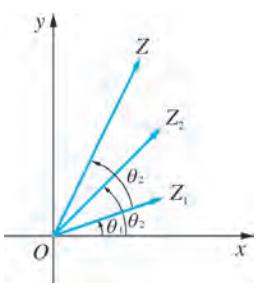


图 12-4-2

如图 12-4-2，在复平面内分别画出与复数 z_1，z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$（假定 θ_1，θ_2 均取辐角主值，其他取值不影响讨论），然后把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2 得 $\overrightarrow{OZ'_1}$（模仍为 r_1），再把 $\overrightarrow{OZ'_1}$ 的模 r_1 变为原来的 r_2 倍，从而得到一个新的向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数 $r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$ 即为 z_1z_2，这就是复数乘法的几何意义.

当 $z_2\neq0$ 时，

你还能用其他方法推导吗？

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

试用此式解释复数除法的几何意义.

这就是说,两个复数相除,商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商,商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

例 4　计算下列各式,并把结果化成代数形式:

(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\times 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $\left[\sqrt{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

解　(1) 原式 $=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

(2) 原式 $=\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

练　习

1. 计算:

(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

(2) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{2}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

(3) $\left[12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]\div\left[6\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

(4) $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

2. 计算:

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $\left[\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(4) $(1-\mathrm{i})\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

习题 12.4

感受・理解

1. 把下列复数表示成三角形式,并画出与它们对应的向量.

(1) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　　(2) $2-2\mathrm{i}$;

(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$;　　(4) $3+4\mathrm{i}$;

(5) 2;　　(6) -3;

(7) $2\mathrm{i}$;　　(8) $-2\mathrm{i}$.

2. 下列复数是不是三角形式？如果不是，把它们表示成三角形式.

(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　(2) $-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{3}\right)$.

3. 已知 $z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，用复数的三角形式表示它的共轭复数 $\bar{z}$.

4. 计算：

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\times\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $\left[10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\div\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$；

(4) $\left[\sqrt{10}\left(\cos\frac{7\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{10}\right)\right]\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

5. 化简：

(1) $\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)}{(\cos 6\theta+\mathrm{i}\sin 6\theta)(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)}$；

(2) $\dfrac{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$.

6. 利用复数的三角形式，求证：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

思考·运用

7. 求证：

(1) $(\cos 75^\circ+\mathrm{i}\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin 15^\circ)=\mathrm{i}$；

(2) $(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta$.

8. 向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数为 $-1+\mathrm{i}$，把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$，得到 $\overrightarrow{OZ}$，求与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数(用代数形式表示).

9. 设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(1) 求证：$\omega^3=1$；

(2) 求证：$(\bar{\omega})^3=1$；

(3) 在复数范围内，解方程 $z^3=1$.

10. 利用复数证明余弦定理.

探究·拓展

11. (1) 设 $n\in\mathbf{N}^*$，且

$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，

$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，

……

$z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$，

计算 $z_1z_2\cdots z_n$；

(2) 若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，计算 $z^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

12. 在复数范围内，验证

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

为方程 $z^n=1$ 的 n 个根，并给出几何解释.

问题与探究

复数的开方

我们已经研究了复数的加、减、乘、除、乘方运算，并且给出了相应的几何意义，那么复数的开方运算如何实施呢？

为了探究这一问题，我们先求复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根.

解法 1　设 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根为 $\omega=x+y\mathrm{i}\ (x,\ y\in\mathbf{R})$，

则
$$(x+y\mathrm{i})^2=1+\sqrt{3}\mathrm{i},$$

即
$$x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

由此可得
$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\2xy=\sqrt{3}.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\\y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\\y_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

故 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根为
$$\omega_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},\ \omega_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

解法 2　将复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 表示成三角形式：
$$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

设 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根的三角形式为
$$\omega=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

则
$$\omega^2=z,$$

即
$$[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

即
$$r^2(\cos 2\varphi+\mathrm{i}\sin 2\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

因为两个复数相等时，它们的模相等，辐角相差 2π 的整数倍，所以
$$\begin{cases}r^2=2,\\2\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

由 r 为复数的模，可知 $r>0$，

由此可得 $\begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \varphi=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in \mathbf{Z}). \end{cases}$

故 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根为

$$\omega=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]\ (k\in \mathbf{Z}).$$

当 $k=0$ 时，

$$\omega_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$

当 $k=1$ 时，

$$\omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

由三角函数的周期性可知，当 k 为偶数时，所得结果都与 ω_0 相同；当 k 为奇数时，所得结果都与 ω_1 相同. 由此可知，复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根有两个值，并且只有两个值，可以用式子

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]\ (k=0,\ 1)$$

来表示.

上述两种解法解决了求一个复数的平方根问题，能用同样的方法求一个复数的立方根、四次方根……n 次方根吗？

例如，求复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的立方根.

解法 1 设 $\omega=x+y\mathrm{i}(x,\ y\in \mathbf{R})$ 为 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的立方根，则

$$(x+y\mathrm{i})^3=1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

化简，得 $(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$

由此可得 $\begin{cases} x^3-3xy^2=1, \\ 3x^2y-y^3=\sqrt{3}. \end{cases}$

由该方程组求出 x，y 比较困难，可见用解法 1 求一个复数的立方根、四次方根……n 次方根比较困难.

解法 2 将 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 表示成三角形式：

$$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

设 $\omega=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 为 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的立方根，

则 $$\omega^3=z,$$

即 $$[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^3=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

所以 $$r^3(\cos 3\varphi+\mathrm{i}\sin 3\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

根据两个复数相等的条件，可得

$$\begin{cases} r^3=2, \\ 3\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z}), \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} r=\sqrt[3]{2}, \\ \varphi=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2}{3}k\pi(k\in\mathbf{Z}). \end{cases}$$

故 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的立方根为

$$\omega=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)\right]\ (k\in\mathbf{Z}).$$

由三角函数的周期性可知，只要 $k=0,1,2$ 即可.

因此，$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的立方根为

$$\omega=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)\right]\ (k=0,1,2).$$

同理，可用上面的解法 2 求出 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的四次方根、五次方根……n 次方根.

请探究：复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根的一般形式.

阅 读

复数系是怎样建立的?

卡尔丹(G. Cardano，1501—1576)，意大利数学家.

复数系的建立，经历了一段曲折而漫长的过程.

1484 年，法国数学家许凯(N. Chuquet，约 1445—1500)在《算术三篇》中，解一元二次方程 $4+x^2=3x$ 得到的根是 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}$. 他声明此根是不可能的.

1545 年，意大利数学家卡尔丹在解一元二次方程 $x(10-x)=40$ 和一元三次方程 $x^3=15x+4$ 时，分别得到了类似的结果，引入负数的平方根，并称它为“诡辩量”.

1637 年，法国数学家笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)正式开始使用“实数”“虚数”这两个名词. 此后，德国数学家莱布尼茨、瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)和法国数学家棣莫弗(A. De Moivre，1667—1754)等研究了虚数与对数函数、三角函数之间的关系，除了解方程以外，还把它用于微积分等方面，得出许多很有价值的结果. 同时，复数在电工学、流体力学、空气动力学等方面也得到广泛的应用. “虚数”被证明“不虚”了.

1747 年，法国数学家达朗贝尔(J. R. D'Alembert，1717—1783)的研究使得人们对虚数的认识又推进一步. 他指出，形如 $a+b\sqrt{-1}$ (a，b 是实数)的数按多项式的四则运算规则进行运算，所得的结果仍具有 $a+b\sqrt{-1}$ 的形式. 这在实质上提出了复数的概念.

1748 年，欧拉对这类新数作了系统研究，并得出欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

$z=re^{i\theta}$ 叫作复数的指数形式.

1777 年，欧拉首次用 i 表示 -1 的平方根. 1801 年，德国著名数学家高斯(C. F. Gauss，1777—1855)系统地使用这个符号，使 i 通行于世.

值得一提的是，欧拉的一个惊人的等式 $e^{i\pi}+1=0$ 包含了现代数学中最重要的一些常数.

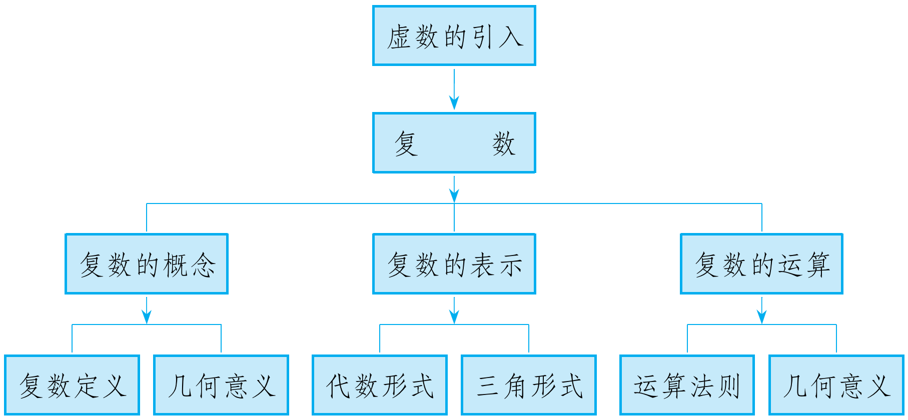
1797 年，丹麦数学家韦塞尔(C. Wessel，1745—1818)首次提出实轴、虚轴，并以实轴与虚轴所确定的平面表示这类新数，这实际上给出了复数的几何意义.

1799 年、1815 年和 1816 年，高斯证明了代数基本定理，即在复数集中，一元 n 次方程有且仅有 n 个根(k 重根算作 k 个根). 证明中，他应用并论述了这类新数，并首次引进了“复数”这个名词，把复数与直角坐标平面内的点一一对应起来，这就有效地使人们接受了复平面的思想，从而建立了复数的几何基础.

1837 年，爱尔兰数学家哈密顿(W. R. Hamilton，1805—1865)用有序实数对(a，b)定义了复数及其运算，并说明复数的加法、乘法运算满足实数的运算律，而实数 a 则看成特殊的复数(a，0). 这样，历经近 300 年的努力，数系从实数系向复数系的扩充才得以大功告成.

本章回顾

本章我们学习了复数的概念、复数的表示以及复数的运算.



数的概念的发展与数系扩充是数学发展的一条重要线索. 数系扩充的过程体现了实际需求与数学内部的矛盾在数学发展过程中的作用. 特别地，由实数系到复数系的扩充过程体现了数学体系的建构过程、数形结合思想以及人类理性思维在数学发展中的作用.

复数与平面向量有着密切的联系，在复平面内，复数 $z=a+b\mathrm{i}$、点 $Z(a,\ b)$、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间有一一对应的关系. 借助向量，我们得到了复数加法、减法的几何意义. 这种数形结合的思想丰富了我们研究问题和解决问题的方法和手段. 复数作为一种新的数学语言，也为我们今后用代数方法解决几何问题提供了可能.

复 习 题

感受・理解

1. 计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}+\mathrm{i}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$；

(2) $(1-3\mathrm{i}^{11})+(2+4\mathrm{i}^{17})-(3-5\mathrm{i}^{23})$；

(3) $(-3+\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})$；

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{6}$；

(5) $\frac{27-8\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$；

(6) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{13}$；

(7) $\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^{6}}{(1+\mathrm{i})^{8}}$；

(8) $\dfrac{1}{(3-2i)^2}-\dfrac{1}{(3+2i)^2}$.

2. 求满足下列条件的实数 x，y 的值：

(1) $(x+yi)i-2+4i=(x+yi)(1+i)$；

(2) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$.

3. 设 b 为实数，已知复数 $(1+bi)(2+i)$ 是纯虚数，求 b 的值.

4. 已知复数 $z_1=1-i$，$z_1z_2=1+i$，求复数 z_2.

5. 已知 $z_1=1+2i$，$z_2=3-4i$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$，求 z.

6. 已知复数 z 满足 $(z-2)i=1+i$，求复数 z 的模.

7. 已知复数 $z=1-i$，求 $|z^3|$ 的值.

8. 在复平面内，复数 i，1，$4+2i$ 所对应的点分别是 A，B，C，求$\square ABCD$ 的对角线 BD 的长.

9. 已知 z_1，z_2 是两个虚数，并且 z_1+z_2 与 z_1z_2 均为实数，求证：z_1，z_2 是共轭复数.

思考·运用

10. 已知复数 ω 满足 $1+\omega+\omega^2=0$，求 $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}$ 的值.

11. 已知 z 是虚数，$w=z+\dfrac{1}{z}$，求证：$w\in\mathbf{R}$ 的充要条件是 $|z|=1$.

12. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{3}$，求 $|z_1-z_2|$.

13. 在复数范围内分解因式：

(1) x^2+2；

(2) $a^2+4ab+4b^2+1$.

探究·拓展

14. 设 z 是虚数，z，$\bar{z}$，$\dfrac{1}{z}$ 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，试指出：

(1) $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的关系；

(2) $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的关系.

本章测试

一、填空题

1. 复数 $3-2i$ 的虚部为________.

2. 若 $i^5=a+bi\ (a,b\in \mathbf{R})$,则 $a+b$ 的值为________.

3. 复数 $1+3i$ 的模为________.

4. 设 $z\in \mathbf{C}$,满足条件 $|z|=3$ 的点 Z 的集合表示的图形为________________.

5. 计算:$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}=$________.

6. 设复数 $z_1=1+i$,$z_2=x+2i\ (x\in \mathbf{R})$. 若 z_1z_2 为实数,则 x 的值为________.

二、选择题

7. 在复平面内,复数 $z=-1+2i$ 对应的点所在的象限是(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

8. 如果 $z-(2-3i)=-1+i$,那么复数 z 为(　　).

A. $1-2i$　　B. $1+4i$　　C. $-1-2i$　　D. $-1+4i$

9. 计算 $\dfrac{2}{(1+i)^2}$ 的结果是(　　).

A. $2i$　　B. $-2i$　　C. i　　D. $-i$

10. 若复数 $z=(m-1)-(m+2)i\ (m\in \mathbf{R})$ 为纯虚数,则复数 z 的共轭复数为(　　).

A. $-3i$　　B. $3i$　　C. $4i$　　D. $-4i$

三、解答题

11. 计算:

(1) $(\sqrt{2}-2i)-(3\sqrt{2}+i)$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

12. 求满足下列条件的复数 z:

(1) $(-1+2i)+\bar{z}=5-6i$;

(2) $(1+i)z=1-2i$.

13. 设 $z_1=2+3i$,$z_2=m-i\ (m\in \mathbf{R})$,若$\dfrac{z_1}{z_2}$ 为实数,求 m 的值.

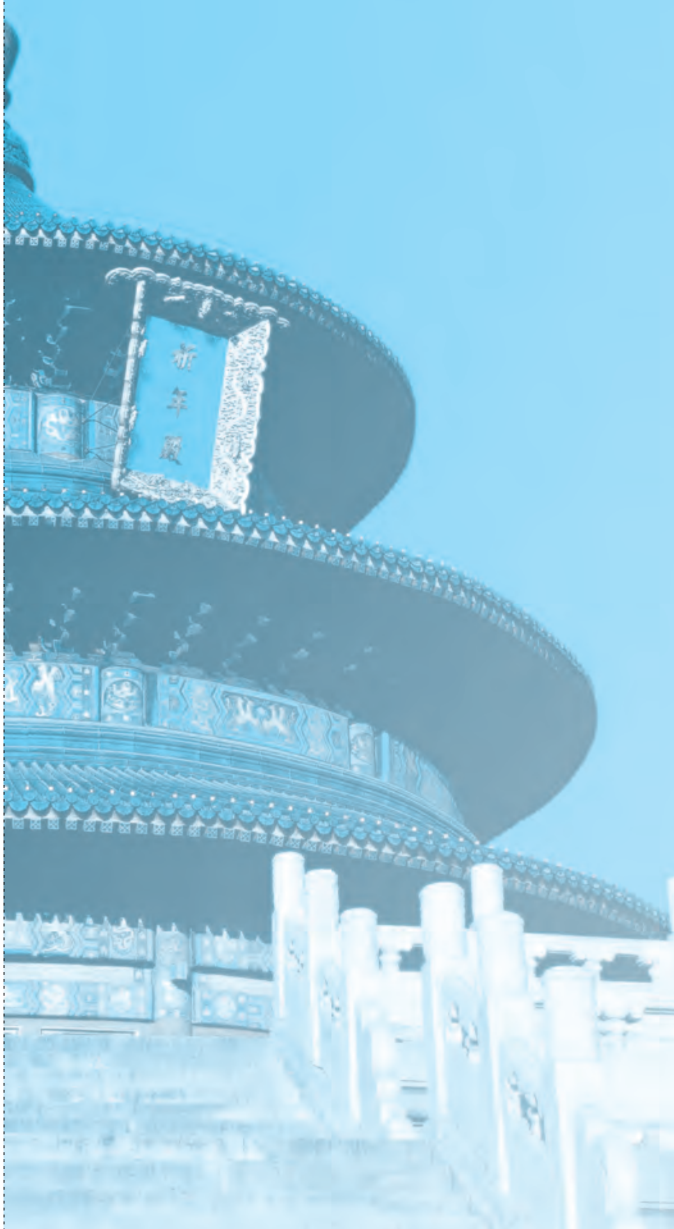
14. 已知 $z_1,z_2\in \mathbf{C}$,求证:

(1) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

(2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$.

15. 已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$,z^2 的虚部为 2,z 所对应的点 A 在第一象限,求复数 z.

第 13 章　立体几何初步



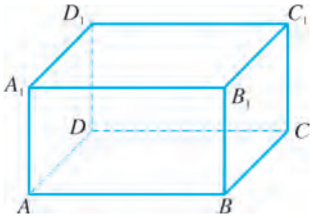
- 立体几何初步
  - 基本立体图形
    - 棱柱、棱锥和棱台
    - 圆柱、圆锥、圆台和球
    - 直观图的斜二测画法
  - 基本图形位置关系
    - 平面的基本性质
    - 空间两条直线的位置关系
      - 平行直线
      - 异面直线
    - 直线与平面的位置关系
      - 直线与平面平行
      - 直线与平面垂直
    - 平面与平面的位置关系
      - 两平面平行
      - 两平面垂直
  - 空间图形的表面积和体积
    - 空间图形的表面积
    - 空间图形的体积

几何学的简洁美正是几何学之所以完美的核心所在.

——牛顿

立体图形与我们的生活息息相关，从土木建筑到家居装璜，从机械设计到商品包装，从航行测绘到零件视图……其中蕴含了丰富的立体图形.

为了研究立体图形，我们从最简单的例子开始. 抬头看一下我们所在的教室，可以抽象成一个长方体.

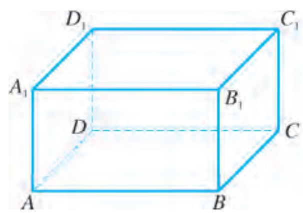


初中的几何知识告诉我们，图中有许多平行的直线，例如 $AA_1 /\!/ BB_1$，$AB /\!/ A_1B_1$ 等. 图中也有许多垂直的直线，例如 $AA_1 \perp AB$，$AB \perp AD$ 等. 但仔细观察，图中似乎还有许多“其他的”关系，例如 AA_1 与地面 $ABCD$ 好像是垂直的，A_1B_1 与地面 $ABCD$ 好像是平行的. 还有许多过去不知道的关系，例如 AA_1 与 B_1C_1，侧面 AA_1B_1B 与地面 $ABCD$ 之间是什么关系呢？实际上，我们需要进一步研究：

- 立体图形中有哪些基本元素？
- 立体图形中基本元素之间具有什么关系？

13.1　基本立体图形

在初中阶段，我们已经遇到长方体、正方体、圆柱、圆锥、球等简单的空间图形. 许多复杂的空间图形都是由一些简单的空间图形组合而成的. 而简单的空间图形又是怎样构成的呢？考察一下长方体，可以将长方体看作是由水平放置的矩形沿着竖直的方向平移而得到的(图 13－1－1).



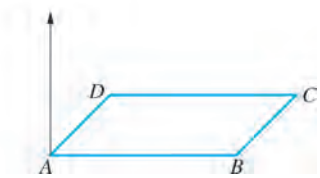


图 13－1－1

那么，

- 简单的空间图形具有怎样的结构特征？
- 如何在平面上表示空间图形？

13.1.1　棱柱、棱锥和棱台

在我们的周围存在各种物体(图 13－1－2)，如果我们只考虑这些物体的形状和大小，那么抽象出来的就是空间图形.

图 13－1－2

- 仔细观察下面的空间图形，你能发现它们可以怎样形成？

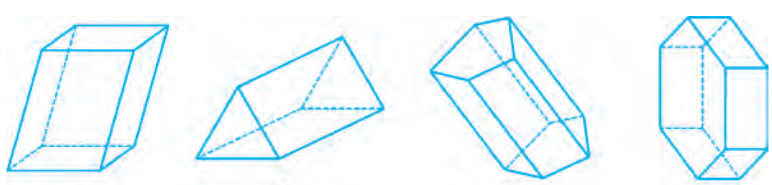


图 13－1－3

本章所说的多边形包括它的内部. 将一个图形上所有的点按某一确定的方向及相同距离移动就是平移.

图 13－1－3(1)和图 13－1－3(3)中的空间图形分别由平行四边形和五边形沿某一方向平移而得(图 13－1－4).

图 13－1－4

思　考

图 13－1－3(2)和图 13－1－3(4)中的空间图形分别由怎样的平面图形按什么方向平移而得?

平移前后的两个面互相平行.

一般地,由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间图形叫作**棱柱**(prism). 平移起止位置的两个面叫作棱柱的**底面**,多边形的边平移所形成的面叫作棱柱的**侧面**.

图 13－1－5 和图 13－1－6 给出了棱柱中一些常用名称的含义.

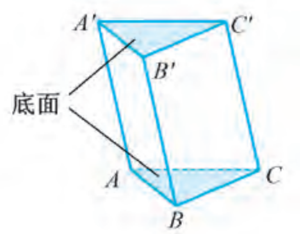


图 13－1－5

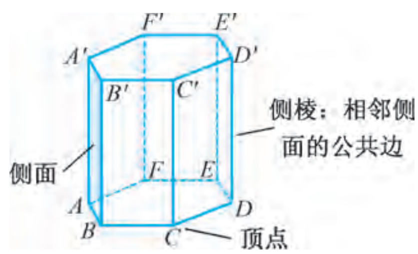


图 13－1－6

底面为三角形、四边形、五边形……的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……例如,图 13－1－5 为三棱柱,图 13－1－6 为六棱柱,并分别记作棱柱 $ABC-A'B'C'$、棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$.

根据棱柱形成的过程,我们可以看出棱柱具有如下特点:

两个底面是全等的多边形,且对应边互相平行,侧面都是平行四边形.

与图 13－1－3 对比,下面的空间图形是由图 13－1－3 中的空间图形发生了怎样的变化得到的?

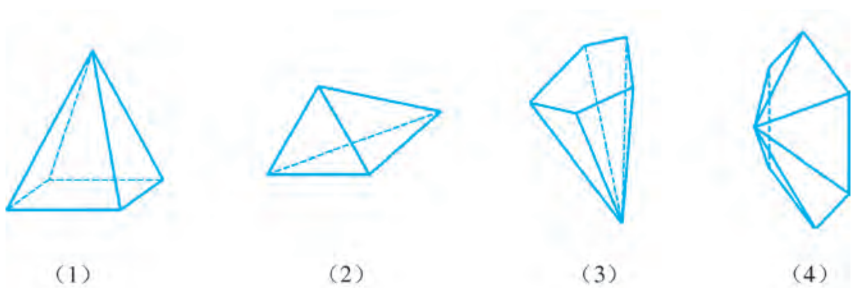


图 13－1－7

通过观察对比发现,当图 13－1－3 中各棱柱的一个底面收缩为一个点时,就可得到图 13－1－7.

当棱柱的一个底面收缩为一个点时，得到的空间图形叫作**棱锥**（pyramid）.

与棱柱相仿，图 13－1－8 给出了棱锥中一些常用名称的含义.

仿照棱柱，说出三棱锥、四棱锥、五棱锥……的含义.

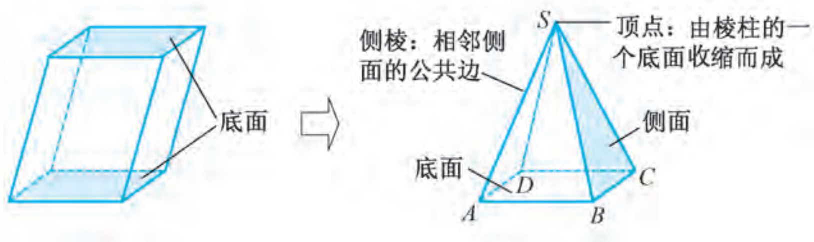


图 13－1－8

图 13－1－8 中的四棱锥可记作棱锥 $S-ABCD$.

根据棱锥形成的过程，我们可以看出棱锥具有如下特点：

底面是多边形，侧面是有一个公共顶点的三角形.

如图 13－1－9，用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，截面和底面之间的部分称之为**棱台**（frustum of pyramid）.

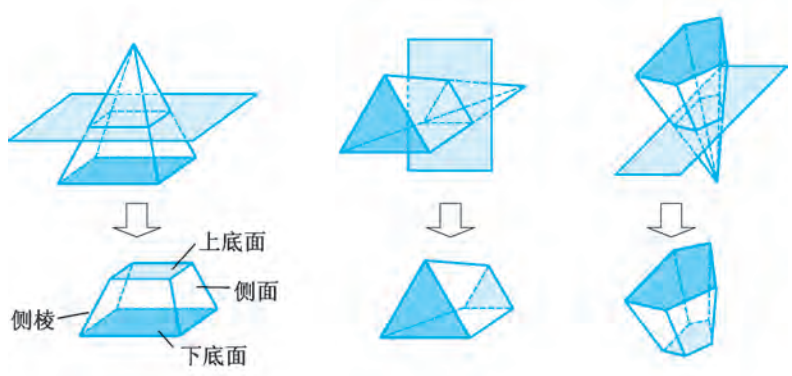


图 13－1－9

例 1 画一个四棱柱和一个三棱台.

解 如图 13－1－10，画四棱柱可分三步完成：

第一步 画上底面——画一个四边形；

第二步 画侧棱——从四边形的每一个顶点画平行且相等的线段；

第三步 画下底面——顺次连接这些线段的另一个端点.

被遮挡的线要画成虚线.

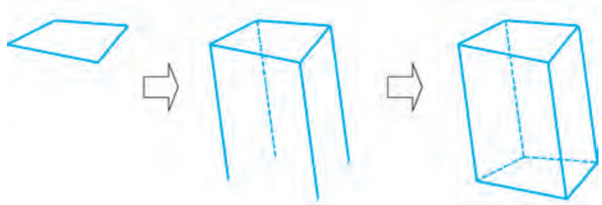


图 13－1－10

如图 13－1－11，画三棱台的方法是：首先画一个三棱锥，在它的一条侧棱上取一点，然后从这点开始，顺次在各个侧面内画出与底面对应边平行的线段，最后将多余的线段擦去.

棱柱、棱锥和棱台都是由一些平面多边形围成的空间图形. 由若

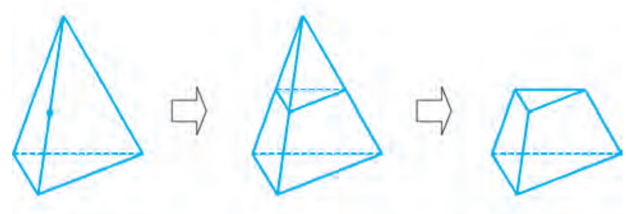


图 13－1－11

多面体有几个面就称为几面体，如三棱锥是四面体.

干个平面多边形围成的空间图形叫作**多面体**(polyhedron). 在现实世界中，存在着形形色色的多面体，如食盐、明矾、石膏等晶体都呈多面体形状(图 13－1－12).

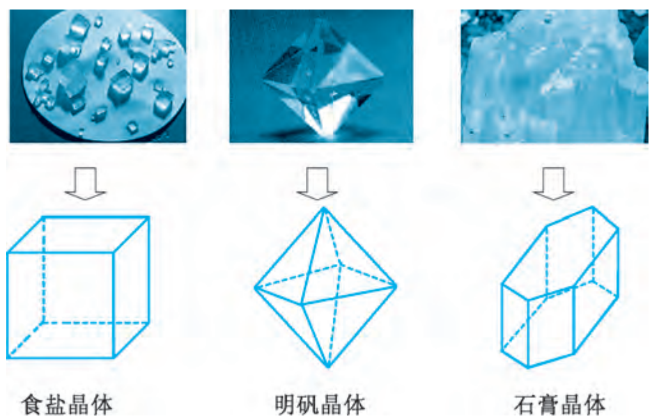
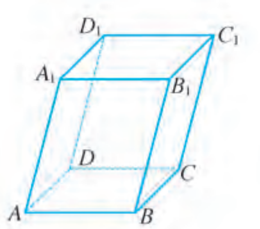


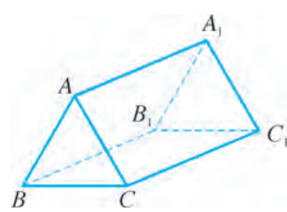
图 13－1－12

练 习

1. 如图，四棱柱的六个面都是平行四边形，这个四棱柱可以由哪个平面图形按怎样的方向平移得到？

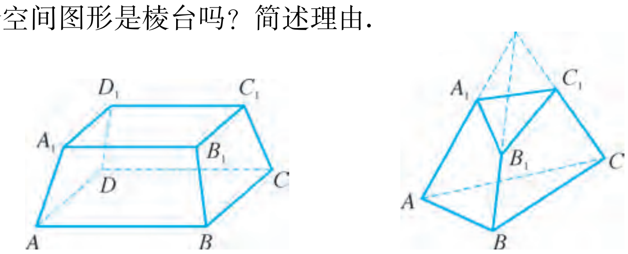


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，三棱镜的模型是一个三棱柱，请指出该三棱柱的底面和侧棱.
3. 画一个三棱锥和一个四棱台.
4. 下面两个空间图形是棱台吗？简述理由.



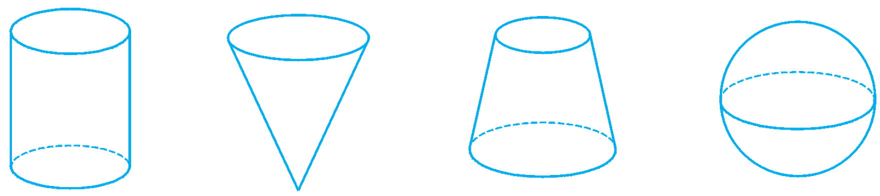
（第 4 题）

5. 多面体至少有几个面？这个多面体是怎样的空间图形？
6. 画一个五面体.

13.1.2 圆柱、圆锥、圆台和球

我们已经知道，图 13－1－2 中有些物体抽象出的空间图形为多面体（即由若干个平面多边形围成的空间图形），但有些物体抽象出的空间图形不是多面体.

● 仔细观察下面的空间图形，它们可以怎样形成？



（1）　（2）　（3）　（4）

图 13－1－13

上述空间图形都可以看作是由一个平面图形绕某一直线旋转而成的.

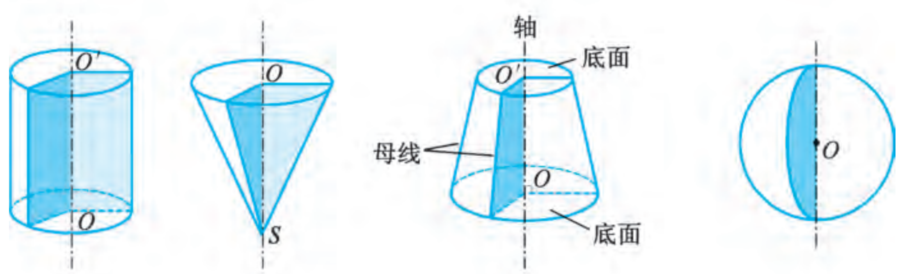
例如，图 13－1－13（1）中的空间图形是由矩形绕其一边旋转一周而成的空间图形（图 13－1－14（1））.

思　考

图 13－1－13（2）（3）（4）中的空间图形分别是由什么平面图形通过旋转一周而成的？在生产和生活中，还有哪些几何体具有类似的生成规律？

将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周，形成的空间图形分别叫作**圆柱**（circular cylinder）、**圆锥**（circular cone）、**圆台**（circular truncated cone），这条直线叫作**轴**. 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫作**底面**. 不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫作**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫作**母线**（图 13－1－14）.

仿照图 13－1－14（3），在其余各图中标出相应的轴、母线和底面.



（1）　（2）　（3）　（4）

图 13－1－14

半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面叫作**球面**（sphere），球面围成的空间图形叫作**球体**（spheroid），简称**球**（ball）.

图 13－1－14 中的圆柱、圆锥、圆台和球可分别记作圆柱 OO'、圆

锥 SO、圆台 OO' 和球 O.

一般地,一条平面曲线绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫作**旋转面**(surface of revolution)(图 13－1－15),封闭的旋转面围成的空间图形称为**旋转体**(solid of revolution). 圆柱、圆锥、圆台和球都是特殊的旋转体.

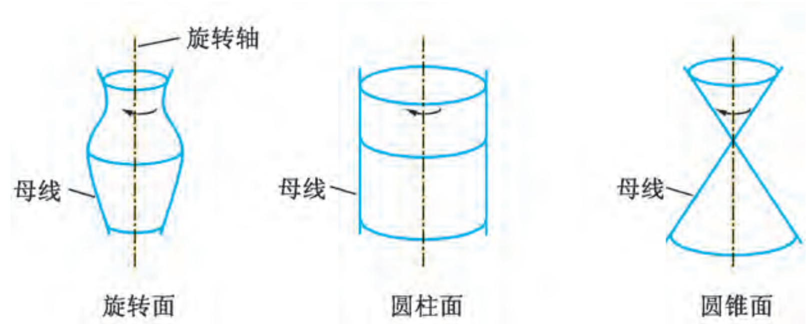


图 13－1－15

例 2 如图 13－1－16,将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周,由此形成的空间图形是由哪些简单空间图形构成的?

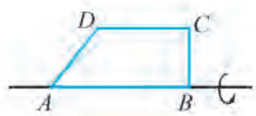


图 13－1－16

解 这个空间图形是由圆柱和圆锥组合而成的,如图 13－1－17.

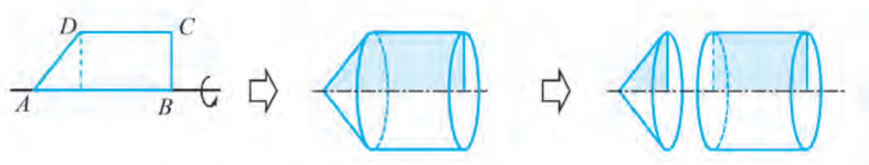


图 13－1－17

从例 2 看出,一些复杂的空间图形是由简单空间图形组合而成的.

例 3 指出图 13－1－18、图 13－1－19 中的空间图形是由哪些简单空间图形割补而成的.

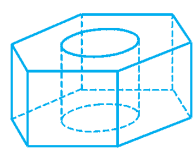


图 13－1－18

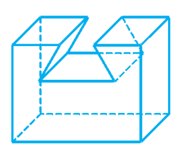


图 13－1－19

解 图 13－1－18 中的空间图形是由一个六棱柱挖去一个圆柱所成的.

图 13－1－19 中的空间图形可以看作是由一个长方体割去一个四棱柱所成的,也可以看作是由一个长方体与两个四棱柱组合而成

的(图 13－1－20).实际上,图 13－1－19 也是一个柱体,它的底面为一个凹多边形.

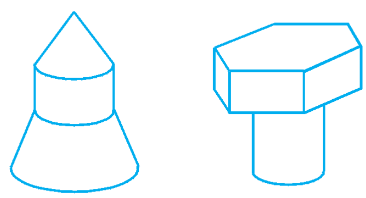
图 13－1－20

思　考

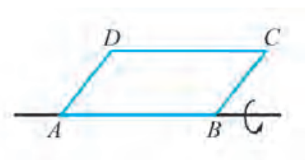
选择一些平面曲线,绕其所在平面内的一条定直线旋转,想像其生成的曲面.你能画出曲面的示意图吗?

练　习

1. 指出下列空间图形分别由哪些简单空间图形构成.



(第 1 题)

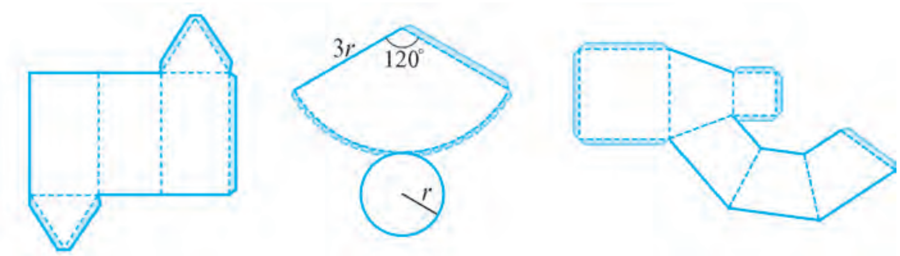


(第 2 题)

2. 如图,将 ▱$ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周,由此形成的空间图形是由哪些简单空间图形构成的?

3. 充满气的车轮内胎可以通过什么图形旋转生成?

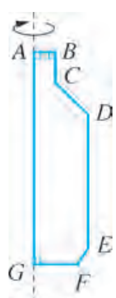
4. 用厚纸按如下三个图样画好后剪下,再沿图中虚线折起来粘好,得到的分别是什么空间图形?



(第 4 题)

5. 已知一个圆台的上、下底面的半径分别为 1 cm, 2 cm,高为3 cm,求该圆台的母线长.

6. 如图,将平面图形 $ABCDEFG$ 绕 AG 边所在的直线旋转一周,作出由此形成的空间图形,并指出该空间图形是由哪些简单空间图形构成的.



(第 6 题)

13.1.3　直观图的斜二测画法

图 13－1－3 至图 13－1－13,实际上都是空间图形的直观图.要画出空间图形的直观图,我们首先要学会水平放置的平面图形的直观图画法.那么,

● 对于水平放置的平面多边形及一般的空间图形，如何画出它的直观图呢？

本章我们主要采用斜二测画法画空间图形的直观图. 先通过一个具体的例子，说明水平放置的平面图形的直观图画法.

例 4 画水平放置的正三角形的直观图.

画法 如图 13－1－21，按如下步骤完成：

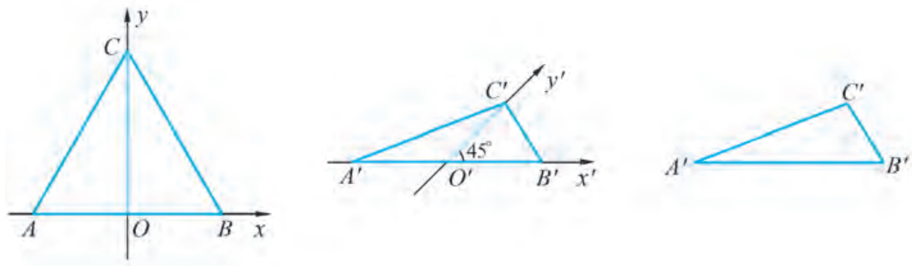


图 13－1－21

第一步 在已知的正三角形 ABC 中，取 AB 所在的直线为 x 轴，取对称轴 CO 为 y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$.

第二步 在 x' 轴上取 $O'A'=OA$，$O'B'=OB$，在 y' 轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$.

第三步 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，所得$\triangle A'B'C'$就是水平放置的正三角形 ABC 的直观图.

下面我们再看一个空间图形的直观图画法.

例 5 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法 如图 13－1－22，按如下步骤完成：

图画好后，擦去辅助线.

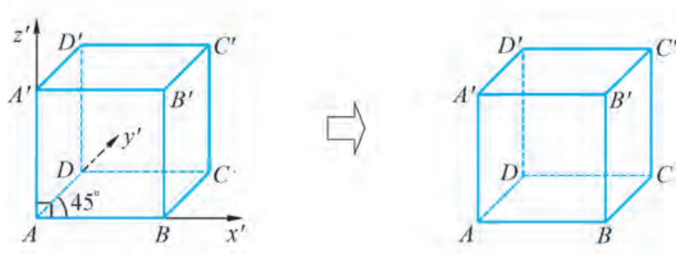


图 13－1－22

第一步 画水平放置的正方形的直观图 $ABCD$，使 $\angle BAD=45°$，$AB=2$ cm，$AD=1$ cm.

第二步 过点 A 作 z' 轴，使 $\angle BAz'=90°$. 分别过点 B，C，D 作 z' 轴的平行线，在 z' 轴及这组平行线上分别截取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

第三步 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，得到的图形就是所求作的正方体的直观图.

上面画直观图的方法叫作**斜二测画法**,其规则是:

(1) 在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴交于 O 点,再取 z 轴,使 $\angle xOz=90°$,且 $\angle yOz=90°$.

(2) 画直观图时把它们画成对应的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴,它们相交于点 O',并使 $\angle x'O'y'=45°$(或 $135°$),$\angle x'O'z'=90°$,x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平面.

(3) 已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段.

(4) 已知图形中平行于 x 轴或 z 轴的线段,在直观图中保持原长度不变;平行于 y 轴的线段,长度为原来的一半.

圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆面. 水平放置的圆的直观图应该画成椭圆(图 13-1-23).

在立体几何中,常用正等测画法画水平放置的圆. 有关正等测画法可参看"链接".

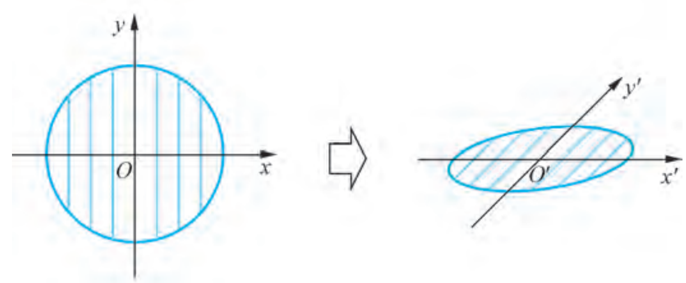


图 13-1-23

链 接

正 等 测 画 法

圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆,在画直观图时一般不用斜二测画法,而采用正等测画法. 正等测画法的规则是:

(1) 如图 13-1-24,取互相垂直的直线 Ox, Oy 作为已知图形 $\odot O$ 所在平面内的直角坐标系的 x 轴和 y 轴,画直观图时将它们画成对应的 x' 轴和 y' 轴,并使 $\angle x'O'y'=120°$ (或 $60°$),x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平面;

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段;

(3) 平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中保持长度不变.

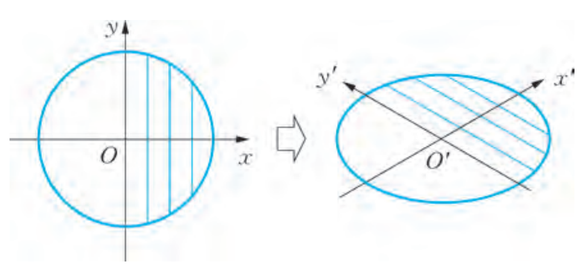


图 13-1-24

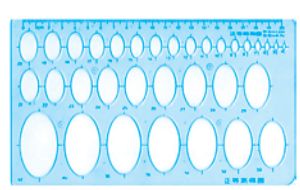


图 13-1-25

这样得到的圆的直观图是椭圆. 这种画椭圆的方法比较麻烦,在实

际画水平放置的圆的直观图时，可用如图 13－1－25 所示的椭圆模板.

练 习

1. 用斜二测画法画出下列水平放置的图形的直观图.

(1)　　(2)

（第 1 题）

2. 已知长方体的长、宽、高分别为 3 cm，2 cm，2 cm，试画出该长方体的直观图.
3. 用斜二测画法画出下列平面图形水平放置的直观图.

(1)　　(2)

（第 3 题）

4. 利用斜二测画法得到的

① 三角形的直观图是三角形；

② 平行四边形的直观图是平行四边形；

③ 正方形的直观图是正方形；

④ 菱形的直观图是菱形.

上述结论中正确的是(　　).

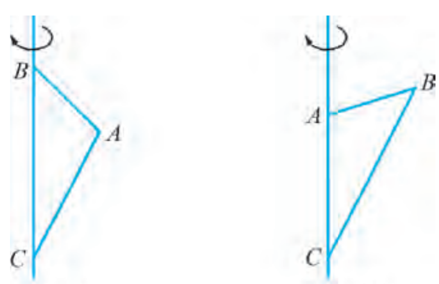
A. ①②　　B. ①　　C. ③④　　D. ①②③④

5. 画出底面半径为 1 cm、高为 3 cm 的圆锥的直观图.
6. 画出底面边长为 4 cm、高为 5 cm 的正四棱锥的直观图.

习题 13.1

感受 · 理解

1. 三棱柱、六棱柱分别可以看成是由什么多边形平移形成的空间图形?
2. 如图，将△ABC 绕 BC 边所在的直线旋转一周，由此形成的空间图形是由哪些简单的空间图形构成的? 画出这个空间图形的直观图. 若绕 AC 边所在的直线旋转一周呢?

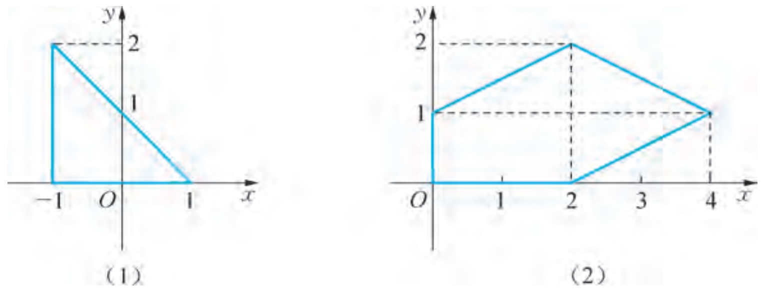


(1)　　(2)

（第 2 题）

3. 已知圆柱的底面半径和高分别为 2 cm，3 cm，画出该圆柱的直观图.

4. 用斜二测画法画出下列平面图形水平放置的直观图.



（第 4 题）

5. 画出底面边长为 3 cm、高为 4.5 cm 的正三棱柱的直观图.

思考・运用

6. 画出上、下底面边长分别为 3 cm 和 5 cm，高为 4 cm 的正四棱台的直观图.

7. 选择日常生活中的一个空间图形，画出它的直观图.

探究・拓展

8. 用一个平面截球，得到一个截面，此截面一定是圆吗？为什么？

13.2 基本图形位置关系

在上一节，我们已经对空间基本图形有了直观的认识. 空间基本图形是由空间的点、线、面所构成的. 而且，其中的点、线、面之间还具有一定的位置关系. 例如，在如图 13－2－1 所示的长方体中，有些线就具有平行关系，有些线就具有垂直关系.

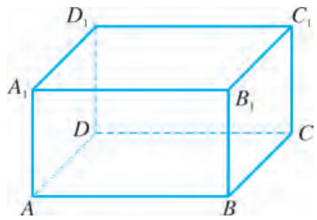


图 13－2－1

一般地，

● 如何研究空间的点、直线和平面的位置关系？

13.2.1 平面的基本性质

平面没有厚薄，是无限延展的.

用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定，将一把直尺置于桌面上，通过是否漏光就能检查桌面是否平整，为什么？椅子放不稳，是地面不平还是椅子本身有问题？

● 上面的问题都和平面的基本性质有关，那么平面有哪些基本性质？

平静的湖面给我们以平面的形象. 和点、直线一样，平面也是从现实世界中抽象出来的几何概念. 平面通常用平行四边形来表示，当平面水平放置的时候，一般用水平放置的正方形的直观图作为平面的直观图（图 13－2－2）.

平面通常用希腊字母 α, β, γ, …表示，也可以用平行四边形的两个相对顶点的字母表示，如图 13－2－2 中的平面 α、平面 AC 等.

图 13－2－2

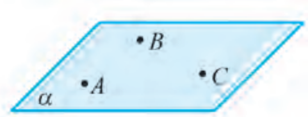


图 13－2－3

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面

的三个基本事实.我们将它们作为进一步推理的基础.

基本事实也称为公理.

基本事实 1 过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面(图 13-2-3).

"用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定""照相机支架只需三条腿就够了"都是基于这个基本事实.基本事实 1 也可简单地说:不共线的三点确定一个平面.确定一个平面的含义是有且只有一个平面.

过不共线三点 A,B,C 的平面(图 13-2-3)通常记作"平面 ABC".

基本事实 2 如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内(图 13-2-4).

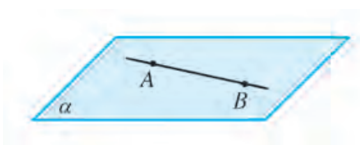


图 13-2-4

"将一把直尺置于桌面上,通过是否漏光就能检查桌面是否平整",就是基于这个基本事实.

空间中点、直线和平面的位置关系,可以借用集合中的符号来表示.例如,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中(图 13-2-5):

位置关系	符号表示
点 P 在直线 AB 上	$P \in AB$
点 C 不在直线 AB 上	$C \notin AB$
点 M 在平面 AC 内	$M \in$ 平面 AC
点 A_1 不在平面 AC 内	$A_1 \notin$ 平面 AC
直线 AB 与直线 BC 交于点 B	$AB \cap BC = B$
直线 AB 在平面 AC 内	$AB \subset$ 平面 AC
直线 AA_1 不在平面 AC 内	$AA_1 \not\subset$ 平面 AC

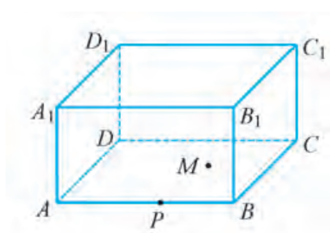


图 13-2-5

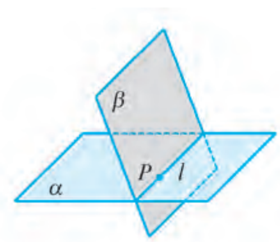


图 13-2-6

这样,基本事实 2 就可以用符号表示为(图 13-2-4):

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha.$$

基本事实 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线(图 13－2－6).

若两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫作这两个平面的**交线**. 教室里相邻的墙面在地面的墙角处有一个公共点，那么它们就相交于过该点的一条直线.

基本事实 3 可用符号表示为(图 13－2－6)：

$$\left.\begin{array}{l}P\in\alpha\\P\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\cap\beta=l\text{ 且 }P\in l.$$

根据前面的基本事实，可以得出下面的推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(图 13－2－7).

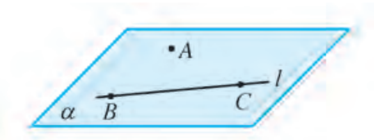


图 13－2－7

已知：直线 l，点 $A\notin l$(图 13－2－7).

求证：过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

分析　先在直线 l 上任取两点 B，C，这样 A，B，C 三点就确定一个平面，再证明 l 在这个平面内.

证明　在直线 l 上任取两点 B，C. 因为点 A 不在直线 l 上，根据基本事实 1，经过不共线三点 A，B，C 有一个平面 α.

因为 $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，所以根据基本事实 2，$l\subset\alpha$，即平面 α 经过直线 l 和点 A.

因为点 B，C 在直线 l 上，所以经过直线 l 和点 A 的平面一定经过点 A，B，C.

于是再根据基本事实 1，经过不共线的三点 A，B，C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

我们还可以得出下面两个推论：

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(图13－2－8).

图 13－2－8

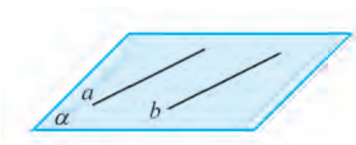


图 13－2－9

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图13－2－9).

已知：直线 $a\parallel b$.

求证：过直线 a，b 有且只有一个平面.

分析 先根据平行线的定义，说明直线 a,b 必在同一个平面内；再根据推论 1，证明经过 a 和 b 的平面只有一个.

证明 根据平行线的定义（同一平面内没有公共点的两条直线）可知，直线 a 和直线 b 一定在同一个平面内.

在直线 a 上任取一点 A. 因为 $a\parallel b$，所以点 A 不在直线 b 上，由推论 1 可知，经过点 A 和直线 b 的平面只有一个.

因为经过直线 a 和直线 b 的平面一定经过点 A 和直线 b，故经过直线 a 和直线 b 的平面只有一个.

桌子放不稳，是地面不平还是桌子本身有问题？可按图 13-2-10 来判断：用两根细绳沿桌子四条腿的对角拉直，如果这两根细绳相交，说明桌子四条腿的底端在同一平面内，否则就不在同一平面内，说明桌子有问题，依据的就是推论 2.

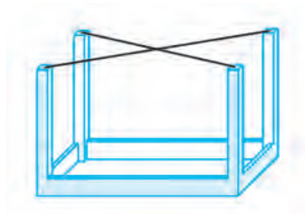


图 13-2-10

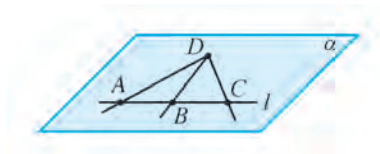


图 13-2-11

例 1 已知：$A\in l$，$B\in l$，$C\in l$，$D\notin l$（图 13-2-11）.

求证：直线 AD，BD，CD 共面.

空间若干点或直线都在同一个平面内，就称它们共面.

分析 因为直线 l 与点 D 可以确定平面 α，所以只需证明 AD，BD，CD 都在平面 α 内.

证明 因为 $D\notin l$，所以 l 与 D 可以确定平面 α（推论 1）.

因为 $A\in l$，所以 $A\in\alpha$.

又 $D\in\alpha$，所以 $AD\subset\alpha$（基本事实 2）.

同理，$BD\subset\alpha$，$CD\subset\alpha$，所以 AD，BD，CD 在同一平面 α 内，即它们共面.

例 2 如图 13-2-12(1)，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，画出由 A_1，C_1，P 三点所确定的平面 α 与长方体表面的交线.

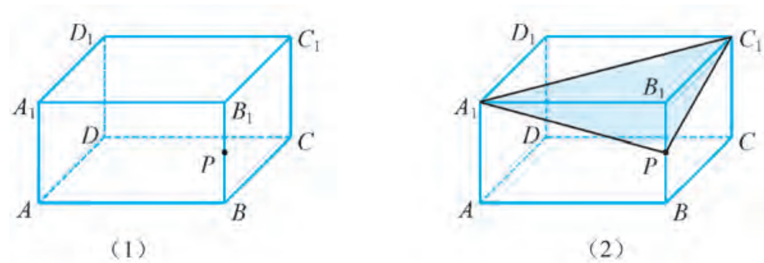


图 13-2-12

分析 因为点 P 既在平面 α 内又在平面 AB_1 内，所以点 P 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 同理，点 A_1 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 因此，PA_1 就是平面 α 与平面 AB_1 的交线.

作法 连接 A_1P, PC_1, A_1C_1，它们就是平面 α 与长方体表面的交线(图 13－2－12(2)).

练　习

1. 为什么许多自行车后轮旁只安装一只撑脚?

2. 用符号表示下列语句：

(1) 点 A 在直线 l 上，l 在平面 α 内；

(2) 平面 α 和平面 β 的交线是直线 l，直线 m 在平面 α 内；

(3) 点 A 在平面 α 内，直线 l 经过点 A，且直线 l 在平面 α 外；

(4) 直线 l 经过平面 α 外一点 M.

3. 用符号表示“点 A 在直线 l 上，l 在平面 α 外”，正确的是(　　).

A. $A\in l$, $l\notin\alpha$　　　　B. $A\in l$, $l\not\subset\alpha$

C. $A\subset l$, $l\not\subset\alpha$　　　　D. $A\subset l$, $l\notin\alpha$

4. 下列叙述中，正确的是(　　).

A. 因为 $P\in\alpha$, $Q\in\alpha$，所以 $PQ\in\alpha$

B. 因为 $P\in\alpha$, $Q\in\beta$，所以 $\alpha\cap\beta=PQ$

C. 因为 $AB\subset\alpha$, $C\in AB$, $D\in AB$，所以 $CD\in\alpha$

D. 因为 $AB\subset\alpha$, $AB\subset\beta$，所以 $\alpha\cap\beta=AB$

习题 13.2(1)

感受・理解

1. 画图表示下列语句(其中 P, M 表示点，l, m 表示直线，α, β 表示平面)：

(1) $P\in l$, $P\notin\alpha$, $l\cap\alpha=M$;　　(2) $\alpha\cap\beta=m$, $P\in\alpha$, $P\notin m$;

(3) $l\not\subset\alpha$, $l\subset\beta$;　　(4) $P\in\alpha$, $P\in\beta$, $\alpha\cap\beta=m$.

2. 请指出下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 空间三点确定一个平面；

(2) 如果平面 α 与平面 β 有公共点，那么公共点就不止一个；

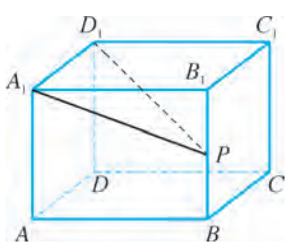
(3) 因为平的斜屋面不与地面相交，所以屋面所在的平面与地面不相交.

3. 证明“推论 2”.

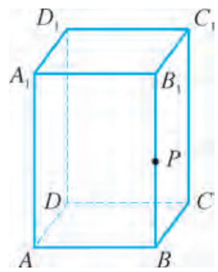
思考・运用

4. 如果 $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$, $A\in l$, $B\in l$，直线 l 与平面 α 有多少个公共点?

5. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 P 为棱 BB_1 的中点，直线 A_1P 与平面 $ABCD$ 是否相交? 为什么? 直线 D_1P 呢?



(第 5 题)



(第 6 题)

探究·拓展

6. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为棱 BB_1 的中点.

(1) 画出平面 PAC 与平面 $ABCD$ 的交线;

(2) 画出平面 PA_1C 与平面 $ABCD$ 的交线.

13.2.2 空间两条直线的位置关系

在平面内,两条直线的位置关系只有平行和相交两种. 在空间,情况就不同了. 例如,教室中日光灯管所在直线与黑板左侧所在直线,图 13-2-13 中的机械部件蜗杆和蜗轮的轴线 a 和 b,它们既不相交也不平行. 那么,

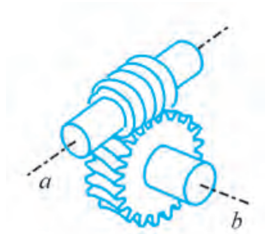


图 13-2-13

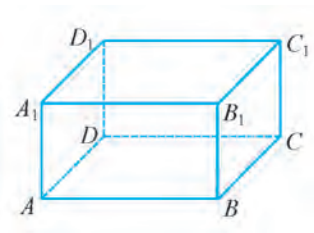


图 13-2-14

本书中,如无特别说明,"两条直线"指不重合的两条直线,"两个平面"指不重合的两个平面.

● 空间两条直线的位置关系有哪些呢?

观察如图 13-2-14 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,可以看出,空间两条直线除了相交、平行两种位置关系外,还有第三种位置关系. 例如,直线 A_1B_1 与 BC、直线 A_1B_1 与 CC_1 等既不相交又不平行,即不同在任何一个平面内. 我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫作**异面直线**(skew lines).

因此,空间两条直线的位置关系有以下三种:

位置关系	共面情况	公共点个数
相交直线	在同一平面内	有且只有一个
平行直线	在同一平面内	没有
异面直线	不同在任何一个平面内	没有

1. 平行直线

在平面几何中,同一平面内的三条直线 a, b, c,如果 $a//b$,$b//c$,那么 $a//c$. 这个性质在空间是否成立呢?

如图 13-2-15,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1 // BB_1$,$CC_1 // BB_1$,通过观察可以看出 $AA_1 // CC_1$.

又如图 13-2-16,在圆柱 OO_1 中,$AA_1//OO_1$,$BB_1//OO_1$,通过观察也可以看出 $AA_1//BB_1$.

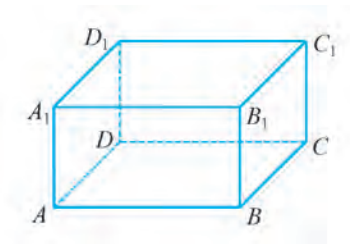


图 13－2－15

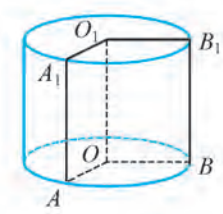


图 13－2－16

这表明，空间的三条直线也具有这样的性质，我们把它作为基本事实.

基本事实 4 平行于同一条直线的两条直线平行.

用符号表示为

$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel c.$$

思　考

经过直线外一点，有几条直线和这条直线平行？

例 1 如图 13－2－17，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E，F 分别是 AB，BC 的中点.

求证：$EF \parallel A_1C_1$.

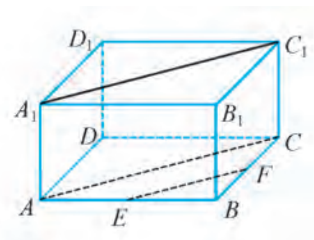


图 13－2－17

证明 连接 AC.

在$\triangle ABC$ 中，因为 E，F 分别是 AB，BC 的中点，

所以 $$EF \parallel AC.$$

又因为 $AA_1 \underline{\parallel} BB_1$，$BB_1 \underline{\parallel} CC_1$，

所以 $$AA_1 \underline{\parallel} CC_1,$$

从而四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，

所以 $$AC \parallel A_1C_1.$$

从而 $$EF \parallel A_1C_1.$$

在平面中，如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等. 这一结论在空间成立吗？

观察图 13－2－17 中的 $\angle BEF$ 和 $\angle B_1A_1C_1$，这两个角的两边分别平行，且有

$\angle BEF = \angle B_1A_1C_1$（因为 $\angle BEF = \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$）.

一般地，我们有

定理 如果空间中一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

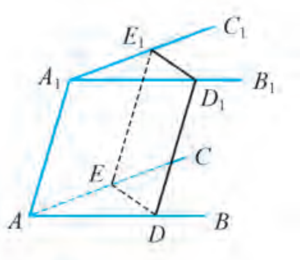


图 13－2－18

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，并且方向相同(图 13－2－18)．

求证：$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$．

分析 为证明 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$，可构造两个全等三角形，使 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是它们中的对应角．

证明 分别在$\angle BAC$ 和$\angle B_1A_1C_1$ 的两边上截取

$$AD = A_1D_1,\ AE = A_1E_1,$$

连接 AA_1，DD_1，EE_1，DE，D_1E_1．

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ AD = A_1D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{四边形 } AA_1D_1D \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DD_1 \\ \text{同理，}AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EE_1 \end{array}\right\} \Rightarrow DD_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EE_1 \Rightarrow \text{四边形 } DD_1E_1E \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DE = D_1E_1 \\ \quad AD = A_1D_1 \\ \quad AE = A_1E_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle A_1D_1E_1 \Rightarrow \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

思 考

如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，且边 AB 与 A_1B_1 方向相同，而边 AC 与 A_1C_1 方向相反，那么，$\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 之间有何关系？为什么？

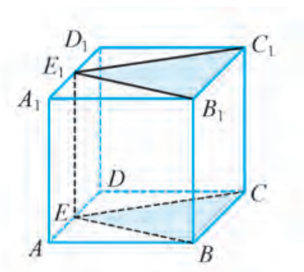


图 13－2－19

例 2 如图 13－2－19，已知 E，E_1 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD，A_1D_1 的中点．

求证：$\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$．

分析 设法证明 $E_1C_1 \parallel EC$，$E_1B_1 \parallel EB$．

证明 连接 EE_1．

因为 E_1，E 分别是 A_1D_1，AD 的中点，

所以 $\qquad A_1E_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AE$，

故四边形 A_1E_1EA 是平行四边形，

从而 $\qquad A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} E_1E$．

又因为 $\qquad A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，

所以 $\qquad E_1E \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，

故四边形 EE_1B_1B 是平行四边形，

从而 $\qquad E_1B_1 \parallel EB$．

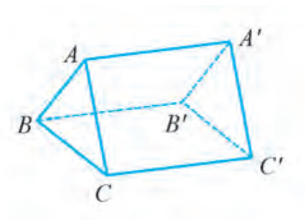
同理 $\qquad E_1C_1 \parallel EC$．

又因为$\angle C_1E_1B_1$ 与$\angle CEB$ 两边的方向相同，

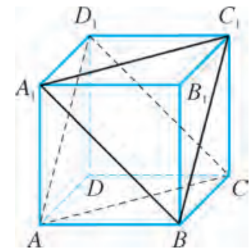
所以 $\qquad \angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$．

练 习

1. 如果 $OA /\!/ O_1A_1$，$OB /\!/ O_1B_1$，那么$\angle AOB$与$\angle A_1O_1B_1$之间具有什么关系？
2. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且$AA' \underline{/\!/} BB'$，$BB' \underline{/\!/} CC'$.
   求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

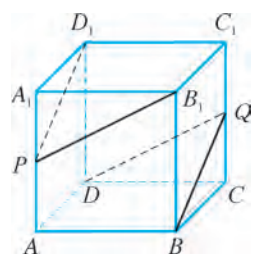


（第 2 题）

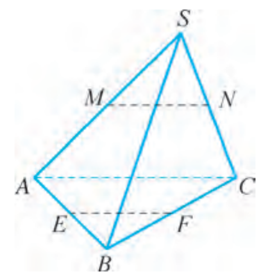


（第 3 题）

3. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
   (1) 直线 AC 与直线 A_1C_1 平行吗？为什么？
   (2) $\angle A_1BC_1$ 与$\angle AD_1C$ 是否相等？为什么？
4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q 分别为棱 AA_1 和 CC_1 的中点，问：$\angle D_1PB_1$ 与$\angle BQD$ 是否相等？为什么？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N，E，F 分别为棱 SA，SC，AB，BC 的中点，试判断直线 MN 与直线 EF 是否平行.

2. 异面直线

如图 13－2－20，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中可以直观地看出，直线 AB 与 A_1C 既不相交又不平行（即异面）. 那么，如何说明 AB 与 A_1C 不同在任何一个平面内？

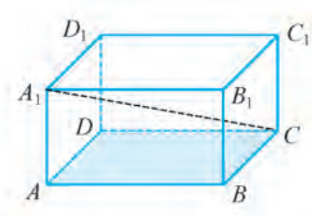


图 13－2－20

假设 AB 与 A_1C 共面，由于经过点 C 和直线 AB 的平面只能有一个，所以直线 A_1C 和 AB 都应在平面 $ABCD$ 内，于是点 A_1 在平面 $ABCD$ 内，这与“点 A_1 在平面 $ABCD$ 外”矛盾. 因此，直线 AB 与 A_1C 是异面直线.

一般地，我们有

定理 过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线.

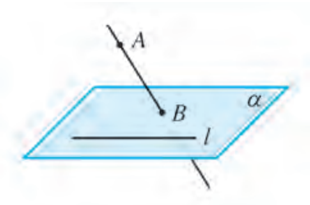


图 13-2-21

用符号表示为(图 13-2-21)：

若 $l\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin l$，则直线 AB 与 l 是异面直线.

如图 13-2-22，a 与 b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫作**异面直线 a，b 所成的角或夹角**.

为什么 a'，b' 所成角的大小与点 O 的选择无关?

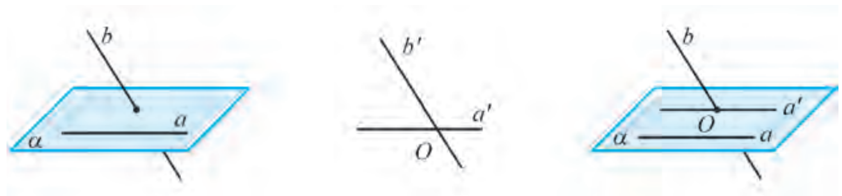


图 13-2-22

若异面直线 a，b 所成的角是直角，则称**异面直线 a，b 互相垂直**，记作 $a\perp b$. 在图 13-2-13 中，蜗杆和蜗轮的轴线是互相垂直的异面直线，它表明由蜗杆到蜗轮的传动方向变了 $90°$的角.

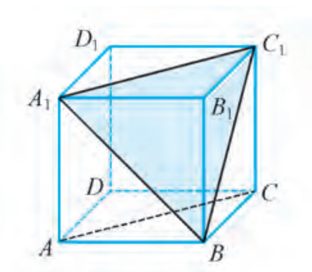


图 13-2-23

例 3 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体(图 13-2-23).

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BC_1 是异面直线?

(2) 求证直线 AA_1 与 BC 垂直.

(3) 求直线 BC_1 与 AC 的夹角.

解 (1) 正方体共有 12 条棱，与 BC_1 相交的棱有 6 条，与 BC_1 平行的棱不存在. 因此余下的 6 条棱所在直线分别与直线 BC_1 是异面直线，它们是 A_1A，A_1B_1，A_1D_1，DA，DC，DD_1.

(2) 因为 $$AD /\!/ BC,$$

所以 AA_1 与 AD 的夹角就是 AA_1 与 BC 的夹角.

因为 $$\angle A_1AD=90°,$$

所以 $$AA_1\perp BC.$$

(3) 连接 A_1C_1，因为 $AA_1 \mathrel{\underline{/\!/}} BB_1 \mathrel{\underline{/\!/}} CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，故 $AC/\!/A_1C_1$，

从而 BC_1 与 AC 的夹角就是 BC_1 与 A_1C_1 的夹角.

连接 A_1B.

因为 A_1B，BC_1 与 A_1C_1 都是正方体的面对角线，

所以 $$A_1B = BC_1 = A_1C_1,$$

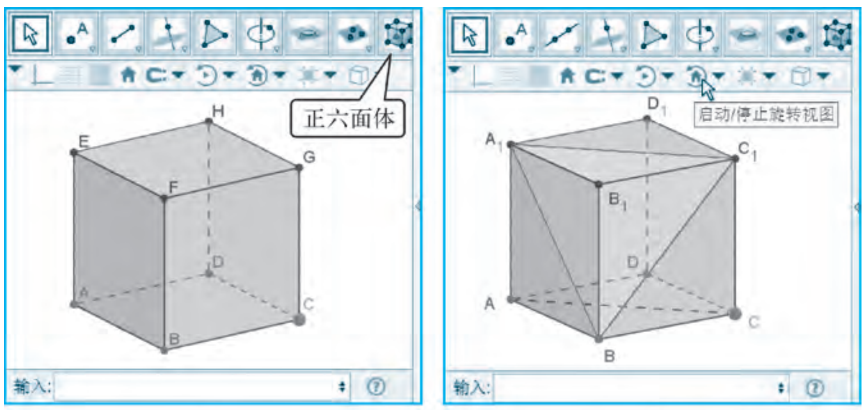
故 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形.

因此，BC_1 与 A_1C_1 的夹角为 $60°$，即 BC_1 与 AC 的夹角为 $60°$.

从上例可以看出，探求异面直线所成的角，实际上是通过平移，将异面直线转化为相交直线，即将空间图形问题转化为平面图形问题，这是研究空间图形的一种基本思想——转化思想.

信息技术

在 GGB 的 3D 绘图区中，选择“正六面体”命令，任意单击两点 A，B 即可画出正方体 AG(图 13－2－24(1))．将顶点 E，F，G，H 重命名为 A_1，B_1，C_1，D_1．用“线段”命令连接 AC，用“多边形”命令画出平面 A_1BC_1(图 13－2－24(2))．拖动图形或单击“启动/停止旋转视图”，即可转动图形，从不同角度观察正方体中点、线、面之间的位置关系.



(1)　　(2)

图 13－2－24

练　习

1. 指出下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 过直线外一点可以作无数条直线与已知直线成异面直线；

(2) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

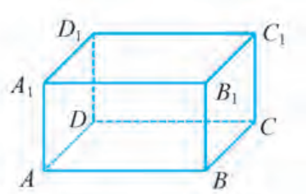
2. 如果两条直线 a 和 b 没有公共点，问：a 与 b 具有怎样的位置关系？

3. 如果直线 a，b 分别是长方体的相邻两个面的对角线所在的直线，那么 a 与 b 具有怎样的位置关系？

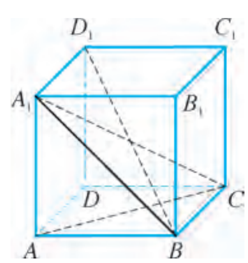
4. 在两个相交平面内各画一条直线，使它们成为：

(1) 平行直线；　　(2) 相交直线；　　(3) 异面直线.

5. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，哪些棱所在的直线与直线 AA_1 是异面直线且互相垂直？



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：

(1) 求直线 A_1B 与 C_1C 的夹角；

(2) 作出异面直线 AC 与 D_1B 所成的角；

(3) 作出异面直线 A_1C 与 D_1D 所成的角，并求出该角的正切值.

7. 指出下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 若 $a \parallel b$，$c \perp a$，则 $c \perp b$；

(2) 若 $a \perp c$，$b \perp c$，则 $a \parallel b$.

习题 13.2(2)

感受 · 理解

1. 用符号表示下列语句：

(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 在平面 β 内，直线 AB 在平面 β 内；

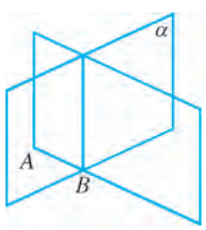
(2) 平面 α 和 β 的交线为 l，直线 m 在平面 α 内，且 m 与 l 交于点 P.

2. 画出满足下列条件的图形(其中 A，B，M 表示点，m，n，a，b 表示直线，α，β 表示平面)：

(1) $m \subset \alpha$，$n \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，$m \parallel n \parallel l$；

(2) $A \in \alpha$，$B \in \beta$，$AB \not\subset \alpha$，$AB \not\subset \beta$，$\alpha \cap \beta = l$；

(3) $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，$a \cap b = M$.



(第 3 题)

3. 如图，试根据下列要求，把被遮挡的部分画为虚线.

(1) AB 被平面 α 遮挡；

(2) AB 没有被平面 α 遮挡.

4. 如果三条直线两两相交，问：这三条直线是否共面？

5. 四条线段顺次首尾相接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

6. 画“三个平面两两相交”的直观图.

7. 如果 a，b 是异面直线，直线 c 与 a，b 都相交，问：由这三条直线中的任意两条所确定的平面共有多少个？

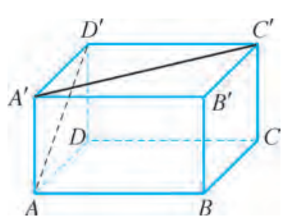
8. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，经过 A_1D 与 BB_1 能否作长方体的截面？为什么？

9. 如果 AB，CD 是两条异面直线，问：直线 AC，BD 一定是异面直线吗？为什么？

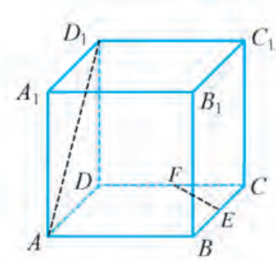
10. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $AB = AD = 2\sqrt{3}$，$AA' = 2$. 求：

(1) BC 和 $A'C'$ 所成的角；

(2) BB' 和 AD' 所成的角.



(第 10 题)

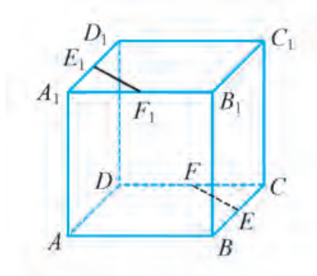


(第 11 题)

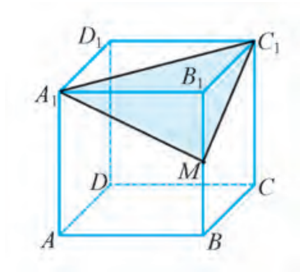
思考 · 运用

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 = a$，E，F 分别是 BC，DC 的中点. 求直线 AD_1 与 EF 的夹角.

12. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1E_1=CE$,$A_1F_1=CF$. 求证:$E_1F_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EF$.



(第 12 题)



(第 13 题)

13. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 是 BB_1 的中点,试作出平面 A_1C_1M 与平面 $ABCD$ 的交线.

14. 分别与异面直线 a,b 都相交的两条直线 c,d 一定异面吗?为什么?

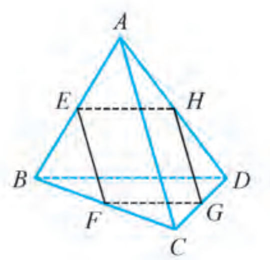
探究・拓展

15. 如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中,E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点.

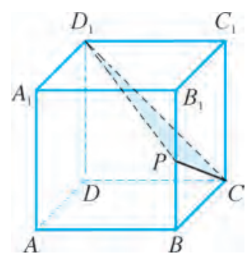
(1) 求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2) 若 $AC=BD$,求证:四边形 $EFGH$ 是菱形;

(3) 当 AC 与 BD 满足什么条件时,四边形 $EFGH$ 是正方形?



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,若 P 为棱 BB_1 的中点,判断平面 D_1PC 与平面 $ABCD$ 是否相交. 如果相交,作出这两个平面的交线.

13.2.3 直线与平面的位置关系

观察教室两墙面的交线与地面的关系,墙面和天花板的交线与地面的关系,再观察你手中的笔与作业本所在平面可能的位置关系. 那么,

● 直线与平面可能有哪几种位置关系?

在如图 13-2-25 所示的长方体中,棱 A_1B_1 所在的直线与平面 AC 没有公共点,体对角线 A_1C 所在直线与平面 AC 有且只有一个公共点,棱 AD 所在的直线与平面 AC 有无数个公共点.

如果一条直线 a 和一个平面 α 没有公共点,那么称**直线 a 与平面 α 平行**;如果直线 a 与平面 α 有且只有一个公共点,那么称**直线 a 与**

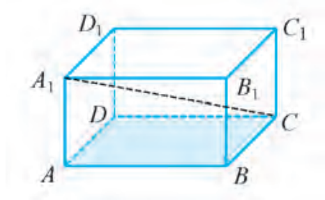
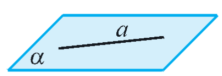
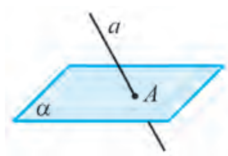
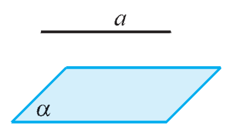


图 13－2－25

平面 α 相交；如果直线 a 与平面 α 有无数个公共点，那么称**直线 a 在平面 α 内**.

一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种：

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公 共 点	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a \,/\!/\, \alpha$
图形表示			

我们把直线 a 与平面 α 相交或平行的情况统称为直线在平面外，记作 $a \not\subset \alpha$.

1. 直线与平面平行

打开笔记本电脑时，显示屏上侧所在的直线与键盘所在的平面具有怎样的位置关系？

教室的门的两边是平行的，当门绕着一边旋转时，另一边与门框所在的平面给人以平行的形象.

在如图 13－2－25 所示的长方体中，$A_1B_1 /\!/ AB$，当直线 AB 沿直线 BC 平移时，就形成了平面 AC，直线 AB 在平移过程中的每一个位置都与 A_1B_1 平行，因此直线 A_1B_1 与平面 AC 没有公共点. 也就是说，直线 A_1B_1 与平面 AC 是平行的.

一般地，我们可以证明

本章中出现的判定定理的证明不作要求.

直线与平面平行的判定定理 如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.

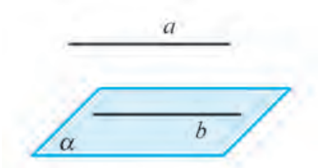


图 13－2－26

用符号表示为(图 13－2－26)：

$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \,/\!/\, b \end{array}\right\} \Rightarrow a \,/\!/\, \alpha.$$

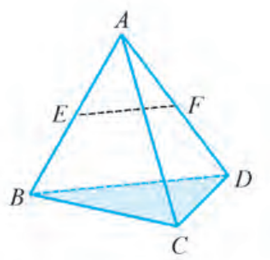


图 13－2－27

例 1 如图 13－2－27，已知 E，F 分别是三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱 AB，AD 的中点，求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

分析 设法在平面 BCD 内找一条直线与 EF 平行.

证明

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AE=EB\\ AF=FD\end{array}\right\}\Rightarrow EF /\!/ BD\\ EF\not\subset \text{平面 } BCD\\ BD\subset \text{平面 } BCD\end{array}\right\}\Rightarrow EF /\!/ \text{平面 } BCD.$$

从上例可以看出，通过“线线平行”可推得“线面平行”. 将空间直线与平面的平行关系转化为直线与直线的平行关系，这是处理空间位置关系的常用思路.

如果一条直线与一个平面平行，那么这条直线是否与这个平面内的任意一条直线都平行？

由直线 l 与平面 α 平行可知，直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点，所以它们只能平行或异面. 那么，在什么条件下平面 α 内的直线与直线 l 平行呢？

直线与平面平行的性质定理 一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.

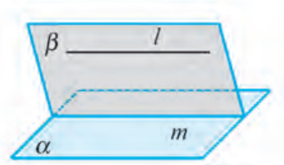


图 13－2－28

已知：$l /\!/ \alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=m$（图 13－2－28）.

求证：$l /\!/ m$.

证明

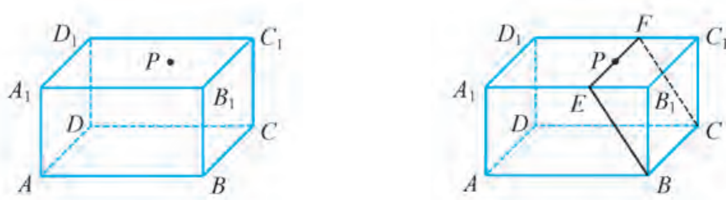
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}l /\!/ \alpha\Rightarrow l \text{ 和 } \alpha \text{ 没有公共点}\\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l \text{ 和 } m \text{ 没有公共点}\\ l,\ m\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow l /\!/ m.$$

例 2 一个长方体木块如图 13－2－29（1）所示，要经过平面 A_1C_1 内一点 P 和棱 BC 将木块锯开，应该怎样画线？

分析 点 P 与直线 BC 确定平面 α，根据题意，应画出平面 α 与长方体各面的交线.

因为点 P 既在平面 α 内又在平面 A_1C_1 内，由基本事实 3，平面 α 与平面 A_1C_1 必相交于经过点 P 的一条直线. 设这条直线与 A_1B_1，C_1D_1 的交点分别为 E，F.

由于 $BC /\!/ B_1C_1$，故 $BC /\!/$ 平面 A_1C_1，由直线与平面平行的性质定理得 $BC /\!/ EF$. 因此只要在平面 A_1C_1 内过点 P 作 B_1C_1 的平行线即可.



（1） （2）

图 13－2－29

作法 在平面 A_1C_1 内，过点 P 作 $EF \parallel B_1C_1$，分别交 A_1B_1，C_1D_1 于点 E，F.

连接 BE，CF，则 BE，CF 和 EF 就是所要画的线(图 13－2－29(2)).

例 3 证明：如果三个平面两两相交，并且三条交线中两条直线平行，那么第三条直线也和它们平行.

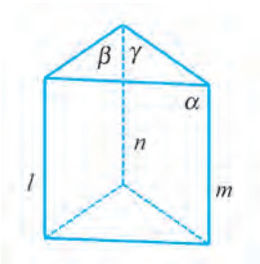


图 13－2－30

已知：平面 α，β，γ，$\alpha \cap \beta = l$，$\alpha \cap \gamma = m$，$\beta \cap \gamma = n$，且 $l \parallel m$.

求证：$n \parallel l$，$n \parallel m$(图 13－2－30).

证明

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} l \parallel m \\ l \not\subset \gamma \\ m \subset \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow l \parallel \gamma \\ \qquad l \subset \beta \\ \qquad \beta \cap \gamma = n \end{array}\right\} \Rightarrow n \parallel l.$$

同理，$n \parallel m$.

思 考

如果三个平面两两相交于三条直线，并且其中两条直线相交，那么第三条直线和这两条直线有怎样的位置关系？

直线与平面平行的判定定理可简述为“若线线平行，则线面平行”；直线与平面平行的性质定理可简述为“若线面平行，则线线平行”. 这表明，线线与线面位置关系可以相互转化.

练 习

1. 指出下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 如果一条直线不在某个平面内，那么这条直线就与这个平面平行；

(2) 过直线外一点有无数个平面与这条直线平行；

(3) 过平面外一点有无数条直线与这个平面平行.

2. 给出下列条件：① $l \parallel \alpha$；② l 与 α 至少有一个公共点；③ l 与 α 至多有一个公共点. 能确定直线 l 在平面 α 外的条件是________.(填序号)

3. 已知直线 a，b 和平面 α，下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $a \parallel \alpha$，$b \subset \alpha$，则 $a \parallel b$

B. 若 $a \parallel \alpha$，$b \parallel \alpha$，则 $a \parallel b$

C. 若 $a \parallel b$，$b \subset \alpha$，则 $a \parallel \alpha$

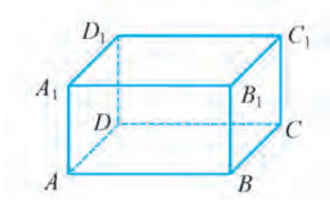
D. 若 $a \parallel b$，$a \parallel \alpha$，则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$

4. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面和底面所在的平面中：

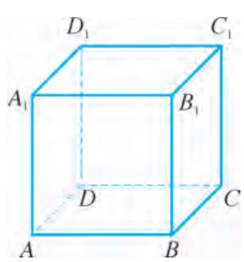
(1) 与直线 AB 平行的平面是________________________；

(2) 与直线 AA_1 平行的平面是________________________；

(3) 与直线 AD 平行的平面是________________________.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：

(1) 直线 AA_1 与平面 BB_1D_1D 是否平行？为什么？

(2) 直线 AA_1 与平面 C_1DB 是否平行？为什么？

(3) 直线 B_1D_1 与平面 $ABCD$ 是否平行？为什么？

(4) 直线 B_1D_1 与平面 C_1DB 是否平行？为什么？

6. 若两条直线 a，b 都平行于平面 α，a，b 的位置关系如何？分别画图说明.

2. 直线与平面垂直

学校操场上的旗杆与地面的位置关系，教室两墙面的交线与地面的位置关系等，都给我们以直线与平面垂直的形象.

观察圆锥 SO（图 13－2－31），可以直观地看出，轴 SO 垂直于圆锥的底面. 那么，轴 SO 与底面内的哪些直线垂直呢？

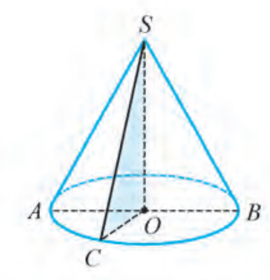


图 13－2－31

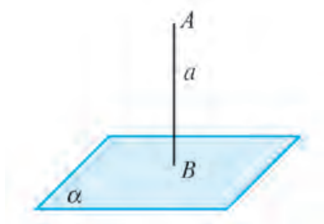


图 13－2－32

为什么轴 SO 垂直于底面内的所有半径，就有 SO 垂直于底面内的所有直线？

由于圆锥 SO 是由 Rt△SOC 绕直角边 SO 旋转一周形成的，因此 SO 与底面内的每一条半径都垂直，从而 SO 垂直于底面内的所有直线.

如图 13－2－32，如果直线 a 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，那么称**直线 a 与平面 α 垂直**，记作 $a\perp\alpha$. 直线 a 叫作**平面 α 的垂线**，平面 α 叫作**直线 a 的垂面**，垂线和平面的交点称为**垂足**.

思　考

如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，那么这条直线是否与这个平面垂直？

例 4　证明：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

已知：$a/\!/b$，$a\perp\alpha$（图 13－2－33）.

求证：$b\perp\alpha$.

分析　只要证明 b 与平面 α 内任意一条直线都垂直.

证明　设 m 是 α 内的任意一条直线.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}a\perp\alpha\\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp m\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp m\text{，则 } b\perp\alpha.$$

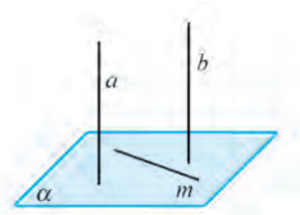


图 13－2－33

上述例子利用定义证明了直线与平面垂直，那么除了定义外，还

有判断直线与平面垂直的其他方法吗？

如图 13－2－34(1)，将一张矩形纸片对折后略为展开，竖立在桌面上，我们可以观察到折痕与桌面垂直. 如图 13－2－34(2)，从两个不同的方向观察，若旗杆都与水平线垂直，则可判断旗杆与地面垂直.

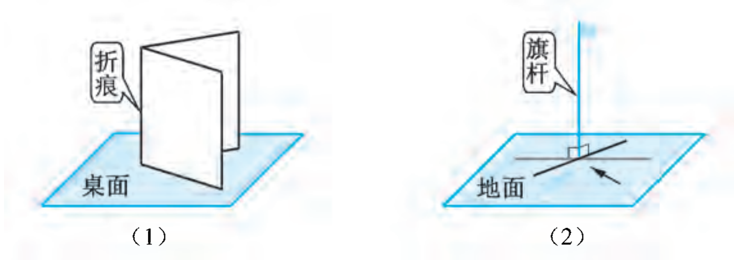


图 13－2－34

一般地，我们有

直线与平面垂直的判定定理 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直.

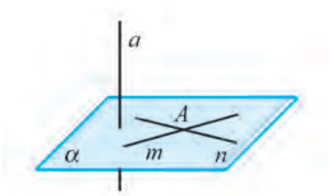


图 13－2－35

用符号表示为(图 13－2－35)：

若 $a \perp m$，$a \perp n$，$m \cap n = A$，$m \subset \alpha$，$n \subset \alpha$，则 $a \perp \alpha$.

直线与平面垂直的判定定理体现了“线面垂直”向“线线垂直”转化的思想.

两根旗杆垂直于地面，给我们以旗杆平行的形象. 在如图 13－2－25 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 所在直线都垂直于平面 AC，它们彼此平行.

一般地，我们有

直线与平面垂直的性质定理 垂直于同一个平面的两条直线平行.

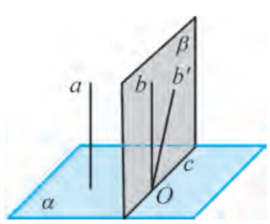


图 13－2－36

已知：$a \perp \alpha$，$b \perp \alpha$.

求证：$a // b$.

分析 直接证明 $a // b$ 比较困难，我们采用“反证法”来证明.

证明 如图 13－2－36，假设 b 不平行于 a，设 $b \cap \alpha = O$，b' 是经过点 O 且与直线 a 平行的直线.

直线 b 与 b' 确定平面 β，设 $\alpha \cap \beta = c$.

因为 $a \perp \alpha$，$b \perp \alpha$，

所以 $a \perp c$，$b \perp c$.

又因为 $b' // a$，

所以 $$b' \perp c.$$

这样在平面 β 内，经过直线 c 上同一点 O，就有两条直线 b，b' 与 c 垂直，显然不可能.

因此 $$a \parallel b.$$

直线与平面垂直的性质定理揭示了平行与垂直之间的内在联系. 根据此性质定理，不难得到

> 过一点有且只有一条直线与已知平面垂直，过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

你能证明这个结论吗?

从平面外一点引平面的垂线，这个点和垂足间的距离，叫作**这个点到这个平面的距离**.

例 5 已知：$l \parallel \alpha$.

求证：直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

证明 过直线 l 上任意两点 A，B 分别作平面 α 的垂线 AA'，BB'，垂足分别为 A'，B'(图 13－2－37).

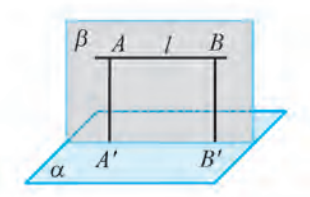


图 13－2－37

因为 $$AA' \perp \alpha,\ BB' \perp \alpha,$$

所以 $$AA' \parallel BB'.$$

设经过直线 AA' 和 BB' 的平面为 β，则 β 与 α 的交线为直线 $A'B'$.

因为 $$l \parallel \alpha,$$

所以 $$l \parallel A'B',$$

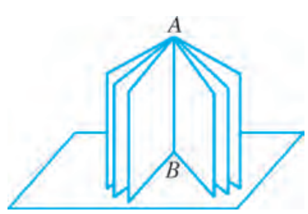
从而四边形 $A'B'BA$ 是平行四边形，所以 $AA' = BB'$.

故直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

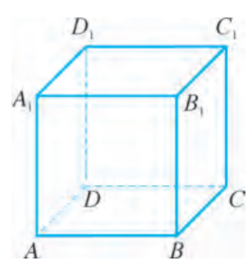
一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离，叫作**这条直线和这个平面的距离**.

练 习

1. 将一本书打开后竖立在桌面上(如图)，则书脊所在直线 AB 是否与桌面垂直? 为什么?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：

(1) 直线 AB 与平面 BCC_1B_1 是否垂直? 为什么?

(2) 直线 AC 与平面 BB_1D_1D 是否垂直？为什么？

(3) 直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 是否垂直？为什么？

(4) 直线 AB_1 与平面 A_1BCD_1 是否垂直？为什么？

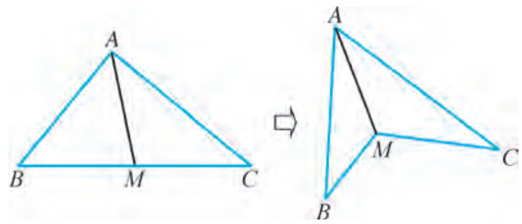
3. 对于直线 l，m，n，平面 α，下列命题是否正确，试说明理由：

(1) 若 $l\perp\alpha$，则 l 与 α 相交；

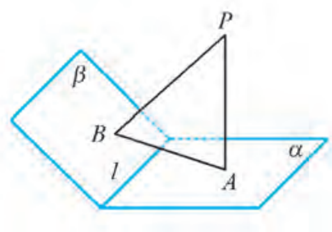
(2) 若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$；

(3) 若 $l/\!/m$，$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $l/\!/n$.

4. 如图，在△ABC 中，M 为边 BC 的中点，沿 AM 将△ABM 折起，使点 B 在平面 ACM 外. 在什么条件下直线 AM 垂直于平面 BMC？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，已知 $PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，垂足分别为 A，B，且 $\alpha\cap\beta=l$，求证：$l\perp$ 平面 APB.

观察如图 13－2－38 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可以发现 A_1B，A_1C，A_1D 虽然都和平面 $ABCD$ 相交，但都不与这个平面垂直.

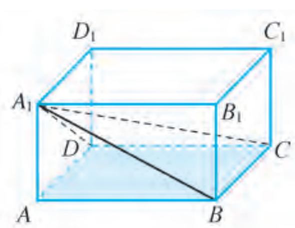


图 13－2－38

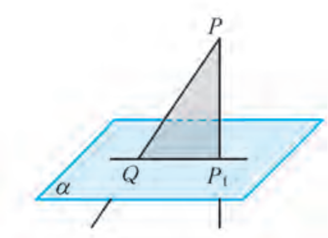


图 13－2－39

一条直线与一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫作这个平面的**斜线**，斜线与平面的交点叫作**斜足**，斜线上一点与斜足间的线段叫作这个点到平面的**斜线段**.

如图 13－2－39，过平面外一点 P 向平面 α 引斜线和垂线，那么过斜足 Q 和垂足 P_1 的直线就是斜线在平面内的射影，线段 P_1Q 就是斜线段 PQ 在平面 α 内的射影.

平面的一条斜线与它在这个平面内的射影所成的锐角，叫作**这条直线与这个平面所成的角**.

> 可以证明：PQ 与平面 α 内经过点 Q 的直线所成的所有角中，$\angle PQP_1$ 最小.

在图 13－2－39 中，$\angle PQP_1$ 就是直线 PQ 与平面 α 所成的角.

如果一条直线垂直于平面，那么称它们所成的角是直角；如果一条直线与平面平行或在平面内，那么称它们所成的角是 0°角.

例 6 如图 13－2－40，已知 AC，AB 分别是平面 α 的垂线和斜线，C，B分别是垂足和斜足，$a\subset\alpha$，$a\perp BC$. 求证：$a\perp AB$.

分析 因为 $AB\subset$平面 ABC，所以只要证明 $a\perp$平面 ABC.

证明

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AC\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AC\\ a\perp BC\\ AC\cap BC=C\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp \text{平面 } ABC\\ AB\subset\text{平面 } ABC\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AB.$$

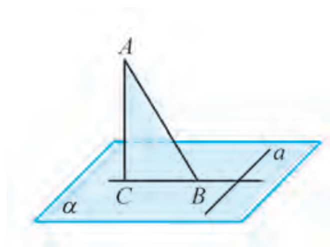


图 13－2－40

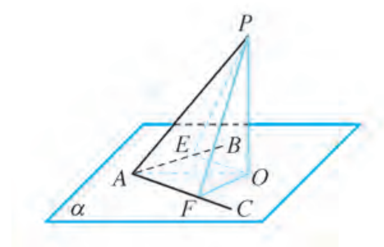


图 13－2－41

例 7 如图 13－2－41，已知 $\angle BAC$ 在平面 α 内，$P\notin\alpha$，$\angle PAB=\angle PAC$.

求证：点 P 在平面 α 内的射影在 $\angle BAC$ 的平分线上.

证明 作 $PO\perp\alpha$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别为 O，E，F，连接 OE，OF，OA.

$$\left.\begin{array}{l}PE\perp AB,\ PF\perp AC\\ \angle PAE=\angle PAF\\ PA=PA\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Rt}\triangle PAE\cong\text{Rt}\triangle PAF\Rightarrow AE=AF.$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}PO\perp\alpha\\ AB\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp PO\\ AB\perp PE\\ PO\cap PE=P\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面 } PEO\\ OE\subset\text{平面 } PEO\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp OE.$$

同理 $AC\perp OF$.

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 和 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中，$AE=AF$，$OA=OA$，所以 $\text{Rt}\triangle AOE\cong\text{Rt}\triangle AOF$，从而 $\angle EAO=\angle FAO$.

故点 P 在平面 α 内的射影 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

思考

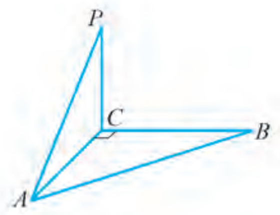
你能设计一个四个面都是直角三角形的四面体吗？

练习

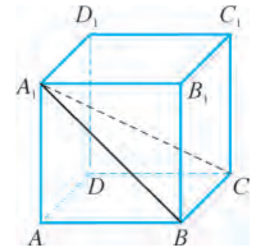
1. 如图，$\angle BCA=90^\circ$，$PC\perp$平面 ABC，在 $\triangle ABC$，$\triangle PAC$ 的边所在的直线中：

(1) 与 PC 垂直的直线有__________；

(2) 与 AP 垂直的直线有__________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：

（1）求直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角；

（2）求直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角；

（3）直线 A_1B 在平面 $ABCD$ 内的射影是哪条直线？

（4）直线 A_1C 在平面 ADD_1A_1 内的射影是哪条直线？

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角的大小是________.

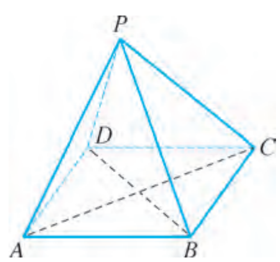
4. 如果直线 a 与平面 α 不垂直，那么在平面 α 内与直线 a 垂直的直线（　　）.

A. 只有一条　　　　B. 有无数条

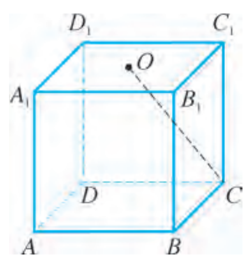
C. 是平面 α 内的所有直线　　　　D. 不存在

5. 从平面外一点向平面引斜线段，如果斜线段的长相等，它们在平面内的射影相等吗？

6. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，且 $PA=PC$，判断直线 AC 与平面 PBD 是否垂直，并说明理由.



（第 6 题）



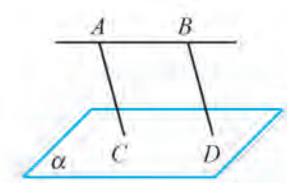
（第 7 题）

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心. 作出直线 OC 与平面 $ABCD$ 所成的角，并求出该角的正切值.

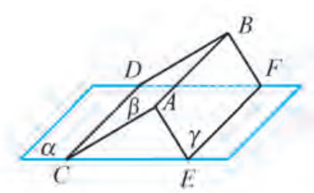
习题 13.2(3)

感受・理解

1. 如图，$AB // \alpha$，$AC // BD$，$C \in \alpha$，$D \in \alpha$，求证：$AC=BD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

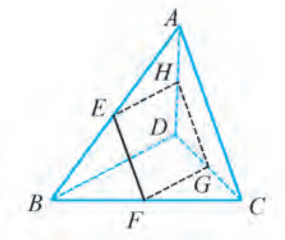
2. 如图，$\alpha \cap \beta = CD$，$\alpha \cap \gamma = EF$，$\beta \cap \gamma = AB$，$AB // \alpha$. 求证：$CD // EF$.

四个顶点不共面的四边形叫作空间四边形.

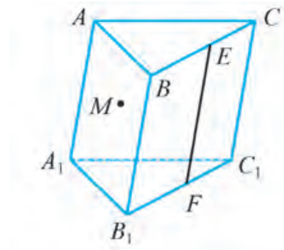
3. 如图，E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：

(1) 四点 E，F，G，H 共面；

(2) AC//平面 $EFGH$，BD//平面 $EFGH$.



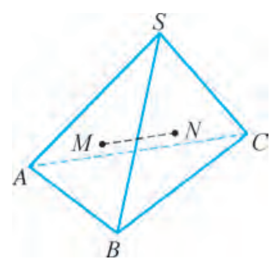
（第 3 题）



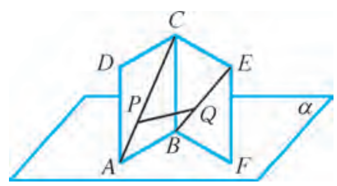
（第 4 题）

4. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$E\in BC$，$F\in B_1C_1$，EF//C_1C，点 $M\in$ 侧面 AA_1B_1B，点 M，E，F 确定平面 γ. 试作出平面 γ 与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 表面的交线.

5. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N 分别为$\triangle SAB$ 和$\triangle SBC$ 的重心. 求证：MN // 平面 ABC.



（第 5 题）



（第 6 题）

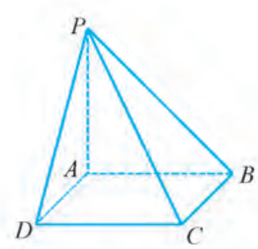
6. 将一本书打开后竖立在桌面 α 上（如图），P，Q 分别为 AC，BE 上的点，且 $AP=BQ$. 求证：PQ // 平面 α.

7. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，求证：$AC\perp BD'$.

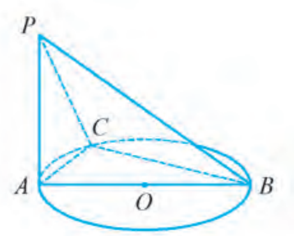
8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$.

(1) 指出图中有哪些三角形是直角三角形，并说明理由；

(2) 若 $PA=AD=AB$，试求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.



（第 8 题）



（第 9 题）

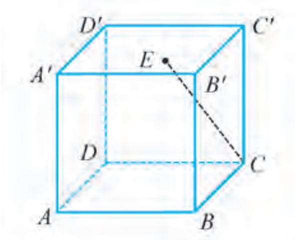
9. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在的平面，C 是圆 O 上不同于 A，B 的任一点. 求证：$BC\perp$平面 PAC.

10. 已知直线 a//平面 α，直线 $b\perp$平面 α. 求证：$a\perp b$.

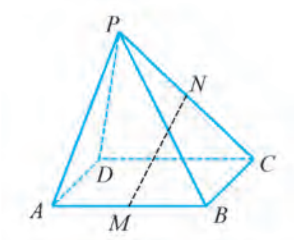
11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 在平面 ABC 内的射影是$\triangle ABC$ 的外心，求证：$PA=PB=PC$.

思考·运用

12. 如图，一块正方体木料的上底面内有一点 E，要经过点 E 在上底面内画一条直线和 CE 垂直，应怎样画？



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，PC 的中点，且 $ABCD$ 是平行四边形，求证：MN∥平面 PAD.

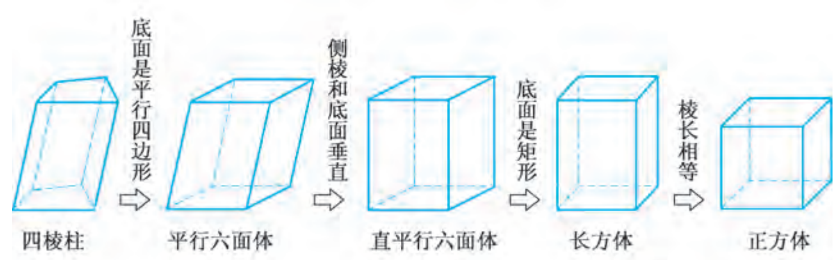
14. 证明：如果平面内的一条直线与这个平面的一条斜线垂直，那么这条直线就和这条斜线在这个平面内的射影垂直.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：$A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，点 P 在平面 ABC 内的射影 O 是△ABC 的垂心（三角形三条边上的高所在的直线交于一点，这个点叫作这个三角形的垂心），求证：$PA\perp BC$.

探究·拓展

17. （阅读题）看图阅读：



（第 17 题）

底面是平行四边形的四棱柱叫作**平行六面体**(parallelepiped)，侧棱与底面垂直的平行六面体叫作**直平行六面体**(right parallelepiped)，底面是矩形的直平行六面体叫作**长方体**(cuboid)，棱长相等的长方体叫作**正方体**(cube).

根据上述定义，试说明四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系，并用 Venn 图直观地表示这种关系.

13.2.4　平面与平面的位置关系

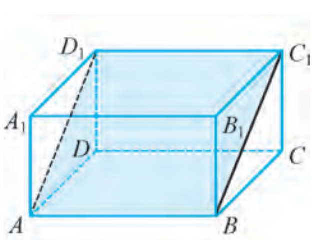


图 13－2－42

将两本书作为平面，通过移动或翻转，观察它们之间的位置关系，再观察教室前后墙面、左右墙面、天花板及地面这六个面中两两之间的位置关系. 一般地，

● 平面与平面有哪几种位置关系？

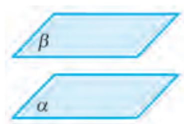
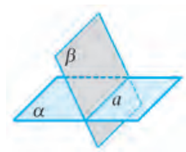
观察长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（图 13－2－42），它的上、下底面

无论怎样延展都没有公共点，而它的下底面与平面 ABC_1D_1 则有一条交线 AB.

如果两个平面没有公共点，那么称这**两个平面互相平行**.

如果两个平面有一个公共点，那么由基本事实 3 可知，它们相交于经过这个点的一条直线，此时称这**两个平面相交**.

两个平面的位置关系有：

位置关系	两平面平行	两平面相交
公 共 点	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha /\!/ \beta$	$\alpha \cap \beta = a$
图形表示		

1. 两平面平行

怎样使用水平仪来检测桌面是否水平？

当水平仪的气泡居中时，水平仪所在的直线就是水平线.

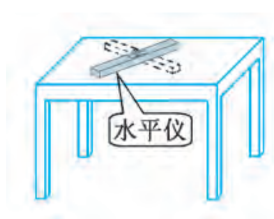


图 13－2－43

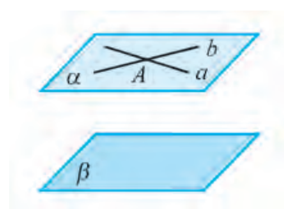


图 13－2－44

工人师傅将水平仪(图 13－2－43)在桌面上交叉放置两次，如果水平仪的气泡两次都在中央，就能判断桌面是水平的.

一般地，我们可以证明

> **两个平面平行的判定定理**　如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行.

用符号表示为(图 13－2－44)：

若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$，且 $a /\!/ \beta$, $b /\!/ \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$.

上述判定定理说明，由“线面平行”可推得“面面平行”. 将平面与平面的平行关系转化为直线与平面的平行关系，这是常见的转化思路.

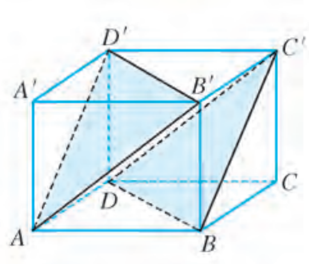


图 13－2－45

例 1　如图 13－2－45，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求证：平面 $C'DB /\!/$ 平面 $AB'D'$.

分析　只要证明一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行.

证明　$AB \underline{/\!/} DC \underline{/\!/} D'C'$

$\Rightarrow$ 四边形 $ABC'D'$ 是平行四边形

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\quad BC' /\!/ AD' \\ BC' \not\subset \text{平面 } AB'D' \\ AD' \subset \text{平面 } AB'D'\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} BC' /\!/ \text{ 平面 } AB'D' \\ \text{同理}, C'D /\!/ \text{ 平面 } AB'D' \\ BC' \cap C'D = C'\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 平面 $C'DB$ // 平面 $AB'D'$.

如果两个平面平行，那么，

(1) 一个平面内的直线是否平行于另一个平面?

(2) 分别在两个平行平面内的两条直线是否平行?

对于问题(1)，根据两个平面平行及直线和平面平行的定义可知，两个平面平行，其中一个平面内的直线必定平行于另一个平面.

对于问题(2)，分别在两个平行平面内的两条直线必定没有公共点，所以只能判定它们平行或异面. 那么，在什么条件下，分别在两个平行平面内的直线平行呢?

此定理说明，由“面面平行”可得到“线线平行”.

两个平面平行的性质定理　两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行.

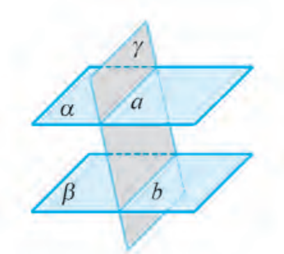


图 13－2－46

已知：$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$(图 13－2－46).

求证：$a /\!/ b$.

证明　因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 α 与 β 没有公共点，因而交线 a，b 也没有公共点.

又因为 a，b 都在平面 γ 内，所以 $a /\!/ b$.

例 2　证明：如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么它也垂直于另一个平面.

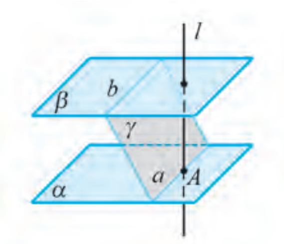


图 13－2－47

已知：$\alpha /\!/ \beta$，$l \perp \alpha$(图 13－2－47).

求证：$l \perp \beta$.

分析　要证 $l \perp \beta$，只要证明 l 与 β 内的任意一条直线都垂直或与 β 内两条相交直线垂直.

证明　设 $l \cap \alpha = A$，在平面 β 内任取一条直线 b.

因为点 A 不在 β 内，所以点 A 与直线 b 可确定平面 γ.

设 $\gamma \cap \alpha = a$，

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\alpha /\!/ \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b\end{array}\right\}\Rightarrow a /\!/ b \\ \left.\begin{array}{r} l \perp \alpha \\ a \subset \alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l \perp a\end{array}\right\}\Rightarrow l \perp b.$$

因为直线 b 是平面 β 内的任意一条直线，所以 $l\perp\beta$.

与两个平行平面都垂直的直线，叫作这两个平行平面的**公垂线**，它夹在这两个平行平面间的线段，叫作这两个平行平面的**公垂线段**.

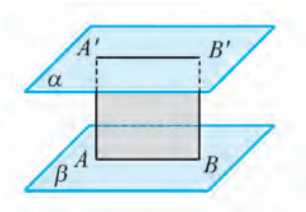


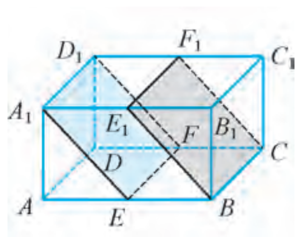
图 13－2－48

如图 13－2－48，$\alpha\parallel\beta$，如果 AA'，BB' 都是 α，β 的公垂线段，那么 $AA'\parallel BB'$. 根据两个平面平行的性质定理，有 $A'B'\parallel AB$，所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形，故 $AA'=BB'$.

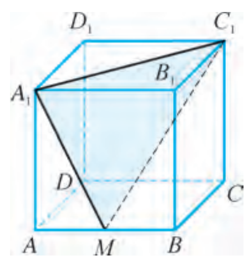
由此我们得到，两个平行平面的公垂线段都相等. 我们把公垂线段的长度叫作**两个平行平面间的距离**.

练　习

1. 已知平面 $\alpha\parallel$ 平面 β，直线 $l\subset\alpha$，求证：$l\parallel\beta$.
2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若平面 α 内的两条直线分别与平面 β 平行，则 α 与 β 平行；
   (2) 若平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，则 α 与 β 平行；
   (3) 平行于同一条直线的两个平面平行；
   (4) 过已知平面外一点，有且只有一个平面与已知平面平行；
   (5) 过已知平面外一条直线，必能作出与已知平面平行的平面.
3. 证明：夹在两个平行平面间的平行线段相等.
4. 如图，设 E，F，E_1，F_1 分别是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB，CD，A_1B_1，C_1D_1 的中点. 求证：平面 $ED_1\parallel$ 平面 BF_1.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AB 的中点，试作出平面 A_1MC_1 与平面 $ABCD$ 的交线 l，并说明理由.

2. 两平面垂直

发射人造地球卫星时，要使卫星的轨道平面与地球的赤道平面成一定的角度(图 13－2－49)；使用笔记本电脑时，为便于操作，需将显示屏打开一定的角度(图 13－2－50). 那么，如何刻画两个平面所形成的这种“角”呢？

平面内的一条直线把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫作**半平面**，当其中一个半平面绕着这条直线旋转时，两个半平面就形成了一定的“角度”.

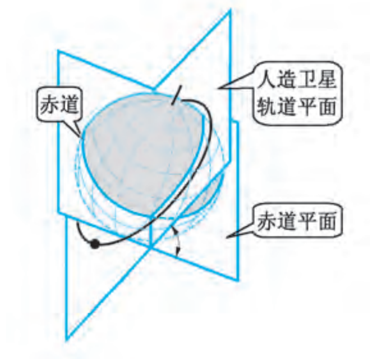


图 13－2－49

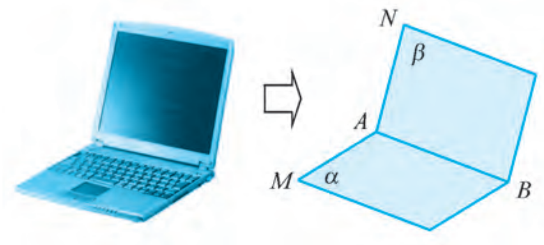


图 13－2－50

一般地，一条直线和由这条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**(dihedral angle)，这条直线叫作二面角的**棱**，每个半平面叫作二面角的**面**.

如图 13－2－50，棱为 AB、面为 α，β 的二面角，记作二面角 $\alpha-AB-\beta$，也可以记作 $M-AB-N$.

笔记本电脑打开时，我们感到两个面板构成的二面角在逐渐变大. 如何来刻画这个二面角的大小呢?

我们看到，随着张口的增大，$\angle MAN$ 在逐渐增大(图 13－2－50). 当二面角 $\alpha-AB-\beta$ 确定时，$\angle MAN$ 也随之确定，故可用 $\angle MAN$ 度量二面角 $\alpha-AB-\beta$.

一般地，以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的射线，这两条射线所成的角叫作二面角的**平面角**(plane angle).

图 13－2－51 中，$OA\perp l$，$OB\perp l$，故 $\angle AOB$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

思　考

二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 $\angle AOB$ 的大小与点 O 的位置有关吗(图 13－2－51)?

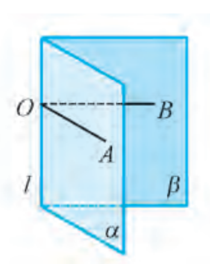


图 13－2－51

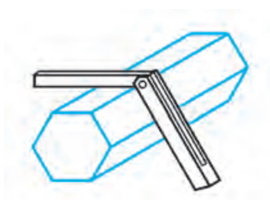


图 13－2－52

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 我们约定，二面角 α 的大小范围是 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$. 平面角是直角的二面角叫作**直二面角**.

木工用活动角尺测量工件的两个面所成的角时，实际上就是测量这两个面所成二面角的平面角(图 13－2－52). 1970 年 4 月 24 日，

我国用自制"长征 1 号"运载火箭，在酒泉卫星发射中心成功发射了中国第一颗人造地球卫星——"东方红 1 号"，这标志着我国在征服太空的道路上迈出了巨大的一步，跻身世界航天先进国家之列. "东方红 1 号"轨道平面的倾斜角是68. 5°，就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角是 68. 5°.

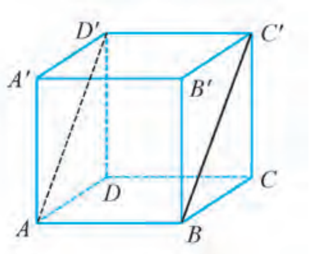


图 13－2－53

先找出或作出二面角的平面角，再求出平面角的大小.

例 3 如图 13－2－53，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中：

（1）求二面角 $D'-AB-D$ 的大小；

（2）求二面角 $A'-AB-D$ 的大小.

解 （1）在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB\perp$ 平面 AD'，所以 $AB\perp AD'$，$AB\perp AD$.

因此，$\angle D'AD$ 为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle D'AD$ 中，$\angle D'AD=45°$，所以二面角 $D'-AB-D$ 的大小为 45°.

（2）同理，$\angle A'AD$ 为二面角 $A'-AB-D$ 的平面角.

因为$\angle A'AD=90°$，所以二面角$A'-AB-D$的大小为 90°.

一般地，如果两个平面所成的二面角是直二面角，那么就说这**两个平面互相垂直**. 除了根据定义外，还有其他方法判断两个平面互相垂直吗？

为什么教室的门转到任何位置时，门所在平面都与地面垂直(图 13－2－54)？通过观察可以发现，门在转动的过程中，门轴始终与地面垂直.

一般地，我们可以证明

平面与平面垂直的判定定理 如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

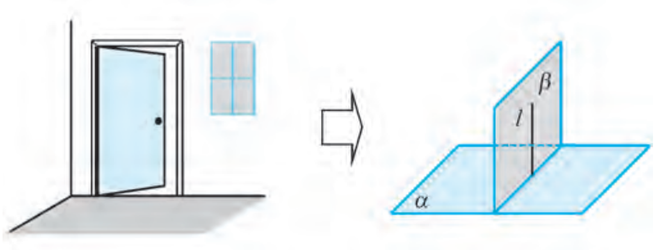


图 13－2－54

用符号表示为(图 13－2－54)：

$$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ l\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta.$$

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙是否和水平面垂直(图 13－2－55)，就是依据这个面面垂直的判定定理.

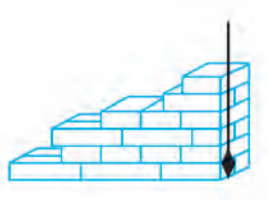


图 13－2－55

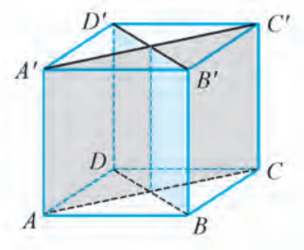


图 13－2－56

例 4 如图 13－2－56，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求证：平面 $A'C'CA\perp$ 平面 $B'D'DB$.

证明

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AA'\perp\text{平面 }ABCD\\ BD\subset\text{平面 }ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow AA'\perp BD\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad AC\perp BD\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad AA'\cap AC=A\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BD\perp\text{平面 }A'C'CA\\ BD\subset\text{平面 }B'D'DB\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$平面 $A'C'CA\perp$平面 $B'D'DB$.

上例说明，要证明“面面垂直”，只要证明“线面垂直”，即将平面与平面垂直的问题转化为直线与平面垂直的问题.

如果两个平面垂直，那么一个平面内的直线是否一定垂直于另一个平面？

答案是否定的（图 13－2－57）. 事实上，我们有

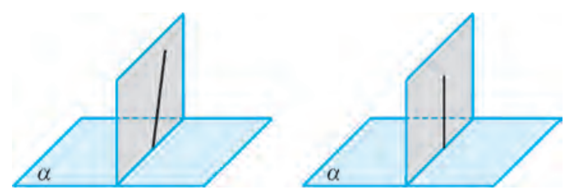


图 13－2－57

平面与平面垂直的性质定理 两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直.

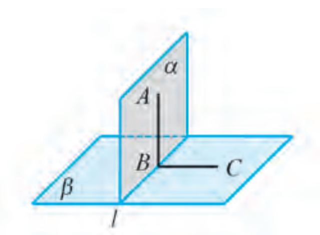


图 13－2－58

已知：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp l$，B 为垂足（图13－2－58）.

求证：$AB\perp\beta$.

分析 因为 $AB\perp l$，所以要证 $AB\perp\beta$，只需在 β 内找一条与 l 相交的直线垂直于 AB.

证明 在平面 β 内作 $BC\perp l$，则 $\angle ABC$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

由 $\alpha\perp\beta$，可知 $AB\perp BC$.

又因为 $AB\perp l$，且 $l\cap BC=B$，所以 $AB\perp\beta$.

平面与平面垂直的性质定理说明，由“面面垂直”可以得到“线面垂直”.

这种面面位置关系与线面位置关系的相互转化，是解决空间图形问题的基本思想.

例 5 证明：如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内一点且垂直于第二个平面的直线必在第一个平面内.

已知：$\alpha\perp\beta$, $P\in\alpha$, $P\in a$, $a\perp\beta$(图 13－2－59).

求证：$a\subset\alpha$.

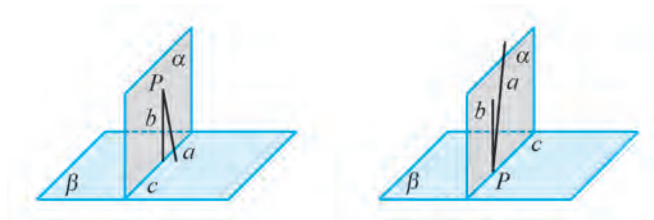


图 13－2－59

能否用“反证法”来证明？

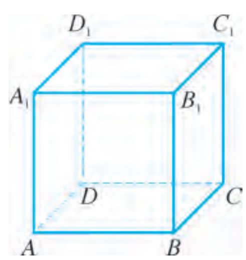
证明 设 $\alpha\cap\beta=c$. 过点 P 在平面 α 内作直线 $b\perp c$.

根据平面与平面垂直的性质定理，有 $b\perp\beta$.

因为经过一点有且只有一条直线与平面 β 垂直，所以直线 a 与直线 b 重合，即 $a\subset\alpha$.

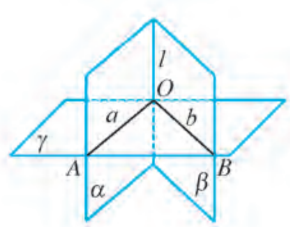
练 习

1. 房间里相邻的两面墙及地面可以构成几个二面角？分别指出这些二面角的面、棱和平面角.
2. 为使门在打开的过程中门所在平面都与地面垂直，在安装门的时候，固定门一边的两个合页所在的直线与地面是什么关系？为什么？
3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：
   (1) 平面 A_1ABB_1 与平面 $ABCD$ 是否垂直？为什么？
   (2) 平面 ABC_1D_1 与平面 BCC_1B_1 是否垂直？为什么？
   (3) 平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 是否垂直？为什么？
   (4) 平面 ABC_1D_1 与平面 ABB_1A_1 是否垂直？为什么？

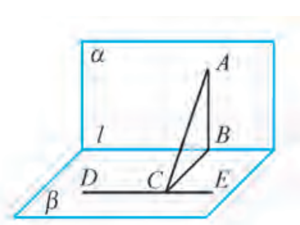


（第 3 题）

4. 判断下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$；
   (2) 若 $\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$；
   (3) 若 $\alpha/\!/\alpha_1$, $\beta/\!/\beta_1$, $\alpha\perp\beta$，则 $\alpha_1\perp\beta_1$.
5. 如图，α, β, γ 为平面，$\alpha\cap\beta=l$, $\alpha\cap\gamma=a$, $\beta\cap\gamma=b$, $l\perp\gamma$，指出图中哪个角是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，并说明理由.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $AB\subset\alpha$, $AB\perp l$, $BC\subset\beta$, $DE\subset\beta$, $BC\perp DE$.
   求证：$AC\perp DE$.

习题 13.2(4)

感受 · 理解

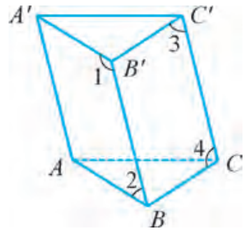
1. 判断下列说法是否正确：

(1) 若平面 α 内的两条相交直线分别平行于平面 β 内的两条相交直线，则平面 α 平行于平面 β；

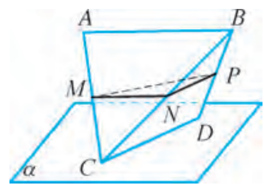
(2) 若两个平面分别经过两条平行直线，则这两个平面互相平行.

2. 已知平面 α，β，直线 l，且 $\alpha /\!/ \beta$，$l \not\subset \beta$，$l /\!/ \alpha$，求证：$l /\!/ \beta$.

3. 如图，在多面体 $ABC-A'B'C'$ 中，如果在平面 $ABB'A'$ 内，$\angle 1+\angle 2=180°$，在平面 $BCC'B'$ 内，$\angle 3+\angle 4=180°$，那么平面 ABC 和平面 $A'B'C'$ 有什么关系？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AB /\!/ \alpha$，$CD \subset \alpha$，AB 与 CD 不平行，M，N，P 分别为线段 AC，CB，BD 的中点. 求证：平面 $MPN /\!/$ 平面 α.

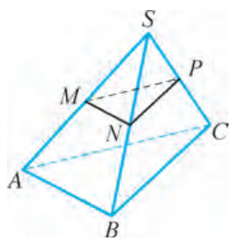
5. 已知平面 α，β，γ，且 $\alpha /\!/ \beta$，$\beta /\!/ \gamma$. 求证：$\alpha /\!/ \gamma$.

6. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N，P 分别为棱 SA，SB，SC 的中点.

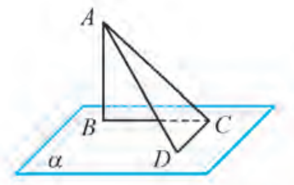
(1) 求证：平面 $MNP /\!/$ 平面 ABC；

(2) 求证：$\triangle MNP \backsim \triangle ABC$；

(3) 若将本题中的三棱锥改为四棱锥，有怎样类似的结论？



（第 6 题）



（第 7 题）

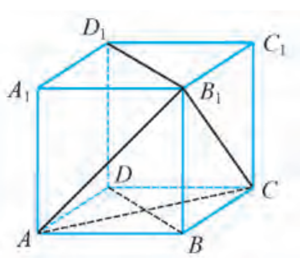
7. 如图，已知 AB 是平面 α 的垂线，AC 是平面 α 的斜线，$CD \subset \alpha$.

(1) 若 $CD \perp AC$，求证：平面 $ABC \perp$ 平面 ACD；

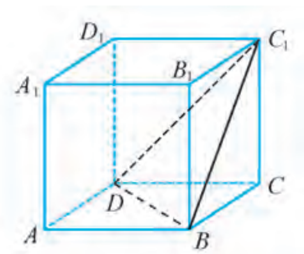
(2) 若平面 $ABC \perp$ 平面 ACD，求证：$CD \perp AC$.

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 是菱形. 求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBD.

9. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：平面 $B_1AC \perp$ 平面 B_1BDD_1.



（第 9 题）



（第 10 题）

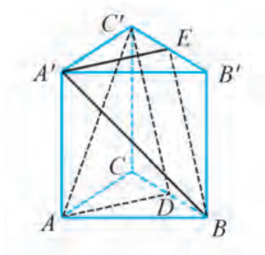
10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 C_1-BD-C 的正切值.

思考・运用

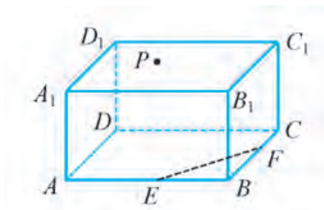
11. (1) 已知平面外的一条直线上有两点到这个平面距离相等，试判断这条直线与该平面的位置关系；

(2) 已知一个平面内有三点到另一平面距离相等，试判断这两个平面的位置关系.

12. 如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$中，点 D，E 分别是 BC 与 $B'C'$的中点.
求证：平面 $A'EB$∥平面 ADC'.



（第 12 题）

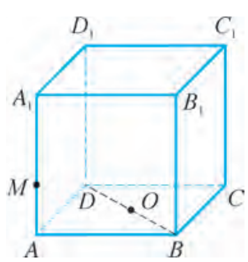


（第 13 题）

13. 如图，有一块长方体的木料，经过木料表面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一点 P，在这个面内画线段，使其与木料表面 $ABCD$ 内的线段 EF 平行，应该怎样画线？

14. 已知平面 α，β，γ，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，$\alpha\cap\beta=l$. 求证：$l\perp\gamma$.

探究・拓展



（第 15 题）

15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为 BD 的中点，问：在棱 AA_1 上是否存在一点 M，使平面$MBD\perp$平面 OC_1D_1？如果存在，求出 $AM:MA_1$ 的值；如果不存在，请说明理由.

16. (1) 证明：如果一个平面与另一个平面的垂线平行，那么这两个平面互相垂直；

(2) 若将(1)中的条件改为"如果一个平面与另一个平面的垂面平行"，结论是否仍然成立？

17. (探究题)用一个平面截正方体，截面的形状会是什么样的？
请你给出截面图形的分类原则，找到截得这些形状截面的方法，画出这些截面的示意图. 例如，可以按照截面图形的边数进行分类：
(1) 如果截面是三角形，可以截出几类不同的三角形？为什么？
(2) 如果截面是四边形，可以截出几类不同的四边形？为什么？
(3) 能否截出五边形？为什么？
(4) 是否存在正六边形的截面？为什么？
(5) 有没有可能截出边数超过 6 的多边形？为什么？

13.3 空间图形的表面积和体积

我们已经学习了简单空间图形(柱、锥、台、球)的有关概念和结构特征. 本节将学习简单空间图形的表面积和体积. 表面积是指空间图形表面的面积,体积是指空间图形所占空间的大小. 那么,

- 怎样计算简单空间图形的表面积和体积呢?

13.3.1 空间图形的表面积

棱柱、棱锥和棱台这些简单空间图形属于简单多面体,它们的表面是由平面图形构成的. 我们一般把多面体展开成平面图形得到这个多面体的展开图,通过计算展开图的面积求多面体的表面积. 那么,

- 如何得到棱柱、棱锥和棱台的平面展开图?

对空间图形割补或将其展开为平面图形,是求空间图形面积或体积的一种重要的方法.

对于特殊的简单多面体,可以沿着多面体的某些棱将其剪开,得到平面展开图. 对于棱柱、棱锥、棱台,通常沿一条侧棱剪开将其侧面展在平面上,这个展开图的面积就是该多面体的侧面积.

1. 直棱柱、正棱锥和正棱台的侧面积

侧棱和底面垂直的棱柱叫作**直棱柱**(right prism). 特别地,底面为正多边形的直棱柱叫作**正棱柱**(regular prism). 直棱柱的侧棱长就是直棱柱的高(两底面所在平面之间的距离).

将直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上,展开图的面积就是直棱柱的侧面积. 由图 13-3-1 可知,直棱柱的侧面展开图是矩形,这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 c,宽等于直棱柱的高 h. 因此,直棱柱的侧面积是

$$S_{直棱柱侧} = ch.$$

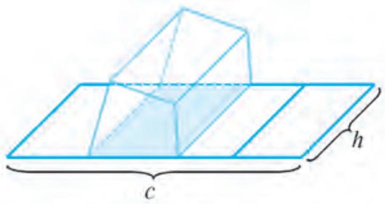


图 13-3-1

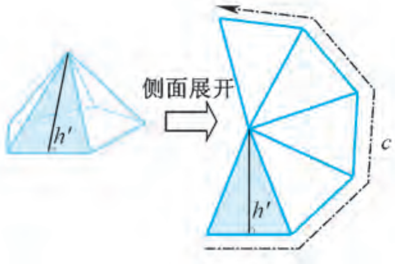


图 13-3-2

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的射影是底面中心，那么称这样的棱锥为**正棱锥**(regular pyramid). 正棱锥的侧棱长都相等，侧面均为全等的等腰三角形.

将正棱锥的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面内(图 13－3－2)，展开图的面积就是正棱锥的侧面积. 如果正棱锥的底面周长为 c，斜高(即侧面等腰三角形底边上的高)为 h'，由图 13－3－2 可知它的侧面积是

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'.$$

设正 n 棱锥的底面边长为 a，则侧面展开图的面积等于 $n\cdot\frac{1}{2}ah'=\frac{1}{2}ch'$.

正棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面之间的部分叫作**正棱台**(regular frustum of pyramid). 正棱台的侧棱长都相等，侧面均为全等的等腰梯形.

若设正棱台的上、下底面的周长分别为 c'，c，斜高为 h'，则其侧面积是(图 13－3－3)

$$S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'.$$

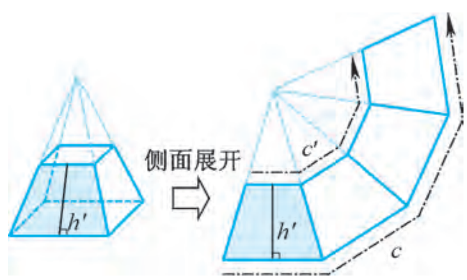


图 13－3－3

正棱柱、正棱锥和正棱台的侧面积公式之间的关系可用图 13－3－4表示：

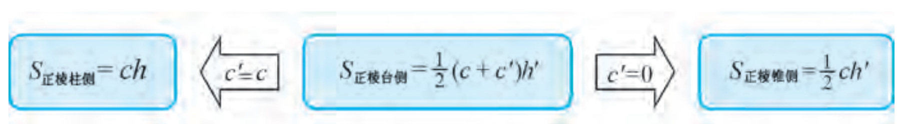


图 13－3－4

思　考

对于一般的棱柱、棱锥和棱台，如何计算它们的侧面积?

2. 圆柱、圆锥和圆台的侧面积

对于直棱柱、正棱锥和正棱台，可将其侧面沿一条侧棱剪开后展在平面上，通过计算展开图的面积得到侧面积. 圆柱、圆锥和圆台属于旋转体，那么，圆柱、圆锥和圆台的侧面能否剪开后展在平面上呢?

圆柱、圆锥、圆台是由矩形、直角三角形、直角梯形分别绕它一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周形成的空间图形，它们

的侧面可以沿其母线剪开后展在平面上，这时展开图的面积就是它们的侧面积. 这样，我们可以得到它们的侧面积公式(图 13－3－5)，它们之间的关系与图 13－3－4 类似.

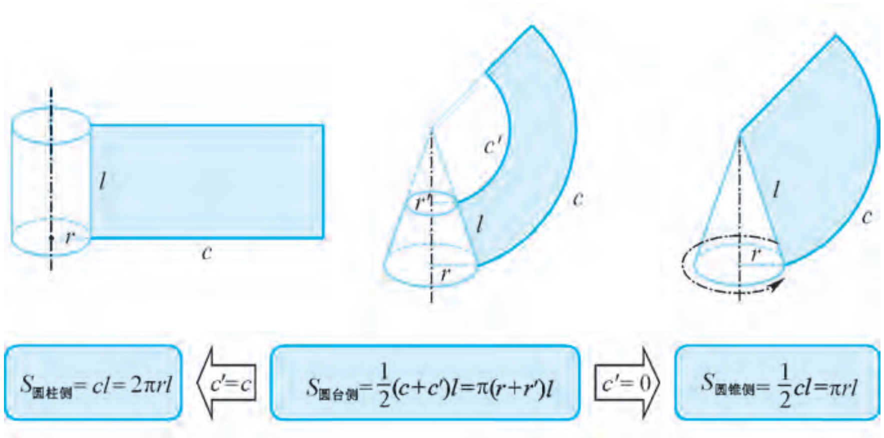


图 13－3－5

例 1 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 1.0 m，底面的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板(精确到 0.1 m^2)?

分析 本题即计算正四棱锥的侧面积，根据公式，只需计算斜高. 为此，在正四棱锥中作出相应的直角三角形，再解三角形即可.

解 如图 13－3－6，S 表示塔的顶点，O 表示底面的中心，则 SO 是高. 设 SE 是斜高.

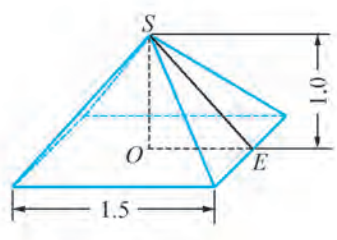


图 13－3－6

Rt$\triangle SOE$ 包含了高、斜高和底面正多边形内切圆半径之间的数量关系，在图 13－3－6 中还能作出哪些类似的直角三角形?

在 Rt$\triangle SOE$ 中，根据勾股定理，得

$$SE=\sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2+1.0^2}=1.25(\mathrm{m}),$$

所以 $S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times(1.5\times4)\times1.25=3.75\approx3.8(\mathrm{m}^2)$.

答 制造这种塔顶需要约 3.8 m^2 铁板.

例 2 一个直角梯形上底、下底和高之比为 $2:4:\sqrt{5}$. 将此直角梯形以垂直于底的腰为轴旋转一周形成一个圆台(图 13－3－7)，求这个圆台上底面积、下底面积和侧面积之比.

解 由题意，可设直角梯形上底、下底和高分别为 $2x$，$4x$，$\sqrt{5}x$，它们分别是圆台的上、下底面半径和高.

在图 13-3-7 中，过点 B 作 $BC \perp OA$ 于点 C.

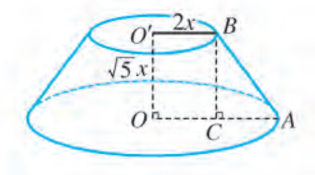


图 13-3-7

在Rt$\triangle ABC$ 中，

$$AC = OA - OC = OA - O'B = 4x - 2x = 2x,$$

$$BC = O'O = \sqrt{5}x,$$

所以 $$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2} = 3x.$$

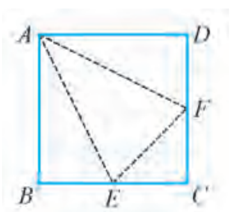
因此，$S_{上} : S_{下} : S_{侧} = [\pi(2x)^2] : [\pi(4x)^2] : [\pi(2x+4x) \times 3x]$
$= 2 : 8 : 9.$

即这个圆台上底面积、下底面积和侧面积之比为 $2:8:9$.

由上述两例可以看出，空间图形的有关计算问题实际上可以转化为平面图形的计算问题，这是解决空间图形计算问题最常用也是最基本的方法.

练　习

1. 已知圆柱的高和底面半径分别为 a, b，求其侧面积.
2. 已知正四棱柱的底面边长是 3 cm，侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}$ cm，求这个正四棱柱的侧面积.
3. 求底面边长为 2 m，高为 1 m 的正三棱锥的全面积.
4. 如图，E, F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 的中点，沿图中虚线折起，使 B, C, D 三点重合，此时 4 个面围成怎样的空间图形？
5. 如果用半径为 r 的半圆形铁皮卷成一个圆锥筒，这个圆锥筒的高是多少？
6. 已知一个正三棱台的两个底面的边长分别为 8 cm 和 18 cm，侧棱长为 13 cm，求它的侧面积.



（第 4 题）

链　接

圆锥、圆台侧面积公式的推导

先考察半径为 R、弧长为 d 的扇形的面积（图 13-3-8）.

因为弧长为 $2\pi R$ 的扇形（圆）的面积为 πR^2，所以弧长为 d 的扇形的面积为

$$S_{扇形} = \frac{d}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2}Rd.$$

圆锥侧面展开图是扇形（图 13-3-9），这个扇形的半径为圆锥的母线长 l，扇形的弧长等于圆锥底面的周长 $c = 2\pi r$，故圆锥的侧面积为

$$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.$$

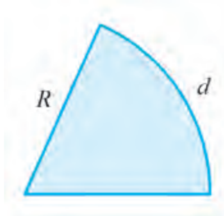


图 13-3-8

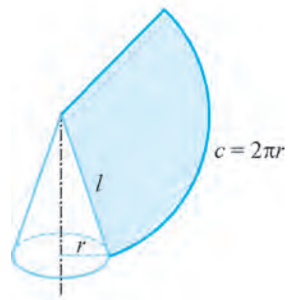


图 13-3-9

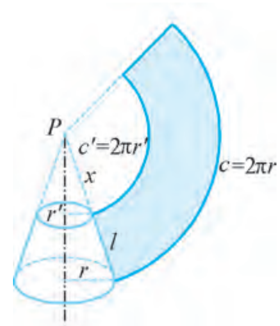


图 13-3-10

圆台侧面展开图是扇环(图 13-3-10),其面积为两个扇形的面积之差,即

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}c(l+x)-\frac{1}{2}c'x=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}(c-c')x,$$

其中,x 为图 13-3-10 中小圆锥的母线长.

由相似三角形的性质可知,$\frac{r}{r'}=\frac{x+l}{x}$,即$\frac{c}{c'}=\frac{x+l}{x}$,

所以$\frac{c-c'}{c'}=\frac{l}{x}$,即$(c-c')x=c'l$.于是

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}c'l=\frac{1}{2}(c+c')l,$$

或

$$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l.$$

13.3.2 空间图形的体积

在小学和初中,我们已经知道长方体的体积为 $V_{长方体}=abc=Sh$,这里 a, b, c 表示长方体的长、宽和高,S, h 分别表示长方体的底面积和高.

长方体体积公式是计算其他空间图形体积的基础,我们将上述结论作为已知事实来运用,那么,

● 如何推出其他简单空间图形的体积公式呢?

这一点可用祖暅原理来说明.有关祖暅原理的介绍见本节“阅读”.

1. 柱、锥、台和球的体积

棱柱(圆柱)可由多边形(圆)沿某一方向平移得到,因此,两个底面积相等、高也相等的棱柱(圆柱)应该具有相等的体积(图 13-3-11).

柱体(棱柱、圆柱)的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积,即

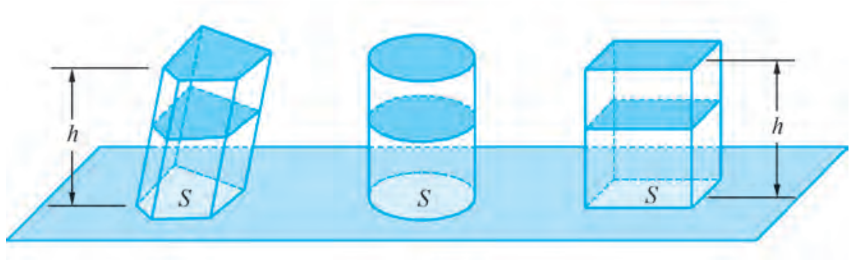


图 13-3-11

$$V_{柱体} = Sh.$$

类似地，底面积相等、高也相等的两个锥体，它们的体积也相等(图 13-3-12).

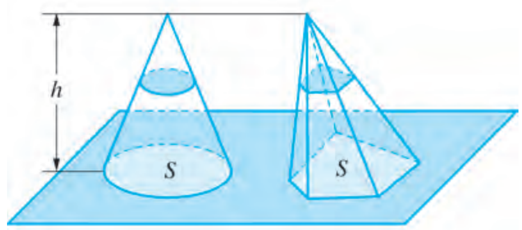


图 13-3-12

由于底面积为 S，高为 h 的三棱锥的体积为 $V_{三棱锥} = \frac{1}{3}Sh$，所以

$$V_{锥体} = \frac{1}{3}Sh.$$

思 考

试将三棱柱分割为 3 个三棱锥，你能说明这 3 个三棱锥的体积相等吗？由此说明三棱锥的体积是等底同高的三棱柱的体积的 $\frac{1}{3}$.

台体(棱台、圆台)的体积可以转化为锥体的体积来计算(图 13-3-13).

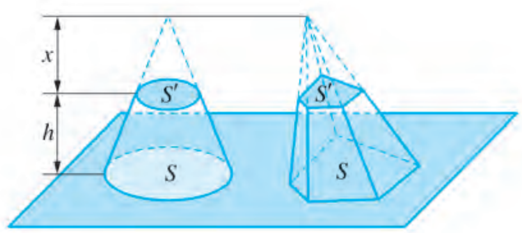


图 13-3-13

如果台体的上、下底面面积分别为 S'，S，高是 h，可以推得它的体积是

$$V_{台体} = \frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系可用图 13 - 3 - 14 表示：

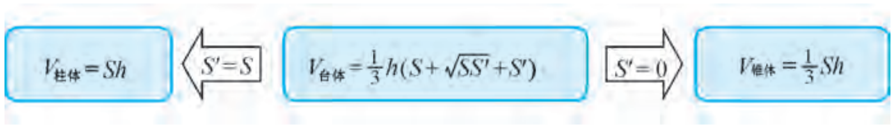


图 13 - 3 - 14

做一个倒沙实验检验这一结果，并尝试用祖暅原理证明这个结论.

我们能够证实这样一个结论：一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，挖去一个以上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥后，所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等(图 13 - 3 - 15).

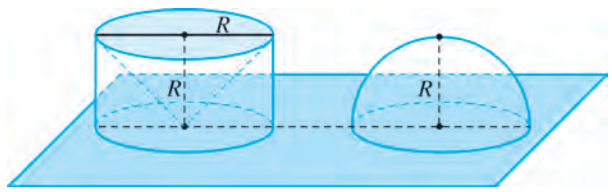


图 13 - 3 - 15

由此得到

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. 球的表面积

设想一个球由许多顶点在球心，底面都在球面上的“准锥体”组成，这些“准锥体”的底面并不是真正的多边形，但只要这些“准锥体”的底面足够地小，就可以把它们近似地看成棱锥(图 13 - 3 - 16).

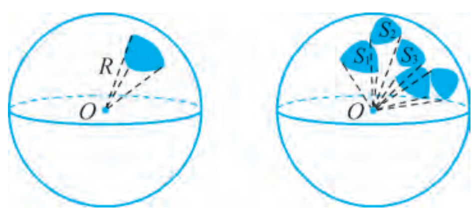


图 13 - 3 - 16

这时，这些“准锥体”的高趋近于球半径 R，底面积 S_1，S_2，S_3，… 的和趋近于球面积，所有这些“准锥体”的体积的和趋近于球的体积，因此

$$\frac{4}{3}\pi R^3=V_{球}=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\frac{1}{3}RS_3+\cdots=\frac{1}{3}RS_{球面},$$

所以

$$S_{球面}=4\pi R^2.$$

球面被经过球心的平面截得的圆叫作球的大圆，大圆的半径等于球半径.

它表明球的表面积是球的大圆面积的 4 倍.

例 3 有一堆相同规格的六角螺帽毛坯(图 13－3－17)共重 6 kg. 已知毛坯底面正六边形边长是 12 mm，高是10 mm，内孔直径是 10 mm. 那么这堆毛坯约有多少个(铁的密度是 7.8 g/cm^3)?

分析 六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差，再由密度算出一个六角螺帽毛坯的质量即可.

解 因为$V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10\approx3.741\times10^3(\mathrm{mm}^3)$,

$$V_{圆柱}\approx3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times10=0.785\times10^3(\mathrm{mm}^3),$$

所以一个毛坯的体积为

$$\begin{aligned}V&=3.741\times10^3-0.785\times10^3\\&=2.956\times10^3(\mathrm{mm}^3)=2.956(\mathrm{cm}^3).\end{aligned}$$

从而这堆毛坯约有 $6\times10^3\div(7.8\times2.956)\approx260$(个).

答 这堆毛坯约有 260 个.

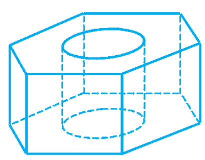


图 13－3－17

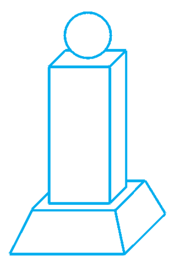


图 13－3－18

例 4 图 13－3－18 是一个奖杯的直观图，它由球、长方体和正四棱台构成. 已知球的半径为 3 cm，长方体的长、宽和高分别为8 cm，6 cm，18 cm，正四棱台的上、下底面边长和高分别为 11 cm，15 cm，5 cm，试计算这个奖杯的体积(精确到 0.01 cm^3).

解 因为 $V_{正四棱台}=\frac{1}{3}\times5\times(15^2+15\times11+11^2)$

$$\approx851.667(\mathrm{cm}^3),$$

$$V_{长方体}=6\times8\times18=864(\mathrm{cm}^3),$$

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi\times3^3\approx113.097(\mathrm{cm}^3),$$

所以这个奖杯的体积为

$$V=V_{正四棱台}+V_{长方体}+V_{球}\approx1\,828.76(\mathrm{cm}^3).$$

答 这个奖杯的体积约为 1 828.76 cm^3.

计算组合体的体积时，应考虑将其转化为计算柱、锥、台、球等简单空间图形的体积.

练　习

1. 用一张长 12 cm、宽 8 cm 的矩形铁皮围成圆柱形的侧面，求这个圆柱的体积.
2. 已知一个铜质的五棱柱的底面积为 16 cm^2，高为 4 cm，现将它熔化后铸成一个正方体的铜块，求铸成的铜块的棱长.（不计损耗）
3. 已知一个六棱锥的高为 10 cm，底面是边长为 6 cm 的正六边形，求这个六棱锥的体积.
4. 《算数书》竹简于 20 世纪 80 年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的成系统的数学典籍，其中记载有求“囷(qūn)盖”的术：置如其周，令相乘也. 又以高乘之，三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h，计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\frac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为多少?
5. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 190 L，假如它的上、下底面边长分别为 60 cm 和 40 cm，求它的深度.
6. 如果钢球由于热膨胀而使半径增加千分之一，它的体积增加约几分之几?
7. 计算地球的表面积(地球的半径约为 6 371 km).

阅　读

祖 暅 原 理

取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它按如图 13-3-19 所示的方式改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积与变形前相等.

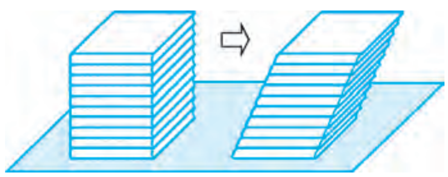


图 13-3-19

我国齐梁时代的数学家、祖冲之的儿子祖暅(暅，gèng)提出一条原理:“幂势既同，则积不容异.”这里“幂”指水平截面的面积，“势”指高. 因此，这句话的意思是：两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等(图 13-3-20).

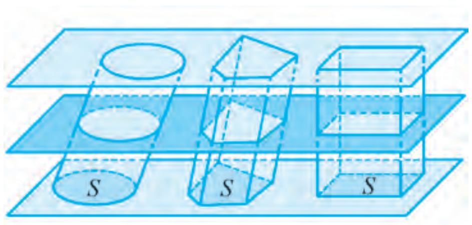


图 13-3-20

祖暅不仅首次明确地提出了这一原理，还成功地将其应用于球

体积的推算.我们把这条原理称为祖暅原理.

祖暅原理在西方文献中称“卡瓦列利原理”,它在1635年由意大利数学家卡瓦列利(B. Cavalieri,1598—1647)独立提出,对微积分的建立有重要影响.

以长方体体积公式和祖暅原理为基础,我们就可以求出柱、锥、台、球等空间图形的体积.

习题 13.3

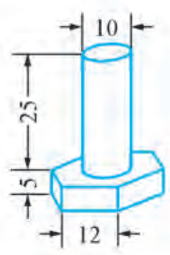
感受·理解

1. 正六棱柱形的除锈滚筒(两端是封闭的),筒长 1.6 m,底面外接圆半径是 0.46 m,制造这个滚筒需要多少平方米铁板(精确到 0.1 m^2)?

2. 一个正六棱锥的底面边长为 6 cm,高为 15 cm,画出它的直观图(比例尺为 1∶3),并计算该棱锥的体积.

3. 一个正三棱锥的高和底面边长都为 a,求它的侧棱和底面所成角的余弦值.

4. 要电镀螺杆(尺寸如图,单位:mm),如果每平方米用锌 0.11 kg,电镀 100 个这样的螺杆需要锌多少克(精确到 0.1 g)?



(第 4 题)

(第 5 题)

5. 如图,某展览馆外墙为正四棱锥的侧面,四个侧面均为底边长为35.4 m,高为 27.9 m 的等腰三角形.试求:

(1) 展览馆的高度;

(2) 外墙的面积;

(3) 该四棱锥的体积.

6. (1) 火星的半径约是地球的一半,地球表面积约是火星表面积的多少倍?

(2) 木星的表面积约是地球的 120 倍,它的体积约是地球的多少倍?

7. 有一种空心钢球,质量为 142 g,测得外径为 5.0 cm,求它的内径(钢的密度为 7.9 g/cm^3,结果精确到 0.1 cm).

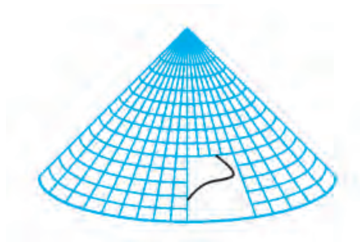
8. 用油漆涂 100 个圆台形水桶(桶内外侧都要涂),桶口直径为 30 cm,桶底直径为 25 cm,母线长是 27.5 cm.已知每平方米需用油漆 150 g,共需用油漆多少千克(精确到0.1 kg)?

思考·运用

9. 已知三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的侧面均为矩形,求证:该三棱柱的任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积.

10. 如图,某养路处建造圆锥形仓库用于贮藏粗盐(供融化高速公路上的积雪之用).现有的仓库的底面直径为 12 m,高 4 m.养路处拟建一个更大的圆锥形仓库,以存放更多的粗盐.现有两个方案:一是新建仓库的底面直径比原来的大 4 m(高不变),二是高度增加 4 m(底面直径不变).

(1) 分别计算按这两个方案所建仓库的体积;
(2) 分别计算按这两个方案所建仓库的表面积;
(3) 哪一个方案更经济些?



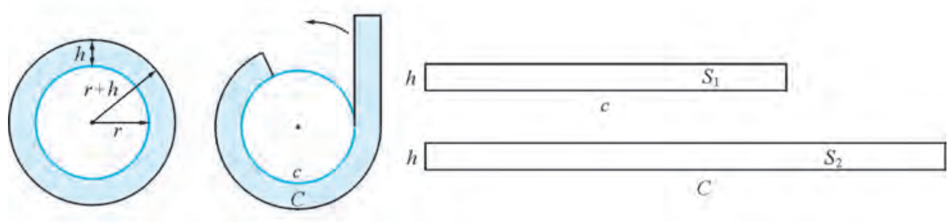
(第 10 题)

探究 · 拓展

11. 过年了,小张准备去探望奶奶,到商店买了一盒点心.售货员为他做了捆扎(如图(1)所示),并在角上配了一个花结.售货员说,这样的捆扎不仅漂亮,而且比一般的十字捆扎(如图(2)所示)包装更节省彩绳.你同意这种说法吗?请给出你的理由.(注:点心盒的高小于长、宽)

(第 11 题)

12. (阅读题) 假设半径为 r 的圆的面积为 $A=\pi r^2$,我们用下面的方法推出圆的周长公式 $c=2\pi r$.



(第 12 题)

如图,设 h 是一个正数,考察半径分别为 r 和 $r+h$ 的两个同心圆所围成的圆环(图中阴影区域).这个圆环的面积为

$$B=\pi(r+h)^2-\pi r^2=2\pi rh+\pi h^2.$$

可以看出,$S_1<B<S_2$,其中 S_1 是以小圆周长为长、h 为宽的矩形的面积,S_2 是以大圆周长为长、h 为宽的矩形的面积.

所以有 $ch<2\pi rh+\pi h^2<Ch$,即 $c<2\pi r+\pi h<C$.

如果 h 越来越小(趋于 0),那么大圆的周长 C 趋近于小圆的周长 c,且 πh 趋于 0,因此我们得到

$$c\leqslant 2\pi r\leqslant c,$$

从而 $c=2\pi r$.

用类似的方法证明:假设半径为 R 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,那么球的表面积为 $S=4\pi R^2$.

应用与建模

拟柱体体积公式

在日常生活中，我们会遇到沙石堆、建筑垃圾堆等体积的计算问题. 虽然它们有两个面平行，但一般不是棱台.

例如，某地区堆着一堆建筑垃圾，影响市容. 这堆垃圾长为 80 m，宽为 20 m，堆高估计 1 m，上底长、宽比下底长、宽各少 2 m(图 1). 现在要彻底清除这堆垃圾，用 4 t 卡车装运，约需要装几车？（1 m^3 建筑垃圾约 1.5 t)

再如，建材买卖中，售沙人常将沙堆成形如图 1 所示的上、下底面均为矩形的拟柱体，买沙人测量时，测量此拟柱体的中截面的面积为 S(其长、宽分别为 a，b)以及它的高 h，那么用 Sh 作为此拟柱体的体积合理吗？对谁有利？

拟柱体的侧面是三角形、梯形或平行四边形.

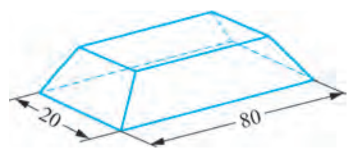


图 1

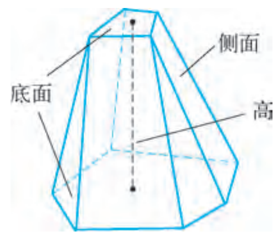


图 2

如图 2，所有顶点都在两个平行平面内的多面体叫作**拟柱体**(prismatoid). 在这两个平面内的面叫作拟柱体的底面，其余各面叫作拟柱体的侧面，两底面之间的垂直距离叫作拟柱体的高. 像图 1 所示的两底面是矩形并且对应边平行的拟柱体也称为长方台.

利用棱锥体积公式，我们可以得到上、下底面及中截面的面积为 S'，S，S_0，高为 h 的拟柱体的体积是

$$V_{拟柱体}=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S'). \quad (1)$$

由公式的结构特征容易想到拟柱体体积可表示为三个体积 $\frac{1}{6}Sh$，$\frac{1}{6}S'h$，$\frac{4}{6}S_0h$ 之和. 其中前面两个不难由中截面上一点与上、下底构成的棱锥而得到(即$\frac{1}{3}S\cdot\frac{h}{2}$，$\frac{1}{3}S'\cdot\frac{h}{2}$). 于是只需证明此点与各侧面构成的棱锥体积之和为$\frac{4}{6}S_0h$ 即可.

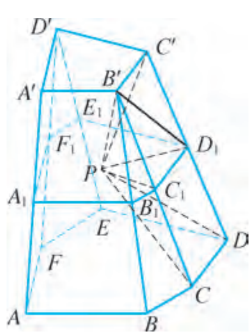


图 3

不妨考虑图 3 中棱锥 $P-B'C'DC$，这时以侧面为底来计算体积是不妥的，应考虑换底，这个底应在中截面上. 于是先将该四棱锥适当分割，再用“换底求积法”转化.

连接 $B'D_1$，则 $S_{B'C'DC}=4S_{\triangle B'C_1D_1}$，故

$$V_{P-B'C'DC}=4V_{P-B'C_1D_1}=4\times\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}S_{\triangle PC_1D_1}=\frac{4}{6}S_{\triangle PC_1D_1}\cdot h.$$

为什么梯形 $B'C'DC$ 的面积是 $\triangle B'C_1D_1$ 的面积的 4 倍?

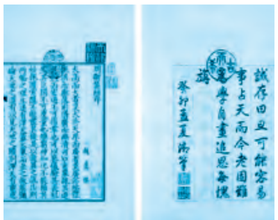
将这类棱锥相加即得以 P 为顶点、各侧面为底面的棱锥体积之和为 $\frac{4}{6}S_0h$.

试解释棱柱、棱锥和棱台的体积公式也都可以写成(1)式,并用(1)式解决开头提出的问题.

阅　读

几何学的发展

◆ 几何学的起源



几何学起源于四大文明古国之一的古埃及.古埃及尼罗河两岸土地肥沃,但每年河水泛滥,导致两岸田地被淹,于是需要对田地重新进行测量,这就是几何学的起源.

英文 Geometry 从希腊语演变而来,其原意是土地测量,我国明朝徐光启将其译为“几何”.

《周髀算经》为算经十书之一.中国最古老的天文学和数学著作,约成书于公元前 1 世纪.

四季的变化与农业有着密切的关系,天文学也随之产生.这就需要人们必须识别东南西北这四个方向,古埃及人很早就知道了用北极星来测定南北两个方向,据此可找到东西方向(只需作南北方向的垂线).古埃及人作垂线的方法是用三根绳子做一个三角形,这个三角形的三边长度分别为 3 呎、4 呎和 5 呎,那么 3 呎和 4 呎的边就是相互垂直的.当时我国也已经用这种方法找到相互垂直的两条线,这就是“勾股定理”.此定理载于我国最早的一部数学著作《周髀算经》,这与古埃及人的想法不谋而合,但那时没有人给出定理的详细证明.

◆ 欧几里得的《原本》

公元前 3 世纪,古希腊数学家欧几里得成为欧氏几何的创始人.尽管在欧几里得以前,古希腊人已经掌握了一些几何知识,并开始用各种方法证明这些几何命题.但是这方面的知识仅限于一些具体的问题,并且是很粗糙、零碎的.欧几里得在前人积累的优秀成果的基础上,按照逻辑系统把几何命题整理到一起,构成了历史上第一个数学公理体系——《原本》.这是一部具有里程碑意义的著作,它标志着欧氏几何的建立.

欧几里得(Euclid,约公元前 330—公元前 275),古希腊数学家,以其所著的《原本》闻名于世.

然而,欧氏几何并非无懈可击.首先,欧几里得给出的一些定义只是对几何形象的简单描述,并非是逻辑意义下的定义(如“线是有长度而没有宽度的”等).其次,根据欧几里得创立的公理进行研究没有出现任何矛盾,但可以发现其中有些公理是可以去掉的(如“所有的直角是相等的”这条公理).虽然欧几里得的《原本》存在以上缺点,但在两千多年前能够建立起如此完整的几何基础,不能不说是一件了不起的工作.

◆ 非欧几何的产生

非欧几何(“非欧几里得几何”的简称)可以追溯到对欧几里得第五公设(平行公设)的怀疑. 19 世纪德国数学家高斯(K. F. Gauss, 1777—1855)、俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevskey, 1792—1856)和匈牙利数学家波尔约(J. Bolyai, 1802—1860)各自独立地发现了平行公理独立于其他公理,并可以使用不同的“平行公理”来代替欧几里得的平行公理,这就意味着非欧几何的产生.

罗巴切夫斯基在 1829 年、波尔约在 1832 年独立地用平行公理的逆命题,即用“通过直线外一点,可以引不止一条而至少是两条直线平行于已知直线”来代替欧几里得平行公理. 由此出发进行推导得出了一连串新几何学的定理,这些定理整体形成了一个逻辑上无矛盾的理论,一种新的几何学——非欧几里得几何学. 在此几何学中,三角形的内角和小于两个直角. 罗巴切夫斯基称这种几何为虚拟几何,后来被称为罗巴切夫斯基几何,简称罗氏几何,也被称为双曲几何.

德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann, 1826—1866)是发现非欧几何的另一个数学家. 他于 1854 年发表的《关于几何基础的假设》的演讲中,区分了无界和无限这两个概念,得到了另一种几何学——相容几何学,也称为黎曼的非欧几何(椭圆几何). 这样的几何可以在球面上实现.

在罗巴切夫斯基和黎曼创建了非欧几何之后,非欧几何对 20 世纪初物理学所发生的关于空间和时间的物理观念的改革等方面也发挥了重大的作用.

◆ 射影几何学的繁荣

17 世纪笛卡儿和费马的解析几何出现的时候,还有一门几何学成为一门重要的学科,成为几何学中一个重要分支. 这种几何与画图关系密切. 欧洲文艺复兴时期,透视学的兴起,为射影几何学的产生和发展准备了充分的条件,人们把这种几何学称为射影几何. 为其建立和发展作出了重要贡献的是两个法国数学家——德沙格(G. Desargues, 1591—1661)和帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662). 19 世纪射影几何最终确立了.

平面射影几何的公理体系包括四条结合公理、七条顺序公理和连续公理,主要研究的是图形的射影性质,即它们通过射影变换后,仍然保持原来的图形性质的几何学分支学科.

◆ 几何学的统一

在数学史上,罗巴切夫斯基被称为“几何学上的哥白尼”. 这是因为非欧几何的创立不只解决了两千年来一直悬而未决的平行公设问题,更重要的是它引起了关于几何观念和空间观念的最深刻的革命.

首先，非欧几何对于人们的空间观念产生了极其深远的影响. 其次，非欧几何的出现打破了长期以来只有一种几何学即欧氏几何学的局面.

德国数学家克莱因(C. F. Klein，1849—1925)在一次名为“爱尔朗根纲领”演讲中充分阐述了几何学统一的思想：所谓几何学，就是研究几何图形对于某类变换群保持不变的性质的学问. 这样一来，不仅仅 19 世纪出现的几种重要的、表面上互不相关的几何学被联系了起来，而且变换群的任何一种分类也对应着几何学的一种分类.

另一位德国数学家希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)对几何学的统一也产生了深远的影响，他所提出的统一几何学的方法是公理化的方法. 希尔伯特在其所著《几何基础》一书中提出的公理系统包括 20 条公理，且第一次提出了选择和组织公理系统的原则，利用他这一研究方法，就可以得到相应的某种几何. 这样一来，不仅可以对原有的几门非欧几何进行统一处理，而且还可以从中引出新的几何学.

◆ 中西方几何学发展的差异

中国几何学以测量和计算面积、体积为中心任务，如《九章算术》中“商功”(各种体积的求积公式及工程土方问题的算法)和“勾股”(勾股问题及一次测望问题的法则)；而古希腊的传统则是重视形的性质与各种性质间的相互关系，如欧几里得《原本》建立了用定义、公理、定理和证明构成的演绎体系，成为近代数学公理化的楷模，对西方思想文化发展产生了重要的影响.

中国古代数学著作通常以应用问题集的形式出现，可视为各类数学模型的集成，其构造性观念和算法传统在科技日新月异的今天日益显示出重要性. 而《原本》的出现，使人们看到了数学的理性和思维的力量，增强了人们利用思维推理获得成功的信念.

写 作

收集几何学发展的历史资料，撰写论文，论述几何学发展的过程、重要结果，几何学发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献.

请参考下列主题，到图书馆或上互联网收集、阅读、整理资料并撰写综述或制作演示课件. 同时可以提出自己的发现或不能解决的问题，以便课内交流和讨论.

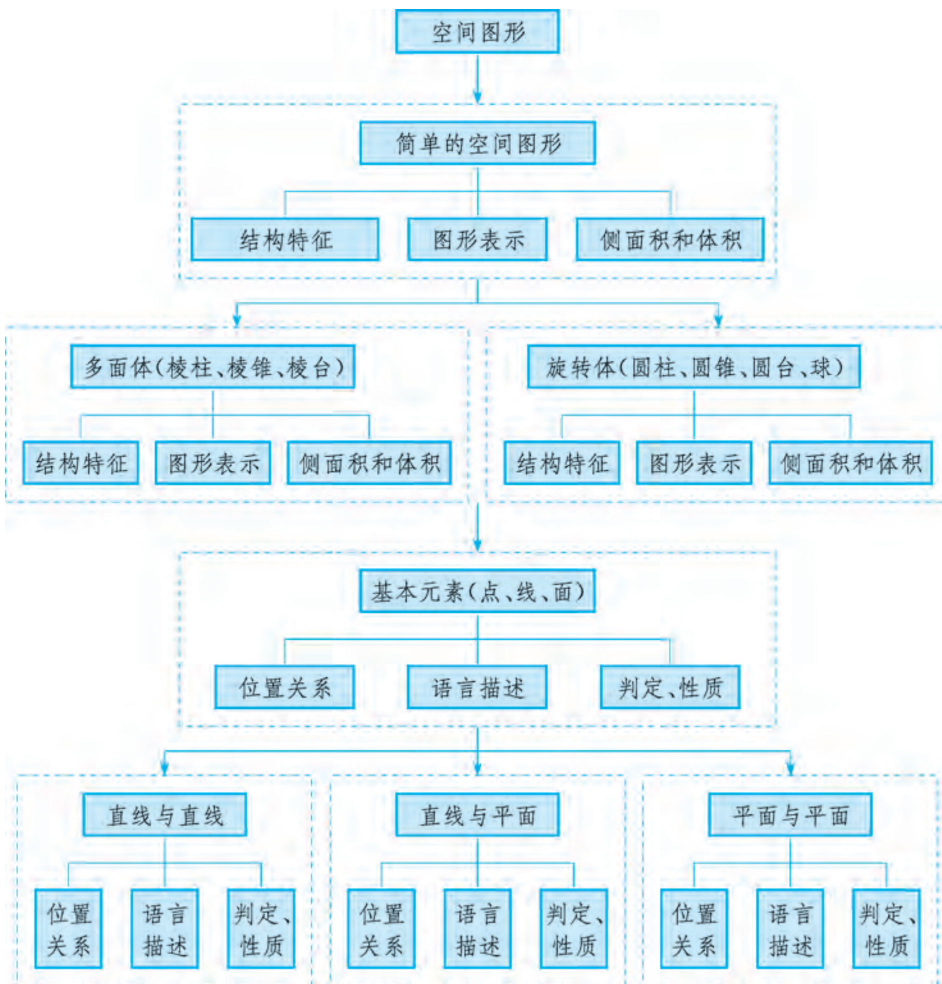
(1) 中国的几何学发展情况，中国历代数学家在几何学方面所做的贡献；

(2)《九章算术》与《原本》的比较；

(3) 与几何学有关的应用科学.

本章回顾

我们首先从直观上认识了柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征. 借助长方体模型，抽象出空间点、线、面的位置关系. 学习了可作为推理依据的 4 个基本事实，以及线线、线面、面面平行或垂直的判定与性质定理，并运用这些知识解决有关空间位置关系的简单推理论证及应用问题.



学习本章应注意体会“转化”的思想方法，如面面垂直与线面垂直的转化、线面平行与线线平行的转化，并善于将空间问题转化为平面问题来处理.

复习题

感受·理解

1. 两个平面可以将空间分成________个部分.
2. 三条直线两两平行，过其中任意两条直线最多可确定________个平面.

3. 若两个平行平面间的距离为 10，夹在这两个平面间的线段 AB 长为 20，则 AB 与这两个平面所成的角为________.

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各个表面的对角线中，与 AD_1 所成角为 $60°$ 的有(　　).

A. 4 条　　B. 6 条　　C. 8 条　　D. 10 条

5. 若长方体三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，则长方体的体积为(　　).

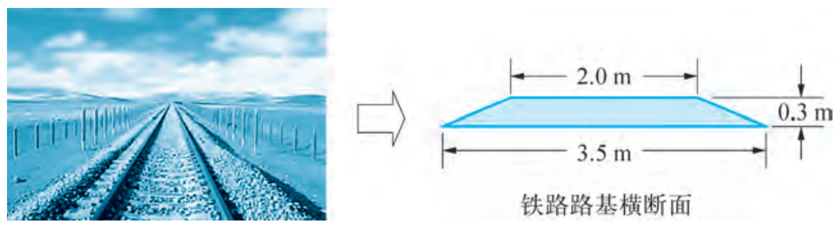
A. $\sqrt{6}$　　B. 6　　C. $6\sqrt{6}$　　D. 36

6. 在棱长均为 a 的正三棱锥 $S-ABC$ 中，

(1) 求证：$SA \perp BC$；

(2) 求三棱锥 $S-ABC$ 的表面积.

7. 铁路路基是用碎石铺设的，其横断面为等腰梯形(如图). 已知南京到上海的铁路长约 300 km，试估计所用碎石的方数(精确到 1 m^3).



(第 7 题)

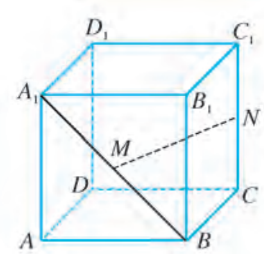
8. 用长、宽分别是 3π cm 与 π cm 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面，试求圆柱底面的半径.

9. 如图，某人打算用 A 型材料制作一个近似于球形的热气球，半径为 10 m.

(1) 制作这样一个热气球，大约需要多少材料?

(2) 如果 A 型材料的价格为 280 元/m^2，试估计用料的总费用. 如果直径增加 4 m，那么需增加多少费用?

(第 9 题)



(第 10 题)

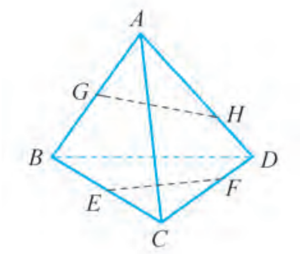
10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 A_1B 和 CC_1 的中点. 求证：$MN /\!/$ 平面 $ABCD$.

11. 三个球的半径的比是 1∶2∶3. 求证：其中最大的一个球的体积是另两个球的体积之和的 3 倍.

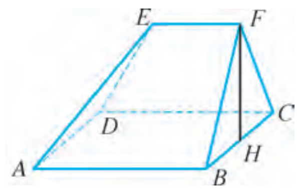
思考・运用

12. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，E，G 分别是 BC，AB 的中点，点 F 在 CD 上，点 H 在 AD 上，且有 $DF:FC=DH:HA=2:3$. 试判定直线 EF，GH，BD 的位置关系.

13. 如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，平面 $FBC\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle FBC$ 中 BC 边上的高 $FH=2$，$EF=\frac{3}{2}$. 求该几何体的体积.

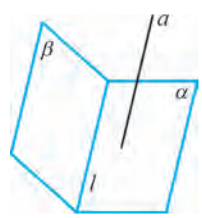


（第 12 题）

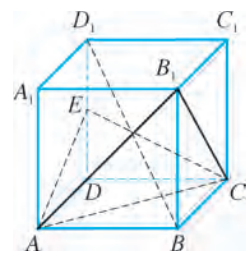


（第 13 题）

14. 如图，已知 $a\parallel\alpha$，$a\parallel\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，求证：$a\parallel l$.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 的中点. 求证：

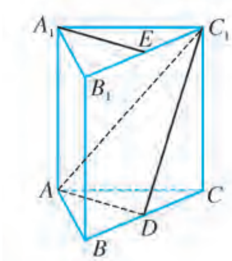
（1）$BD_1\parallel$ 平面 EAC；

（2）平面 $EAC\perp$ 平面 AB_1C.

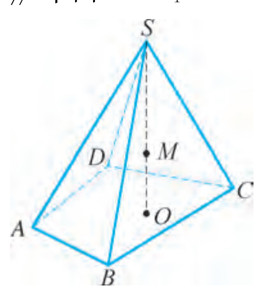
16. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D 在边 BC 上，$AD\perp C_1D$.

（1）求证：$AD\perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）如果点 E 是 B_1C_1 的中点，求证：$A_1E\parallel$ 平面 ADC_1.



（第 16 题）



（第 17 题）

17. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SO\perp$ 平面 $ABCD$，O 为垂足，点 M 在 SO 上，且 $SM:MO=2:1$，经过点 M 作与底面 $ABCD$ 平行的平面 α，分别交棱 SA，SB，SC，SD 于点 A_1，B_1，C_1，D_1.

（1）求证：四边形 $A_1B_1C_1D_1\backsim$ 四边形 $ABCD$；

（2）求棱锥 $S-A_1B_1C_1D_1$ 的体积与棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的体积之比.

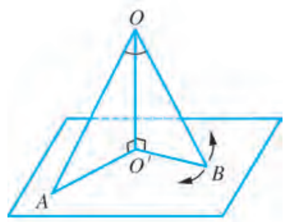
18. 设 P，A，B，C 是球 O 表面上的四个点，PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=1$ m，求球的体积与表面积.

探究·拓展

19. **《数书九章》天池测雨**：今州郡都有天池盆，以测雨水．但知以盆中之水为得雨之数．不知器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测，便为平地得雨之数．假令盆口径二尺八寸，底径一尺二寸、深一尺八寸，接雨水深九寸，欲求平地雨降几何？

（注：① 平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积；② 一尺等于十寸）

20. （操作题）用硬纸剪一个三边均不等的锐角三角形 AOB，然后以 AB 边上的高OO'为折痕，折得两个直角三角形，使之直立于桌面上（如图），那么，$\angle AO'B$ 就是$\angle AOB$ 在桌面上的射影．转动其中一个直角三角形，观察$\angle AOB$ 与$\angle AO'B$ 的大小关系，是否存在某个位置，使 $\angle AOB = \angle AO'B$？



（第 20 题）

21. （探究题）类比是根据两个对象在某些方面的相同或相似，推出它们在其他方面的相同或相似的一种推理方法．

由于类比推理所得结论的真实性并不可靠，因此它不能作为严格的数学推理方法，但它是提出新问题和获得新发现的源泉．

平面几何和立体几何在研究对象和方法、构成图形的基本元素等方面是相同或相似的，因此，在二者之间进行类比是研究它们性质的一种非常有效的方法．

为了对二者进行类比，可以在它们的基本元素之间建立如下的类比关系：

平面	空间
点 →	点或直线
直线 →	直线或平面
平面图形 →	平面图形或立体图形

请你探究：

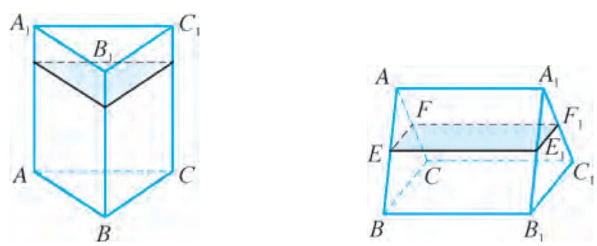
（1）对勾股定理进行类比，在空间能得到什么结论？

（2）在平面内，不共线的三点确定一个圆．那么在空间有什么类似的命题？

本章测试

一、填空题

1. 四面体共有________条棱.
2. 与同一条直线都相交的两条直线的位置关系是________.
3. 若用半径为 2 cm 的半圆形纸片卷成一个圆锥筒,则这个圆锥筒的高为________cm.
4. 若线段 AB 的端点 A,B 到平面 α 的距离分别为 a,b,且点 A,B 在 α 的同侧,则线段 AB 中点 M 到平面 α 的距离是________.
5. 把一个半径为 R 的实心铁球铸成三个小球(不计损耗),三个小球的体积之比为 1∶3∶4,其中最小球的半径为________.
6. 一个封闭的正三棱柱容器的高为 $2a$,内装水若干(如图(1),底面处于水平状态).将容器放倒(如图(2),一个侧面处于水平状态),若此时水面与各棱的交点 E,F,F_1,E_1 分别为所在棱的中点,则图(1)中水面的高度为________.



(1)　　　　(2)

(第 6 题)

二、选择题

7. 在空间,到一圆周上各点距离相等的点的集合表示的图形是(　　).

A. 一个点　　B. 一条直线

C. 一个平面　　D. 一个球面

8. 若 a,b 为两条异面直线,α,β 为两个平面,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=l$,则下列结论中正确的是(　　).

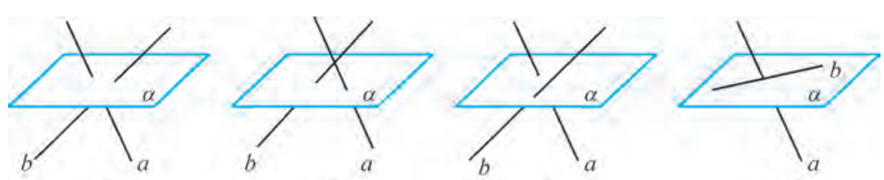
A. l 至少与 a,b 中一条相交

B. l 至多与 a,b 中一条相交

C. l 至少与 a,b 中一条平行

D. l 必与 a,b 中一条相交,与另一条平行

9. 下列图形中,能确定直线 a,b 是异面直线的是(　　).

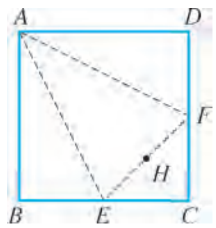


A.　　B.　　C.　　D.

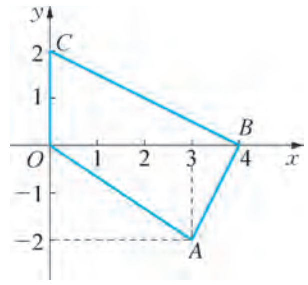
10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC，CD 的中点，H 为 EF 的中点. 沿 AE，EF，FA 将正方形折起，使 B，C，D 重合于点 O，构成四面体，则在四面体 $A-OEF$ 中，下列说法正确的是（　　）.

A. $AH\perp$ 平面 OEF　　B. $AO\perp$ 平面 OEF

C. $AE\perp$ 平面 OEF　　D. $AF\perp$ 平面 OEF



（第 10 题）



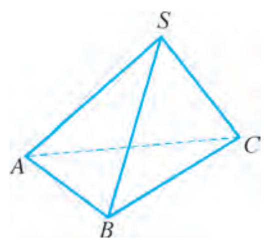
（第 11 题）

三、解答题

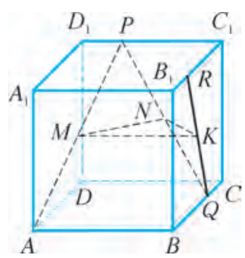
11. 用斜二测画法画出图中平面四边形 $OABC$ 水平放置的直观图.

12. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=AC$，$SB=SC$.

求证：$SA\perp BC$.



（第 12 题）

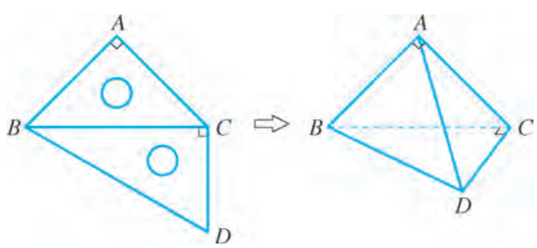


（第 13 题）

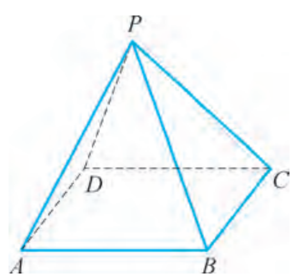
13. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q，R 分别为棱 D_1C_1，BC，B_1C_1 上异于顶点的点，M，N，K 分别为线段 AP，PQ，QR 的中点.

求证：平面 $MNK\ /\!/$ 平面 $ABCD$.

14. 一副三角板按如图所示的方式拼接，将$\triangle BCD$ 折起，使得二面角 $A-BC-D$ 为直二面角. 求证：平面 $ABD\perp$ 平面 ACD.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ DC$. 回答下面的问题：

（1）在侧面 PAB 内能否作一条线段，使其与 DC 平行？如果能，请写出作图过程并给出证明；如果不能，请说明理由.

（2）在侧面 PBC 中能否作出一条线段，使其与 AD 平行？如果能，请写出作图过程并给出证明；如果不能，请说明理由.

第 14 章　统　　计

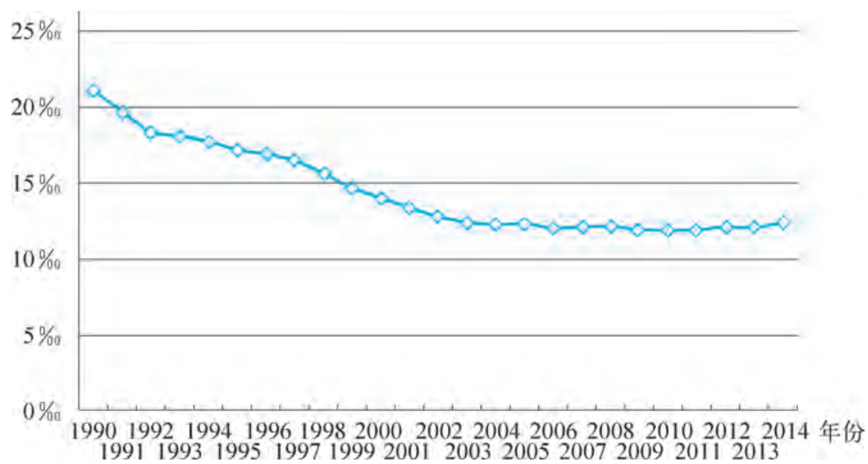
统计

- 获取数据的基本途径及相关概念
- 抽样
  - 简单随机抽样
  - 分层抽样
- 统计图表
  - 扇形统计图、折线统计图、频数直方图
  - 频率直方图
- 用样本估计总体
  - 用样本估计总体的集中趋势参数
  - 用样本估计总体的离散程度参数
  - 用频率直方图估计总体分布
  - 百分位数

统计分析的形式随着时代的推移而变化着，但是“从数据中提取一切信息”或者“归纳和揭示”作为统计分析的目的却一直没有改变.

——C. R. 劳

统计数据显示，1990 年以来，我国人口出生率持续下降，2010 年达到了 11.9‰的较低水平，2011 年至今保持在 12‰左右，人口总量增速放缓.



1990～2014 年出生率走势图

1998 年以来，每年新出生人口降至 2 000 万以下，年末总人口增速降至 10‰以下并呈现持续下降趋势，至 2014 年增速降至 5‰左右. 单独二孩政策的实施使 2014 年出生人口较 2013 年增加 48 万人，但年均新出生人口规模仍处于较低水平.

然而，根据 2014 年国家统计局数据显示，总抚养比(指人口当中非劳动年龄人口与劳动年龄人口之比)却持续走高，尤其是老年抚养比提升较快，2014 年 65 岁以上老年抚养比达到13.7%的较高水平.

数据表明，劳动人口总量增速放缓，老龄化加速，抚养比持续走高，人口红利渐趋弱化.

通过人口数据的收集与分析，对我国人口现状作出判断，可以为国家人口政策的调整提供依据.

- 怎样合理获取数据？
- 如何处理、分析所获得的数据？

14.1 获取数据的基本途径及相关概念

应用统计方法分析问题时，最好能够获得关于研究对象的所有数据，但在实际问题中，由于人力、物力耗费巨大等诸多原因，具体操作时往往抽取部分数据进行研究.

● 获取数据有哪些基本的途径?

《管子·问》为春秋时期政治家管仲所作，文中提出了六十五个问，这里的"问"是"调查"的意思. 请查阅相关资料.

案例 1 人口普查和人口抽查

《全国人口普查条例》规定，我国在尾数逢 0 的年份开展人口普查，在两次人口普查的中间年份进行全国 1%人口抽样调查. 下面是 2015 年全国 1%人口抽样调查的主要内容：

(1) 调查目的

了解 2010 年以来我国人口在数量、素质、结构、分布以及居住等方面的变化情况，为制定国民经济和社会发展规划提供科学准确的统计信息支持.

(2) 对象和范围

在我国境内抽取约 6 万个调查小区，调查对象为小区内的全部人口(不包括港澳台居民和外国人)，共约 1 400 万人.

(3) 内容和时间

调查内容为人口和住户的基本情况，主要包括姓名、性别、年龄、民族、受教育程度、行业、职业、迁移流动、社会保障、婚姻、生育、死亡、住房情况等. 调查时点为 2015 年 11 月 1 日零时.

通过人口抽查，国家统计局获得数据后，进行了处理分析，得到了相关结论. 请进入中华人民共和国国家统计局网站查询.

探 究

查阅《中国统计年鉴》，了解 1978 年后我国各年度的人口性别比，0～14 岁、15～64 岁和 65 岁及以上人口占比.

案例 2 抽样检测

某养鱼场今年初在一池塘放养了 10 000 尾鲤鱼苗. 为了解这批鱼苗生长的情况，决定从池塘中捞 40 尾鱼进行调查. 调查人员分别从鱼塘的东、西、南、北、中五个方位各随机捞起 8 尾鲤鱼，分别测量其质量，并记录下健康状况. 称量和观测后将 40 尾鱼放回鱼塘. 下面是 40 尾鱼的质量(单位：g)：

353	432	445	422	386	405	421	398	377	389
408	389	431	394	408	366	378	399	411	387
432	417	400	388	402	396	369	419	423	406
398	404	412	392	388	403	413	417	376	407

根据上述数据，调查人员分别算得 40 尾鱼的质量的平均数约为 401.5，标准差约为 19.3. 这说明这批鱼苗生长较快，且个体之间差异不大. 结合健康状况的观测结果，作出调查结论：这批鱼的生长情况良好.

案例 3 民意调查

在 1936 年美国总统选举中，著名杂志《文学文摘》(The Literary Digest)进行了一次民意调查，他们从电话簿、杂志订户、机动车注册表及俱乐部会员表上共选取了 1 000 多万人，再发给他们调查表，并得到了 238 万人的回复. 统计结果如表 14－1－1 所示.

这种发放调查表的方法恰当吗?

表 14－1－1

候选人	预测结果
罗斯福	43%
兰　登	57%

《文学文摘》作出推断：本次选举兰登获胜.

从上述案例可以看到，在统计分析时获取数据非常重要，而获取数据的途径有很多种，如统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样调查、互联网等.

一般地，在获取数据时，我们把所考察对象(某一项指标的数据)的全体叫作**总体**(population)，把组成总体的每一个考察对象叫作**个体**(subject)，从总体中所抽取的一部分个体叫作总体的一个**样本**(sample)，样本中个体的数目叫作**样本容量**(size of a sample).

普查的样本就是总体，由总体推出结论的可靠性最大，但是，当总体量很大时，调查的工作量也大，特别是检查具有破坏性(如测试某种产品的使用寿命)时，就不能使用普查的方法了.

当然，样本容量太小也会影响统计分析的可靠性，比如案例 2 中，如果只在池塘的东、西、南、北、中五个方位各取 1 尾鱼进行测量、分析，那么由其作出的推断就可能不够准确.

是不是样本容量越大，统计分析的结果就越可靠呢?

案例 3 中样本量已经足够大，但最终结果是罗斯福获得了 62% 的选票，而兰登只得到了 38%的选票. 而另一项调查(盖普特调查)只取了 5 万个样本，却得到了较为接近实际结果的推断.

《文学文摘》出现严重偏差的原因：一是选择性偏差. 1936 年是美国经济大萧条时期，能装电话、订杂志、有小汽车和加入俱乐部的都是有钱人，刚参加工作的年轻人及广大的产业工人中能够拿到调查表的很少. 二是无应答偏差. 1 000 多万张调查表只收回了 238 万张，不回复的大多是经济困难的家庭，他们更关心如何养活家人.

这个案例说明，样本的选取具有随机性，相对于总体而言，一个好样本必须具有好的代表性.

那么，如何选择合理的样本容量呢？这在统计学上有具体的计算公式. 根据样本容量计算公式可以知道，样本容量的大小不取决于总体中个体数的多少，而取决于研究对象的变化程度（总体中个体之间的差异度）、所允许的误差大小（即样本的精度要求）和要求推断的置信程度（即把握大小、可信程度）.

样本容量公式情况比较复杂，感兴趣的同学可查阅相关资料.

例 1　为了解决下列问题，哪些需要应用样本？并就怎样选取样本说出自己的想法.

（1）某长途公共汽车使用 10 L 汽油能行驶多少千米？

（2）政府准备新办一所中学，假定其学区为 4 个确定的小区，设计规划时应确定多少个自行车车位？

（3）电视台要了解某综艺节目的收视率.

解　（1）长途公共汽车使用 10 L 汽油行驶的里程数，需要应用样本. 对不同路况、不同气候条件、不同载重等情况进行实验，获取样本，从而作出估计. 比如，通过若干次实验，获得相应的里程数和消耗的汽油升数，从而算得对应的使用 10 L 汽油所行驶的里程数（单位：km）：

98，85，88，75，86，79，81，100，88，81.

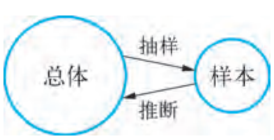
算得平均数为 86.1，由此估计该汽车使用 10 L 汽油大约能行驶 86 km.

（2）学生上学的交通方式，有步行、骑自行车、坐公交车、家长接送等. 为确定自行车车位数，需要应用样本. 可以从 4 个小区中随机选择若干个有孩子到该校上学的家庭进行调查.

（3）要了解某综艺节目的收视率，需要应用样本了解收看该综艺节目的人数，可通过向各种类型的人群发放调查表的方式收集相关数据，也可以进行电话调查或网上调查等.

思　考

从 6 只节能灯中抽取 3 只进行使用寿命的测试，有多少种可能的样本？



从以上内容可以看出，统计分析的基本步骤为

获取数据
↓
分析数据
↓
作出估计

统计分析的基本思想是：抽取具有较好代表性的样本，由样本数

据的特征、规律估计总体的状况.

练　习

1. 接受就业技能训练是否能够提高受训者的收入水平？下面是两种获得数据的方案，你认为哪种更有效？并说明理由.

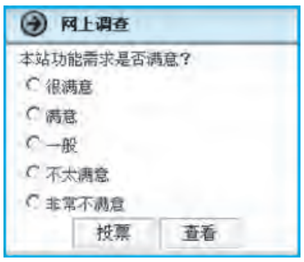
方案 1：分别在受过技能训练和未受过技能训练的人群中抽取样本，统计他们的收入水平；

方案 2：从未受过技能训练的人员中抽取两组，两个组的组成成员的年龄、性别、文化程度及社会经历大体相当，其中一组进行专门的职业技能训练，另一组只作为考察对象，不进行任何培训. 5 年后，分别统计两个组的收入水平.

2. 为了解决下列问题，要收集什么数据？哪些问题需要应用样本？并就怎样选取样本说出自己的想法.

（1）要了解鱼塘中放养的鳞鱼的生长状况；

（2）某校想了解学生的视力状况.



3. 上网搜索，了解网上调查的一些项目，由此判断网上调查的结论的可靠性如何，为什么？如果感兴趣，请自己做一次网上调查，了解初中生每星期看电视的时间.

习题 14.1

感受・理解

1. 找几则应用数据描述下列情况的新闻或广告：

（1）体育运动；

（2）天气情况；

（3）农作物收成；

（4）商业行情.

2. 向你的家长了解他们所在单位有哪些问题需要收集数据后才能作出决定.

3. 查阅相关统计资料，了解我国最近几年用电量、消耗的石油的数量及汽车销售量的年增长率.

4. 为了解决下列问题，应收集什么数据？哪些问题必须应用样本？

（1）新办一所学校，应为学生餐厅订购多少张餐桌？

（2）为什么有些学生上课迟到？

（3）质检部门中秋节前调查月饼的质量.

思考・运用

5. 到交通部门（或网上）查阅资料，获取相关数据，分析你所在地区去年发生的交通事故中，车辆直行、左转、右转的情况各占多少？

6. 甲市每年发生的车祸量比乙市少，是否说明甲市驾驶汽车比乙市安全？

7. 一只装有红豆的袋子中混入了绿豆，怎样获取数据可以估计出袋子中绿豆所占的比率？怎样做可以提高估计结论的准确程度？（假定两种豆子的大小、质量相同）

探究・拓展

8. （阅读题）1943 年，美国战时经济部门着手分析缴获的德国装备序列号，比如炸弹、火箭和坦克. 他们根据缴获的德国武器的序列号进行统计分析，从而较为准确地估计出了德国武器生产的速度和拥有量. 下表是战后统计的第二次世界大战期间德国坦克月产量（单位：辆）的预估值和实际值的数据.

时　间	统计估值	情报估值	实际值
1940 年 6 月	169	1 000	122
1941 年 6 月	244	1 550	271
1942 年 8 月	327	1 550	342

为什么统计估值比情报估值更准确呢？

9. 在下列项目中选择适当的问题，对你所收集的数据确定一个标题，明确需要解决的问题，并说明数据的收集方法与数据处理、分析的方法和过程.

(1) 某项体育比赛的成绩记录；

(2) 天气报告——温度、雨量、湿度、暴风雨；

(3) 交通运输记录——事故、运输量、车辆数、停车场的数量；

(4) 商业状况——销售额、价格、银行存款、利率；

(5) 校服的款式、颜色；

(6) 看电视、看电影，借阅图书杂志.

14.2 抽样

抽样调查是获取数据的重要途径，而样本具有随机性，其好坏直接影响着统计分析结论的可靠性. 那么，

- 如何合理地抽取样本？

14.2.1 简单随机抽样

某校要了解高一(2)班学生的视力情况，决定从班级里 45 名学生中抽取 10 名学生进行检查.

- 怎样抽取样本？

1. 抽签法

彩票抽奖时常用的“抽奖机”

为了使锅里任意取出的一勺汤都能代表整个锅里汤的味道，就要充分搅拌，使之均匀. 怎样将高一(2)班的 45 名学生“搅拌”均匀呢？

一个可行的办法是：将这 45 名学生进行编号；再做 45 个编号分别为 1～45 的“签”(也称“阄”)，放入密封的容器或袋中(从外面看不见内部)，并充分搅拌；最后从容器或袋中随机抽取 10 个签，记下 10 个签的编号，与签的编号相同的学生的视力即组成需要的样本. 这种抽样方法称为**抽签法**.

一般地，用抽签法从个体个数为 N 的总体中抽取一个容量为 k 的样本的步骤是：

(1) 将总体中的 N 个个体编号；
(2) 将这 N 个号码写在形状、大小相同的号签上；
(3) 将号签放在同一箱中，并搅拌均匀；
(4) 从箱中每次抽出 1 个号签，连续抽取 k 次；
(5) 将总体中与抽到的号签的编号一致的 k 个个体取出.

用抽签法能使每个个体被抽中的概率相等.

这样就得到一个容量为 k 的样本. 对个体编号时，也可以利用已有的编号. 如从全班学生中抽取样本时，利用学生的学号作为编号；对某场电影的观众进行抽样调查时，利用观众的座位号作为编号等.

抽签法简单易行，适用于总体中个体数不多的情形.

2. 随机数表法

用抽签法抽取样本时，编号的过程有时可以省略(如用已有的编

号等)，但制签的过程就难以省去了，而且制签也比较麻烦. 如何简化制签的过程呢？

一个有效的办法是：制作一个表，这个表由 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数字组成，表中任一位置出现任一数字的概率相同，且不同位置的数字之间是独立的. 这样的表称为**随机数表**，其中的每个数都称为“随机数”. 于是，我们只要按一定的规则从随机数表中选取号码就可以了. 这种抽样方法叫作**随机数表法**.

下面我们用随机数表法求解本节开头的问题.

随机数表见附录.

(1) 对 45 名学生按 01，02，03，…，45 编号；

(2) 在随机数表中随机地确定一个数字，如第 8 行第 29 列的数字 7 作为开始. 为便于说明，我们将附录中的 6～10 行摘录如下：

第 29 列

	16 22 77 94 39	49 54 43 54 82	17 37 93 23 78	87 35 20 96 43	84 26 34 91 64
	84 42 17 53 31	57 24 55 06 88	77 04 74 47 67	21 76 33 50 25	83 92 12 06 76
第 8 行	63 01 63 78 59	16 95 55 67 19	98 10 50 71 75	12 86 73 58 07	44 39 52 38 79
	33 21 12 34 29	78 64 56 07 82	52 42 07 44 38	15 51 00 13 42	99 66 02 79 54
	57 60 86 32 44	09 47 27 96 54	49 17 46 09 62	90 52 84 77 27	08 02 73 43 28

(3) 从数字 7 开始向右读下去，每次读两位，凡不在 01～45 中的数跳过去不读，遇到已经读过的数也跳过去，便可依次得到

12，07，44，39，38，33，21，34，29，42

这 10 个号码，编号为这 10 个号码的学生的视力即组成一个容量为 10 的样本.

当随机地选定开始的数后，读数的方向可以向右，也可以向左、向上、向下等.

用随机数表法抽取样本的步骤是：

例如，抛掷一根大头针，使大头针落在随机数表上，可以从针尖所指的数开始.

(1) 对总体中的个体编号(每个号码位数一致).
(2) 在随机数表中任选一个数.
(3) 从选定的数开始按一定的方向读下去，若得到的号码在编号中，则取出；若得到的号码不在编号中或前面已经取出，则跳过. 如此继续下去，直到取满为止.
(4) 根据选定的号码抽取样本.

一般地，从个体数为 N 的总体中逐步不放回地取出 n 个个体作为样本($n<N$)，如果每个个体都有相同的机会被取到，那么这样的抽样方法称为**简单随机抽样**(simple random sampling).

抽签法和随机数表法都是简单随机抽样.

练 习

1. 一个学生在一次知识竞赛中要回答的 8 道题是这样产生的：从 15 道历史题中随机抽出 3 道，从 20 道地理题中随机抽出 3 道，从 12 道生物题中随机抽出 2 道. 试用抽签法确定这个学生所要回答的 8 道题的序号（历史题编号分别为 1，2，…，15，地理题编号分别为 16，17，…，35，生物题编号分别为 36，37，…，47）.
2. 从 100 件电子产品中抽取一个容量为 25 的样本进行检测，试用随机数表法抽取样本.
3. 假设一个总体有 5 个个体，分别记为 a，b，c，d，e，采用逐个不放回抽取样本的方法，从中抽取一个容量为 2 的样本，这样的样本共有多少种可能？写出全部可能的样本.
4. 谚语云：你不必吃完整牛，才知道肉是老的. 这条谚语的意思是什么？
5. 对于随机数表，下列说法中哪些是正确的？哪些是不正确的？请说明理由.
   (1) 每 40 个数字里，正好有 4 个 0；
   (2) 每一对数字都有 1%的机会是 00；
   (3) 表里面不可能出现像 0000 这样 4 个连续的 0，因为这个模式太不随机了.

链 接

随机数表的制作

随机数表是人们根据需要编制出来的，由 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数字组成，表中每一个数都是用随机方法产生的. 随机数的产生方法主要有抽签法、抛掷骰子法和计算机生成法.

同桌的两位同学相互协作，编制一张随机数表.

(1) 抽签法：用 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数字做 10 个签，放入一个箱中并搅拌均匀，再从箱中每次抽取一个签并记下签的数码后放回箱中，如此重复进行下去即可得到一张随机数表.

如果需要两位数表，那么将所得的各个数码按顺序两两连在一起. 类似地，如果需要三位数表，那么就三三连在一起，如 012，321，249，460，634，105，….

图 14－2－1

(2) 抛掷骰子法：如图 14－2－1，在一个正二十面体的各面写上 0～9 这 10 个数字（相对的两个面上的数字相同），这样就得到一个产生 0～9 的随机数的骰子. 不断抛掷这个骰子，并逐一记下朝上一面（与地面或桌面平行）上的数字，就能按顺序排成一个随机数表.

(3) 计算机生成法：利用随机函数或随机数发生器让计算机自动生成随机数表.

信息技术

● EXCEL

在单元格 A1 内输入随机函数“＝RAND()”，就能得到一个 0 与 1 之间的随机数，拖曳 A1 的填充柄，便可产生不同的随机数（图 14－2－2 中第 A 列）.

如果要生成从 0 到 99 的随机数，且随机数为整数，那么可在单元格内输入“＝INT(100 * RAND())”（图 14－2－2 中第 B 列）.

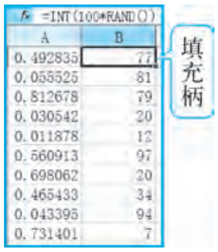


图 14－2－2

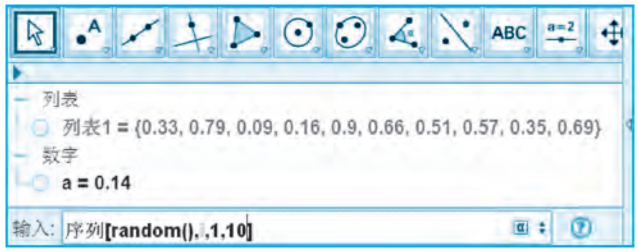


图 14－2－3

● GeoGebra

在输入框中输入“random()”，就能得到一个 0 与 1 之间的随机数. 通过“序列[random()，i，1，10]”可以生成 10 个随机数(图 14－2－3).

14.2.2　分层抽样

某校高一、高二和高三年级分别有学生 1 000 名、800 名和 700 名，为了解全校学生的视力情况，从中抽取容量为 100 的样本.

● 怎样抽样较为合理?

由于不同年级的学生视力状况有一定的差异，不能在 2 500 名学生中随机抽取 100 名学生，也不宜在 3 个年级中平均抽取. 为准确反映客观实际，不仅要使每个个体被抽到的机会相等，而且要注意总体中个体的层次性.

一个有效的办法是：使抽取的样本中各年级学生所占的比与各年级的实际人数占总体人数的比基本相同.

据此，应抽取高一学生 $100\times\dfrac{1\,000}{2\,500}=40$ 名，高二学生 $100\times\dfrac{800}{2\,500}=32$ 名，高三学生 $100\times\dfrac{700}{2\,500}=28$ 名.

一般地，当总体由差异明显的几个部分组成时，为了使样本更客观地反映总体情况，我们常常将总体中的个体按不同的特点分成层次比较分明的几个部分，然后按各个部分在总体中所占的比实施抽样，这种抽样方法叫作**分层抽样**(stratified sampling)，所分成的各个部分称为“层”.

分层抽样的步骤是：

若按比例计算所得的个体数不是整数，可作适当的近似处理.

(1) 将总体按一定标准分层；
(2) 计算各层的个体数与总体的个体数的比；
(3) 按各层的个体数占总体的个体数的比确定各层应抽取的样本容量；
(4) 在每一层进行抽样(可用简单随机抽样).

例 1 某电视台在因特网上就观众对某一节目的喜爱程度进行调查，参加调查的总人数为 12 000 人，其中持各种态度的人数如表 14－2－1 所示. 电视台为进一步了解观众的具体想法和意见，打算从中抽取 60 人进行更为详细的调查，应怎样进行抽样？

表 14－2－1

很喜爱	喜 爱	一 般	不喜爱
2 435	4 567	3 926	1 072

分析 因为总体中个体数较多，所以不宜采用简单随机抽样. 由于四类人群观点各不相同，所以运用分层抽样.

解 可用分层抽样，其总体容量为 12 000.

“很喜爱”占 $\frac{2\,435}{12\,000}$，应取 $60\times\frac{2\,435}{12\,000}\approx 12$ 人；

“喜爱”占 $\frac{4\,567}{12\,000}$，应取 $60\times\frac{4\,567}{12\,000}\approx 23$ 人；

“一般”占 $\frac{3\,926}{12\,000}$，应取 $60\times\frac{3\,926}{12\,000}\approx 20$ 人；

“不喜爱”占 $\frac{1\,072}{12\,000}$，应取 $60\times\frac{1\,072}{12\,000}\approx 5$ 人.

因此，采用分层抽样的方法在“很喜爱”的 2 435 人、“喜爱”的 4 567 人、“一般”的 3 926 人和“不喜爱”的 1 072 人中分别抽取 12 人、23 人、20 人和 5 人.

探 究

某厂家要了解某种新饮品是否受消费者欢迎，需要设计社会调查方案，你能帮厂家做个方案吗？

练 习

1. 某公司生产 3 种型号的轿车，产量分别为 1 200 辆、6 000 辆和 2 000 辆. 为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这 3 种型号的轿车应分别抽取______辆、______辆和______辆.
2. 某工厂生产 A，B，C 3 种不同型号的产品，产量之比为 2∶3∶5. 现用分层抽样的方法抽取 1 个容量为 n 的样本，若样本中 A 种型号的产品有 16 件，则样本容量 $n=$ ________.
3. 某所学校有小学部、初中部和高中部，在校小学生、初中生和高中生的人数之比为 5∶2∶3，且已知初中生有 800 人. 现要从这所学校中抽取 1 个容量为 80 的样本以了解他们对某一问题的看法，应采用什么抽样方法？从小学部、初中部及高中部各抽取多少名学生？总体上看，平均多少名学生中抽取到 1 名学生？
4. 将你所在班级的同学按性别分成两组，分别编号，制成号签，分别放在两个箱子里搅拌均匀，然后按男女生之比各抽出若干个号签，组成两个样本，就他们对某一问题的看法进行调查，以比较男女同学对该问题看法的差异.

从上面的实例可以看到，为了使样本相对总体具有很好的代表性，就必须使得总体中每个个体被抽取的概率相等. 如果一个样本是按这种规则抽取的，那么称这个样本为随机样本.

以上我们学习的2种抽样方法所获取的样本都为随机样本，它们的特点和适用范围可归纳如表14－2－2所示.

表14－2－2

类别	特　点	相互联系	适用范围	共同点
简单随机抽样	从总体中逐个抽取		总体中的个体数相对较少	抽样过程中每个个体被抽到的可能性相同
分层抽样	将总体分成几层，按各层的个体数之比抽取	各层抽样时，可以采用简单随机抽样	总体由差异明显的几部分组成	

例2　下列问题中，采用怎样的抽样方法较为合理？

(1) 从10台冰箱中抽取3台进行质量检查.

(2) 某学校有160名教职工，其中教师120名，行政人员16名，后勤人员24名. 为了了解教职工对学校在校务公开方面的意见，拟抽取一个容量为20的样本.

(3) 某公司1个季度共有22 984份运货单，这些运货单上的运费相差很大. 现要对这个季度的运货单进行审计，从中抽取一定量的运货单加以审核.

分析　(1) 总体容量比较小，用抽签法或随机数表法都很方便.

(2) 由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异较大，故应采用分层抽样.

(3) 由于运费相差很大，故应采用分层抽样.

解　(1) 用抽签法或随机数表法.

(2) 用分层抽样. 总体容量为160，故样本中教师人数应为$20\times\frac{120}{160}=15$(名)，行政人员人数应为$20\times\frac{16}{160}=2$(名)，后勤人员人数应为$20\times\frac{24}{160}=3$(名).

(3) 用分层抽样. 根据运费的多少进行分层，然后按照各层运货单的数量比进行抽样.

练　习

1. 某科研机构由科技人员、行政人员和后勤职工3种不同类型的人员组成，现要抽取1个容量为45的样本进行调查. 已知科技人员共有60人，抽入样本的有20人，且行政人员与后勤职工的人数之比为2∶3，那么此机构的总人数、行政人员、后勤职工人数分别为多少？

2. 一个单位有职工 160 人，其中业务人员 96 人，管理人员 40 人，后勤人员 24 人. 为了了解职工的某种情况，要从中抽取 1 个容量为 20 的样本，按下述 2 种方法抽取：
① 将 160 人按 1～160 编号，用白纸做成有 1～160 号的签放入箱内搅匀，然后从中抽取 20 个签，与签号相同的 20 个人被选出；
② 按 20∶160＝1∶8 的比例，从业务人员中抽取 12 人，从管理人员中抽取 5 人，从后勤人员中抽取 3 人，都用随机数表法从各类人员中抽取所需的人数，他们合在一起恰好抽取 20 人.
上述 2 种抽样中，① 采用的抽样方法是__________，② 采用的抽样方法是__________.

习题 14.2

感受·理解

1. 为了解某市 800 家企业的管理情况，拟抽取 40 家企业作为样本. 这800 家企业中有中外合资企业 160 家，私营企业 320 家，国有企业 240 家，其他性质的企业 80 家. 如何抽样较合理?
2. 用分层抽样的方法从某校学生中抽取 1 个容量为 45 的样本，其中高一年级抽 20 人，高三年级抽 10 人. 已知该校高二年级共有学生 300 人，求该校学生总数.
3. 某市的 4 个区共有 20 000 名学生，且 4 个区的学生人数之比为 3∶2.8∶2.2∶2. 如果要用分层抽样的方法从所有学生中抽取 1 个容量为 200 的样本，那么在这 4 个区中分别应抽取多少名学生?
4. 用适当的方法对你校高一学生的体重和身高进行抽样调查，并将数据收集整理，以备进一步分析.
5. 试设计一份问卷，了解班上同学是否知道父母的生日.
6. 某总体的容量为 100，其中带有标记的有 60 个. 现用简单随机抽样的方法从中抽出 1 个容量为 20 的样本，试估计抽取到带有标记的个体个数.

思考·运用

7. 用适当的方法，对你所在学校的学生进行抽样调查，将其父亲、母亲的年龄收集整理，并用表格表示出来.
8. 某校高一年级 500 名学生中，血型为 O 型的有 200 人，A 型的有 125 人，B 型的有 125 人，AB 型的有 50 人. 为了研究血型与色弱之间的关系，要从中抽取 1 个容量为 40 的样本，应如何抽样? 写出 AB 血型样本的抽样过程.
9. 举例说明各种抽样方法在实际生活中的应用.

探究·拓展

10. 请你就中学生普遍关心的某一问题，通过网上调查和对本校学生进行抽样调查(有条件的话可以扩大调查范围)，了解学生对此问题的看法，并对两种调查方法所得结果进行分析比较.

14.3 统计图表

要得到合理、科学的统计推断，需要对获得的数据进行统计分析. 为此，就要将这些数据进行数学表示，并运用数学知识、方法加以研究.

● 怎样用图表表示和分析数据呢?

14.3.1 扇形统计图、折线统计图、频数直方图

我们已经知道，可以用统计图表表示数据，比如扇形统计图（饼图）、折线统计图、频数直方图等.

● 初中阶段学习的这些统计图表各有什么特点?

例 1 据《中国统计年鉴(2015)》可知，1990 年、2000 年和 2014 年我国人口年龄分布情况（百分比）如表 14-3-1 所示.

表 14-3-1

年龄	年份		
	1990	2000	2014
0～14 岁	27.7%	22.9%	16.5%
15～64 岁	66.7%	70.1%	73.4%
65 岁及以上	5.6%	7.0%	10.1%

(1) 试用扇形统计图表示 2014 年三个年龄段人口所占比;

(2) 试用折线统计图表示 1990 年、2000 年和 2014 年 65 岁及以上人口占比.

解 (1) 2014 年 0～14 岁、15～64 岁和 65 岁及以上人口占比分别为 16.5%、73.4%和 10.1%，用扇形统计图表示如图 14-3-1 所示.

图表的最大作用在于它能使我们发现一些我们预料之外的内容.

——约翰·图基（John Tukey）

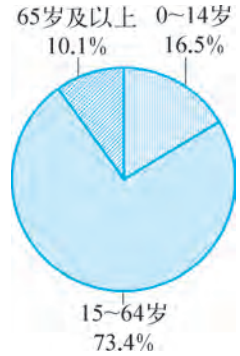


图 14-3-1

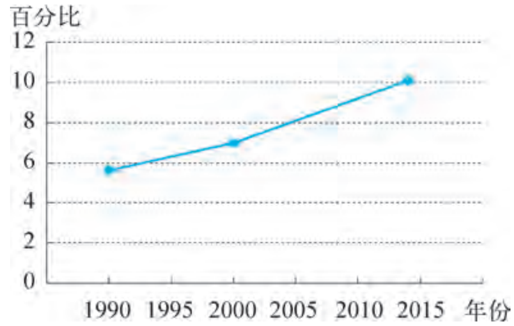


图 14-3-2

（2）1990 年、2000 年和 2014 年 65 岁及以上人口占比的折线统计图表示如图 14－3－2 所示.

扇形统计图能够直观地反映各个类别在总体中所占的比例，折线统计图可以看出变化趋势.

例 2 某公司下属 40 个企业的年度销售收入数据(单位：万元)如下：

152	124	129	116	100	103	92	95	127	104
105	119	114	115	87	103	118	142	135	125
117	108	105	110	107	137	120	136	117	108
97	88	123	115	119	138	112	146	113	126

某企业的年度销售收入为 127 万元，该企业的业绩是好还是差？

还可以通过与销售收入的平均水平进行比较来判断，见 14.4.1节.

解 这就要看 127 在全部 40 个数据中所处的位置. 为此，可以将这 40 个数据按每 10(万)为一档(称为组距)，用频率分布表表示(表 14－3－2).

表 14－3－2

分组	频数	频率
[80，90)	2	0.05
[90，100)	3	0.075
[100，110)	9	0.225
[110，120)	12	0.3
[120，130)	7	0.175
[130，140)	4	0.1
[140，150)	2	0.05
[150，160]	1	0.025
合计	40	1

从频率分布表可以看出，127 位于[120，130)一档，此档及比它高的档中的数据共 14 个，而低于这一档的数据有 26 个，故年销售收入为 127 万元的企业业绩还是比较好的.

我们还可以将此表“直观化”，作出频数直方图(图 14－3－3).

直方图(histogram)一词由英国统计学家 Karl Pearson 于 1895 年首次使用.

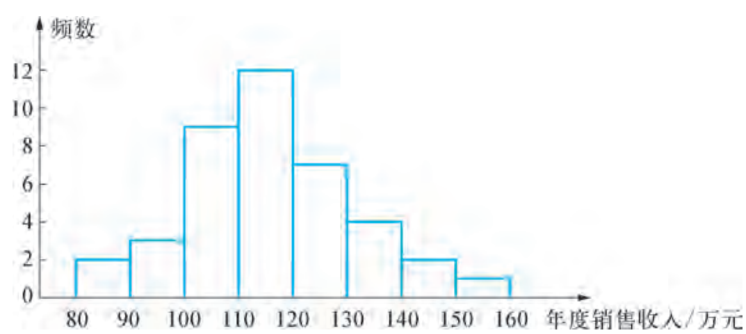


图 14－3－3

频数直方图既能够反映分布状况，又可以表示变化趋势.

练　习

1. 下面是从某镇抽取的 50 户家庭一年中 12 个月的用电量的统计图表，试根据图表说明：

(1) 一年中这 50 户家庭月用电高峰是哪几个月？用电低谷是哪几个月？并解释可能的原因.

(2) 有几个月用电总量为 7 000 度？

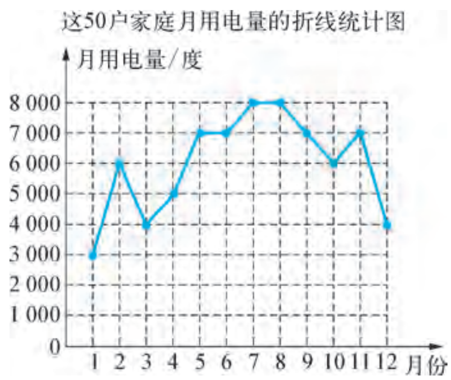


图 1

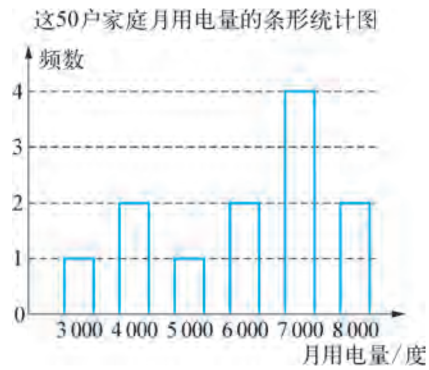


图 2

（第 1 题）

2. 2010 年我国进行了第六次人口普查，2011 年 4 月国家统计局发布了此次普查的主要数据. 国家统计局的公告中有下面两张图.

(1) 图 1 是我们学习的图表中的哪一种？此图反映怎样的信息？

(2) 根据这两张图，给出你的分析结论.

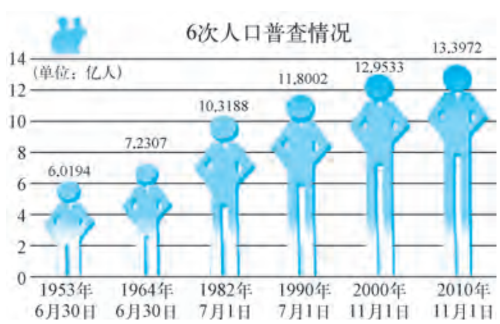


图 1

图 2

（第 2 题）

3. 有人指责国外某高校招生有歧视女生的倾向，指责者用了近几年该校电机工程和英文两个专业的录取数据.

录取情况	性　　别	
	男生	女生
录取	35	20
未录取	45	40
申报人数	80	60

而该高校认为这种指责没有依据，他们用了下表表示这组数据.

录取情况	电机工程		英　文	
	男生	女生	男生	女生
录取	30	10	5	10
未录取	30	10	15	30
申报人数	60	20	20	40

指责者与学校都是用频率阐述理由的. 你能分别站在指责者和学校的角度阐述理由吗？

14.3.2　频率直方图

在前面的频数直方图(图 14－3－3)中，之所以取相等的组距，是为了使频数与相应的长方形面积成比例. 比如，其他各组不变，将最后三组合成一组，则该组上的频数为 7，这时得到图 14－3－4.

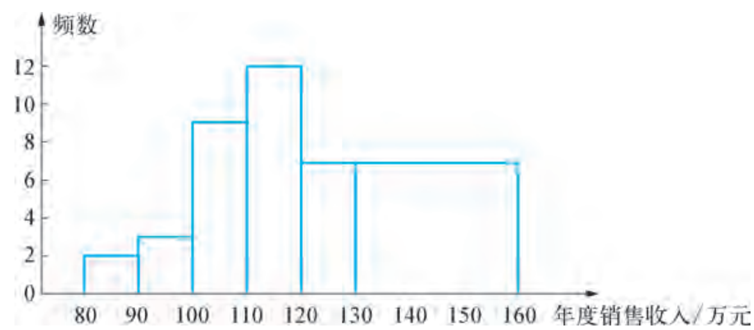


图 14－3－4

这个图形容易给人造成错觉：在[130，160]这个区间上的矩形占有的区域面积较大，其中频数最多.

● 怎样避免这种误解？

为了避免出现这一情况，使得尽管分组的组距不一致，也能保证面积占比与频率占比相一致，通常用下面的方法作直方图：

把横轴均分成若干段，每一段对应的长度称为组距，然后以此段为底作矩形，它的高等于该组的$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$，这样得出一系列的矩形，每个矩形的面积恰好是该组的频率，这些矩形就构成了直方图(图14－3－5).

我们将这种直方图称为**频率直方图**(frequency histogram).

如图 14－3－6，将频率直方图中各个矩形的上底边的中点顺次连接起来，并将两边端点向外延伸半个组距，就得到**频率折线图**(frequency line chart)，简称折线图.

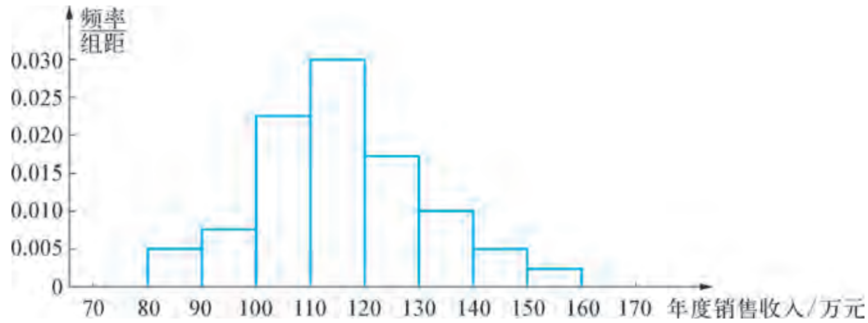


图 14－3－5

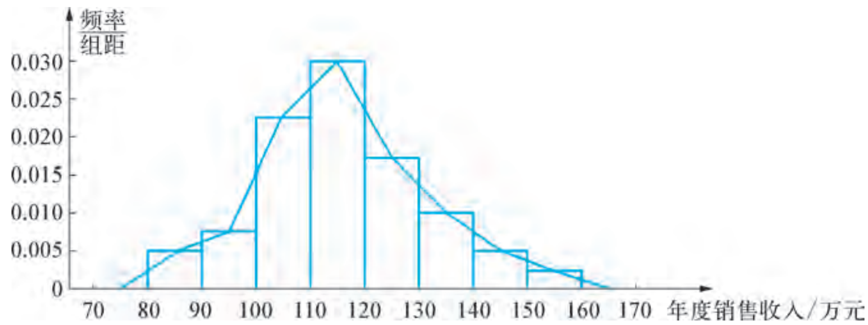


图 14－3－6

例 3　为了解一大片经济林的生长情况，随机测量其中 100 株树木的底部周长，得到如表 14－3－3 所示的数据(单位：cm).

表 14－3－3

135	98	102	110	99	121	110	96	100	103
125	97	117	113	110	92	102	109	104	112
109	124	87	131	97	102	123	104	104	128
105	123	111	103	105	92	114	108	104	102
129	126	97	100	115	111	106	117	104	109
111	89	110	121	80	120	121	104	108	118
129	99	90	99	121	123	107	111	91	100
99	101	116	97	102	108	101	95	107	101
102	108	117	99	118	106	119	97	126	108
123	119	98	121	101	113	102	103	104	108

(1) 编制频率分布表；

(2) 绘制频率直方图；

(3) 估计该片经济林中底部周长小于 100 cm 的树木约占多少，底部周长不小于 120 cm 的树木约占多少.

解　(1) 从表中可以看出，这组数据的最大值为 135，最小值为 80，故全距为 55，可将其分为 11 组，组距为 5.

从第 1 组[80，85)开始，将各组的频数、频率和$\dfrac{频率}{组距}$填入表

14－3－4 中.

表 14－3－4

分　组	频　数	频　率	$\frac{频率}{组距}$
[80，85)	1	0.01	0.002
[85，90)	2	0.02	0.004
[90，95)	4	0.04	0.008
[95，100)	14	0.14	0.028
[100，105)	24	0.24	0.048
[105，110)	15	0.15	0.030
[110，115)	12	0.12	0.024
[115，120)	9	0.09	0.018
[120，125)	11	0.11	0.022
[125，130)	6	0.06	0.012
[130，135]	2	0.02	0.004
合　计	100	1	0.2

(2) 这组数据的频率直方图如图 14－3－7 所示.

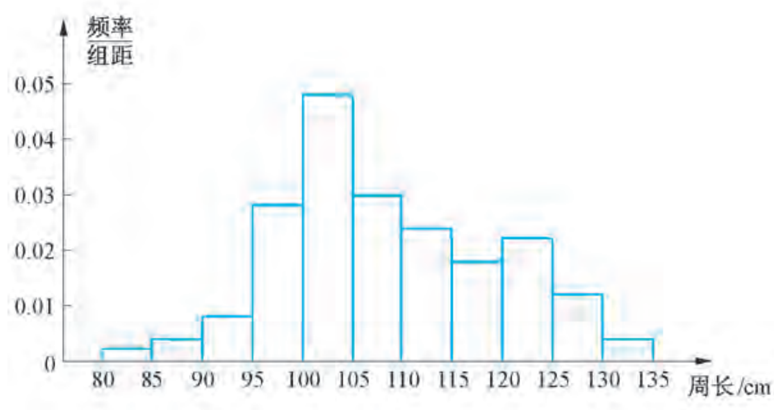


图 14－3－7

(3) 从频率分布表可以看出，该样本中小于 100 的频率为 $0.01+0.02+0.04+0.14=0.21$，不小于 120 的频率为 $0.11+0.06+0.02=0.19$，故可估计该片经济林中底部周长小于 100 cm 的树木约占 21%，底部周长不小于 120 cm 的树木约占 19%.

例 4　对于下列问题，应该收集哪些数据？选择怎样的统计图表示更为合适？

(1) 分析去年全年某商品价格的变化情况；

(2) 分析某举重选手的整体水平(包括成绩的高低与发挥的稳定性).

解　(1) 进行市场调查,获取这种商品去年每个月各天的价格,并算出月平均价格,再将 12 个月的月平均价格用折线统计图表示,从中可看出变化趋势.

(2) 获取该选手最近各次比赛的成绩,作出频率直方图,从中可以看出整体水平、稳定程度.

练　习

1. 分别作出习题 14.2 第 4 题中两组数据的频率直方图.
2. 一组数据的频率直方图中,所有小长方形的面积总和为________.
3. 为了了解一批灯泡(共 10 000 只)的使用寿命,从中抽取了 100 只进行测试,其使用寿命(单位: h)如下表:

使用寿命	[500, 600)	[600, 700)	[700, 800)	[800, 900)	[900, 1 000)
只　数	1	4	8	15	20
使用寿命	[1 000, 1 100)	[1 100, 1 200)	[1 200, 1 300)	[1 300, 1 400)	[1 400, 1 500]
只　数	24	18	7	2	1

(1) 制作频率分布表;

(2) 绘制频率直方图和折线图;

(3) 根据样本的频率分布,估计使用寿命不低于 1 000 h 的灯泡约有多少只.

4. 查阅相关资料,用适当方式表示我国人均寿命的变化情况.

习题 14.3

感受·理解

1. 某射手在同一条件下射击 30 次,结果为: 6 环及 6 环以下 2 次,7 环 6 次,8 环 7 次,9 环 10 次,10 环 5 次.

(1) 列出频率分布表;

(2) 估计射手击中 7～9 环的可能性.

2. 从大量棉花中抽取 50 根棉花纤维,纤维长度(单位: mm)的数据分组及各组的频数如下: [22.5, 25.5), 3; [25.5, 28.5), 8; [28.5, 31.5), 9; [31.5, 34.5), 11; [34.5, 37.5), 10; [37.5, 40.5), 5; [40.5, 43.5], 4.

(1) 列出样本的频率分布表;

(2) 画出频率直方图和折线图;

(3) 估计纤维长度小于 36 的百分比.

3. 为了检测某种产品的质量,抽取了 1 个容量为 100 的样本,数据的分组及各组频数如下表:

分　　组	频　　数	频　　率
[10.75, 10.85)	3	
[10.85, 10.95)	9	
[10.95, 11.05)	13	
[11.05, 11.15)	16	
[11.15, 11.25)	26	

（续表）

分　　组	频　　数	频　　率
[11.25，11.35)	20	
[11.35，11.45)	7	
[11.45，11.55)	4	
[11.55，11.65]	2	
合　计	100	

(1) 完成上面的频率分布表；

(2) 画出频率直方图；

(3) 估计数据落在[10.95，11.35)范围内的可能性.

4. 为了检测某种产品的质量，抽取了 1 个容量为 40 的样本，检测结果为一等品 8 件，二等品 18 件，三等品 12 件，次品 2 件.

(1) 列出样本的频率分布表；

(2) 画出扇形统计图；

(3) 估计这种产品为二等品或三等品的百分率.

思考・运用

5. 从规定尺寸为 25.40 mm 的一堆产品中任取 100 件，测得它们的实际尺寸(单位：mm)如下，试以 0.030 为组距，列出样本频率分布表，作出频率直方图、折线统计图.

25.39	25.36	25.34	25.42	25.45	25.38	25.39	25.42	25.47	25.35
25.41	25.43	25.44	25.48	25.45	25.43	25.46	25.40	25.51	25.45
25.40	25.39	25.41	25.36	25.38	25.31	25.56	25.43	25.40	25.38
25.37	25.44	25.33	25.46	25.40	25.49	25.34	25.42	25.50	25.37
25.35	25.32	25.45	25.40	25.27	25.43	25.54	25.39	25.45	25.43
25.40	25.43	25.44	25.41	25.53	25.37	25.38	25.24	25.44	25.40
25.36	25.42	25.39	25.46	25.38	25.35	25.31	25.34	25.40	25.36
25.41	25.32	25.38	25.42	25.40	25.33	25.37	25.41	25.49	25.35
25.47	25.34	25.30	25.39	25.36	25.46	25.29	25.40	25.37	25.33
25.40	25.35	25.41	25.37	25.47	25.39	25.42	25.47	25.38	25.39

6. 选一篇英语短文，从它的第一个单词起直到最后一个单词结束，数出各个单词所含字母的个数，并就字母个数列出频率分布表，画出频率直方图；也可从电脑的文档里或网上找一篇短文，用计算机查找的方法进行统计.

探究・拓展

7. (操作题)操作 1：将 1 000 粒黑芝麻与 1 000 粒白芝麻放入一个容器中，并搅拌均匀，再用小杯从容器中取出一杯芝麻，计算黑芝麻的频率.

操作 2：将 1 500 粒黑芝麻与 500 粒白芝麻放入一个容器中，并搅拌均匀，再用小杯从容器中取出一杯芝麻，计算黑芝麻的频率.

通过两次操作，你是否有所发现？若有一袋芝麻，由黑、白两种芝麻混合而成，你用什么方法估计其中黑芝麻所占的百分比？

14.4 用样本估计总体

我们知道，统计学的基本思想是：抽取样本，运用样本数据估计总体的状况. 那么，

● 如何运用样本估计总体?

14.4.1 用样本估计总体的集中趋势参数

初中阶段我们已经学习了用样本平均数作为"代表值"估计总体水平.

● 如何合理选择样本数据的"代表值"?

1. 平均数

在 14.3 节的例 2 中，为了评价"127 万元"的销售业绩的高低，还可以将其与销售收入的平均水平进行比较. 该公司各企业的平均销售收入为 116.175 万元，127 万元大于平均值，所以，可以认为该企业的销售业绩较好.

一般地，我们把总体中所有数据的算术平均数称为总体的**均值**(mean)，它通常可以代表总体的水平. 在进行统计分析时，我们经常用样本平均数估计总体均值.

平均数为什么能够代表整个样本? 我们以由实验数据估计其理想近似值为例加以说明.

n 个实数 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的和简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$，"$\sum$"读作 sigma ['sigmə].

处理实验数据的原则是使近似值与实验数据越接近越好. 设这个近似值为 x，它与 n 个实验数据 a_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的离差分别为 $x-a_1$，$x-a_2$，$x-a_3$，…，$x-a_n$. 由于上述离差有正有负，故不宜直接相加. 可以考虑离差的平方和，即

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2.$$

因为

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$
$$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

所以当 $x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 时，离差的平方和最小，故可用 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 作为表示这个量的理想近似值，称为这 n 个数据 a_1，a_2，…，a_n 的**平均数**(average)，一般记为

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

例 1 某校高一年级的甲、乙两个班级(均为 50 人)的语文测试成绩(总分:150 分)如下,试确定这次考试中,哪个班的语文成绩更好一些.

甲班

112	86	106	84	100	105	98	102	94	107
87	112	94	94	99	90	120	98	95	119
108	100	96	115	111	104	95	108	111	105
104	107	119	107	93	102	98	112	112	99
92	102	93	84	94	94	100	90	84	114

乙班

116	95	109	96	106	98	108	99	110	103
94	98	105	101	115	104	112	101	113	96
108	100	110	98	107	87	108	106	103	97
107	106	111	121	97	107	114	122	101	107
107	111	114	106	104	104	95	111	111	110

分析 我们可用一组数据的平均数衡量这组数据的集中趋势,因此,分别求出甲、乙两个班级的平均分即可.

解 用计算器分别求出甲班的平均分为 101.1 分,乙班的平均分约为105.4 分,故这次考试乙班成绩要好于甲班.

例 2 表 14-4-1 是某校学生日睡眠时间(单位:h)的抽样频率分布表,试估计该校学生的平均日睡眠时间.

表 14-4-1

睡眠时间	人数	频率
[6, 6.5)	5	0.05
[6.5, 7)	17	0.17
[7, 7.5)	33	0.33
[7.5, 8)	37	0.37
[8, 8.5)	6	0.06
[8.5, 9]	2	0.02
合计	100	1

是否还有其他的估算方法?

分析 要确定这 100 名学生的平均日睡眠时间,就必须计算其总睡眠时间.由于每组中的个体日睡眠时间只是一个范围,所以可用各组区间中点的数值(称为“组中值”)近似地表示.

解法 1 总睡眠时间约为

$$\begin{aligned}&6.25\times5+6.75\times17+7.25\times33+7.75\times37+\\&\quad 8.25\times6+8.75\times2\\&=739(\text{h}).\end{aligned}$$

故平均日睡眠时间约为 7.39 h.

解法 2　求组中值与对应频率之积的和.

$$\begin{aligned}&6.25\times0.05+6.75\times0.17+7.25\times0.33+7.75\times\\&\quad 0.37+8.25\times0.06+8.75\times0.02\\&=7.39(\text{h}).\end{aligned}$$

答　估计该校学生的平均日睡眠时间约为 7.39 h.

一般地，若取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的频率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，则其平均数为 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

例 3　某地统计部门为了解企业员工的收入状况，决定进行抽样调查. 估计该地共有产业工人大约 50 000 人，企业管理人员约1 000 人，工人与管理人员的月工资收入差异比较大. 该地统计部门用分层抽样的方法抽取产业工人 500 人，企业管理人员 10 人. 被抽取的 500 名产业工人的人均月工资为 5 328 元，10 名企业管理人员的人均月工资为 8 426 元，试估计这个地区企业员工的人均月工资.

解　被抽取的 500 名产业工人的人均月工资为 5 328 元，故这 500 名产业工人的月工资总额为(5 328×500)元. 同理，被抽取的 10 名企业管理人员的月工资总额为(8 426×10)元，所以被抽取的这 510 名企业员工的月工资总额为(5 328×500+8 426×10)元.

因此，被抽取的这 510 名企业员工的人均月工资(即样本的平均数)为

$$\frac{5\,328\times500+8\,426\times10}{510}\approx5\,389(\text{元}).$$

答　估计该地区企业员工的人均月工资约为 5 389 元.

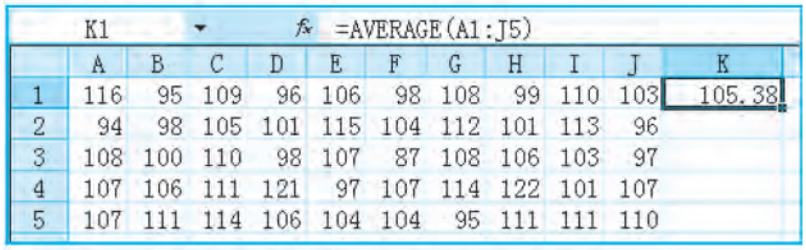
如果将总体分为 k 层，第 j 层抽取的样本为 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn_j}$，第 j 层的样本量为 n_j，样本平均数为 $\overline{x}_j$，$j=1, 2, \cdots, k$. 记 $\sum\limits_{j=1}^{k}n_j=n$，则所有数据的样本平均数为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_j}x_{jt}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(n_j\overline{x}_j).$$

信息技术

在 Excel 中，函数“AVERAGE()”可以直接用于计算给定数据的平均数. 在例 1 中，如将乙班的成绩输入工作表中 A1：J5 区域后，在

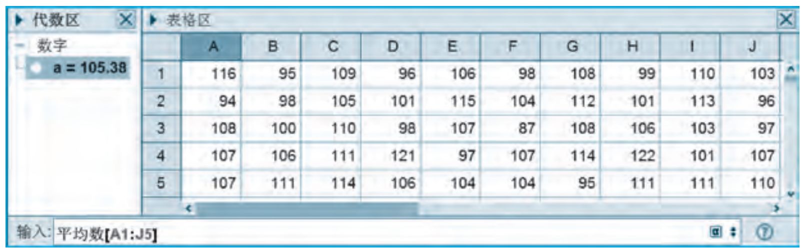
某空白单元格中输入“＝AVERAGE(A1：J5)”，即得乙班的平均分为 105.38(如图14－4－1).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	116	95	109	96	106	98	108	99	110	103	105.38
2	94	98	105	101	115	104	112	101	113	96	
3	108	100	110	98	107	87	108	106	103	97	
4	107	106	111	121	97	107	114	122	101	107	
5	107	111	114	106	104	104	95	111	111	110	

图 14－4－1

在 GGB 中，可以对表格区域中的数据像 Excel 那样计算平均数，还可以在输入框中直接输入“平均数[A1：J5]”得到平均数(图14－4－2).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	116	95	109	96	106	98	108	99	110	103
2	94	98	105	101	115	104	112	101	113	96
3	108	100	110	98	107	87	108	106	103	97
4	107	106	111	121	97	107	114	122	101	107
5	107	111	114	106	104	104	95	111	111	110

图 14－4－2

练　习

1. 从某校全体高考考生中任意抽取 20 名考生，其数学成绩(总分：150 分)分别为 102，105，131，95，83，121，140，100，97，96，95，121，124，135，106，109，110，101，98，97，试估计该校全体考生数学的平均成绩.

2. 下表是一个容量为 20 的样本数据分组后的频数分布表. 若利用组中值近似计算本组数据的平均数 $\bar{a}$，则 $\bar{a}=$________.

数 据	[12.5，15.5)	[15.5，18.5)	[18.5，21.5)	[21.5，24.5]
频 数	3	3	6	8

3. 有一份共 3 道题的测试卷，每道题 1 分. 全班得 3 分、2 分、1 分和 0 分的学生所占比例分别为 30%，50%，10%和 10%.

(1) 若全班共 10 人，则平均分是多少?

(2) 若全班共 20 人，则平均分是多少?

(3) 如果该班人数未知，那么能求出该班的平均分吗?

4. 某车间四个生产小组生产同种产品，其日产量相关资料如下：

组　　别	工人数/人	日产量/件
1	20	300
2	25	280
3	30	310
4	25	320

(1) 计算平均每个小组的日产量；

(2) 计算平均每个工人的日产量.

2. 众数与中位数

某超市上个月出售的牙膏(品牌、销售量)的相关数据如表 14－4－2 所示.

能按 5 种品牌销量的平均值作为下次各种品牌牙膏的进货量吗?

表 14－4－2

牙膏品牌编号	销售量
1	65
2	70
3	280
4	547
5	102

对于这组数据,超市更关心怎样的信息?

如果分别列出每支卖出的牙膏的品牌编号,则出现次数最多的是“4”(图 14－4－3),也就是说 4 号牙膏最受消费者欢迎. 所以下次进货时就要多进 4 号牙膏. 在这里,5 种品牌的牙膏的平均销售量对经营决策已经没有实际意义了.

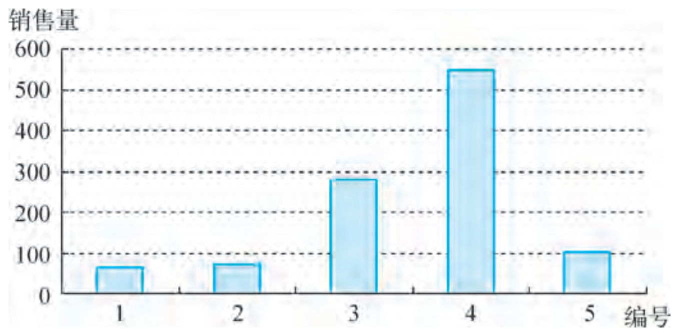


图 14－4－3

一般地,我们将一组数据中出现次数最多的那个数据叫作该组数据的**众数**(mode). 众数是一种刻画数据集中趋势的度量值.

下面是某篮球队 11 名队员一个赛季的得分数据:

108　92　42　47　343　32　50　71　51　83　112

用怎样的一个数来代表该篮球队的得分“水平”呢? 因为有 343 这个“极端”值,用平均数不恰当. 根据众数的定义及特点知,也不适宜采用众数,因为这里 11 个数据互不相同,并没有哪个数据可以作为众数. 如果将这 11 个数据按从小到大的顺序重新排列,得

32　42　47　50　51　71　83　92　108　112　343

其中正中间的一个数值为 71,其两边各有 5 个数. 我们将 71 称为这组数据的**中位数**(median). 中位数也是一种刻画数据集中趋势的度量值.

一般地,将一组数据按照从小到大的顺序排成一列,如果数据的个数为奇数,那么排在正中间的数据就是这组数据的中位数;如果数据的个数为偶数,那么,排在正中间的两个数据的平均数即为这组数据的中位数.

例 4 某校高一(2)班的 6 名学生的体重分别为

47, 49, 52, 57, 60, 71.

(1) 用哪种统计量代表这 6 名学生的体重比较合适?

(2) 这 6 个数据的中位数是多少?

解 (1) 因为有“71”这一个“极端值”,所以不宜使用平均数. 又各个数据均不相同,因而这组数据没有众数. 由于极端值的大小对中位数的位置并没有影响,故用中位数作为这组数据的代表较为合适.

(2) 这 6 个数据的中位数是$\frac{52+57}{2}=54.5$.

例 5 下面的说法是否恰当? 为什么?

(1) 5 人中有 4 名学生,1 名教师,其中 3 名学生 16 岁,1 名学生 18 岁,1 名教师 59 岁,用他们的平均年龄 25 岁作为他们年龄的代表值.

(2) 某服装店生产一种男式运动衫,店里决定用顾客购买的这种运动衫尺码的平均数作为生产的标准尺码(即生产的这种运动衫中大多数为该尺码).

(3) 在一次满分为 30 分的小测试中,某小组的成绩是 5 个 20 分,3 个 26 分,1 个 29 分. 采用中位数 20 作为这组数据的代表值.

解 (1) 不恰当. 因为教师的年龄与学生的年龄差异太大,明显地拉高了平均数. 此时平均数没有代表性.

(2) 不恰当. 销售商品的型号应该以众数为最多进货或生产的标准,平均数无太大的参考价值.

(3) 由于测试的分数分布很特殊,中位数即为最小数,用中位数来代表小组的水平不恰当.

练　习

1. 某轮胎厂为检验轮胎的使用寿命,抽取一个容量为 24 的样本,测得结果如下表:

使用寿命/km	轮胎数
95 000	1
88 000	1
56 000	6
48 000	8
40 000	8

为了说明该厂生产的轮胎的平均寿命，选用哪个代表值最合适？为什么？

2. 某高校新生入学时进行了英语分班考试，以便确定哪些人编入 A 班，哪些人编入 B 班.

(1) 如果得到的分数是 66，67，67，69，70，70，72，73，74，76，85，86，88，90，92，94，97，98，99，那么选择哪个代表值作为编班的标准最好？

(2) 如果得到的分数是 62，63，66，66，66，66，67，68，68，69，70，87，89，90，92，95，98，98，99，100，那么选择哪个代表值作为编班的标准最好？

3. 张老师今年 40 岁，想报一个武术健身俱乐部. 他看到一个俱乐部的信息，其会员的平均年龄为 38 岁，他觉得比较适合自己. 可报名后发现，该俱乐部成员大多是 20 多岁的小伙子，另有几个 60 岁左右的武术“祖师爷”. 你认为张老师的选择是否适当？为什么？

4. 甲、乙两个公司各有 20 名职工，下面是两个公司的职工工资状况：

公司甲	有 15 名职工， 每人的工资都是 6 万元	有 5 名职工， 每人的工资都是 3 万元
公司乙	有 5 名职工， 每人的工资都是 7 万元	有 15 名职工， 每人的工资都是 4 万元

试比较这两个公司职工的平均工资.

5. 一个射击选手连续射击 20 次，成绩如下：

成绩/环数	10	9	8	7
次　数	3	8	7	2

求其射击成绩的中位数和众数.

14.4.2　用样本估计总体的离散程度参数

有甲、乙两种钢筋，现从中各抽取一个样本（如表 14－4－3）检查它们的抗拉强度（单位：kg/mm²），通过计算发现，两个样本的平均数均为 125 kg/mm².

表 14－4－3

甲	110	120	130	125	120	125	135	125	135	125
乙	115	100	125	130	115	125	125	145	125	145

● 哪种钢筋的质量较好？

将甲、乙两个样本数据分别标在数轴上，如图 14－4－4 所示.

这样的图，也称为点线图(lineplot).

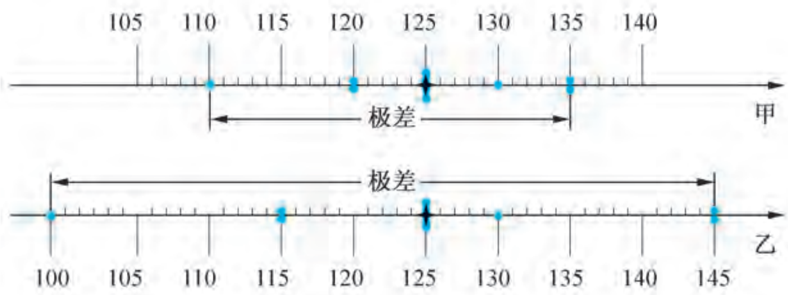


图 14－4－4

从图 14－4－4 中可以看出，乙样本的最小值 100 低于甲样本的最小值 110，乙样本的最大值 145 高于甲样本的最大值 135，这说明乙种钢筋没有甲种钢筋的抗拉强度稳定.

我们把一组数据的最大值与最小值的差称为**极差**(range). 从图 14－4－4中可看出，乙的极差较大，数据点较分散；甲的极差小，数据点较集中. 这说明甲比乙稳定. 运用极差对两组数据进行比较，操作简单方便，但当两组数据的离散程度差异不大时，就不容易得出结论.

我们还可以考虑每一抗拉强度与平均抗拉强度的离差. 结合上节有关离差的讨论，每一抗拉强度与平均抗拉强度的离差的平方和越小，稳定性就越高. 由于两组数据的容量可能不同，因此应将上述平方和除以数据的个数，我们把由此所得的值称为这组数据的**方差**(variance).

标准差是样本数据到平均数的一种平均距离.

因为方差与原始数据的单位不同，且平方后可能夸大了离差的程度，所以我们将方差的算术平方根称为这组数据的**标准差**(standard deviation).

一般地，

设一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n，其平均数为$\overline{x}$，则称

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

为这个样本的**方差**，其算术平方根 $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ 为样本的**标准差**，分别简称**样本方差**、**样本标准差**.

根据上述方差的计算公式可以算得甲、乙两个样本的方差分别为 50 和 165，故可以认为甲种钢筋的质量好于乙种钢筋.

极差、方差、标准差都是刻画数据离散程度的度量值.

例 6 甲、乙两种水稻试验品种连续 5 年的平均单位面积产量(单位：t/hm²)如表 14－4－4 所示，试根据这组数据估计哪一种水稻品

种的产量比较稳定.

表 14-4-4

品　种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

解　甲品种的样本平均数为 10,样本方差为

$$[(9.8-10)^2+(9.9-10)^2+(10.1-10)^2+(10-10)^2+(10.2-10)^2]\div 5=0.02.$$

乙品种的样本平均数也为 10,样本方差为

$$[(9.4-10)^2+(10.3-10)^2+(10.8-10)^2+(9.7-10)^2+(9.8-10)^2]\div 5=0.244.$$

因为 $0.244>0.02$,所以由这组数据可以认为甲种水稻的产量比较稳定.

例 7　为了保护学生的视力,教室内的日光灯在使用一段时间后必须更换.已知某校使用的 100 只日光灯在必须换掉前的使用天数如表 14-4-5 所示,试估计这种日光灯的平均使用寿命和标准差.

表 14-4-5

使用天数	451～480	481～510	511～540	541～570	571～600	601～630	631～660	661～690
日光灯数	1	11	18	20	25	16	7	2

分析　用每一区间的组中值作为相应日光灯的使用寿命,再求平均使用寿命.

解　各区间的组中值分别为 465.5,495.5,525.5,555.5,585.5,615.5,645.5,675.5,由此算得平均数约为

$$465.5\times 1\%+495.5\times 11\%+525.5\times 18\%+555.5\times 20\%+585.5\times 25\%+615.5\times 16\%+645.5\times 7\%+675.5\times 2\%=568.4\approx 568(\text{天}).$$

这些组中值的方差为

$$\frac{1}{100}\times[1\times(465.5-568.4)^2+11\times(495.5-568.4)^2+18\times(525.5-568.4)^2+20\times(555.5-568.4)^2+25\times(585.5-568.4)^2+16\times(615.5-568.4)^2+7\times(645.5-568.4)^2+2\times(675.5-568.4)^2]$$

$= 2\,128.59$(天^2).

故所求的标准差为$\sqrt{2\,128.59} \approx 46$(天).

答 估计这种日光灯的平均使用寿命约为 568 天，标准差约为 46 天.

一般地，若取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的频率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，则其方差为 $p_1(x_1-\overline{x})^2+p_2(x_2-\overline{x})^2+\cdots+p_n(x_n-\overline{x})^2$.

从例 7 可以看出，样本数据中在[568−46×2，568+46×2]外的只有 3 个，也就是说，区间$[\overline{x}-2s, \overline{x}+2s]$几乎包含了所有数据.

例 8 某校从在校学生中，用分层抽样的方法抽取男生 32 人，女生 18 人. 测得他们的身高后，计算得到男生身高的样本平均数为 173.5 cm，方差为 17 cm^2；女生身高的样本平均数为 163.83 cm，方差为 30.03 cm^2. 求所有 50 个身高数据的样本方差.

解 记男生样本为 $y_1, y_2, \cdots, y_{32}$，平均数为$\overline{y}_{男}$，方差为 $s^2_{男}$；记女生样本为 $z_1, z_2, \cdots, z_{18}$，平均数为$\overline{z}_{女}$，方差为 $s^2_{女}$；所有数据样本的平均数为$\overline{x}_{总}$，方差为 $s^2_{总}$. 样本总量为 50.

所有 50 个数据的平均数为

$$\overline{x}_{总}=\frac{32}{50}\overline{y}_{男}+\frac{18}{50}\overline{z}_{女}=\frac{32}{50}\times173.5+\frac{18}{50}\times163.83\approx170.02(\mathrm{cm}).$$

下面计算所有数据的样本方差. 根据方差的定义，

$$s^2_{总}=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{32}(y_i-\overline{x}_{总})^2+\sum_{j=1}^{18}(z_j-\overline{x}_{总})^2\right].$$

因为其中的数据是未知的，需要把上面的式子转化为各层样本方差、样本平均数和样本量的函数.

经过计算可得 $s^2_{总}\approx 43.24(\mathrm{cm}^2)$.

请参阅下面的“链接”.

一般地，如果总体分为 k 层，第 j 层抽取的样本为 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn_j}$，第 j 层的样本量为 n_j，样本平均数为$\overline{x}_j$，样本方差为 s_j^2，$j=1, 2, \cdots, k$. 记 $\sum\limits_{j=1}^{k}n_j=n$，那么，所有数据的样本方差为

$$s^2_{总}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_j}(x_{jt}-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}n_j\left[s_j^2+(\overline{x}_j-\overline{x})^2\right].$$

链 接

分层抽样数据的方差计算

根据方差的定义，在例 8 中，

$$s^2_{总}=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{32}(y_i-\overline{x}_{总})^2+\sum_{j=1}^{18}(z_j-\overline{x}_{总})^2\right]$$

$$=\frac{1}{50}\left\{\sum_{i=1}^{32}[(y_i-\overline{y}_{男})+(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})]^2+\sum_{j=1}^{18}[(z_j-\overline{z}_{女})+(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{50}\left\{\sum_{i=1}^{32}[(y_i-\overline{y}_{男})^2+2(y_i-\overline{y}_{男})(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})+(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})^2]+\sum_{j=1}^{18}[(z_j-\overline{z}_{女})^2+2(z_j-\overline{z}_{女})(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})+(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})^2]\right\}$$

$$=\frac{1}{50}\left\{\left[\sum_{i=1}^{32}(y_i-\overline{y}_{男})^2+\sum_{i=1}^{32}2(y_i-\overline{y}_{男})(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})+\sum_{i=1}^{32}(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})^2\right]+\left[\sum_{j=1}^{18}(z_j-\overline{z}_{女})^2+\sum_{j=1}^{18}2(z_j-\overline{z}_{女})(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})+\sum_{j=1}^{18}(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})^2\right]\right\},$$

其中

$$\sum_{i=1}^{32}(y_i-\overline{y}_{男})(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})=(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})\left(\sum_{i=1}^{32}y_i-\sum_{i=1}^{32}\overline{y}_{男}\right)$$

$$=(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})\left(\sum_{i=1}^{32}y_i-32\,\overline{y}_{男}\right)=0.$$

同理

$$\sum_{j=1}^{18}(z_j-\overline{z}_{女})(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})=0.$$

于是

$$s_{总}^2=\frac{1}{50}\left\{\left[\sum_{i=1}^{32}(y_i-\overline{y}_{男})^2+\sum_{i=1}^{32}(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})^2\right]+\left[\sum_{j=1}^{18}(z_j-\overline{z}_{女})^2+\sum_{j=1}^{18}(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{50}\{[32s_{男}^2+32(\overline{y}_{男}-\overline{x}_{总})^2]+[18s_{女}^2+18(\overline{z}_{女}-\overline{x}_{总})^2]\}$$

$$\approx 43.24(\text{cm}^2).$$

信息技术

在 Excel 中，可分别用函数“VARP()”和“STDEVP()”计算方差和标准差.

在 GGB 的输入框中分别输入“方差[　]”和“标准差[　]”计算方差和标准差.

练　习

1. 已知一组数据 1，3，2，5，4，则这组数据的标准差为________.
2. 从两个班级各抽 5 名学生测量身高(单位：cm)，甲班的数据为 160，162，

159，160，159，乙班的数据为 180，160，150，150，160. 试估计哪个班级学生身高的波动小.

3. 若 k_1，k_2，…，k_8 的方差为 3，则 $2(k_1-3)$，$2(k_2-3)$，…，$2(k_8-3)$ 的方差为__________.

4. 利用计算器计算下列两组数据的平均数和标准差.

甲	9.9	10.3	9.8	10.1	10.4	10.0	9.8	9.7
乙	10.2	10.0	9.5	10.3	10.5	9.6	9.8	10.1

14.4.3 用频率直方图估计总体分布

我们已经学习了运用频率直方图分析个体在总体中的分布位置，由此可知，频率直方图是研究数据分布状况的数学模型.

● 怎样通过样本数据的频率直方图对总体分布进行估计？

例 9 某市交通部门需要了解新修建的公路某一路段的车流状况，随机抽查了一个月中 7 天的车流量，得到如表 14－4－6 所示的数据样本.

表 14－4－6

时间段＼日期	2 日	7 日	12 日	18 日	21 日	25 日	29 日
0:00～1:00	23	76	45	37	58	16	28
1:00～2:00	15	53	24	42	36	38	49
2:00～3:00	5	21	18	32	27	22	7
3:00～4:00	13	9	16	7	22	19	6
4:00～5:00	58	47	33	5	29	49	33
5:00～6:00	129	177	203	111	155	165	223
6:00～7:00	234	327	297	189	332	478	376
7:00～8:00	847	905	786	546	853	769	695
8:00～9:00	632	602	572	412	517	588	666
9:00～10:00	456	524	389	356	438	537	495
10:00～11:00	443	532	478	444	510	473	533
11:00～12:00	556	621	498	568	645	539	678
12:00～13:00	439	322	403	545	552	453	489
13:00～14:00	632	689	599	637	742	599	655
14:00～15:00	237	305	277	203	311	276	347
15:00～16:00	378	403	321	299	415	178	321
16:00～17:00	478	555	393	388	451	279	439
17:00～18:00	732	810	733	684	767	769	822

（续表）

时间段 \ 日期	2 日	7 日	12 日	18 日	21 日	25 日	29 日
18:00～19:00	656	698	736	596	693	711	673
19:00～20:00	579	621	602	557	562	493	592
20:00～21:00	483	563	521	511	466	461	399
21:00～22:00	221	198	295	254	179	310	265
22:00～23:00	115	89	67	32	123	154	179
23:00～24:00	76	87	48	19	88	121	33

试估计该公路一天中车流量的分布情况.

也可直接使用这一时段的数据和.

解　先用每一时段的车流量数据的平均数估计每个时间段的车流量，得到表 14－4－7.

表 14－4－7

时段	0:00～1:00	1:00～2:00	2:00～3:00	3:00～4:00	4:00～5:00	5:00～6:00	6:00～7:00	7:00～8:00
频数	40	37	19	13	36	166	319	772
频率	0.004 7	0.004 3	0.002 2	0.001 5	0.004 2	0.019 4	0.037 2	0.090 1

时段	8:00～9:00	9:00～10:00	10:00～11:00	11:00～12:00	12:00～13:00	13:00～14:00	14:00～15:00	15:00～16:00
频数	570	456	488	586	458	650	279	331
频率	0.066 5	0.053 2	0.057 0	0.068 4	0.053 5	0.075 9	0.032 6	0.038 6

时段	16:00～17:00	17:00～18:00	18:00～19:00	19:00～20:00	20:00～21:00	21:00～22:00	22:00～23:00	23:00～24:00
频数	426	760	680	572	486	246	108	67
频率	0.049 7	0.088 7	0.079 4	0.066 8	0.056 7	0.028 7	0.012 6	0.007 8

（频数合计 8 565，由于取近似出现误差，频率合计 0.999 7）.

由此作出频率直方图（图 14－4－5）：

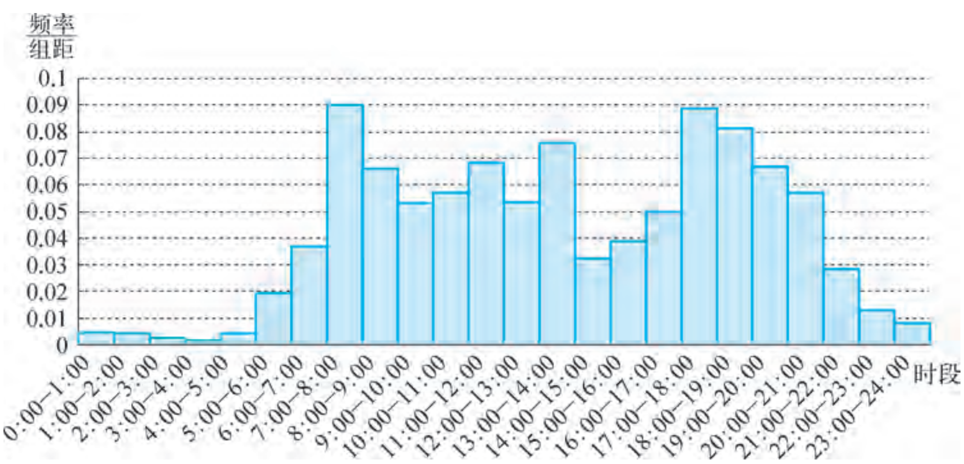


图 14－4－5

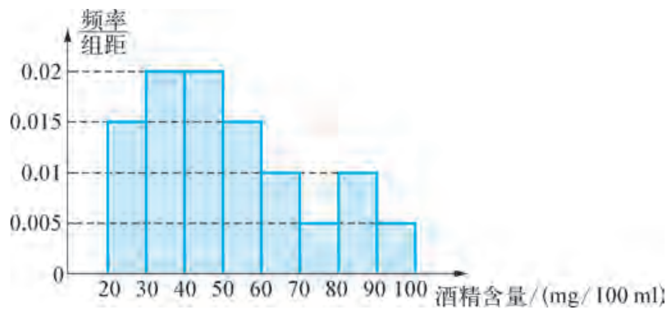
从频率直方图中看出，该路段车流高峰分别为 7:00～8:00 和 17:00～20:00，夜间车流量很小，从 5:00 起逐步增加.

探 究

交通部门在确定十字路口红绿灯各个方向的时间安排时，要了解各个方向的车流量的分布情况.请选择某些交通路口，收集数据进行统计分析，作出推断：各个方向的绿灯时间的分配是否合理？并向有关部门提出建议.

练 习

1. 根据《中华人民共和国道路交通安全法》规定：血液酒精浓度在 80 mg/100 ml（含 80）以上时，属醉酒驾车，处十五日以下拘留和三个月以上六个月以下暂扣驾驶证，并处 500 元以上 2 000 元以下罚款. 据《法制晚报》报道，2009 年 8 月 15 日至 8 月 28 日，全国查处酒后驾车和醉酒驾车共 500 人. 如图，这是对这 500 人酒后驾车血液中酒精含量进行检测所得结果的频率直方图，则属于醉酒驾车的人数约为（　　）.



（第 1 题）

A. 25　　B. 50　　C. 75　　D. 100

2. 下面是某市 9 月 26 日和 9 月 29 日市区出现堵车的时刻，试列出这两天的堵车时刻的频率分布表和频率直方图，并分析该市每天大约在什么时间段是行车高峰期.

9 月 26 日	8:01	8:02	9:30	9:31	9:51	10:24	10:51	
	11:21	15:52	16:30	17:29	17:30	18:04	18:22	
9 月 29 日	8:29	8:32	8:33	9:29	9:58	10:14	10:33	11:43
	14:00	16:08	16:29	16:54	16:55	17:05	18:08	18:09

3. 通过抽样，我们获得了 100 位居民某年的月平均用水量(单位：t)，如下表：

3.1	2.5	2.0	2.0	1.5	1.0	1.6	1.8	1.9	1.6
3.4	2.6	2.2	2.2	1.5	1.2	0.2	0.4	0.3	0.4
3.2	2.7	2.3	2.1	1.6	1.2	3.7	1.5	0.5	3.8
3.3	2.8	2.3	2.2	1.7	1.3	3.6	1.7	0.6	4.1
3.2	2.9	2.4	2.3	1.8	1.4	3.5	1.9	0.8	4.3
3.0	2.9	2.4	2.4	1.9	1.3	1.4	1.8	0.7	2.0
2.5	2.8	2.3	2.3	1.8	1.3	1.3	1.6	0.9	2.3
2.6	2.7	2.4	2.1	1.7	1.4	1.2	1.5	0.5	2.4
2.5	2.6	2.3	2.1	1.6	1.0	1.0	1.7	0.8	2.4
2.8	2.5	2.2	2.0	1.5	1.0	1.2	1.8	0.6	2.2

试用频率直方图分析该地居民月平均用水量的分布情况.

14.4.4 百分位数

从 14.3.1 节的例 2 可以看出，通过考察一个具体数据在所有数据中所处的位置可以判断这个数据相对总体的水平. 对于下面的问题：

2016 年某省对四年级学生进行了学业水平测试. 甲、乙两市参加测试的学生数分别为 3 600 人和 2 800 人. 从以往测试的情况看，甲、乙两市四年级英语学科的成绩总体状况基本相当. 那么，

● 甲市第 1 200 名与乙市第 1 160 名相比，哪个更好一些？

比较成绩的高低主要看其在总体中的位置. 为了统一评价标准，可以用低于这个数据的数据个数占总数据个数的比来刻画其在总体中的位置水平.

在甲市参加测试的 3 600 名学生中，成绩低于第 1 200 名的共有 2 400 人，即共有 67%的学生的成绩低于这个学生的成绩；而在乙市参加测试的 2 800 名学生中，成绩低于第 1 160 名的共有 1 640 人，即共有 59%的学生的成绩低于这个学生的成绩. 因为两市四年级英语学科的成绩总体状况基本相当，所以甲市第 1 200 名学生的成绩要好于乙市第 1 160 名学生的成绩.

一般地，一组数据的 k **百分位数**（percentile）是这样一个值 p_k，它使得这组数据中至少有 $k\%$ 的数据小于或等于 p_k，且至少有 $(100-k)\%$ 的数据大于或等于 p_k.

如果将样本数据从小到大排列成一行，那么 k 百分位数 p_k 所处位置如图 14－4－6 所示.

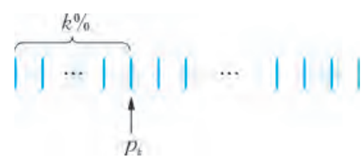


图 14－4－6

通常，我们按如下方法计算有 n 个数据的大样本的 k 百分位数：

第 1 步　将所有数值按从小到大的顺序排列；

第 2 步　计算 $n\cdot\dfrac{k}{100}$；

第 3 步　如果结果为整数，那么 k 百分位数位于第 $n\cdot\dfrac{k}{100}$ 位和下一位数之间，通常取这两个位置上数值的平均数为 k 百分位数；

第 4 步　如果 $n\cdot\dfrac{k}{100}$ 不是整数，那么将其向上取整(即其整数部分加上 1)，在该位置上的数值即为 k 百分位数.

显然，中位数即为 50 百分位数，我们也把中位数、25 百分位数和 75 百分位数称为四分位数.

25 百分位数和 75 百分位数分别称为下四分位数和上四分位数.

例 10 计算 14.3 节的例 2 中这组数据的上四分位数.

解 排序：

87	88	92	95	97	100	103	103	104	105
105	107	108	108	110	112	113	114	115	115
116	117	117	118	119	119	120	123	124	125
126	127	129	135	136	137	138	142	146	152

计算：
$$40\times\frac{75}{100}=30,$$

而这组数据中第 30 和 31 位数分别为 125 和 126，

所以，这组数据的上四分位数为$\frac{125+126}{2}=125.5$.

练 习

1. 全班 20 名学生在一次历史测验中的得分(单位：分)如下：
   2,5,6,7,8,9,10,10,11,11,11,12,12,12,13,13,14,16,17,18.
   (1) 百分位数为 25,40 的得分分别是多少？
   (2) 14 分的百分位数是多少？
2. 某班共有 24 人，小明在一次测验中的成绩为第 5 名，问：小明成绩的百分位数是多少？

习题 14.4

感受·理解

1. 已知某地连续 10 天的最低气温(单位：℃)依次是 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 和 x_1+1，x_2+2，x_3+3，x_4+4，x_5+5，若前 5 天的平均最低气温为 7℃，求后 5 天的平均最低气温.
2. 某工厂一个月(30 天)中的日产值如下：有 2 天的产值是 5.1 万元，有 3 天的产值是 5.2 万元，有 6 天的产值是 5.3 万元，有 8 天的产值是 5.4 万元，有 7 天的产值是 5.5 万元，有 3 天的产值是 5.6 万元，有 1 天的产值是 5.7 万元. 试计算该厂这个月的平均日产值.
3. 为了考察某种大麦穗长的分布情况，在一块试验田里抽取了 100 穗，量得它们的长度(单位：cm)如下，请列出频率分布表，并估计该试验田里麦穗的平均长度.

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	5.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.8	6.6	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0
5.5	6.2	6.1	5.3	6.2	6.8	6.6	4.7	5.7	5.7
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

4. 两台机床同时生产一种零件，日产量相同，在 10 天中，两台机床每天的次品数如下：

甲	1	0	2	0	2	3	0	4	1	2
乙	1	3	2	1	0	2	1	1	0	1

(1) 哪台机床生产次品数的平均数较小?

(2) 哪台机床生产状况比较稳定?

5. 甲、乙两台半自动车床加工同一型号的产品，各生产 1 000 只产品中次品数分别用 x 和 y 表示. 经过一段时间的观察，发现 x 和 y 的频率分布如下表，问：哪一台车床的产品质量较好?

x	0	1	2	3
P	0.7	0.1	0.1	0.1
y	0	1	2	3
P	0.5	0.3	0.2	0

6. 在一次长跑测试中，小明是班上跑得最快的，小彬是班上跑得最慢的，全班共 40 人，分别求小明、小彬长跑成绩的百分位数.

思考・运用

7. 某机构调查了 17 种食品的卡路里含量，结果如下：
173，191，182，190，172，147，146，139，175，136，179，153，107，195，135，140，138.

(1) 求这组数据的平均数、中位数；

(2) 用哪种集中趋势参数来代表这组数据更加合适?

8. 某制造商生产长度为 6 cm 的金属棒，抽样检查 40 根，测得每根长度(单位：cm，保留两位小数)如下：

6.02	6.01	6.04	5.94	5.97	5.96	5.98	6.01	5.98	6.02
6.00	6.03	6.07	5.97	6.01	6.00	6.03	5.95	6.00	6.00
6.05	5.93	6.02	5.99	6.00	5.95	6.00	5.97	5.96	5.97
6.03	6.01	6.00	5.99	6.04	6.00	6.02	5.99	6.03	5.98

(1) 计算上述样本中金属棒的平均长度；

(2) 画出频率直方图；

(3) 如果允许制造商生产这种金属棒与 6 cm 的标准有 0.2%的离差，那么抽样检查中合格的金属棒有多少根? 合格率是多少?

9. 下面是校篮球队某队员若干场比赛的得分数据.

每场比赛得分	3	6	7	10	11	13	30
频数	2	1	2	3	1	1	1

分别求出该队员得分的中位数、四分位数、40 百分位数.

探究・拓展

10. 一位研究化肥的科学家将一片土地划分为 100 个 50 m^2 的小块，并在 50 个小块上施用新化肥，留下 50 个条件大体相当的小块不施新化肥. 施用新化

肥的 50 小块土地的小麦产量(单位：kg)如下：

15	29	22	15	3	30	22	16	5	2
22	13	20	25	42	25	20	38	12	29
14	21	26	13	21	27	13	21	11	18
10	18	24	24	36	34	23	18	10	9
17	23	33	8	16	23	31	16	23	40

没有施用新化肥的 50 小块土地的小麦产量(单位：kg)如下：

23	16	16	17	22	3	10	10	8	14
16	5	24	16	32	23	15	18	9	21
4	24	5	24	15	2	15	25	17	29
33	39	16	17	2	15	17	17	26	13
26	11	18	19	12	20	27	12	28	22

你认为新化肥的研制已经取得成功了吗?

11. 近年来，我国高速铁路发展迅速，到 2016 年底为止，已经运营的高铁轨道的总长度已达 2.2×10^4 km，位居世界第一. 为了提高营运的效率，铁路部门在安排停靠站台时通过分班次、间隔站点的方式进行，如京沪高铁 G125 班次 11:10 从北京始发，开往上海虹桥(据 2017 年 10 月时刻表)，停靠站分别为天津南、德州东、济南西、滕州东、蚌埠南、南京南、镇江南、常州北、昆山南，而 08:35 从北京始发的 G111 班次，停靠站分别为德州东、济南西、泰安、滁州、南京南、丹阳北、无锡东，最后停靠终点站上海虹桥.

试运用统计研究的方法完成下述任务：

(1) 如何确定每天的总班次及具体班次的安排?

(2) 在确定各个班次停靠站的数量时应考虑哪些因素? 如何实施?

(3) 在确定各个班次停靠站时应考虑哪些因素? 如何实施?

应用与建模

阶梯电价的设计

为了实现绿色发展,避免浪费能源,某市政府计划对居民用电采用阶梯收费的方法.为此,相关部门在某区随机调查了 200 户居民六月份的用电量(单位:kw·h),以了解这个城市家庭用电量的情况.数据如下:

107	101	78	99	208	127	74	223	31	131
214	135	89	66	60	115	189	135	146	127
203	97	96	62	65	111	56	151	106	8
162	91	67	93	212	159	61	63	178	194
194	216	101	98	139	78	110	192	105	96
22	50	138	251	120	112	100	201	98	84
137	203	260	134	156	61	70	100	72	164
174	131	93	100	163	80	76	95	152	182
88	247	191	70	130	49	114	110	163	202
265	18	94	146	149	147	177	339	57	109
107	182	101	148	274	289	82	213	165	224
142	61	108	137	90	254	201	83	253	113
130	82	170	110	108	63	250	237	120	84
154	288	170	123	172	319	62	133	130	127
107	71	96	140	77	106	132	106	135	132
167	82	258	542	51	107	69	98	72	48
109	134	250	42	320	113	180	144	116	530
200	174	135	160	462	139	133	304	191	283
121	132	118	134	124	178	206	626	120	274
141	80	187	88	324	136	498	169	77	57

根据上述数据,应当如何确定阶梯电价中的电量临界值,才能使得电价更为合理?

阅 读

恩格尔系数

德国统计学家恩格尔(C. L. E. Engel,1821—1896)从 1853 年起着手研究工人家庭收支问题.

1857 年以前,他收集了萨克逊工人家庭的开支记录,发现不同收入的家庭,花费在各类物品和劳务上的支出比例并不一样.后来,他又对比比利时工人家庭收支进行研究,相互印证,写出了《比利时工人家庭的生活费》(1895 年)一文.

1853～1880 年比利时工人家庭支出调查统计表

家庭类别	低收入家庭	中等收入家庭	高收入家庭
饮食费	62%	55%	50%
服装费	16%	18%	18%
住房费	12%	12%	12%
燃料费	5%	5%	5%
文教费	5%	10%	15%

他采用归纳法，概括出四项法则，统称“恩格尔法则”：

(1) 家庭收入越多，饮食费支出在家庭收入中所占百分比越小；

(2) 无论家庭收入多寡，服装费支出在家庭收入中所占百分比差异不大；

(3) 无论家庭收入多寡，房屋租金、照明、煤炭等费用支出在家庭收入中所占百分比不变；

(4) 家庭收入越多，杂费（包括文教费）支出在家庭收入中所占百分比越大.

1857 年，恩格尔还根据“家庭收入越多，饮食费支出在家庭收入中所占百分比越小；家庭收入越少，饮食费支出在家庭收入中所占百分比越大”这一法则，引申出“恩格尔系数”，作为度量生活水平升降的标准.

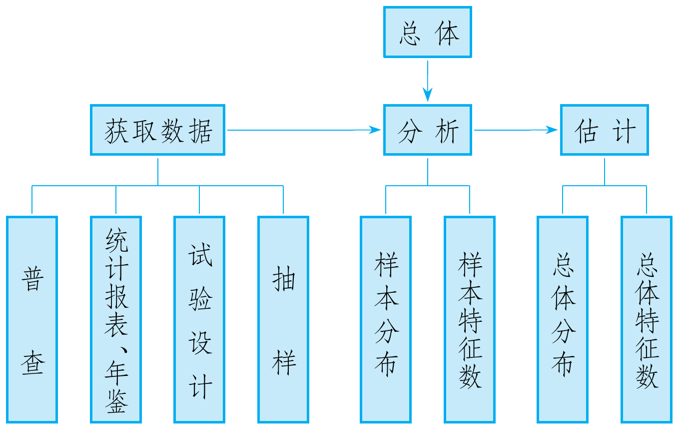
1883 年，恩格尔又提出“食物消费加权法”，即按年龄、性别的不同分别给以不同的权数，其目的是使计算工人家庭饮食费支出更为合理，通称“恩格尔制”.

1868 年，德国学者施瓦布（H. Schwabe）通过对柏林市家庭支出的调查研究，对恩格尔 1857 年提出的“住房支出占家庭收入的百分比不变”这一结论加以修正，改为“家庭越富裕，支付住房费的金额越大，但占总支出额的比例，平均百分比越小”. 这一修正结论被称为“施瓦布法则”.

试用适当方法获得数据，检测在当今社会，“恩格尔法则”是否仍然适用.

本章回顾

本章介绍了获取数据的常用方法，并通过实例，研究了如何利用样本对总体的分布规律、集中趋势、离散程度等特性进行估计和预测.



当总体容量很大或检测具有一定的破坏性时，可以从总体中抽取适当的样本，通过对样本的分析、研究，得到对总体的估计，这就是统计分析的基本过程. 而用样本估计总体就是统计思想的本质.

要准确估计总体，必须合理地选择样本，我们学习的是最常用的两种抽样方法. 获取样本数据后，将其用频率分布表、频率直方图表示后，蕴含于数据之中的规律就会得到直观的揭示. 用样本平均数、众数、中位数可以估计总体的集中趋势，用样本极差、方差(标准差)可以估计总体的离散程度.

总之，统计的基本思想是从样本数据中发现统计规律，实现对总体的估计.

复 习 题

感受・理解

1. 若将容量为 100 的样本数据分为如下 8 组，则第 3 组的频率为(　　).

A. 0.14　　B. 0.03　　C. 0.07　　D. 0.21

组　号	1	2	3	4	5	6	7	8
频　数	10	13		14	15	13	12	9

2. 调查某班学生的平均身高，从 50 名学生中抽取$\frac{1}{10}$，应如何抽样？如果知道男女生(男生 30 人，女生 20 人)的身高显著不同，又应如何抽样？

3. “任何人服用某种药后，7 天内感冒都能痊愈，所以这种药是治疗感冒的特效药.”这个说法正确吗？为什么？

4. 有 140 位选手参加高尔夫球赛，他们的成绩统计如下：

杆　数	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
选手数	1	2	5	3	8	17	20	31	22	21	10

(1) 列出频率分布表；(2) 画出条形统计图.

5. 对你班同学进行抽样调查，了解零花钱的使用情况.

6. 200 名学生参与研究性学习，每人仅参加 1 个课题组. 其中参加文学类的有 33 人，参加理化类的有 30 人，参加数学类的有 62 人，参加社会科学类的有 47 人，参加信息类的有 28 人.

(1) 列出学生参加各类课题组的频率分布表并作出相应的扇形统计图；

(2) 画出条形统计图.

7. 对某种电子元件进行寿命追踪调查，情况如下表：

寿命/h	1 000～2 000	2 000～3 000	3 000～4 000	4 000～5 000	5 000～6 000
个　数	20	30	80	40	30

(1) 列出频率分布表；

(2) 画出频率直方图和折线图；

(3) 估计该电子元件的寿命在 1 000～4 000 h 内的百分比；

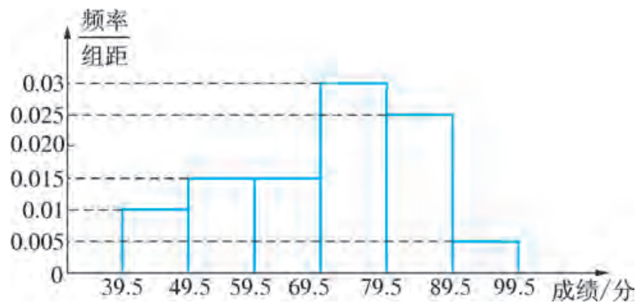
(4) 估计该电子元件的寿命在 4 000 h 以上的百分比.

8. 从参加环保知识竞赛的学生中抽出 60 名学生，将其成绩(均为整数)整理后画出的频率直方图如图所示. 观察图形，回答下列问题：

(1) [79.5，89.5)这一组的频数和频率分别为多少？

(2) 估计该次环保知识竞赛的及格率(60 分及以上为及格)；

(3) 求 89.5 的百分位数.



(第 8 题)

9. 甲、乙两名学生某门课程的 5 次测试成绩依次分别为 60，80，70，90，70 和 80，65，70，80，75，因为____________，所以学生________成绩更稳定.

10. 下面是从某校高一学生中抽取的 20 名学生的学习用书的质量(单位：kg)：

8.4　10.1　6.3　7.1　6.2　6.5　7.6　8.0　8.5　6.4

10.3　8.8　5.2　4.6　7.8　3.9　4.8　7.2　8.0　6.8

(1) 作出频率直方图；

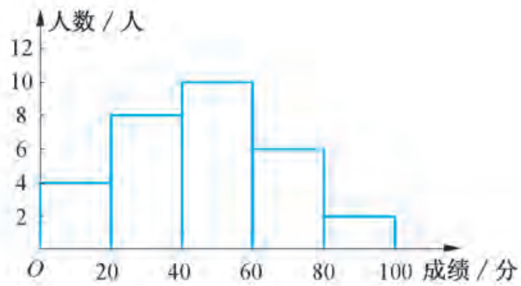
(2) 利用频率直方图的组中值对总体均值及方差进行估计.

11. 下面是某篮球运动员投篮得分的频数分布表，其得分的众数是多少？中位数是多少？下四分位数是多少？9 分的百分位数是多少？

得 分	频 数
10	1
9	3
8	5
7	4
6	2

思考 · 运用

12. 下面是一次考试结果的频数直方图，请据此估计这次考试的平均分.



（第 12 题）

13. 请你收集有关数据，估算我国 2016 年年龄为 18 岁的人口数.

14. 学过本章内容后，当看到含有数据的新闻报道、广告或某种新发现时，为检验其理论是否可靠，你要思考哪些问题？

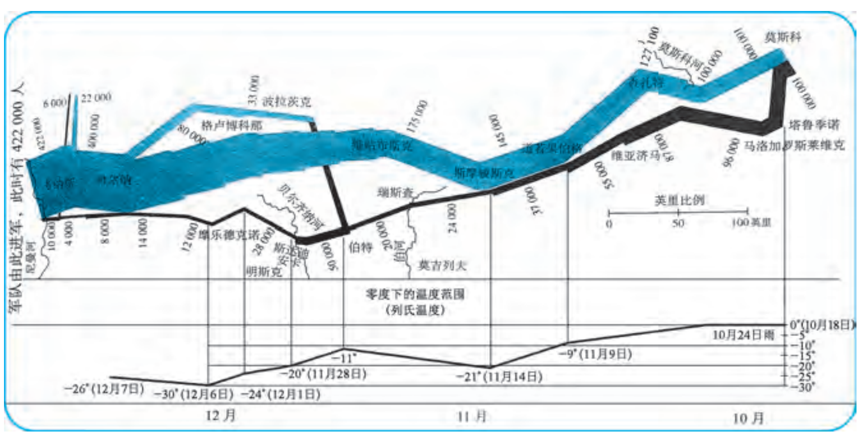
探究 · 拓展

15. 某大学美术系平面设计专业的报考人数连创新高，报名刚结束，某考生想知道这次报考该大学美术系平面设计专业的人数. 这所大学美术系平面设计专业考生的考号是按 0001，0002，…这样的从小到大顺序依次排列的. 该考生随机地了解了 50 个考生的考号，具体如下：

0400 0904 0747 0090 0636 0714 0017 0432 0403 0276
0986 0804 0697 0419 0735 0278 0358 0436 0946 0123
0647 0349 0105 0186 0079 0434 0960 0543 0495 0974
0219 0380 0397 0283 0504 0140 0518 0966 0559 0910
0658 0442 0694 0065 0757 0702 0498 0156 0225 0327

请你给出一种方法，帮助该考生，根据这 50 个随机抽取的考号，估计这一年报考该大学美术系平面设计专业的考生总数.

16. （阅读题）阅读下面关于拿破仑进军和撤出莫斯科的统计图：



同俄国的战役中拿破仑军队的士兵伤亡人数图（1812～1813 年）

这是法国工程师 Charles Joseph Minnaral(1781—1870)的经典图(作于1861年),图中标注了法国军队从进入俄国到撤出俄国的时间、过程及军队人数变化等信息.

试叙述这次战争的过程、法国军队的变化情况.感兴趣的同学可以查阅相关资料,了解有关历史史实.

本章测试

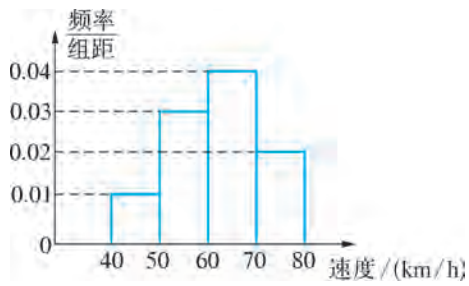
一、填空题

1. 某地要调查 7 月份该地超市的饮料的月销售量，拟抽取部分超市进行调查. 该地超市的面积规模分布如下表：

规模面积	小（100 m^2 以下）	中（100～330 m^2）	大（330 m^2 以上）
超市个数	6 000	4 000	100

应该采用的抽样方法是________.

2. 若 200 辆汽车通过某段公路时的速度频率直方图如图所示，则速度在区间[40，50)内的汽车大约有________辆.



（第 2 题）

3. 某次青年歌手大奖赛上 9 位评委给某位选手打分为 79，84，84，84，86，87，91，93，96，这组数据的众数是________.

4. 在某年的足球联赛中，甲球队每场比赛的平均失球数是 1.8，全年比赛失球个数的标准差为 1.1；乙球队每场比赛的平均失球数是 1.5，全年比赛失球个数的标准差是 0.6. 有下列说法：① 平均说来甲球队的成绩比乙球队的成绩好；② 乙球队比甲球队防守状况更稳定. 其中正确的有________.（填序号）

5. 已知某班级 20 名男生俯卧撑的测试成绩统计如下表所示，那么这 20 名男生俯卧撑的平均成绩为________.

成 绩	20	18	15	12	10	6	3
人 数	1	2	4	3	6	3	1

6. 在共有 100 名学生参加的某项测试中，小张的成绩排名是第 75 名，小李成绩的百分位数为 75，则他们两人中成绩较好的是________.

二、选择题

7. 对于数据 2，6，8，3，3，4，6，8，下列说法中正确的个数为(　　).

(1) 平均数为 5；

(2) 没有众数；

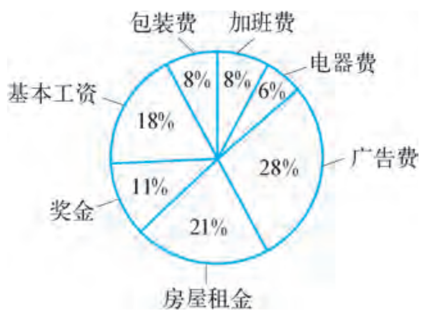
(3) 没有中位数.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 某企业 2016 年年度营业费用情况如图所示，则下面说法中正确的是(　　).

A. 基本工资占比最高　　B. 奖金高于基本工资

C. 加班费与包装费相同　　D. 以上都不对



(第 8 题)

9. 在某频率直方图中，从左到右共有 11 个小矩形，若居中的那个小矩形的面积等于其他 10 个小矩形的面积和的$\frac{1}{4}$，且样本容量为 160，则居中的那组数据的频数为(　　).

A. 32　　B. 0.2

C. 40　　D. 0.25

10. 已知数据 x_1，x_2，…，x_{10}的平均数为 2，方差为 3，那么数据 $2x_1+3$，$2x_2+3$，…，$2x_{10}+3$ 的平均数和方差分别为(　　).

A. 2，3　　B. 7，6

C. 7，12　　D. 4，12

三、解答题

11. 要从 10 部手机中抽取 4 部进行质量检验，请写出用抽签法抽样的过程.

12. 某网站调查网民对当前网页的满意程度，在登录的所有网民中，收回有效帖子共 50 000 份，其中持各种态度的份数如下表所示.

很满意	满　意	一　般	不满意
10 800	12 400	15 600	11 200

为了了解网民的具体想法和意见，以便决定如何完善网页设计与维护，打算从中抽选 500 份进行统计分析. 问：为使样本更具有代表性，每类中各应抽取多少份？

13. 有一个容量为 100 的样本，数据分组及各组的频数如下：[12.5，15.5)，6；[15.5，18.5)，16；[18.5，21.5)，18；[21.5，24.5)，22；[24.5，27.5)，20；[27.5，30.5)，10；[30.5，33.5]，8.

(1) 列出样本的频率分布表；

(2) 估计总体中在[21.5，30.5)的数据所占的百分比.

14. 对划艇运动员甲、乙两人在相同的条件下进行了 6 次测试，测得他们的最大速度的数据如下表所示. 试根据这些数据，比较他们的运动水平.

甲	27	38	30	37	35	31
乙	33	29	38	34	28	36

15. 栽植 200 棵幼松，10 年后测出部分树的高度如下：

高度/cm	棵　数	高度/cm	棵　数
未满 100	3	180～200	26
100～120	6	200～220	13
120～140	10	220～240	6
140～160	22	240 以上	4
160～180	35	合计	125

(1) 试估计上表中的 125 棵树的高度的平均数；

(2) 已知其余 75 棵树的高度的平均数为 172.4 cm，试估计这 200 棵树的高度的平均数.

第 15 章　概　率


今天
26°
6月12日
多云
29°C
24°C
6月13日
晴
31°C
24°C
6月14日
多云
28°C
25°C
6月15日
小雨
26°C
22°C


6月16日
阴
23°C
19°C
6月17日
雷
24°C
20°C
6月18日
大雨
20°C
18°C

概率论的诞生，虽然渊源于靠碰运气取胜的游戏，但在今天，却已成为人类知识的最重要的一部分.

——拉普拉斯

抛掷两颗骰子，向上的点数之和是多少？这是事先不能断定的，具有“随机性”. 因此，我们称“抛掷两颗骰子，结果向上的点数之和为6”是一个随机事件，它可能发生，也可能不发生.

表面上看，随机事件的发生与否毫无规律，但实践经验告诉我们，大量反复抛掷两颗骰子，“结果向上的点数之和为 2”与“结果向上的点数之和为 6”这两个随机事件发生的可能性有着本质的区别.

- 如何用数学语言来刻画随机事件？
- 用怎样的数学模型来量化随机事件发生的可能性？

15.1 随机事件和样本空间

观察下列现象：

(1) 在标准大气压下把水加热到 100℃，结果水沸腾；

(2) 向空中抛掷一块石头，结果石头落回地面；

(3) 同性电荷，互相吸引；

(4) 把实心铁块丢入水中，结果铁块浮起；

(5) 买一张福利彩票，结果中奖；

(6) 抛掷一枚硬币，结果正面向上.

● 这些现象各有什么特点？

(1)(2)两种现象必然发生，(3)(4)两种现象不可能发生，(5)(6)两种现象可能发生，也可能不发生.

在一定条件下，事先就能断定发生或不发生某种结果，这种现象就是**确定性现象**. 在一定条件下，某种结果可能发生，也可能不发生，事先不能断定出现哪种结果，这种现象就是**随机现象**. 在自然界和人类社会的生产与生活中，存在着大量的确定性现象和随机现象.

对某随机现象进行的实验、观察称为**随机试验**(random experiment)，简称**试验**. 在相同条件下，试验可以重复进行，试验的结果有多个，全部可能结果在试验前是明确的，但不能确定会出现哪一个结果.

例如，抛掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况.

我们把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**(sample point)，用 ω 表示，所有样本点组成的集合称为**样本空间**(sample space)，用 Ω 表示. 如果样本空间 Ω 是一个有限集合，则称样本空间 Ω 为有限样本空间. 样本空间的子集称为**随机事件**(random event)，简称**事件**. 事件一般用 A, B, C 等大写英文字母表示. 当一个事件仅包含单一样本点时，称该事件为**基本事件**(elementary event).

当一个试验的结果是 A 的一个元素时，称事件 A 发生了.

显然，Ω(全集)是必然事件，$\varnothing$(空集)是不可能事件.

引入样本空间的概念后，我们可以方便地运用集合的语言来刻画事件.

例 1 "抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数"记为事件 A，分别写出样本空间 Ω 及事件 A 所包含的样本点.

解 记"抛掷一颗骰子，结果向上的点数是 k"为 ω_k $(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，则

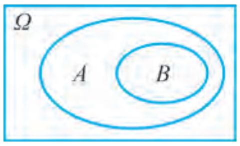
$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$
$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}.$$

一个事件的完整表述分为两部分，前一部分为试验的条件，后一部分为试验的结果. 例如，事件 A“抛掷一枚硬币，结果正面向上”，有时可省略表述为“抛掷一枚硬币，正面向上”.

例 2 “抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数”记为事件 A，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是 2”记为事件 B，分别写出 A，B 所包含的样本点，并用集合的语言分析 A，B 两者之间的关系.

解 记“抛掷一颗骰子，结果向上的点数为 k”为 $\omega_k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，则

$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$
$$B=\{\omega_2\}.$$

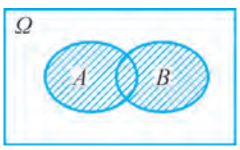


不难发现 A，B 两者之间的关系为 $B\subseteq A$，因此“事件 B 发生必导致事件 A 发生”. 这时，我们称事件 A 包含事件 B（或事件 B 包含于事件 A）.

例 3 “抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数”记为事件 A，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数大于 4”记为事件 B，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数或为偶数或大于 4”记为事件 C，分别写出 A，B，C 所包含的样本点，并用集合的语言分析 A，B，C 三者之间的关系.

解 记“抛掷一颗骰子，结果向上的点数为 k”为 $\omega_k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，则

$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$
$$B=\{\omega_5, \omega_6\},$$
$$C=\{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$



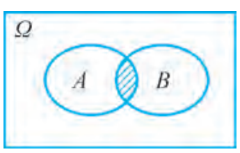
不难发现 A，B，C 三者之间的关系为 $C=A\cup B$，因此“事件 A 与 B 至少有一个发生即为事件 C 发生”. 这时，我们称 C 是 A 与 B 的并，也称 C 是 A 与 B 的和，并记作 $C=A+B$.

例 4 “抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数”记为事件 A，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数不小于 4”记为事件 B，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是不小于 4 的偶数”记为事件 C，分别写出 A，B，C 所包含的样本点，并用集合的语言分析 A，B，C 三者之间的关系.

解 记“抛掷一颗骰子，结果向上的点数为 k”为 $\omega_k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，则

这里 A，B，C 也可以写成 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，$C=\{4, 6\}$.

$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$
$$B=\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$
$$C=\{\omega_4, \omega_6\}.$$



不难发现 A，B，C 三者之间的关系为 $C=A\cap B$，因此“事件 A 与 B 同时发生即为事件 C 发生”. 这时，我们称 C 是 A 与 B 的交，也称 C

是 A 与 B 的积，并记作 $C=AB$.

练　习

1. "同时抛掷两枚硬币，结果一枚正面向上，一枚反面向上"记为事件 A，分别写出 Ω 及 A 所包含的样本点.
2. "抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数"记为事件 A，"抛掷一颗骰子，结果向上的点数是奇数"记为事件 B. 分别写出 Ω，A，B 所包含的样本点，并用集合的语言分析 A，B 两者之间的关系.

习题 15.1

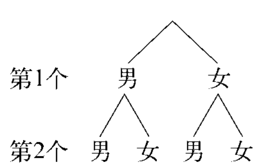
感受·理解

1. 指出下列事件中，哪些是随机事件、必然事件或不可能事件：
   (1) 任取 3 条线段，这 3 条线段恰好能组成直角三角形；
   (2) 任取 1 个正方体的 3 个顶点，这 3 个顶点不共面；
   (3) 从 1 个三角形的 3 个顶点处各任画 1 条射线，这 3 条射线交于一点；
   (4) 把 9 写成两个实数的和，其中一定有 1 个数小于 5；
   (5) 实数 a，b 不都为 0，但 $a^2+b^2=0$；
   (6) 汽车排放尾气会污染环境；
   (7) 明天早晨有雾；
   (8) 明年 7 月 28 日的最高气温高于今年 8 月 10 日的最高气温.
2. 现有 10 个同类产品，其中 7 个是正品，3 个是次品. 有以下事件：从这 10 个产品中任意抽取 4 个产品，① 4 个产品都是正品；② 至少有 1 个次品；③ 4 个产品都是次品；④ 至少有 1 个正品. 其中随机事件为________，不可能事件为________，必然事件为________.（填序号）
3. "抛掷一颗骰子，结果向上的点数大于 3"记为事件 A，"抛掷一颗骰子，结果向上的点数小于 5"记为事件 B. 分别写出 $A+B$ 与 AB 所包含的样本点.

思考·运用

4. 一只不透明的口袋内装有大小相同的 3 个球，且分别标有 1，2，3 三个号码. 记"从袋中有放回地抽取 2 个球，第二个球的号码大于第一个球的号码"为事件 A，"从袋中有放回地抽取 2 个球，第二个球的号码是 2"为事件 B. 分别写出 Ω，A，B 及 $A+B$ 所包含的样本点.
5. 一只不透明的口袋内装有大小相同的 3 个球，且分别标有 1，2，3 三个号码. 记"从袋中不放回地抽取 2 个球，第一个球的号码是 1"为事件 A，"从袋中不放回地抽取 2 个球，第二个球的号码是 2"为事件 B. 分别写出 Ω，A，B 及 AB 所包含的样本点.

探究·拓展



（第 6 题）

6. （阅读题）树形图（Tree Diagram）是一种有层次地枚举各种可能情况的可视化方法. 树形图有助于我们直观地探求某些样本空间. 例如，考察有两个孩子的家庭，记"从中任意抽取一个家庭，两个孩子是一男一女"为事件 A. 我们画出如图所示的树形图，可知样本空间 $\Omega=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$，事件 $A=\{$(男，女)，(女，男)$\}$.

   用树形图的方法分析上述习题 5.

15.2 随机事件的概率

我们已经学习过用概率来量化一个事件在一次试验中发生的可能性的大小，将事件记为 A，用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，则 $P(A)$ 满足如下基本性质：

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

对于必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$，显然

$$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0.$$

这是概率满足的第二个基本性质.

● 怎样确定一个随机事件发生的概率呢?

记 $\{\omega_k\}$ 为“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是 k”($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，这里，样本空间由 6 个样本点组成，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. 并且，在一次试验中，每个基本事件 $\{\omega_k\}$ ($k=1, 2, \cdots, 6$) 发生的可能性都相同，这时也称这些基本事件为等可能基本事件.

上面的问题具有以下两个特点：

(1) 样本空间 Ω 只含有有限个样本点；

(2) 每个基本事件的发生都是等可能的.

我们将满足上述条件的随机试验的概率模型称为**古典概型**(classical probability model).

在古典概型中，如果样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$(其中，$n$ 为样本点的个数)，那么每一个基本事件 $\{\omega_k\}$ ($k=1, 2, \cdots, n$) 发生的概率都是 $\frac{1}{n}$. 如果事件 A 由其中 m 个等可能基本事件组合而成，即 A 中包含 m 个样本点，那么事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$.

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年将其作为概率的一般定义. 现通常称它为概率的古典定义.

回到上述抛掷一颗骰子的试验中，可知

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},\ A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}.$$

根据古典概型计算概率的方法得 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

例 1 一只不透明的口袋内装有大小相同的 5 个球，其中 3 个白球、2 个黑球，“从中一次摸出 2 个球，结果都是白球”记为事件 A，求 $P(A)$.

一次摸出 2 个球，没有先后之分，因此，样本点(2，1)即为样本点(1，2).

分析　可用枚举法找出所有的样本点.

解　分别记白球为 1，2，3 号，黑球为 4，5 号，样本点(1，2)表示"摸到 1，2 号球"(余类推)，则样本空间 Ω 为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\},$$

$$A=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

因此，$$P(A)=\frac{3}{10}.$$

图 15－2－1 直观地给出了 Ω 与 A 的关系.

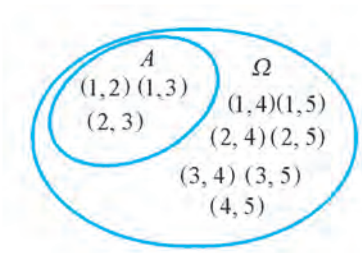


图 15－2－1

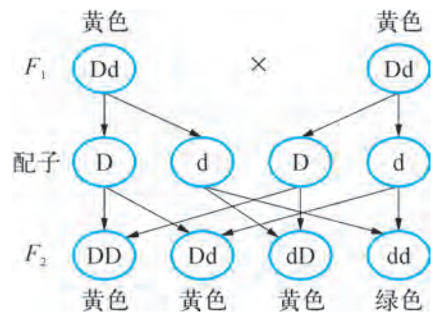


图 15－2－2

例 2　豌豆的黄绿色性状的遗传由其一对基因决定，其中决定黄色的基因记为 D，决定绿色的基因记为 d，则杂交所得第一子代的一对基因为 Dd. 若第二子代的 D，d 基因的遗传是等可能的，求第二子代为黄色的概率(只要有基因 D 就是黄色，只有两个基因全是 d 时，才显现绿色).

解　由于第二子代的 D，d 基因的遗传是等可能的，故来自父方的配子 D，d 与来自母方的配子 D，d 随机组合，共有 4 种可能(图 15－2－2)，即

$$\Omega=\{\mathrm{DD},\mathrm{Dd},\mathrm{dD},\mathrm{dd}\}.$$

记"第二子代为黄色"为事件 A，则

$$A=\{\mathrm{DD},\mathrm{Dd},\mathrm{dD}\},$$

因此，$P(A)=\frac{3}{4}=0.75$.

答　第二子代为黄色的概率为 0.75.

思　考

你能求出上例中第二子代的种子经自花传粉得到的第三子代为黄色的概率吗？

例 3　同时抛掷两颗骰子，观察向上的点数.

(1) 写出样本空间 Ω 所包含的样本点.

(2) 点数之和是 2 的概率是多少？

(3) 点数之和是 6 的概率是多少？

(4) 点数之和是 3 的倍数的概率是多少？

解 (1) 第一颗骰子向上的点数有 6 种可能的结果,对每一种结果,第二颗又都有 6 种可能的结果,于是一共有

$$6\times 6=36$$

种不同的可能结果. 样本点(2, 3)表示“第一颗骰子向上的点数为 2,第二颗骰子向上的点数为 3”(余类推),则样本空间

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

(2) 记“同时抛掷两颗骰子,结果向上的点数之和是 2”为事件 A,则 $A=\{(1, 1)\}$,由古典概型可知

$$P(A)=\frac{1}{36}.$$

(3) 记“同时抛掷两颗骰子,结果向上的点数之和是 6”为事件 B,则 $B=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

由古典概型可知

$$P(B)=\frac{5}{36}.$$

(4) 记“同时抛掷两颗骰子,结果向上的点数之和是 3 的倍数”为事件 C,则 $C=\{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$,由古典概型可知

$$P(C)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.$$

本题说明,抛掷两颗骰子,“结果向上的点数之和为 2”与“结果向上的点数之和为 6”这两个随机事件发生的可能性有着本质的区别.

思 考

1. 在例 3 中,能否将(1,2)与(2,1)视为同一样本点? 为什么?

2. 图 15-2-3 直观地给出了例 3 第(4)问中的 12 种可能结果,你能用此图求出向上的点数之和是 4 的倍数的可能结果有多少种吗?

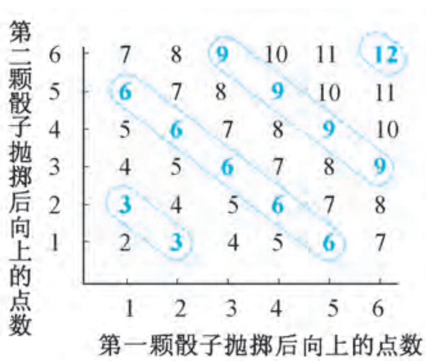


图 15-2-3

例 4　用 3 种不同颜色给图 15－2－4 中 2 个矩形随机涂色，每个矩形只涂 1 种颜色，求：

（1）2 个矩形颜色相同的概率；

（2）2 个矩形颜色不同的概率.

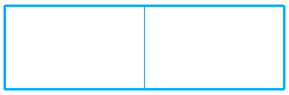


图 15－2－4

解　（1）3 种不同颜色分别记为 1，2，3，样本点(1，3)表示“第一个矩形涂 1 号色，第二个矩形涂 3 号色”(余类推)，则样本空间为

$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

记“2 个矩形颜色相同”为事件 A，则 $A=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

根据古典概型可知

$$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

（2）记“2 个矩形颜色不同”为事件 B，则 $B=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

根据古典概型可知

$$P(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

思　考

在例 4 中，事件 A，B 之间有怎样的关系？$P(A)$，$P(B)$ 之间又有怎样的关系？

从上述问题的解决过程可以看出：在古典概型问题中，求事件 A 的概率的关键是弄清样本空间中样本点的总数(n)，以及事件 A 所包含的样本点的个数(m).

练　习

1. 某班准备到郊外野营，为此向商店订购了帐篷. 如果下雨与不下雨是等可能的，能否准时收到帐篷也是等可能的，只要帐篷如期运到，他们就不会淋雨，那么下列说法中正确的是(　　).

A. 一定不会淋雨　B. 淋雨机会为$\frac{3}{4}$　C. 淋雨机会为$\frac{1}{2}$　D. 淋雨机会为$\frac{1}{4}$

2. 已知密码箱的密码由 5 个数字组成，5 个数字都可以任意设定为 0～9 中的任何一个数字，假设某人已经设定了 5 位密码.

（1）若此人忘了密码的所有数字，则他 1 次就能把锁打开的概率为________；

（2）若此人只记得密码的前 4 位数字，则他 1 次就能把锁打开的概率为________.

3. 已知 10 000 件产品中有 9 000 件是正品，若从中随机选取 1 件产品，则该产品是正品的概率为________.

4. 一只不透明的口袋中装有形状、大小都相同的 1 个白球和 1 个黑球，先摸出 1 个球，记下颜色后放回口袋，然后再摸出 1 个球.

（1）一共可能出现多少种不同的结果？

（2）出现“1 个白球、1 个黑球”的结果有多少种？

（3）出现“1 个白球、1 个黑球”的概率是多少？

5. 某拍卖行拍卖的 20 幅名画中，有 2 幅是赝品. 某人在这次拍卖中随机买入了 1 幅画，求买入的这幅画是赝品的概率.

6. 若从甲、乙、丙、丁 4 名同学中选出 3 名代表参加学校会议，则甲被选中的概率是________.

获得随机事件发生的概率最直接的方法就是试验或观察.

例如，奥地利遗传学家孟德尔(G. Mendel，1822—1884)在研究生物遗传规律时，做了大量的豌豆杂交试验. 表 15-2-1 为试验结果(其中 F_1 为第一子代，F_2 为第二子代)：

表 15-2-1　豌豆杂交试验结果

性　状	F_1 的表现	F_2 的表现		
种子的形状	全部圆粒	圆粒　5 474	皱粒　1 850	圆粒：皱粒≈2.96：1
子叶的颜色	全部黄色	黄色　6 022	绿色　2 001	黄色：绿色≈3.01：1

孟德尔发现，第一子代出现一种性状(圆粒、黄色)的频率为 1，出现另一性状的频率为 0. 而第二子代出现前一性状的频率接近 0.75，出现后一性状的频率接近 0.25. 根据试验结果，孟德尔验证了他关于生物遗传方面的猜想，建立了遗传学的相关理论.

再如，历史上曾经有人做过大量重复抛掷硬币的试验，结果如表 15-2-2 所示.

表 15-2-2　历史上做过的抛掷硬币试验结果

实 验 者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
布　丰	4 040	2 048	0.506 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	40 173	0.498 2

有位同学利用 Excel 编制了一个小程序，进行抛掷硬币的模拟试验. 图 15-2-5 是这位同学连续 8 次模拟试验的结果：

	A	B
1	模拟次数 10	正面向上的频率0.3
2	模拟次数 100	正面向上的频率0.53
3	模拟次数 1000	正面向上的频率0.52
4	模拟次数 5000	正面向上的频率0.4996
5	模拟次数 10000	正面向上的频率0.506
6	模拟次数 50000	正面向上的频率0.50118
7	模拟次数 100000	正面向上的频率0.49904
8	模拟次数 500000	正面向上的频率0.50019

图 15-2-5

请阅读习题 15.2 第 19 题，自己做一下模拟试验.

从表 15－2－2 和图 15－2－5 可以看到，当试验次数很多时，硬币正面朝上的频率接近于 0.5，并在其附近摆动. 而硬币正面向上的概率是 0.5.

一般地，对于给定的随机事件 A，在相同条件下，随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率会在随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的附近摆动并趋于稳定. 我们将频率的这个性质称为**频率的稳定性**. 因此，若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则当试验次数 n 很大时，可以用事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 来估计事件 A 的概率，即 $P(A) \approx \frac{m}{n}$.

例 5 某市 1999～2002 年新生儿出生数及其中男婴数（单位：人）的数据如表 15－2－3 所示.

表 15－2－3

时　间/年	1999	2000	2001	2002
出生婴儿数	21 840	23 070	20 094	19 982
出生男婴数	11 453	12 031	10 297	10 242

（1）试计算男婴各年出生的频率（精确到 0.001）；

（2）该市男婴出生的概率约是多少？

解　（1）1999 年男婴出生的频率为 $\frac{11\,453}{21\,840} \approx 0.524$.

同理可求得 2000 年、2001 年和 2002 年男婴出生的频率分别为 0.521，0.512，0.513.

（2）该市各年男婴出生的频率在 0.51 至 0.53 之间，故该市男婴出生的概率约为 0.52.

例 6 对某地近 50 年的 8 月 1 日和 9 月 1 日的天气资料进行分析，其中降雨的结果如表 15－2－4 所示.

表 15－2－4

时　　间	近 10 年	近 20 年	近 30 年	近 40 年	近 50 年
8 月 1 日降雨/天	8	17	25	33	41
9 月 1 日降雨/天	3	7	9	13	16

问：该地 8 月 1 日与 9 月 1 日哪一天降雨的可能性大？

解　该地 8 月 1 日与 9 月 1 日的降雨频率如表 15－2－5 所示（精确到 0.01）.

表 15－2－5

时　　间	近 10 年	近 20 年	近 30 年	近 40 年	近 50 年
8 月 1 日降雨频率	0.8	0.85	0.83	0.83	0.82
9 月 1 日降雨频率	0.3	0.35	0.3	0.33	0.32

从表 15－2－5 可以看到，8 月 1 日该地降雨的频率在 0.8 至 0.85之间，其降雨的概率大约在 0.8 至 0.85 之间. 而 9 月 1 日该地降雨频率在 0.3 至 0.35 之间，其降雨的概率大约在 0.3 至 0.35 之间. 因此，可以估计该地 8 月 1 日的降雨可能性更大一些.

对于随机现象，虽然事先无法确定某个随机事件是否发生，但是在相同条件下进行大量重复试验时，可以发现随机事件的发生与否呈现出某种规律性. 概率论正是研究随机现象的数量规律的一个数学分支.

练 习

1. 某种彩票的中奖概率为$\frac{1}{10\,000}$，这是指(　　).

A. 买 10 000 张彩票就一定能中奖

B. 买 10 000 张彩票中 1 次奖

C. 若买 9 999 张彩票未中奖，则买第 10 000 张必中奖

D. 买 1 张彩票中奖的可能性是$\frac{1}{10\,000}$

2. 某城市的天气预报中包含降水概率预报，例如预报“明天降水概率为 90%”，这是指(　　).

A. 明天该地区约 90%的地方会降水，其余地方不降水

B. 明天该地区约 90%的时间会降水，其余时间不降水

C. 气象台有 90%的专家认为明天会降水，其余专家认为不降水

D. 明天该地区降水的可能性为 90%

3. 某医院治疗一种疾病的治愈率为 10%，如果前 9 个病人都没有治愈，那么第 10 个病人就一定能治愈吗?

4. 某工厂为了解某种产品使用 1 年后损坏的概率，进行了跟踪调查. 若从去年的 1 月 1 日到今年的 1 月 1 日，发现在 10 000 件使用的产品中共有 400 件产品损坏，则估计每件产品在 1 年内损坏的概率约为________.

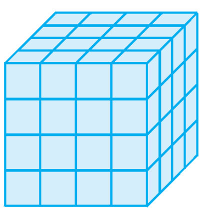
习题 15.2

感受 · 理解

1. 从含有 500 个个体的总体中，一次性地抽出 25 个个体，假定其中每个个体被抽到的概率相等，那么，总体中某个个体被抽到的概率为______.

2. 某种产品共 100 件，其中有一等品 28 件、二等品 65 件，一等品与二等品都是合格品，其余为不合格品. 某人买了这些产品中的 1 件，问：他买到一等品的概率是多少? 买到合格品的概率是多少?

3. 如图，把一个体积为 64 cm^3、表面涂有蓝漆的正方体木块锯成 64 个体积为 1 cm^3的小正方体，从中任取 1 块，求这 1 块至少有 1 面涂有蓝漆的概率.



(第 3 题)

4. 连续抛掷同一颗骰子 3 次，求向上的点数之和为 16 的概率.

5. 100 张卡片上分别写有 1，2，3，…，100，问：

(1) 从中任取 1 张，这张卡片上写的数是 6 的倍数的结果有多少种?

(2) 从中任取 1 张，这张卡片上写的数是 6 的倍数的概率是多少?

6. 某数学兴趣小组有男生 3 名，记为 a_1，a_2，a_3；有女生 2 名，记为 b_1，b_2. 现从中任选 2 名学生去参加学校数学竞赛.

(1) 写出样本空间 Ω 所包含的样本点；
(2) 求参赛学生中恰好有 1 名男生的概率；
(3) 求参赛学生中至少有 1 名男生的概率.

7. 已知甲、乙、丙三人在 3 天节日中值班，每人值班 1 天，那么甲排在乙前面值班的概率是多少?

8. 某电台一档谈话节目的听众来自某市的甲、乙、丙 3 个县，主持人从这 3 个县接听到的电话数与这 3 个县的人口数成正比. 已知甲、乙、丙 3 个县的人口数分别为 185 万、81 万和 36 万，试求：
(1) 随机接听 1 个电话来自甲县的概率；
(2) 这天的第一个电话来自乙县的概率；
(3) 这天的第一个电话不是来自丙县的概率.

9. 从一副 52 张的扑克牌(不含大、小王)中抽出 1 张，分别求抽出 1 张是 7 的概率，抽出 1 张是方块的概率，以及抽出 1 张是方块 7 的概率.

10. 在 1，2，4，6 路公共汽车都要停靠的一个站台(假定没有 2 辆汽车同时到站)，有个乘客等候 1 路或 4 路公共汽车. 假定各路公共汽车首先到站的可能性相等，求首先到站的车就是这位乘客所要乘的公共汽车的概率.

11. 某射击运动员进行双向飞碟射击训练，各次训练的成绩记录如下：

射击次数	100	120	150	100	150	160	150
击中飞碟次数	81	95	123	82	119	127	121
击中飞碟的频率							

(1) 将各次训练记录击中飞碟的频率填入表中；
(2) 这个运动员击中飞碟的概率约为多少?

12. 对本书附录中的“随机数表”的前 20 行统计数字 0 出现的频率，并对随机数表中各个数字出现的概率作出估计.

思考・运用

13. 某厂生产的 10 件产品中，有 8 件合格品、2 件不合格品，合格品与不合格品在外观上没有区别. 从这 10 件产品中任意抽检 2 件，计算：
(1) 2 件都是合格品的概率；
(2) 1 件是合格品、1 件是不合格品的概率；
(3) 如果抽检的 2 件产品都是不合格品，那么这批产品将被退货，求这批产品被退货的概率.

14. 一只不透明的口袋中装有形状、大小都相同的 6 个小球，其中有 2 个白球、2 个红球和 2 个黄球. 从中 1 次随机摸出 2 个球，试求：
(1) 2 个球都是红球的概率；
(2) 2 个球同色的概率；
(3) “恰有 1 个球是白球”的概率是“2 个球都是白球”的概率的多少倍?

15. 一年按 365 天计算，2 名同学在同一天过生日的概率为多少?

16. (操作题) 全班学生每人抛掷 20 枚图钉，先分别统计钉尖朝上的频数和频率，再分组统计钉尖朝上的频数和频率，最后对全班统计钉尖朝上的频数和频率，由此对钉尖朝上的概率作出估计.

探究・拓展

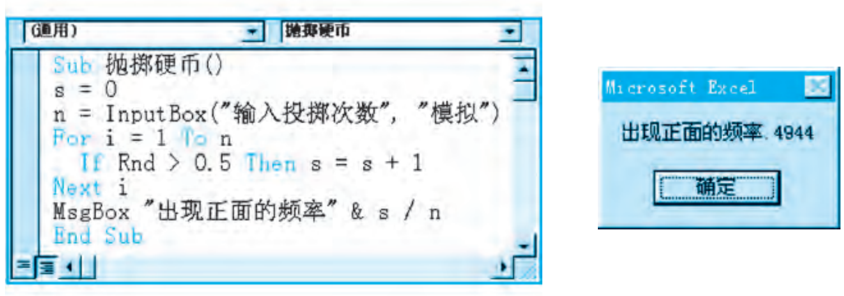
17. 齐王与田忌赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马；田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马；田忌的下等马劣于齐王

的下等马. 现双方各出上、中、下等马各 1 匹分组分别进行 1 场比赛，胜 2 场及以上者获胜. 若双方均不知对方马的出场顺序，试求田忌获胜的概率.

18. 在柯南道尔的侦探小说《跳舞的小人》中，福尔摩斯根据英语中字母 e 的使用频率最高，破译了用跳舞人形所写的密码. 在美国作家爱伦 · 坡的小说《金甲虫》中也有类似的情节. 从网上找若干篇英文文章，用计算机统计字母 a，b，c，…，z 出现的频率，由此估计这 26 个字母在英文文章中各自出现的概率.

19. VBA(Visual Basic for Application)是 Excel 自带的一种程序设计语言，它具有一般程序设计语言所具有的功能，可由手工写入或宏记录器两种方式生成. 使用 VBA 宏记录器无须亲自写 VBA 的代码，在计算机内会自动生成 VBA 的代码. 你只要打开宏记录器，做 1 次你所需要的操作. 例如，画 1 个经常要用的表格，宏记录器会用代码记录下你的每一步操作，操作完成后，保存为一个叫宏的文件. 下次再做同样的事，你只要执行该文件，就可以自动画出已设计好的表格. 当然，如果没有相关记录，就要靠人工编写 VBA 程序来弥补.

如图，在 Excel 工作表中，选择“开发工具/Visual Basic 编辑器”. 在 VB 编辑器窗口中选择“工具/宏”，在弹出的对话框中，在“宏名称”栏内输入宏的名称，如“抛掷硬币”，单击“创建”，出现宏主体语句 Sub 和 End Sub，输入你的程序后按 F5 即可运行. 如不满意，可随时修改.



（第 19 题）

当抛掷次数为 10 000 时，可得出现正面的频率为 0.494 4(你的模拟结果可能与此不同)，并填写下表：

模拟次数	正面向上的频率
10	
100	
1 000	
5 000	
10 000	
50 000	
100 000	
500 000	

15.3 互斥事件和独立事件

研究数学对象之间的关系是数学研究的基本任务，因此，研究事件之间的关系也就成了概率论的基本任务.

● 事件之间有哪些重要的关系呢？

1. 互斥事件

让我们仍然回到“抛掷骰子”的试验.

“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是偶数”记为事件 A，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是 3”记为事件 B，则 $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$，$B=\{\omega_3\}$. 不难发现 $AB=\varnothing$，即事件 A 与 B 不可能同时发生. 这时，我们称 A，B 为**互斥事件**(exclusive events).

进一步，若记“抛掷一颗骰子，结果向上的点数是奇数”为事件 C，则$C=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. 不难发现 $AC=\varnothing$，并且 $A+C=\Omega$，即互斥事件 A，C 中必有一个发生. 这时，我们称 A，C 为**对立事件**(complementary events)，记作 $C=\bar{A}$或 $A=\bar{C}$.

显然，对立事件必为互斥事件，但反之不然. 对立事件是必有一个发生的互斥事件.

对于互斥事件，有下列结论：

> 如果事件 A，B 互斥，那么事件 $A+B$ 发生的概率，等于事件 A，B 分别发生的概率的和，即
> $$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

这是概率满足的第三个基本性质(亦称概率的加法公式).

思　考

利用古典概型验证上述加法公式.

互斥事件可以推广到 n 个事件的情形 ($n\in\mathbf{N}$, $n>2$)：如果事件 A_1，A_2，…，A_n 中任何两个事件都是互斥事件，那么称事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥. 如果事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，那么

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

随机事件的概率还具有以下常用性质：

(1) $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(2) 当 $A\subseteq B$ 时，$P(A)\leqslant P(B)$；

(3) 当 A，B 不互斥时，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明　(1) 事件 A 与 $\bar{A}$ 必有一个发生，故 $A+\bar{A}$ 是必然事件，由

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

及
$$P(A+\bar{A})=1,$$

可得
$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质(2)(3)可以利用古典概型进行验证,留作作业(习题 15.3(1)第 9 题).

例 1 一只不透明的口袋内装有大小一样的 2 个白球和 2 个黑球,从中先后各摸出 1 个球,记"摸出 2 个白球"为事件 A,"摸出 1 个白球和 1 个黑球"为事件 B,"摸出 2 个球中至少有 1 个白球"为事件 C. 问:事件 A 与 B 是否为互斥事件?是否为对立事件?并求 $P(C)$.

解 2 个白球与 2 个黑球分别记为 W_1, W_2, B_1, B_2,样本点 (W_1, B_1)表示"从口袋内先后摸出的球依次为 W_1, B_1",余类推,则样本空间

$$\Omega=\{(W_1,W_2),(W_1,B_1),(W_1,B_2),(W_2,W_1),(W_2,B_1),(W_2,B_2),(B_1,W_1),(B_1,W_2),(B_1,B_2),(B_2,W_1),(B_2,W_2),(B_2,B_1)\},$$

$$A=\{(W_1,W_2),(W_2,W_1)\},$$

$$B=\{(W_1,B_1),(W_1,B_2),(W_2,B_1),(W_2,B_2),(B_1,W_1),(B_1,W_2),(B_2,W_1),(B_2,W_2)\}.$$

因为 $AB=\varnothing$,所以 A,B 是互斥事件.

又因为 $A+B\neq\Omega$,所以 A,B 不是对立事件. 又 $A+B=C$,故

试利用 $P(C)=1-P(\bar{C})$来计算 $P(C)$.

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{12}+\frac{8}{12}=\frac{5}{6}.$$

例 2 某人射击 1 次,命中 7~10 环的概率如表 15-3-1 所示.

表 15-3-1

命中环数	10 环	9 环	8 环	7 环
概　　率	0.12	0.18	0.28	0.32

(1) 射击 1 次,求至少命中 7 环的概率;

(2) 射击 1 次,求命中不足 7 环的概率.

解 记"射击 1 次,命中 k 环"为事件 A_k($k\in\mathbf{N}$,且 $k\leqslant 10$),则事件 A_k 两两互斥.

(1) 记"射击 1 次,至少命中 7 环"为事件 A,则当 A_{10}, A_9, A_8 或 A_7 之一发生时,事件 A 发生. 由互斥事件的概率公式,得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_{10}+A_9+A_8+A_7)\\&=P(A_{10})+P(A_9)+P(A_8)+P(A_7)\\&=0.12+0.18+0.28+0.32=0.9.\end{aligned}$$

(2) 事件"射击 1 次,命中不足 7 环"是事件"射击 1 次,命中至少

7 环”的对立事件，即$\bar{A}$表示事件“射击 1 次，命中不足 7 环”. 根据对立事件的概率公式，得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

答　此人射击 1 次，至少命中 7 环的概率为 0.9，命中不足 7 环的概率为 0.1.

例 3　黄种人群中各种血型的人所占的比如表 15 - 3 - 2 所示.

表 15 - 3 - 2

血　　型	A	B	AB	O
该血型的人所占比/%	28	29	8	35

已知同种血型的人可以输血，O 型血可以输给任何一种血型的人，任何人的血都可以输给 AB 型血的人，其他不同血型的人不能互相输血. 小明是 B 型血，若小明因病需要输血，问：

(1) 任找 1 个人，其血可以输给小明的概率是多少？

(2) 任找 1 个人，其血不能输给小明的概率是多少？

解　(1) 对于任何 1 个人，其血型为 A，B，AB，O 型血的事件分别记为 A'，B'，C'，D'，它们是互斥的. 由已知，有

$$P(A') = 0.28,\ P(B') = 0.29,$$

$$P(C') = 0.08,\ P(D') = 0.35.$$

因为 B，O 型血可以输给 B 型血的人，所以“可以输给 B 型血的人”为事件 $B' + D'$. 根据互斥事件的概率加法公式，有

$$P(B' + D') = P(B') + P(D') = 0.29 + 0.35 = 0.64.$$

(2) 因为 A，AB 型血不能输给 B 型血的人，所以“不能输给 B 型血的人”为事件 $A' + C'$，且

$$P(A' + C') = P(A') + P(C') = 0.28 + 0.08 = 0.36.$$

答　任找 1 个人，其血可以输给小明的概率为 0.64，其血不能输给小明的概率为 0.36.

第(2)问也可以这样解：因为事件“其血可以输给 B 型血的人”与事件“其血不能输给 B 型血的人”是对立事件，所以由对立事件的概率公式，有

$$P(\overline{B' + D'}) = 1 - P(B' + D') = 1 - 0.64 = 0.36.$$

由上述例 1、例 2、例 3 可见，通过事件的运算，将较复杂的事件用简单的事件来表示，然后根据概率的性质，将较复杂事件的概率转化为简单事件的概率，这既是求解概率的基本方法，也是数学研究的基本方法.

练 习

1. 记“抛掷一颗骰子,向上的点数是 4, 5, 6”为事件 A,记“抛掷一颗骰子,向上的点数是 1, 2”为事件 B,记“抛掷一颗骰子,向上的点数是 1, 2, 3”为事件 C,记“抛掷一颗骰子,向上的点数是 1, 2, 3, 4”为事件 D. 判断下列每对事件是否为互斥事件,如果是,再判断它们是否为对立事件.

(1) A 与 B;

(2) A 与 C;

(3) A 与 D.

2. 有一批小包装食品,其中质量在 90～95 g 的有 40 袋,质量在 95～100 g 的有 30 袋,质量在 100～105 g 的有 10 袋. 从中任意抽取 1 袋,此袋食品的质量在 95～100 g 的概率为______,此袋食品的质量不足 100 g 的概率为______,此袋食品的质量不低于 95 g 的概率为______.(质量在 a～b g 指的是质量的数值在区间$[a, b)$内)

3. 甲、乙两个同学下棋,若甲获胜的概率为 0.2,甲、乙下成和棋的概率为 0.5,则甲不输的概率为________.

4. 某地区年降水量 d(单位: mm)在下列范围内的概率 p 如下表:

d	[600, 800)	[800, 1 000)	[1 000, 1 200)	[1 200, 1 400)	[1 400, 1 600)
p	0.12	0.26	0.38	0.16	0.08

(1) 求年降水量在[800, 1 200)(单位: mm)内的概率;

(2) 若年降水量 $d \geqslant 1\,200$(mm) 就可能发生涝灾,求该地区发生涝灾的概率.

5. 某人外出参加活动,他乘火车、轮船、汽车、飞机去的概率分别为 0.3, 0.2, 0.4, 0.1, 求:

(1) 他乘火车或乘飞机去的概率;

(2) 他不乘轮船去的概率.

习题 15.3(1)

感受·理解

1. 一只不透明的口袋中装有若干个大小一样的红球、黄球与蓝球,若从中随机摸出一个球,则摸出红球的概率为 0.45,摸出黄球的概率为 0.33. 求:

(1) 摸出红球或黄球的概率;

(2) 摸出蓝球的概率.

2. 一只水果篮子里有 3 个橘子、2 个香梨、4 个苹果,若从中任意选择 1 个水果,则选中橘子或苹果的概率为________.

3. 一架飞机向目标投弹,击毁目标的概率为 0.2,目标未受损的概率为 0.4,求使目标受损但未击毁的概率.

4. 经统计,在某储蓄所 1 个营业窗口排队等候的人数及相应概率如下:

排队人数	0	1	2	3	4	≥5
概　率	0.1	0.16	0.3	0.3	0.1	0.04

(1) 至多 2 人排队等候的概率是多少?

(2) 至少 3 人排队等候的概率是多少?

5. 某品牌电视机的一等品率为 95%，二等品率为 4.8%，次品率为 0.2%. 某人买了 1 台该品牌电视机，求：

(1) 这台电视机是正品(一等品或二等品)的概率；

(2) 这台电视机不是一等品的概率.

6. 记“同时抛掷两颗骰子，向上的点数和为 6”为事件 A，记“同时抛掷两颗骰子，向上点数和为 8”为事件 B，求 $P(A)$，$P(B)$ 及 $P(A+B)$.

7. 经临床验证，一种新药对某种疾病的治愈率为 54%，显效率为 22%，有效率为 12%，其余为无效. 求某人患该病使用此药后无效的概率.

思考·运用

8. 将扑克牌 4 种花色的 A，K，Q 共 12 张洗匀.

(1) 甲从中任意抽取 2 张，求抽出的 2 张都为 A 的概率；

(2) 若甲已抽到了 2 张 K 后未放回，求乙抽到 2 张 A 的概率.

9. 利用古典概型验证以下概率性质：

(1) 当 $A \subseteq B$ 时，$P(A) \leqslant P(B)$；

(2) 当 A，B 不互斥时，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

探究·拓展

10. 某种彩票的投注号码由 7 位数字组成，每位数字均为 0～9 这 10 个数码中的任意 1 个. 由摇号得出 1 个 7 位数(首位可为 0)为中奖号，若某张彩票的 7 位数与中奖号相同即得一等奖，若有 6 位相连数字与中奖号的相应数位上的数字相同即得二等奖，若有 5 位相连数字与中奖号的相应数位上的数字相同即得三等奖，各奖不可兼得. 某人买了 1 张彩票. 求：

(1) 获得一等奖的概率；

(2) 获得三等奖及以上奖的概率.

2. 独立事件

我们知道，当随机事件 A，B 互斥时，$P(A+B)=P(A)+P(B)$，那么，对于两个随机事件 A，B，$P(AB)$ 与 $P(A)$，$P(B)$ 有怎样的关系呢?

考察下面的随机事件 A 和随机事件 B.

A：先后抛掷两颗骰子，第一颗向上的点数是 1；

B：先后抛掷两颗骰子，第二颗向上的点数是 2.

随机事件 A 和随机事件 B 有着怎样的关系?

从表面上看，事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率没有影响. 果真如此吗? 为了回答这个问题，需要计算相关概率. 为此，分别写出 Ω，A，B 所包含的样本点如下：

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

图 15-3-1

$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$,

$B=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$,

$AB=\{(1,2)\}$.

因此，$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(AB)=\frac{1}{36}$.

从而 $P(AB)=P(A)P(B)$.

事实上，若 A 发生，则 B 发生的概率为$\frac{1}{6}$；

若 A 不发生，则 B 发生的概率为$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$(图 15-3-1).

这表明：事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率.

一般地，对于两个随机事件 A，B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，那么称 A，B 为**相互独立事件**(independent events).

思 考

尝试证明：若 A，B 相互独立，则 $\bar{A}$，B 相互独立.

例 1 一只不透明的口袋内装有大小相同，颜色分别为红、黄、蓝的 3 个球.

(1)“从口袋内有放回地抽取 2 个球，第一次抽到红球”记为事件 A，“从口袋内有放回地抽取 2 个球，第二次抽到黄球”记为事件 B.

(2)“从口袋内无放回地抽取 2 个球，第一次抽到红球”记为事件 A，“从口袋内无放回地抽取 2 个球，第二次抽到黄球”记为事件 B.

试分别判断(1)(2)中的 A，B 是否为相互独立事件.

解法 1 (1) 记红、黄、蓝色球的号码分别为 1，2，3，则 Ω，A，B 可分别表示为

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\},$$
$$A=\{(1,1),(1,2),(1,3)\},$$
$$B=\{(1,2),(2,2),(3,2)\}.$$

若 A 发生，则 B 发生的概率为$\frac{1}{3}$；

若 A 不发生，则 B 发生的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

可见，事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率，因此，A，B 相互独立.

注意比较(1)(2)中的 Ω，A，B 的区别.

(2) 记红、黄、蓝色球的号码分别为 1，2，3，则 Ω，A，B 可分别表示为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\},$$
$$A=\{(1,2),(1,3)\},$$
$$B=\{(1,2),(3,2)\}.$$

若 A 发生，则 B 发生的概率为 $\frac{1}{2}$；

若 A 不发生，则 B 发生的概率为 $\frac{1}{4}$.

可见，事件 A 发生与否影响事件 B 发生的概率，因此，A，B 不相互独立.

解法 2　(1) $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

又因为 $AB=\{(1,\ 2)\}$，所以 $P(AB)=\frac{1}{9}$，从而

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

因此，A，B 为相互独立事件.

(2) 因为 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，

所以
$$P(AB)\neq P(A)P(B).$$

因此，A，B 不是相互独立事件.

例 2　甲坛子里装有 1 个白球、1 个黑球，共 2 个球；乙坛子里装有 2 个白球、1 个黑球，共 3 个球. 从甲、乙两个坛子里分别摸出 1 个球，结果都是白球的概率是多少？

解　记甲坛子里的 1 个白球、1 个黑球分别为 W_1，B_1；乙坛子里的 2 个白球、1 个黑球分别为 W_2，W_3，B_2. “从甲、乙两个坛子里分别摸出 1 个球，甲坛子里摸出的是白球”记为事件 A，“从甲、乙两个坛子里分别摸出 1 个球，乙坛子里摸出的是白球”记为事件 B，则

$$\Omega=\{(W_1,\ W_2),\ (W_1,\ W_3),\ (W_1,\ B_2),\ (B_1,\ W_2),\ (B_1,\ W_3),\ (B_1,\ B_2)\},$$
$$A=\{(W_1,\ W_2),\ (W_1,\ W_3),\ (W_1,\ B_2)\},$$
$$B=\{(W_1,\ W_2),\ (W_1,\ W_3),\ (B_1,\ W_2),\ (B_1,\ W_3)\},$$

从而 $AB=\{(W_1,\ W_2),\ (W_1,\ W_3)\}$.

所以 $$P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

答 从甲、乙两个坛子里分别摸出 1 个球，结果都是白球的概率是$\frac{1}{3}$.

例 3 一只不透明的口袋内装有 9 张卡片，上面分别标有 1～9 这 9 个数(1 张卡片上标 1 个数)，“从中任抽取 1 张卡片，结果卡片号或为 1 或为 4 或为 7”记为事件 A，“从中任抽取 1 张卡片，结果卡片号小于 7”记为事件 B. 试判断 A，B 是否为相互独立事件.

解法 1 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$A=\{1,4,7\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$.

若 A 发生，则 B 发生的概率为$\frac{2}{3}$；

若 A 不发生，则 B 发生的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

可见，事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率，因此，A，B 相互独立.

解法 2 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$A=\{1,4,7\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$AB=\{1,4\}$，

所以 $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，$P(AB)=\frac{2}{9}$，即

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

因此，A，B 为相互独立事件.

由上例可以看出，A，B 独立与否有时很难从直观上作出判断，唯有经过概率之间的关系才可以作出理性而准确的判断.

独立事件可以推广到 n 个事件的情形 $(n\in\mathbf{N},\ n>2)$. 一般地，如果事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，那么

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

练 习

1. 下面的说法正确吗？

(1) 甲、乙、丙三人轮流抛掷一枚硬币，甲抛掷的结果是正面，乙抛掷的结果也是正面，则丙抛掷的结果是正面的可能性很小.

(2) 若 A，B 为互斥事件，则 A，B 必为相互独立事件.

2. “抛掷一枚硬币，结果正面向上”记为事件 A，“抛掷一枚硬币两次，结果第一次正面向上”记为事件 A_1.

(1) $P(A)$与 $P(A_1)$有什么关系？

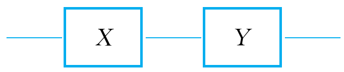
(2) 抛掷一枚硬币 4 次，结果 4 次均正面向上的概率是多少？

习题 15.3(2)

感受·理解

1. “抛掷一颗骰子，结果向上的点数小于 3”记为事件 A，“抛掷一颗骰子，结果向上的点数大于 1 且小于 5”记为事件 B. 试判断 A，B 是否相互独立.

2. 如图，用 X，Y 两种不同的元件串联连接成系统 S，每个元件是否正常工作不受其他元件的影响. 当元件 X，Y 都正常工作时，系统 S 正常工作. 已知元件 X，Y 正常工作的概率分别为 0.8，0.9，求系统 S 正常工作的概率.



系统 S

（第 2 题）

3. 甲、乙两人独立地破译某个密码，甲译出密码的概率为 0.35，乙译出密码的概率为 0.25，求密码被破译的概率.

思考·运用

4. 甲、乙两人各进行一次射击，如果两人击中目标的概率都是 0.6，计算：

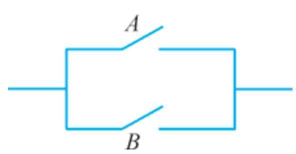
(1) 其中恰有一人击中目标的概率；

(2) 至少有一人击中目标的概率.

5. 加工某零件共需两道工序，第 1、第 2 道工序生产产品的不合格率分别为 0.03，0.05，且各道工序互不影响，求最终产品为不合格品的概率.

探究·拓展

6. 在一段线路中，并联着 2 个自动控制的开关，只要其中有一个开关闭合，线路就能正常工作. 假定在某时段内，每个开关能够闭合的概率均为 0.9，计算这段时间内，线路正常工作的概率.



（第 6 题）

问题与探究

确定公平的规则

一般认为，抛掷质地均匀的硬币，根据向上的一面是正面还是反面作出决断是公平的. 不过，真正质地均匀的硬币是很少的. 尽管如此，这一方法在日常生活中仍经常使用，比如足球比赛就是用抛掷硬币的方法确定先开球一方.

现需要决定，在你和另一位同学中选 1 人参加学校的一项活动，具体是谁参加由你们自己决定. 为公平起见，你们 2 人决定用抛掷硬币的方法确定，可恰好大家都没有硬币，只有一只啤酒瓶盖. 很显然，抛掷一次啤酒瓶盖，由出现正面还是反面决定谁参加学校的活动是不公平的，因为啤酒瓶盖的质地不够均匀.

抛掷 1 次不行，那么抛掷 2 次呢？

确定怎样的规则，才能确保结果公平？

请说明理由.

阅　读

制作杨辉三角形

制作一个如图 1 所示的通道及下方相互隔离的储槽. 若把 1 粒球形小珠放入最上方的通道入口，则小珠落入下方每个储槽的概率有何规律？

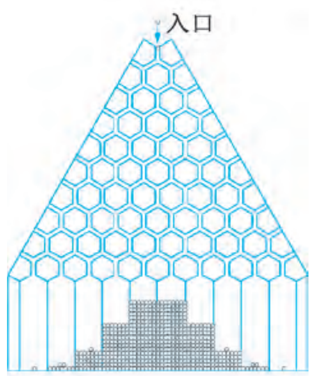


图 1

在上方的入口箭头所指处投入 2^n 粒球形小珠，当每粒小珠落下时，每到一层的分岔处，都以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左边或右边的下一层通道下落. 显然，任何一层的最左、最右的两个通道都只有 1 个可能情况，而每一层的其他通道通过小珠的可能情况，应等于其两肩上两个通道的可能情况的和. 这样就得到了如图 2 所示的数表：

由此，当通道共 9 层时，投入 2^9 粒小珠后在从左至右的 10 个储槽中落入小珠的数目，按可能情况计算，应是 1，9，36，84，126，126，84，36，9，1. 故所求概率依次为

$$\frac{1}{2^9},\ \frac{9}{2^9},\ \frac{36}{2^9},\ \frac{84}{2^9},\ \frac{126}{2^9},\ \frac{126}{2^9},\ \frac{84}{2^9},\ \frac{36}{2^9},\ \frac{9}{2^9},\ \frac{1}{2^9}.$$

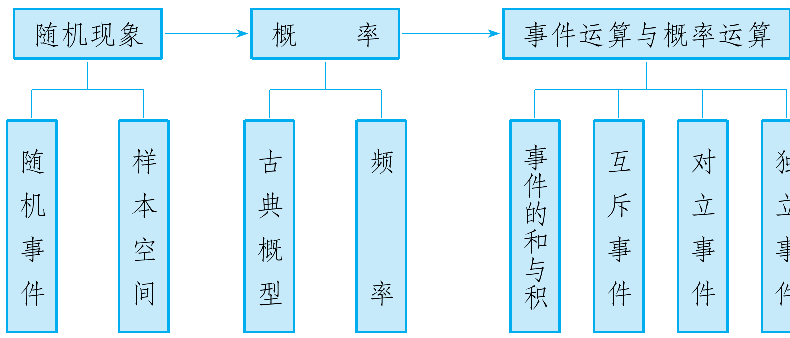
1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
1　9　36　84　126　126　84　36　9　1

图 2

图 2 所示的数表最早由我国宋朝时期的数学家杨辉于 1261 年画在他所著的《详解九章算法》中，并说明出于《释锁算书》，贾宪曾用过此图. 西方称此图为帕斯卡三角形，是帕斯卡于 1654 年发表的.

本章回顾

本章引入样本点和样本空间的概念，把随机事件定义为样本空间的子集，研究了随机事件的关系和运算. 通过古典概型、频率的稳定性，研究随机事件发生的概率，在此基础上研究概率的基本性质、互斥事件、独立事件，并利用其简化某些概率计算.



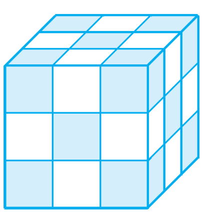
运用集合语言刻画随机现象，研究随机事件的关系，使我们能够将现实问题转化为数学问题，进而解决现实问题.

复 习 题

感受・理解

1. 某班要选 1 名学生做代表，每个学生当选都是等可能的，若“选出代表是男生”的概率是“选出代表是女生”的概率的$\frac{4}{5}$，求这个班的男生人数占全班人数的百分比.

2. 如图，边长为 1 的蓝色小正方体与白色小正方体相间堆成 1 个 $3\times3\times3$ 的大正方体(同色正方体都没有相邻的面). 若从中任选 1 个小正方体，则选中蓝色小正方体的概率是多少?



(第 2 题)

3. 已知某运动员在一次射击中，射中 10 环、9 环、8 环、7 环、7 环以下的概率分别为 0.24，0.28，0.19，0.16，0.13，分别计算下列事件发生的概率：

(1) 1 次射击中，射中 10 环或 9 环的概率；

(2) 1 次射击中，射中环数不足 8 环的概率.

4. 在 4 件产品中，有一等品 2 件，二等品 1 件(一等品与二等品都是正品)，次品 1 件，现从中任取 2 件.

(1) 2 件都是一等品的概率是多少?

(2) 2 件中有 1 件是次品的概率是多少?

(3) 2 件都是正品的概率是多少?

5. 某单位要在 4 名工人中安排 2 名分别到两处出差(每人被安排都是等可能的).

(1) 共有多少种安排方法?

(2) 其中甲、乙两人都被安排的方法有多少种?

(3) 其中甲、乙两人都被安排的概率是多少?

6. 从 3 台甲型电视机和 2 台乙型电视机中任取 2 台,其中两种类型的电视机被同时取到的概率是多少?

7. 抛掷一枚硬币 3 次,分别求掷得 0 次、1 次、2 次、3 次正面向上的概率.

8. 连续抛掷一颗骰子 2 次,分别求掷出的点数和为 2,3,…,12 的概率.

9. 有 5 条线段,其长度分别为 1 cm,3 cm,5 cm,7 cm,9 cm. 现从中任取 3 条,求能构成三角形的概率.

10. 在一个盒子中有除颜色之外其他都相同的 20 个球,其中有 10 个红球、10 个白球. 现从盒中有放回地依次摸出 1 个球,求第 1 次摸出红球且第 2 次摸出白球的概率.

思考・运用

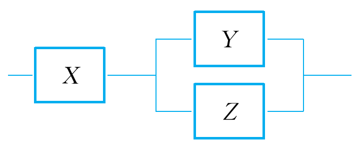
11. 一次口试中,每位考生要在 8 道口试题中随机抽出 2 道题回答,答对其中 1 题为及格.

(1) 某位考生会答 8 道题中的 5 道题,这位考生及格的概率有多大?

(2) 若一位考生及格的概率小于 50%,则他最多只会答几道题?

12. 同时抛掷两颗骰子,向上的点数之和可能是多少? 向上的点数之和为多少时概率最大?

13. 如图,用 X,Y,Z 三种不同元件连接成系统 S,每个元件是否正常工作不受其他元件的影响. 当元件 X 正常工作且 Y,Z 中至少有一个正常工作时,系统 S 正常工作. 已知元件 X,Y,Z 正常工作的概率分别为 0.85,0.9,0.95,求系统 S 正常工作的概率.



系统 S

(第 13 题)

探究・拓展

14. 从 1~20 这 20 个整数中随机选择一个数,设“选到的数能被 2 整除”为事件 A,“选到的数能被 3 整除”为事件 B. 求下列事件的概率:

(1) 这个数既能被 2 整除,也能被 3 整除;

(2) 这个数能被 2 整除或能被 3 整除;

(3) 这个数既不能被 2 整除,也不能被 3 整除.

15. 在某项比赛中,两个水平相当的选手在决赛中相遇,决赛采用五局三胜制,胜者获得全部奖金,前 3 局打成 2∶1 时比赛因故终止. 有人提出按 2∶1 分配奖金,你认为这样分配合理吗? 为什么?

本章测试

一、填空题

1. 抛掷一颗质地均匀的骰子，若事件 A 为“向上的点数至少为 5”，则事件 $\overline{A}$ 是指__________________.

2. 某人的密码箱上的密码是五位数字号码，每位上的数字可在 0～9 这 10 个数字中选取. 若他记得密码前 4 位上的数字，忘记了末位上的数字，但他知道末位上的数字是奇数，则他 1 次就能打开密码箱的概率是________.

3. 若从 2 名男生与 2 名女生中选出 2 人担任正、副班长，则其中女生甲当选副班长的概率是________.

4. 水产试验厂对某种鱼进行人工孵化，经统计研究，每 10 000 个鱼卵大约能孵出 8 000 尾鱼苗. 根据概率的统计定义，要孵化 5 000 尾鱼苗，大概要准备鱼卵________个.

5. 有分别写着数字 1～20 的 20 张卡片，若从中随机取出 1 张，则这张卡片上的数字是 2 或 3 的倍数的概率是________.

6. 制造一种零件，甲机床的正品率为 0.98，乙机床的正品率为 0.96，从它们制造的产品中各任抽 1 件，则两件都是正品的概率是________.

二、选择题

7. 采用简单随机抽样的方法，从含有 6 个个体的总体中抽取 1 个容量为 3 的样本，某个个体被抽到的概率是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

8. 从一批羽毛球中任取 1 个羽毛球，如果其质量小于 4.8 g 的概率是 0.3，其质量不小于 4.85 g 的概率是 0.32，那么其质量在[4.8，4.85)(单位：g)范围内的概率是(　　).

A. 0.62　　B. 0.38

C. 0.7　　D. 0.68

9. 一只不透明的口袋内装有 5 个小球，其中 3 个白球、2 个黑球. 现有放回地从袋中依次摸出 1 个球，则前三次摸出的球均为白球的概率是(　　).

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{3}{125}$

C. $\frac{27}{125}$　　D. $\frac{1}{27}$

10. 抛掷两枚硬币，若记出现“两个正面”“两个反面”“一正一反”的概率分别为 P_1，P_2，P_3，则下列判断中错误的是(　　).

A. $P_1 = P_2 = P_3$　　B. $P_1 + P_2 = P_3$

C. $P_1 + P_2 + P_3 = 1$　　D. $P_3 = 2P_1 = 2P_2$

三、解答题

11. 甲、乙、丙 3 人独立地破译某个密码，每人译出密码的概率均为 0.25，求密码被破译的概率.

12. 对 200 个电子元件的寿命(单位：h)进行追踪调查，情况如下：

寿命/h	[100，200)	[200，300)	[300，400)	[400，500)	[500，600]
个　数	20	30	80	40	30

(1) 估计元件的寿命在[100，400)(单位：h)内的概率；

(2) 估计元件的寿命在 400 h 以上的概率.

13. 在一次满分为 100 分的数学考试中，某同学的考试成绩及其概率如下表所示，请计算他在该次数学考试中取得 80 分以上成绩的概率和考试不及格(低于 60 分)的概率.

成绩/分	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
概　率	0.08	0.15	0.55	0.12

14. 从数字 1，2，3，4，5 中任取 2 个数字，组成没有重复数字的两位数，试求：

(1) 这个两位数是 5 的倍数的概率；

(2) 这个两位数是偶数的概率.

15. 甲、乙两个同学分别抛掷一颗质地均匀的骰子.

(1) 求他们抛掷的骰子向上的点数相同的概率；

(2) 求甲抛掷的骰子向上的点数大于乙抛掷的骰子向上的点数的概率.

专题　数学建模与数学探究

数学建模侧重于数学知识在数学外部的联系和应用，数学探究则更多地关注数学知识在数学内部的联系和应用. 数学建模是运用数学知识解决实际问题的基本手段，也是推动数学发展的动力. 数学探究使我们能够感受和经历类似数学家的探究过程，它是运用数学知识解决数学问题的有效途径.

案例分析

圆锥截线

圆锥面可看成一条直线绕着与它相交的另一条直线 l（两条直线不互相垂直）旋转一周所形成的曲面，l 称为圆锥面的轴.

用一个平面（不经过圆锥面的顶点）截一个圆锥面，当平面与圆锥面的轴垂直时，截得的图形是一个圆. 改变平面的位置，观察截得的图形的变化情况.

◆ 提出问题

用平面截圆锥面还能得到哪些曲线？这些曲线具有哪些几何特征？

◆ 研究思路

先考察相对简单的圆柱截线. 联想生活中的经验，如一段竹杆，可视为圆柱面，它的正截面是一个圆，但是其斜截面不是圆，而是“椭圆”. 圆的几何特征是圆上各点到圆心的距离相等，那么由斜截圆柱面所得的“椭圆”是否也具有类似的几何特征呢？

◆ 历史寻迹

古希腊几何学家在上述问题的探讨中获得令人鼓舞的简洁答案：一个椭圆具有两个焦点 F_1，F_2，使得椭圆上任意一点到这两个焦点的距离之和等于常数.

我们可以用图 1 来说明“椭圆”的这个几何特征.

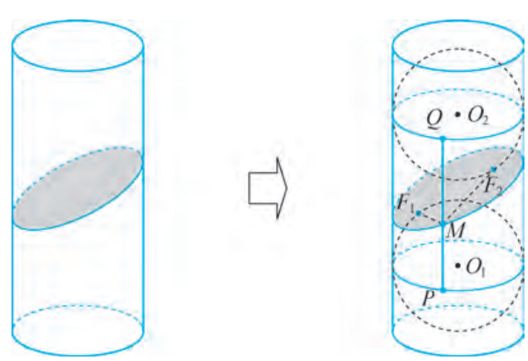


图 1

在斜截面的两侧分别放置一个球，使它们都与截面相切（切点分别为 F_1，F_2），且与圆柱面相切，两球与圆柱面的公共点分别构成圆 O_1 和圆 O_2（图 1）.

设点 M 是斜截面与圆柱面的截线上任一点，过 M 作圆柱面的一条母线分别交圆 O_1、圆 O_2 于 P，Q 两点，则 MP 和 MF_1，MQ 和 MF_2 分别是球 O_1 和球 O_2 的切线. 因为过球外一点作球的切线的长都相等，所以

$$MF_1 = MP, MF_2 = MQ,$$

故 $$MF_1 + MF_2 = MP + MQ = PQ.$$

因为 PQ 为圆柱 O_1O_2 的母线的长，所以 PQ 是一个常数. 也就是说，截线上任意一点到两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数.

◆ 推广

将上述结论和简洁的证明稍加推广，即把圆柱面更换为圆锥面后依然成立，并且平面和圆锥面的截线还可以产生另外两种曲线（图 2）.

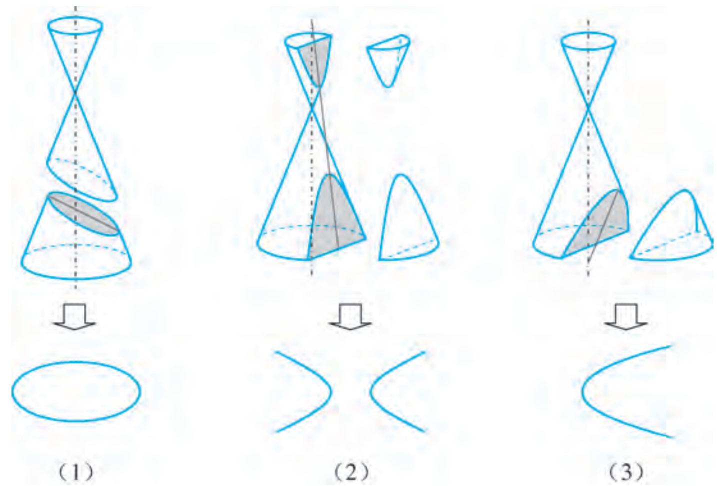


图 2

一般地，设圆锥面的母线与轴所成的角为 θ，截面与轴所成的角为 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

可仿照圆柱截线的情形进行证明.

第一种情形 $\left(\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，平面与圆锥面的截线是一条曲线，截线上任意一点到平面内两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数. 这种截线称为椭圆.

第二种情形（$\theta>\alpha$），平面与圆锥面的截线由两支曲线构成，截线上任意一点到平面内两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数. 这种截线称为双曲线.

第三种情形（$\theta=\alpha$），平面与圆锥面的截线是一条曲线，截线上的任意一点到平面内一个定点的距离与到一条定直线的距离相等. 这

种截线称为抛物线.

◆ 证明

第二种情形的证明,如图 3.

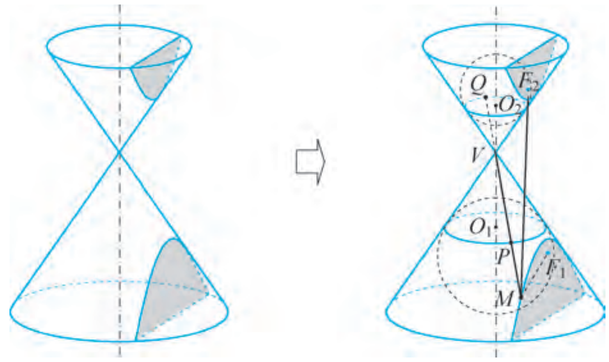


图 3

在上下两个圆锥面内分别放置一个球,使它们都与截面相切(切点分别为 F_1,F_2),且与圆锥面相切,两球与圆锥面的公共点分别构成圆 O_1 和圆 O_2(图 3).

设点 M 是平面与下方圆锥面的截线上任一点,过 M 作圆锥面的一条母线分别交圆 O_1、圆 O_2 于 P,Q 两点,则 MP 和 MF_1,MQ 和 MF_2 分别是两球的切线. 因为过球外一点作球的切线的长都相等,

所以 $$MF_1 = MP, MF_2 = MQ,$$

故 $$MF_2 - MF_1 = MQ - MP = PQ.$$

因为 PQ 为圆锥 VO_1 和圆锥 VO_2 的母线的长的和,所以 PQ 是一个常数. 也就是说,下方截线上任意一点到两个定点 F_2,F_1 的距离的差(MF_2-MF_1)等于常数.

同理可证,上方截线上任意一点到两个定点 F_1,F_2 的距离的差(MF_1-MF_2)也等于同一个常数.

因此,截线上的任意一点到平面内两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数.

第三种情形的证明,如图 4.

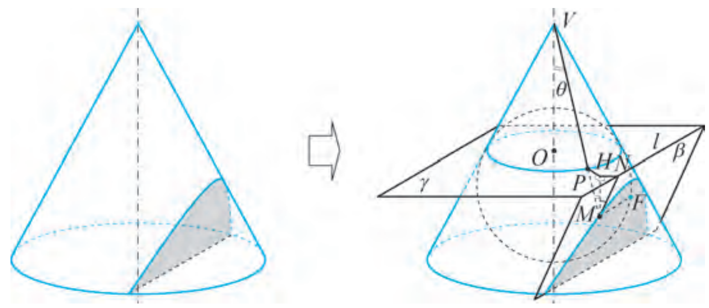


图 4

在圆锥面内放置一个球，使它与截面相切（切点为 F），且与圆锥面相切，该球与圆锥面的公共点构成圆 O，圆 O 所在平面 γ 与截面 β 交于直线 l（图 4）.

设点 M 是平面 β 与圆锥面的截线上任一点，过 M 作圆锥面的母线交圆 O 于点 P，则 MP 和 MF 是球的切线. 因为过球外一点作球的切线的长都相等，所以

$$MF = MP. \qquad ①$$

作 $MH \perp \gamma$ 于 H，$MN \perp l$ 于 N，连接 HN，HP.

因为 $VO \perp \gamma$，$MH \perp \gamma$，所以 $VO \parallel MH$，故 MH 与母线 VM 所成的角就是 VO 与母线 VM 所成的角，即 $\angle HMP = \theta$.

由 $MH \perp \gamma$，$l \subset \gamma$ 可知 $MH \perp l$. 又 $MN \perp l$，所以 $l \perp$ 平面 MNH. 因为 $l \subset \beta$，所以平面 $MNH \perp$ 平面 β，于是 $\angle HMN$ 是 MH 与平面 β 所成的角，故 $\angle HMN = \alpha$.

根据题意可知 $\theta = \alpha$，从而 $\angle HMP = \angle HMN$，因此 $\mathrm{Rt}\triangle HMP \cong \mathrm{Rt}\triangle HMN$，所以

$$MP = MN. \qquad ②$$

由①②知 $MF = MN$，即截线上的任意一点 M 到定点 F 的距离 MF 等于到定直线 l 的距离 MN.

思　考

在第一、二种情形中，平面内是否存在一个定点和一条定直线，使得截线上任意一点到定点的距离与到定直线的距离也存在着类似的关系？

椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线. 上述案例从几何的视角探讨了圆锥曲线的特征，在选择性必修中，我们还将用坐标法进一步研究圆锥曲线的性质及应用.

课题研究

数学建模活动和数学探究活动可以用课题研究的形式展开. 课题研究的过程，一般包括选题、开题、做题和结题四个环节. 下面以“测量学校内、外建筑物的高度”为例说明课题研究的过程.

◆ 选题

（1）选择测量对象. 测量本校的一座教学楼的高度，或测量本校的旗杆的高度，或测量学校墙外一座不可及但在学校操场上可以看得见的高大写字楼（或其他可见的高大建筑）的高度.

（2）建立小组. 成立 2～3 人测量小组，准备相应的测量工具（可以自制一些简单的测量工具，如测角的工具），以小组为单位完成实际测量、获取数据，测量结束后填写测量课题报告表（含测量方法、测量所得的数据计算过程和结果，见表 1）.

表 1 测量课题报告表

年级、班级		姓名		完成时间	

1. 本课题组的成员与分工

成员姓名	分工	主要工作与贡献

2. 本课题组选择的测量对象（旗杆、教学楼、校外××大厦）

3. 本课题组的测量方法（说明测量的原理、创新之处等）

4. 本课题组的测量数据、计算过程和结果（如有照片或图片可以附后或另加纸）

5. 结果归纳

本课题组的测量计算的结果（×××的高度）如下：

6. 用简洁的语言描述本项工作中的感受

◆ 开题

组织课堂上的开题交流，分组议一议拟采用的测量方法，教师和其他同学可以提出质疑.

讨论交流有助于弄清楚测量使用的数学模型，事先的认真思考可以减少实践过程中的盲目、低效和失误，有助于形成良好的思维习惯和科研习惯. 同时，在讨论交流中可以意识到看似简单的问题中也有不少需要认真思考的东西.

◆ 做题

（1）选择测量地点. 实施测量的地点可以选择学校内或学校外的开阔地带，如学校的操场、较大的停车场等. 可以安排各个小组在同一时间进行测量，有利于教师的现场观察和管理.

（2）实际测量. 在测量的过程中，教师认真巡视，记录态度认真、合作默契、测量方法好或创意新的测量小组和个人，以供讲评或评价时使用. 注意观察和发现测量中的问题，不合理的测量方法可能造成测量结果严重失实，误差很大. 当出现这类问题时，要对出现这样问题的原因进行分析和反思，并寻求解决问题的办法.

◆ 结题

在完成“测量报告”后，安排一次交流讲评活动，安排的报告最好

有特点，如测量结果准确，或测量过程完整清晰，或测量方法有创意，或误差处理有手段，或报告书写认真到位，或测量过程有值得讨论的地方，等等.

◆ 拓展

测量后师生共同提出的新问题，成为新的生成性资源.

(1) 本市的最高建筑物——电视塔的高度是多少米？

(2) 有一座高度为 h m 的电视塔，它的信号传播半径是多少千米？信号覆盖面积有多大？

(3) 找一张本市地图，看一看本市的地域面积有多少平方千米？电视塔的位置在地图上的什么地方？按照计算得到的数据，这座电视塔发出的电视信号能否覆盖本市？

(4) 本市(外地)到北京的距离有多少千米？要用一座电视塔把信号从北京直接发送到本市，这座电视台的高度至少要多少米？

(5) 如果采用多个中继站的方式，用 100 m 高的塔接力传输电视信号，那么从北京到本地至少要建多少座 100 m 高的中继传送塔？

(6) 考虑地球大气层和电离层对电磁波的反射作用，问题(2)(4)(5)会有怎样的变化？

(7) 如果一座电视塔(如高为 300 m)的信号不能覆盖本市，请你设计一个多塔信号覆盖的方案.

(8) 发射几颗地球定点的通讯卫星，可以使其信号覆盖地球？

(9) 如果我国要发射一颗气象监测卫星，监测我国的气象情况，请你设计一个合理的定点位置或轨道.

(10) 在网上收集资料，了解有关“铱星计划”的内容，在班里做一个相关内容的综述，并发表对这件事的看法.

选题指导

在数学学习和生产生活实际中，只要我们细心观察、深入调查研究，就能发现许多问题是可以利用数学知识加以解决的.

(1) 中小学生的身高与课桌椅的高度有何关系？

(2) 本校自行车的存放问题.

(3) 超市中的数学问题.

(4) 易拉罐中的数学问题.

(5) 用一个平面去截正方体，截面的形状是什么？

(6) (点光源照球的阴影与圆锥曲线)如图 5，设 S 为放置在平面 α 上 F 点处的一个球，在球外有一个点光源 Q，从 Q 出发的光线照到球面上，在平面 α 上形成一个阴影区域. 记区域的边界线为 Γ，借助手电筒(点光源)照球观察，Γ 可能是什么曲线？

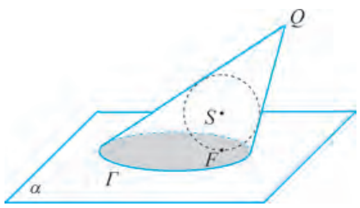


图 5

依照前述案例，以小组为单位进行观察、调查，并利用数学知识展开数学建模或数学探究活动.

附录　随机数表（部分）

03 47 43 73 86	36 96 47 36 61	46 98 63 71 62	33 26 16 80 45	60 11 14 10 95
97 74 24 67 62	42 81 14 57 20	42 53 32 37 32	27 07 36 07 51	24 51 79 89 73
16 76 62 27 66	56 50 26 71 07	32 90 79 78 53	13 55 38 58 59	88 97 54 14 10
12 56 85 99 26	96 96 68 27 31	05 03 72 93 15	57 12 10 14 21	88 26 49 81 76
55 59 56 35 64	38 54 82 46 22	31 62 43 09 90	06 18 44 32 53	23 83 01 30 30
16 22 77 94 39	49 54 43 54 82	17 37 93 23 78	87 35 20 96 43	84 26 34 91 64
84 42 17 53 31	57 24 55 06 88	77 04 74 47 67	21 76 33 50 25	83 92 12 06 76
63 01 63 78 59	16 95 55 67 19	98 10 50 71 75	12 86 73 58 07	44 39 52 38 79
33 21 12 34 29	78 64 56 07 82	52 42 07 44 38	15 51 00 13 42	99 66 02 79 54
57 60 86 32 44	09 47 27 96 54	49 17 46 09 62	90 52 84 77 27	08 02 73 43 28
18 18 07 92 45	44 17 16 58 09	79 83 86 19 62	06 76 50 03 10	55 23 64 05 05
26 62 38 97 75	84 16 07 44 99	83 11 46 32 24	20 14 85 88 45	10 93 72 88 71
23 42 40 64 74	82 97 77 77 81	07 45 32 14 08	32 98 94 07 72	93 85 79 10 75
52 36 28 19 95	50 92 26 11 97	00 56 76 31 38	80 22 02 53 53	86 60 42 04 53
37 85 94 35 12	83 39 50 08 30	42 34 07 96 88	54 42 06 87 98	35 85 29 48 39
70 29 17 12 13	40 33 20 38 26	13 89 51 03 74	17 76 37 13 04	07 74 21 19 30
56 62 18 37 35	96 83 50 87 75	97 12 25 93 47	70 33 24 03 54	97 77 46 44 80
99 49 57 22 77	88 42 95 45 72	16 64 36 16 00	04 43 18 66 79	94 77 24 21 90
16 08 15 04 72	33 27 14 34 09	45 59 34 68 49	12 72 07 34 45	99 27 72 95 14
31 16 93 32 43	50 27 89 87 19	20 15 37 00 49	52 85 66 60 44	38 68 88 11 80
68 34 30 13 70	55 74 30 77 40	44 22 78 84 26	04 33 46 09 52	68 07 97 06 57
74 57 25 65 76	59 29 97 68 60	71 91 38 67 54	13 58 18 24 76	15 54 55 95 52
27 42 37 86 53	48 55 90 65 72	96 57 69 36 10	96 46 92 42 45	97 60 49 04 91
00 39 68 29 61	66 37 32 20 30	77 84 57 03 29	10 45 65 04 26	11 04 96 67 24
29 94 98 94 24	68 49 69 10 82	53 75 91 93 30	34 25 20 57 27	40 48 73 51 92
16 90 82 66 59	83 62 64 11 12	67 19 00 71 74	60 47 21 29 68	02 02 37 03 31
11 27 94 75 06	06 09 19 74 66	02 94 37 34 02	76 70 90 30 86	38 45 94 30 38
35 24 10 16 20	33 32 51 26 38	79 78 45 04 91	16 92 53 56 16	02 75 50 95 98
38 23 16 86 38	42 38 97 01 50	87 75 66 81 41	40 01 74 91 62	48 51 84 08 32
31 96 25 91 47	96 44 33 49 13	34 86 82 53 91	00 52 43 48 85	27 55 26 89 62
66 67 40 67 14	64 05 71 95 86	11 05 65 09 68	76 83 20 37 90	57 16 00 11 66
14 90 84 45 11	76 73 88 05 90	52 27 41 14 86	22 98 12 22 08	07 52 74 95 80
68 05 51 18 00	33 96 02 75 19	07 60 62 93 55	59 33 82 43 90	49 37 38 44 59
20 46 78 73 90	97 51 40 14 02	04 02 33 31 08	39 54 16 49 36	47 95 93 13 30
64 19 58 97 79	15 06 15 93 20	01 90 10 75 06	40 78 78 89 62	02 67 74 17 33
05 26 93 70 60	22 35 85 15 13	92 03 51 59 77	59 56 78 06 83	52 91 05 70 74
07 97 10 88 23	09 98 42 99 64	61 71 62 99 15	06 51 29 16 93	58 05 77 09 51
68 71 86 85 85	54 87 66 47 54	73 32 08 11 12	44 95 92 63 16	29 56 24 29 48
26 99 61 65 53	58 37 78 80 70	42 10 50 67 42	32 17 55 85 74	94 44 67 16 94
14 65 52 68 75	87 59 36 22 41	26 78 63 06 55	13 08 27 01 50	15 29 39 39 43

说　　明

江苏凤凰教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017年版)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念，使学生通过高中阶段的学习，能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养，满足他们个人发展与社会进步的需求.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学，做到“入口浅，寓意深”. 通过创设合适的问题情境，引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动，感悟并获得数学知识与思想方法. 在知识的发生、发展与运用过程中，培养学生的思维能力、创新意识和应用意识，提升他们的数学学科核心素养.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法、核心素养四条主线，通过问题将全书贯通. 每个主题围绕中心教育目标展开，每章围绕核心概念或原理展开. 教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系，让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求，为所有学生的发展提供帮助，为学生的不同发展提供较大的选择空间. 整个教科书设计为：一个核心(基本教学要求)，多个层次，多种选择. 学好核心内容后，根据需要，学生有多种选择，每一个人都能获得必备的数学素养与最优发展.

衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学》(苏教版)的主编单墫教授，副主编李善良、陈永高、王巧林，以及所有编写的专家，审读、试教教师.

众多的数学家、心理学家、数学教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写与讨论工作. 史宁中、鲍建生、谭顶良等教授对教科书编写提出许多建议，于明、张乃达、仇炳生、祁建新等老师参与本书的讨论与设计，在此向他们表示衷心感谢!

感谢您使用本书，您在使用本书时有建议或疑问，请及时与我们联系，电话：025-83658737，电子邮箱：sjgzsx@126.com，lishanliang2019@126.com，466606351@qq.com.

本书编写组

2019年5月