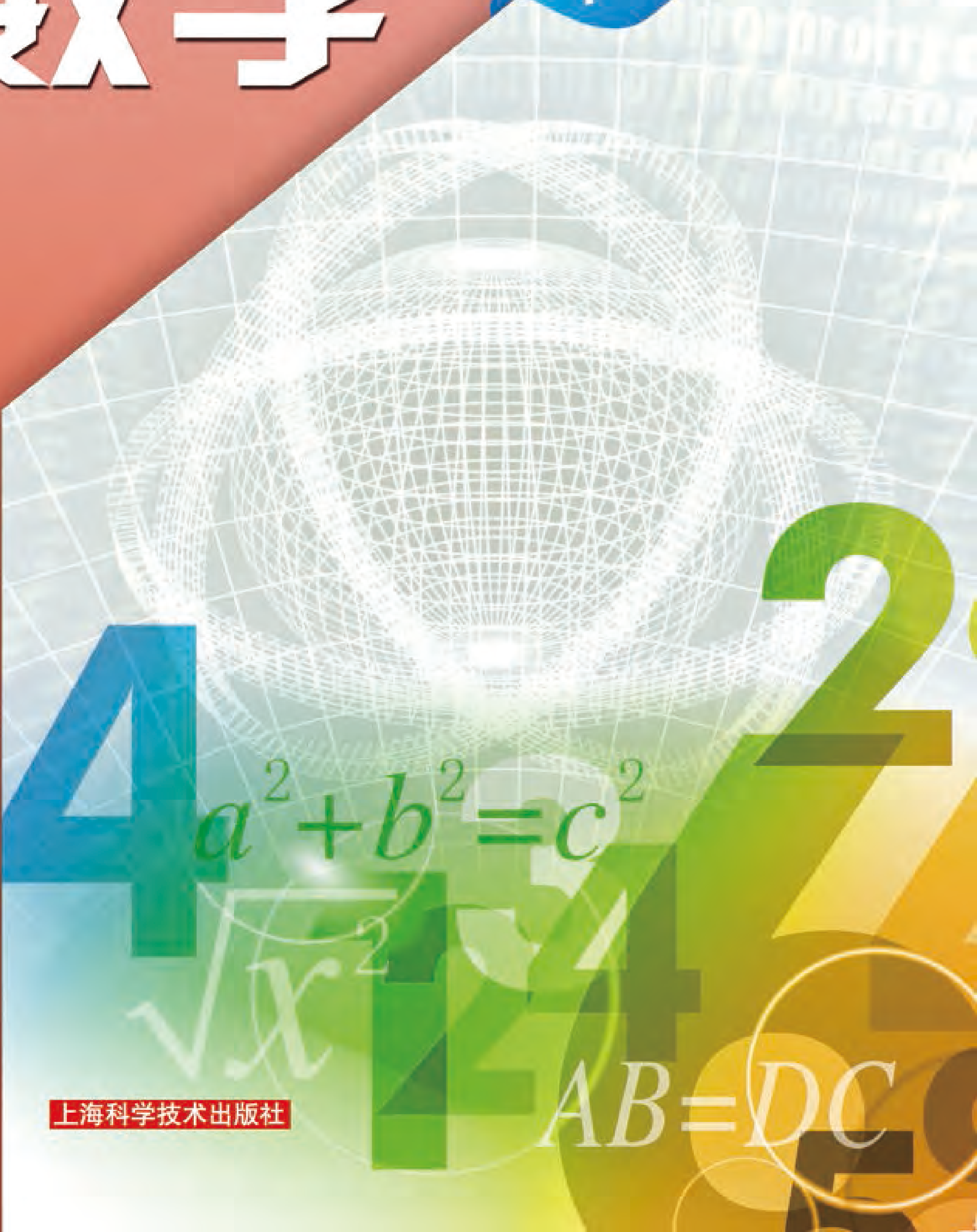
教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

八年级 下册



上海科学技术出版社

义务教育教科书

数学

八年级 下册

新时代数学编写组 编著

上海科学技术出版社

主　　编　吴之季　苏　淳

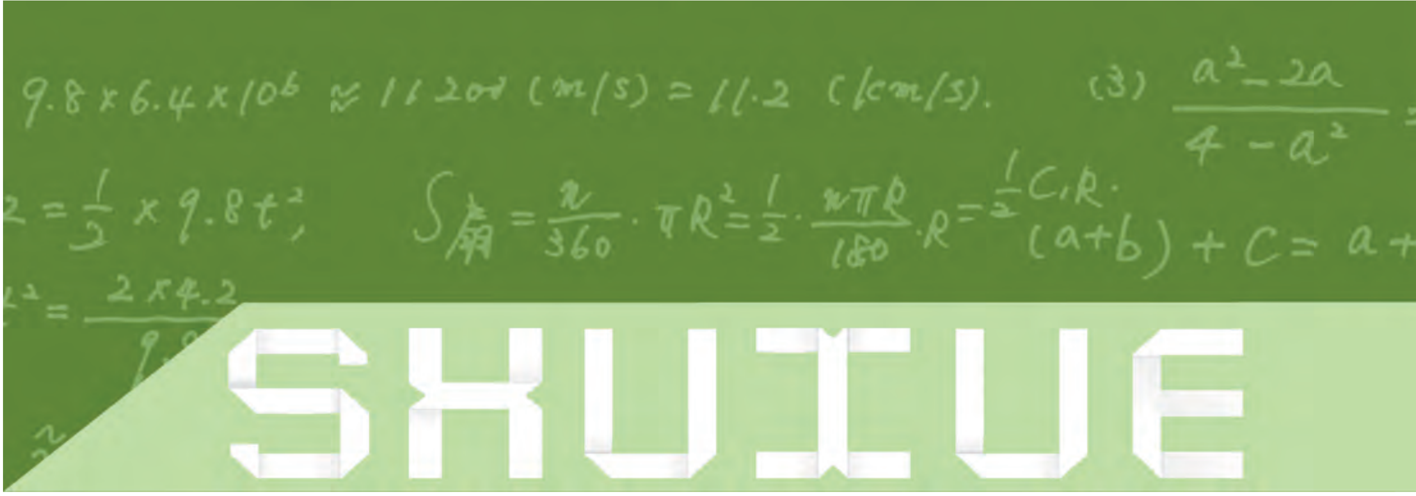
副 主 编　杜先能　徐子华

本册主编　胡　涛

策划编辑　苏德敏
责任编辑　王韩欢　李　刚
美术编辑　陈　蕾

义务教育教科书
数　学
八年级　下册
新时代数学编写组　编著
上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海市闵行区号景路 159 弄 A 座 9F-10F　邮政编码 201101)
新华书店发行
安徽芜湖新华印务有限责任公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 10　字数 164 000
2013 年 11 月第 1 版　2022 年 1 月第 12 次印刷
ISBN 978-7-5478-1972-2/G·454
定价：10.18 元

如发现印装质量问题或对内容有意见建议，请与本社联系
电话：021-64848025，邮箱：jc@sstp.cn
审批编号：皖费核(2022 年春季)第 0160 号　举报电话：12315



目　录

第16章 二次根式

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$$

前面，我们由数的开方运算引出了实数. 如果对整式也作开方运算会得到怎样的式子？这类式子又具有怎样的性质？

本章学习二次根式的概念、性质和它的运算.

16.1 二次根式

在七年级我们学习数的开方时，遇到过$\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{5}{7}}$，$\sqrt{a}$这样的式子. 知道符号$\sqrt{\ }$叫做二次根号，二次根号下的数叫做被开方数. 因为在实数范围内，负数没有平方根，所以被开方数只能是正数或零. 也就是说，当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$是有意义的，它表示 a 的算术平方根. 我们把形式如$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$的式子叫做**二次根式**（quadratic radical）.

为了进行二次根式的运算，先来研究它的基本性质.

观察

1. 由于$\sqrt{2}$是 2 的算术平方根，根据平方根的意义，应有 $(\sqrt{2})^2 = 2$.

类似地，计算：

$(\sqrt{5})^2 =$______，$\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2 =$______，

$(\sqrt{0})^2 =$______.

一般地，有

性质 1　$(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$.

2. $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$，类似地，计算：

$\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} =$________，$\sqrt{0.5^2} =$________，

$\sqrt{0^2}=$________.

又如$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=-(-3)$,再计算:

$\sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2}=$________,

$\sqrt{(-0.5)^2}=$________.

一般地,有

性质 2 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

例 1 x为何值时,下列式子在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{x+3}$; (2) $\sqrt{x^2}$.

解 (1) 要使$\sqrt{x+3}$有意义,必须$x+3\geqslant 0$.

解这个不等式,得 $x\geqslant -3$.

即当$x\geqslant -3$时,$\sqrt{x+3}$在实数范围内有意义.

(2) 因为x为任何实数时都有$x^2\geqslant 0$,

所以当x为一切实数时,$\sqrt{x^2}$在实数范围内都有意义.

例 2 计算:

(1) $\sqrt{(-5)^2}$; (2) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

解 (1) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$

或$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$.

(2) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|$

$=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.

例 3 先化简再求值:$\sqrt{x^2-2\pi x+\pi^2}$,其中$x=4$.

解 $\sqrt{x^2-2\pi x+\pi^2}=\sqrt{(x-\pi)^2}=|x-\pi|$.

当 $x=4$ 时，$|x-\pi|=|4-\pi|=4-\pi$.

$\therefore$ 当 $x=4$ 时，$\sqrt{x^2-2\pi x+\pi^2}=4-\pi$.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$；　　(2) $(\sqrt{2})^2$；

(3) $(-\sqrt{0.8})^2$；　　(4) $-(\sqrt{1.3})^2$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{(-0.2)^2}$；　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$；

(3) $-\sqrt{2^2}$；　　(4) $-\sqrt{(-2)^2}$.

3. 先化简再求值：$\sqrt{x^2-4x+4}$，其中 $x=-2$.

习题 16.1

1. 求值：

(1) 面积是 9π 的圆，它的半径 $r=$________；

(2) 正方形的面积是 3，它的周长 $C=$________.

2. x 为何值时，下列式子在实数范围内有意义：

(1) $\sqrt{x-2}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$；　　(3) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{0.01})^2$；　　(2) $(-2\sqrt{3})^2$；

(3) $\sqrt{\left(-3\frac{1}{8}\right)^2}$；　　(4) $-\sqrt{(-7)^2}$.

4. （1）如果 $\sqrt{a^2}=-a$，a 应取何值？

（2）a 取何值时，$\sqrt{-a}$在实数范围内有意义？

（3）a 为何值时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$在实数范围内有意义？

5. （1）计算：$(\sqrt{3})^2-3\sqrt{(-3)^2}$；

（2）如果 $a=-\sqrt{2}$，求$\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$的值.

6. 把下列正数写成一个数的平方形式：

（1）9；（2）0.25；（3）3；（4）2.5.

7. 先化简再求值：$\sqrt{4y^2-20y+25}$，其中 $y=2\sqrt{2}$.

16.2 二次根式的运算

1. 二次根式的乘除

观察

计算下列各题,观察有何规律?

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$ ________,

$\sqrt{4\times25}=$ ________;

(2) $\sqrt{0.25}\times\sqrt{100}=$ _____,

$\sqrt{0.25\times100}=$ _____.

一般地,有

性质3　如果 $a\geqslant0$, $b\geqslant0$,那么有 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

因为当 $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ 时,

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab.$$

又　$(\sqrt{ab})^2=ab$,

ab 的算术平方根只有一个,所以

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

由等式对称性,性质3也可以写成

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).$$

例1　计算:

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{27}$;　　　(2) $(-3\sqrt{5})\times2\sqrt{10}$.

解 （1）$\sqrt{6}\times\sqrt{27}=\sqrt{6\times27}=\sqrt{2\times3\times3^3}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{3^4}=9\sqrt{2}.$

（2）$(-3\sqrt{5})\times2\sqrt{10}=(-3)\times\sqrt{5}\times2\times\sqrt{10}$

$=-6\sqrt{5\times10}=-6\sqrt{5^2\times2}$

$=-30\sqrt{2}.$

例 1 说明，根据上述性质 3 进行二次根式的运算过程中，可以把被开方数中的“完全平方因式（因数）”，用它的算术平方根代替，由根号内移到根号外. 以后，我们可以利用这个办法来将二次根式化简.

练习

1. 计算：

（1）$\sqrt{6}\times\sqrt{2}$；　　（2）$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{72}$；　　（2）$\sqrt{36\times256}$；　　（3）$\sqrt{5^4\times3}$；　　（4）$\sqrt{13^2-12^2}$.

思考

计算下列各题，观察有何规律？

（1）$\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=$__________，$\sqrt{\dfrac{36}{49}}=$__________；

（2）$\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=$__________，$\sqrt{\dfrac{9}{16}}=$__________.

你能仿照根式的乘法性质（性质 3）证明根式的除法性质（性质 4）吗？

一般地，有

性质 4 如果 $a\geqslant0$，$b>0$，那么有 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

性质 4 也可以写成

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

例 2　计算：

(1) $\sqrt{40}\div\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{12}}$.

解　(1) $\sqrt{40}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{40}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{8}}{5}$

$=\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{4}{3}\div\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{4}{3}\times 12}=\sqrt{4^2}=4$.

这里，还可这样计算：
$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{40}{5}}=\sqrt{8}$
$=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$.

二次根式的除法运算，通常采用分子、分母同乘以一个式子化去分母中的根号的方法来进行，如本节例 2(1). 把分母中的根号化去，就是分母有理化.

对于二次根式运算的结果，我们通常还需把它化简. 如例 2(1)中将$\sqrt{8}$化为 $2\sqrt{2}$.

满足下列两个条件的二次根式就是**最简二次根式**(quadratic radical in lowest terms)：

(1) 被开方数的因数是整数，因式是整式；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

例如，$\sqrt{40}$ 化成最简二次根式是 $2\sqrt{10}$；$\sqrt{\frac{1}{12}}$ 化成最简二次根式是 $\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}}{(\sqrt{12})^2}=\frac{\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

化简时应注意：

(1) 有时需将被开方数分解因式；

(2) 当一个式子的分母中含有二次根式时，一般应把分母有理化.

练习

1. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{9}{64}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{0.04\times144}{0.49\times169}}$.

2. 计算：

(1) $\frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}$；　　(2) $\frac{\sqrt{8.4}}{\sqrt{0.12}}$；　　(3) $\sqrt{\frac{5}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{6}}$.

3. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\frac{3}{\sqrt{6}}$；　　(2) $\frac{-\sqrt{45}}{2\sqrt{20}}$.

4. 下列根式中，哪些是最简二次根式？

$\sqrt{xy}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{\frac{ab}{2}}$，$\sqrt{x+y}$，$\sqrt{x^3}$.

例3　比较 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的大小.

解　$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$，

$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{18}$.

$\because\ 12<18$，

$\therefore\ \sqrt{12}<\sqrt{18}$，

$\therefore\ 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

为什么把根号外的正因数移到根号内？

此外，也可用下面的方法比较大小.

方法1：$2\sqrt{3}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})<0$，

$\therefore\ 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

方法2：$\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$，

$\therefore\ 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{7\times14}$；

(2) $\sqrt{13^2-5^2}$；

(3) $\sqrt{4\times(-5)^2}$；

(4) $\sqrt{18}\div(-2\sqrt{2})$；

(5) $(-\sqrt{20})\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}$；

(6) $\sqrt{20}\div\sqrt{5}\div\sqrt{4}$.

2. 下列各式的化简对不对，为什么？

(1) $\sqrt{20}=4\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{7}$；

(4) $4\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt{6}$.

3. 比较 $5\sqrt{2}$ 与 $4\sqrt{3}$ 的大小.

4. 仿照 $2\sqrt{0.5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{0.5}=\sqrt{4\times0.5}=\sqrt{2}$ 的做法，化简下列各式：

(1) $10\sqrt{0.1}$；

(2) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$.

2. 二次根式的加减

如何进行二次根式的加减？如

计算：$\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$.

解

$$\begin{aligned}&\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\\&=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\&=(3+4-5)\sqrt{2}\\&=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

上面的计算中，先把各个根式化为最简，几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，像这样的二次根式称为同类二次根式. 如 $\sqrt{18}$，$\sqrt{32}$ 与 $\sqrt{50}$ 就是同类二次根式.

二次根式相加减，先把各个二次根式化成最简，再把同

类二次根式合并. 合并同类二次根式与合并同类项类似. 因此,二次根式的加减可以比照整式的加减进行.

在二次根式的运算中,实数的运算性质和法则同样适用.

例 4 计算: $2\sqrt{12}+3\sqrt{48}-4\sqrt{75}$.

解 $2\sqrt{12}+3\sqrt{48}-4\sqrt{75}$

$=4\sqrt{3}+12\sqrt{3}-20\sqrt{3}$

$=-4\sqrt{3}$.

例 5 计算:

(1) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$;

(2) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2-6(3-\sqrt{3})$.

解 (1) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$.

(2) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2-6(3-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2-6\times 3+6\sqrt{3}$

$=6-12\sqrt{2}+12-18+6\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}-12\sqrt{2}$.

不是同类二次根式(如$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$)不能合并.

例 6 计算: $\sqrt{3}(\sqrt{8}+\sqrt{50})-\sqrt{30}\div\sqrt{45}$.

解 $\sqrt{3}(\sqrt{8}+\sqrt{50})-\sqrt{30}\div\sqrt{45}$

$=\sqrt{3}(2\sqrt{2}+5\sqrt{2})-\sqrt{30}\div 3\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}\times 7\sqrt{2}-\sqrt{6}\times\sqrt{5}\div 3\sqrt{5}$

$=7\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$=\dfrac{20}{3}\sqrt{6}$.

练习

1. 下列计算是否正确,为什么?

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$;

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$;

(3) $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$;

(4) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{2}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$.

2. 判别下列二次根式中哪些是同类二次根式:

$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $-\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $-7\sqrt{50}$.

3. 计算:

(1) $\sqrt{28}-\sqrt{63}$;

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{8}}-\sqrt{32}$;

(3) $\sqrt{18}-(\sqrt{98}-2\sqrt{75}+\sqrt{27})$;

(4) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}-3\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$.

4. 化简:

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$;

(2) $(\sqrt{3}-2)^2+(3-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$.

习题 16.2

1. 化简:

(1) $\sqrt{81\times121}$;　(2) $\sqrt{27\times12}$;　(3) $\sqrt{9\times(-3)^2}$;　(4) $\sqrt{37^2-12^2}$.

2. 计算:

(1) $2\sqrt{27}\times3\sqrt{6}$;

(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{\dfrac{2}{7}}$;

(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{20}\div\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$;

(4) $-7\sqrt{8}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 计算:

(1) $5\sqrt{8}-2\sqrt{32}+\sqrt{50}$;

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

(3) $(\sqrt{45}+\sqrt{27})-\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{125}\right)$.

4. 计算：

(1) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}$;

(2) $\left(\sqrt{48}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\div\sqrt{27}$.

5. 已知 $\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，求 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的近似值.（精确到 0.01）

6. 根据下列条件，求代数式 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的值.

(1) $a=1$，$b=8$，$c=-4$;

(2) $a=3$，$b=-6$，$c=2$.

7. 计算：

(1) $(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{7})$;

(2) $(\sqrt{32}-3\sqrt{3})(4\sqrt{2}+\sqrt{27})$;

(3) $(3\sqrt{6}-\sqrt{4})^2$;

(4) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

阅读与思考

海伦-秦九韶公式

古希腊数学家海伦在他的著作《度量论》中，讨论了许多几何图形的面积和体积计算问题. 其中包括后来以他的名字命名的三角形面积公式. 这个公式用字母表示，即：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{1}{2}(a+b+c).\qquad ①$$

（其中 a，b，c 分别为三角形的三边长，S 为三角形的面积.）

我国宋代数学家秦九韶，在他的著作《数书九章》中，也曾提

出由三角形三边求三角形面积的方法. 这个方法用字母表示,即:

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.\ (其中\ a>b>c)\qquad ②$$

公式②与①实质是相同的,为什么呢?

因为:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}\\
=&\sqrt{\left(\frac{1}{2}ac\right)^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{4}\right)^2}\\
=&\sqrt{\left(\frac{1}{2}ac+\frac{c^2+a^2-b^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}ac-\frac{c^2+a^2-b^2}{4}\right)}\\
=&\sqrt{\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{4}\cdot\frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{4}}\\
=&\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{4}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{4}}\\
=&\sqrt{\frac{a+c+b}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+a-c}{2}\cdot\frac{b-a+c}{2}}\\
=&\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{1}{2}(a+b+c).
\end{aligned}$$

在《数书九章》中,秦九韶还解决一个具体问题:“有三角形田地一块,它的三边长分别为13,14,15(单位略),求这块田地的面积.”根据公式,你算算看!

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 如果一个数的平方等于 a,那么这个数叫做 a 的平方根. 其中正的平方根$\sqrt{a}$(读作根号 a)也叫做 a 的算术平方根. 当 $a\geqslant 0$ 时,$\sqrt{a}$叫做二次根式.

2. 二次根式有以下性质:

$$(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geqslant 0).$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad (a\geqslant 0, b\geqslant 0).$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

3. 二次根式的加、减、乘、除运算.

三、自评与互评

1. 二次根式在现实生活中有哪些应用? 请举一些例子.

2. 二次根式的运算,实际上是在进行实数的运算. 从中你是否体会到,在二次根式的运算中,实数的运算律、运算性质以及运算顺序都适用?

A组 复习题

1. 指出下列各式在实数范围内有意义时,x 应取什么值.

(1) $\sqrt{3x-4}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$.

2. 填空:

(1) 若$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$在实数范围内有意义,则 $x=$________;

(2) $\sqrt{(3-\pi)^2}=$________;

(3) 满足 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{3}$的整数 x 有________.

3. 求值:

(1) $(\sqrt{5})^2+\sqrt{(-5)^2}\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;　　(2) $(\sqrt{11})^2-\sqrt{(-5)^2}$.

4. 计算：

(1) $\sqrt{15}\div\sqrt{\dfrac{5}{3}}$；　　(2) $(-\sqrt{8})\times\sqrt{2}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$；　　(4) $(\sqrt{48}+\sqrt{27})\div\sqrt{3}-2$.

5. 计算：

(1) $\dfrac{1}{5}\sqrt{900}+\dfrac{1}{2}\sqrt{121}$；　　(2) $\sqrt{12}+\sqrt{\dfrac{1}{27}}-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}+\sqrt{28}-\sqrt{700}$；　　(4) $\sqrt{32}-3\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{8}$.

6. 计算：

(1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2$；　　(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

7. 已知 $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$,求 $\sqrt{12}-\sqrt{\dfrac{1}{27}}+2\sqrt{32}$ 的近似值.(精确到 0.01)

8. 比较 $-2\sqrt{7}$与 $-3\sqrt{3}$的大小.

B组 复习题

1. 对于实数 a, b,如果 $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$,那么下面结论中正确的是(　　).

(A) $a>b$　　(B) $a<b$

(C) $a\geqslant b$　　(D) $a\leqslant b$

2. 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$,求下列各式的值：

(1) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$；　　(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

3. 解下列方程或方程组：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x+1=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$；　　(2) $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1,\\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

4. 在实数范围内，分解因式：

(1) x^2-3；　　　　(2) x^4-25.

5. 座钟的摆来回摆动一次的时间叫做一个周期. 它的计算公式是：$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 T 表示周期（单位：s），l 表示摆长（单位：m），$g=9.8\ m/s^2$，π 是圆周率. 已知某台座钟的摆长为 0.8 m，它每摆动一个周期发出一次“滴答”声. 求该座钟1 min 发出多少次滴答声. 如果要使该座钟 1 min 恰好发出 60 次滴答声，该座钟的摆长应为多少？（π 取 3.14，摆长精确到 0.01 m）

6. 已知 $(a-3b)^2+\sqrt{3a-b-4}=0$，求 $a+b$ 的值.

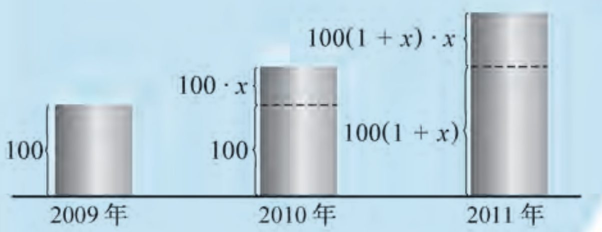
7. (1) 用“>”“=”或“<”填空：

$\sqrt{1\times2}$________$\frac{1+2}{2}$；　　　　$\sqrt{3\times5}$________$\frac{3+5}{2}$；

$\sqrt{6\times8}$________$\frac{6+8}{2}$；　　　　$\sqrt{9\times9}$________$\frac{9+9}{2}$；

(2) 观察上式，请用含 a，$b(a>0,\ b>0)$ 的式子，把你发现的结论写出来，并证明结论的正确性.

第17章 一元二次方程



某蔬菜队 2009 年全年无公害蔬菜产量为 100 t，计划 2011 年无公害蔬菜的产量比 2009 年翻一番(即为 200 t)．要实现这一目标，2010 年和 2011 年无公害蔬菜产量的年平均增长率应是多少？

设这个队 2010 ~ 2011 年无公害蔬菜产量的年平均增长率是 x，问题可以归结为求解方程

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

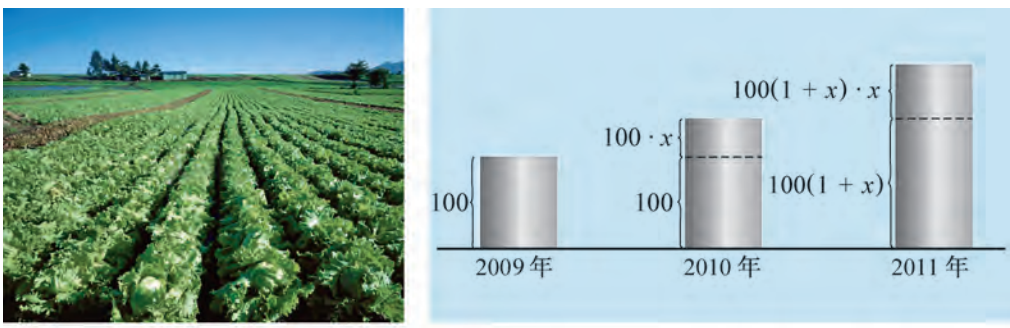
上述方程不是一次的，如何求解呢？

本章将学习一元二次方程的有关知识，它可以用来解决像上面这样的一些实际问题．

17.1 一元二次方程

问题❶ 某蔬菜队 2009 年全年无公害蔬菜产量为 100 t，计划 2011 年无公害蔬菜的产量比 2009 年翻一番（即为 200 t）. 要实现这一目标，2010 年和 2011 年无公害蔬菜产量的年平均增长率应是多少？

设这个队 2010～2011 年无公害蔬菜产量的年平均增长率是 x，那么：2010 年无公害蔬菜产量为 $100+100x=100(1+x)$（t）；2011 年无公害蔬菜产量为 $100(1+x)+100(1+x)\cdot x=100(1+x)^2$（t），如图 17－1（2）.



(1) (2)

图 17－1

根据题意，2011 年无公害蔬菜产量为 200 t，得

$$100(1+x)^2=200,$$

即

$$(1+x)^2=2.$$

整理，得

$$x^2+2x-1=0.$$

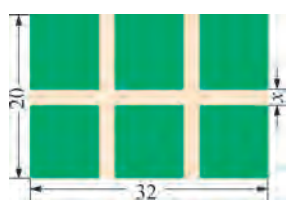


图 17－2

问题❷ 在一块宽 20 m、长 32 m 的长方形空地上，修

筑宽相等的三条小路(两条纵向,一条横向,纵向与横向垂直),把这块空地分成大小一样的 6 块,建成小花坛. 如图 17-2,要使花坛的总面积为 570 m^2(图中长度的单位: m),问小路的宽应是多少?

有位同学列出的方程是 $(20-x)(32-2x)=570$. 你知道他是怎样思考的吗?

设小路的宽是 x m,则横向小路的面积是 $32x$ m^2,纵向小路的面积是 $2\times 20x$ m^2,两者重叠部分的面积是 $2x^2$ m^2. 由于花坛的总面积是 570 m^2,则

$$32\times 20-(32x+2\times 20x)+2x^2=570.$$

整理,得

$$x^2-36x+35=0.$$

像 $x^2+2x-1=0$,$x^2-36x+35=0$ 这样的方程,都是只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的整式方程,叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown).

任何一个关于 x 的一元二次方程,经过整理都可以化为

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的一般形式(又叫做标准形式). 其中 ax^2 叫做二次项,a 是二次项的系数;bx 叫做一次项,b 是一次项的系数;c 叫做常数项. a,b,c 是任意实数,且 $a\neq 0$.

例 把方程 $3x(x-1)=2(x-2)-4$ 化成一般形式,并写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

解 去括号,得

$$3x^2-3x=2x-4-4.$$

移项,合并同类项,得方程的一般形式:

$$3x^2-5x+8=0.$$

它的二次项系数是 3,一次项系数是 -5,常数项是 8.

练习

1. 判断下列方程中,哪些是关于 x 的一元二次方程?

(1) $x^2+\frac{1}{2x}-3=0$; (2) $4x^2+3x-2=(2x-1)^2$;

(3) $x^3-x+4=0$; (4) $x^2-2y-3=0$;

(5) $(m+1)x^2+3x+1=0$; (6) $2x^2=0$.

2. 将下列一元二次方程化成一般形式,并指出它们的二次项系数、一次项系数及常数项:

(1) $5x^2=6x-8$; (2) $\frac{1}{2}-2x^2=0$;

(3) $x(x-1)=0$; (4) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})=0$.

3. 将 48 张桌子排成若干行,且每行的桌子数目相同,已知每一行的桌子数比总行数多 2,设这些桌子排了 x 行,写出排成的行数所满足的方程,并将其化为标准形式.

4. 下面哪些数是方程 $x^2+x-2=0$ 的根?

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

习题 17.1

1. 根据下列问题中的条件,列出关于 x 的方程,并将其化为标准形式.

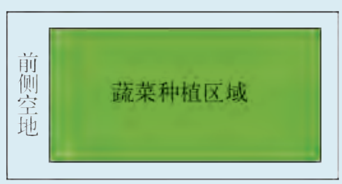
(1) 一个长方形的长比宽多 2,面积是 120,求这个长方形的长 x;

(2) 一个直角三角形的两条直角边之和为 7,它的面积为 6,求这个三角形的其中一条直角边长 x;

(3) 某小组同学元旦互赠贺年卡一张,全组共赠贺年卡 90 张,求这个小组的同学数 x;

(4) 一个小组的同学元旦见面时,每两人都握手一次,所有人共握手 10 次,求这组同学数 x;

(5) 某村计划建造如图所示的长方形蔬菜温室,要求长与宽的比为 2∶1,在温室内,前侧内墙保留 3 m 宽的空地,其他三侧内墙各保留 1 m 宽的通道,要使蔬菜种植区域的面积为 288 m^2,求长方形温室的长 x.



[第 1(5) 题]

2. 将下列一元二次方程化为一般形式,并指出它的二次项系数、一次项系数及常数项:

(1) $4x^2=3x$;

(2) $(x-1)^2-9=0$;

(3) $x(x+2)=3(x+2)$;

(4) $(x+1)^2-2(x+1)=0$.

3. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x-(2m-1)=0$ 的一个根为 1, 求 m 的值.

17.2 一元二次方程的解法

以前我们实际上已解过一些特殊的一元二次方程，比如，求 $x^2=9$ 中 x 的值. 它的解法，就是开平方，即

$$x=\pm\sqrt{9},\ x=\pm 3.$$

所以直接开平方就可求得方程 $x^2=9$ 的两个根：$x_1=3$，$x_2=-3$.

练习

直接开平方解下列方程：

(1) $x^2=25$；

(2) $x^2-0.81=0$；

(3) $3(x+1)^2=48$；

(4) $2(x-2)^2-4=0$.

1. 配方法

思考

怎样解上节问题1中得到的方程 $x^2+2x-1=0$？

这个方程，显然不能通过直接开平方来解，能否把这个方程转化成直接开平方来解的形式？

下面，对这个方程进行变形：

为什么在方程两边同时加上数“1”而不是其他数？

“化归方法”是将待解的问题转化成先前已经解决的问题的一种数学思想方法，配方法就是将一元二次方程通过配方转化成可直接开平方解方程的方法.

把常数项移到等号右边，得

$$x^2+2x=1.$$

对等号左边配方，得

$$x^2+2x+1=1+1,$$

即

$$(x+1)^2=2.$$

这时，对上式直接开平方，得

$$x+1=\pm\sqrt{2}.$$

所以原方程的根是

$$x_1=\sqrt{2}-1,\ x_2=-\sqrt{2}-1.$$

（考虑到问题1的实际情况，这里只能取 $x_1=\sqrt{2}-1\approx 0.41$，即：年平均增长率应是41%）

像这种先对原一元二次方程配方，使它出现完全平方式后，再直接开平方求解的方法，叫做**配方法**（solving by completing square）.

例1 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-4x-1=0$；

(2) $2x^2-3x-1=0$.

解 (1) 移项，得

$$x^2-4x=1.$$

配方，得

$$x^2-2\times 2x+\underline{\qquad\qquad}=1+\underline{\qquad\qquad},$$

即

$$(x-\underline{\qquad\qquad})^2=\underline{\qquad\qquad}.$$

开平方，得

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

所以原方程的根是

$$x_1=\underline{\qquad\qquad},x_2=\underline{\qquad\qquad}.$$

(2) 先把 x^2 的系数变为1，即把原方程两边同除以2，得

$$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

移项,得

$$x^2-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}.$$

下面的过程由你来完成:

____

____

____

____

交流

根据上面的例题,请你归纳出用配方法解一般一元二次方程应有的步骤. 其中,最关键的是配哪一项,这一项怎样确定?

练习

1. 填空:

(1) $x^2-8x+(\quad)^2=(x-\quad)^2$;

(2) $y^2+5y+(\quad)^2=(y+\quad)^2$;

(3) $x^2-\frac{5}{2}x+(\quad)^2=(x-\quad)^2$;

(4) $x^2+px+(\quad)^2=(x+\quad)^2$.

2. 用配方法解下列方程:

(1) $x^2+x-1=0$;

(2) $x^2-3x-2=0$;

(3) $2x^2+5x-1=0$;

(4) $3x^2-6x+1=0$.

2. 公式法

探究

如何解一般的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

呢？

因为 $a\neq 0$，把方程的两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ㊉$$

因为 $a\neq 0$，$4a^2>0$.

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$，将方程㊉两边开平方，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

于是得 $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant 0).$$

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$ 且 $b^2-4ac\geqslant 0$）的**求根公式**.

有了求根公式,要解一个一元二次方程,只要先把它整理成一般形式,确定出 a, b, c 的值,然后,把 a, b, c 的值代入求根公式,就可以得出方程的根. 这种解法叫做**公式法**(method of formula).

例 2 用公式法解下列方程:

(1) $2x^2+7x-4=0$;　　　(2) $x^2+3=2\sqrt{3}x$.

解 (1) $a=2$, $b=7$, $c=-4$,

$b^2-4ac=7^2-4\times2\times(-4)=81>0$.

代入求根公式,得

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{-7\pm9}{4}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-4.$$

(2) 将原方程化为标准形式,得

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0.$$

$$a=1,\ b=-2\sqrt{3},\ c=3,$$

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0.$$

代入求根公式,得

$$x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x_1=x_2=\sqrt{3}.$$

例 3 解方程：$x^2+x-1=0$.（精确到 0.001）

解 $a=1,\ b=1,\ c=-1$，代入求根公式，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

用计算器求得 $\sqrt{5}\approx2.2361$.

$\therefore\quad x_1\approx0.618,\ x_2\approx-1.618.$

练习

1. 把下列方程化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，并写出其中 $a,\ b,\ c$ 的值：

   (1) $x^2-5x=2$；　　(2) $3x^2-1=2x$；

   (3) $2x(x-1)=x+4$；　　(4) $(x+1)^2=3x-2$.

2. 用公式法解下列方程：

   (1) $3x^2+5x-2=0$；　　(2) $2x^2+5x-12=0$；

   (3) $t^2+2\sqrt{2}t+2=0$；　　(4) $4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$；

   (5) $p(2-p)=5$；　　(6) $0.3x(x-2)+0.4=0$.

3. 用公式法解方程：$x^2-3x-1=0$.（精确到 0.1）

4. 解关于 x 的方程：$2x^2-mx-n^2=0$.

3. 因式分解法

一个一元二次方程用公式法总可以求解. 对于一些特殊的一元二次方程，还可以有别的解法. 如解方程 $x^2=9$，除了直接开平方求解外，还可以把它变形为

$$x^2-9=0.$$

再将方程左边分解因式，得

$$(x-3)(x+3)=0.$$

我们知道，**如果两个因式的积等于0，那么这两个因式中至少有一个等于0；**反过来，**如果两个因式中有一个等于0，那么它们的积就等于0.** 因此，有

$$x-3=0 \text{ 或 } x+3=0.$$

解这两个一次方程，得

$$x_1=3,\ x_2=-3.$$

这种通过因式分解，将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来求解的方法叫做**因式分解法**（method of factorization）.

这里用到了什么样的数学思想方法？

交流

1. 解下列方程，并与同学交流，检查解得的结果是否正确.

（1）$x^2+3x=0$；　　（2）$x^2=x$.

2. 在解上面的方程(2)时，如果像下面这样做：

两边同除以 x，得 $x=1$.

故方程的根为 $x=1$.

这样对吗？为什么？

3. 总结前面内容你能否归纳出缺项的二次方程：

$ax^2+c=0$（a，c 异号），$ax^2+bx=0$（$a\neq0$）

的解法？

例 4　解方程：$x^2-5x+6=0$.

解　把方程左边分解因式，得

$$(x-2)(x-3)=0.$$

因此，有

$$x-2=0 \text{ 或 } x-3=0.$$

解方程，得

$$x_1=2,\ x_2=3.$$

例 5 解方程：$(x+4)(x-1)=6$.

解 将原方程化为标准形式，得

$$x^2+3x-10=0.$$

把方程左边分解因式，得

$$(x+5)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad x+5=0 \text{ 或 } x-2=0.$$

解方程，得

$$x_1=-5,\ x_2=2.$$

练习

用因式分解法解下列方程：

(1) $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$；

(2) $4x^2-3x=0$；

(3) $3(x+1)=x(x+1)$；

(4) $x^2-6x-7=0$；

(5) $t(t+3)=28$；

(6) $(x+1)(x+3)=15$.

习题 17.2

1. 直接开平方解下列方程：

(1) $x^2-49=0$；

(2) $2x^2-\frac{1}{8}=0$；

(3) $(x-1)^2=2$；

(4) $2(x-2)^2-8=0$；

(5) $(\sqrt{2}x-2)^2=6$；

(6) $(x+\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+6x-7=0$；　　(2) $x^2+5x+2=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$；　　(4) $2x^2-3x-7=0$.

3. 用配方法解关于 x 的方程：$x^2+px+q=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-x-3=0$；　　(2) $2x^2+4x-3=0$；

(3) $3x^2-x-1=0$；　　(4) $2y^2+3y-1=0$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2=7x$；　　(2) $2x^2+x=0$；

(3) $(x+1)^2-2(x+1)=0$；　　(4) $x^2-3x+2=0$.

6. 用适当方法解下列方程：

(1) $x^2-3x-4=0$；

(2) $6x^2-13x-15=0$；

(3) $(3-x)^2+x^2=9$；

(4) $(y-2)^2=3$；

(5) $(y+\sqrt{3})^2=4\sqrt{3}y$；

(6) $(2x-1)(x+3)=4$；

(7) $(2y+1)^2+3(2y+1)+2=0$.

7. 解下列方程，并求根的近似值（精确到 0.01）：

(1) $5x^2+2x-1=0$；　　(2) $x^2-3x+1=0$.

8. 当 x 是什么数时，$3x^2+6x-8$ 的值与 $2x^2-1$ 的值相等？

数学活动

挪 球 游 戏

下面我们来做一个数学游戏：

一些球被分成了许多堆，我们可以任意选择甲、乙两堆按照以下规则挪动：若甲堆的球数 p 不少于乙堆

的球数 q，则从甲堆拿 q 个球放到乙堆去，这算是挪动一次. 继续这个过程，可以经过有限次挪动把所有的球合并成至多两堆.

我们从最简单的情形着手：设有 A，B，C 三堆球，它们中分别有球 a 个，b 个和 c 个. 不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$，易知，如果其中有等号成立，那么一步就可以把它们并成至多两堆. 所以下面设 $a < b < c$.

给出几组具体数据，自己试着做一做. 做起来会很有趣，即使没有做成功，也会有所体会和收获. 在下面的情况中，都有 $a = 1$，$a + b + c = 50$.

情形 1：$a = 1$，$b = 9$，$c = 40$.

	A	B	C
操作步骤	1	9	40
第一步：$B \to A$，移动 1 个球	2	8	40
第二步：$C \to A$，移动 2 个球	4	8	38
第三步：$C \to A$，移动 4 个球	8	8	34
第四步：$B \to A$，移动 8 个球	16	0	34

情形 2：$a = 1$，$b = 11$，$c = 38$.

	A	B	C
操作步骤	1	11	38
第一步：$B \to A$，移动 1 个球	2	10	38
第二步：$B \to A$，移动 2 个球	4	8	38
第三步：$C \to A$，移动 4 个球	8	8	34
第四步：$B \to A$，移动 8 个球	16	0	34

情形 3：$a=1$，$b=22$，$c=27$.

	A	B	C
操作步骤	1	22	27
第一步：$C \to A$，移动 1 个球	2	22	26
第二步：$B \to A$，移动 2 个球	4	20	26
第三步：$B \to A$，移动 4 个球	8	16	26
第四步：$C \to A$，移动 8 个球	16	16	18
第五步：$B \to A$，移动 16 个球	32	0	18

活动 1：通过观察，得到规律.

（1）观察 A 堆中的球数变化情况；

（2）观察操作步骤中各次移动的球数变化情况；

（3）观察操作步骤中各次移动中分别移往何处？

（4）观察操作步骤中各次移动时分别由何处移出？

（5）观察 B 堆中球数变化的情况；

（6）总结你所观察到的规律，想一想为什么？

活动 2：感兴趣的同学可以试着寻找当 $a>1$ 时的规律.

完成上述游戏后，说说你对解决问题的策略和方法的感悟.

17.3 一元二次方程根的判别式

交流

在前面的学习中，你是否注意到：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根的条件是什么？何时有两个相等的实数根？何时有两个不相等的实数根？

前面，通过配方，得到了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

因为 $a\neq 0$，所以

（1）当 $b^2-4ac>0$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}$ 是正实数，因此，方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

（2）当 $b^2-4ac=0$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}=0$，因此，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

（3）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}$ 在实数范围内无意义，因此方程没有实数根.

可见，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的情况由 b^2-4ac 来确定. 我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ **根的判别式**，通常用符号“Δ”来表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

一般地，**一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，**

当 $\Delta>0$ 时，有两个不相等的实数根；
当 $\Delta=0$ 时，有两个相等的实数根；
当 $\Delta<0$ 时，没有实数根.

例 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $5x^2-3x-2=0$；

(2) $25y^2+4=20y$；

(3) $2x^2+\sqrt{3}x+1=0$.

解 (1) 因为 $\Delta=(-3)^2-4\times 5\times(-2)=49>0$，

所以原方程有两个不相等的实数根.

(2) 原方程可变形为

$$25y^2-20y+4=0.$$

因为 $\Delta=(-20)^2-4\times 25\times 4=0$，

所以原方程有两个相等的实数根.

(3) 因为 $\Delta=(\sqrt{3})^2-4\times 2\times 1=-5<0$，

所以原方程没有实数根.

练习

1. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $2x^2-5x-4=0$；

(2) $7t^2-5t+2=0$；

(3) $x(x+1)=3$；

(4) $3y^2+25=10\sqrt{3}y$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-3x+k=0$，问 k 取何值时，这个方程：

(1) 有两个不相等的实数根？

(2) 有两个相等的实数根？

(3) 没有实数根？

习题 17.3

1. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $4y(y-1)+1=0$；

(2) $0.2x^2-5=\frac{3}{2}x$；

(3) $2y^2+4y+35=0$；

(4) $x^2+0.09=0.6x$.

2. 求证：关于 x 的方程 $x^2+(2k+1)x+k-1=0$ 有两个不相等的实数根.

3. k 取什么值时，关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$ 有两个相等的实数根？求出这时方程的根.

4. 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2-2mx+m=0$ 有实数根，求 m 的取值范围.

5. 求证：关于 x 的方程 $\frac{x^2}{2}+(m+1)x+m^2+m+1=0$ 没有实数根.

*17.4 一元二次方程的根与系数的关系

探究

在前面17.2节中，我们学过，一元二次方程的每一个根都可由它的各项系数通过运算得到.

进一步，你是否注意到每个方程中的两根之和(x_1+x_2)、两根之积(x_1x_2)与该方程的各项系数之间有怎样的关系？填写下表，然后观察根与系数的关系：

方　程	x_1	x_2	x_1+x_2	x_1x_2
$x^2+2x-15=0$				
$3x^2-4x+1=0$				
$2x^2-5x+1=0$				

根据你的观察，猜想：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根如果是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=$________，$x_1x_2=$________.

你能证明上面的猜想吗？

我们知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

由此得出,一元二次方程的根与系数之间存在下列关系:

如果 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个根为 x_1, x_2,那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

这个关系通常称为**韦达定理**(Vieta's theorem).

当一元二次方程的二次项系数为1时,它的标准形式为 $x^2+px+q=0$. 设它的两个根为 x_1, x_2,这时韦达定理应是:

$$x_1+x_2=-p, \ x_1x_2=q.$$

例1 已知关于 x 的方程 $2x^2+kx-4=0$ 的一个根是 -4,求它的另一个根及 k 的值.

解 设方程的另一个根是 x_2,则

$$\begin{cases} -4+x_2=-\frac{k}{2}, \\ -4x_2=-\frac{4}{2}. \end{cases}$$

本题还有别的解法吗?

解方程组,得 $\begin{cases} x_2=\frac{1}{2}, \\ k=7. \end{cases}$

答:方程的另一个根为 $\frac{1}{2}$,k 的值为7.

例2 方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两个根记作 x_1, x_2,不解方程,求 x_1-x_2 的值.

解 由韦达定理,得

$$x_1+x_2=\frac{3}{2},\quad x_1x_2=\frac{1}{2}.$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad x_1-x_2=\pm\frac{1}{2}.$$

练习

1. 下列各方程中，两根之和与两根之积各是多少？

(1) $x^2-3x+1=0$;

(2) $3x^2-2x-2=0$;

(3) $2x^2-9x+5=0$;

(4) $4x^2-7x+1=0$;

(5) $2x^2+3x=0$;

(6) $3x^2=1$.

2. 判定下列各方程后面括号内的两个数是不是它的两个根.

(1) $x^2+5x+4=0$, $(1,\ 4)$;

(2) $x^2-6x-7=0$, $(-1,\ 7)$;

(3) $2x^2-3x+1=0$, $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$;

(4) $3x^2+5x-2=0$, $\left(-\frac{1}{3},\ 2\right)$;

(5) $x^2-8x+11=0$, $(4-\sqrt{5},\ 4+\sqrt{5})$.

3. 已知关于 x 的方程 $3x^2-19x+m=0$ 的一个根是 1，求它的另一个根及 m 的值.

4. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根，利用根与系数的关系，求下列各式的值.

(1) $(x_1+1)(x_2+1)$;

(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

习题 17.4

1. 若长方形的长和宽是方程 $4x^2-12x+3=0$ 的两个根,求该长方形的周长和面积.
2. 不解方程,试说明一元二次方程 $3x^2-5x=7$ 必有实数根,并求出两根之和与两根之积.
3. 已知关于 x 的方程 $2x^2+mx-3=0$ 的一个根是 $\frac{1}{2}$,求它的另一个根及 m 的值.
4. 已知关于 x 的方程 $x^2+mx+2m-n=0$ 的根为 2,且根的判别式为 0,求 m, n 的值.
5. 已知两数的和为 2,积为 -2,求这两个数.

17.5 一元二次方程的应用

例 1 17.1 节中的问题 2.

解 设小路的宽是 x m. 根据题意,得

$$32\times 20-(32x+2\times 20x)+2x^2=570.$$

整理,得

$$x^2-36x+35=0.$$

$$(x-1)(x-35)=0.$$

$$\therefore \quad x_1=1,\ x_2=35.$$

结合题意, $x=35$ 不可能,因此,只能取 $x=1$.

答:所求小路的宽应为 1 m.

例 2 原来每盒 27 元的一种药品(图 17-3),经两次降价后每盒售价为 9 元. 求该药品两次降价的平均降价率是多少?(精确到 1%)

图 17-3

解 设该种药品两次平均降价率是 x. 根据题意,得

$$27(1-x)^2=9.$$

整理,得

$$(1-x)^2=\frac{1}{3}.$$

解这个方程,得

$$x_1\approx 1.58,\ x_2\approx 0.42.$$

$x_1\approx 1.58$ 不合题意,所以 $x\approx 0.42$.

答:该药品两次降价的平均降价率约是 42%.

例3 如图 17－4,一农户原来种植的花生,每公顷产量为 3 000 kg,出油率为 50%(即每 100 kg 花生可加工出花生油 50 kg). 现在种植新品种花生后,每公顷收获的花生可加工出花生油 1 980 kg,已知花生出油率的增长率是产量增长率的$\frac{1}{2}$. 求新品种花生产量的增长率.

(1) (2)

图 17－4

分析:设新品种花生产量的增长率为 x,则新品种花生出油率的增长率为$\frac{1}{2}x$,根据"新品种花生每公顷产量×新品种花生出油率 =1 980"可列出方程.

解 设新品种花生产量的增长率为 x. 根据题意,得

$$3\,000(1+x)\cdot\left[50\%\left(1+\frac{1}{2}x\right)\right]=1\,980.$$

解方程,得 $x_1=0.2=20\%$, $x_2=-3.2$(不合题意,舍去).

答:新品种花生产量的增长率为 20%.

例4 正方形金属片一块,将其四个角各截去一个相同大小的小正方形,围成高 20 cm,容积为 2 880 cm^3 的开口方盒. 问原金属片的边长是多少?

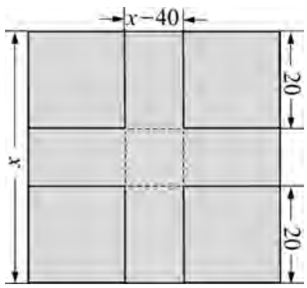


图　17-5

解　设原金属片的边长为 x cm，则方盒的底边长是 $(x-40)$ cm.

根据题意，得

$$20(x-40)^2=2\ 880.$$

整理，得

$$(x-40)^2=144.$$

解方程，得

$$x_1=52,\ x_2=28.$$

$x_2=28$ 不合题意，所以 $x=52$.

答：原金属片的边长是 52 cm.

建立方程解决实际问题可能出现分式方程，如：

*** 例 5**　一组学生组织春游，预计共需费用 120 元. 后来又有 2 人参加进来，费用不变，这样每人可少分摊 3 元. 问原来这组学生的人数是多少？

分析：设原来这组学生的人数是 x 人，则把题中信息整理成下表：

	总费用/元	人数/人	每人费用/元
原　来	120	x	$\frac{120}{x}$
现　在	120	$x+2$	$\frac{120}{x+2}$

本题的等量关系是：

原来这组学生每人分摊的费用−加人后该组学生每人分摊的费用=3元.

由此可得方程.

解 设原来这组学生的人数是 x 人，那么每人分摊的费用是$\frac{120}{x}$元，增加2人后这组学生每人分摊的费用是$\frac{120}{x+2}$元.根据增加2人后每人可少分摊3元，得

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+2}=3.$$

方程两边同乘以 $x(x+2)$，整理，得

$$x^2+2x-80=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=-10,\ x_2=8.$$

经检验，$x_1=-10$，$x_2=8$ 都是原方程的根，但 $x_1=-10$ 不合题意，所以取 $x=8$.

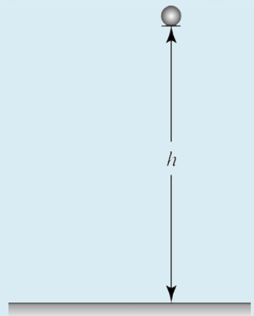
答：原来这组学生是8人.

解分式方程应用题时，所得根不仅要检验根是否为增根，还要考虑它是否符合题意.

练习

1. 如果两个连续偶数的积是288，求这两个数.
2. 一根水管因使用日久，内壁均匀地形成一层厚3 mm的附着物，而导致流通截面减少至原来的$\frac{4}{9}$.求这根水管原来的内壁直径.
3. 某磷肥厂去年4月份生产磷肥500 t；因管理不善，5月份的磷肥产量减少了10%；从6月份起强化了管理，产量逐月上升，7月份产量达到648 t.求该厂6月份、7月份产量的月平均增长率.

习题 17.5



（第 1 题）

1. 在没有空气阻力的条件下，自由下落物体的下落距离 h（单位：m）与下落时间 t（单位：s）有如下关系：

$$h=4.9t^2.$$

今有一铁球从 $h=44.1$ m 的高处自由落下（如图），求铁球落到地面所用的时间.

2. 一个两位数，个位上的数字比十位上的数字大 3，且个位上数字的平方等于这个两位数，求这个两位数.
3. 有一张长方形的桌子，长 2 m，宽 1 m，将一块长方形桌布铺在桌面上时，各边垂下的长度相同，并且桌布的面积是桌面面积的 2 倍. 求桌布的长和宽各是多少？
4. 某中学开展植树活动，连续四年共植树 1 999 棵. 已知第一年植树 344 棵，第二年植树 500 棵. 如果第三年和第四年植树棵数的增长率相同，那么该校第三年和第四年各植树多少棵？
5. 把 195 张图片平均分给若干名学生，已知每人分得的图片数比人数少 2. 问学生有多少人？
6. 果园内种了 600 棵橘子树，每行所种的棵数比行数的 2 倍少 10，问每行种多少棵橘子树？

数学史话

一元高次方程

公元 9 世纪，阿拉伯数学家已经得到了一般形式的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的求根公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

从公元 15 世纪起，欧洲数学家们开始寻找一元三次方程的求根公式. 1545 年，意大利数学家卡尔丹在他的《大法》一书中，公开了意大利的另一位数学家塔尔塔里亚发现的一元三次方程的

求根公式. 同时,卡尔丹的学生费尔拉里在他的指导下,圆满地得出了一元四次方程的求根公式.

对于五次及五次以上的一元高次方程情形如何呢? 1824 年,年仅 22 岁的挪威数学家阿贝尔成功地证明:五次及五次以上的一般形式的一元高次方程用根式求解是不可能的,即不能仅仅依靠对其系数施以加减乘除与开方而获解. 在阿贝尔证明之后,数学家面临的问题是:什么样的特殊方程可以用根式求解呢? 法国数学家伽罗瓦,在 1829 ~ 1831 年间完成的几篇论文中,给出了判别方程是否可用根式求解的充分必要条件,从而宣告这一困扰了数学家 300 年的难题的彻底解决. 伽罗瓦的工作可以看成是近世代数的开端,这不仅是因为它解决了方程是否可用根式求解这个难题,更重要的是“群”的概念的引进引发了代数学在对象、内容和方法上的深刻变革.

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$,其中 $a\neq 0$.

2. 一元二次方程的解法有:

____.

3. 一元二次方程根的判别式有什么作用?

*4. 一元二次方程的根与系数有怎样的关系?

三、自评与互评

1. 我们已经学习了一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程组及一元一次不等式、一元一次不等式组,就它们的共同特征及它们之间的相互关系作一个书面总结,和同学进行交流.

2. 利用方程(组)解决实际问题的关键是什么?结合本章的学习,谈谈你的体会!

3. “化归方法”是一种重要的数学思想方法,在本章学习中不止一次用到,你能总结一下前面还有哪些地方也用到过这种方法吗?

A组 复习题

1. 解下列方程:

(1) $x^2=64$;　(2) $x^2=8$;

(3) $(3x+2)^2=4(x-3)^2$;　(4) $\sqrt{2}y^2-3y=0$;

(5) $(2x+1)^2=2x+1$.

2. 用配方法解下列方程:

(1) $x^2-x-1=0$;　(2) $3x^2=-1-5x$;

(3) $5y-84+y^2=0$;　(4) $2x^2+\sqrt{3}x=3$.

3. 用公式法解下列方程:

(1) $x^2+2=2\sqrt{2}x$;

(2) $9x^2+4=12x$;

(3) $(2x-1)^2-5=x(x-5)$;

(4) $y-\dfrac{y^2-1}{2}=1$.

4. 用适当方法解下列方程:

(1) $x^2+6x-5=0$;

(2) $(x+3)(x-3)=2$;

(3) $(t-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}t=0$;

(4) $3x(x-1)=2-2x$.

5. 已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+k=0$ 的一个根是 1.

(1) 求 k 的值;

(2) 解这个方程.

6. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2+5x-7=0$ 的两个根,不解方程,求下列式子的值.

(1) $x_1^2+x_2^2$;

(2) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$.

7. 有一块长 25 cm、宽 15 cm 的长方形硬纸板,如果在纸板的四个角上各截去一个相同大小的小正方形,然后把四边折起来,做成一个底面积为 231 cm^2 的无盖长方体盒子. 求截去的小正方形的边长.

8. 某商厦 10 月份的营业额是 50 万元,第四季度的营业额是 182 万元. 问第四季度后两个月的月平均营业额的增长率是多少?

B组 复习题

1. 已知 $y=x^2-2x-3$.

(1) x 是什么数时,$y=0$?

(2) x 是什么数时,$y=-4$?

2. 有三个连续奇数,已知它们的平方和等于 251,求这三个数.

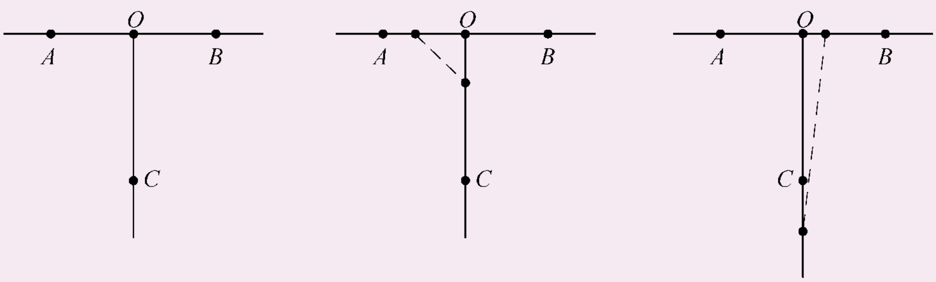
3. 已知:关于 x 的一元二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 有两个相等的实数根. 求证:$2b=a+c$.

4. 要建一个面积为 150 m^2 的长方形养鸡场,为了节省材料,养鸡场的一边利用原有的一道墙,另三边用铁丝网围成,如果铁丝网的长为 35 m.

(1) 若墙足够长,则养鸡场的长与宽各为多少?

(2) 若给定墙长为 a m,则墙长 a 对题目的解是否有影响?

5. 如图，$OA = OB = 50$ cm，OC 是一条射线，$OC \perp AB$，一小虫由点 A 以 2 cm/s 的速度向 B 爬行，同时另一小虫由点 O 以 3 cm/s 的速度沿 OC 爬行，则在几秒时，两小虫所在位置与点 O 组成的三角形的面积等于 450 cm^2？



(1) (2) (3)

（第 5 题）

6. 某公司实行年薪工资制，职工的年薪工资由基本工资、工龄工资和岗位工资三项组成，具体规定如下：

项　　目	第一年的工资（万元）	一年后的计算方法
基本工资	2	每年增长率相同
工龄工资	0. 08	每年增加 0. 08 万元
岗位工资	0. 276 8	固定不变

（1）设基本工资每年增长率为 x，用含 x 的代数式表示第三年的基本工资；

（2）某人在公司工作了 3 年，他这 3 年拿到的工龄工资和岗位工资正好是这 3 年基本工资总额的 18%，问基本工资每年的增长率是多少？

7. 在一次象棋比赛中，实行单循环赛制（即每个选手都与其他选手比赛一局），每局赢者记 2 分，负者记 0 分，如果平局，两个选手各记 1 分. 今有 4 个同学统计了比赛中全部选手的得分总和，结果分别为2 005，2 004，2 070，2 008，经核实确定只有一位同学统计正确，试计算这次比赛中共有多少名选手参赛.

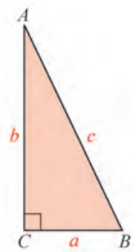
（第 7 题）

8. 一小艇顺流航行 24 km 到达目的地，然后逆流回到出发地，航行时间共 6 h. 已知水流速度是 3 km/h. 求小艇在静水中的速度.

9. 某商店以 2 400 元购进一种盒装茶叶，第一个月每盒按进价增加 20% 作为售价，售出 50 盒. 第二个月每盒以低于进价 5 元作为售价，售完余下的茶叶. 全部售完后共盈利 350 元，求每盒茶叶的进价.

10. 一商店用 1 800 元买进玩具若干个，其中有 2 个损坏无法出售，剩余的每个以比进价多 5 元的价格出售. 若剩余的全部卖完，则这批玩具共赚 400 元. 问这批玩具每个进价是多少元？共买进了多少个玩具？

第18章 勾股定理



$a^2+b^2=c^2$

直角三角形是一类特殊三角形，它的三边具有一种特定的关系，这一关系称为勾股定理．早在公元3世纪，我国数学家赵爽就用弦图证明了这个定理．

本章就来学习勾股定理和它的逆定理以及它们的应用．

18.1 勾股定理

探究

在行距、列距都是 1 的方格网中，任意作出几个以格点为顶点的直角三角形，分别以三角形的各边为正方形的一边，向形外作正方形，如图 18－1. 并以 S_1，S_2 与 S_3 分别表示几个正方形的面积.

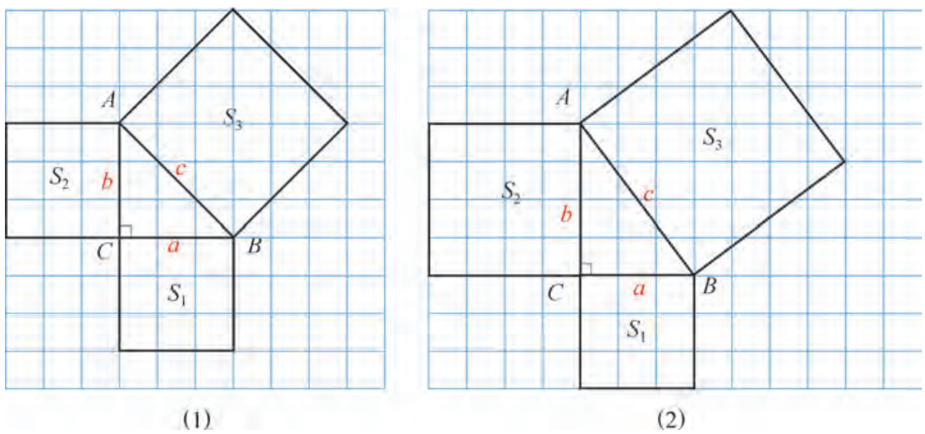


图　18－1

观察图 18－1(1)，并填写：

S_1 =________个单位面积；

S_2 =________个单位面积；

S_3 =________个单位面积.

观察图 18－1(2)，并填写：

S_1 =________个单位面积；

S_2 =________个单位面积；

$S_3=$________个单位面积.

图 18－1(1),(2)中三个正方形面积之间有怎样的关系,用它们的边长表示,是:________________.

通过上面的探究,你能发现直角三角形三边的长之间有怎样的关系吗?

定理　直角三角形两条直角边的平方和,等于斜边的平方.

我国古代把直角三角形中较短的直角边称为勾,较长的直角边称为股,斜边称为弦. 因此,我们称上述定理为**勾股定理**,国外称为**毕达哥拉斯定理**(Pythagoras theorem).

如果直角三角形的两直角边用 a,b 表示,斜边用 c 表示,那么勾股定理可表示为

$$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}.$$

汉代数学家赵爽把勾股定理叙述成:勾股各自乘,并之为弦实,开方除之即弦.

下面,用面积计算来证明这个定理.

已知:如图 18－2(1),在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AB=c$,$BC=a$,$AC=b$.

求证:$a^2+b^2=c^2$.

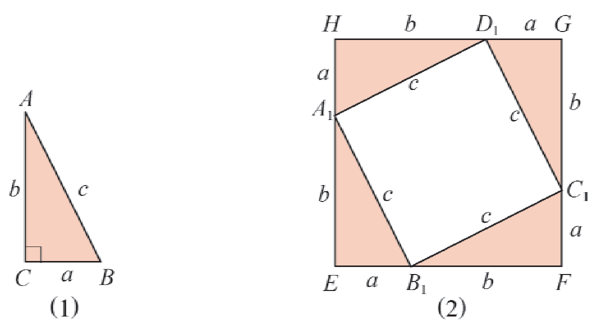


图　18－2

证明　取 4 个与 Rt△ABC 全等的直角三角形,把它们拼成如图 18－2(2)所示的边长为 $a+b$ 的正方形 $EFGH$.

从图中可见,$A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=A_1D_1=c$. 因为

$\angle B_1A_1E + \angle A_1B_1E = 90°$，而 $\angle A_1B_1E = \angle D_1A_1H$，因此 $\angle B_1A_1E + \angle D_1A_1H = 90°$，$\angle D_1A_1B_1 = 90°$. 同理：$\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1D_1 = \angle C_1D_1A_1 = 90°$，所以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 c 的正方形.

正方形 $EFGH$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积分别记作 $S_{正方形EFGH}$和 $S_{正方形A_1B_1C_1D_1}$，则

$$S_{正方形EFGH} - 4S_{\triangle ABC} = S_{正方形A_1B_1C_1D_1},$$

即
$$(a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = c^2.$$

化简，得

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

例 1 现有一楼房发生火灾，消防队员决定用消防车上的云梯救人，如图 18－3(1). 已知云梯最多只能伸长到 10 m，消防车高 3 m. 救人时云梯伸至最长，在完成从 9 m 高处救人后，还要从 12 m 高处救人，这时消防车要从原处再向着火的楼房靠近多少米？（精确到 0.1 m）

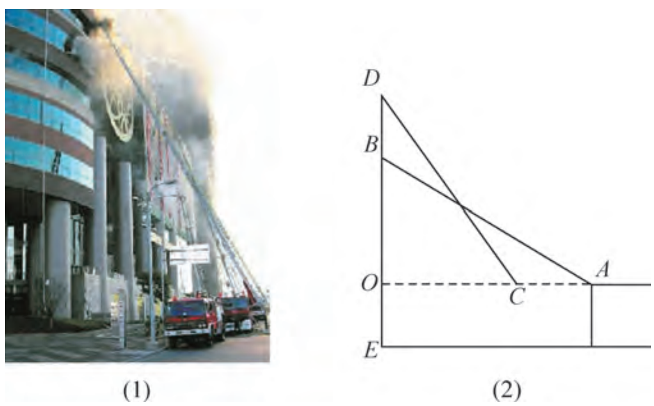


图 18－3

分析：如图 18－3(2)，设 A 是云梯的下端点，AB 是伸长后的云梯，B 是第一次救人的地点，D 是第二次救人的地点，过点 A 的水平线与楼房 ED 的交点为 O. 则 $OB = 9 - 3 = 6$(m)，$OD = 12 - 3 = 9$(m).

根据勾股定理，得

$$AO^2 = AB^2 - OB^2 = 10^2 - 6^2 = 64.$$

解方程，得　　　$AO = 8(\mathrm{m})$.

设 $AC = x$，则 $OC = 8 - x$，于是根据勾股定理，得

$$OC^2 + OD^2 = CD^2,$$

即　　　　$$(8 - x)^2 + 9^2 = 10^2,$$

从而可以解出 x.

请根据上述分析写出解题过程.

例 2　已知：如图 18 - 4，在 Rt△ABC 中，两直角边 $AC = 5$，$BC = 12$. 求斜边上的高 CD 的长.

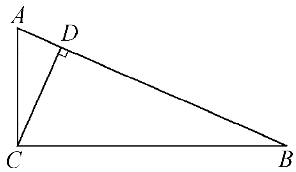


图　18-4

解　在 Rt△ABC 中，

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169,$$

$$AB = \sqrt{169} = 13.$$

又　∵ Rt△ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD,$$

$$\therefore \quad CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

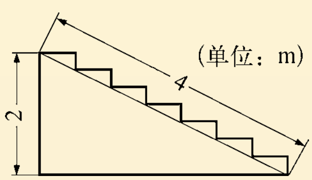
练习

1. 在 △ABC 中，$\angle C = 90°$，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$.

   (1) $a = 6$，$b = 8$，求 c；

   (2) $a = 8$，$c = 17$，求 b.

2. 如图，楼梯的高度为 2 m，楼梯坡面的长度为 4 m，要在楼梯的表面铺上地毯，那么地毯的长度至少需要多少米？（精确到 0.1 m）

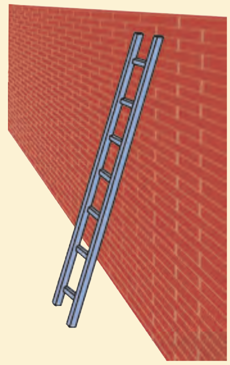


（第 2 题）

3. (1) 如图,长 3 m 的梯子斜靠着墙,梯子底端离墙底 0.6 m,问梯子顶端离地面多少米?(精确到 0.1 m)

(2) 题(1)中,若梯子的顶端自墙面下滑了 0.9 m,那么梯子的底端沿地面向外滑动的距离是否也为 0.9 m?说明理由.

4. 我国古代数学专著《九章算术》中记录了一个问题,其大致意思是说:有一个水面是边长为 10 尺的正方形水池,中央生长有一根芦苇,它露出水面部分高 1 尺,如果把它拉向最近的岸边,芦苇仍伸直而顶端恰好到达岸边的水面,求池水深和芦苇的长.
$\left(\text{尺为当时的计量单位,1 尺} = \dfrac{1}{3}\ \text{m}\right)$



(第 3 题)

数学园地

长度为正整数的算术平方根的线段,可以用尺规作图的方法作出来. 下面介绍一种有趣的方法,你能说出其中的道理吗?

取 $OA_1 = 1 = \sqrt{1}$,作 Rt△OA_1A_2,使 $OA_1 \perp A_1A_2$,$A_1A_2 = OA_1 = 1$,则 $OA_2 = \sqrt{2}$,如图 18-5;

过点 A_2,在 Rt△OA_1A_2 外作 $A_2A_3 \perp OA_2$,且取 $A_2A_3 = 1$,连接 OA_3,则 $OA_3 = \sqrt{3}$;

……

如上继续下去,可以作出长度为任一正整数的算术平方根的线段.

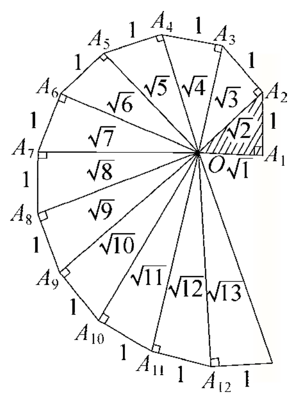


图 18-5

习题 18.1

1. 在△ABC 中，∠C = 90°，填空：

   (1) 如果 AB = 10，BC∶AC = 3∶4，那么 BC = ________，AC = ________；

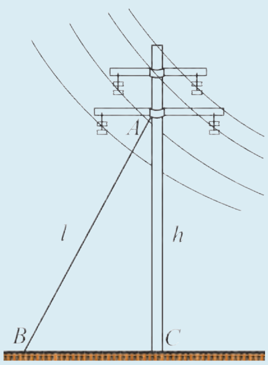
   (2) 如果 AC = 1，∠B = 30°，那么 AB = ________，BC = ________.

2. 已知：在△ABC 中，AB = AC = 17，BC = 16. 求 △ABC 的高 AD 的长.

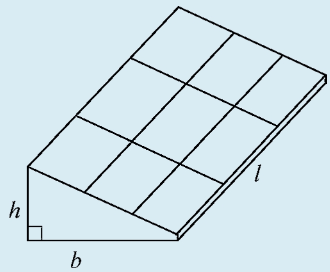
3. 已知直角三角形的三边长是三个连续自然数，求三边长.

4. 求边长为 a 的等边三角形的面积.

5. 如图，从电线杆上离地面 h = 8 m 的点 A 处，向地面拉一条长 l = 12 m 的缆绳，这条缆绳拉直后在地面上点 B 处固定，点 B 离电线杆底部点 C 的距离是多少米？（精确到 0.1 m）



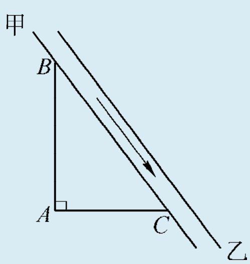
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，要修一个塑料蔬菜大棚，棚宽 b = 3 m，高 h = 1.5 m，长 l = 10 m. 求覆盖在顶上的长方形塑料薄膜需要多少平方米？（精确到 0.1 m^2）

7. 如图，在甲村到乙村的公路旁有一块山地正在开发，现有 A 处需要爆破. 已知点 A 与公路上的停靠站 B，C 的距离分别为 400 m 和 300 m，且 $AC \perp AB$. 为了安全起见，如果爆破点 A 周围半径 250 m 的区域内不能有车辆和行人，问在进行爆破时，公路 BC 段是否需要暂时封闭？为什么？



（第 7 题）

18.2 勾股定理的逆定理

思考

1. 据说，几千年前的古埃及人就已经知道，在一根绳子上连续打上等距离的13个结，然后，用钉子将第1个与第13个结钉在一起，拉紧绳子，再在第4个和第8个结处各钉上一个钉子，如图18－6．这样围成的三角形中，最长边所对的角就是直角．

2. 用圆规、直尺作$\triangle ABC$，使$AB=5$，$AC=4$，$BC=3$，如图18－7，量一量$\angle C$，它是$90°$吗？

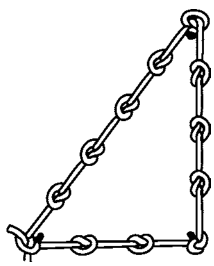


图 18-6

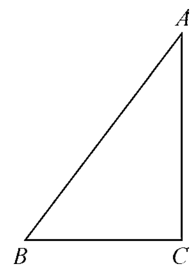


图 18-7

为什么用上面三条线段围成的三角形，就一定是直角三角形呢？

勾股定理的逆定理 **如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形．**

例1 根据下列三角形的三边a，b，c的值，判断$\triangle ABC$是不是直角三角形．如果是，指出哪条边所对的角是直角．

(1) $a=7$，$b=24$，$c=25$；

(2) $a=7$，$b=8$，$c=11$．

解 (1) $\because$ 最大边是$c=25$，$c^2=625$，

$a^2+b^2=7^2+24^2=625$，

$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$．

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形,最大边 c 所对的角是直角.

（2）$\because$ 最大边是 $c=11$, $c^2=121$,

$a^2+b^2=7^2+8^2=113$,

$\therefore$ $a^2+b^2\neq c^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 不是直角三角形.

例 2 已知：在$\triangle ABC$ 中,三条边长分别为 $a=n^2-1$, $b=2n$, $c=n^2+1(n>1)$. 求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

证明 $\because$

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2&=(n^2-1)^2+(2n)^2\\
&=n^4-2n^2+1+4n^2\\
&=n^4+2n^2+1\\
&=(n^2+1)^2=c^2,
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为直角三角形.（勾股定理的逆定理）

能够成为直角三角形三条边长度的三个正整数,称为**勾股数**.

练习

1. 判断下列三边组成的三角形是不是直角三角形：

（1）$a=2$, $b=3$, $c=4$. （ ）

（2）$a=9$, $b=7$, $c=12$. （ ）

（3）$a=25$, $b=20$, $c=15$. （ ）

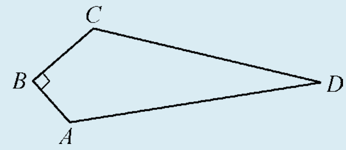
2. 除 3, 4, 5 外,再写出 3 组勾股数.

3. 在$\triangle ABC$ 中,三边长 a, b, c 满足 $(a+c)(a-c)=b^2$, 则$\triangle ABC$ 是什么三角形？

4. 给你一根带有刻度的皮尺,你如何用它来判断方桌面的角是直角？

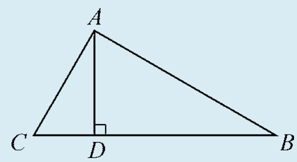
习题 18.2

1. 以三角形三边为边分别向形外作正方形,正方形的面积分别是 25, 15, 40,判断此三角形的形状.
2. 已知:$\triangle ABC$ 的三边长为 $a=9$ cm, $b=40$ cm, $c=41$ cm. 求 $\triangle ABC$ 的面积.
3. 已知:如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=90°$, $AB=3$, $BC=4$, $CD=12$, $AD=13$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.



(第 3 题)

4. 已知:在 $\triangle ABC$ 中,$AB=13$ cm, $BC=10$ cm, BC 边上的中线 $AD=12$ cm. 求证:$AB=AC$.
5. 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=2\sqrt{3}$, $AC=2$, 高 $AD=\sqrt{3}$. 求证:$\angle BAC=90°$.



(第 5 题)

6. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,若 $a:b:c=9:15:12$. 试判断 $\triangle ABC$ 是不是直角三角形.
7. 已知:AD 为 $\triangle ABC$ 的高. 求证:$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$.

阅读与思考

两点之间的距离公式

如果数轴上的点 A_1, A_2 分别表示实数 x_1, x_2,两点 A_1, A_2 间的距离记作 $|A_1A_2|$,那么

$$|A_1A_2|=|x_2-x_1|.$$

对于平面上的两点 A_1, A_2 间的距离是否有类似的结论呢?

运用勾股定理,就可以推出平面上两点之间的距离公式.

问题 1　如图 18－8，平面上两点 $A(3,0)$，$B(0,4)$，如何计算 A，B 两点之间的距离 $|AB|$？

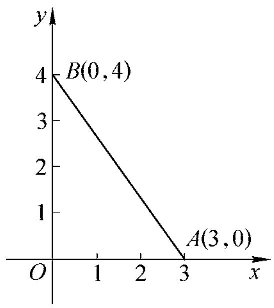


图　18－8

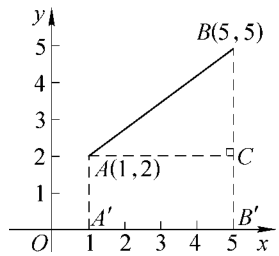


图　18－9

问题 2　如图 18－9，平面上两点 $A(1,2)$，$B(5,5)$，如何计算这两点之间的距离 $|AB|$？

问题 3　一般地，设平面上任意两点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$，如图 18－10，如何计算 A，B 两点之间的距离 $|AB|$？

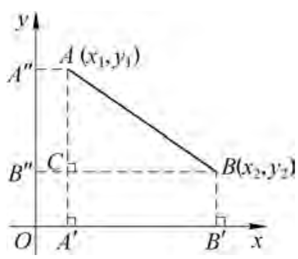


图　18－10

对于问题 3，作 $AA'\perp x$ 轴，$BB'\perp x$ 轴，垂足分别为点 A'，B'；作 $AA''\perp y$ 轴，垂足为 A''；作 $BC\perp AA'$，垂足为点 C，且延长 BC 与 y 轴交于点 B''，则四边形 $BB'A'C$，$ACB''A''$是长方形.

$\because\quad |CA| =$________ $=$________，

$|CB| =$________ $=$________，

$\therefore\quad |AB|^2=|CB|^2+|CA|^2=$________________.

$\therefore\quad |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

这就是平面直角坐标系中**两点之间的距离公式**.

思考　求下列两点之间的距离：

(1) $A(-1, 2)$，$B(-5, -6)$；

(2) $A(1, -5)$，$B(7, 3)$.

数学史话

勾股定理

2002 年，世界数学家大会(ICM—2002)在北京召开，大会的会徽如图 18－11. 这个会徽是以我国古代数学家赵爽为证明勾股定理所作的“弦图”为原型设计的.

图　18－11

图　18－12

据《周髀算经》记载，西周初期周公与大夫商高讨论勾股测量的对话中，商高答周公问时提到“勾广三，股修四，径隅五”，这是勾股定理的特例. 同书稍后，另一处叙述周公后人荣方与陈子关于如何测太阳高度的对话中，则表述了勾股定理的一般形式：“……以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日.”

1955 年希腊发行了一张邮票(图 18－12)，邮票上印有关于勾股定理证明的图案，用来纪念古希腊毕达哥拉斯学派在文化上的贡献. 相传，毕氏在发现这一定理时，曾宰牛百头，广设盛筵，以示庆贺. 据文献记载，在巴比伦、埃及和印度这些文明古国，也很早都知道应用这个定理了.

对勾股定理的研究，遍及世界许多地方、各种文化背景及各个历史时期. 这个定理的证法之多，在几何学中也是罕见的. 欧

几里得在他的《原本》中提供了一种最早的书面证法，其证法如下：

如图 18－13，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$. 以 $\triangle ABC$ 的三边为边分别向形外作正方形 $ABDE$，$BCFG$，$ACHK$，再作 $CL\perp ED$，垂足为点 L，且交 AB 于点 N，连接 KB，CE.

$$\because \quad S_{\triangle ABK}=\frac{1}{2}AK\cdot KH=\frac{1}{2}b^2,$$

$$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}AE\cdot EL=\frac{1}{2}\cdot S_{长方形AELN}.$$

又 $\because \quad \triangle ABK\cong\triangle AEC$，$(SAS)$

$\therefore \quad S_{长方形AELN}=b^2.$

同理：$S_{长方形BDLN}=a^2$.

$$\therefore \quad a^2+b^2=S_{长方形BDLN}+S_{长方形AELN}=S_{正方形ABDE}=c^2.$$

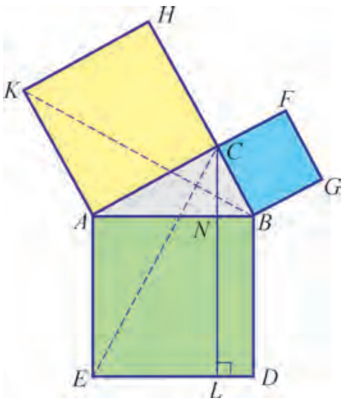


图　18－13

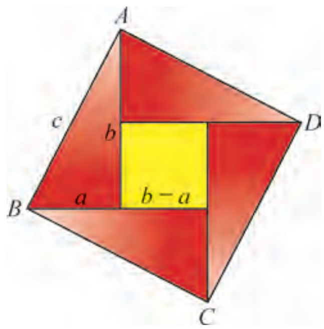


图　18－14

公元 3 世纪，我国数学家赵爽在注《周髀算经》中就给出了它的一个简明证法. 他把“弦图”（图 18－14）中的三角形涂上朱色，它的面积叫做“朱实”. 四个这样的三角形围成一个正方形，中间留出一个小正方形空格，涂上黄色，其面积叫做“中黄实”或叫做“差实”. 由此推出“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实. 加差实，亦成弦实”.

小结·评价

一、内容整理

勾股定理 → 勾股定理

勾股定理 → 勾股定理的逆定理

二、主要知识回顾

1. 勾股定理　直角三角形两条直角边的平方和,等于斜边的平方.

2. 勾股定理的逆定理　如果三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么这个三角形是直角三角形.

三、自评与互评

通过本章的学习,进一步认识到数学来源于实践;举出生活中使用勾股定理的例子,并与同学交流.

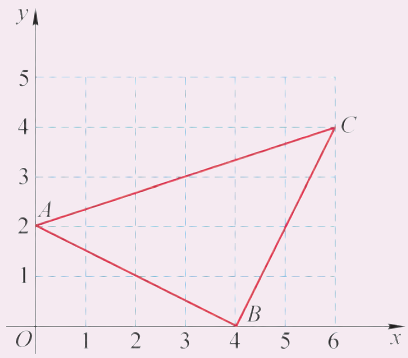
A组 复习题

1. 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AB=\sqrt{75}$,$BC=\sqrt{27}$. 求 $\triangle ABC$ 的周长.

2. 已知:梯形的两条底边长分别为 $\sqrt{12}$ cm, $\sqrt{24}$ cm,高为 $\sqrt{6}$ cm. 求梯形的面积.

3. 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$BC=2\sqrt{3}+1$,$AC=2\sqrt{3}-1$. 求 AB 及三角形的面积.

4. 如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为$A(0, 2)$，$B(4, 0)$，$C(6, 4)$，求$\triangle ABC$ 的周长与面积.

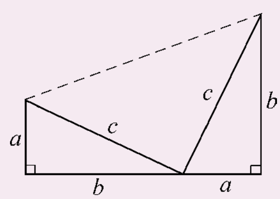


（第 4 题）

5. 立在地上的旗杆，有一根绳子从杆顶垂下，绳碰到地面后还余 3 m，把绳的着地端沿地面移动到离杆 9 m 远的一点，恰好把绳子拉直，问这根旗杆有多高？

6. 一艘轮船以 16 n mile/h 的速度离开港口向东南方向航行，另一艘轮船在同时同地以12 n mile/h的速度向西南方向航行. 它们离开港口 1.5 h 后相距多远？

7. 关于勾股定理，数学史上还有一段佳话：美国第 20 届总统加菲尔德于 1876 年公开发表了一个简明证法. 他利用两个全等直角三角形构造了一个如图所示的图形来得出证明. 你能写出这个证明吗？



（第 7 题）

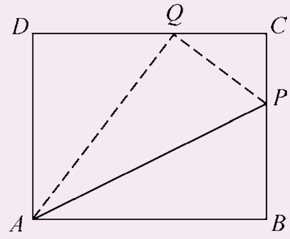
8. 通过尺规作图，在数轴上找出表示 $-\sqrt{5}$ 的点.

B组 复习题

1. （1）已知：$\triangle ABC$ 的三个角度数的比 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$. 求证：$b^2 = 3a^2$.

（2）已知：$\triangle ABC$ 的三个角度数的比 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 2$，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$. 求证：$c^2 = 2a^2$.

2. 如图，将 $AB=10$ cm，$AD=8$ cm 的长方形纸片 $ABCD$，沿过顶点 A 的直线 AP 为折痕折叠时，顶点 B 与边 CD 上的点 Q 重合，试分别求出 DQ，PQ 的长.



（第 2 题）

3. 利用勾股定理讨论以下问题：（S_1，S_2 分别表示直角三角形中直角边上的图形的面积，S_3 表示斜边上的图形的面积）

（1）以直角三角形的三边为边分别向形外作等边三角形，则 S_1+S_2 与 S_3 是什么关系？

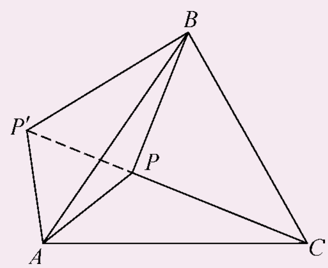
（2）以直角三角形的三边为直径分别向形外作半圆，则 S_1+S_2 与 S_3 是什么关系？

（3）做过上面的两小题后，你有什么发现？

4. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$. 证明：当 a，b，c 为勾股数时，ka，kb，kc（k 为正整数）也是勾股数.

5. 如果 m，n 是任意给定的正整数（$m>n$），证明：m^2+n^2，$2mn$，m^2-n^2 是勾股数（又称毕达哥拉斯数）.

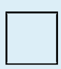
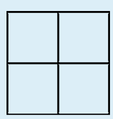
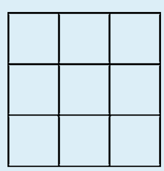
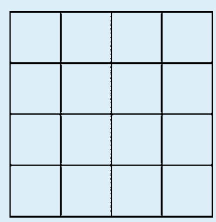
6. 如图，点 P 是等边三角形 ABC 内的一点，且 $PA=6$，$PB=8$，$PC=10$. 若将 $\triangle PAC$ 绕点 A 逆时针旋转后得到 $\triangle P'AB$，求 PP' 的长和 $\angle APB$ 的度数.



（第 6 题）

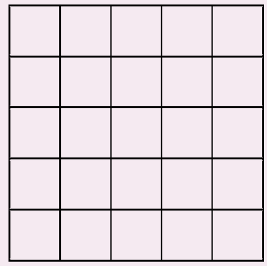
7. 在行距、列距都是 1 的 $n\times n$ 方格网中，连接任意两个格点，若把得到的长度相同的线段看作一类，则

（1）当 $n=1,2,3,4$ 时，在下表中分别写出不同长度线段的种类和种类数.

n 的 值	1	2	3	4
方格网图	 1×1	 2×2	 3×3	 4×4
不同长度线段的种类	$1,\sqrt{2}$	$1,\sqrt{2}$, $2,\sqrt{5},2\sqrt{2}$		
不同长度线段的种类数 S	2	$2+3$		

（2）根据表格内容，猜想 S 与 n 的关系；

（3）当 $n=5$ 时，验证你猜想的结论是否成立.



5×5

［第 7（3）题］

C组 复习题

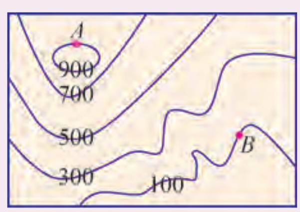
1. 在下列表格中，已知△ABC 的三边长分别为 a，b，c.

（1）计算并填写下表：

边长/cm				三边间关系				
	a	b	c	a^2	b^2	c^2	a^2+b^2	a^2+b^2 与 c^2（用 =，>或 <）
①	4	5	7	16	25	49	41	$a^2+b^2<c^2$
②	6	8	10					
③	6	9	12					
④	5	6	7					
⑤	5	12	13					
⑥	4	8	10					
⑦	5	6	9					

（2）用尺规作出上面各个三角形，观察图形，看看三角形中最长边所对的角是锐角、直角还是钝角，对照上表最后一列关系，你能发现什么规律？

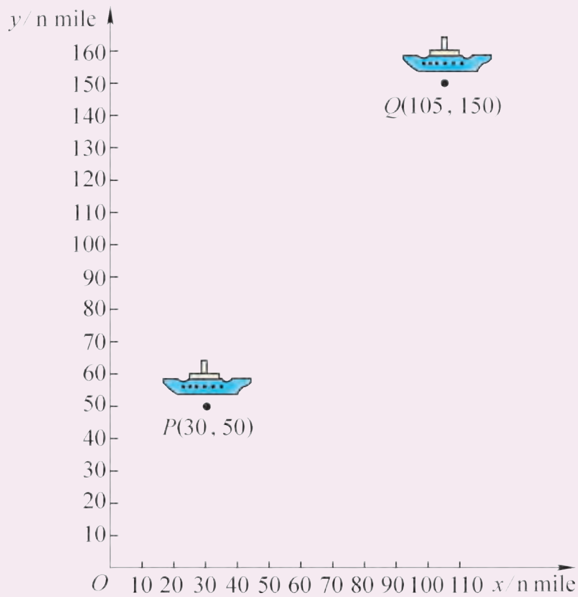
2. 如图，图中曲线是地形图中等高线（同一条曲线上点的海拔是一样的），如果线段 AB 在图中被量得的长是 2.5 cm，那么两个地点 A，B 间的水平距离和实际直线距离各约多少米？（图中表示等高线数据的单位为 m）



（比例 1∶5 000）

（第 2 题）

3. 如图，有两艘船在海上航行，测得两船的位置分别为$P(30, 50)$，$Q(105, 150)$. 求两船之间的距离.



（第 3 题）

4. 在平面直角坐标系中，下列两点关于直线 $y=x$ 有怎样的位置关系？你能说明道理吗？

(1) $A(5, 2)$，$A'(2, 5)$；

(2) $A(2, -4)$，$A'(-4, 2)$；

(3) $A(a, b)$，$A'(b, a)$.

5. 在坐标平面内有一点 $A(2, -\sqrt{3})$，O 为原点，在 x 轴上找一点 B，使以 O，A，B 为顶点的三角形为等腰三角形，写出点 B 的坐标.

第19章 四边形

在小学，我们已初步认识了平行四边形、长方形、正方形等一些特殊四边形．这些图形在生活中有着广泛的应用．

本章将系统学习这些特殊四边形的性质、判定和应用．

19.1 多边形内角和

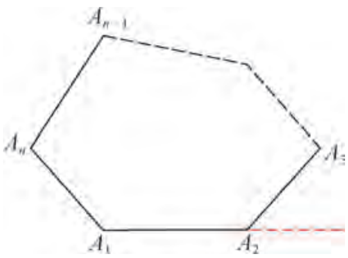


图 19-1

在平面内，由若干条不在同一条直线上的线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做**多边形**（polygon），如图 19－1. 组成多边形的线段叫做**多边形的边**. 相邻两边的公共端点叫做**多边形的顶点**. 多边形中相邻两边组成的角叫做**多边形的内角**，简称多边形的角；在顶点处一边与另一边的延长线所组成的角叫做**多边形的外角**.

多边形一般按边数命名，并用它各个顶点的字母顺次排列来表示. 如图 19－2，分别是四边形 $ABCD$、五边形 $ABCDE$、六边形 $ABCDEF$.

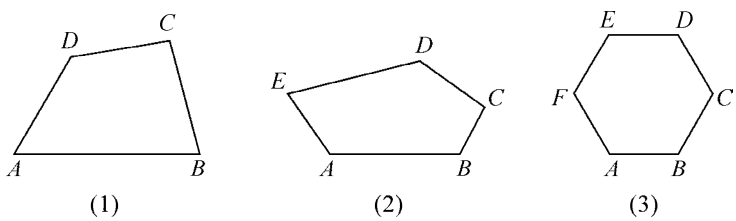


图 19-2

一个多边形，如果把它任何一边双向延长，其他各边都在延长所得直线的同一旁，这样的多边形就是凸多边形，如图 19－3（1）. 而图 19－3（2）所示的图形就不是凸多边形. 本教科书中所研究的都是凸多边形.

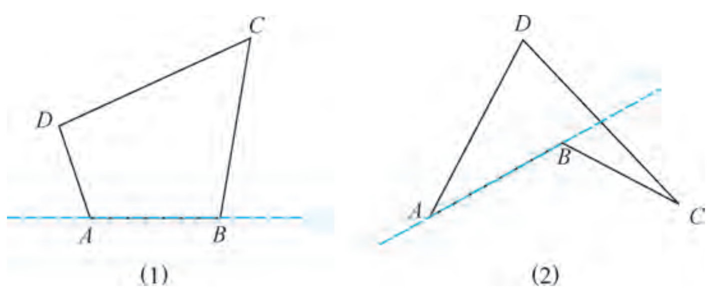


图 19-3

探究

我们知道,三角形的内角和为 180°,下面来探讨多边形的内角和.

1. 四边形的内角和是多少?

按下面两种方法之一试一试:

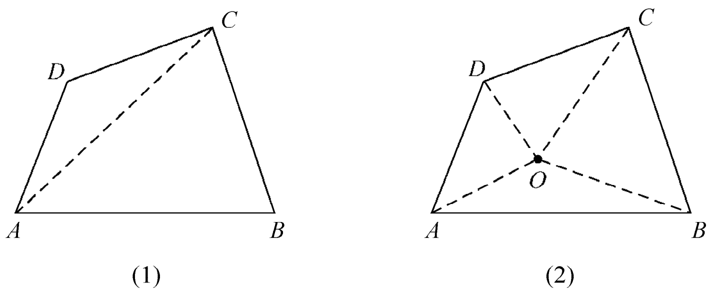


图 19-4

(1) 如图 19-4(1),连接 AC,能推得四边形的内角和吗?

多边形中连接不相邻两个顶点的线段叫做**多边形的对角线**(diagonal of polygon),这里的 AC 是四边形 $ABCD$ 的一条对角线.

(2) 如图 19-4(2),在四边形内任取一点 O,连接 OA, OB, OC, OD,也能推得四边形内角和吗?

四边形的内角和等于________________.

2. 五边形的内角和又是多少呢?

如图 19-5,能仿照上述方法去推得吗?

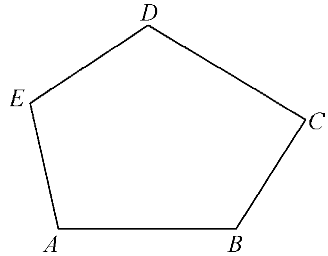


图 19-5

五边形的内角和等于________________.

3. 一般地,n 边形的内角和是多少呢?

你能给出这个定理的证明吗?

定理 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$(n 为不小于 3 的整数).

思考

上面研究了多边形的内角和. 在多边形的每个顶点处取多边形的一个外角,它们的和叫做多边形的外角和. 多边形外角和又有怎样的规律?

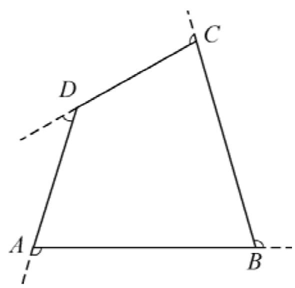


图 19-6

如图 19-6,四边形的每一个外角都与同它相邻的内角互补,你能利用四边形的内角和来计算四边形的外角和吗?

四边形的外角和等于________.

一般地,对于 n 边形可同样分析.

定理 n 边形的外角和等于 $360°$(n 为不小于 3 的整数).

多边形中,如果各条边都相等,各个内角都相等,这样的多边形叫做正多边形. 图 19-7 分别是正三角形、正五边形和正六边形.

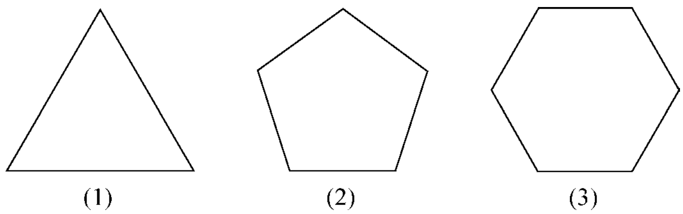


图　19-7

例　求正六边形每个内角的度数.

解　正六边形的内角和为

$$(6-2)\times 180^\circ = 720^\circ,$$

所以每个内角的度数为

$$720^\circ \div 6 = 120^\circ.$$

三角形具有稳定性,但四边形则具有不稳定性(即各边的长确定后,图形形状不能确定),如图 19-8. 在日常生活中,四边形的不稳定性,也有较为广泛的应用,如图 19-9 中活动的铁栅栏门,正是由于四边形可以变动,所以它可以拉开,也可以收拢. 你能举出应用四边形的不稳定性的其他例子吗?

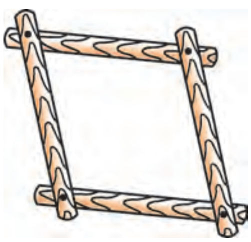


图　19-8

图　19-9

练习

1. 四边形 $ABCD$ 中,四个内角度数之比是 1:2:3:4,求出四个内角的度数.
2. 一个多边形的内角和是 1 440°,求这个多边形的边数.
3. 正多边形的每个内角可能是:(1) 75°;(2) 90°;(3) 120°吗? 说明理由.

习题 19.1

1. 求十边形的内角和.
2. 求正五边形的每一个外角的度数.
3. 一个多边形,每一个外角都等于 $45°$,这个多边形是几边形,它的内角和是多少?
4. 一个多边形的内角和等于它的外角和,求这个多边形边数.
5. (1) 过四边形的一个顶点有________条对角线,四边形共有________条对角线;
   (2) 过五边形的一个顶点有________条对角线,五边形共有________条对角线;
   (3) 过 n 边形的一个顶点有________条对角线,n 边形共有________条对角线.
6. 若一个多边形的边数与对角线的条数相等,求这个多边形的边数.
7. 如果一个 n 边形的边数增加 1,那么它的内角和增加多少度? 如果 n 边形的边数增加到原来的 2 倍,那么它的内角和增加多少度?

19.2 平行四边形

在小学，我们已学过：两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**（parallelogram），如图 19－10. 平行四边形用符号“▱”表示，平行四边形 $ABCD$ 记作▱$ABCD$，读作“平行四边形 $ABCD$”.

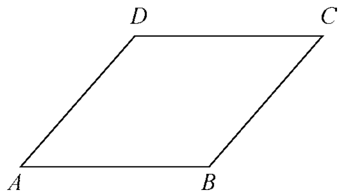


图 19−10

观察

平行四边形的对边平行，相邻的内角互为补角. 除此以外，平行四边形中，边、角还有什么性质呢？

已知：如图 19－11，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$.

求证：（1）$AB = DC$，$AD = BC$；

（2）$\angle DAB = \angle DCB$，$\angle B = \angle D$.

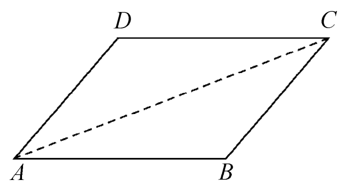


图 19−11

证明 连接 AC.

（1）$\because$ $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle BAC = \angle DCA$，$\angle BCA = \angle DAC$.

在△ABC 和△CDA 中，$\begin{cases} \angle BCA = \angle DAC, \\ AC = CA, \\ \angle BAC = \angle DCA. \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.（ASA）

$\therefore$ $AB = DC$，$AD = BC$.

（2）由（1）知 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $AB = DC$，$AD = BC$，$\angle B = \angle D$.

$$\begin{aligned}\angle DAB &= \angle BAC + \angle DAC \\ &= \angle DCA + \angle BCA \\ &= \angle DCB.\end{aligned}$$

由此得到平行四边形的下列性质：

性质 1　平行四边形的对边相等.

性质 2　平行四边形的对角相等.

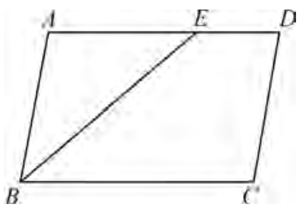


图　19－12

例 1　已知：如图 19 − 12，▱$ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E.

（1）如果 $AE=2$，求 CD 的长；

（2）如果 $\angle AEB=40°$，求 $\angle C$ 的度数.

解　（1）$\because$　BE 平分 $\angle ABC$，并且 $AD \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle ABE=\angle EBC=\angle AEB$.

$\therefore$　$AB=AE=2$.

又　$\because$　$CD=AB$，

$\therefore$　$CD=2$.

（2）由（1）知

$\angle AEB=\angle ABE=40°$，

$\therefore$　$\angle A=180°-(40°+40°)=100°$.

又　$\because$　$\angle C=\angle A$，

$\therefore$　$\angle C=100°$.

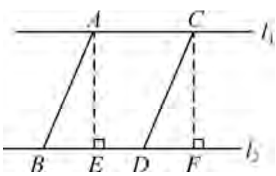


图　19－13

如图 19 − 13，直线 $l_1 \parallel$ 直线 l_2，AB，CD 是夹在直线 l_1，l_2 之间的两条平行线段. 由上面性质 1，可得如下结论：

夹在两条平行线之间的平行线段相等.

由上述结论可知：如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等. 因此，可以用点到直线的距离来定义两条平行线间的距离.

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离叫做这两条**平行线之间的距离**. 如图 19 − 13 中，线段 AE 就是直线 l_1 和直线 l_2 之间的距离.

两条平行线之间的距离处处相等. 如图 19 − 13 中，$AE=CF$.

例 2 已知：如图 19－14，$\square ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=5$，$\angle B=45°$. 求直线 AD 和直线 BC 之间的距离，直线 AB 和直线 DC 之间的距离.

解 过点 A 作 $AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足分别为点 E、点 F，

$\therefore$ 线段 AE，AF 的长分别为点 A 到直线 BC 和直线 CD 的距离.

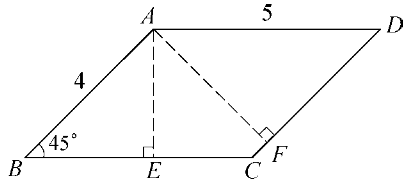


图 19－14

$\therefore$ 线段 AE 的长为直线 AD 和直线 BC 之间的距离，

线段 AF 的长为直线 AB 和直线 CD 之间的距离.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=90°$，$\angle B=45°$，$AB=4$，

$\therefore\ \angle B=\angle BAE.$

$\therefore\ BE=AE.$

又 $\because\ AE^2+BE^2=AB^2$，

$\therefore\ 2AE^2=16.$

$\therefore\ AE=2\sqrt{2}.$

同理：$AF=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}.$

所以直线 AD 和直线 BC 之间的距离为 $2\sqrt{2}$，直线 AB 和直线 CD 之间的距离为$\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$.

例 3 已知：如图 19－15，过 $\triangle ABC$ 的三个顶点，分别作对边的平行线，这三条直线两两相交，得 $\triangle A'B'C'$. 求证：$\triangle ABC$ 的顶点分别是 $\triangle A'B'C'$ 三边的中点.

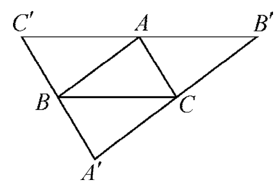


图 19－15

分析：如图 19－15，要证明点 A 是 $B'C'$ 的中点，只要证明 $AB'=AC'$.

证明 $\because\ AB\parallel B'C, BC\parallel AB'$，

$\therefore\ AB'=BC.$

同理：$AC'=BC.$

$\therefore\ AB'=AC'.$

同理：$BC'=BA'$，$CA'=CB'$.

所以 $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $\triangle A'B'C'$ 三边的中点.

练习

1. 在▱$ABCD$中，已知$\angle A=60°$，求$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$的度数.
2. 在▱$ABCD$中，已知$AB=a$，$BC=b$，求这个平行四边形的周长.
3. 在▱$ABCD$中，$BC=2AB$，点E为边BC的中点. 求证：$AE\perp ED$.

探究

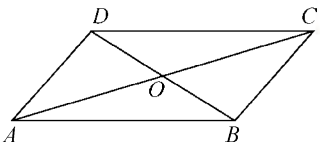


图　19−16

如图19−16，▱$ABCD$的两条对角线AC，BD相交于点O，图中共有几对全等三角形？有哪些线段相等？你能发现平行四边形的对角线有什么性质吗？

在▱$ABCD$中，

∵　$AB\parallel DC$，

∴　$\angle OAB=\angle OCD$，$\angle OBA=\angle ODC$.

又　$AB=DC$，

∴　$\triangle OAB\cong\triangle OCD$.（为什么？）

∴　$OB=OD$，$OA=OC$.

性质3　平行四边形对角线互相平分.

例4　已知：如图19−17，▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$AB\perp AC$，$AB=3$，$AD=5$，求BD的长.

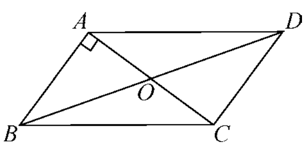


图　19−17

解　∵　四边形$ABCD$是平行四边形，

∴　$BC=AD=5$.

∵　$AB\perp AC$，

∴　$\triangle ABC$是直角三角形.

∴　$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$AO=\frac{1}{2}AC=2$.

$\therefore \quad BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

$\therefore \quad BD = 2BO = 2\sqrt{13}.$

练习

1. ▱$ABCD$ 中，$AC = 24$ cm，$BD = 38$ cm，$AD = 28$ cm，若对角线 AC 与 BD 的交点为点 O，求△OBC 周长.
2. ▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 互相垂直，那么，这个四边形的邻边有什么关系，为什么？

思考

将线段 AB 按图 19－18 中所给的方向和距离，平移成线段 $A'B'$，顺次连接点 A，B，B'，A'，构成一个一组对边平行且相等的四边形 $ABB'A'$，你能说出它一定是平行四边形吗？为什么？

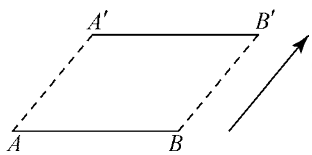


图　19－18

已知：如图 19－19，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，且 $AB = DC$.

求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

证明　连接 AC.

$\because \quad AB \parallel DC$，

$\therefore \quad \angle BAC = \angle DCA.$

又　$AB = CD$，$AC = CA$，

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle CDA.$

$\therefore \quad \angle ACB = \angle CAD.$

$\therefore \quad AD \parallel BC.$

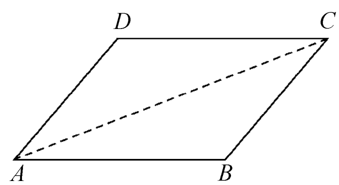


图　19－19

因此，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由此得到判定四边形是否为平行四边形的方法有：

定理 1　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

常用符号“$\underline{\parallel}$”表示“平行且相等”，“$AB \underline{\parallel} CD$”读作“$AB$ 平行且等于 CD”.

思考

1. 如图 19－20，过点 A 画两条线段 AB，AD，以点 B 为圆心、AD 长为半径画弧，再以点 D 为圆心、AB 长为半径画弧，两弧相交于点 C，连接 BC，DC. 这样画出的四边形 $ABCD$ 的两组对边分别相等，它是平行四边形吗？为什么？

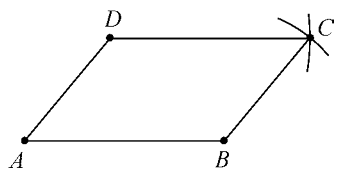


图　19－20

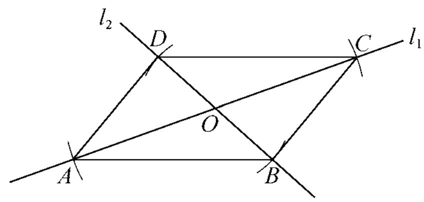


图　19－21

2. 如图 19－21，作两条直线 l_1，l_2 相交于点 O，在直线 l_1 上截取 $OA = OC$，在直线 l_2 上截取 $OB = OD$，连接 AB，BC，CD，DA. 这样画出的四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，它是平行四边形吗？为什么？

由此可知，判定四边形为平行四边形的方法还有：

定理 2　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

定理 3　对角线互相平分的四边形是平行四边形.

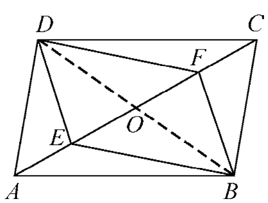


图　19－22

例 5　已知：如图 19－22，点 E，F 是▱$ABCD$ 的对角线 AC 上两点，且 $AE = CF$. 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

证明　连接 BD 交 AC 于点 O.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$AO = CO,\ BO = DO.$$

∵ $AE = CF$,

∴ $OE = AO - AE = CO - CF = OF$.

所以四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

例 6 已知,直线 l_1, l_2, l_3 互相平行(图 19－23),直线 AC 和直线 A_1C_1 分别交直线 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C 和点 A_1, B_1, C_1,且 $AB = BC$.

求证: $A_1B_1 = B_1C_1$.

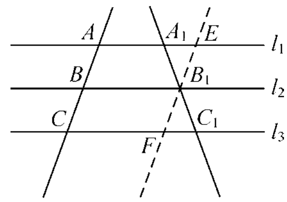


图 19－23

证明 过点 B_1 作 $EF /\!/ AC$,分别交直线 l_1, l_3 于点E, F.

∴ 四边形 ABB_1E, $BCFB_1$ 都是平行四边形.

∴ $EB_1 = AB$, $B_1F = BC$.

∵ $AB = BC$,

∴ $EB_1 = B_1F$.

又 ∵ $\angle A_1EB_1 = \angle B_1FC_1$, $\angle A_1B_1E = \angle C_1B_1F$,

∴ $\triangle A_1B_1E \cong \triangle C_1B_1F$.

∴ $A_1B_1 = B_1C_1$.

由此得到如下结论:

如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等.

作为上述结论的特例,应有如下推论:

经过三角形一边中点与另一边平行的直线必平分第三边.

在图 19－23 中,直线 A_1C_1 向左平移,使得点 A_1 和点 A 重合,则可得到上面推论.

例 7 已知:如图 19－24,点 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 的中点.

求证: $DE /\!/ BC$,且 $DE = \dfrac{1}{2}BC$.

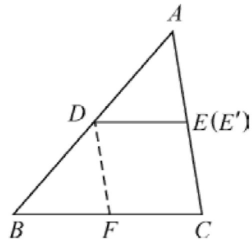


图 19－24

证明 过点 D 作 $DE' /\!/ BC$,DE'交 AC 于点 E'.

根据例 6 得到的结论,点 E'应与点 E 重合.

∴ $DE /\!/ BC$.

同理,过点 D 作 $DF /\!/ AC$,DF 交 BC 于点 F,则点 F 为 BC 的中点.

∴ 四边形 $DFCE$ 为平行四边形.

$$\therefore \quad DE = FC = \frac{1}{2}BC.$$

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的**中位线**.

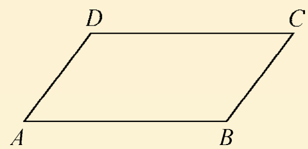
由此得到:

三角形中位线定理　三角形两边中点连线平行于第三边,并且等于第三边的一半.

你能通过添加不同的辅助线来证明三角形中位线定理吗?

练习

1. 已知:如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A = \angle C$,$\angle B = \angle D$. 试判断四边形 $ABCD$ 是否是平行四边形,并说明理由.
2. 画▱$ABCD$,使 $AB = 2$ cm,$BC = 3$ cm,$AC = 4$ cm.
3. 已知三角形各边长分别为 6 cm,9 cm,10 cm,求连接各边中点所组成三角形的周长.
4. 证明平行四边形判定定理 2,3.



(第 1 题)

阅读与思考

三角形的重心

1. 三角形重心的力学证明.

重心是一个物理概念.重力在物体上的作用点,叫做**重心**.一根质量分布均匀的细棒,用针尖顶住它的什么地方,它在空中就能保持平衡呢?这一点显然是该棒的中点.细棒的中点就是它的重心.

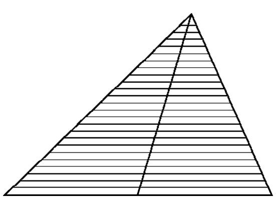


图　19-25

一块质量均匀的三角形薄板沿底边画平行线把它分成许多平行狭条(图 19-25).当这些狭条分得很细时,每条的重心就在它的中点.所有这些狭条的重心就构成三角形薄板底边上的中

线，三角形薄板的重心必定在这条中线上.

同样道理，这个三角形薄板的重心也在另外两条中线上. 由此可见：**三角形的三条中线交于一点**，这点就是**三角形的重心**.

（以上关于三角形重心的力学证明内容摘自吴文俊教授所著的《力学在几何中的一些应用》）

类似地，一块质量均匀的平行四边形薄板的重心一定在一组对边中点的连线上（图 19 − 26），也在另一组对边中点的连线上，因而平行四边形的重心就是上述两条线的交点，也就是这个平行四边形的对角线的交点.

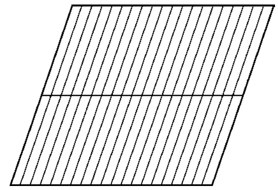


图 19−26

矩形、菱形、正方形的重心在什么地方呢？

2. 三角形重心的几何证明.

本节中例 7 以平行四边形性质为基础，推导了三角形的一个性质. 下面，再利用平行四边形性质，推导三角形的另一个性质.

已知：如图 19 − 27，AD, BE 和 CF 是 $\triangle ABC$ 的三条中线.

求证：AD, BE 和 CF 相交于一点，并且这点到 D, E 和 F 的距离分别等于 $\frac{1}{3}AD$, $\frac{1}{3}BE$ 和 $\frac{1}{3}CF$.

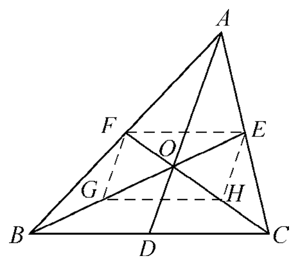


图 19−27

证明 中线 BE 和 CF 必定相交，设它们的交点为 O.

取 OB 的中点 G 和 OC 的中点 H，连接 GH, HE, EF 和 FG.

$\because$ GH 是 $\triangle OBC$ 的中位线，FE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore$ $GH \parallel BC$, $GH = \frac{1}{2}BC$;

$FE \parallel BC$, $FE = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore$ $GH \parallel FE$, $GH = FE$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形.

$\therefore$ $GO = OE$, $HO = OF$.

由此可知 $OE = \frac{1}{3}BE$, $OF = \frac{1}{3}CF$.

同理可证，AD 和 BE 必定相交，并且它们的交点到 D 和 E 的距离分别等于 $\frac{1}{3}AD$ 和 $\frac{1}{3}BE$.

$\because$ BE 上到 E 的距离等于 $\frac{1}{3}BE$ 的点仅有一点 O，

$\therefore$ AD 和 BE 的交点也就是 O.

上述三角形重心的性质，九年级时用相似形知识证明更为简单.

$\therefore$ AD, BE 和 CF 相交于一点 O，并且

$$OD = \frac{1}{3}AD,\ OE = \frac{1}{3}BE,\ OF = \frac{1}{3}CF.$$

三角形三条中线的交点就是三角形的重心.

这个性质，可叙述为：

三角形的三条中线相交于一点，这点和各边中点的距离等于相应各边上中线的三分之一.

习题 19.2

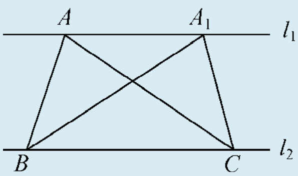
1. 填空：

(1) 在▱$ABCD$ 中，$\angle A - \angle B = 60°$，则 $\angle A =$ ________，$\angle B =$ ________；

(2) 在▱$ABCD$ 中，$\angle A + \angle C = 120°$，则 $\angle A =$ ________，$\angle B =$ ________；

(3) 如果▱$ABCD$ 的周长为 35 cm，$AB : BC = 3 : 4$，那么 $AB =$ ________ cm，$BC =$ ________ cm.

2. 如图，如果直线 $l_1 \parallel l_2$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1BC$ 面积相等吗？为什么？



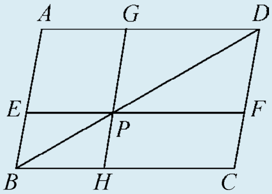
（第 2 题）

3. 求证：平行四边形对角线交点到一组对边的距离相等.

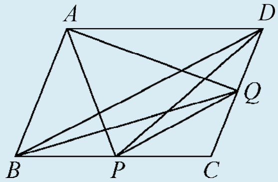
4. 以不在同一直线上的三点为三个顶点作平行四边形，能作几个？

5. 已知三条线段的长分别为 22 cm，16 cm，18 cm，以哪两条为对角线，其余一条为边，可以画出平行四边形？

6. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$EF \parallel BC$，分别交 AB，CD 于点 E，F；$GH \parallel AB$，分别交 AD，BC 于点 G，H；EF，GH 的交点 P 在 BD 上. 问图中面积相等的平行四边形有哪几对？为什么？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在▱$ABCD$ 的边 BC 上任取一点 P，过点 P 作对角线 BD 的平行线与 CD 交于点 Q，连接 PA，PD，QA，QB，则与△ABP 面积相等的三角形有几个？写出它们，并说明理由.

8. 判断下列说法是否正确：

(1) 一组对边平行、一组对角相等的四边形是平行四边形. ( )

(2) 两组对角分别相等的四边形是平行四边形. ( )

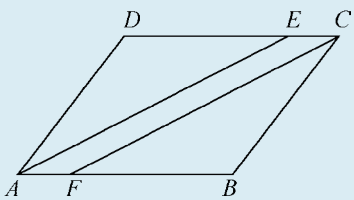
(3) 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形. ( )

(4) 对角线相等且互相垂直的四边形是平行四边形. ( )

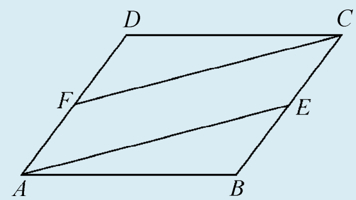
(5) 一组对角相等、一组邻角互补的四边形是平行四边形. ( )

(6) 相邻两角都互补的四边形是平行四边形. ( )

9. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，AE，CF 分别是 $\angle DAB$，$\angle BCD$ 的平分线，求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形.



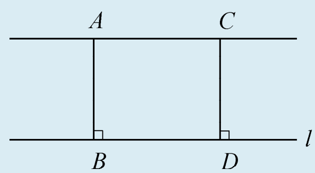
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$BE = DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

11. 已知：如图，点 A，C 是直线 l 同旁的两点，$AB \perp l$，$CD \perp l$，垂足分别是点 B，D，并且 $AB = CD$. 求证：$AC \parallel l$.



（第 11 题）

12. 求证：平行四边形一组对边中点的连线必与对角线互相平分.

13. 求证：顺次连接任意四边形各边中点得到的四边形是平行四边形.

14. 已知：点 E，F 分别是▱$ABCD$ 的边 AD，BC 上的点，且 $AE = BF$，点 G 是 AF 与 BE 的交点，点 H 是 CE 与 DF 的交点. 求证：$GH \parallel BC$，$GH = \frac{1}{2}BC$.

15. 已知：AD 是△ABC 的中线，点 E 是 AD 的中点，点 F 是 BE 延长线与 AC 的交点. 求证：$AF = \frac{1}{2}FC$.

19.3 矩形、菱形、正方形

1. 矩形

电脑、电视机(图 19－28)的显示屏是什么形状？本书的封面是什么形状？小学阶段我们称这些图形为长方形，也就是矩形.

(1)

(2)

图　19－28

有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(rectangle).

矩形是一种特殊的平行四边形，除具有一般平行四边形的性质外，它的边、角和对角线还具有哪些特殊的性质呢？

观察

画一个矩形，度量一下它的四条边长、两条对角线长以及四个角的度数，你能从中得出矩形特有的性质吗？

矩形有如下性质：

性质 1　矩形的四个角都是直角.

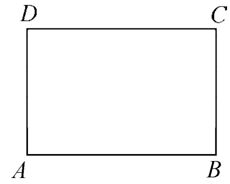


图　19-29

下面给出证明.

已知：矩形 $ABCD$（图 19－29）.

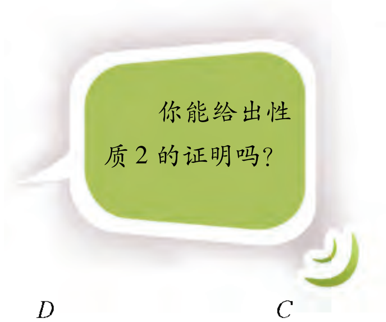
求证：$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

证明　由定义，矩形必有一个角是直角，设 $\angle A = 90°$.

∵　$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，

∴　$\angle B = \angle C = \angle D = 90°$.（两直线平行，同旁内角互补）

即矩形 $ABCD$ 的四个角都是直角.



性质 2　矩形的对角线相等.

对于任一个直角三角形 ABC（其中 $\angle ABC = 90°$），构造一个长为 AB 和宽为 BC 的矩形 $ABCD$（图 19－30）. 设矩形对角线 AC 和 BD 交于点 O，则 $AO = OC = BO = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$. 由此，可以得到直角三角形的一个性质：

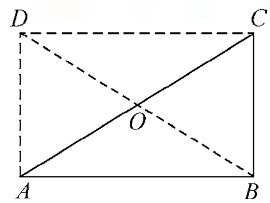


图　19-30

推论　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例 1　如图 19－31，已知：矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$\angle AOB = 120°$，$AD = 4$ cm. 求矩形对角线的长.

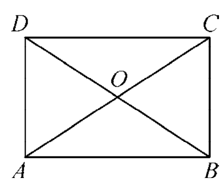


图　19-31

解　因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以

$$AC = BD.$$

∴　$OA = OB$.

∵　$\angle AOB = 120°$，

∴　$\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，有

$$BD = 2AD = 2 \times 4 = 8(\mathrm{cm}).$$

练习

1. 证明矩形的性质 2.
2. 已知矩形的一条对角线长 8 cm,两条对角线的夹角为 60°,矩形相邻两边的长各为多少?
3. 已知直角三角形一条直角边长为 3 cm,斜边上的中线长 2.5 cm,求另一条直角边长.

图　19-32

交流

如图 19-32,工人师傅在做门窗框架、桌面等包含矩形的物体时,不仅要测量矩形两组对边的长度是否分别相等,还要测量它们的两条对角线是否相等.你能说出其中的道理吗?

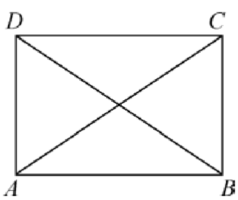


图　19-33

例 2　已知:如图 19-33,在▱$ABCD$ 中,$AC=BD$.

求证:▱$ABCD$ 是矩形.

证明　因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以

$$AD=BC.$$

又 $\because$ $DC=CD$, $AC=BD$,

$\therefore$ $\triangle ADC \cong \triangle BCD$.

$\therefore$ $\angle ADC=\angle BCD$.

又 $\because$ $\angle ADC+\angle BCD=180°$,

$\therefore$ $\angle ADC=\angle BCD=90°$.

所以▱$ABCD$ 为矩形.

由此,我们得到矩形的判定方法:

定理 1　对角线相等的平行四边形是矩形.

例 3　已知：如图 19－34，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是 AC 的中点，直线 $AE \parallel BC$，过点 D 作直线 $EF \parallel AB$，分别交 AE，BC 于点 E，F. 求证：四边形 $AECF$ 是矩形.

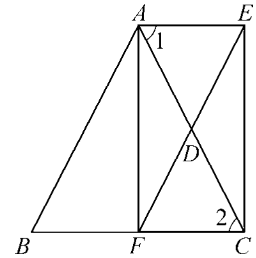


图　19－34

证明　$\because$　$AE \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$\because$　$\angle 1=\angle 2$，$\angle ADE=\angle CDF$，$AD=CD$，

$\therefore$　$\triangle ADE \cong \triangle CDF$.

$\therefore$　$AE=CF$.

所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.

又因为四边形 $ABFE$ 是平行四边形，所以

$$EF=AB.$$

$\because$　$AC=AB$，　$\therefore$　$EF=AC$.

所以四边形 $AECF$ 是矩形.

例 4　已知：如图 19－35，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=90°$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

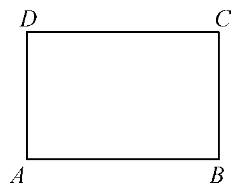


图　19－35

证明　$\because$　$\angle A=\angle B=\angle C=90°$，

$\therefore$　$\angle B+\angle C=180°$，$\angle A+\angle B=180°$.

$\therefore$　$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$.

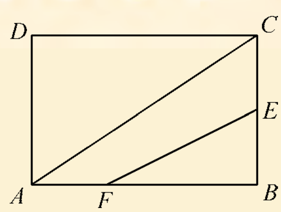
$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

定理 2　三个角是直角的四边形是矩形.

练习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=2$，点 E 为 BC 中点，点 F 在 AB 上且 $BF=2AF$. 求四边形 $AFEC$ 的面积.
2. 已知：在 ▱$ABCD$ 中，点 M 是 BC 的中点，$\angle MAD=\angle MDA$. 求证：▱$ABCD$ 是矩形.



（第 1 题）


图 19-36

2. 菱形

本章图 19 - 9 中的铁栅栏门能活动是由于它拉开时出现的是四边形，这种四边形有什么特点？

有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**(rhombus).

菱形在生活中随处可见. 图 19 - 36 中的升降机采用菱形部件，就是利用菱形既具有可变性，又具有相对稳定性的性质.

思考

菱形除了具有一般平行四边形的性质外，它的边、角、对角线还具有哪些特殊的性质呢？

由于菱形是平行四边形，所以它的对边相等，又因为菱形的邻边也相等，所以菱形的四条边都相等. 于是，我们得到：

性质 1　菱形的四条边都相等.

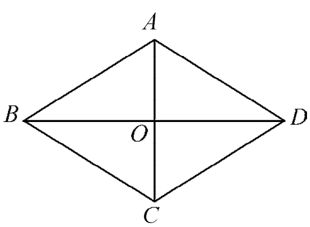


图 19-37

如图 19 - 37，连接菱形的两条对角线 AC 和 BD，设它们相交于点 O.

$\because\quad AB = AD,\ BO = OD,$

$\therefore\quad AC \perp BD.$（为什么？）

于是，我们又得到：

性质 2　菱形的对角线互相垂直.

由性质 2 可知，菱形是轴对称图形，两条对角线所在的直线都是它的对称轴.

例 5 已知菱形的两条对角线长分别为 a，b，求菱形的面积.

解 设菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O（图 19－38），$AC=a$，$BD=b$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以

$AC \perp BD$.（菱形的对角线互相垂直）

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\text{菱形}ABCD} &= S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}\\ &=\frac{1}{2}BD\cdot AO+\frac{1}{2}BD\cdot OC\\ &=\frac{1}{2}BD\cdot(AO+OC)\\ &=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}ab.\end{aligned}$$

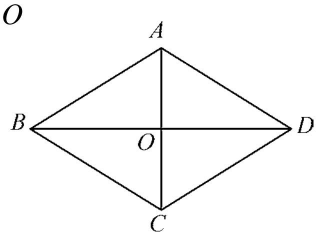


图 19－38

思考

1. 如图 19－39，以点 A 为端点任意画两条相等的线段 AB 和 AD，再分别以点 B，D 为圆心、AB 长为半径画弧，两弧相交于点 C，连接 BC，DC，四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？

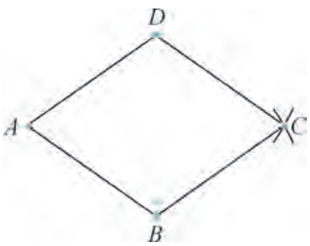


图 19－39

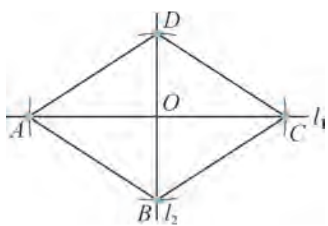


图 19－40

2. 如图 19－40，画两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2，两直线相交于点 O，在 l_1 上取两点 A，C，使 $OA=OC$，在 l_2 上取两点 B，D，使 $OB=OD$，顺次连接点 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？

你会证明菱形的判定定理1吗?

由此,我们可以发现,判定四边形为菱形的方法:

定理1　四边都相等的四边形是菱形.

定理2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

现在证明定理2.

证明　如图19－40,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AO=CO$. 又因为 $DO\perp AC$,所以 $DA=DC$. 因此,四边形 $ABCD$ 是菱形.

例6　如图19－41,在▱$ABCD$ 中,$AC=8$,$BD=6$,$AB=5$,求 AD 的长.

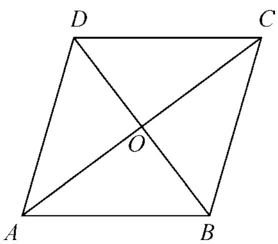


图　19－41

解　因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以

$$OA=\frac{1}{2}AC=4,\ OB=\frac{1}{2}BD=3.$$

又　∵　$AB=5$,满足 $AB^2=OA^2+OB^2$,

∴　$\triangle AOB$ 为直角三角形,即 $OA\perp OB$.

∴　▱$ABCD$ 是菱形,$AD=AB=5$.

练习

1. 在菱形 $ABCD$ 中,$AB=4$ cm,$\angle ABC=60°$,求菱形的面积.
2. 菱形 $ABCD$ 的边长为13 cm,它的一条对角线 $BD=10$ cm,求对角线 AC 的长.
3. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形吗?说明理由.
4. 画一个菱形,使它的两条对角线长分别为6 cm和8 cm.


图　19－42

3. 正方形

正方形是我们所熟悉的图形,如图19－42是魔方的一个面. 你认为正方形是本节所学的哪种图形的特例,为什么?

有一个角是直角，且有一组邻边相等的平行四边形叫做**正方形**(square).

正方形是特殊的矩形，又是特殊的菱形，更是特殊的平行四边形，因此正方形具有这些图形的所有性质.

性质 1　正方形的四条边都相等，四个角都是直角.

性质 2　正方形的对角线相等且互相垂直平分.

以上性质，请同学自己证明.

思考

怎样判定一个四边形是正方形呢?

例 7　如图 19－43，点 A'，B'，C'，D'分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA' = BB' = CC' = DD'$.

求证：四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

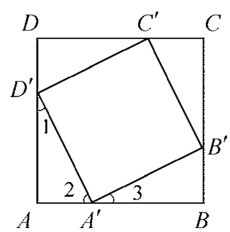


图　19－43

证明　因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以

$$AB = BC = CD = DA.$$

又　$\because$　$AA' = BB' = CC' = DD'$,

$\therefore$　$D'A = A'B = B'C = C'D$.

$\because$　$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$,

$\therefore$　$\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$.

$\therefore$　$A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.

$\therefore$　四边形 $A'B'C'D'$是菱形.

又　$\because$　$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 1 + \angle 2 = 90°$,

$\therefore$　$\angle 2 + \angle 3 = 90°$.

$\therefore$　$\angle D'A'B' = 90°$.

所以四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

练习

1. 判断满足下列条件的四边形是否是正方形,并说明理由:

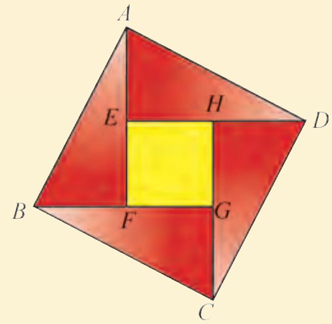
(1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形;

(2) 对角线互相垂直的矩形;

(3) 对角线相等的菱形;

(4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.

2. 如图是2002年8月在北京召开的第24届国际数学家大会会标中的图案,其中四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形. 求证: $\triangle ABF \cong \triangle DAE$.



(第2题)

数学园地

切割后组拼正方形

图19-44是由5个全等的小正方形组成的十字形的十二边形纸片. 如何用几条直线形切痕,把这个十字形纸片切割成几块,使这几块能重新组拼成一个正方形?

(1) 你是怎样切割的? 在图上画出切痕.

(2) 最少需几条切痕? 画出这种切法.

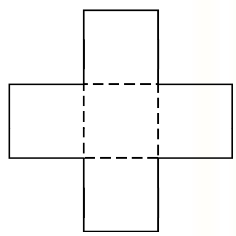


图 19-44

阅读与欣赏

完美矩形与完美正方形

如图 19－45(1)，一个矩形是由 6 个正方形组成的，如果知道中间最小正方形的面积是 1，你能求出矩形的面积吗？

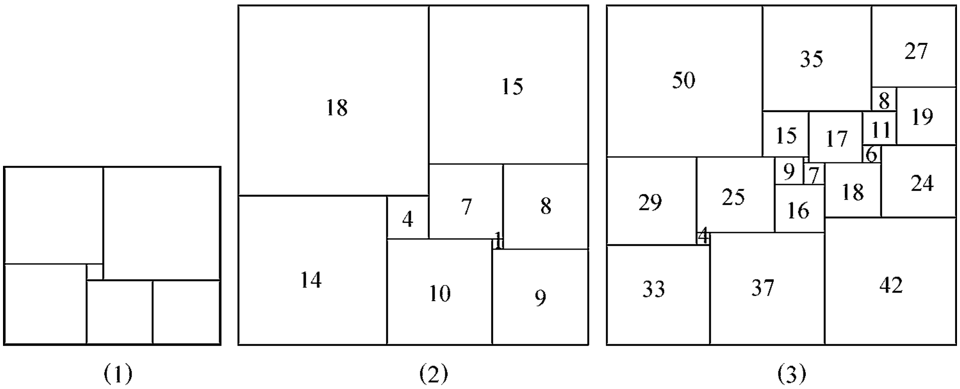


图 19－45

容易看出，图 19－45(1)中的正方形有两个是一样大的. 如果一个矩形的内部能用一些大小各不相同的正方形铺满(既不重叠也无缝隙)，就称它为**完美矩形**(perfect rectangle). 1936 年，英国剑桥大学的 4 名学生把一个矩形分成大小各不相同的 9 个正方形(可以证明完美矩形最少由 9 个大小各不相同的正方形铺成)，如图 19－45(2)，图中数字表示相应正方形的边长.

那么如何寻求矩形的正方形分割呢？办法是先作一个矩形的正方形分割的草图，然后用尽可能少的未知数标出每个正方形的边长，再写出这些边长应满足的关系式，最后通过解方程组而得到. 如图 19－46 先标出相邻三个正方形边长 x, y, z，然后，不难按下列顺序标出其余正方形的边长 $x+y$, $2x+y$, $y-z$, $y-2z$, $y-3z$, $2y-5z$，由矩形对边相等条件，可得出

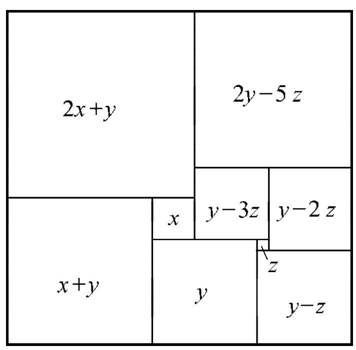


图 19－46

$$\begin{cases}(2y-5z)+(y-2z)+(y-z)=(2x+y)+(x+y),\\(2x+y)+(2y-5z)=(x+y)+y+(y-z),\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}3x-2y+8z=0,\\ x-4z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$,得 $x=4$, $y=10$. 代入图中即可,这就是图 19－45(2).

如果一个大正方形能由边长为互不相等的整数的小正方形铺满,我们就称这个大正方形是**完美正方形**(perfect square). 如图 19－45(3)是 1978 年被荷兰数学家用大型计算机算出的一个完美正方形,这个完美正方形含有小正方形的个数为 21,说成是 21 阶(图中最小的正方形边长没有填写,你知道它的边长应是多少). 其后,荷兰、苏联数学家证明小于等于 20 阶的完美正方形不存在.

阅读与思考

梯　形

四边形中,我们研究了其中一类特殊四边形——两组对边分别平行的四边形. 但还有另一类四边形,许多建筑都有涉及,图 19－47 是座古代玛雅神庙,其中就含有这类四边形. 即只有一组对边平行,而另一组对边不平行的四边形,像这样的四边形叫做梯形. 我们身边,有很多物体的形状(如图 19－48 中堤坝和水渠的横截面)都是梯形.

图　19－47

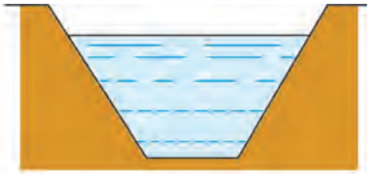


图 19-48

梯形有如下重要性质：

如图 19-49，在梯形 $ABCD$ 中，$DC \parallel AB$，点 E，F 分别为两腰 AD，BC 的中点，连接 EF（EF 就是梯形中位线）. 则有：

（1）$EF \parallel DC \parallel AB$；　　（2）$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

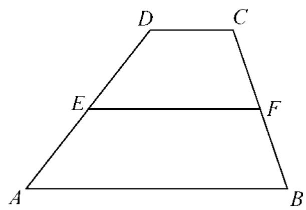


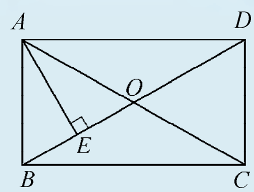
图 19-49

在梯形 $ABCD$ 中，当不平行的两腰 $AD = BC$ 时，这样的梯形就称为等腰梯形.

等腰梯形是轴对称图形. 经过两底中点的直线是它的对称轴. 那么，等腰梯形还有哪些性质呢？你能得出吗？

习题 19.3

1. 已知矩形的两条对角线所成的钝角是 $120°$，求证：矩形较短边长等于对角线长的一半.



（第 2 题）

2. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于点 E.

   （1）若 $\angle DAE = 2\angle BAE$，求 $\angle EAC$；

   （2）若 $BE : ED = 1 : 3$，$AB = 1$，求 AD.

3. （1）求证：平行四边形四个内角的平分线围成的四边形是矩形；

   （2）求证：矩形四个内角的平分线围成的四边形是正方形.

4. 已知：在 ▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，CD 的中点，且 $AF = DE$. 求证：▱$ABCD$ 是矩形.

5. 以 3 cm 和 4 cm 为两条邻边画一个矩形，并求它的对角线长.

6. 从菱形的钝角顶点向对边引垂线，如果垂线平分对边，求菱形的钝角度数.

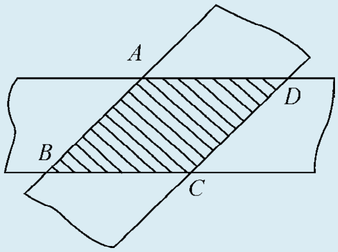
7. 在菱形 $ABCD$ 中，$AC = 6$ cm，$BD = 8$ cm，求平行线 AB 与 CD 之间的距离.

8. 求证：依次连接矩形各边中点得到的四边形是菱形.

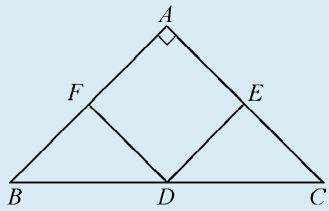
9. 已知：在▱$ABCD$ 中，$\angle BAC = \angle DAC$，求证：▱$ABCD$ 是菱形.

10. 以 3 cm 为边画菱形，使菱形的一个内角为 60°.

11. 已知：如图，两条等宽的长纸条倾斜地重叠着，求证：重叠部分为菱形.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知：如图，点 D 是 Rt△ABC 的斜边 BC 的中点，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$，垂足分别是点 E，F，且 $BF = CE$. 求证：四边形 $AEDF$ 为正方形.

19.4 综合与实践

多边形的镶嵌

如图 19－50，我们常常可以看到用各种形状的地砖（或墙砖）铺砌成的平面图案．这种用形状相同或不同的平面封闭图形，覆盖平面区域，使图形间既无缝隙又不重叠地全部覆盖，在几何里面叫做**平面镶嵌**．

图　19－50

用一种正多边形作平面镶嵌是比较简单的情形．

如图 19－51，正三角形、正方形和正六边形都可以用来作平面镶嵌，这是因为在一个顶点处的几个内角恰好拼成一个周角，这样镶嵌不重叠、无缝隙．而正五边形却不能用来作平面镶嵌，如图 19－52．

除了上面几种正多边形可以用来作平面镶嵌外，一般的三角形和四边形也可以用来作平面镶嵌（图 19－53）．

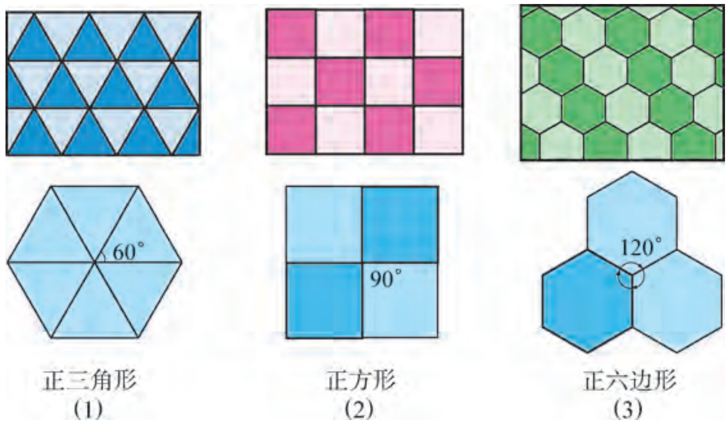


图　19-51

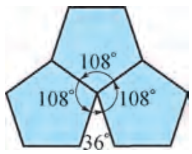


图　19-52

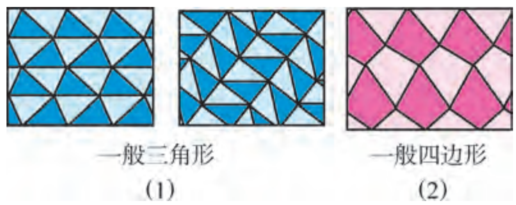


图　19-53

这里提出两个课题：（每位同学从两个中任选一个）

1. 收集生活中的各种镶嵌地板、地砖、墙壁、墙纸的图案，把它们复制下来与同学交流，并研究它们的构成和拼接方法.

2. 请你分别按下列要求设计一个多边形的镶嵌图案：

（1）只用一种正多边形；

（2）同时用两种正多边形；

（3）用一种非正多边形.

数学史话

几何定理的机器证明

1950 年，波兰数学家塔斯基指出：所有的代数或几何命题都可以判其真伪. 这一发现，是机器（指电脑）证明的理论基础. 现在，电脑的运算速度非常快，它的证明潜力也正在逐渐地被认识、被开发.

任意三角形的内角三等分线必交于一个正三角形的顶点,这就是莫勒定理,它的证明很不容易,如果再要考虑外角三等分线的话,就更困难了.但若先将其化成代数问题,再让电脑去处理,则很快就能得出结果.

中国科学院院士、著名的数学家吴文俊(1919—2017)在机器证明方面做出了很大的贡献.20世纪70年代后期,在计算机技术广泛应用的背景下,他继承和发展了中国古代数学的算法化思想,进行几何定理的机器证明研究,取得了一系列国际领先成果,并应用于国际上当前流行的符号计算软件,这些研究作为国际自动推理界先驱性工作,被称为“吴方法”,产生了很大影响.2001年吴文俊荣获首届“国家最高科学技术奖”(2000年度).

吴文俊的机器证明可以分成下面三个主要步骤:

第一步(几何的代数化与坐标化)　把几何问题代数化,就是把命题的假设和结论表示成多项式方程组.

第二步(几何的机械化)　证明定理就是从假设推导出结论.几何定理证明的机械化,就是要从定理的假设部分的多项式方程组依确定步骤推导出结论部分的多项式方程组.

第三步　依据第二步中的确定步骤编成程序,并在计算机上实施,以得出定理是否成立的最后结论.

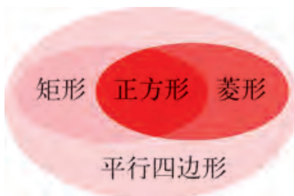
吴文俊于1977年提出来的证明几何定理的吴方法适用于证明“等式型”的几何定理(即定理的假设和结论都可以用多项式方程组来表示的定理),而且证明的效率很高,一般用几分钟、几秒钟就可以证出不简单的定理,甚至还能自动发现定理.但是,不能用多项式方程组表示的几何性质(例如一些涉及大小的几何性质就不能用多项式等式关系来表达)还不能用该方法进行机械化证明.机器证明还有许多方面需要我们去探索和创新.

小结·评价

一、内容整理

1. 本章知识结构：

2. 各种特殊四边形的关系：



二、主要知识回顾

1. 各种特殊四边形的性质.

图形	性质		
	边	角	对角线
平行四边形			
矩形			
菱形			
正方形			

2. 如何判定一个四边形是平行四边形、矩形、菱形、正方形？

3. 几个重要结论：

（1）多边形内角和、外角和定理：$n(n \geqslant 3)$ 边形内角和等于 $(n-2) \cdot 180°$，外角和等于 360°. 在平面镶嵌中，多边形内角和性质起着重要作用.

（2）三角形中位线定理.

三、自评与互评

1. 本章从三角形内角和、外角和的性质出发，推广到 n 边形内角和、外角和的性质，学习这段内容时，你有什么体会？

2. 学习一般平行四边形和特殊平行四边形这段内容时，你的主要收获是什么？与同学相互交流一下.

A组 复习题

1. 填空：

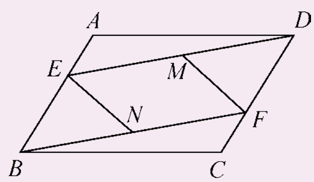
(1) 一个多边形的外角和是内角和的 $\frac{2}{7}$，则这个多边形的边数是____________；

(2) 一个多边形的每个外角都等于它相邻的内角，则这个多边形的边数是__________，它的每个外角的度数是__________.

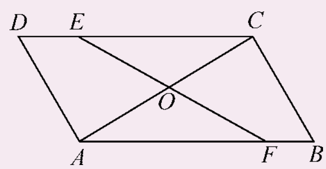
2. 四边形的内角可能都是锐角吗？可能都是直角吗？可能都是钝角吗？

3. 是否存在一个多边形，它的每个内角都等于相邻外角的 3 倍？并简述你的理由.

4. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$AE = CF$，点 M，N 是 ED，BF 的中点. 求证：四边形 $MFNE$ 是平行四边形.



（第 4 题）

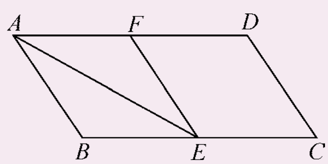


（第 5 题）

5. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，点 O 是对角线 AC 的中点. EF 经过点 O 分别与 AB，CD 交于点 F，E. 求证：$OE = OF$.

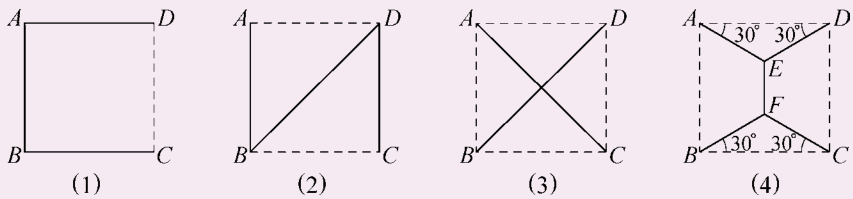
6. 将一张长 40 cm、宽 20 cm 的矩形纸片剪成长为 18 cm、宽为 12 cm 的矩形纸片，问最多能剪几个？

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，AE 平分∠BAD，交 BC 于点 E，$EF // AB$，交 AD 于点 F. 试问四边形 $ABEF$ 是菱形吗？说明你的理由.



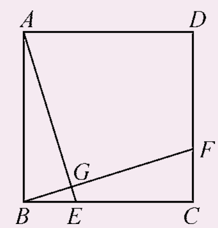
（第 7 题）

8. 某地有四个村庄 A, B, C, D,它们正好位于一个正方形的四个顶点. 现在四个村庄计划联合架设一条电话线路,他们设计了 4 种架设方案,如图中的实线部分. 请你帮助计算一下,哪种架设方案最省电线.



(第 8 题)

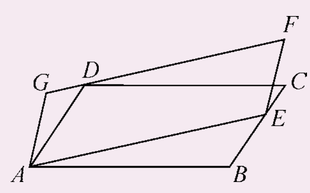
9. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F 是边 BC, CD 上的点,且 $BE = CF$. 那么,线段 AE 与 BF 的夹角有多大? 为什么?



(第 9 题)

B组 复习题

1. 一个多边形的内角中,最多有几个锐角? 为什么?
2. 已知:如图,▱$ABCD$ 的顶点 D 在▱$AEFG$ 的边 FG 上,▱$AEFG$ 的顶点 E 在▱$ABCD$ 的边 BC 上. 求证:$S_{▱ABCD} = S_{▱AEFG}$.



(第 2 题)

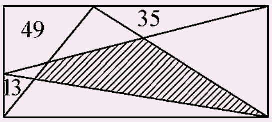
3. 已知:点 M, N 分别是▱$ABCD$ 的边 AB, CD 的中点,CM 交 BD 于点 E, AN 交 BD 于点 F. 求证:$BE = EF = FD$.
4. 已知点 O 是矩形 $ABCD$ 内任一点. 求证:$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$. 如果点 O 在矩形 $ABCD$ 的外部,结论还成立吗?
5. 在△ABC 中,BD, CE 是两条高,点 P, Q 分别是 BC, ED 的中点. 求证:$PQ \perp ED$.

C组 复习题

1. 设四边形 $ABCD$ 的每一个顶点到其他 3 个顶点的距离之和都相等. 这个四边形是什么四边形? 请说明理由.

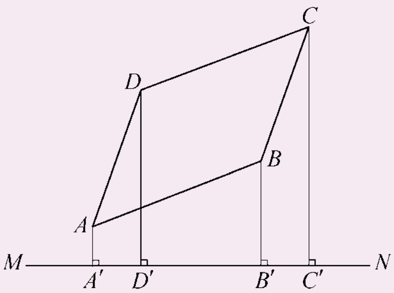
2. 证明: 在▱$ABCD$ 中, $AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$.

3. 已知: 如图, 在矩形内一些相交线把它分成 8 个部分, 其中的 3 个部分面积分别为 13, 35, 49. 求图中阴影部分的面积.

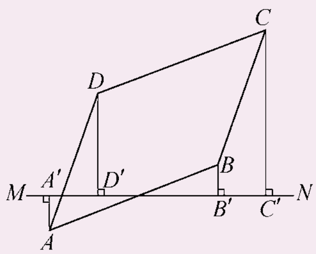


(第 3 题)

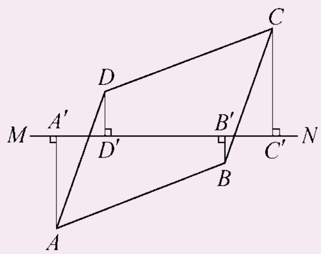
4. (1) 如图(1), 从▱$ABCD$ 的顶点 A, B, C, D 向形外的任意直线 MN 作垂线 AA', BB', CC', DD', 垂足是点 A', B', C', D'. 求证: $AA'+CC'=BB'+DD'$.



(1)



(2)



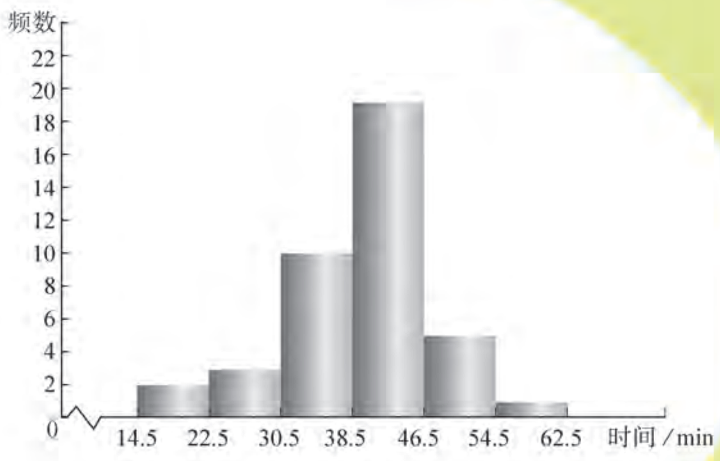
(3)

(第 4 题)

(2) 如图(2), 将直线 MN 向上平移, 使得点 A 在直线一侧, 点 B, C, D 三点在直线的另一侧, 这时, 从点 A, B, C, D 向直线 MN 作垂线, 垂足分别为点 A', B', C', D', 那么垂线段 AA', BB', CC', DD'之间存在什么关系?

(3) 如图(3), 再将直线 MN 向上平行移动, 使两侧各有两个顶点, 从点 A, B, C, D 向直线 MN 作的垂线段 AA', BB', CC', DD', 它们之间又有什么关系? 根据图(2)、图(3)写出你的猜想, 并加以证明.

第20章 数据的初步分析



某校体卫组想对该校八年级全体学生一周内平均每天参加课外锻炼的时间（单位：min）有所了解，从中随机抽查了40名学生，结果如下：

40，21，35，24，40，38，23，52，35，62，
36，15，51，45，42，40，32，43，36，34，
53，38，40，39，32，45，40，50，45，40，
50，26，45，40，45，35，40，42，45，40.

怎样分析这样一组样本数据，从而来估计该校全体八年级学生的锻炼情况呢？我们需要进一步学习下面的统计知识.

七年级，我们学习了统计中的数据的收集与整理，这里将学习如何对数据进行初步的分析.

20.1 数据的频数分布

问题1 某校学生在假期进行“空气质量情况调查”的课题研究时，他们从当地气象部门提供的今年上半年的资料中，随意抽取了30天的空气综合污染指数，数据如下：

30，77，127，53，98，130，57，153，83，32，
40，85，167，64，184，201，66，38，87，42，
45，90，45，77，235，45，113，48，92，243.

根据国家环保总局公布的《空气质量级别表》：

空气污染指数	0～50	51～100	101～150	151～200	201～250	251～300	大于300
空气质量级别	Ⅰ级（优）	Ⅱ级（良）	Ⅲ级1（轻微污染）	Ⅲ级2（轻度污染）	Ⅳ级1（中度污染）	Ⅳ级2（中度重污染）	Ⅴ级（重度污染）

把数据按上述级别分成0～50，51～100，101～150，151～200，201～250共5个组，进行整理，得下表：

空气污染指数分布表

空气污染指数	0～50	51～100	101～150	151～200	201～250
天　　数	9	12	3	3	3

1. 说说这30天的空气质量，根据国家公布的级别，各级别各占多大比率（即分布情况）.

2. 该校学生估计该地今年（按365天计算）空气质量达到优级别的天数约是110天. 你知道他们是如何估计出这个结论的？

问题1启示我们：面对量大的数据，要想从中获取所需信息，常常先要选择好合适的统计表、图. 把相差不大的数

据放在一起，进行适当分组（例如，这里按空气质量级别分组），然后统计出落在各个小组内数据的个数，并借助表格将分组结果及各组数据的个数进行整理，这样，便反映出这批数据的分布规律.

下面我们就来通过具体的事例，学习这种分析数据的分布的方法.

问题❷ 某校体卫组想对该校八年级全体学生一周内平均每天参加课外锻炼的时间（单位：min）有所了解，从中随机抽查了40名学生，结果如下：

40，21，35，24，40，38，23，52，35，62，
36，15，51，45，42，40，32，43，36，34，
53，38，40，39，32，45，40，50，45，40，
50，26，45，40，45，35，40，42，45，40.

为了了解这批数据反映的情况，可以对它进行怎样的分析呢？

一般地，可按下列步骤来分析：

（1）计算这批数据中最大数与最小数的差.

这批数据中最大数与最小数的差为：$62-15=47$. 由此可知这批数据的变动范围.

（2）决定组距和组数.

组距是指每个小组的两个端点间的距离. 将这批数据分组. 如果每组组距相同，并取组距为8，那么

$$\text{组数}=\frac{\text{最大数}-\text{最小数}}{\text{组距}}=\frac{47}{8}\approx 6,\text{即把数据分成 6 组.}$$

（3）决定分点.

将数据按照 8 min 的组距分组，从15开始，分成15～23，23～31，31～39，39～47，47～55，55～63这6组. 这时，我们发现数据23，39正好落在分点上，不好决定它们究竟属于哪一组，为了避免这种情况，一般地把表示分点的数比原数据多取一位小数，并把第一组的起点定为比最小的数据

稍小一点的数. 如把第一组的起点定为 14.5,这样所分的 6 个组是:

$$14.5\sim22.5,\ 22.5\sim30.5,\ 30.5\sim38.5,$$
$$38.5\sim46.5,\ 46.5\sim54.5,\ 54.5\sim62.5.$$

(4) 列频数分布表.

我们把一批数据中落在某个小组内数据的个数称为这个组的**频数**(absolute frequency). 通常用选举时唱票的方法,对落在各个小组内的数据个数进行记录,算出每一个小组的频数,并制成**频数分布表**(table of frequency distribution). 如果一批数据共有 n 个,而其中某一组数据是 m 个,那么 $\frac{m}{n}$ 就是该组数据在这批数据中出现的**频率**(relative frequency).

40 名学生平均每天锻炼时间频数分布表

分组	频数统计	频数
14.5 ~ 22.5	丅	2
22.5 ~ 30.5	下	3
30.5 ~ 38.5	正正	10
38.5 ~ 46.5	正正正下	19
46.5 ~ 54.5	正	5
54.5 ~ 62.5	一	1
合计		40

在编制频数分布表时,关键是分组,即确定分几组,组距是多少? 通常要根据问题的需要而定. 一般来说,数据越多,分的组数就越多. 当数据在 100 个以内时,可分成 5 ~ 12 组,各组的组距可以相同,也可以彼此不同. 分组时,要注意使每个数据只落在一个组内.

(5) 画频数直方图.

画出相互垂直的两条直线,用横轴表示分组情况,纵轴

表示频数，绘出相应的长方形条，就得到了**频数直方图**（frequency histogram）. 图 20－1 是根据前面的“40 名学生平均每天锻炼时间频数分布表”绘制的直方图：

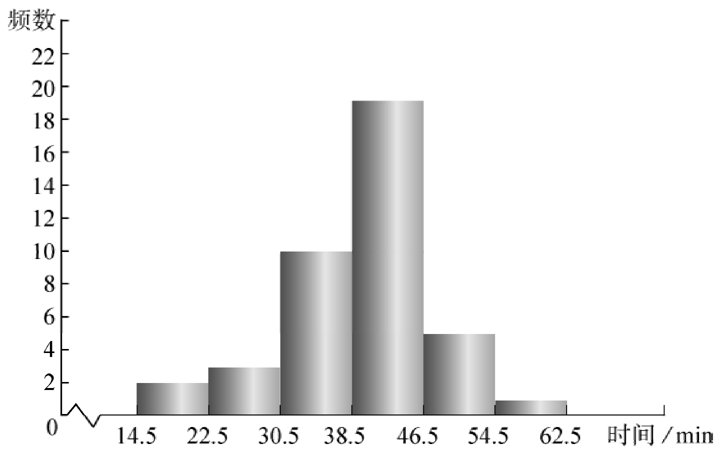


图 20－1

交流

1. 根据频数直方图（图 20－1），说说这 40 名学生平均每天参加课外锻炼的时间是如何分布的.

2. 如果该校八年级有 500 名学生，估计一下平均每天参加课外锻炼达 30 min 以上的有多少人?

例 某校从七年级中任意抽取一个班，该班学生身高（单位：cm）的频数分布如表所示：

分组	136.5 ~ 141.5	141.5 ~ 146.5	146.5 ~ 151.5	151.5 ~ 156.5	156.5 ~ 161.5	161.5 ~ 166.5	166.5 ~ 171.5	171.5 ~ 176.5	合计
频数	1	4	10	15	9	8	2	1	50

根据所给表回答：

（1）身高在 161.5 cm 以上的学生有多少? 占全班人数的百分之几?

（2）估计该校七年级全体 400 名新生中，身高在 161.5 cm 以上的约有多少人？

解 （1）身高在 161.5 cm 以上的学生有

$$8+2+1=11(\text{人}),$$

占全班人数的 22%.

（2）全体七年级学生中，身高在 161.5 cm 以上的人数约为

$$400\times 22\% =88(\text{人}).$$

练习

1. 某校为了了解七年级 350 名学生的数学学习情况，从该年级任意抽取了 50 名学生进行测试，结果如下（单位：分）：

93，92，75，77，72，73，84，67，95，84，
86，71，96，84，85，89，92，74，73，83，
40，68，81，98，94，89，92，99，70，82，
72，93，68，85，86，75，83，78，92，60，
89，52，96，83，92，86，67，77，57，77.

（1）请你完成下面的频数分布表：

分　组	频数统计	频　数
39.5～49.5		
49.5～59.5		
59.5～69.5		
69.5～79.5		
79.5～89.5		
89.5～99.5		
合　计		

（2）画出频数直方图；

（3）试估计该校七年级有多少名学生数学成绩在 80 分（含 80 分）以上.

2. 某林业局对林区内树木的生长情况进行抽样调查,测得一些树干的树围长度(单位:m),并列出如下的频数分布表:

分　组	0.4～0.5	0.5～0.6	0.6～0.7	0.7～0.8	0.8～0.9	0.9～1.0	1.0～1.1	1.1～1.2
频　数	3	9	18	30	20	10	7	3

(1) 画出频数直方图;

(2) 求树围长度为 0.6～1.0 m 之间的树木数占总树木数的百分率.

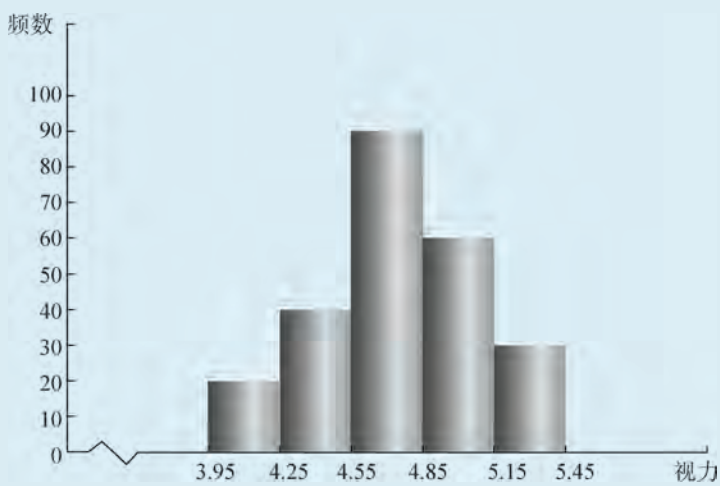
习题 20.1

1. 以下数据是某公司 40 名员工某天的手机通话时间(单位:min):

10, 9, 21, 13, 20, 26, 2, 8,
30, 17, 5, 2, 22, 25, 3, 4,
27, 30, 31, 33, 18, 40, 32, 33,
26, 8, 5, 30, 11, 55, 37, 26,
23, 15, 6, 10, 7, 38, 23, 39.

请列出频数分布表,并画出频数直方图.

2. 某市有关部门对全市 24 000 名初中生的视力状况进行了一次抽样调查,下图是利用所得数据绘制的频数直方图:



(第 2 题)

（1）从图中你能获得哪些信息？

（2）如果视力不低于 4.85 均属正常，那么估计全市有多少名初中学生的视力正常？

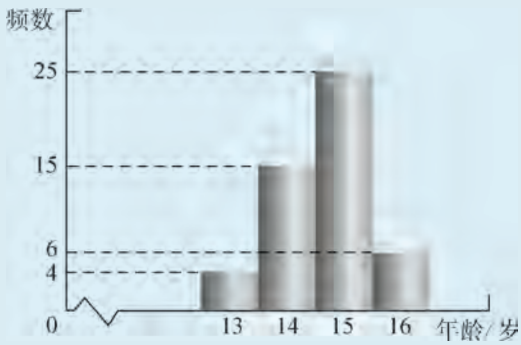
3. 某乡去年推广种植超级杂交水稻，全乡共有 50 块试验田，这 50 块试验田的产量（单位：kg）分布如下：

分　组	782.5 ~ 787.5	787.5 ~ 792.5	792.5 ~ 797.5	797.5 ~ 802.5	802.5 ~ 807.5	807.5 ~ 812.5	812.5 ~ 817.5	817.5 ~ 822.5
频　数	1	2	4	6	10	14	8	5

（1）利用上表中的数据画出频数直方图；

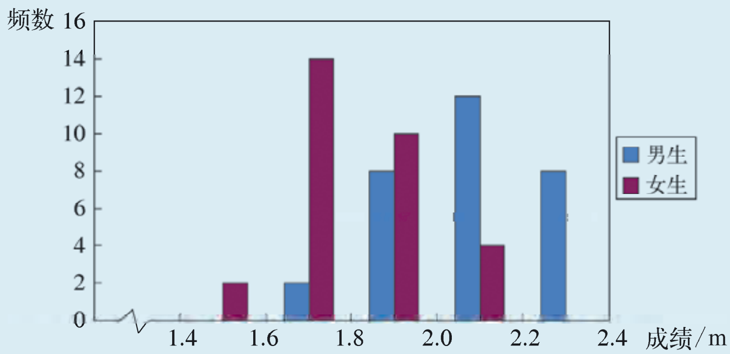
（2）产量超过 802.5 kg 的试验田占多大的比例？

4. 如图是某班全体学生年龄的频数直方图. 根据图中提供的信息，画出该班学生年龄分布扇形统计图.



（第 4 题）

5. 如图是从某校八年级抽取的 30 名男生和 30 名女生立定跳远成绩的频数直方图. 请你根据图形，说说你从中获取的信息.



（第 5 题）

数学活动

对课外作业时间的统计分析

分科记录你每次做语文、数学、外语及其他学科课外作业所用时间(单位：min)，连续五周. 然后把全班同学记录的情况放在一起，进行统计，制成表、图. 从中分析学业负担情况，并对学科教学提出合理建议.

阅读与欣赏

风向频率玫瑰图

在日常生活中，气象部门一般用气候统计图来表现气候特征. 气候统计图主要分析气候要素时间分布、时间变化，以及气候要素间的相互关系，具有鲜明醒目、富于表现、易于理解的特点. 下面介绍一种最常见的气候统计图——风向频率玫瑰图.

风向频率玫瑰图是绘出一个给定地点在一段时间内各种风向所出现的频率，因图形与玫瑰花朵相似，故名为“风向频率玫瑰图”，简称“风向玫瑰图”. 一般地，根据一个地方在一段时间内所统计的风向频率，就可以画出当地的风向频率玫瑰图. 最常见的风向频率玫瑰图是一个圆，具体作法是：以一点为圆心作圆，将圆周 16 等分，通过圆心向周围的 16 等分点引出 16 条射线，表示 16 个风向方位，分别记为 N，NNE，…，NNW(E，S，W，N 分别表示东、南、西、北四个方位). 然后以1 cm 为半径画圆，在此圆上表示频率为 5% ，同理依次以2 cm，3 cm，…为半径画同心圆，分别表示频率为 10%，15%，…，再根据各风向频率数据，在各个风向(射线)上描出各点，依次把这些点连接起来，就得到了风向频率玫瑰图. 进一步，若还知道各个风向上的平均风速，也可以在图上将平均风速表示出来. 具体作法是：以每 1 cm 长代表风速 1 m/s，将各方位

的风速分别描在相应方向的射线上，再依次把这些点连接起来，就得到了风速玫瑰图.

例如，已知A气象站所测得的风向频率和平均风速如下表所示. 根据下表中的数据，就可以作出该站的风向频率玫瑰图（红线）和风速玫瑰图（蓝线），如图20－2所示.

A 气象站各风向频率和平均风速

风向	N	NNE	NE	EEN	E	EES	SE	SSE	S
频率（%）	5	6	6	7	8	10	9	8	4
平均风速/($m\cdot s^{-1}$)	3.4	3.3	3.5	3.6	3.2	3.2	3.4	3.7	2.9
风向	SSW	SW	WWS	W	WWN	NW	NNW	C（静风）	
频率（%）	3	2	2	3	7	8	5	6	
平均风速/($m\cdot s^{-1}$)	2.5	2.3	2.3	2.6	3.5	3.5	3.6	0.0	

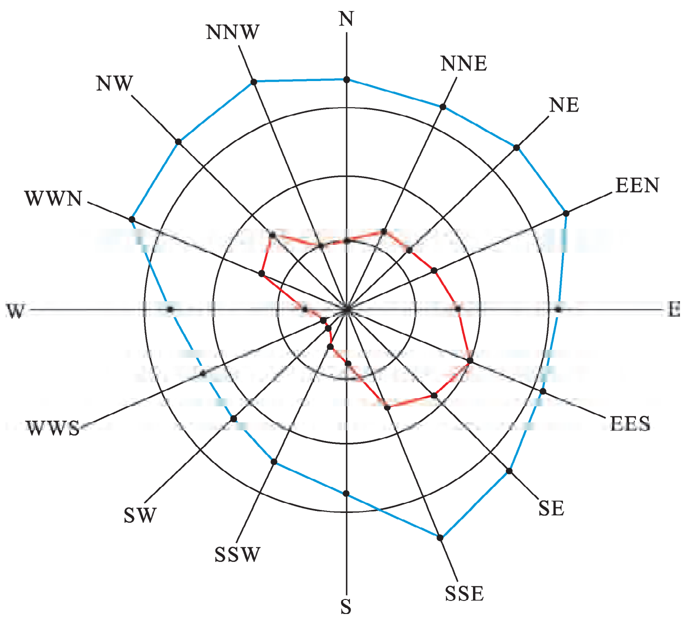


图20－2　A气象站的风向频率（红线）、风速（蓝线）玫瑰图

有了风向频率玫瑰图，很直观地就可得出一个地区在一段时间内的主导风向（频率最大的风向），这样有助于对今后该地区的风向情况进行预测和估计.

此外，风与其他气候要素的相关情况也可在风向频率玫瑰图中表示出来. 例如，若知道某地的降雨量情况，就可在风向频率玫瑰图上表示该地风向与降雨量之间的关系. 一般风向观测记录均

用 16 方位，但为了统计的方便与意义明确，可采用 8 方位绘制风向频率玫瑰图. 具体作法是：以每 1 cm 长代表降雨量 100 mm，将各方位的降雨量分别描在相应方向的射线上，再依次把这些点连接起来，就可以表示风向与降雨量的关系. 如图 20－3 所示，某地吹东南风和南风时，雨量最多，达 240～250 mm；吹西风时雨量最少，约 50 mm.

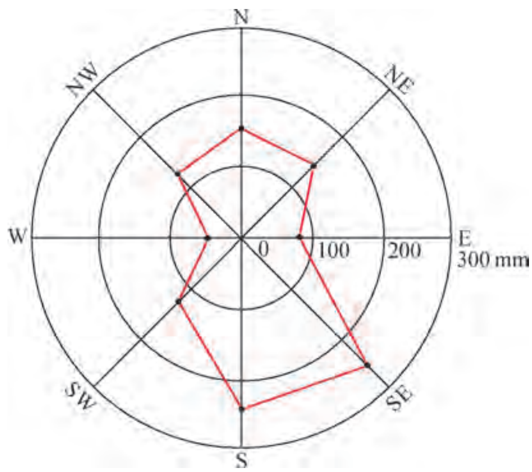


图 20－3　某地雨量和风向的相关图（红线）

20.2 数据的集中趋势与离散程度

1. 数据的集中趋势

（1）平均数

问题1 某校“环保宣传”小组定期对学校的空气含尘量进行检测，下面是某天每隔 2 h 测得的数据：

0.03，0.04，0.03，0.02，0.04，0.01，

0.03，0.03，0.04，0.05，0.01，0.03.

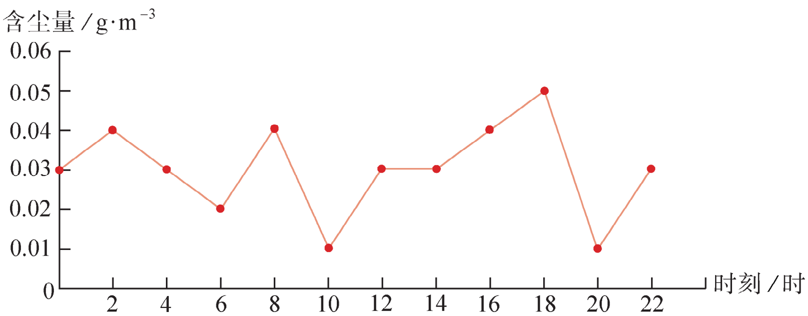


图 20-4

根据上面数据，怎样说明这一天的空气含尘量？

计算上述数据的平均数：

$$\frac{1}{12}\times(0.03+0.04+0.03+0.02+0.04+0.01+0.03+0.03+0.04+0.05+0.01+0.03)=0.03(\mathrm{g/m^3}).$$

把这个平均数作为这组数据的一个代表，用来反映该日空气含尘量的一般状况. 我们说学校这一天的空气含尘量平均为 0.03 $\mathrm{g/m^3}$.

一般地,如果有 n 个数据

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,$$

那么,$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 就是这组数据的**平均数**(mean),用“$\bar{x}$”表示,即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \quad ①$$

对于一组数据,我们常用平均数来作为刻画它的集中趋势的一种方法.

例 1 在一次校园网页设计比赛中,8 位评委对甲、乙两名选手的评分情况如下:

评 分 表

评分情况 / 评委 / 选手	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号	7 号	8 号
甲	9.0	9.0	9.2	9.8	8.8	9.2	9.5	9.2
乙	9.4	9.6	9.2	8.0	9.5	9.0	9.2	9.4

确定选手的最后得分有两种方案:一是将评委评分的平均数作为最后得分;二是将评委评分中的一个最高分与一个最低分去掉后的平均数作为最后得分.

哪一种方案更为可取?

解 按方案一计算甲、乙的最后得分为

$$\begin{aligned}\bar{x}_{甲}&=\frac{1}{8}(8.8+9.0\times2+9.2\times3+9.5+9.8)\\&\approx 9.21(分),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_{乙}&=\frac{1}{8}(8.0+9.0+9.2\times2+9.4\times2+9.5+9.6)\\&\approx 9.16(分).\end{aligned}$$

这时,甲的成绩比乙高.

按方案二计算甲、乙的最后得分为

$$\bar{y}_{甲}=\frac{1}{6}(9.0\times2+9.2\times3+9.5)\approx9.18(分),$$

$$\bar{y}_{乙}=\frac{1}{6}(9.0+9.2\times2+9.4\times2+9.5)\approx9.28(分).$$

这时,乙的成绩比甲高.

将上面的得分与表中的数据相比较,我们发现有 5 位评委对甲的评分不高于乙,这表明多数人认为乙的成绩好. 方案二的结果表明乙的成绩比甲高,与大多数评委的观点相符. 因此,按方案二评定选手的最后得分较为可取.

交流

用平均数来刻画一组数据的集中趋势,容易受什么影响?

练习

1. 人们说"女性比男性寿命长"是依据什么得出的?
2. 本节例 1 中若只去掉一个最高分或只去掉一个最低分,再将其余评委评分的平均数作为最后得分是否可取? 为什么?

例 2 某校在招聘新教师时以考评成绩确定人选. 甲、乙两位高校毕业生的各项考评成绩如下表:

考评项目	成绩/分	
	甲	乙
教学设计	90	80
课堂教学	85	92
答　　辩	90	83

（1）如果学校将教学设计、课堂教学和答辩按 1∶3∶1 的比例来计算各人的考评成绩，那么谁会被录用？

（2）如果按教学设计占 30%、课堂教学占 50%、答辩占 20% 来计算各人的考评成绩，那么又是谁会被录用？

解 （1）甲的考评成绩为

$$\frac{90\times1+85\times3+90\times1}{1+3+1}=87(\text{分}),$$

乙的考评成绩为

$$\frac{80\times1+92\times3+83\times1}{1+3+1}=87.8(\text{分}),$$

因此，乙会被录用.

（2）甲的考评成绩为

$$90\times30\%+85\times50\%+90\times20\%=87.5(\text{分}),$$

乙的考评成绩为

$$80\times30\%+92\times50\%+83\times20\%=86.6(\text{分}),$$

因此，甲会被录用.

各个指标的重要程度不一样，考评的结果也就不同！

交流

例 2 中是用什么来表示各个指标的重要程度的？

一般地，对上面的求平均数，可统一用下面的公式：

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}. \qquad ②$$

$$(f_1+f_2+\cdots+f_k=n,\ k\leqslant n)$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 分别表示数据 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 出现的次数（如例 1），或者表示数据 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 在总结果中的比重（如例 2），我们称其为各数据的**权**（weight），$\bar{x}$叫做这 n 个数据的**加权平均数**（weighted mean）.

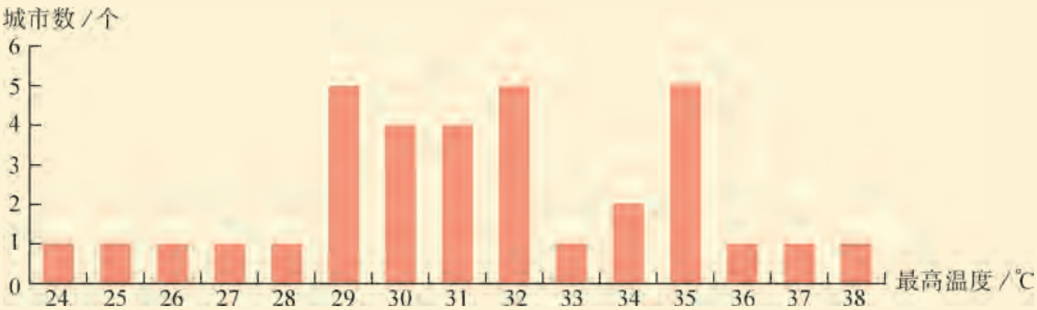
通过例 2，我们可以看出数据的权能反映数据的相对“重要程度”.

思考

公式②与公式①有什么关系？

练习

1. 据气象台预报，2012 年某日我国 34 个主要城市的最高气温情况如图所示：



（第 1 题）

问这 34 个城市这一天最高气温的平均值是多少？

2. 小林、小红两位同学英语各单项测试成绩如下：

分数 测试项目 学生	听　力	阅　读	写　作
小　林	70	80	90
小　红	90	80	70

若听力、阅读、写作三项成绩分别按 15%，50%，35% 计入总分，谁的总成绩好？若分别按 35%，50%，15% 呢？

图 20-5

求一组数据的平均数，当数据很多时，用笔算比较麻烦，这时用计算器就很简便. 只要按照指定的方法将各个数据依次输入计算器(图 20－5)，即可直接得出结果. 下面，我们以例 1 中求选手甲的平均分为例加以说明.

操作步骤：

(1) ON/C 开机；

(2) 2ndf DEL 清除原有数据；

(3) 2ndf MODE 1，选择单变量统计模式；

(4) 9.0 DATA，输入数据 9.0(显示 $n=1$ 为样本数，下同)；

(5) DATA，重复输入数据 9.0；

(6) 9.2 , 3 DATA，输入 3 个相同的数据 9.2；

(7) 9.8 DATA，输入数据 9.8；

(8) 8.8 DATA，输入数据 8.8；

(9) 9.5 DATA，输入数据 9.5；

(10) RCL $\bar{x}$，计算这组数据的平均数.

如果要计算这组数据的和，只要按 RCL $\sum x$ 键即可. 若在按 DATA 键前出现输入错误，只要按 ON/C 键即可删除；若在按 DATA 键后，需用 ▶ 键确认最后输入的数据，按 2ndf CD 键清除. 若要清除全部数据，按 2ndf DEL 键.

练习

60 个长绒棉样品的纤维长度(单位：mm)如下：

37，43，33，37，36，41，39，34，38，45，
36，30，37，28，41，38，35，37，32，44，
29，36，42，38，36，35，37，34，40，37，
31，37，47，35，37，39，38，36，40，38，
35，27，38，37，33，37，26，36，38，44，
48，42，36，33，39，36，38，37，37，40.

请用计算器计算该批样品纤维的平均长度(精确到 0.01 mm).

（2）中位数与众数

问题2　某公司对外宣称员工的平均年薪为 3 万元. 经过调查,发现该公司全体员工年薪的具体情况如下表:

年薪/万元	12	9	6	4	3	2.5	2	1.5	1
员工人数	1	1	1	1	2	2	5	6	2

看了这张调查表,你认为该公司的宣传是否失实? 3 万元能代表该公司员工年薪的一般水平吗?

在公司的 21 名员工中,年薪不低于 3 万元的只有 6 人,而低于 3 万元的却有 15 人,并且其中有 13 人不超过 2 万元,8 人不超过 1.5 万元,年薪 1.5 万元的人数最多,为 6 人.

如果我们将上面的 21 个数据按大小顺序排列,不难发现数据 2 万元处于中间位置,也就是说:

（1）年薪不低于 2 万元的人数不少于一半(13 人);

（2）年薪不高于 2 万元的人数也不少于一半(13 人).

一般地,当将一组数据按大小顺序排列后,位于正中间的一个数据(当数据的个数是奇数时)或正中间两个数据的平均数(当数据的个数是偶数时)叫做这组数据的**中位数**(median). 一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的**众数**(mode). 如问题 2 中的 21 个数据,它的中位数是 2 万元,众数是 1.5 万元.

中位数和众数也是刻画数据集中趋势的两种方法.

思考

问题 2 中是用平均数、中位数,还是用众数来代表公司员工年薪的一般水平更为合适?

例 3 8 位评委对选手甲的评分情况如下：

$$9.0, 9.0, 9.2, 9.8, 8.8, 9.2, 9.5, 9.2.$$

求这组数据的中位数和众数.

你能根据平均数、中位数和众数描述评委的评分情况吗？

解 将这 8 个数据按从小到大的顺序排列，得

$$8.8, 9.0, 9.0, 9.2, 9.2, 9.2, 9.5, 9.8.$$

其中正中间的两个数据是 9.2，9.2，它们的平均数也是 9.2，即这组数据的中位数是 9.2 分.

数据 9.2 出现次数最多，所以这组数据的众数也是 9.2 分.

问题③ 巨星公司是以生产各种模具为主的大型企业，公司销售部有营销员 15 人. 销售部为了制定下一年度每位营销员的销售定额，统计了这 15 人本年度的销售情况：

销售额/万元	330	280	150	40	30	20
营销员人数	1	1	2	6	4	1

（1）如果公司销售部把每位营销员的下一年度销售额定为平均数 86 万元，你认为是否合理？为什么？

（2）你认为销售额定为多少元比较合理？试说出你的理由.

我们看到，在上面的问题中，虽然 86 万元是这 15 个人销售额的平均值，但是销售额超过 86 万元的只有 4 人，还不到总人数的 $\frac{1}{3}$，绝大多数人的销售额不到其一半（不超过 40 万元）. 可见，如果以平均值 86 万元作为下一年度每位营销员的销售定额，将会大大超过绝大多数人的承受能力，不利于调动多数营销员的积极性.

但是如果我们注意到 40 万元这个数据，就会发现：

（1）它是众数；

（2）它是中位数，销售额不小于它的人数为 10 人，小于

它的仅有 5 人.

因此,若将 40 万元定为下年度的销售额,则更加符合大多数人的承受能力,有利于调动营销员的积极性.

思考

平均数、中位数、众数分别从哪些方面反映了一组数据的特点?

平均数、中位数和众数都是反映数据集中趋势的统计量,能从不同的角度提供信息.

平均数能充分利用数据提供的信息,它的使用最为广泛,能刻画一组数据整体的平均状态,但不能反映个体性质,易受极端值(即一组数据中与其余数据差异很大的数据)的影响.

中位数代表了这组数据数值大小的"中点",不易受极端值影响,但不能充分利用所有数据的信息.

众数反映一组数据中出现次数最多的数据. 一组数据中,众数可能不止一个,也可能没有.

我们已经看到,有时是平均数更能反映问题,有时则是中位数或众数更能反映问题. 总之,要根据具体问题来选择刻画一组数据的集中趋势的统计量,选择的统计量要能够更客观地反映实际背景.

思考

10 位学生的鞋号由小到大是 20, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 23. 这组数据的 3 个集中趋势的统计量中最令鞋厂关注的是哪一个? 最不感兴趣的又是哪一个?

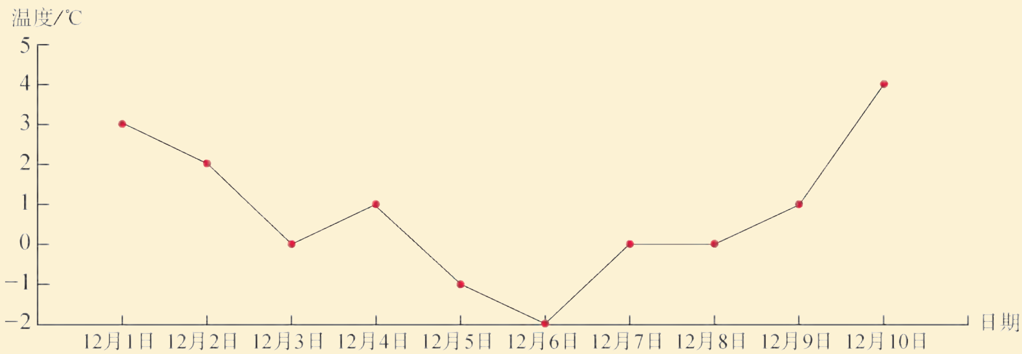
练习

1. 一组数据的平均数、中位数和众数一定在这组数据中吗？举例说明.
2. 某届世界杯足球赛结束后，球迷统计了全部(64 场)比赛的进球情况.

进球数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
场　数	3	15	20	11	8	4	1	1	1

求全部比赛进球数的中位数和众数.

3. 如图是 N 市某年 12 月 1 日至 10 日的最低气温图.



(第 3 题)

求这 10 天最低气温的平均数、中位数和众数.

4. 小明在一次数学检测中得了 80 分，而全班同学这次检测的平均成绩为 75 分，因此小明认为他的成绩在全班属中等偏上，你同意他的看法吗？

问题4　某园艺场采摘苹果，边采摘、边装箱，共装了 2 000 箱. 苹果的市场收购价为 4 元/kg. 现在要估计出这 2 000 箱苹果的销售收入，我们可以怎样去做？

方法一：全面调查，就是一箱箱地称，再根据苹果的总质量估计这 2 000 箱苹果的销售收入.

方法二：采用抽样的方法. 该园艺场从中任意抽出了 10 箱苹果，称出它们的质量，得到如下数据(单位：kg)：

16，15，16.5，16.5，15.5，14.5，14，14，14.5，15.

算出它们的平均数

$$\bar{x}=15.15(\text{kg}).$$

把 $\bar{x}$ 作为每箱苹果的平均质量，由此估计这 2 000 箱苹果的销售收入约为

$$4\times15.15\times2\ 000=121\ 200(\text{元}).$$

用这两种方法估计销售收入各有什么优、缺点?

例 4　某单位共有 280 位员工参加了社会公益捐款活动，从中任意抽取了 12 位员工的捐款数额，记录如下：

捐款数额/元	30	50	80	100
员工人数	2	5	3	2

估计该单位的捐款总额.

解　这 12 位员工的捐款数额的平均数为

$$\bar{x}=\frac{1}{12}(30\times2+50\times5+80\times3+100\times2)=62.5(\text{元}).$$

以 $\bar{x}$ 作为所有员工捐款的平均数，由此估计该单位的捐款总额约为

$$62.5\times280=17\ 500(\text{元}).$$

从上面的问题和例子中，我们可以看到：现实生活中，总体平均数一般难以计算出来，通常我们就用样本平均数估计总体平均数.

问题⑤　某班 45 名学生的体重(单位：kg)数据如下：

47，48，42，61，50，45，44，46，51，
46，45，51，48，53，55，42，47，51，
49，49，52，46，52，57，49，48，57，
49，51，41，52，58，50，54，55，48，
56，54，60，44，53，61，54，50，62.

选第 9 列的数据作为样本，计算它的平均数；再选取第 3，6，9 列共三列的数据作为样本，计算它的平均数. 与总体

的平均数相比较,你有什么发现?

用样本的平均数估计总体的平均数,如果样本容量太小,往往差异较大.

练习

1. 为了解某小区居民 7 月份的用水情况,任意抽查了 20 户家庭的月用水量,结果如下:

月用水量/m^3	10	12	13	14	15	16	17	18
户　数	3	5	2	3	3	2	1	1

如果该小区有 200 户家庭,估计该小区居民 7 月份的用水总量.

2. 某家电商场今年 7 月 15 日至 7 月 20 日,每天销售某种空调数量(单位:台)为:

$$6,\ 8,\ 8,\ 10,\ 12,\ 10.$$

据此预测,下半年销售量可达到 1 656 台,请问是怎样作出预测的? 这种预测有道理吗?

3. 抽查某商场 8 月份 7 天的营业额(单位:万元),结果如下:

$$3.0,\ 3.1,\ 2.9,\ 3.0,\ 3.4,\ 3.2,\ 3.5.$$

试估计这个商场该月的营业额(精确到 0.01 万元).

4. 6 月 5 日是“世界环境日”,某校“绿色”小组进入明光社区进行一次有关“白色污染”方面的抽样调查,调查结果如下:

每户居民平均每天丢弃废塑料袋/个	0	3	4	5	6
户　数	2	9	28	16	5

如果该社区有 500 户居民,请你估计该社区居民每天要丢弃多少个废塑料袋?

2. 数据的离散程度

问题❻ 两台机床都生产直径为(20 ± 0.2) mm 的零件,为了检验产品质量,从产品中各抽出 10 个进行测量,结果如下(单位:mm):

机床 A	20.0	19.8	20.1	20.2	19.9	20.0	20.2	19.8	20.2	19.8
机床 B	20.0	20.0	19.9	20.0	19.9	20.2	20.0	20.1	20.1	19.8

思考

根据以上结果评判哪台机床生产的零件的精度更稳定.

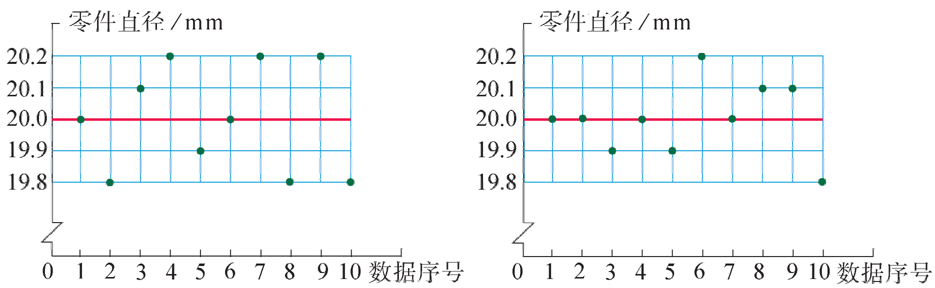
要比较,首先想到比较两组数据的平均值:

$$\overline{x}_A = 20.0 + \frac{1}{10}(0 - 0.2 + \cdots - 0.2) = 20.0,$$

$$\overline{x}_B = 20.0 + \frac{1}{10}(0 + 0 + \cdots - 0.2) = 20.0.$$

$\overline{x}_A = \overline{x}_B = 20.0$ mm, 它们的中位数也都是20.0 mm,从数据集中趋势这个角度很难区分两台机床生产的零件的精度的稳定性. 这时,就需考察数据的离散程度了.

把每组零件的直径分别用点来表示,如图 20 - 6.



(1) 机床 A　　(2) 机床 B

图 20-6

图中过 20.0 与横轴平行的直线上的点表示平均数. 可见机床 A 生产出的零件的直径中偏离这个平均数 0.2 mm 的有 6 个、0.1 mm 的有 2 个;机床 B 生产出的零件的直径中偏离这个平均数 0.2 mm 的有 2 个、0.1 mm 的有 4 个,直观上容易看出机床 B 比机床 A 生产的零件的精度更稳定. 但

如何用数量来刻画一组数据的离散程度呢？

统计学中常用下面的方法：

设一组数据是 x_1, x_2, …, x_n，它们的平均数是$\overline{x}$，我们用

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

来衡量这组数据的离散程度，并把它叫做这组数据的**方差**(variance).

下面通过计算方差，来评判问题中机床 A 和机床 B 哪台生产的零件的精度更稳定.

前面已经算得 A，B 两组数的平均数，于是

$$s_A^2=\frac{1}{10}[(20-20)^2+(19.8-20)^2+\cdots+(19.8-20)^2]$$

$$=\frac{1}{10}[0^2+(-0.2)^2+\cdots+(-0.2)^2]$$

$$=\frac{1}{10}\times0.26=0.026(\mathrm{mm}^2);$$

$$s_B^2=\frac{1}{10}[(20-20)^2+(20-20)^2+\cdots+(19.8-20)^2]$$

$$=\frac{1}{10}[0^2+0^2+\cdots+(-0.2)^2]$$

$$=\frac{1}{10}\times0.12=0.012(\mathrm{mm}^2).$$

由于 $0.026>0.012$，可知机床 A 生产的 10 个零件直径比机床 B 生产的 10 个零件直径波动要大.

一组数据方差越大，说明这组数据的离散程度越大.

练习

1. 求下列每题中两组数据的方差，并说明哪组数据的离散程度较小.

(1) A：11，12，13，14，15；　　B：11，13，13，14；

(2) A：30，50，50，50，60；　　B：30，44，50，56，60.

2. 考察甲、乙两种小麦的长势,分别从中抽取 10 株苗,测得苗高如下(单位: cm):

甲: 12, 13, 14, 15, 10, 16, 13, 11, 15, 11;

乙: 11, 16, 17, 14, 13, 19, 6, 8, 10, 16.

计算甲、乙两组数据的方差,说明哪种小麦长得较整齐.

求一组数据的方差,用计算器更为方便.

例 5 用计算器求下列数据的方差(结果保留 2 位小数):

138, 156, 131, 141, 128, 139, 135, 130.

解 按键方法:

(1) 设定计算模式. 在打开计算器后,先按键 2ndf MODE 1 将其设定至"Stat"状态;

(2) 按键 2ndf DEL 清除计算器原先在"Stat"模式下所储存的数据;

(3) 输入数据,依次按以下各键:

138 DATA 156 DATA 131 DATA 141 DATA 128 DATA 139 DATA 135 DATA 130 DATA ;

(4) 求方差. 在计算器的键盘上,用 σX 表示一组数据的方差的算术平方根.

按键 RCL σX 显示方差的算术平方根:

σX = 8.302860953

按键 X^2 = 显示方差:

ANS^2 = 68.9375

由上可得

$$s^2 \approx 68.94$$

练习

1. 已知两组数据：

   A：20，21，22，23，24，25，26；

   B：20，20，23，23，23，26，26.

   用计算器分别求出它们的方差，并说明哪组数据的波动较大.

2. 两名跳远运动员在 10 次测验中的成绩如下（单位：m）：

   甲：5.85，5.93，6.07，5.91，5.99，6.13，5.89，6.05，6.00，6.19；

   乙：6.11，6.08，5.83，5.92，5.84，6.18，6.17，5.81，5.85，6.21.

   用计算器分别计算两组数据的方差，并根据计算估计哪名运动员的成绩较稳定.

信息技术应用

用 Excel 求方差

用 Excel 求一组数据的方差，非常方便.

（1）打开 Excel，将本章 20.2 节的问题 6 中机床 A 生产的 10 个零件的直径数据：

20.0，19.8，20.1，20.2，19.9，20.0，20.2，19.8，20.2，19.8

逐个输入到 Excel 表格的单元格 A2 ~ A11 中，再选中单元格 B12，作为显示答案的位置（图 20－7）.

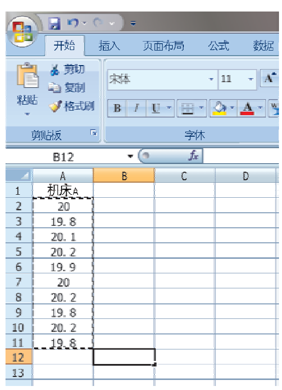


图 20-7

图 20-8

（2）选择“公式”菜单中的“插入函数”命令(图 20－8)，在弹出的“插入函数”对话框中选择“统计”分类中的“VARP”函数(图 20－9)，点击“确定”按钮.

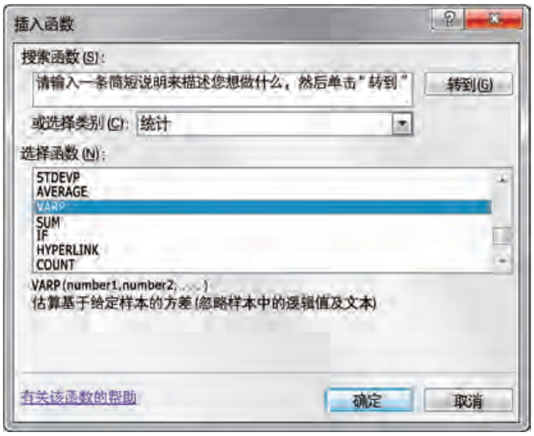


图　20－9

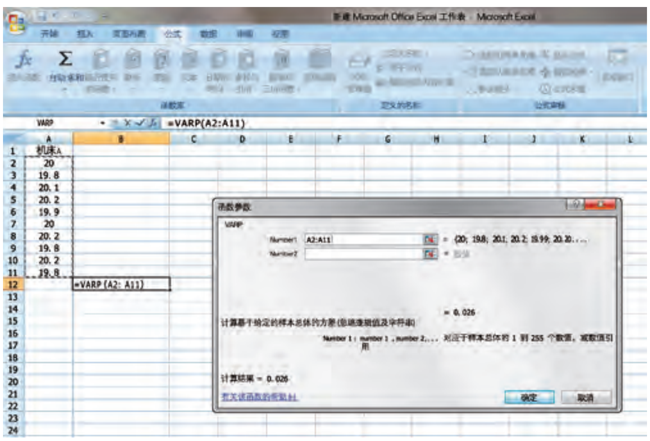


图　20－10

（3）弹出“VARP”函数参数对话框后，将此对话框移开，选中 A2～A11(图 20－10)，再点击“确定”按钮，得到方差为 0.026.

在实际问题中，与用样本平均数估计总体平均数一样，我们也常用样本方差估计总体方差，如：

例 6 为比较甲、乙两个新品种水稻的产品质量，收割时各抽取了五块具有相同条件的试验田地，分别称得它们的质量，得其每公顷产量如下表(单位：t)：

田地编号 水稻品种	1	2	3	4	5
甲	12.6	12	12.3	11.7	12.9
乙	12.3	12.3	12.3	11.4	13.2

(1) 哪个品种平均每公顷的产量较高？

(2) 哪个品种的产量较稳定？

分析：现在要通过比较甲、乙两个新品种在试验田中的产量和产量的稳定性，来估计甲、乙两个新品种在这一地区的产量和产量的稳定性，这实际上就是用样本的平均数和方差来估计总体的平均数和方差.

解 甲、乙两个新品种在试验田中的产量各组成一个样本.

$$\bar{x}_{甲}=\frac{12.6+12+12.3+11.7+12.9}{5}=12.3(\mathrm{t}),$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{12.3+12.3+12.3+11.4+13.2}{5}=12.3(\mathrm{t}).$$

说明甲、乙两个新品种平均每公顷的产量一样高.

下面我们来考察甲、乙两个新品种的稳定性.

$$\begin{aligned}s_{甲}^2&=\frac{1}{5}[(12.6-12.3)^2+(12-12.3)^2+(12.3-12.3)^2\\&\quad+(11.7-12.3)^2+(12.9-12.3)^2]\\&=0.18,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{乙}^2&=\frac{1}{5}[(12.3-12.3)^2+(12.3-12.3)^2+(12.3-12.3)^2\\&\quad+(11.4-12.3)^2+(13.2-12.3)^2]\\&=0.324.\end{aligned}$$

得出 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$.

可知，甲品种每公顷的产量波动比乙品种每公顷的产量波动要小，由此估计甲品种的稳定性好.

一般地，在平均数相同的情况下，方差越大，则意味着这组数据对平均数的离散程度也越大.

在两组数据的平均数相差较大时，以及在比较单位不同的两组数据时，不能直接用方差来比较它们的离散程度.

练习

1. 在对某玉米品种进行考察时，农科所从一块试验田里随机抽取了 15 株玉米，称得各株玉米的产量如下（单位：kg）：

   0.25，0.16，0.16，0.15，0.20，0.13，0.10，0.18，
   0.14，0.12，0.13，0.13，0.18，0.15，0.10.

   由此估计这块试验田每株玉米产量的方差是多少？

2. 从甲、乙两名工人生产的同一种零件中，各随机抽出 4 个，量得它们的直径（单位：mm）如下：

   甲生产零件：9.98，10.00，10.02，10.00；
   乙生产零件：10.00，9.97，10.03，10.00.

   求它们的方差，并说明谁做的零件直径差异较小.

习题 20.2

1. 某次中学生田径运动会上参加男子跳高的 10 名运动员的成绩如下表：

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.75	1.80
运动员人数	2	3	2	2	1

求这些运动员的平均成绩.

2. 青年歌手大奖赛中,某民族唱法选手的歌唱得分如下:

8.1, 8.6, 8.6, 8.4, 8.8, 8.2,
9.2, 8.7, 8.7, 8.8, 8.9, 8.1.

去掉一个最高分和一个最低分,再计算平均分,则该选手的最后得分是多少?

3. 某单位男职工数与女职工数之比为 5 ∶ 3,男、女职工的平均年龄分别为 40 岁和 30 岁,求该单位职工的平均年龄.

4. 已知一组数据 5, 15, 75, 45, 25, 75, 45, 35, 45, 35,那么 40 是这组数据的(　　).

(A) 平均数但不是中位数　　(B) 平均数也是中位数

(C) 众数　　(D) 中位数但不是平均数

5. 在体育课上,老师对九年级 100 名男生引体向上这一项目进行了一次测试,成绩如下表:

成绩/次	10	9	8	7	6	5	4	3
男生人数	30	20	15	15	12	5	2	1

(1) 求这些男生引体向上成绩的平均数、中位数和众数(精确到 0.1);

(2) 若规定 8 次以上(含 8 次)为优秀,求这 100 名男生该项目成绩的优秀率.

6. 十一黄金周时期,某旅游区的游客量如下表:

人数/万人	0.6	1.2	2	2.5
天　　数	2	1	3	1

(1) 求这 7 天假期中,游客量的平均数、中位数和众数;

(2) 选用平均数、中位数和众数中的哪个数作代表,更能反映黄金周 7 天游客量的一般情况?

7. 某商店销售 5 种领口大小分别为 38, 39, 40, 41, 42(单位: cm)的衬衫,一个月内的销量如下表:

领口大小/cm	38	39	40	41	42
销量/件	65	195	170	125	45

你认为商店最感兴趣的是这组数据的平均数、中位数还是众数? 为什么?

8. 在人才市场上招聘 A 种技工的单位有 25 家，提供的月薪平均为 1 200 元；招聘 B 种技工的单位有 30 家，提供的月薪平均为 1 500 元. 能由此认为用人单位给 B 种技工的月薪普遍高于 A 种技工吗？

9. 已知两个样本数据如下：

甲：9.8，9.9，10.3，10，10.1，10.4，9.7，9.8；

乙：10.5，9.6，10.1，9.8，9.5，10.2，10，10.3.

分别计算两个样本的方差，并比较哪一个样本数据较稳定.

10. 某校从甲、乙两名优秀选手中选 1 名选手参加全市中学生田径百米比赛. 该校预先对这两名选手测试了 8 次，测试成绩如下表：

成绩/s 次数 选手	1	2	3	4	5	6	7	8
甲	12.1	12.2	13	12.5	13.1	12.5	12.4	12.2
乙	12	12.4	12.8	13	12.2	12.8	12.3	12.5

根据测试成绩，请你运用所学知识作出判断，派哪位选手参加比赛更好？为什么？

20.3 综合与实践

体重指数

据报载,截至 2010 年,全国 18 岁及以上居民超重率达到 32.1%,肥胖率达 9.9%.肥胖已成为困扰当今医学界的四大医学社会问题之一,如果不加以重视,对人的身体健康危害较大.

研究表明,体重在正常范围内者患各种疾病的危险性小于消瘦、超重或肥胖者.你知道正常范围内的体重是多少吗?目前国际上有多种标准来衡量体重是否在正常范围内,这里只介绍其中比较常用的一种标准.

假设某人的体重为 m kg,身高为 h m,我们把 $\frac{m}{h^2}$ 的值称为体重指数(BMI).下表给出了体重状况对应的体重指数的范围.

体重状况	体重指数(BMI)的范围
消瘦	$\frac{m}{h^2}<18.5$
正常	$18.5\leqslant\frac{m}{h^2}\leqslant23.9$
超重	$23.9<\frac{m}{h^2}\leqslant26.9$
肥胖	$\frac{m}{h^2}>26.9$

在收集数据的过程中,如果数据较多或者收集时面向的对象较广,可借助调查问卷进行收集.

问题1 为了解你们班学生的体重状况,统计消瘦、正常、超重和肥胖的人数各为多少,应该怎么做呢?

(1)根据班级的人数制作统计表(如下表),收集班上每位学生的体重和身高的数据;

学号	体重/kg	身高/m	学号	体重/kg	身高/m	学号	体重/kg	身高/m	学号	体重/kg	身高/m	学号	体重/kg	身高/m
1			14			27			40			53		
2			15			28			41			54		
3			16			29			42			55		
4			17			30			43			56		
5			18			31			44			57		
6			19			32			45			58		
7			20			33			46			59		
8			21			34			47			60		
9			22			35			48			…		
10			23			36			49					
11			24			37			50					
12			25			38			51					
13			26			39			52					

（2）根据上表中的数据，计算出每位学生的体重指数；

学号	体重指数	学号	体重指数	学号	体重指数	学号	体重指数	学号	体重指数
1		14		27		40		53	
2		15		28		41		54	
3		16		29		42		55	
4		17		30		43		56	
5		18		31		44		57	
6		19		32		45		58	
7		20		33		46		59	
8		21		34		47		60	
9		22		35		48		…	
10		23		36		49			
11		24		37		50			
12		25		38		51			
13		26		39		52			

（3）列出体重指数的频数分布表，统计体重指数落在不同范围内的学生数；

体重状况	体重指数（BMI）的范围	学生数
消瘦	$\frac{m}{h^2}<18.5$	
正常	$18.5\leqslant\frac{m}{h^2}\leqslant23.9$	
超重	$23.9<\frac{m}{h^2}\leqslant26.9$	
肥胖	$\frac{m}{h^2}>26.9$	

（4）画出频数直方图，通过频数分布表和直方图，你得到了哪些信息？说说你们班学生的体重状况怎么样；

（5）将你们班学生的体重状况与其他班级学生的体重状况进行比较，简要说明你得到的主要结论.

你估计的全年级学生的体重状况与其他班级学生估计的全年级学生的体重状况相比较，是否有差异？为什么？

问题2 根据你们班学生的体重状况，估计全年级学生的消瘦、正常、超重和肥胖的人数各为多少.

问题③ （1）测量你的家人的身高和体重，计算出他们的体重指数，并判断他们的体重状况；

（2）查找和搜集相关资料，了解引起消瘦、超重、肥胖的相关因素，并就如何保持正常体重与健康身体提出你的建议.

小结·评价

一、内容整理

数据的初步分析 → 数据的频数分布

数据的初步分析 → 数据的集中趋势与离散程度

二、主要知识回顾

1. 在 n 个数据中，某类数据出现的次数 m 称为该类数据出现的频数，$\frac{m}{n}$ 称为该类数据出现的频率.

2. 画频数直方图的步骤有：求最大数与最小数的差、决定组距与组数、决定分点、列频数分布表、画频数直方图.

3. 反映一组数据集中趋势的统计量主要有________________；
反映一组数据离散程度的统计量主要有________________.

三、自评与互评

1. 你能举例说明频数和频率在日常生活中的应用吗？
2. 在制作频数分布表与频数直方图时，你认为关键在哪里？
3. 举例说明平均数、中位数、众数的意义.

4. 平均数与加权平均数有什么联系和区别？举例说明加权平均数中权的意义.

5. 你对统计的基本思想是否有了更进一步的了解,请与同伴交流一下.

A组

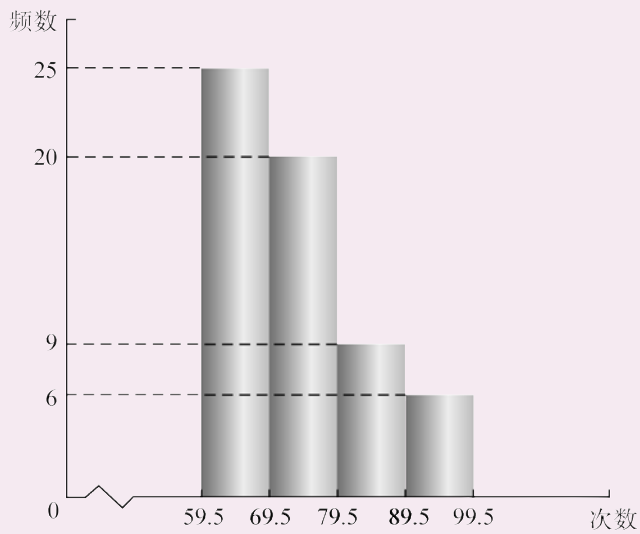
复 习 题

1. 下列数据为某城市 2012 年 11 月份每天最高的气温(单位:℃):

30, 28, 32, 27, 25, 25, 26, 24, 24, 26,
23, 23, 21, 17, 12, 16, 19, 21, 22, 23,
22, 24, 23, 20, 21, 22, 20, 19, 20, 21.

先适当分组,列出频数分布表,再绘制频数直方图.

2. 如图是九年级 2 班学生的一次体检中每分钟心跳次数的频数直方图(次数均为整数). 已知该班只有 5 位学生的心跳每分钟 75 次,请观察图后,指出下列说法是否正确?



(第 2 题)

(1) 数据 75 落在第 2 小组;

(2) 第 4 小组的频率为 0.1;

（3）心跳为每分钟 75 次的人数占该班体检人数的$\frac{1}{12}$.

3. 为了了解学校开展“孝敬父母，从家务事做起”活动的实际情况，该校抽取八年级 50 名学生，调查他们一周（按 7 天计算）做家务所用时间（单位：h），得到一组数据，并绘制成下表，请根据该表完成下列各题：

（1）填写频数分布表中未完成的部分；

频数分布表

分组	频数	频率
0.55～1.05	14	0.28
1.05～1.55	15	0.30
1.55～2.05	7	
2.05～2.55	4	0.08
2.55～3.05	5	0.10
3.05～3.55	3	
3.55～4.05	2	0.04
合计	50	1.00

（2）由以上信息判断，每周做家务的时间不超过 1.5 h 的学生所占百分率是________.

4. 希望中学为了解九年级男生的身高情况，抽测了 50 名男生的身高（单位：m），数据如下：

身高/m	1.57	1.60	1.62	1.64	1.65	1.66	1.67	1.68	1.69
人数	1	1	1	3	3	3	2	4	6
身高/m	1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.78	1.80
人数	7	7	2	3	2	1	2	1	1

（1）若将数据分成 6 组，取组距为 0.04 m，试完成相应的频数分布表：

分组	1.565～1.605	1.605～1.645	1.645～1.685	1.685～1.725	1.725～1.765	1.765～1.805	合计
频数							

（2）画出频数直方图；

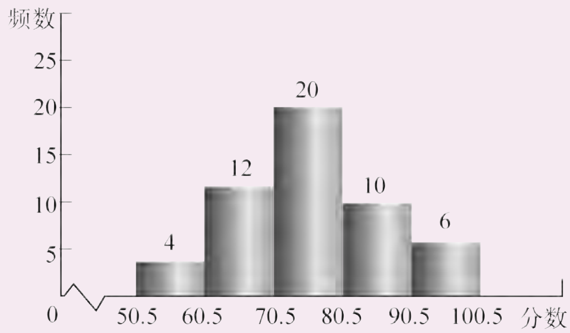
（3）根据样本数据，身高在 1.695 ~ 1.755 m 之间的男生所占的百分率为多少？如果该校九年级共有 450 名男生，那么在 1.695 ~ 1.755 m 之间的人数约有多少人？

5. 某校为推动信息技术的发展，举行了电脑设计作品比赛，各个班派学生代表参加. 现将所有比赛成绩（得分取整数，满分为 100 分）进行整理后分成五组，并绘制成如图所示的频数直方图，请根据统计图提供的信息，解答下列问题：

（1）参加比赛的学生代表共有多少人？

（2）80.5 ~ 90.5 分这个分数段的频数、频率分别是多少？

（3）根据统计图，请你提出一个问题，并回答.



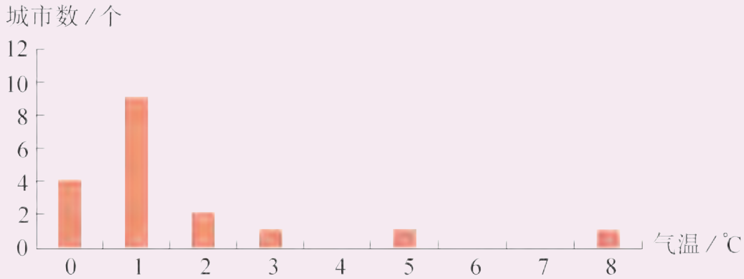
（第 5 题）

6. 某邮局有 A，B，C，D 四名投递员，年终时按职业道德、工作态度、工作能力及工作实绩四个方面进行考核，每一项的满分均为 100 分，得分最高者为本年度先进工作者. 如果各方面的权数及四名投递员的得分如下：

考核项目	权　　数	投递员及得分			
		A	B	C	D
职业道德	2	80	81	80	81
工作态度	2	85	82	78	80
工作能力	3	70	78	85	83
工作实绩	3	75	80	70	85

问谁是本年度的先进工作者？

7. 华东地区主要城市某天的最低气温情况如图所示.



(第 7 题)

求这些城市该天最低气温的平均数、中位数和众数.

8. 某班学生百米跑测试成绩如下表所示:

成绩/s	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18
学生人数	2	3	6	21	11	4	3

求测试成绩的中位数、众数和平均数(精确到 0.1 s).

9. 甲、乙两台机床同时生产一种零件,在 10 天中,两台机床每天出的次品数分别是:

甲: 0, 1, 0, 2, 2, 0, 3, 1, 2, 4;

乙: 2, 3, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 1.

分别计算两组数据的平均数和方差,并说明哪台机床在 10 天中出的次品数波动较大.

10. 甲、乙两台包装机同时包装质量为 200 g 的糖果,从中分别抽出若干袋,测得其质量(单位: g)如下:

甲: 203, 204, 202, 196, 199, 201, 205, 197, 202, 199;

乙: 201, 200, 208, 210, 209, 200, 193, 194.

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差;

(2) 从计算结果看,哪台包装机包装的糖果的质量比较稳定?

11. 要从甲、乙两位车工中选拔一名参加技术比赛. 现从他们加工的零件中各抽取 5 个零件进行检验,测得它们的直径(单位: mm)分别为:

甲: 15.05, 15.02, 14.97, 14.96, 15.00;

乙: 15.00, 15.01, 15.02, 14.97, 15.00.

问哪位车工的技术发挥较稳定?

12. 某粮店购进东北大米 1 000 袋，为了检验每袋大米的质量，从中任意抽取 10 袋大米，称得质量(单位：kg)如下：

$$10,\ 10.2,\ 9.9,\ 10,\ 9.9,\ 9.9,\ 10.1,\ 10,\ 10.1,\ 10.$$

请你估计这批大米的质量.

13. 某鱼塘放养鱼苗 10 万条，根据这几年经验知道，鱼苗成活率为 95%. 一段时间后，准备将鱼打捞出售. 第一次网出 40 条，称得平均鱼重 2.5 kg；第二次网出 25 条，称得平均鱼重 2.2 kg；第三次网出 35 条，称得平均鱼重 2.8 kg，请你估计鱼塘中鱼的总质量为多少千克？

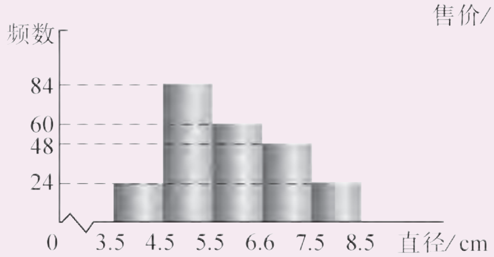
14. 从某灯泡厂生产的一批灯泡中随机地抽取 10 只进行寿命测试，得到数据(单位：h)如下：

$$1\,458,\ 1\,395,\ 1\,562,\ 1\,614,\ 1\,351,$$
$$1\,490,\ 1\,478,\ 1\,382,\ 1\,536,\ 1\,496.$$

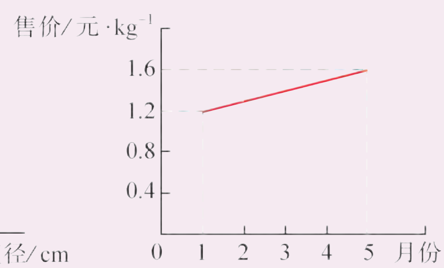
试估计这批灯泡的平均寿命及寿命的方差.

B组 复习题

1. 无核柑橘是皖西南山区特产. 小明家有一块成龄无核柑橘园，去年采摘时，小明利用统计知识，对柑橘的等级和产量进行了测算：他随机选择了若干棵柑橘树，从中共摘得 240 个柑橘，并对这些柑橘的直径进行了测量和统计，绘制出如图(1)所示的频数直方图. 已知一级鲜柑橘的直径在 5.5 ~ 7.5 cm 之间.



(1)



(2)

(第 1 题)

(1) 估计柑橘园中一级柑橘所占的比例是多少;

(2) 由于受储存季节的变化等影响,柑橘的售价会随时间的变化而变化,每千克一级柑橘的月平均售价变化情况如图(2). 若小明家去年共摘得一级柑橘4 000 kg. 现请你利用图象提供的信息,计算出小明家的一级柑橘在4月份出售时,一共能卖多少钱?(不考虑其他因素对柑橘质量的影响)

2. 某风景区对5个旅游景点的门票价格进行了调整. 据统计,调价前后各景点的游客人数基本不变. 有关数据如下表:

景　　点	A	B	C	D	E
原价/元	10	10	15	20	25
现价/元	5	5	15	25	30
日平均游客人数	1 000	1 000	2 000	3 000	2 000

风景区管理部门:调价前后这5个景点门票的平均价格不变. 因而,就总体而言,风景区在门票价格调整中没有获益.

游客:调整门票价格后风景区的平均日收入相对于调价前实际增加了9.4%. 因此,调价对风景区有利.

请你分析他们的说法谁符合实际.

3. 公交6路汽车总站设在一个新开发的居民小区附近,这个小区居民出行主要选乘6路车. 为了了解在7:00至8:00这个高峰时段内乘该路车的人数,公交公司抽查了10个班次的乘车人数,结果如下:

25, 28, 34, 36, 35, 36, 32, 30, 28, 26.

(1) 计算这10个班次乘该路车人数的平均数;

(2) 如果在高峰时段从总站发车20个班次,估计在高峰时段乘该路车的人数.

4. 甲、乙两人在相同的条件下各射靶10次,每次射靶的成绩如下:

甲: 9, 5, 7, 8, 7, 6, 8, 6, 7, 7;

乙: 2, 4, 6, 8, 7, 7, 8, 9, 9, 10.

(1) 填写下表:

	平均数	中位数	方 差	命中9环以上的次数
甲				
乙				

(2) 请从下面 4 个不同的角度对这次测试结果进行分析：

① 平均数和方差相结合，分析谁的成绩稳定；

② 平均数和中位数相结合，分析谁的成绩好些；

③ 平均数和命中 9 环以上的次数相结合，分析谁的成绩好些；

④ 作折线统计图，从折线统计图上两人射击命中环数的走势分析，谁更有潜力.

（第 4 题）

5. 某市林业局于 2005 年对直接从原产地引进的绒毛白蜡树种进行育苗造林，经过 3 年育苗试验、6 年造林试验获得成功.

下表是对该苗木生长情况的统计表：

苗木高、径生长量表

地点	苗龄	高/m 平均值	高/m 年平均生长值	高/m 最大值	高/m 方差	径/cm 平均值	径/cm 年平均生长值	径/cm 最大值	径/cm 方差	测定年月
甲苗圃	1	0.62		1.02	0.012	0.58		0.84	0.053	2005.12
	2	0.78	0.16	1.22	0.040	0.87	0.29	1.26	0.160	2006.12
	3	1.10	0.32	1.50	0.090	1.30	0.43	1.60	0.360	2007.12
乙苗圃	1	0.78		1.25	0.017	0.80		1.10	0.058	2005.12
	2	1.18	0.40	1.60	0.044	1.30	0.50	1.50	0.144	2006.12
	3	1.60	0.42	2.00	0.130	1.90	0.60	2.20	0.250	2007.12

该林业局农艺师根据此表作出分析：“从苗木高、径生长情况看苗木逐年出现分化，且分化程度不断增加，说明播种苗有再选优的必要性和可能性.”

(1) 比较同一苗龄两个苗圃苗木高、径的平均数；

(2) 比较同一苗龄两个苗圃苗木高、径的年平均生长值；

(3) 同一苗龄两个苗圃苗木高、径的平均数、方差所反映苗木的差异；

(4) 决定优选哪个苗圃的树苗.

C组 复习题

某村为了对甲、乙两名村干部进行年度考核，召开了一次述职答辩及民主测评会. 乡政府派出 A，B，C，D，E 五位评委对“述职答辩”进行评价；并从村里选出 20 名村民代表参加民主测评. 结果如表所示：

表 1　述职答辩得分表(单位：分)

得分＼评委 村干部	A	B	C	D	E
甲	92	88	90	94	96
乙	84	86	90	93	91

表 2　民主测评票数统计表(单位：张)

票数＼测评 村干部	优　秀	良　好	一　般
甲	12	6	2
乙	13	5	2

规定：

述职答辩得分“按去掉一个最高分和一个最低分再算平均分”的方法确定；

民主测评得分 = “优秀”票数 ×5 + “良好”票数 ×3 + “一般”票数 ×1；

综合得分 = 述职答辩得分 ×$(1-a)$ + 民主测评得分 ×a $(0.5 \leqslant a \leqslant 0.8)$.

(1) 当 $a=0.6$ 时，甲和乙的综合得分分别是多少？

(2) 甲的综合得分高时，a 在什么范围？乙的综合得分高时，a 又在什么范围？

附录　部分中英文词汇索引

（续表）

中　　文	英　　文	页　码
加权平均数	weighted mean	120
中位数	median	123
众数	mode	123
方差	variance	130

后　记

1999 年，我们根据《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版）》，编写了一套华东版初中数学教材，经三年实验后，于 2002 年报教育部经全国中小学教材审定委员会审查通过.

2001 年，国家颁布了《基础教育课程改革纲要（试行）》及《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，正式启动了新一轮中小学课程、教材改革. 本套教科书就是根据课程标准，在吸取了华东版教材实验过程中的经验后重新编写的，并于 2004 年经全国中小学教材审定委员会初审通过. 现教育部决定全面启动义务教育课程标准实验教材的修订工作，我们将切实把《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求落实到新修订的教材中，使教材的质量进一步得到提升，特色更加鲜明.

本套教材在送审和实验过程中，得到了许多专家、学者、教研人员与广大师生的关爱，特别是人民教育出版社张孝达先生与陈宏伯先生直接参与教材的整体设计和章节审稿，他们以实际行动给予我们很大的支持与鼓舞，我们衷心地感谢他们.

为了做好这次的修订工作，我们调整并充实了编写队伍，本套教科书编写组主要人员有：

吴之季　苏　淳　杜先能　徐子华　郭要红　胡　涛　陈先荣　王南林
胡茂侠　邱广东

本册主要编写人员有：

蒋曙光　杨晓飞　何承全　苏里洋　王应群　项庆寿　王　红　李德福
葛美安　曹秋敏　王占权　秦家林　司擎天

此外，参与本册修改工作的还有：

田　珏　周学玲　孔　琳　张克玉　叶辉平　王爱存　王世祥　柳丽芳
金效奇　刘　发　琚泽毅

教材建设是一项长期任务，需要通过实验、修改，反复锤炼. 这不仅需要全体编写人员的努力，还要有广大师生的积极支持与参与，恳请使用本套教材的师生批评指正.

新时代数学编写组

2013 年 4 月

说　明

本书下列图片由东方 IC 提供：图 17－1（1） amana、P50 第 7 题图伏志勇、图 19－32 corbis.

绿色印刷产品

审批编号：皖费核（2022年春季）第0160号
举报电话：12315

ISBN 978-7-5478-1972-2
9 787547 819722
定价：10.18元