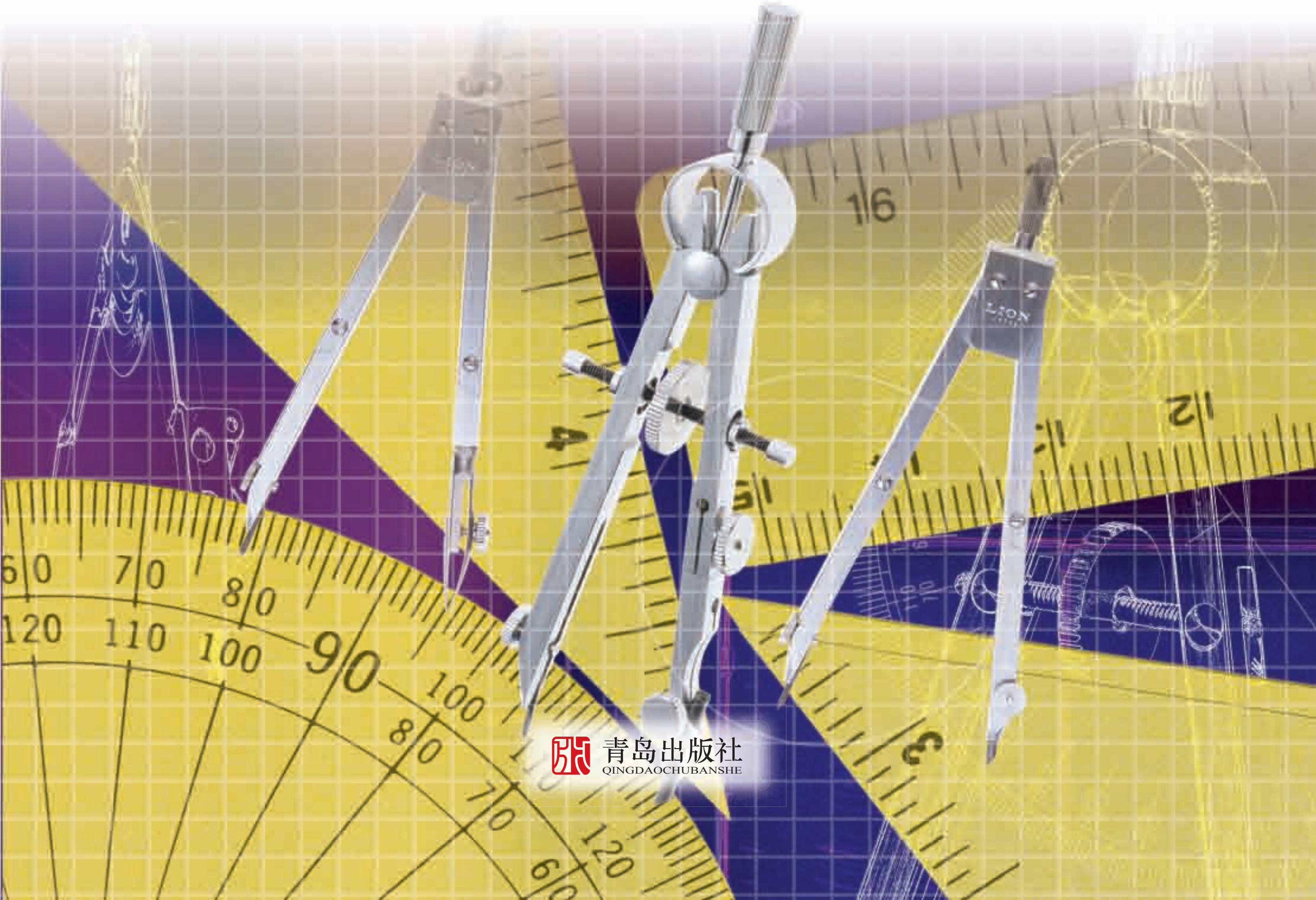
教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

八年级　下册

SHUXUE



青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

义 务 教 育 教 科 书

数　学

八年级　下册

青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

书　　名　义务教育教科书　数学（八年级下册）
主　　编　展　涛
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址　http://www.qdpub.com
责任编辑　刘海波　戴振宇
美术编辑　路渊源
制　　版　济南汇海科技有限公司
印　　刷　昌邑市新华印刷有限公司
出版日期　2013 年 6 月第 2 版　2021 年 12 月第 17 次印刷
开　　本　16 开（787mm × 1092mm）
印　　张　12.75
字　　数　215 千
书　　号　ISBN 978-7-5436-3784-9
定　　价　11.75 元
编校质量、盗版监督服务电话　4006532017　（0532）68068638

新学期寄语

伴随着和煦的春风新的学期开始了. 在新的学期里，你打算怎样学好数学?

你过去已经认识了平行四边形，本学期你将运用合情推理和演绎推理，探索并证明平行四边形和它的家族中的特殊成员——矩形、菱形、正方形的一些重要的性质定理和判定定理.

你已经学习了有理数. 你知道吗? 现实中还有一类数不是有理数，如圆周率π、边长为1的正方形的对角线长等，它们是你现在还不了解的“无理数”. 有理数与无理数又组成一个更大的家庭——实数. 怎样用有理数估计一个无理数的大小? 实数应怎样运算? 在第7章中将结合学习著名的“勾股定理”，走进新的实数世界.

提起一元一次方程和二元一次方程组，你一定很熟悉，在第8章你将学习一元一次不等式和一元一次不等式组. 方程是刻画现实生活中数量之间相等关系的数学模型，不等式则是刻画它们之间不等关系的数学模型. 相信你会很感兴趣.

宇宙飞船要脱离地球引力，进入围绕太阳的轨道运行，速度必须达到$\sqrt{2gR}$. 这是一个怎样的算式? 这类算式如何进行运算? 你将在第9章“二次根式”中学习它.

在第10章你将结识函数中的重要成员——一次函数，体会它的意义，会画它的图象，根据图象和它的表达式探索并理解它的性质，从而为学习更复杂的函数奠定基础.

日常生活中，你会经常见到物体的平移和旋转现象. 什么是平面图形的平移和旋转? 图形的平移和旋转有哪些性质? 你愿意进一步探索吗?

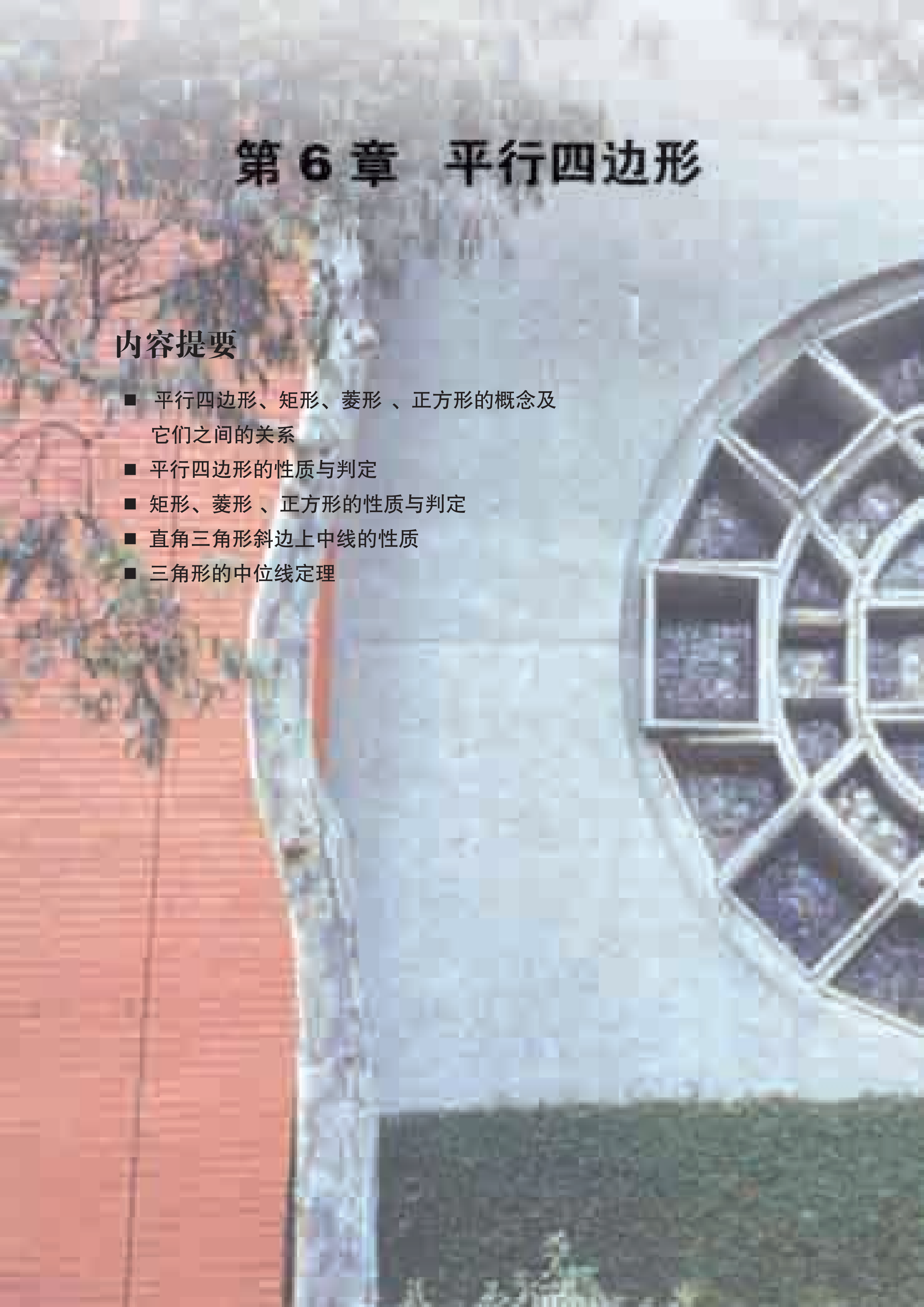
数学是人类文化的重要组成部分，它帮助你提高创新意识和推理能力，为未来的工作和学习奠定基础. 数学的大门向每一位同学都是敞开的. 面对新的挑战，动脑想一想，动手做一做，并与同学交流. 只要你肯付出努力，你会进一步领略数学的美妙，享受到学习数学的乐趣.

目　录

第 6 章　平行四边形

内容提要

- 平行四边形、矩形、菱形 、正方形的概念及它们之间的关系
- 平行四边形的性质与判定
- 矩形、菱形 、正方形的性质与判定
- 直角三角形斜边上中线的性质
- 三角形的中位线定理



情境导航

四边形是我们熟悉的几何图形.在这幅图片中，你看到了哪些四边形的形象?

平行四边形是一类特殊的四边形. 怎样的四边形是平行四边形? 平行四边形具有哪些性质? 怎样判定一个四边形是平行四边形?

矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形. 它们分别有哪些性质? 怎样判定一个四边形是矩形、菱形或正方形?

6.1　平行四边形及其性质

观察与思考

楼梯扶栏　　车位线　　警示牌

图 6-1

在过去的学习中你已经认识了平行四边形. 思考下列问题:

(1) 图 6-1中所示的是生活中常见的一些平行四边形的实例, 你还能举出类似的实例吗?

(2) 通过观察上述实例, 你发现具有什么特征的四边形是平行四边形? 你能根据这一特征画出平行四边形吗?

> 两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形** (parallelogram). 如图 6-2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB /\!/ CD$, $AD /\!/ BC$, 因此它是平行四边形, 记作▱$ABCD$, 读作"平行四边形$ABCD$".

(3) 任意画▱$ABCD$, 连接对角线 AC (图 6-3), 如果沿这条对角线将平行四边形剪成两个三角形, 你发现得到的$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 能够重合吗? 如果能够重合, 说出哪些边是对应边, 哪些角是对应角. 由此, 你猜测平行四边形的对边和对角分别有什么性质?

(4) 能证明你发现的结论是真命题吗?

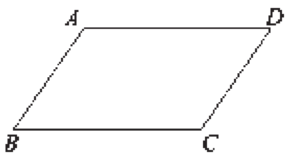
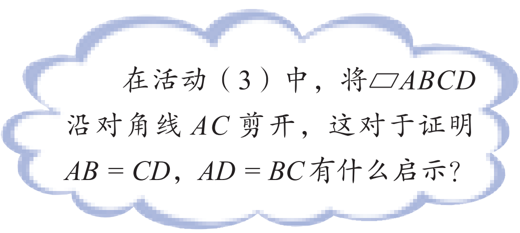


图 6-2

已知: 如图 6-2, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

求证: $AB = CD$, $AD = BC$.



证明　如图6-3，连接AC.

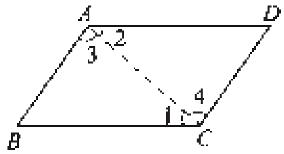


图 6-3

$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore$ $AD /\!/ BC$（平行四边形的定义），

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

同理，$\angle 3 = \angle 4$.

$\because$ $AC = CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$（ASA）.

$\therefore$ $AB = CD$，$AD = BC$.

于是，就得到

平行四边形的性质定理 1　平行四边形的对边相等.

在上面的证明过程中，由$\angle 1 = \angle 2$和$\angle 3 = \angle 4$，还可以推出$\angle BAD = \angle BCD$. 由$\triangle ABC \cong \triangle CDA$还可以推出$\angle B = \angle D$. 于是，又得到

平行四边形的性质定理 2　平行四边形的对角相等.

想一想，如果不添加辅助线，你能证明平行四边形的对角相等吗？

例1　求证：

（1）夹在两条平行直线间的平行线段相等；

（2）如果两条直线平行，那么一条直线上各点到另一条直线的距离相等.

（1）已知：如图 6-4，$l_1 /\!/ l_2$，A，D是直线l_1上的任意两点，过点A，D作$AB /\!/ CD$，分别交l_2于点B，C.

求证：$AB = CD$.

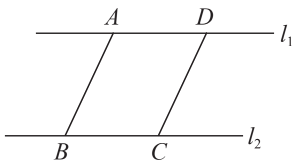


图 6-4

证明　$\because AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$，

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形（平行四边形定义），

$\therefore$ $AB = CD$（平行四边形的性质定理1）.

（2）已知：如图 6−5，$l_1 // l_2$，A，D 是直线 l_1 上的任意两点，$AB \perp l_2$，垂足是 B，$CD \perp l_2$，垂足是 C.

求证：$AB = CD$.

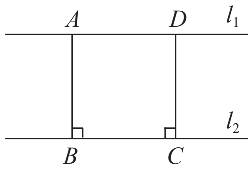


图 6−5

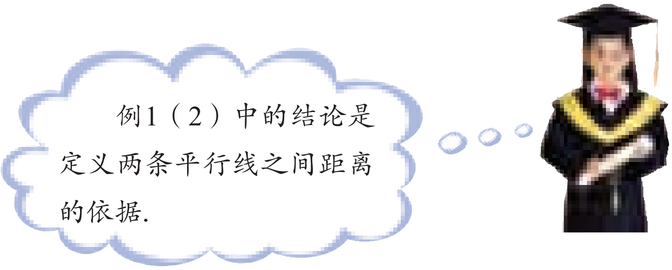
证明　$\because AB \perp l_2$，$CD \perp l_2$，

$\therefore \angle ABC = 90°$，$\angle DCB = 90°$.

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180°$.

$\therefore AB // CD$.

由（1）可知 $AB = CD$.



挑战自我

如图 6−6，P 为▱$ABCD$ 内的任意一点，连接 PA，PB，PC，PD，得到△PAB，△PBC，△PCD，△PAD. 你发现其中两个不相邻的三角形的面积之和与平行四边形 $ABCD$ 的面积之间有什么关系？从而你能得到什么结论？证明你的结论.

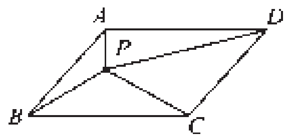
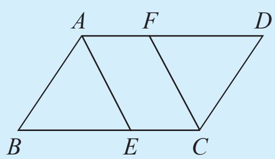


图 6−6

练 习

1. 在▱$ABCD$ 中，试用 $\angle A$ 表示出平行四边形的其他三个角.
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别是 BC，AD 上的点，$AE // CF$. 试用两种不同的方法证明：$BE = FD$，$\angle BAE = \angle DCF$.


（第 2 题）

实验与探究

（1）剪一张平行四边形纸片，记为▱$ABCD$，连接 AC，BD，交于点 O（图 6−7）.

（2）沿对角线 AC 与 BD 将平行四边形纸片剪成△AOB，△BOC，△COD 和△DOA，你发现它们中哪

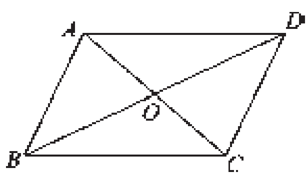


图 6−7

些是全等三角形？

（3）由（2）你发现在两条对角线被点 O 分成的四条线段中，哪些是相等线段？如何证明你的结论？

线段 $OA = OC$，$OB = OD$．要证明它们分别相等，只需证明 $\triangle DOA$ 与 $\triangle BOC$（或 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$）全等．

（4）你能写出已知、求证和证明过程吗？

由以上探索和证明，我们得到

平行四边形的性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分.

例2　如图 6-8，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 O 作一条直线，分别交 AD，BC 于点 E，F．求证：$OE = OF$．

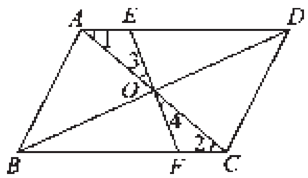


图 6-8

证明　$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OA = OC$，$AD /\!/ BC$．

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$．

$\because$ $\angle 3 = \angle 4$，

$\therefore$ $\triangle OAE \cong \triangle OCF$（ASA）．

$\therefore$ $OE = OF$．

在例 2 中，如果将条件“分别交 AD，BC 于点 E，F”改为“分别交 BA，DC 的延长线于点 E，F（图 6-9）”，$OE = OF$ 的结论还成立吗？

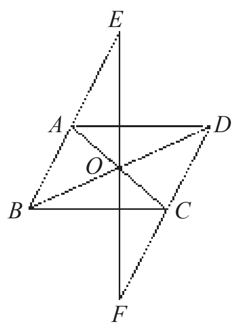


图 6-9

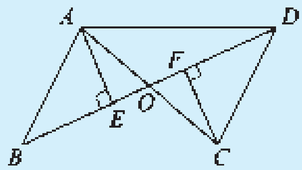
挑战自我

在例2中，经过两对角线的交点 O 作直线，除了图6-8、图6-9的两种情况外，还可能有其他情况吗？如果还有，请分别画出图形，写出结论，并给出证明.

把以上各种情况加以归纳，你能得出一个怎样的结论？

练 习

1. 在▱$ABCD$中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AB=6$，$AC=8$，$BD=12$. 求 $\triangle AOB$ 的周长.
2. 如图，在▱$ABCD$中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，作 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E，F.
   （1）指出图中所有的全等三角形；
   （2）求证：$OE=OF$.



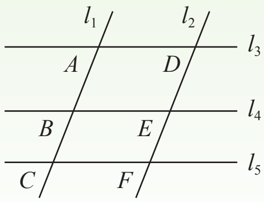
（第2题）

习题6.1

复习与巩固

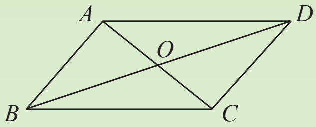
1. 在▱$ABCD$中，$\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数之比为 $7:2$，求 $\angle C$ 与 $\angle D$ 的度数.
2. 如图，在直角坐标系中，▱$ABCD$的顶点 B，C，A 的坐标分别是 $(0,\ 0)$，$(5,\ 0)$，$(2,\ 3)$，求顶点 D 的坐标.
3. 如图，两条平行线 l_1，l_2 被另外一组平行线 l_3，l_4，l_5 所截，交点分别为 A，B，C；D，E，F. 写出图中的相等线段，并证明你的结论.


（第2题）



（第3题）

4. 如图，在▱$ABCD$中，对角线AC和BD交于点O. 在图中共有几对三角形全等？说明理由.



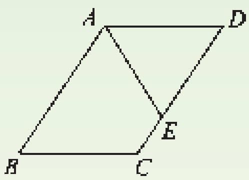
（第4题）

5. 在▱$ABCD$中，对角线交点O到AD的距离与它到BC的距离相等吗？到AB的距离与到CD的距离呢？说明理由.

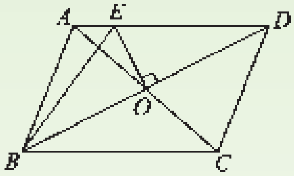
拓展与延伸

6. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线AE交CD于点E，$AB=10$，$BC=6$. 求CE的长.

7. 如图，在▱$ABCD$中，AC，BD相交于点O，过点O作$OE\perp BD$交AD于点E. 求$\triangle ABE$的周长与▱$ABCD$的周长的比.



（第6题）



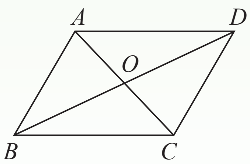
（第7题）

探索与创新

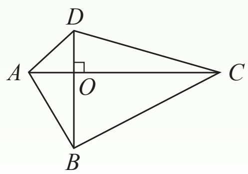
8.（1）如图①，▱$ABCD$的两条对角线的交点为O. 如果$\triangle AOB$，$\triangle BOC$，$\triangle COD$，$\triangle DOA$的面积分别为S_1，S_2，S_3，S_4，试探索S_1，S_2，S_3，S_4的关系；

（2）如果将（1）中的条件“▱$ABCD$”改为“四边形$ABCD$的对角线$AC\perp BD$”（如图②）. 试探索：$S_1:S_2$与$S_4:S_3$之间的关系；

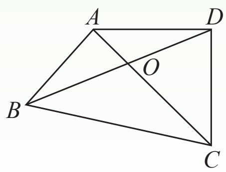
（3）如果将（2）中的对角线$AC\perp BD$的条件去掉（如图③），试探索S_1，S_2，S_3，S_4之间的关系.



①



②



③

（第8题）

6.2　平行四边形的判定

我们已经学习过平行四边形的定义和性质. 怎样判定一个四边形是平行四边形呢? 除了运用平行四边形的定义外，还有其他方法吗?

观察与思考

（1）根据平行四边形的定义，两组对边分别平行的四边形是平行四边形，如果把定义中的“两组对边平行”改为“一组对边平行且相等”，你能画出满足这两个条件的四边形吗?

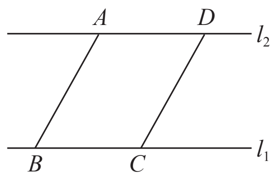


图 6-10

先画出两条平行线 l_1，l_2，然后在 l_1，l_2 上分别截取两条相等线段 $AD = BC$，连接 AB，DC，得到四边形 $ABCD$（图 6-10）.

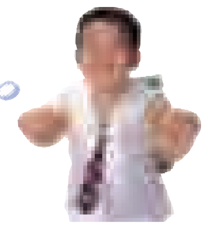
（2）观察你得到的四边形，你猜测它是平行四边形吗?

（3）能证明你的猜测是正确的吗?

已知：如图 6-11，在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD = BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

要判定 $ABCD$ 是平行四边形，只要能根据条件 $AD /\!/ BC$，$AD = BC$ 推出 $AB /\!/ CD$ 就行了.



证明 连接AC.

$\because AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because AD = BC$，$AC = CA$，

$\therefore \triangle CDA \cong \triangle ABC$（SAS）.

$\therefore \angle 3 = \angle 4$.

$\therefore AB /\!/ CD$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

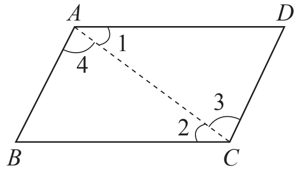


图 6-11

于是，就得到

平行四边形的判定定理 1　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

交流与发现

（1）利用平行四边形的定义，即两组对边的位置关系（分别平行）可以判定四边形是平行四边形. 判定定理 1 是通过一组对边的位置关系（平行）和数量关系（相等），推出另一组对边的平行关系. 能不能通过两组对边分别相等推出其中一组对边平行呢?

（2）任意画一个$\angle B$，在$\angle B$的两边上分别任取两点A，C，以点A为圆心，BC的长为半径作弧，再以点C为圆心，BA的长为半径画弧，记两弧的交点为D，连接AD，CD，便得到四边形$ABCD$（图6-12），且满足$AB = CD$，$AD = BC$. 能判定四边形$ABCD$是平行四边形吗? 如果能，写出证明过程.

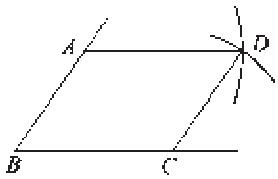


图 6-12

在图6-12中，连接AC，得到$\triangle ABC$与$\triangle CDA$. 由SSS，可证$\triangle ABC \cong \triangle CDA$. 由对应角相等，可证明对边平行.

（3）由（2），你得出什么结论?

平行四边形的判定定理 2　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

（4）想一想，平行四边形的判定定理 2 与平行四边形的性质定理 1 有什么关系?

例1　如图 6−13，E，F，G，H 分别是▱$ABCD$ 的边 AD，AB，BC，CD 上的点，且 $AE = CG$，$BF = DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle A = \angle C$，$AB = CD$.

∵ $BF = DH$，

∴ $AF = CH$.

∵ $AE = CG$，

∴ $\triangle AFE \cong \triangle CHG$（SAS）.

∴ $EF = GH$.

同理，$FG = HE$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形（平行四边形的判定定理 2）.

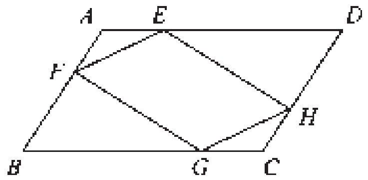


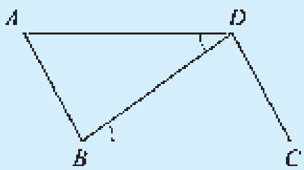
图 6−13

挑战自我

小亮猜测：“在四边形中，能否根据一组对边相等，另一组对边平行，判定这个四边形是平行四边形呢？”小亮的猜测正确吗？如果正确，请给出证明；如果不正确，请举出反例.

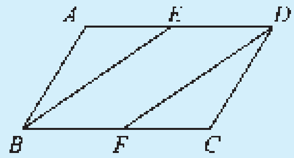
练 习

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADB = \angle CBD$，$\angle ABD = \angle CDB$. 利用三种方法证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第 1 题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AD，BC 的中点. 分别利用判定定理 1 和 2 证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形 .



（第 2 题）

我们已经知道，当四边形的对边满足两个条件（两组对边分别平行或一组对边平行且相等或两组对边分别相等）时，能判定这个四边形是平行四边形. 能通过对角线所满足的条件，判定这个四边形是平行四边形吗?

交流与发现

（1）你能说出 6.1 节中平行四边形的性质定理 3 的逆命题吗?

（2）任意画两条相交直线 l_1，l_2，记它们的交点为 O，在 l_1 上以 O 为中点，截取 $OA = OC$，在 l_2 上以 O 为中点，截取 $OB = OD$（OA 不必等于 OB）. 顺次连接 AB，BC，CD，DA，你得到一个怎样的四边形（图 6-14）?

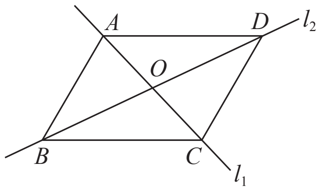
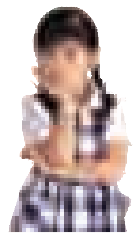


图 6-14

（3）怎样证明你得到的结论?

如图 6-14，已知 $OA = OC$，$OB = OD$，可证 $\triangle AOD \cong \triangle COB$，于是 $AD = BC$，$\angle ADO = \angle OBC$，从而 $AD /\!/ BC$. 故由判定定理 1 可证四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

也可以用判定定理 2 证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .



于是，就得到

平行四边形的判定定理3　对角线互相平分的四边形是平行四边形.

平行四边形的判定定理3是平行四边形性质定理3的逆定理.

例2　如图6−15，在▱$ABCD$中，点E，F是对角线AC上的两点，且$AF=CE$. 求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

证明　连接BD，交AC于点O.

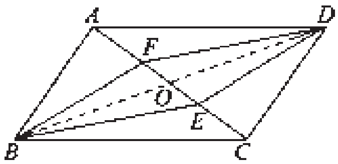


图 6−15

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$OB=OD$.

∵ $AF=CE$，

∴ $OF=OE$.

∴ 四边形$BEDF$是平行四边形（平行四边形的判定定理3）.

对于例2，你还有其他的证明方法吗？

挑战自我

已知四边形$ABCD$的两条对角线相交于点O，且$OA=OC$，$AB=CD$，能判定四边形$ABCD$是平行四边形吗？如果能够判定，写出证明过程，如果不能判定，分析其原因，并举出反例.

智趣园

小亮的证明对吗？

小亮正在研究一个命题：“如果四边形$ABCD$与$BEFC$都是平行四边形，那么四边形$AEFD$也是平行四边形.”

小亮画出了图6−16，并给出了如下的证明.

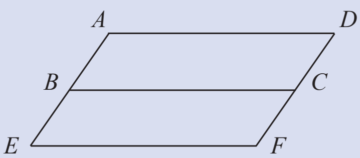


图 6−16

证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB=DC$，　①

$AD=BC$.　②

又 $\because$ 四边形 $BEFC$ 也是平行四边形，

$\therefore$ $BC = EF$，　　　　　　　　　　③

　$BE = CF$.　　　　　　　　　　　④

由②③得　$AD = EF$，

由①④得　$AB + BE = DC + CF$，即　$AE = DF$.

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

你对小亮的证明满意吗？如果你认为有问题，你能指出问题出在哪里吗？

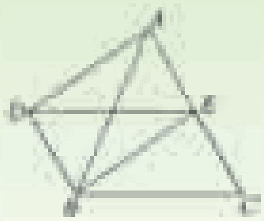
练习

1. 延长 $\triangle ABC$ 的中线 AD 至 E，使 $DE = AD$. 连接 BE，CE . 求证：四边形 $ABEC$ 是平行四边形.
2. 下列命题是真命题吗？如果不是，举出反例；如果是真命题，给出证明.
（1）一组对角相等，一组对边平行的四边形是平行四边形；
（2）对角线相等的四边形是平行四边形；
（3）一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

习题6.2

复习与巩固

1. 求证：两组对角分别相等的四边形是平行四边形 .

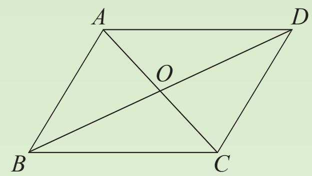


（第 2 题）

2. 如图，$DB /\!/ AC$，$DB = \dfrac{1}{2}AC$，E 是 AC 的中点. 求证：$BC = DE$.

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，且 $AD < BC$，$BC = 6$ cm . 动点 P，Q 分别从点 D，B 同时出发，点 P 以 1 cm/s 的速度向点 A 运动，点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 C 运动. 几秒后四边形 $CDPQ$ 是平行四边形？

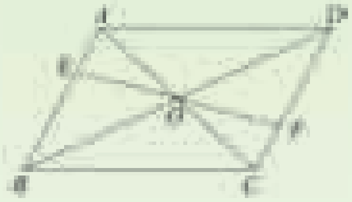
（第 3 题）



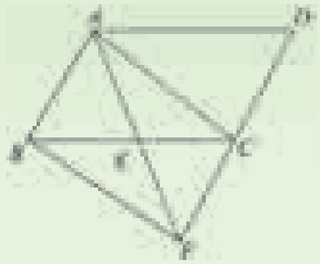
（第 4 题）

4. 如图，已知 $AD /\!/ BC$，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AO = OC$．求证：$AB /\!/ CD$．

5. 如图，$AB /\!/ CD$，AC 与 BD 相交于点 O，过点 O 的直线 EF 分别交 AB，CD 于点 E，F，且 $OE = OF$．求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第 5 题）

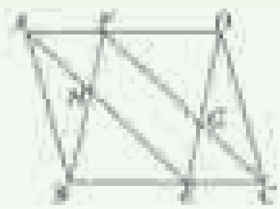


（第 6 题）

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F，连接 BF，AC．求证：四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

拓展与延伸

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别为边 BC，AD 上的点，$AE /\!/ CF$，连接 BF，DE，分别交 CF，AE 于点 G，H. 图中除▱$ABCD$ 外，还有平行四边形吗？证明你的结论.



（第 7 题）

（第 8 题）

8. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 是对角线 AC 上的两点，请添加一个不同于“$AF = CE$”的条件，使四边形 $BEDF$ 是平行四边形，并写出证明的过程.

探索与创新

9. 有一组对边相等、一组对角相等的四边形是平行四边形吗？如果是，请给出证明；如果不是，举出反例.

10. 在四边形$ABCD$中，将下列条件中的哪两个条件组合，可以判定它是平行四边形？

（1）$AB\parallel CD$；（2）$BC\parallel AD$；（3）$AB=CD$；

（4）$BC=AD$；（5）$\angle A=\angle C$；（6）$\angle B=\angle D$.

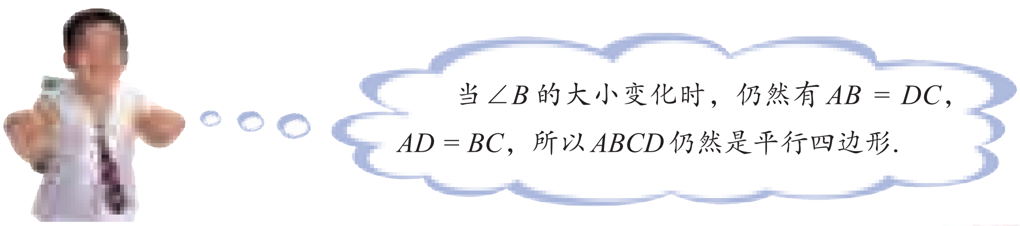
6.3 特殊的平行四边形

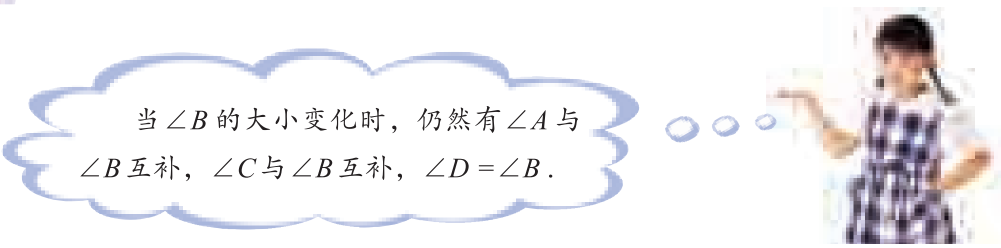
实验与探究

（1）你还记得四边形的不稳定性吗？

（2）如图6-17①，做一个平行四边形的框架，记作▱$ABCD$，固定它的四条边的长度. 如果改变其中一个内角（例如$\angle B$）的大小，所得到的四边形还是平行四边形吗？为什么？

（3）当$\angle B$的大小变化时，其他三个内角的大小是否也发生变化？如果发生变化，它们与$\angle B$之间保持怎样的数量关系？





（4）当平行四边形的一个角（例如$\angle B$）成为直角时，得到一个怎样的图形（图6-17②）？

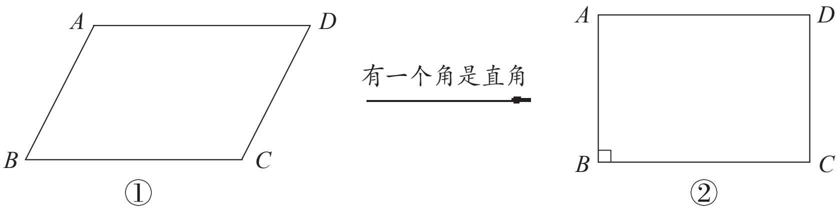
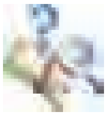


图 6-17

有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle）.

矩形，即我们所熟悉的长方形，是生活中常见的一种特殊的平行四边形.



观察与思考

矩形具有平行四边形的所有性质．此外，矩形还具有哪些特殊性质呢？

（1）取一张矩形的纸片，分别沿它的两组对边的中点所在的直线折叠，你发现矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴（图6-18）？

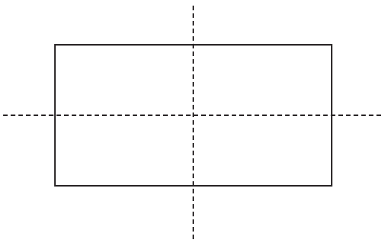
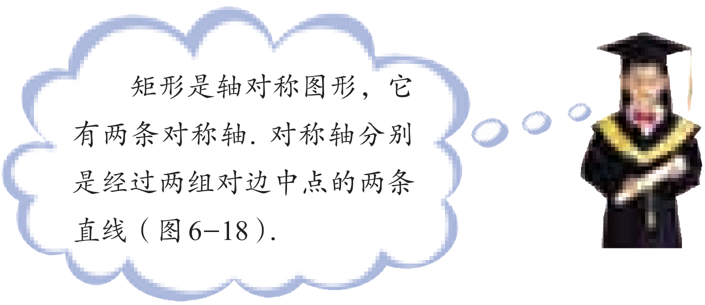


图 6-18



（2）利用矩形的轴对称性质，由矩形的一个角是直角，你发现矩形的另外三个角有什么性质？证明你的结论.

矩形的性质定理1　矩形的四个角都是直角.

（3）任意画一个矩形，作出它的两条对角线，并比较它们的长. 你有什么发现？

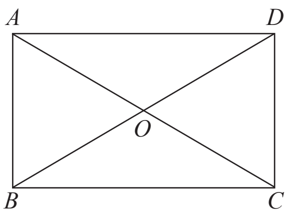


图 6-19

已知：如图6-19，四边形$ABCD$是矩形．

求证：$AC = DB$．

证明　$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90°$（矩形的性质定理1）.

$\because AB = CD$（平行四边形的对边相等），

$BC = CB$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$（SAS）.

$\therefore AC = DB$.

于是，就得到

矩形的性质定理 2　矩形的对角线相等.

（4）如图 6−19，矩形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O，沿对角线 AC 将矩形剪开，得到 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$. 这时，OB 是这个直角三角形的一条什么线段？它与斜边 AC 之间有怎样的数量关系？由此你发现了直角三角形的一个怎样的性质？能证明你得到的命题是真命题吗？

直角三角形的性质定理 2　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

已知：如图 6−20，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，O 是 AC 的中点.

求证：$BO = \frac{1}{2}AC$.

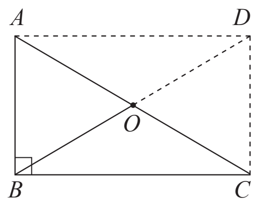


图 6−20

证明　延长 BO 到 D，使 $OD = BO$，连接 AD，CD（图6−20），在四边形 $ABCD$ 中，

$\because AO = OC$，$BO = OD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because \angle ABC = 90°$，

$\therefore ▱ABCD$ 是矩形.

$\therefore AC = BD$.

$\because BO = \frac{1}{2}BD$，

$\therefore BO = \frac{1}{2}AC$.

例1　如图 6−21，在矩形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$\angle BOC = 120°$，$AB = 6\text{ cm}$. 求 AC 的长.

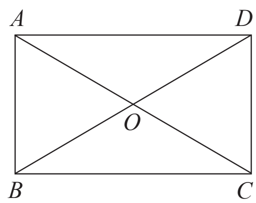


图 6−21

解　$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD$，且 $OA = OC = \frac{1}{2}AC$，$OB = OD = \frac{1}{2}BD$，

$\therefore\ OA = OB$.

$\because\ \angle BOC = 120°$,

$\therefore\ \angle AOB = 60°$.

$\therefore\ \triangle AOB$是等边三角形.

$\because\ AB = 6$ cm，$AO = AB = 6$ cm .

$\therefore\ AC = 2AO = 12$ cm .

所以，AC的长为12 cm .

对于例1，你还有其他的解法吗?

挑战自我

木杆AB斜靠在墙壁上（图6−22），当木杆的上端A沿墙壁NO竖直下滑时，木杆AB的中点P也随之下落. 你能在图上画出点P下落的路线吗?

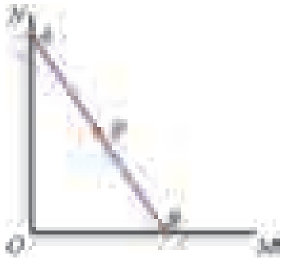
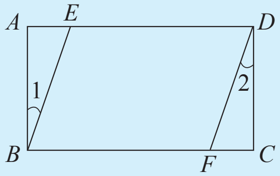


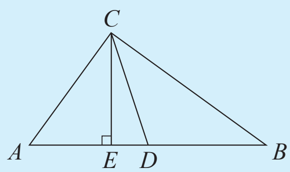
图 6−22

练　习

1. 如图，在矩形$ABCD$中，E，F分别是AD，BC上的点，在下列三个条件：① $AE = CF$；② $BE /\!/ DF$；③ $\angle 1 = \angle 2$中，选择其中一个，求证：$BE = DF$.
2. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，CD是斜边AB的中线，CE是高. 求证：$\angle ACE = \angle BCD$.



（第1题）

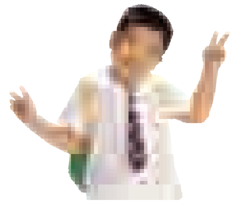


（第2题）

交流与发现

（1）根据矩形的定义，有一个角是直角的平行四边形是矩形. 如果不通过平行四边形，能根据四边形中直角的个数，直接由四边形来判定它是矩形吗? 有几个角是直角的四边形是矩形呢?

矩形的四个角都是直角. 反过来，四个角都是直角的四边形是矩形.



（2）小亮说得对吗？能证明他的结论吗？

（3）小莹说：“由于四边形的内角和等于360°，因而四个内角中只要有三个角是直角，第四个内角也一定是直角. 所以可以减少一个条件，有三个角是直角的四边形就是矩形.”小莹的说法正确吗？

已知：如图6−23，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=90°$.

求证：四边形$ABCD$是矩形.

图6−23

证明　$\because \angle A=\angle B=\angle C=90°$，

$\therefore \angle A+\angle B=180°$，

$\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because \angle A=90°$，

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是矩形.

（4）比较上面（2）（3）中小亮和小莹的两种说法，你认为选择哪种说法作为矩形的判定定理更为简洁？

于是，便得到

矩形的判定定理1　有三个角是直角的四边形是矩形.

（5）由矩形的性质定理2：矩形的两条对角线相等. 反过来，两条对角线相等的四边形是矩形吗？

如图6−24，我画了两条等长的相交线段 AC 与 BD，顺次连接点 A，B，C，D，得到的四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，也就不可能是矩形. 所以，“两条对角线相等的四边形是矩形”不是真命题.

（6）如果适当加强命题“两条对角线相等的四边形是矩形”的条件，能使它成为真命题吗？

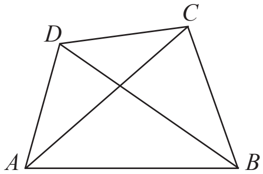
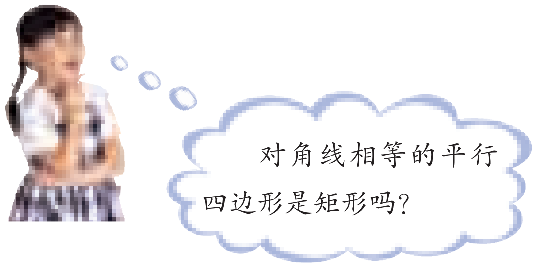


图 6–24



加油站

在探索新的数学命题时，如果命题的条件不能保证结论成立，可以尝试适当加强命题的条件，以便使结论成立．

已知：如图6–25，在▱$ABCD$中，$AC=BD$．

求证：▱$ABCD$是矩形.

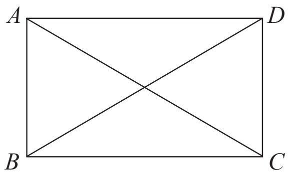


图 6–25

证明　∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB=CD$．

又 ∵ $AC=BD$，　$BC=CB$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$．

∴ $\angle ABC=\angle DCB$．

∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle ABC+\angle DCB=180°$．

∴ $\angle ABC=\dfrac{180°}{2}=90°$．

∴ ▱$ABCD$是矩形．

于是，就得到

矩形的判定定理 2　对角线相等的平行四边形是矩形.

挑战自我

在问题（6）中，除了小莹的说法外，你还能适当加强其他的条件，使它成为真命题吗？

练习

1. 在四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 交于点 O. 在下列各组条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是（　　）.

（A）$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$

（B）$AO=CO$，$BO=DO$，$\angle BAD=90°$

（C）$\angle BAD=\angle BCD$，$\angle ABC+\angle BCD=180°$，$AC\perp BD$

（D）$\angle BAD=\angle ABC=90°$，$AC=BD$

2. 要检验一个四边形的桌面是不是矩形，你能想出哪些方法？

交流与发现

（1）剪一张平行四边形纸片，比较它的一组邻边，如果它们不相等，你能在这张纸片上剪下一刀，得到一个有一组邻边相等的平行四边形吗？

平行四边形　　菱形

图 6–26

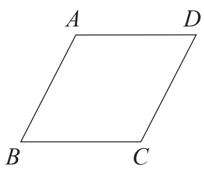


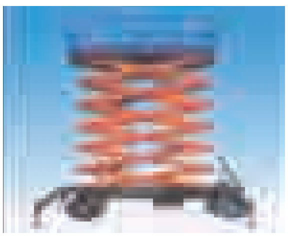
图 6–27

有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

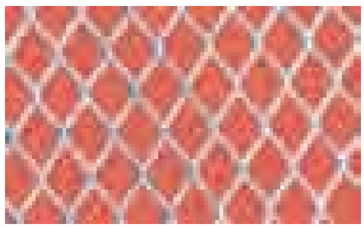
例如，图 6–27 中的 ▱$ABCD$，$AB=AD$，记作“菱形 $ABCD$”.

（2）菱形也是一种常见的特殊平行四边形. 除下面的一组实例外，你还能举出生活中见到的菱形的实例吗？

活动衣架



起重架



隔离网

图 6–28

实验与探究

菱形具有平行四边形的所有性质. 此外，菱形还具有哪些特殊性质呢？

（1）观察图 6-29，菱形是轴对称图形吗？请利用实验的方法得出结论. 如果是，它有几条对称轴？与同学交流.

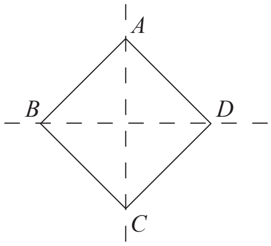
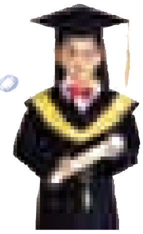


图 6-29

如图 6-29，菱形是轴对称图形，它有两条对称轴. 对称轴是分别经过两组对角顶点的两条直线.

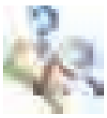


（2）观察图 6-29，根据菱形的轴对称性，你发现菱形的四条边具有什么大小关系？菱形的两条对角线 AC 与 BD 之间具有什么位置关系？

（3）你能运用菱形的定义及平行四边形的性质，证明你得到的命题是真命题吗？与同学交流 .

菱形的性质定理 1　菱形的四条边都相等.

菱形的性质定理 2　菱形的对角线互相垂直.

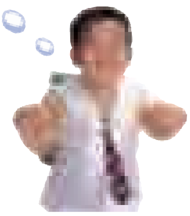


观察与思考

利用菱形的性质定理的逆命题能探索菱形的判定定理吗？

怎样判定一个四边形是菱形？

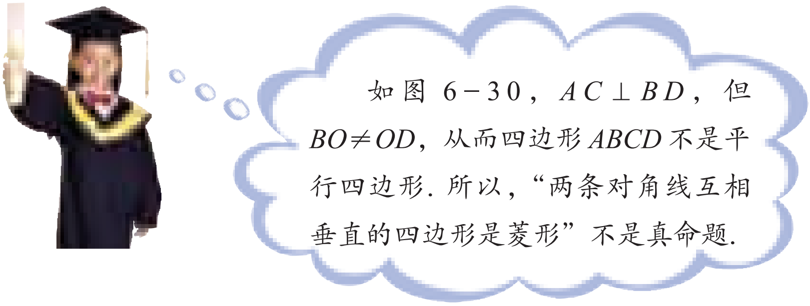
（1）由菱形的性质定理 1：菱形的四条边都相等. 反过来，四条边都相等的四边形是菱形吗？证明你的结论？



由两组对边分别相等可以判定它是平行四边形，再根据一组邻边相等，便可证明它是菱形.

菱形的判定定理 1　四条边相等的四边形是菱形．

（2）由菱形的性质定理 2：菱形的两条对角线互相垂直．反过来，两条对角线互相垂直的四边形是菱形吗？



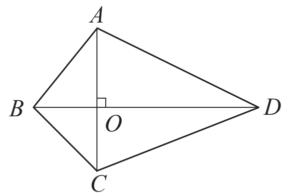


图 6−30

（3）怎样适当加强命题“两条对角线互相垂直的四边形是菱形”的条件，使它成为真命题？与同学交流．

已知：如图 6−31，在▱$ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，$AC \perp BD$．

求证：▱$ABCD$ 是菱形．

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BO = OD$．

∵ $AC \perp BD$，

∴ AC 是线段 BD 的垂直平分线．

∴ $AB = AD$（线段垂直平分线的性质）．

∴ ▱$ABCD$ 是菱形（菱形的定义）．

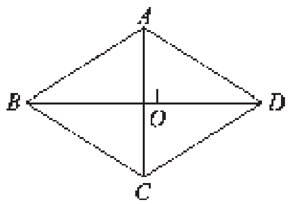


图 6−31

于是，就得到

菱形的判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

想一想，两条对角线互相垂直且平分的四边形是菱形吗？为什么？

挑战自我

取一张矩形纸片，你能利用折叠的方式，折出一个四个顶点都在矩形边上的菱形吗？你有几种不同的折法？画出图形，说明折出的图形是菱形，并比较用不同的折纸方法折出的菱形的面积．

练 习

1. 菱形的两条对角线的长分别为 a，b，面积为 S. 求证：菱形的面积为 $S=\frac{1}{2}ab$.

2. 在菱形 $ABCD$ 中，已知 $\angle BAD=120°$，$AE\perp BC$，垂足为 E. 求证：E 是 BC 的中点.

观察与思考

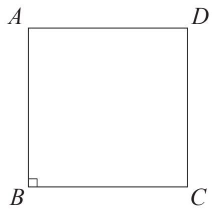


图 6−32

（1）图 6−32 是你早已认识的正方形. 它是平行四边形吗？你能说出具有什么特征的平行四边形是正方形吗？

有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**（square）.

（2）由正方形的定义可以知道，正方形既是有一组邻边相等的矩形，又是有一个角是直角的菱形（图 6−33），所以正方形具有矩形和菱形的一切性质. 你能说出这些性质吗？

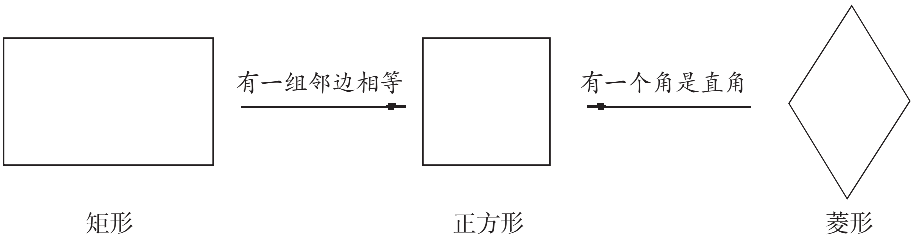


图 6−33

（3）正方形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

（4）怎样判定一个四边形是正方形？与同学交流 .

例2　如图 6−34，点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点，$PM\perp BC$，$PN\perp CD$，垂足分别为点 M，N . 求证：$AP=MN$.

证明　连接 PC .

$\because$ 正方形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BCD=90°$.

$\because PM \perp BC$，$PN \perp CD$，

$\therefore \angle PMC = 90^\circ$，$\angle PNC = 90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 是矩形.

$\therefore PC = MN$.

连接 AC，交 BD 于点 O.

$\because BD \perp AC$，$AO = OC$.

$\therefore BD$ 是 AC 的垂直平分线.

$\therefore AP = PC$.

$\therefore AP = MN$.

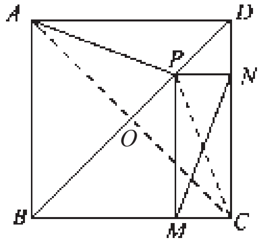


图 6-34

挑战自我

如图 6-35，P 是正方形 $ABCD$ 内的一点，$\triangle PBC$ 为等边三角形，连接 PA，PD. 探索 $\triangle PAD$ 的形状，并求 $\triangle PAD$ 各角的大小.

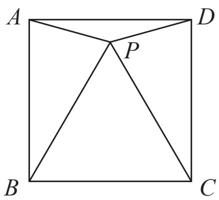


图 6-35

练 习

1. 选择题：在四边形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线的交点. 在下列条件中，能判定这个四边形为正方形的是（　　）.

（A）$AC = BD$，$AB /\!/ CD$　　（B）$AD /\!/ BC$，$\angle A = \angle C$

（C）$OA = OB = OC = OD$，$AC \perp BD$　　（D）$OA = OC$，$OB = OD$，$AB = BC$

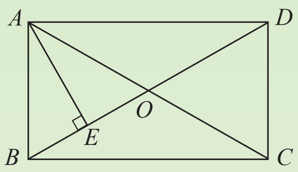
2. 在正方形 $ABCD$ 中，BD 的长为 20 cm，点 P 是边 AB 上任意一点. 求点 P 到 AC 与 BD 的距离之和.

习题6.3

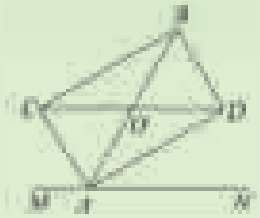
复习与巩固

1. 在矩形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$\angle AOB = 2\angle BOC$，$AC = 18$ cm. 求 AD 的长.

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$，垂足为 E，$\angle DAE=2\angle BAE$，求证：$DE=3BE$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在直线 MN 上和直线 MN 外分别任取点 A，B，过线段 AB 的中点 O 作 $CD\parallel MN$，分别与 $\angle MAB$ 与 $\angle NAB$ 的平分线相交于点 C，D . 求证：四边形 $ACBD$ 是矩形.

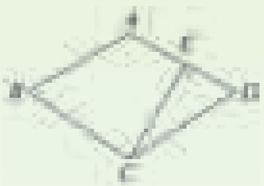
4. 求证：平行四边形的各内角的平分线的交点是一个矩形的四个顶点.

5. 求证：有一条对角线平分一个内角的平行四边形是菱形.

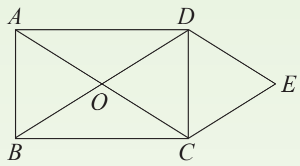
6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$CE\perp AD$，垂足为 E，如果 $AE=DE$. 求菱形各个角的度数.

7. 如图，O 是矩形 $ABCD$ 的对角线交点，$DE\parallel AC$，$CE\parallel BD$. 求证：四边形 $OCED$ 是菱形.

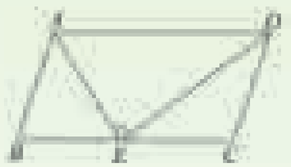
8. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，$DE\perp AE$. 求证：$AD=2AB$.



（第 6 题）

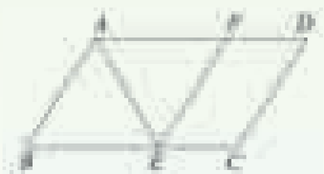


（第 7 题）

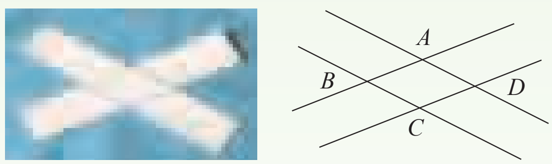


（第 8 题）

9. 如图，在▱$ABCD$ 中，AE 平分 $\angle BAD$，$EF\parallel AB$，交 AD 于点 F . 求证：四边形 $ABEF$ 是菱形.



（第 9 题）

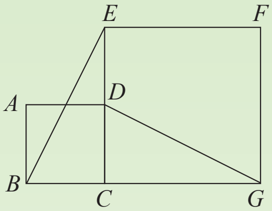


（第 10 题）

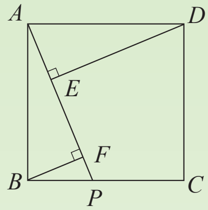
10. 如图，将宽度为 1 cm 的两张纸条交叉重叠在一起，重叠的部分组成了四边形 $ABCD$. 四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？

11. 如果矩形的一条对角线上任意一点到另一条对角线两端的距离相等，求证：该矩形是正方形.

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $ECGF$ 的边 CE 上，连接 BE，DG，求证：$BE = DG$.



（第 12 题）



（第 13 题）

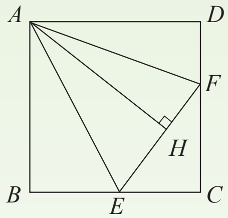
13. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的任意一点，连接 AP，作 $DE \perp AP$，垂足是 E，$BF \perp AP$，垂足是 F．求证：$DE = BF + EF$.

拓展与延伸

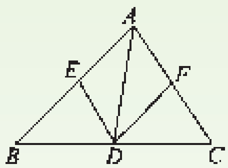
14. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上移动，但点 A 到 EF 的距离 AH 始终保持与 AB 的长相等. 在 E，F 移动过程中：

（1）$\angle EAF$ 的大小是否发生变化？请说明理由；

（2）$\triangle ECF$ 的周长是否发生变化？请说明理由.



（第 14 题）



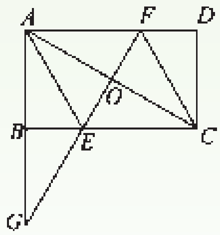
（第 15 题）

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$DE /\!/ AC$ 交 AB 于点 E，$DF /\!/ AB$ 交 AC 于点 F.

（1）判定四边形 $AEDF$ 的形状，并证明你的结论；

（2）当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 是正方形？为什么？

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 O 是 AC 的中点，$AC = 2AB$，延长 AB 至 G，使 $BG = AB$，连接 GO 交 BC 于点 E，延长 GO 交 AD 于点 F. 判定四边形 $AECF$ 的形状，并证明你的结论.



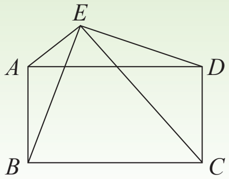
（第 16 题）

探索与创新

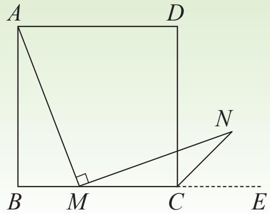
17. 如图，E 为 $\square ABCD$ 外一点，$AE \perp EC$，$BE \perp ED$，求证：$\square ABCD$ 为矩形.

18. 如图，已知 M 在正方形 $ABCD$ 的一边 BC 上，连接 AM，并过点 M 作 $MN \perp AM$，交正

方形 $ABCD$ 的外角 $\angle DCE$ 的平分线于点 N. 求证：$AM=MN$.



（第 17 题）



（第 18 题）

6.4　三角形的中位线定理

实验与探究

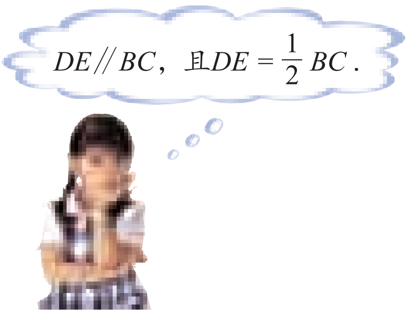
（1）任意画一个三角形 ABC，分别作出边 AB，AC 的中点 D，E，连接 DE（图 6−36）.

连接三角形两边中点的线段，叫做**三角形的中位线**.

画一画，三角形有几条中位线？

（2）如图 6−36，把△ABC 沿中位线 DE 剪开，得到△ADE 和四边形 $BCED$. 将△ADE 按图 6−37 的方式放置，使点 A 与 C 重合，AE 与 CE 重合. 你拼出了一个什么图形？说明你的理由.

（3）利用拼出的图形，你发现中位线 DE 与底边 BC 有怎样的位置关系？有怎样的数量关系？



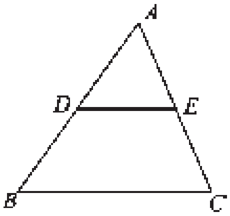


图 6−36

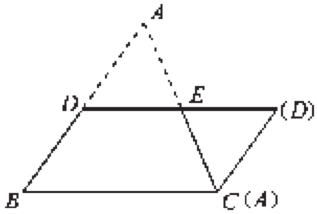


图 6−37

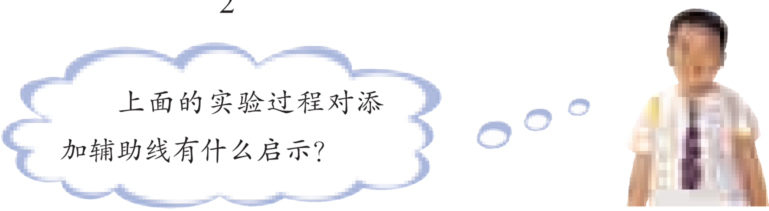
（4）对于△ABC 其他的两条中位线，你也能得到同样的结论吗？

（5）由（3）（4），你发现三角形的中位线与第三边之间有怎样的位置关系

和数量关系？如何证明你的结论？

已知：如图6–37，在△ABC中，$AD=DB$，$AE=EC$.

求证：$DE\parallel BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$.



证明　延长DE至F，使$EF=DE$，连接CF（图6–38）.

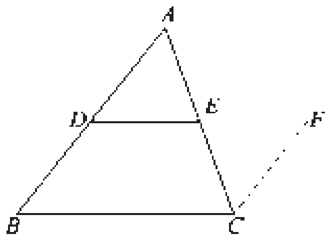


图 6–38

∵ $AE=CE$，$\angle AED=\angle CEF$，

∴ $\triangle ADE\cong\triangle CFE$（SAS）.

∴ $AD=CF$，$\angle A=\angle FCE$.

∵ $AD=BD$，

∴ $BD=CF$，且$BD\parallel CF$.

∴ 四边形$BCFD$是平行四边形（平行四边形的判定定理1）.

∴ $DF\parallel BC$，$DF=BC$.

又∵ $DE=\dfrac{1}{2}DF$，

∴ $DE=\dfrac{1}{2}BC$.

于是，就得到

三角形的中位线定理　三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

例1　如图6–39，点E，F，G，H分别是四边形$ABCD$的边AB，BC，CD，DA的中点．求证：四边形$EFGH$是平行四边形.

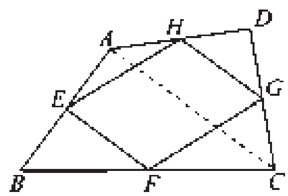


图 6–39

解　连接AC.在△ABC中，

∵ 点E，F分别是边AB，BC的中点，

∴ $EF\parallel AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$（三角形的中位线定理）.

同理 $GH /\!/ AC$，$GH=\dfrac{1}{2}AC$.

$\therefore EF /\!/ GH$，且 $EF=GH$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形（平行四边形的判定定理1）.

挑战自我

如图6−40，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，D 为 AB 的中点，E 为 AC 的中点，延长 BC 至 F，使 $CF=\dfrac{1}{2}BC$，连接 EF，$\angle B=\angle F$ 吗？试至少用两种方法证明你的结论.

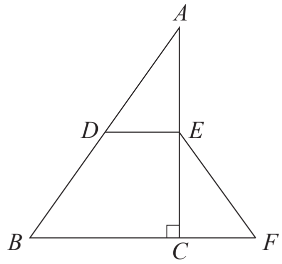


图 6−40

智趣园

四边形的分割与拼接

如图6−41①，有一块四边形的木板，能通过分割和拼接把这块木板的形状变成平行四边形吗？

设这块四边形木板的顶点依次为 A，B，C，D，分别取四边形 $ABCD$ 各边的中点 E，F，G，H，分别连接 EG，FH 记它们的交点为 O（图6−41②）.

线段 EG 与 FH 互相平分吗？为什么？

沿着 EG 和 FH 把木板 $ABCD$ 锯开，得到4个小四边形，将小四边形的顶点 A，B，C，D 拼在一起，使 AE 与 BE 重合，BF 与 CF 重合，CG 与 DG 重合，DH 与 AH 重合，4个小四边形就拼成 ▱$O_1O_2O_3O_4$ 了（图6−41③）. 你能用剪纸的方法进行模拟实验吗？你能证明你的结论吗？

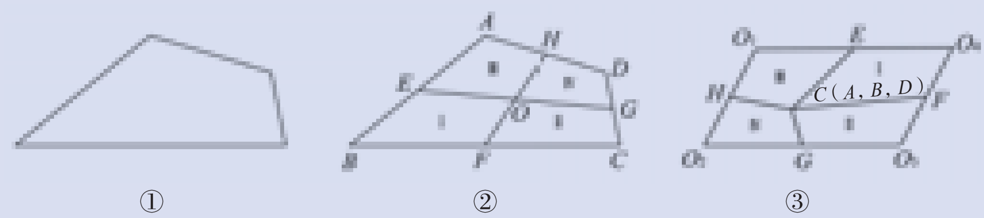


图 6−41

练 习

1. 已知三角形的各边长分别为 8 cm，10 cm 和 12 cm，求连接三角形各边中点所得到的三角形的周长.

2. 顺次连接矩形各边的中点，得到一个怎样的图形？顺次连接菱形各边的中点呢？证明你的结论 .

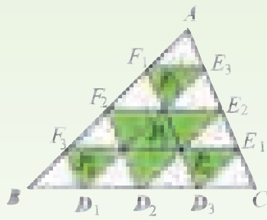
习题6.4

复习与巩固

1. 顺次连接下列四边形各边的中点，得到一个怎样的图形？证明你的结论.
   （1）对角线互相垂直的四边形；
   （2）平行四边形；
   （3）正方形.
2. 求证：三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.
3. 在△ABC 中，D 是边 AB 的中点，$DE/\!/BC$ 交 AC 于点 E . 求证：$AE=CE$.

拓展与延伸

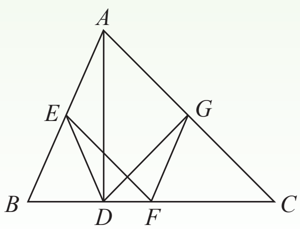
4. 点 D，E 分别是△ABC 的边 AB，AC 的中点. 求△ADE 与△ABC 的面积之比.
5. 如图，在△ABC 中，D_1，D_2，D_3 是边 BC 的四等分点，E_1，E_2，E_3 是边 AC 的四等分点，F_1，F_2，F_3 是边 AB 的四等分点，△ABC 的面积为 1. 求四个阴影三角形 P_1，P_2，P_3，P_4 的面积之和.



（第 5 题）

探索与创新

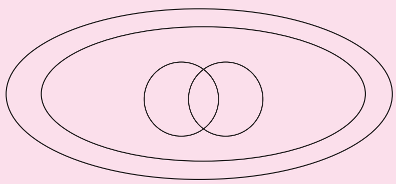
6. 在△ABC 中，AB，BC，CA 的中点分别是 E，F，G，AD 是高. 求证：$\angle EDG=\angle EFG$.



（第 6 题）

回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.
2. 平行四边形是特殊的四边形，矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形. 其中，正方形既是特殊的矩形，也是特殊的菱形. 请按照它们的包含

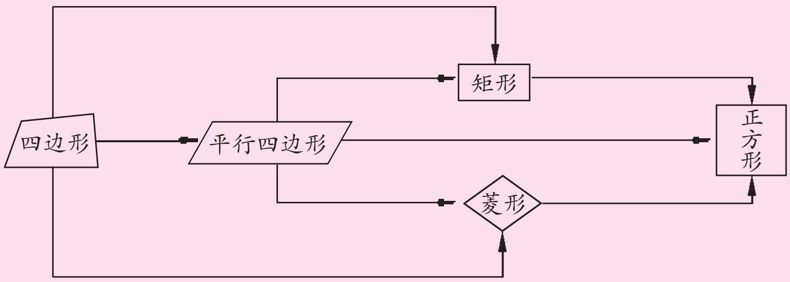


关系在上图中适当的空白处分别填上它们的名称 .

3. 把平行四边形、矩形、菱形、正方形的定义和性质分别填入下表：

图形	定　义	性质			
		边	角	对角线	对称性
平行四边形					
矩　形					
菱　形					
正方形					

4. 结合下图说出各种特殊四边形的判定定理，并在“→”的上方写出相应判定定理的要点.



5. 在本章中，哪些判定定理可由性质定理的逆命题得到？对此你有什么体会？

6. 特殊四边形的定义性质及其判定，既是本章研究的重要内容，也是今后用来证明两角相等、两线段相等、两直线平行或垂直的重要依据. 就这类问题，谈谈你学习的心得和感受.

7. 直角三角形斜边上的中线的性质定理是如何得到的？这个定理能够帮你解决哪些问题？

8. 三角形的中位线定理是什么？这个定理能够帮你解决哪些问题？

9. 在解决几何问题时，经常根据需要添加辅助线. 结合本章学习内容说说你在解决问题时添加辅助线的体会 .

综合练习

复习与巩固

1. 选择题

（1）在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$. 要判定 $ABCD$ 是平行四边形，还需要添加的条件是（　　）.

（A）$\angle A+\angle C=180°$　　（B）$\angle B+\angle D=180°$

（C）$\angle A+\angle B=180°$　　（D）$\angle A+\angle D=180°$

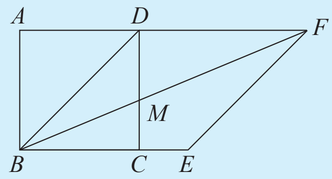
（2）以长度分别为 5 cm，4 cm，7 cm 的三条线段中的两条为边，以另一条线段为对角线画平行四边形，可以画出形状不同的平行四边形的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 是菱形 $BEFD$ 的一边，菱形 $BEFD$ 的对角线 BF 交正方形 $ABCD$ 的一边 CD 于点 M，$\angle FMC$ 的度数是（　　）.

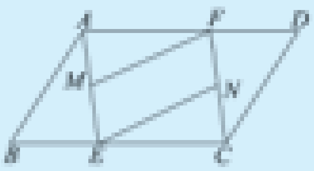
（A）135°　　（B）120°

（C）112.5°　　（D）67.5°

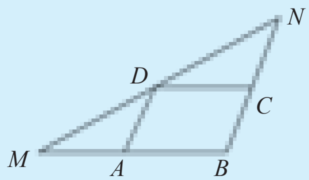


（第 1（3）题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，AD 上，$BE = DF$，点 M，N 分别是 AE，CF 的中点．求证：四边形 $MENF$ 是平行四边形.



（第 2 题）



（第 3 题）

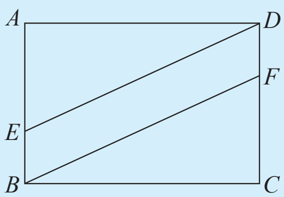
3. 如图，在△NMB 中，$BM = 6$，点 A，C，D 分别在边 MB，BN，MN 上，$DA /\!/ NB$，$DC /\!/ MB$，$\angle NDC = \angle MDA$．求四边形 $ABCD$ 的周长.

4. 分别以矩形 $ABCD$ 的边 AD 和 CD 为一边，向矩形外作正三角形 ADE 和正三角形 CDF，连接 BE 和 BF．求证：$BE = BF$.

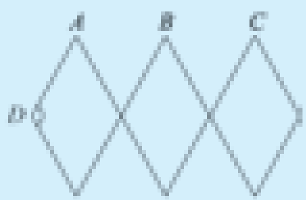
5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 AB，DC 上，$BF /\!/ DE$，$AD = 12$ cm，$AB = 7$ cm，且 $AE : EB = 5 : 2$．求四边形 $BFDE$ 的面积.

6. 如图是一个边长为18 cm 的菱形活动衣架. 当 A，B 之间的距离为18 cm 时，求 $\angle D$ 的度数.

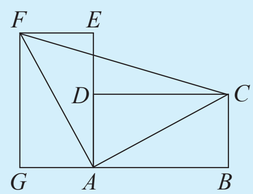
7. 如图，把大小相同的两块矩形铁板焊接成“L”型工件，求图中 $\angle FAC$ 和 $\angle FCA$ 的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）



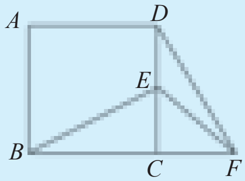
（第 7 题）

8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为边 CD 上的一点，F 为边 BC 延长线上的一点，$CE = CF$.

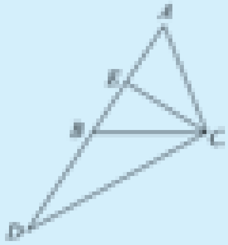
（1）求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$；

（2）已知$\angle BEC = 60°$，求$\angle EFD$的度数.

9. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，延长AB到D，使$BD = AB$，E是AB的中点. 求证：$CD = 2CE$.



（第8题）

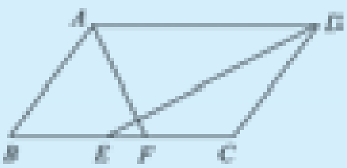


（第9题）

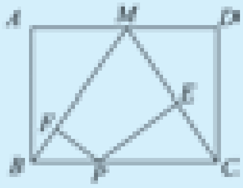
10. 有一块形状为平行四边形的铁片$ABCD$，其相邻两边之比为$AD:AB = 1:2$. 能从这块铁片上截下一个以AB为斜边、直角顶点在CD上的直角三角形吗？如果能，应当怎样截取？证明你的结论.

拓展与延伸

11. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle BAD$与$\angle ADC$的平分线分别交BC于点F与E. 求证：$BE = FC$.



（第11题）



（第12题）

12. 如图，在矩形$ABCD$中，点M是边AD的中点，点P是边BC上的动点，$PE \perp MC$，$PF \perp BM$，垂足分别为点E，F.

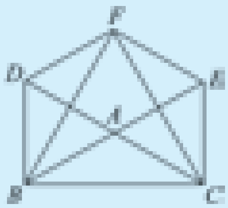
（1）当矩形$ABCD$的长与宽满足什么条件时，四边形$PEMF$为矩形？证明你的结论；

（2）如果四边形$PEMF$为矩形，那么当点P运动到什么位置时，矩形$PEMF$变为正方形？能证明你的猜想吗？

13. 如图，在$\triangle ABC$中，分别以AB，AC，BC为一边，在BC的同侧作等边三角形ABD，ACE，BCF.

（1）求证：四边形$DAEF$是平行四边形；

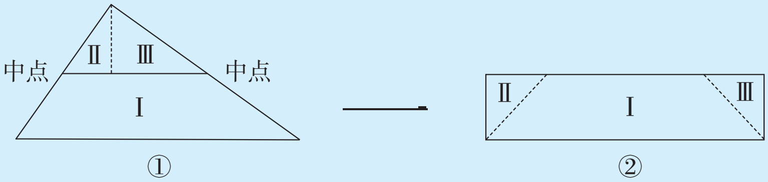
（2）当$\triangle ABC$满足什么条件时，四边形$DAEF$是矩形？是菱形？是正方形？



（第13题）

探索与创新

14. 一个三角形纸片经过适当分割和拼接，可以将这个三角形变成一个面积相等的矩形．剪切与拼接方法如图①所示．你能证明图②是矩形吗？

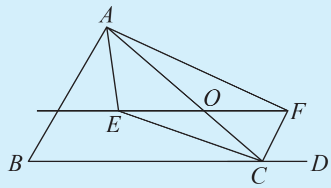


（第 14 题）

15. 如图，在△ABC 中，O 是 AC 边上一点，过点 O 作 BC 的平行线，交∠BCA 的平分线于点 E，交外角∠ACD 的平分线于点 F.

（1）求证：$EO = OF$；

（2）连接 AE，AF，当点 O 沿 AC 移动时，四边形 $AECF$ 是否能成为一个矩形？此时，点 O 在什么位置？说明理由.

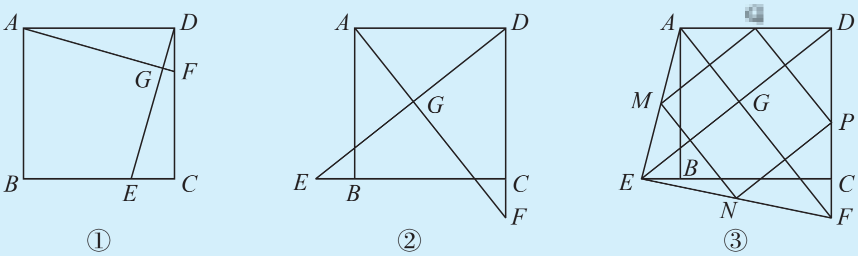


（第 15 题）

16.（1）如图①，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是边BC，CD 上的点，$BE = CF$，AF，DE 交于点 G．求证：$AF \perp DE$ 且 $AF = DE$；

（2）点 E，F 分别在边 CB，DC 的延长线上，且 $BE = CF$．（1）中结论是否也成立？如果成立，请写出证明；如果不成立，请写出理由；

（3）在（2）的基础上，连接 AE，EF，分别取 AE，EF，FD，AD 的中点 M，N，P，Q，请判断四边形 $MNPQ$ 的形状，并写出证明.



（第 16 题）

第 7 章　实　数

内容提要

- 算术平方根
- 勾股定理
- $\sqrt{2}$ 是有理数吗
- 勾股定理的逆定理
- 平方根
- 立方根
- 用计算器求平方根和立方根
- 实　数

情境导航

2002 年 8 月 20 日～8 月 28 日，第 24 届国际数学家大会在北京召开，大会的会标取材于我国古代数学家赵爽（3 世纪初）的“弦图”.

（1）它是由哪些图形拼接而成的?

（2）如果弦图中直角三角形的两条直角边的长分别是 a 和 b，斜边长是 c，如何通过弦图中各图形面积间的关系推导 a，b，c 之间的数量关系?

（3）如果一个直角三角形的两条直角边的长分别是 2 和 3，你能根据（2）中的结论求出直角三角形的斜边长吗？它是一个有理数吗?

ICM 2002

Beijing

August 20-28, 2002

7.1　算术平方根

已知正方形的边长，利用平方运算，便可计算出它的面积. 反之，如果知道正方形的面积，如何求它的边长呢？

观察与思考

（1）一个正方形的面积是4，它的边长是多少？

（2）一个正方形的面积是9，它的边长是多少？

（3）一个正数的平方是16，这个数是多少？

你是怎样求出来的？与同学交流.

一般地，如果一个正数x的平方等于a，即$x^2=a$，那么这个正数x叫做**a的算术平方根**，记作“$\sqrt{a}$”，读作“根号a”.

例如，在上面的问题（1）中，因为$2^2=4$，所以4的算术平方根是2，记作$\sqrt{4}=2$. 类似地，你能表示出上面问题（2）与（3）中9和16的算术平方根吗？

特别地，规定**0的算术平方根是0**，即$\sqrt{0}=0$.

（4）如果将算术平方根定义中的等式$x^2=a$左边的x，换成$\sqrt{a}$，你能得到一个怎样的等式？

$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.

这个等式的几何意义如图7-1所示.

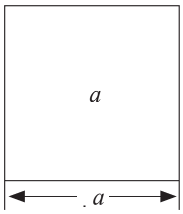
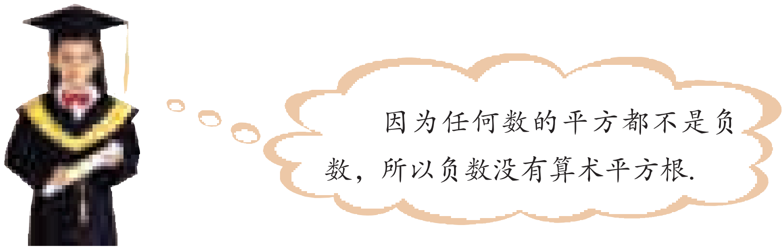


图7-1

（5）想一想，为什么上面的式子中要注明$a\geqslant 0$？



例1 求下列各数的算术平方根：

（1）49；　（2）100；　（3）$\frac{9}{16}$；　（4）0.64．

解 （1）$\because\ 7^2=49$，

$\therefore$ 49的算术平方根是7，即$\sqrt{49}=7$；

（2）$\because\ 10^2=100$，

$\therefore$ 100的算术平方根是10，即$\sqrt{100}=10$；

（3）$\because\ \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，

$\therefore$ $\frac{9}{16}$的算术平方根是$\frac{3}{4}$，即$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$；

（4）$\because\ 0.8^2=0.64$，

$\therefore$ 0.64的算术平方根是0.8，即$\sqrt{0.64}=0.8$．

例2 铺一间面积为60 m^2的教室的地面，需用大小完全相同的240块正方形地板砖．每块地板砖的边长是多少？

解 设每块地板砖的边长为x m．由题意，得

$240x^2=60$，即$x^2=0.25$．

于是　$x=\sqrt{0.25}=0.5$．

所以，每块地板砖的边长是0.5 m．

练 习

1. 求下列各数的算术平方根：

（1）36；　（2）0；　（3）1；　（4）$\frac{1}{9}$；　（5）$\frac{16}{25}$；　（6）$(-0.3)^2$.

2. 一个正方形运动场地的面积是625 m^2，它的边长是多少？

习题7.1

复习与巩固

1. 填表：

a	121			196	225			324	361	
$\sqrt{a}$		12	13			16	17			20

2. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt{144}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{25}{49}}$；

（3）$\sqrt{10\,000}$；　　（4）$\sqrt{0.004\,9}$.

3. 下面的说法正确吗？为什么？

（1）5是25的算术平方根；

（2）9是3的算术平方根；

（3）6是$\sqrt{36}$的算术平方根；

（4）-1是1的算术平方根.

4. 计算：

（1）$(\sqrt{4})^2$；　　（2）$\left(\sqrt{\dfrac{81}{100}}\right)^2$.

拓展与延伸

5. 如果一个数的算术平方根等于它本身，这个数是多少？

6. 回答下列问题：

（1）5^2的算术平方根是什么？

（2）$(-5)^2$有没有算术平方根？如果没有，说明理由；如果有，写出它的算术平方根；

（3）当a是a^2的算术平方根时，a是什么数？

（4）当$-a$是a^2的算术平方根时，a是什么数？

7. 计算：

（1）$\sqrt{0.01}-\sqrt{0.25}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{4}{9}}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{25}}$；

（3）$\sqrt{16}(\sqrt{100}-\sqrt{121})$；　　（4）$\sqrt{0.36}\cdot\sqrt{\dfrac{225}{324}}$.

7.2　勾股定理

实验与探究

（1）用硬纸片剪 8 个全等的直角三角形（图 7−2），设每个直角三角形两条直角边分别为 a，b，斜边为 c.

（2）在纸上画出两个边长均为 $a+b$ 的正方形（图 7−3）；按图 7−3 ① 所示的方式，将剪出的 4 个直角三角形摆放在第一个正方形内；按图 7−3 ② 所示的方式，将另外的 4 个直角三角形摆放在第二个正方形内.

（3）判断图 7−3 中四边形 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的形状，说出你的理由.

（4）观察图 7−3 ①，小正方形 Ⅰ 的面积是 ________，小正方形 Ⅱ 的面积是 ________.

（5）观察图 7−3 ②，小正方形 Ⅲ 的面积是 ________.

（6）图 7−3 ① 中小正方形 Ⅰ 和 Ⅱ 面积之和与图 7−3 ② 中小正方形 Ⅲ 的面积有什么关系？由此你发现直角三角形的三边 a，b，c 之间有怎样的数量关系？

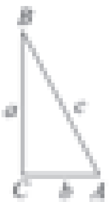
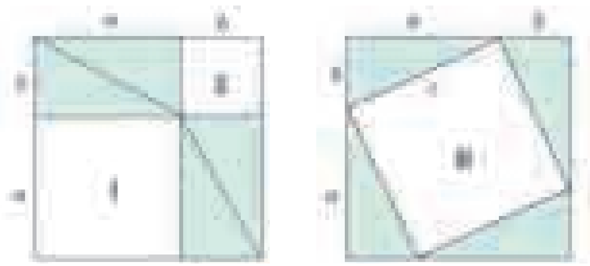


图 7−2



① ②

图 7−3

在直角三角形中，如果两条直角边分别为 a 与 b，斜边为 c，那么

$$a^2+b^2=c^2.$$

也就是说，**直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方**.

这个结论称为**勾股定理**[1].

（7）你能只用图7−3②解释勾股定理吗?

例1　如图7−4，电线杆 AC 的高为8 m，从电线杆 CA 的顶端 A 处扯一根钢丝绳，将另一端固定在地面上的 B 点，测得 BC 的长为6 m．钢丝绳 AB 的长度是多少?

解　在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$．

由勾股定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2$$
$$=8^2+6^2=100,$$

于是　$AB=\sqrt{100}=10$．

所以，钢丝绳的长度为10 m．

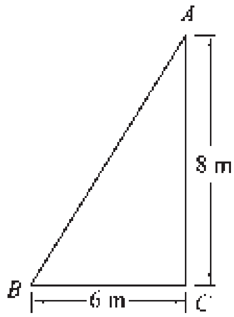
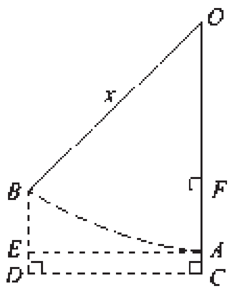


图7−4

例2　（中国古代数学问题）[2]如图7−5①，有一架秋千，当静止时其踏板离地1尺；将踏板向前推进两步（此处一步为5尺．古时一步指现在的“双步”，即左右脚各迈一步）并使秋千的绳索拉直，其踏板便离地5尺．求绳索的长．

①



②

图7−5

解　如图7−5②，O 是绳索的顶部，点 A 是秋千静止时踏板的位置，点 B 是将秋千踏板向前推进两步时的位置，所以 $OA=OB$．延长 OA 交地面于点 C，过点 B 作 BD 与地面垂直，垂足为 D，连接 CD．作 $AE\perp BD$，$BF\perp OC$，垂足分别为 E，F，则四边形 $AFBE$，$ACDE$ 都是矩形．

---

❶ 在国外，勾股定理被称为毕达哥拉斯定理（Pythagoras theorem）．

❷ 本题出自明代程大位所编的《算法统宗》，原题是：“平地秋千未起，踏板一尺离地，送行二步与人齐，五尺人高曾记。仕女佳人争蹴，终朝笑语欢嬉，良工高士好奇，算出索长有几？”

由题意知，$AC=1$，$BD=FC=5$，$BF=10$．于是

$$FA=FC-AC=5-1=4.$$

设　　$OB=x$，

从而　　$OF=OA-FA=OB-FA=x-4$.

在Rt△OFB中，$\angle OFB=90°$，由勾股定理，得

$$OB^2=BF^2+OF^2,$$

即　　$$x^2=10^2+(x-4)^2.$$

解这个方程，得　　$x=14.5$.

所以，秋千绳索的长为14.5尺.

挑战自我

如图7−6，将两个直角边长为a，b，斜边长为c的三角形按图中所示的方式放置. 连接两个直角三角形的另外一对锐角的顶点，你能用图7−6解释勾股定理吗？试一试.

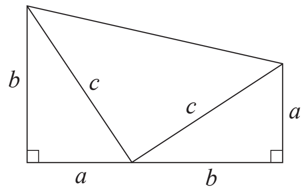


图7−6

史海漫游

漫话勾股定理

在我国古代，人们把直角三角形中较短的直角边叫做勾，较长的直角边叫做股，斜边叫做弦. 根据成书约在公元前1世纪的《周髀算经》的记载，商高（公元前11世纪西周时期人）在回答周公的问话时，明确指出“勾广三，股修四，径隅五.”大意是：如果一个直角三角形的勾为3，股为4，那么弦就是5. 这是勾股定理的一个特例. 书中还记载周公后人荣方与陈子（约公元前6、7世纪）包含勾股定理一般形式的一段对话：“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日.”句中的“邪”即斜，用公式表示，即

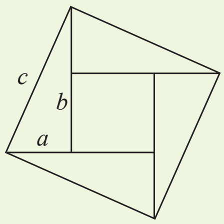


图7−7

$$斜至日（弦）=\sqrt{勾^2+股^2}.$$

这是我国勾股定理普通形式的最早表述.

在西方，古希腊数学家毕达哥拉斯发现并证明了这一定理，并传说他杀了一百头牛以庆贺，所以西方人又称这个定理为毕达哥拉斯定理或“百牛定理”.

勾股定理的证明方法多达370多种，目前还没有哪一个定理有如此多的证明方法.公元3世纪初，我国数学家赵爽在《周髀算经注》中，给出了勾股定理的一种简洁而又严格的证明：

如图7–7，边长为c的大正方形中放有4个勾为a，股为b，弦为c的直角三角形，它们又围成一个边长为$b-a$的小正方形，由4个直角三角形的面积与小正方形的面积之和等于大正方形的面积，可得

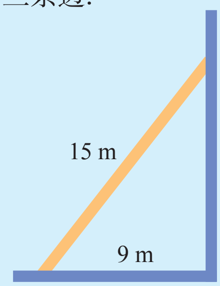
$$4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2.$$

化简，得 $a^2+b^2=c^2$.

图7–7称为“弦图”，又称为“勾股圆方图”，2002年8月在北京召开的国际数学家大会的会标（见本章章头图）就使用了这个图，以展示中国古代数学的伟大成就.

练习

1. 在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，a，b，c分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的三条边.
   （1）如果$a=3$，$b=4$，求c的长；
   （2）如果$c=13$，$b=12$，求a的长.
2. 如图，梯子的底端与建筑物的底部位于同一地平面上，将梯子的上端靠在建筑物上. 如果梯子的底端离建筑物底部9 m，那么15 m长的梯子的上端达到的高度是多少？



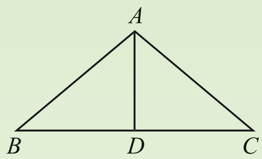
（第2题）

习题7.2

复习与巩固

1. 在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$.
   （1）已知$a=12$，$b=16$，求c的长；
   （2）已知$b=21$，$c=29$，求a的长.

2. 如图，某建筑工地需要制作等腰三角形支架，为了增加支架的耐压性，需添加一根中柱 AD（D 为 BC 的中点），如果 $AB=AC=5$ m，$BC=8$ m，求 AD 的长.
3. 如图，为了求出分别位于池塘两岸的点 A 与点 B 的距离，小亮在点 C 处立一标杆，使 $\angle ABC$ 是直角. 测得 AC 的长为 85 m，BC 的长为 75 m，那么点 A 与点 B 的距离是多少？



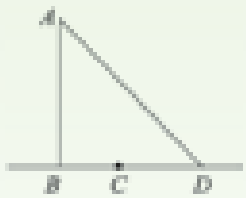
（第 2 题）


（第 3 题）

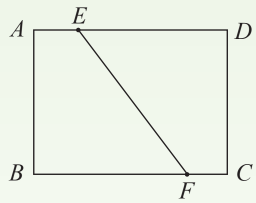
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$AC=15$，BC 上的高 $AD=12$，则边 BC 长为多少？

拓展与延伸

5. 一艘轮船以 24 海里/h 的速度离开港口向南偏东 45° 方向航行，另一艘轮船同时以 10 海里/时的速度离开港口向南偏西 45° 方向航行，1 小时后这两艘轮船相距多远？
6. 如图，旗杆 AB 的顶端 A 处挂有一根绳子. 小莹在测量旗杆的高度时，先把绳子沿旗杆下垂到点 B，固定后再把余下的部分沿地面拉紧成线段 BC（绳子的一端落在地面上的 C 点处），然后再将绳子重新拉紧成线段 AD（绳子的一端落在地面上的 D 点处）. 小莹只用卷尺在地面上测量了两个数据，就计算出了旗杆的高度. 你知道她测量了哪两个数据吗？你能求出旗杆的高度吗？



（第 6 题）

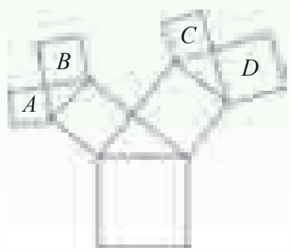


（第 7 题）

7. 如图，$ABCD$ 是一张矩形纸片，$AB=6$ cm，$BC=8$ cm. 将纸片沿 EF 折叠，点 B 恰与点 D 重合. 求折痕 EF 的长.

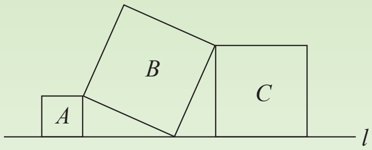
探索与创新

8. 如图，图中所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形. 已知最大的正方形的边长是 7 cm，求正方形 A，B，C，D 面积的和.



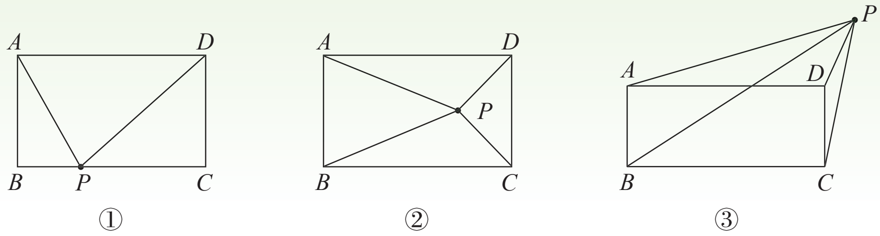
（第 8 题）

9. 如图，直线l的上方有三个正方形A，B，C，已知A和C的面积分别是5和11，求B的面积.



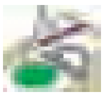
（第 9 题）

10. （1）如图①，P是矩形$ABCD$的边BC上的一点.
求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$；
（2）如图②，当点P在矩形$ABCD$内时，（1）中的等式是否成立？证明你的结论；
（3）如图③，当点P在矩形$ABCD$外时，（1）中的等式是否成立？证明你的结论.



（第 10 题）

7.3　$\sqrt{2}$是有理数吗



实验与探究

（1）作一个腰长是1的等腰直角三角形ABC（图 7−8）. 利用勾股定理，你能计算斜边AB的长 吗？

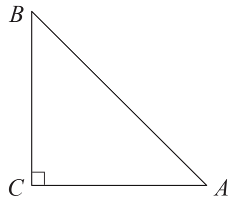
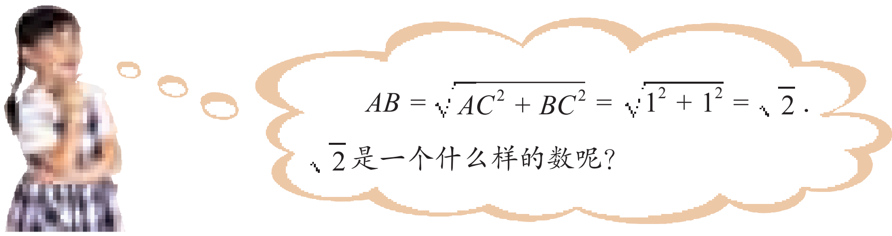
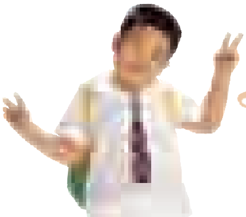


图 7−8



（2）$\sqrt{2}$ 可能是整数吗？如果不是，你能估计出$\sqrt{2}$ 在哪两个连续整数之间吗？



$\because 1^2=1$，$2^2=4$，$(\sqrt{2})^2=2$，

$\therefore 1<(\sqrt{2})^2<4$，$1<\sqrt{2}<2$，

因此$\sqrt{2}$在连续整数1，2之间，故它不可能是整数.

我是利用直角三角形的性质估计的：

$\because AC<AB<AC+BC$，

$\therefore 1<AB<2$，由于$AB=\sqrt{2}$，因此$\sqrt{2}$不可能是整数.

（3）$\sqrt{2}$可能是整数1，2之间的某一个分数吗？比方说可能是$\frac{4}{3}$吗？可能是$\frac{3}{2}$吗？你再猜出一个最简分数，它的平方会是2吗？

如果$\sqrt{2}$是一个分数，那么可把它化成最简分数$\frac{m}{n}$. 由于m与n没有1以外的公约数，从而$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m\cdot m}{n\cdot n}$仍然是一个最简分数，不会是2. 所以$\sqrt{2}$不可能是分数.

（4）既然$\sqrt{2}$不是整数，也不是分数，那么它不是有理数. 由$1<\sqrt{2}<2$，可知$\sqrt{2}$是一个整数部分是1的小数，即$\sqrt{2}=1.\cdots$ 利用平方运算，你能估计$\sqrt{2}$的十分位、百分位……吗？

分别计算1^2，1.1^2，1.2^2，…，1.9^2，得到下表：

1^2	1.1^2	1.2^2	1.3^2	1.4^2	1.5^2	…
1	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	…

由于　$1.96<2<2.25$，所以　$1.4^2<2<1.5^2$，于是　$1.4<\sqrt{2}<1.5$，

由此可以估计$\sqrt{2}$的十分位上的数字是4，即

$$\sqrt{2}=1.4\cdots$$

利用计算器，再分别计算 1.40^2，1.41^2，1.42^2，…，1.49^2，得到下表：

1.40^2	1.41^2	1.42^2	1.43^2	…
1.960	1.988 1	2.016 4	2.044 9	…

由于 $1.9881<2<2.0164$，所以 $1.41^2<2<1.42^2$，于是 $1.41<\sqrt{2}<1.42$，由此可以估计 $\sqrt{2}$ 的百分位上的数字是1，即

$$\sqrt{2}=1.41\cdots$$

利用上面的方法继续做下去，可以依次估算出 $\sqrt{2}$ 的千分位、万分位……得到

$$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\cdots$$

如果借助计算机，还可以继续做下去，得到

$$\begin{aligned}\sqrt{2}=\ &1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\ 671\ 875\ 376\ 948\\ &073\ 176\ 679\ 737\ 990\ 732\ 478\ 462\ 107\ 038\ 850\ 387\ 534\ 327\ 641\ 572\ 735\\ &013\ 846\ 230\ 912\ 297\ 024\ 924\ 836\ 055\ 850\ 737\ 212\ 644\ 121\ 497\ 099\ 935\\ &831\ 413\ 222\ 665\ 927\ 505\ 592\ 755\ 799\ 950\ 501\ 152\ 782\ 060\ 571\ 5\cdots\end{aligned}$$

（5）$\sqrt{2}$ 可能是有限小数吗？可能是循环小数吗？由此你判断 $\sqrt{2}$ 是一个怎样的数呢？

（6）与上面的探索活动类似，借助于计算器或计算机，可以探索出

$$\sqrt{3}=1.732\ 050\ 80\cdots$$

$$\sqrt{5}=2.236\ 067\ 97\cdots$$

$$\sqrt{7}=2.645\ 751\ 31\cdots$$

它们也都不是有限小数或循环小数，而是无限不循环小数.

除了求一些数的算术平方根时可以得到无限不循环小数以外，还有一些

数，例如圆周率 π 的值

3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 7 …

也是无限不循环小数.

再如

0.101 001 000 100 001 …（小数点后面相邻的两个1之间依次多1个0），

0.101 100 111 000 111 100 00 …（小数点后面 k 个1后面有 k 个0，再后面是（k+1）个1，$k=1$，2，…）

等也都是无限不循环小数.

无限不循环小数叫做**无理数**（irrational number）.

上面提到的 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，π 以及 0.101 001 000 1…，0.101 100 111…都是无理数.

3.14是有理数还是无理数？它与 π 有怎样的关系？3.141 6呢？

例1 用有理数估计下列各数的算术平方根的范围（精确到0.001）：

（1）29；　　　　（2）91 .

解 （1）∵ $5^2<29<6^2$，

借助计算器可以进一步估计 $5.3^2<29<5.4^2$，

$5.38^2<29<5.39^2$，

$5.385^2<29<5.386^2$，

∴ $5.385<\sqrt{29}<5.386$.

由此可以估计 $\sqrt{29}$ 的精确到0.001的不足近似值是5.385，过剩近似值是5.386 .

（2）∵ $9^2<91<10^2$，

借助计算器可以进一步估计 $9.5^2<91<9.6^2$，

$9.53^2<91<9.54^2$，

$9.539^2<91<9.540^2$，

∴ $9.539<\sqrt{91}<9.540$.

由此可以估计$\sqrt{91}$ 的精确到 0.001 的不足近似值是 9.539，过剩近似值是 9.540 .

练 习

1. 下面的说法正确吗？如果不正确，请说明理由：

（1）无限小数都是有理数；　　（2）无理数都是无限小数；

（3）带根号的数都是无理数；　　（4）无理数都是带根号的数.

2. 用有理数估计下列各数的算术平方根（精确到 0.01）：

（1）8；　　（2）55 .

3. 解决本章“情境导航”中的问题（3）.

实验与探究

（1）给出长度为 1 的线段，你会作出长度为$\sqrt{2}$ 的线段吗？会作出长度分别为$\sqrt{3}$ 与$\sqrt{5}$ 的线段吗？

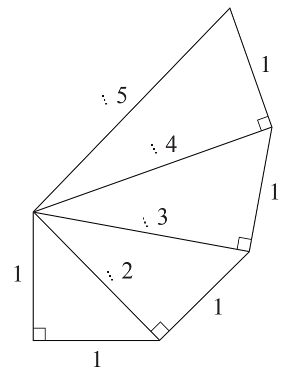


图 7−9

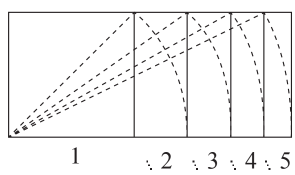


图 7−10

图 7−9 与图 7−10 给出了长度分别为 $\sqrt{3}$ 与$\sqrt{5}$ 的线段的两种作法. 你还能想出其他的作法吗？你还能作出长度为$\sqrt{10}$ 的线段吗？

（2）你能在数轴上找到表示无理数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 的点吗？

在图 7−10 中，把正方形左下方的顶点作为原点，以下面的边所在的直线作为数轴，规定向右的方向为正方向，以正方形的边长作为单位长度，擦去数

轴上方的正方形和矩形的各边，便得到图 7−11. 这样就用数轴上的点表示出了无理数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$.

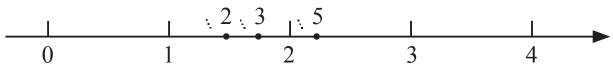
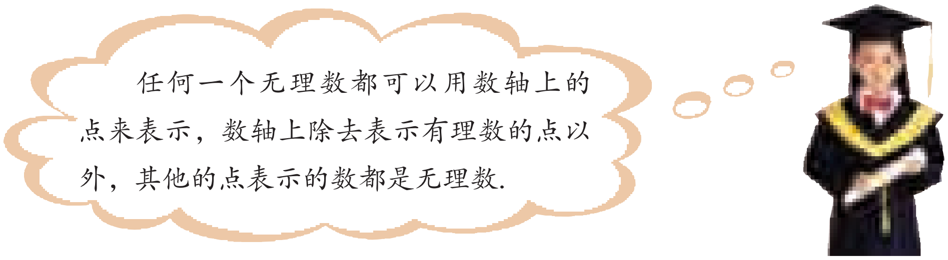


图 7−11



例2 如图 7−12，方格纸上每个小正方形的边长都是 1.

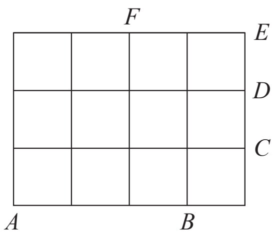


图 7−12

（1）分别求出点 A 到 B，C，D，E，F 各点的距离；

（2）以 A，B，C，D，E，F 中的任意三个点为顶点的三角形中，有没有等腰三角形？如果有，指出这样的三角形；

（3）以点 B 为圆心，BD 为半径的圆，还经过方格纸上的哪些格点？如果有，把它们描出来，标上字母，并说明理由.

解 （1）由图 7−12 可知，$AB = 3$，

由勾股定理，得

$$AC = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}，AD = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}，$$

$$AE = \sqrt{4^2+3^2} = 5，AF = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}.$$

（2）$\triangle BEF$ 是等腰三角形. 这是因为

$$BE = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}，BF = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

此外，$\triangle CEF$ 与 $\triangle BDF$ 也是等腰三角形.

（3）如图 7−13，以 B 为圆心，以 BD 为半径的圆还经过点 M，N，这是因为 $BM = BN = BD = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

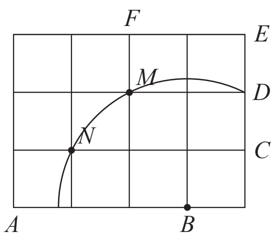


图 7−13

挑战自我

你能在数轴上找出表示无理数 π 的点吗？试一试.

史海漫游

无理数的由来

公元前520年左右，古希腊数学家毕达哥拉斯创立了毕达哥拉斯学派，这是一个从事数学研究的学术团体. 毕达哥拉斯学派尊崇“万物皆数”，认为世界上一切对象皆由整数组成，分数则是两个整数之比，除整数与分数以外再没有其他的数了.

可是随着勾股定理的发现，就遇到了一个新的问题：边长为1的正方形的对角线的长是一个怎样的数？

由勾股定理，边长为1的正方形的对角线的长 $\sqrt{2}$ 是客观存在的. 它既然不是整数，也不是分数，究竟是个什么数呢？难道除了整数和分数以外还有其他的数吗？希腊数学家们面临了“第一次数学危机”.

经过研究，该学派的一个成员希帕索斯（Hippasus，约前5世纪）断定：正方形的对角线与边长的比值是人们还没有认识的新数.

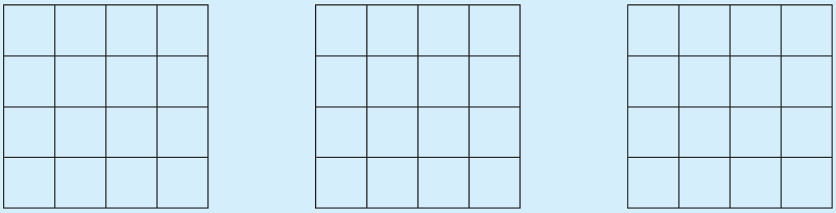
希帕索斯的发现，推翻了毕达哥拉斯学派的“数只有整数和分数”的论断，从根本上动摇了毕达哥拉斯学派的理论基础，引起了毕达哥拉斯学派的恐慌. 据说，希帕索斯在船上向同道公布这一事实时，竟被恐慌不已的毕达哥拉斯的信徒们视为异端而扔进了大海.

希帕索斯虽然被害了，但是无理数并没有被消灭. 从希帕索斯的发现中，人们知道除去整数和分数以外，还存在着一种新的数，$\sqrt{2}$ 就是其中之一. 由于从广义上说，整数也都能写成两个整数之比，例如 $2=\frac{2}{1}$，$-3=\frac{-3}{1}$，$0=\frac{0}{1}$ 等，后来，人们把可以写成两个整数之比的数叫做有理数（rational number，直译为可比数），而把不能写成两个整数之比的数叫做无理数（irrational number，直译为不可比数）.

练　习

1. 在Rt△ABC中，如果∠B是直角，$AB=6$，$BC=5$，求AC的长.
2. 如图，方格纸上每个小正方形的边长都是1. 以格点为顶点，分别在三张方格纸上画出

三角形，使第一个三角形只有一条边的长为无理数，第二个三角形有两条边的长为无理数，第三个三角形的三边长都为无理数.



（第 2 题）

习题7.3

复习与巩固

1. 下列各数中哪些是有理数？哪些是无理数？

   $0.121\ 121\ 112\cdots$（小数后面相邻的两个2之间依次多1个1），$345.20\dot{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$，

   $-\dfrac{23}{89}+0.\dot{3}\dot{1}$，$3.\dot{1}41\ 5\dot{9}$.

2. 用有理数估计下列各数的算术平方根的范围（精确到0.01）：

   （1）17；　　　　（2）65.

3. 校园里有一个面积为 34 m^2 的正方形水池. 你能估计出这个水池边长的大致范围吗（精确到 0.1 m）？

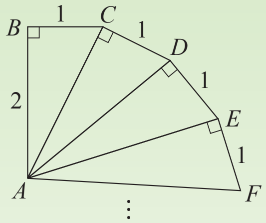
4. 等腰直角三角形的斜边长为 2，它的一条直角边的长是多少？

5. 已知 A（3，2），B（−2，−3），C（2，−3），分别求 A，B，C 三点到原点的距离.

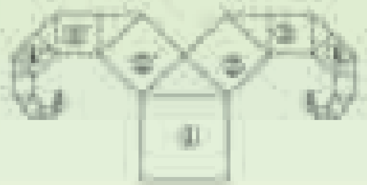
6. 如果正方形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C 的坐标分别是（2，3），（−2，3）和（−2，−1），求顶点 D 的坐标和对角线 BD 的长.

拓展与延伸

7. 如图，Rt△CBA 的两直角边长分别为 1，2，以 Rt△CBA 的斜边 AC 为一直角边，另一条直角边为 1，画第 2 个 Rt△DCA；再以 Rt△DCA 的斜边 AD 为一直角边，另一直角边为 1，画第 3 个 Rt△EDA；…依次类推，写出第 n 个直角三角形的斜边长.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图是一种“牛头”形图案，其作法是：从正方形①开始，以它的一边为斜边向外作等腰直角三角形，然后再以其直角边为一边，分别向外作正方形②和②′，依次类推. 若正方形①的边长为 64 cm，求正方形⑦的边长.

9. 一个有理数与一个无理数相加有可能等于有理数吗？为什么？

探索与创新

10. 请你设计一种不同于本节图7–9和图7–10的方法，作出长度为$\sqrt{2}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{16}$……的线段.

7.4 勾股定理的逆定理

实验与探究

在7.2节中，我们通过探索得到了勾股定理. 你能说出勾股定理的逆命题吗？它的逆命题是真命题还是假命题？

（1）选定一个单位长度，然后取一根长度为 12 单位的细绳，将它首尾相接并围成一个△ABC，使得三边的长度分别为 $AC=5$，$BC=4$，$AB=3$，再用图钉把这个三角形钉在木板上（图 7–14）；

（2）验证△ABC各边的长是否满足 $a^2+b^2=c^2$；

（3）用三角尺检验∠B是否为直角，由此你判断△ABC是怎样的三角形？

（4）再取一根长度为 30 单位的细绳，围成边长分别为 5，12，13 的三角形，然后重复（2），（3）两个步骤（图 7–15）. 你有什么发现？

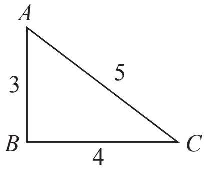


图 7−14

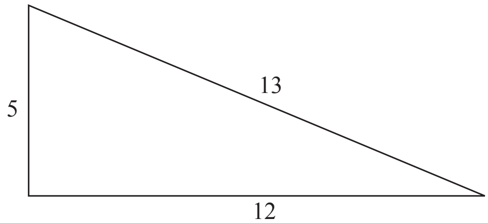


图 7−15

（5）一般地，如果$\triangle ABC$的三边为a，b，c（图7−16①），且满足

$$a^2+b^2=c^2,$$

那么这个三角形是直角三角形吗？

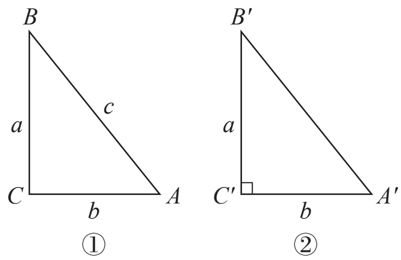


图 7−16

作$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$（7−16②），使

$\angle C'=90^\circ$，$A'C'=AC=b$，$B'C'=BC=a$.

由勾股定理，

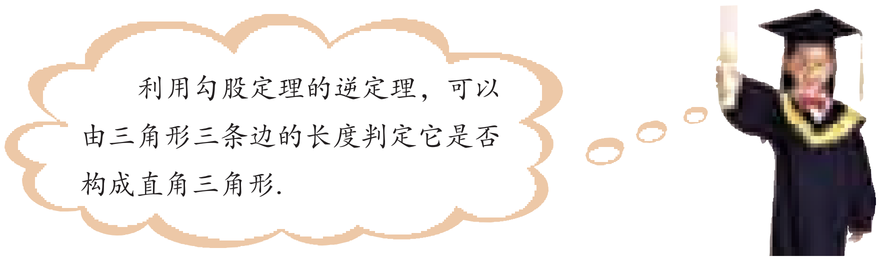
$$A'B'=\sqrt{A'C'^2+B'C'^2}=\sqrt{a^2+b^2}=c=AB.$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（SSS），

$\therefore \angle C=\angle C'=90^\circ$，所以$\triangle ABC$是直角三角形.

于是，就得到

勾股定理的逆定理　如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.



例1　已知三角形三条边的长度分别是：

（1）1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$；（2）2，3，4；（3）$3n$，$4n$，$5n$（$n>0$），

它们是否分别构成直角三角形？

解　（1）在 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 中，$\sqrt{3}$ 是最大边长，因为 $1^2+(\sqrt{2})^2=1+2=3=(\sqrt{3})^2$，所以，边长为1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 的三角形是直角三角形.

（2）在 2，3，4 中，4 是最大边长，$2^2+3^2=13\neq4^2$，所以，边长为 2，3，4 的三角形不是直角三角形.

（3）在 $3n$，$4n$，$5n$（$n>0$）中，$5n$ 是最大边长，

$(3n)^2+(4n)^2=25n^2=(5n)^2$，

所以，边长为 $3n$，$4n$，$5n$（$n>0$）的三角形是直角三角形.

加油站

已知三角形的三边的长，判断三角形是否直角三角形时，由于直角三角形的最大边是斜边，所以只要检验较小的两条边的平方和是否等于最大边的平方就可以. 如果等式成立，该三角形是直角三角形，否则就不是直角三角形.

例2　如图 7-17，已知 $AB\perp AD$，$AB=4$，$BC=12$，$CD=13$，$AD=3$. 能判断 $BC\perp BD$ 吗？证明你的结论.

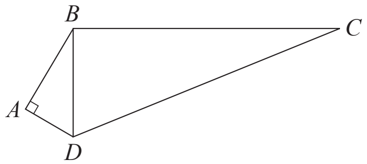


图 7-17

解　$BC\perp BD$. 证明如下：

$\because AB\perp AD$，

$\therefore \triangle BAD$ 是直角三角形.

$\therefore BD^2=AB^2+AD^2=4^2+3^2=25$.

在 $\triangle BCD$ 中，

$\because BC^2+BD^2=12^2+25=169=13^2=CD^2$，

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形，且 CD 为斜边，$\angle CBD=90°$.

$\therefore BC\perp BD$.

挑战自我

利用本节知识，你能用圆规和直尺，作出一个直角吗？试一试.

史海漫游

勾股数组

满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数叫做勾股数组. 人类研究勾股数组的历史可以追溯到远古的年代. 迄今为止，考古发现的最早记载，是 3 600 年前古巴比伦人留下的一块刻有数学手稿的泥板，上面刻有 15 组勾股数组. 其中，最大的一组竟然是（12 709，13 500，18 541）.

我国是一个文明古国，也是数学的发源地之一. 在我国古代的数学名著《周髀算经》中，就给出了勾股数组（3，4，5）. 在稍晚一些的另一部数学名著《九章算术》中，给出了更多的勾股数组. 例如，（5，12，13）；（7，24，25）；（8，15，17）；（20，21，29）等.

古希腊数学家毕达哥拉斯给出了勾股数组的一种普遍形式

$$(2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1),$$

柏拉图也给出了勾股数组的一种普遍形式

$$(n^2-1,\ 2n,\ n^2+1),$$

其中，n 均为大于 1 的整数.

丢番图给出的则是勾股数组的另一种普遍形式

$$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2),$$

这里 $m>n$，m 与 n 都是正整数.

应当指出，上述几种普遍形式并不能包括所有的勾股数组. 例如，第一种形式中不包括勾股数组（8，15，17），第二种形式中不包括勾股数组（5，12，13），第三种形式中不包括勾股数组（9，12，15）等. 后来人们发现，当 $m>n$ 且 m，n，k 都是正整数时，利用

$$a=k(m^2-n^2),\ b=2kmn,\ c=k(m^2+n^2),$$

便可以计算出所有的勾股数组.

练 习

1. 已知三角形的三条边的长度分别是：

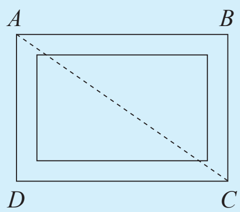
（1）$a=10$，$b=24$，$c=26$；

（2）$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{10}$；

（3）$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，

判断这样的三角形是否为直角三角形.

2. 如图是一位农民伯伯建房时所挖地基的平面图. 按建房规划，四边形 $ABCD$ 应为矩形. 他在挖完地基后测量了一下，发现 $AB=DC=8$ m，$AD=BC=6$ m，$AC=9$ m. 请你帮他分析一下所挖的地基是否合格.



（第 2 题）

习题7.4

复习与巩固

1. 已知三角形三边的长度分别是：

(1) 7，24，25；　　(2) 1，2，$\sqrt{5}$；

(3) $\frac{5}{4}$，1，$\frac{3}{2}$；　　(4) $a=n^2-1$，$b=n^2+1$，$c=2n(n>1)$.

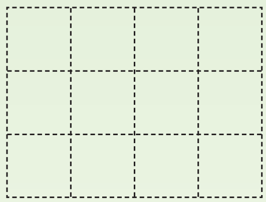
判断这样的三角形是否为直角三角形.

2. 当 a 为何值时，长度为 $a+1$，$a+2$，$a+3$ 的三条线段能围成直角三角形？

3. 如果一个三角形三边长度的平方比为 $2:3:5$，这个三角形是直角三角形吗？

4. 已知两条线段的长分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{10}$，当第三条线段的长取何值时，这三条线段能围成一个直角三角形？

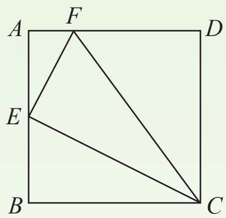
5. 在如图所示的 3×4 正方形网格中，以格点为顶点，能画出多少个大小不等的等腰直角三角形？



（第 5 题）

拓展与延伸

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 中点，F 为 AD 上一点，且 $AF=\frac{1}{4}AD$，请判断 $\triangle FEC$ 的形状.



（第 6 题）

7. 在本节“史海漫游”中，提到丢番图的一个结论：设 $m>n$，m，n 都是正整数，$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ 是一个勾股数组.

(1) 验证这个结论当 $m=3$，$n=2$ 时是正确的；

(2) 证明丢番图结论的正确性.

探索与创新

8. 观察下列各组勾股数

$(3,\ 4,\ 5)$；$(5,\ 12,\ 13)$；$(7,\ 24,\ 25)$；……

(1) 在各组勾股数中，第 1 个数有什么特点？

(2) 在各组勾股数中，后两个数有什么特点？

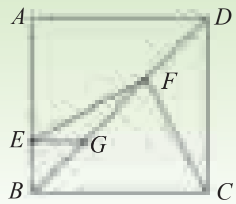
(3) 各组勾股数的第 1 个数的平方与后两个数的和有怎样的数量关系？

(4) 请按照你发现的规律，写出上面勾股数组中的第 4 组勾股数；

(5) 如果用 $2n+1$（n 是整数）表示上面勾股数组的第 1 个数，你能用代数式表示出

同一勾股数组中的后两个数吗？如果用 m（m 是大于 1 的奇数）表示第 1 个数呢？

9. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，G 分别在边 AB、对角线 BD 上，$EG/\!/AD$，F 为 GD 的中点，连接 FC. 利用勾股定理的逆定理，证明 $EF\perp FC$.



（第 9 题）

7.5　平方根

交流与发现

你能回答下列问题吗？与同学交流.

（1）平方等于 4 的数有几个？是哪些数？平方等于 2 的数呢？

平方等于 2 的数有两个，分别是 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$.

（2）如果 a 是一个正数，平方等于 a 的数有几个？怎样把它们表示出来？

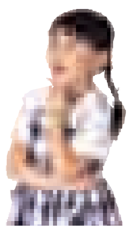
（3）平方等于 0 的数有几个？是哪个数？

（4）在你所学过的数中，有平方是负数的数吗？

如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的**平方根**（square root），或**二次方根**.

正数 a 有两个平方根，它们互为相反数. 其中，正的平方根是它的算术平方根 $\sqrt{a}$，负的平方根是它的算术平方根的相反数 $-\sqrt{a}$，合起来记作 $\pm\sqrt{a}$.

求一个正数的平方根时，只要先求出它的算术平方根，就可以知道它的负的平方根了.



由于平方等于0的数只有一个，所以0的平方根也只有一个，就是0本身.

因为正数、0、负数的平方都不是负数，所以负数没有平方根.

求一个数 a 的平方根的运算叫做**开平方**（extraction of square root），a 叫做**被开方数**（radicand）.

加油站

在等式 $x^2=a$ 中，如果已知 x 求 a 的值，需要进行平方运算. 反之，如果已知 a 求 x 的值，需要进行开平方运算. 所以，平方与开平方互为逆运算. 根据它们的这种关系，我们可以通过平方运算来求一个数的平方根，以及检验一个数是不是另一个数的平方根.

例1 求下列各数的平方根：

（1）49；　（2）0.64；　（3）3；　（4）91（精确到0.001）.

解 （1）$\because (\pm 7)^2=49$，$\therefore$ 49的平方根是 ± 7，即 $\pm\sqrt{49}=\pm 7$.

（2）$\because (\pm 0.8)^2=0.64$，$\therefore$ 0.64的平方根是 ± 0.8，即 $\pm\sqrt{0.64}=\pm 0.8$.

（3）$\because (\pm\sqrt{3})^2=3$，$\therefore$ 3的平方根是 $\pm\sqrt{3}$.

（4）由7.3例1（2）知，91的算术平方根精确到0.001的不足近似值是9.539，过剩近似值是9.540，所以91的负的平方根的精确到0.001的不足近似值是−9.540，过剩近似值是−9.539.

把本节例1与7.1节例1进行比较，你能说出二者在题目的要求、解题格式及答案方面有哪些联系和区别？

例2 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt{\dfrac{9}{25}}$；　（2）$-\sqrt{10^{-2}}$.

解 （1）$\because \left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，$\therefore \sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$，于是 $-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$.

（2）$\because (10^{-1})^2=10^{-2}$，$\therefore \sqrt{10^{-2}}=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$，

于是 $-\sqrt{10^{-2}}=-\dfrac{1}{10}$.

挑战自我

想一想，在不大于 100 的数中，哪些自然数的平方根仍是整数？其他自然数的平方根是怎样的数？

练 习

1. 判断下列说法是否正确：

（1）0 的平方根是 0；　　（2）1 的平方根是 1；

（3）-1 的平方根是 -1；　　（4）$(-1)^2$ 的平方根是 -1.

2. 求下列各数的平方根：

144，　2 500，　0.81，　$\dfrac{49}{16}$，　$(-2)^2$，　10^{-4}.

3. 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt{\dfrac{25}{81}}$；　（2）$-\sqrt{0.036\,1}$；　（3）$\pm\sqrt{2.25}$；　（4）$\pm\sqrt{\dfrac{121}{196}}$.

习题7.5

复习与巩固

1. 判断下面的说法是否正确，并说明理由：

（1）16 的平方根是 4；　　（2）2 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$；

（3）0.1 的平方根是 ± 0.01；　　（4）-3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根.

2. 下列各数有平方根吗？如果有，求出它的平方根；如果没有，请说明理由.

（1）-4；　（2）0；　（3）10^2；　（4）$(-5)^2$；　（5）6.

3. 求下列各数的平方根：

（1）0.25；　（2）225；　（3）$\dfrac{121}{169}$；　（4）10^{-6}.

4. 用有理数估计下列各数的平方根的范围（精确到 0.01）：

（1）8；　　（2）75.

5. 求下列各式的值：

（1）$\pm\sqrt{9}$；　（2）$-\sqrt{0.36}$；　（3）$\sqrt{0.000\,1}+\sqrt{0.09}$；　（4）$\sqrt{8^2}-\sqrt{(-8)^2}$.

6. 如果一个数的平方等于$\frac{25}{36}$，求这个数.

拓展与延伸

7. 下列各式中，哪些有意义？哪些没有意义？

（1）$-\sqrt{5}$；　　（2）$\sqrt{-5}$；　　（3）$\sqrt{(-5)^2}$；　　（4）$\sqrt{10^{-5}}$.

8. 求下列各式中x的值：

（1）$3x^2=27$；　　（2）$36x^2-100=0$.

探索与创新

9. 已知$a\neq0$，下列各数有没有平方根？为什么？

$(-a)^2$；　　$(\sqrt{a})^2$；　　$-a^2$.

10. π的平方根是有理数吗？为什么？

7.6　立方根

（1）要做一个正方体形状的水箱，使它的体积为125 m^3，怎样计算出水箱的棱长？想一想，与同学交流.

这个问题实质上是求立方为125的数.

因为$5^3=125$，所以正方体水箱的棱长为5 m.

（2）想一想，有没有立方等于-8的数？如果有，这个数是多少？

一般地，如果一个数x的立方等于a，即$x^3=a$，那么x叫做a的**立方根**（cube root）或**三次方根**. 数a的立方根记作$\sqrt[3]{a}$，读作“三次根号a”，其中a叫做**被开方数**，左上角的数3叫做**根指数**（radical exponent）.

求一个数的立方根的运算叫做**开立方**（extraction of cubic root）.

例1 求下列各数的立方根：

（1）64；（2）-64；（3）$\frac{8}{27}$；（4）-0.125.

解 （1）$\because 4^3=64$，

$\therefore$ 64的立方根是4，即$\sqrt[3]{64}=4$.

（2）$\because (-4)^3=-64$，

$\therefore$ -64的立方根是-4，即$\sqrt[3]{-64}=-4$.

（3）$\because \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

$\therefore$ $\frac{8}{27}$的立方根是$\frac{2}{3}$，即$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$.

（4）$\because (-0.5)^3=-0.125$，

$\therefore$ -0.125的立方根是-0.5，即$\sqrt[3]{-0.125}=-0.5$.

与平方与开平方互为逆运算类似，立方与开立方也互为逆运算.

由例1，你发现正数的立方根是正数还是负数？负数有立方根吗？它的符号怎样确定？与同学交流.

正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0的立方根是0.

由例1（1）（2）还可以看出：$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}$.一般地，如果$a>0$，那么$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.这就是说，求一个负数的立方根，可以先求出这个负数的绝对值的立方根，然后再取它的相反数.

例2 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{-27}$；（2）$\sqrt[3]{0.008}$；

（3）$-\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$；（4）$(\sqrt[3]{5})^3$.

解 （1）$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$；

（2）$\sqrt[3]{0.008}=0.2$；

（3）$-\sqrt[3]{\frac{1}{125}}=-\frac{1}{5}$；

（4）$(\sqrt[3]{5})^3=5$.

例3 用有理数估计下列各数的立方根的范围（精确到0.1）：

（1）7；　　　　（2）-81．

解 （1）∵　$1^3<7<2^3$，

$1.9^3<7<2.0^3$，

∴　$1.9<\sqrt[3]{7}<2.0$．

$\sqrt[3]{7}$精确到0.1的不足近似值是1.9，过剩近似值是2.0．

继续运用上面的方法还可以估计出$\sqrt[3]{7}$精确到0.01，0.001……的不足近似值和过剩近似值. 事实上，由于$\sqrt[3]{7}$不是一个整数，也不会是一个最简分数，所以，$\sqrt[3]{7}=1.912\ 931\ 18\cdots$也是一个无理数.

（2）∵　$4^3<81<5^3$，

$4.3^3<81<4.4^3$，

∴　$4.3<\sqrt[3]{81}<4.4$，

这就是说，$\sqrt[3]{81}$精确到0.1的不足近似值是4.3，过剩近似值是4.4．

因此，$\sqrt[3]{-81}$精确到0.1的不足近似值是-4.4，过剩近似值是-4.3．

挑战自我

想一想，在绝对值不大于100的数中，哪些整数的立方根仍是整数？其他整数的立方根是怎样的数？

练 习

1. 说出下列各数的立方根：

216；　-8；　$-\dfrac{1}{64}$；　$-\dfrac{125}{8}$；　2；　-3．

2. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{-1}$；　　（2）$-\sqrt[3]{0.001}$；　　（3）$-\sqrt[3]{-\dfrac{64}{125}}$．

习题7.6

复习与巩固

1. 下面的说法正确吗？如果不正确，请你给出正确的说法.

（1）8的立方根是± 2；

（2）-0.064的立方根是0.4；

（3）$-\frac{1}{64}$的立方根是$-\frac{1}{4}$；

（4）1的立方根是1和-1.

2. 填表：

a	-1	1 000	0.064	-216	$\frac{1}{27}$	$-\frac{64}{27}$
$\sqrt[3]{a}$						

3. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{0.125}$；　（2）$\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$；　（3）$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$；　（4）$\sqrt[3]{(-1)^2}$.

4. 用有理数估计下列各数的立方根的范围（精确到0.1）：

（1）35；　（2）-95.

拓展与延伸

5. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}$；　（2）$\sqrt[3]{\frac{37}{64}-1}$；　（3）$\sqrt[3]{-1}-(\sqrt[3]{8}+4)\div\sqrt{(-6)^2}$.

6. 求下列各式中x的值：

（1）$x^3=-0.125$；　（2）$x^3+512=0$；

（3）$8x^3=-125$；　（4）$(x-3)^3=-1$.

探索与创新

7.（1）填表：

a	0.000 001	0.001	1	1 000	1 000 000
$\sqrt[3]{a}$					

（2）观察上表，当数a的小数点每向右（或向左）移动三位时，它的立方根怎样变

化？你能总结出其中的规律吗？

（3）已知 $\sqrt[3]{178} \approx 5.625$，利用（2）的结论，写出 $\sqrt[3]{0.178}$ 的近似值.

8. 探索并解决下列问题：

（1）已知 $x^3 = 10\ 648$，且 x 为两位数，则 x 的个位数是________.

$\because\ 8\ 000 = 20^3 < x^3 < 30^3 = 27\ 000$，

$\therefore\ x$ 的十位数字是________，$\therefore\ x =$________.

（2）按照（1）中的思考方法，直接写出满足下列两式的两位数 x 的值：

① 已知 $x^3 = 59\ 319$；

② 已知 $x^3 = 148\ 877$.

7.7　用计算器求平方根和立方根

利用平方与开平方、立方与开立方互为逆运算，通过观察或估算可以求出一些比较简单的数的平方根和立方根. 在一般情况下，借助科学计算器，可以很方便、很快捷地求出一个数的平方根和立方根（或精确到 10^{-9} 的近似值）.

例1　利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{289}$；　　（2）$\sqrt{0.42}$.

解　（1）按键 $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$，显示结果为17，

即　$\sqrt{289} = 17$.

（2）按键 $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$，显示结果为0.648 074 069，

即 $\sqrt{0.42} \approx 0.648\ 074\ 069$.

例2　利用计算器求下列各式的值（精确到0.001）：

（1）$\sqrt[3]{-47.2}$；　　（2）$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$.

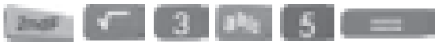
解 （1）按下列顺序依次按键：

，

屏幕上显示 −3.613 937 739 .

按精确到0.001取近似值，$\sqrt[3]{-47.2}\approx -3.614$.

（2）按下列顺序依次按键：

，

屏幕上显示0.843 432 665 .

按精确到0.001取近似值，$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\approx 0.843$.

挑战自我

用计算器分别计算 $\sqrt{49}$，$\sqrt{4\,489}$，$\sqrt{444\,889}$，$\sqrt{44\,448\,889}$ 的值，你发现了什么规律？你能猜测 $\sqrt{444\,444\,888\,889}$ 的值吗？

练 习

1. 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{484}$；　　（2）$\sqrt{84.6}$；　　（3）$\sqrt{\frac{5}{9}}$.

2. 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{-1\,728}$；　　（2）$\sqrt[3]{2.56}$；　　（3）$\sqrt[3]{-\frac{3}{7}}$.

习题7.7

复习与巩固

1. 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{0.24}$；　　（2）$\sqrt{1\,089}$；　　（3）$\sqrt{\frac{9}{4}}$.

2. 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{84.61}$；　　（2）$\sqrt[3]{-729}$；　　（3）$\sqrt[3]{-\frac{5}{6}}$.

拓展与延伸

3. 利用计算器，判断下列各式是否正确：

（1）$\sqrt[3]{0.2} < \sqrt{0.3}$；　　（2）$5.4 < \sqrt{30} < 5.5$；

（3）$-2 < \sqrt[3]{-0.87} < -1$；　　（4）$\sqrt{165} < \sqrt[3]{165} + 7$.

探索与创新

4. 用计算器计算

$$\sqrt{9\times 9+19},\ \sqrt{99\times 99+199},\ \sqrt{999\times 999+1\,999},\ \cdots$$

你发现了什么规律？你能猜测 $\sqrt{\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}}$ 的结果吗？

7.8　实　数

观察与思考

（1）在本章以前，我们曾先后学习了哪些数？数的范围是怎样逐步扩充的？回忆一下，与同学交流.

本章在引进无理数以后，数的范围又进一步得到扩充.

有理数与无理数统称为**实数**（real number）.

（2）你会把实数加以分类吗？你所确定的分类标准是什么？按你确定的标准进行一次分类之后，还能再确定另一个指标作为标准，把其中的每一类再进一步分类吗？

① 整数可视为有限小数，如 3 可视为 3.0 . 如果先按照是否有限小数和循环小数，可将实数分为有理数和无理数，然后再按照正、负还可继续进行分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有限小数和循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

② 如果先按照数的正、负、零，可将实数分成三类，然后再按照是否有理数将正实数和负实数继续进行分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

（3）检查一下，在上面的两种分类中，有没有重复和遗漏？

例1 下列各数哪些是有理数？哪些是无理数？哪些是正数？哪些是负数？

$\sqrt[3]{-8}$，$\sqrt{8}$，π，$0.2\dot{7}$，0，$-5.151\ 151\ 115\cdots$（相邻两个5之间依次多1个1），

0.101001，$\dfrac{22}{7}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$5.\dot{1}\dot{5}$．

解 有理数：$\sqrt[3]{-8}$，$0.2\dot{7}$，0，0.101001，$\dfrac{22}{7}$，$5.\dot{1}\dot{5}$；

无理数：$\sqrt{8}$，π，$-5.151\ 151\ 115\cdots$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

正数：$\sqrt{8}$，π，$0.2\dot{7}$，0.101001，$\dfrac{22}{7}$，$5.\dot{1}\dot{5}$；

负数：$\sqrt[3]{-8}$，$-5.151\ 151\ 115\cdots$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

把有理数扩充到实数以后，相反数、绝对值的意义也同样适用. 即如果 a 是一个实数，那么 $-a$ 表示 a 的相反数，实数 a 的绝对值记作 $|a|$，正实数的绝对值等于它本身，负实数的绝对值等于它的相反数，0 的绝对值是 0．

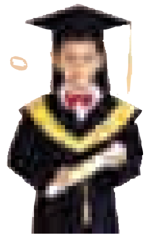
你能分别说出 $\sqrt{5}$，π，$-\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{-7}$ 的相反数和绝对值吗？与同学交流.

我们已经知道，不仅有理数可以用数轴上的点来表示，无理数也能用数轴

上的点来表示. 与有理数一样，数轴上的原点表示零，原点右边的点表示正实数，左边的点表示负实数.

把有理数扩充到实数以后，每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示. 反过来，数轴上的每一个点都表示一个唯一的实数. 也就是说，实数与数轴上的点**一一对应**（one-one correspondence）.

表示有理数的点不能布满数轴，表示实数的点布满了数轴.



数轴上的任意两点，右边的点所表示的实数比左边的点所表示的实数大.

如果 a 是实数，那么 $|a|$ 就是在数轴上表示数 a 的点到原点的距离.

例2 比较下列各组数中两个数的大小：

（1）3.14 与 π；（2）$-\sqrt{3}$ 与 $\sqrt[3]{-3}$.

解 （1）$\because \pi \approx 3.141$，

$\therefore 3.14 < \pi$.

（2）$\because -\sqrt{3} \approx -1.732$，$\sqrt[3]{-3} \approx -1.442$，

$\therefore -\sqrt{3} < \sqrt[3]{-3}$.

加油站

比较两个实数的大小时，如果两个数中有无理数，可以根据需要先求出无理数的近似值，再进行比较.

例3 求下列各数的相反数和绝对值：

（1）$2-\sqrt{3}$；（2）$\sqrt{5}-\sqrt{6}$.

解 （1）$2-\sqrt{3}$ 的相反数是 $-(2-\sqrt{3})=-2+\sqrt{3}$.

$\because \sqrt{3} < 2$，

$\therefore 2-\sqrt{3} > 0$，

$\therefore |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$.

（2）$\sqrt{5}-\sqrt{6}$ 的相反数是 $-(\sqrt{5}-\sqrt{6})=-\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

$\because \sqrt{5} < \sqrt{6}$，

$\therefore \sqrt{5}-\sqrt{6} < 0$.

$\therefore |\sqrt{5}-\sqrt{6}| = \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

挑战自我

（1）在实数 1 和 2 之间，有多少个整数？有多少个分数？有多少个无理数？

（2）请你在 1 和 2 之间举出尽可能多的无理数，看谁举得最多.

练 习

1. 在下列每一个圈中，至少填入三个数.

…	…	…	…
正有理数集合	负有理数集合	正无理数集合	负无理数集合

2. 写出下列各数的相反数和绝对值：

5.4，$\sqrt{8}$，$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{-2}$，$-\pi$.

3. 比较下列各组数中两个数的大小：

（1）$-\sqrt{5}$ 与 -2.24；　　（2）$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$.

交流与发现

（1）我们知道，任何一个有序有理数对（a，b），在给定的直角坐标系中，都可以用唯一一个点表示. 用类似的方法，你能在坐标系中找出表示有序实数对（$\sqrt{3}$，0），（0，$-\sqrt{5}$）与（$\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$）的点吗？说出这些点在坐标系中的位置.

（2）类似地，给出有序实数对（$\sqrt{3}$，1），（-2，$\sqrt{3}$），你能把它们分别用直角坐标系中的点表示出来吗？你是怎样表示的？与同学交流.

（3）如果 P 是直角坐标系中任意一点，怎样写出这个点的坐标呢？这个点的横、纵坐标都是实数吗？

（4）通过上面的讨论，你认为有序实数对与直角坐标系中的点应当具有什么关系？

把有序有理数对扩充到有序实数对后，每一个有序实数对都可以用直角坐标系中唯一的一个点来表示. 反之，直角坐标系中的每一个点都表示一个唯一的有序实数对. 因此，所有有序实数对与直角坐标系中所有点一一对应.

例4 如图 7−18，在直角坐标系中，已知等边三角形 ABC 的边长为 2，求 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标.

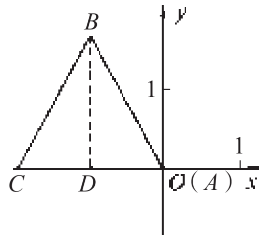


图 7−18

解 由图 7−18 可知，顶点 A，C 的坐标分别为 $(0,\ 0)$，$(-2,\ 0)$.

过点 B 作 $BD\perp x$ 轴，垂足是 D，由 $\triangle ABC$ 是等边三角形可知，点 D 是边 CO 的中点，所以 DO 的长是 1.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中，$\angle ODB=90°$，OB 的长为 2，由勾股定理

$$DB=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

所以，点 B 的坐标为 $(-1,\ \sqrt{3})$.

例5 在直角坐标系中，已知点 $A(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

（1）分别作出与点 A 关于 y 轴成轴对称的点 B，关于 x 轴成轴对称的点 D，并写出它们的坐标；

（2）如果 A，B，D 是矩形的三个顶点，写出第四个顶点 C 的坐标；

（3）求点 D 到原点 O 的距离.

解 （1）如图 7−19，已知点 $A(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$，所以点 A 在第一象限.

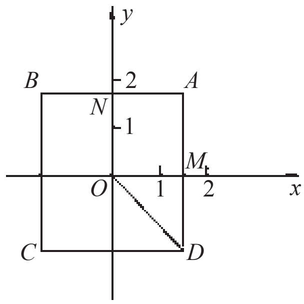


图 7−19

因为点 B 与点 A 关于 y 轴成轴对称，所以点 B 在第二象限，坐标为 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

类似地，点 A 关于 x 轴成轴对称的点 D，在第四象限坐标为 $(\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$.

（2）因点 A，B，D 分别在第一、二、四象限，由矩形的轴对称性可知，点 C 在第三象限，并且点 C 与点 D 关于 y 轴成轴对称. 因为点 D 的坐标为 $(\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$，所以点 C 的坐标为 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$.

（3）连接 OD，在 $\mathrm{Rt}\triangle OMD$ 中，$\angle OMD=90°$，因为点 D 的坐标为 $(\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$，所以 OM 的长为 $\sqrt{2}$，MD 的长为 $\sqrt{3}$. 由勾股定理

$$OD=\sqrt{OM^2+MD^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}.$$

所以，点 D 到原点 O 的距离为 $\sqrt{5}$.

练 习

1. 在直角坐标系中描出下列各点：

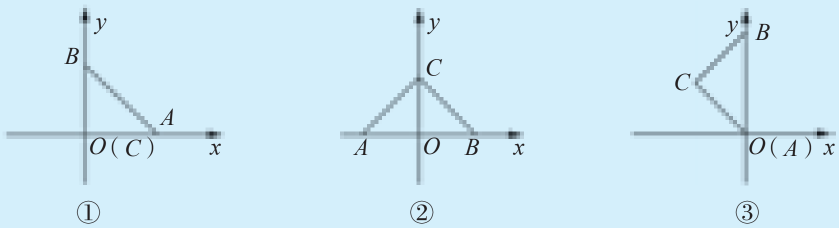
$A(1, \sqrt{2})$，　　$B(\sqrt{3}, -1)$，　　$C(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$，

$D(0, -\sqrt{2})$，　　$E(-\sqrt{3}, 0)$.

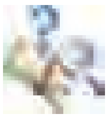
2. 已知等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 的长为 2 .

（1）在如图①②③所示的直角坐标系中，分别写出顶点 A，B，C 的坐标；

（2）请再设计几种不同的建立直角坐标系的方法，分别写出等腰直角三角形 ABC 各个顶点的坐标.



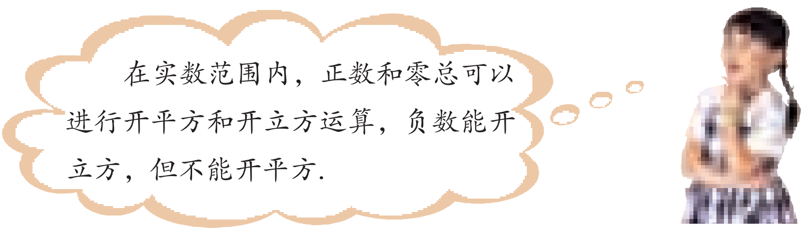
（第 2 题）



观察与思考

（1）回忆一下，在有理数范围内能够进行哪几种运算？

（2）在有理数范围内，能进行开平方运算吗？能进行开立方运算吗？在实数范围内呢？与同学交流.



将有理数扩充为实数后，加、减、乘、除、乘方运算总能够进行，也就是说，任意两个实数，经过加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方的结果仍然是实数. 而且，有理数的运算法则、运算律、运算顺序和运算性质在实数范围内仍然成立.

例如，$\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=(-\sqrt{5})+\sqrt{5}=0$，$(-2)\times(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$，

$$2+(1+\pi)=(2+1)+\pi=3+\pi,$$

$$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{3}=(\sqrt{2})^{1+3}=(\sqrt{2})^{4}=[(\sqrt{2})^{2}]^{2}=4.$$

在进行实数运算时，如果参与运算的数中有无理数，并且需要对结果求近似值，可以先按问题所要求的精确度用有限小数近似地代替无理数，然后再进行运算.

例6　求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的值（精确到0.01）.

解　解法1：$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.414+1.732=3.146\approx 3.15$.

解法2：如果用计算器计算，按下列顺序依次按键：

，

屏幕上显示3.146 264 37 .

按精确到0.01取近似值，$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3.15$.

例7　求 $4\sqrt{3}$ 的值（精确到0.001）.

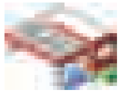
解　解法1：$4\sqrt{3}\approx 4\times 1.732\ 1=6.928\ 4\approx 6.928$.

解法2：如果用计算器计算，按下列顺序依次按键：

，

屏幕上显示6.928 203 23 .

按精确到0.001取近似值，$4\sqrt{3}\approx 6.928$.



加油站

在近似计算时，中间的计算过程中参与运算的数一般要比题目所要求的精确度多取一位近似值. 计算出结果后，再把结果的最后一位小数四舍五入.

例8　球的体积公式是 $V=\dfrac{4\pi}{3}r^3$，其中 r 是球的半径. 一个钢球的体积是 200 cm^3，求它的半径（精确到0.01）.

解　由体积公式得到 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ ，其中 $V=200$.

用计算器计算，按下列顺序依次按键：


，

屏幕上显示3.627 831 679，按精确到0.01取钢球半径近似值，$r\approx 3.63$.

所以，钢球的半径约为3.63 cm .

练 习

1. 用两种方法计算 $2\sqrt{5}-\sqrt{7}$ 的近似值（精确到0.01）.
2. 用两种方法计算 $\sqrt{10}+\sqrt{11}$ 的近似值（精确到0.001）.

习题7.8

复习与巩固

1. 判断下面的说法是否正确：
   （1）有理数、无理数和零统称实数；
   （2）数轴上的点都表示实数；
   （3）没有最大的无理数；
   （4）最小的无理数是 $\sqrt{2}$；
   （5）没有绝对值最小的实数；
   （6）$\frac{\pi}{2}$ 是分数.
2. 求下列各数的相反数和绝对值：

   $\sqrt{15}$，$-\frac{\sqrt{2}}{3}$，$-\frac{\pi}{2}$，$1-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}-\sqrt{5}$.
3. 求下列各式中 x 的值：
   （1）$|x|=\sqrt{7}$；　　　　（2）$x^2=\pi$.
4. 比较下列各组中两个数的大小：
   （1）$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{4}{7}}$；　　　　（2）$\sqrt[3]{-12}$ 与 $-\sqrt{5}$.
5. 计算（精确到0. 001）：
   （1）$\sqrt{15}-\sqrt{6}$；　　　　（2）$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$.
6. 一个圆形喷水池的面积为120 m^2，求喷水池的半径（精确到0.1 m）.
7. $\triangle ABC$ 的面积为30 cm^2，边 AB 恰巧是边长为5 cm的正方形的一条对角线，求 $\triangle ABC$ 在 AB 上的高 CD（精确到0.01 cm）.

拓展与延伸

8. 在数轴上分别标出与下列各数最邻近的两个整数所对应的点的位置：
   （1）$\sqrt{10}$；　　（2）$-\sqrt{5}$；　　（3）$-\sqrt{32}$；　　（4）$\sqrt{\frac{11}{2}}$.

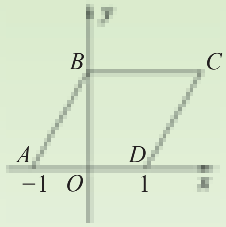
9. 写出所有符合下列条件的数：

（1）小于$\sqrt{48}$的所有正整数；

（2）大于$-\sqrt{17}$小于$\sqrt{7}$的所有整数；

（3）绝对值小于$\sqrt{15}$的所有整数.

10. 在如图所示的直角坐标系中，菱形$ABCD$的边长是2，坐标系原点O为AD的中点，分别求点A，B，C，D的坐标.



（第 10 题）

探索与创新

11. 利用计算器计算：

（1）随便想一个大数，例如13 579，求它的算术平方根a_1，再求a_1的算术平方根a_2，a_2的算术平方根a_3，… 随着计算次数的增加，你发现了什么？

（2）随便想一个正的纯小数，例如0.135 79，求它的算术平方根b_1，再求b_1的算术平方根b_2，b_2的算术平方根b_3，… 随着计算次数的增加，你发现了什么？

12. 设有一列数：

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{19}},\ \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

如果从中选出若干个不同的数，使它们的和大于3，那么至少要选多少个数？（用计算器计算）

回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？与同学交流.

2. 什么是算术平方根？什么是平方根？算术平方根与平方根有什么联系和区别？

3. 什么是立方根？任何实数都有立方根吗？在实数范围内，一个数有几个立方根？

4. 填下面的表格：

a		算术平方根	平方根	立方根
符号表示				
a的范围				
方根的个数及符号	$a>0$			
	$a=0$			
	$a<0$			

5. 平方运算与开平方运算、立方运算与开立方运算有怎样的关系？举例说明. 怎样用平

方运算求百以内整数的平方根，怎样用立方运算求百以内整数或对应的负整数的立方根.

6. 什么是无理数？有人说："无理数都是开方开不尽的方根."这句话对吗？举例说明.

7. 在 Rt△ABC 中，设两条直角边分别为 a，b，斜边为 c，则 a，b，c 满足__________；反之，如果三角形的三边 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是____________.

8. 实数包括哪些数？数的范围是如何扩充到实数的？

9. 你能按照一定的标准对实数进行分类吗？

10. 在有理数范围内可以实施哪些运算？扩充到实数范围以后呢？说一说，有理数的哪些概念以及运算法则、运算律、运算顺序在实数范围内仍然适用. 请分别举例说明.

11. 实数与数轴上的点具有怎样的关系？有理数呢？有序实数对与直角坐标系中的点具有怎样的关系？

12. 上网查询有关勾股定理、无理数、圆周率的史料和有关资料，与同学交流.

综合练习

复习与巩固

1. 求下列各式的值：

$$\sqrt{1.21},\ \sqrt{2.56},\ \sqrt[3]{0.008},\ \sqrt{\frac{85}{81}-1},\ -\sqrt[3]{4+\frac{17}{27}},\ \sqrt[3]{-\frac{3^3}{2^6}}.$$

2. 利用乘方运算，求下列各数的近似值：

（1）$\sqrt{75}$（精确到 0.01）；　　（2）$\sqrt[3]{90}$（精确到 0.1）.

3. 比较下列各组数中两个数的大小：

（1）-3 和 $-\sqrt{3}$；　　（2）$-\sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{6}$；

（3）$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 和 1；　　（4）$-\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{\pi}$.

4. 把下列各数按照从小到大的顺序用不等号连接起来：

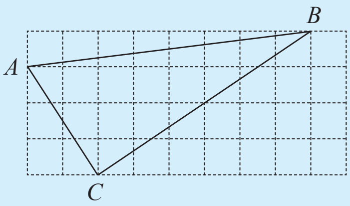
$$|-2|,\quad \sqrt{3},\quad \frac{\sqrt{7}}{2},\quad 1.3,\quad |2-\sqrt{3}|,\quad \sqrt[3]{0.5}.$$

5. 用计算器计算：$\pi+\sqrt{12}-\frac{4}{5}+\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$（精确到 0.01）.

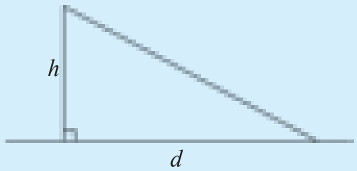
6. 用尺规作线段 AB，使 $AB=\sqrt{13}$.

7. 已知 △ABC 中，∠A，∠B，∠C 的度数的比是 1∶1∶2，求 $c:a$.

8. 在如图的网格中，小正方形的边长都是1，试判定$\triangle ABC$的形状.



（第 8 题）



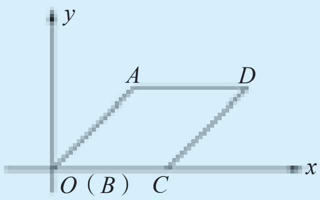
（第 10 题）

9. 甲正方体的棱长是5 cm，乙正方体的体积是甲正方体体积的2倍，求乙正方体的表面积（精确到0.1 cm^2）.

10. 如图，人站在高度为h m的地方，对地平面上物体的可视距离为d m，d与h的关系可以用$d = 8\sqrt{\dfrac{h}{5}}$近似地表示. 当某人从50 m高的地方登上250 m高的山顶时，他对地平面上物体的可视距离增加了多少米（精确到0.1 m）?

11. 已知$a = 5$，$b = 3$. 求代数式$\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}-\pi}{10}$的值（精确到0.01）.

12. 如图，菱形$ABCD$的边长为2，$\angle ABC = 45°$，写出点A，C，D的坐标.



（第 12 题）


（第 13 题）

13. 如图，七巧板是由五个等腰直角三角形、一个小正方形和一个平行四边形组成的. 设小正方形的边长为1，你能求出七巧板中各图形每边的长吗?

拓展与延伸

14. 在7.2节练习第2题中，如果梯子的上端沿墙下滑2 m，那么梯子的底端也向外移动2米吗? 如果不是2 m，比2 m多还是比2 m少?

15. 一个直角三角形两边的长分别为2和$\sqrt{3}$，求第三条边的长.

16. 用48 m长的篱笆墙围成一个绿化场地，现有两种设计方案可供选择：一种是围成正方形的场地，另一种是围成圆形的场地. 选用哪一种方案围成的场地面积较大?

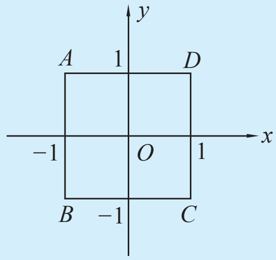
17. 利用计算器求下面一组数据的平均数（精确到0.001）：

1，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，-2，$\sqrt{5}$，$-\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$-\sqrt{8}$，3，$-\sqrt{10}$.

18. 在第 45 页的弦图（图7−7）中，如果大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，求图中直角三角形两条直角边的长.

探索与创新

19. 正方形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示. 在平面内确定一点 P，使△PAB，△PBC，△PCD，△PDA 都是等腰三角形，写出点 P 的坐标. 你有多少种不同的答案?



（第 19 题）

20. 小亮、小莹和大刚三人相约周六上午 10 时在新华书店集合，共同挑选有关书籍. 小亮和大刚家分别在书店的正西和正东方向，小莹家在书店的正南方向. 已知小亮与大刚家、小莹家分别相距 5 km，3 km，大刚家与小莹家相距 4 km . 如果他们三人步行速度都是 4 km/h，不考虑其他因素，那么他们各自应分别于什么时间从家里出发，才不至于迟到?

21. （1）利用平方运算估计 $\sqrt{27}$ 的值（精确到 0.01）;

（2）小亮通过与同学交流，发现用以下方法也可以估算 $\sqrt{27}$ 的近似值:

$\because 25 < 27 < 36$，　　　$\therefore 5 < \sqrt{27} < 6$，

设 $\sqrt{27} = 5 + t$，则 $(\sqrt{27})^2 = (5 + t)^2$，即 $27 = 25 + 10t + t^2$，

$\therefore 27 \approx 25 + 10t$，解得 $t \approx \frac{2}{10}$，$\therefore \sqrt{27} \approx 5 + \frac{2}{10} = 5.20$;

（3）比较（2）和（1）的结果，你对（2）的结果感到满意吗?

（4）请你用小亮的方法估计 $\sqrt{52}$ 的近似值（精确到 0.01）;

（5）试把小亮的方法推广到一般情况:

已知 a，b，m 是非负整数，如果 $a < \sqrt{m} < a + 1$，且 $m = a^2 + b$，用关于 a，b 的代数式近似地表示 $\sqrt{m}$ 的公式是____________;

（6）请你用（5）中得到的公式估计 $\sqrt{85}$（精确到 0.01）.

第 8 章　一元一次不等式

内容提要

- 不等式的基本性质
- 一元一次不等式
- 列一元一次不等式解应用题
- 一元一次不等式组

情境导航

某乡镇风力资源丰富，为了实现“低碳环保”，该乡镇决定开展风力发电，打算购买 10 台风力发电机组. 现有 A，B 两种型号机组，其中A型机组价格为 12 万元/台，月均发电量为 2.4 万 kw · h；B型机组价格为 10 万元/台，月均发电量为 2 万 kw · h.

经预算该乡镇用于购买风力发电机组的资金不高于 105 万元.

（1）请你为该乡镇设计几种购买方案；

（2）如果该乡镇用电量不低于 20.4 万 kw · h/月，为了节省资金，应选择哪种购买方案?

8.1　不等式的基本性质

交流与发现

（1）说一说，两条线段的大小、两个角的大小是怎样规定的？

（2）怎样比较两个有理数的大小？怎样比较两个实数的大小？

一般地，两个实数或两个相同单位的量 a，b 在下列三种关系中，有且只有一种成立：

$$a > b,\ a = b,\ a < b.$$

（3）引入了减法运算后，对于两个实数 a，b，你能借助 $a-b$ 的符号，比较它们的大小吗？

对于任意两个实数 a，b，

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；

如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$；

如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$.

反之也成立.

因此，我们可以用作差的方法比较两个实数的大小.

例1　比较下面各组中两个实数的大小：

（1）$1+\sqrt{2}$ 与 2；（2）-1 与 $-4+\sqrt{10}$.

解　（1）$\because (1+\sqrt{2})-2$

$$=1+\sqrt{2}-2$$

$$=\sqrt{2}-1,$$

$\because \sqrt{2}>1$，$\therefore \sqrt{2}-1>0$，

$\therefore (1+\sqrt{2})-2>0$.

$\therefore 1+\sqrt{2}>2$.

（2）$\because -1-(-4+\sqrt{10})$

$=-1+4-\sqrt{10}$

$=3-\sqrt{10}$，

$\because 3<\sqrt{10}$，$\therefore 3-\sqrt{10}<0$，

$\therefore -1-(-4+\sqrt{10})<0$.

$\therefore -1<-4+\sqrt{10}$.

例2　当 $x=1$，2，$2\sqrt{2}$ 时，分别比较代数式 x^2+5x-2 与 x^2+2x+4 的值的大小.

解　$\because (x^2+5x-2)-(x^2+2x+4)$

$=3x-6$.

当 $x=1$ 时，　$3x-6=3\times1-6=-3<0$，

$\therefore$　$x^2+5x-2<x^2+2x+4$；

当 $x=2$ 时，　$3x-6=3\times2-6=0$，

$\therefore$　$x^2+5x-2=x^2+2x+4$；

当 $x=2\sqrt{2}$ 时，　$3x-6=3\times2\sqrt{2}-6=6(\sqrt{2}-1)$，

$\because$　$\sqrt{2}>1$，$\therefore \sqrt{2}-1>0$.

$\because$　两个正数的积是正数，

$\therefore$　$6(\sqrt{2}-1)>0$.

$\therefore$　$x^2+5x-2>x^2+2x+4$.

练 习

1. 在下面的空格处填上“>”或“<”：

（1）在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，那么 $\angle C$ ______ $\angle A$，a ______ c；

（2）π ______ 3.141 6；

（3）$\sqrt{2}$ ______ $\sqrt{3}$；

（4）a 是实数，a^2+1 ______ 0.

2. 当 $x=2\sqrt{2}$，$3+\sqrt{3}$ 时，分别比较代数式 $3x-1$ 的值与 11 的大小.

交流与发现

像 $a>b$，$\sqrt{2}>1$，$-1<-4+\sqrt{10}$，$3x-6<0$，$5x-2>2x+4$ 这样，用“$>$”或“$<$”表示不等关系的式子叫做**不等式**（inequality）.

你还记得等式的基本性质吗？不等式有哪些基本性质呢？

思考下面的问题，并与同学交流：

（1）甲的年龄为 a 岁，乙的年龄为 b 岁，如果甲的年龄比乙的年龄大，请你用不等式表示出 a 与 b 的大小关系. c 年后，他们二人谁的年龄大？你能用不等式表示出来吗？c 年前呢？

（2）在数轴上，点 A 与点 B 分别对应实数 a，b，并且点 A 在点 B 的右边，请你用不等式表示 a，b 之间的大小关系. 如果同时将点 A，B 向右（或向左）沿 x 轴移动 c 个单位长度，得到点 A'，B'（图 8-1）. 你能用不等式表示点 A'，B' 所对应的数的大小关系吗？

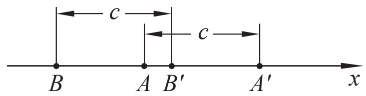


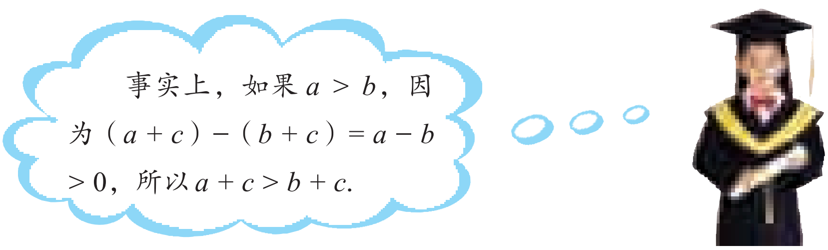
图 8-1

（3）由（1）（2），你发现了有关不等式的什么结论？你能用不等式表示出来吗？

如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$，$a-c>b-c$.

也就是说，**不等式的两边同时加上（或减去）同一个整式，不等号方向不变.**

我们把这一性质作为不等式基本性质 1.



例如，将不等式 $2>-1$ 的两边都加上 2 或都减去 1，不等号的方向不变.

（4）将不等式 $6>-3$ 和 $-4<-2$ 的两边都乘 3，不等号的方向是否改变？两边都除以 2 呢？

6×3 ________ $(-3)\times3$；

$(-4)\times3$ ________ $(-2)\times3$；

$6 \div 2$ ________ $(-3) \div 2$；

$(-4) \div 2$ ________ $(-2) \div 2$.

（5）如图 8-2，已知线段 a，b，且 $a > b$. 如果将线段 a，b 的长都扩大（或缩小）相同的倍数，所得到的线段有怎样的大小关系？

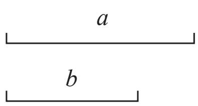


图 8-2

（6）由（4）（5）你发现了什么结论？能用不等式把它表示出来吗？

如果 $a > b$，$c > 0$，那么 $ac > bc$，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$.

也就是说，**不等式两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.**

我们把这一性质作为不等式的基本性质 2.

事实上，如果 $a > b$，$c > 0$，因为 $ac - bc = c(a - b) > 0$，所以 $ac > bc$.

（7）将不等式 $6 > -3$ 和 $-4 < -2$ 的两边都乘 -3，不等号的方向是否改变？两边都除以 -2 呢？

$6 \times (-3)$ ________ $(-3) \times (-3)$；

$(-4) \times (-3)$ ________ $(-2) \times (-3)$；

$6 \div (-2)$ ________ $(-3) \div (-2)$；

$(-4) \div (-2)$ ________ $(-2) \div (-2)$.

（8）由（7）你发现了什么结论？能用不等式表示出来吗？

如果 $a > b$，$c < 0$，那么 $ac < bc$，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

也就是说，**不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.**

我们把这一性质作为不等式的基本性质 3.

事实上，如果 $a > b$，$c < 0$，因为 $ac - bc = c(a - b) < 0$，所以 $ac < bc$.

例3　你能根据$\sqrt{5}>2$，利用不等式的基本性质，推出$\sqrt{5}<2.5$吗？

解　因为$\sqrt{5}>2$，不等式两边同乘正数$\sqrt{5}$，

得　$(\sqrt{5})^2>2\sqrt{5}$（不等式的基本性质2），

即　$5>2\sqrt{5}$.

不等式两边同除以2，

得　$\frac{5}{2}>\sqrt{5}$（不等式的基本性质2），

所以　$\sqrt{5}<2.5$.

例4　估计$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$与-0.5哪个大？与-1比较呢？

解　因为$2<\sqrt{5}<3$，由$\sqrt{5}>2$，

不等式两边同乘-1，得　$-\sqrt{5}<-2$（不等式的基本性质3）.

两边同加上1，得　$1-\sqrt{5}<-1$（不等式的基本性质1）.

两边同除以2，得　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<-0.5$（不等式的基本性质2）.

类似地，由　$\sqrt{5}<3$，

得　$-\sqrt{5}>-3$，

$1-\sqrt{5}>-2$，

因此　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}>-1$.

这就是说，$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$在-1和-0.5之间，即

$$-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<-0.5.$$

挑战自我

小亮在探索不等式性质时，做了如下的猜测：

“由$3>2$，$5>1$，可得$3\times5>2\times1$；由$9>8$，$7>5$，可得$9\times7>8\times5$. 一般地，如果$a>b$，$c>d$，那么$ac>bd$.”

你认为小亮的猜测正确吗？如果不正确，你能帮他适当地增强命题的条件，使结论成立吗？说明你的理由.

练 习

1. 用“>”或“<”填空，并说明理由：

（1）如果 $a>b$，那么 $2a$ ______ $a+b$；

（2）如果 $x<y$，那么 $-1+x$ ______ $-1+y$；

（3）如果 $15+a>10$，那么 $5+a$ ______ 0；

（4）如果 $2+x<c+1$，那么 x ______ $c-1$.

2. 已知 $a<b$，用“>”或“<”填空，并说明理由：

（1）$a+7$ ______ $b+7$；（2）$a-3$ ______ $b-3$；

（3）$a\div 7$ ______ $b\div 7$；（4）$-3a$ ______ $-3b$.

习题8.1

复习与巩固

1. 用“>”或“<”填空：

（1）a ____ $a+1$；（2）$a+2$ ____ $a-2$；

（3）$1-a$ ____ $-a$；（4）a^2 ____ 0（$a\neq 0$）.

2. 比较下列各组中两数的大小：

（1）$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$；（2）$-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$ 和 $-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}$.

3.（1）由 $-1>-2$ 能得出 $\sqrt{2}-1>\sqrt{2}-2$ 吗？为什么？

（2）由 $-1>-2$ 能得出 $-\sqrt{2}>-2\sqrt{2}$ 吗？为什么？

（3）由 $-1>-2$ 能得出 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ 吗？为什么？

4. 若 $a>0$，$b<0$，$a+b>0$，将 a，b，$-a$，$-b$ 按照从小到大的顺序用“<”连接起来.

5. 求证：

（1）三角形的任意两边之差小于第三边；

（2）三角形的任意一边小于周长的一半.

6. 已知 x_1 和 x_2 是两个实数，且 $x_1>x_2$，试比较 $-3x_1+2$ 和 $-3x_2+2$ 的值的大小.

拓展与延伸

7. 不取近似值，估计 $\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$ 是正数还是负数. 它与 -0.25 哪个大?

8. 用“>”或“<”填空：

（1）如果 $a<b$，那么 $1-a$____$1-b$；　（2）如果 $a+b>2b+1$，那么 a____b；

（3）如果 $x<1$，那么 $-2x+2$____0；　（4）如果 $a<b<0$，则 $\frac{1}{2}(b-a)$____0.

探索与创新

9. 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$ 吗？说明理由.

10. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，比较 a，ab，ab^2 的大小，并将它们按照从小到大的顺序用“<”连接起来.

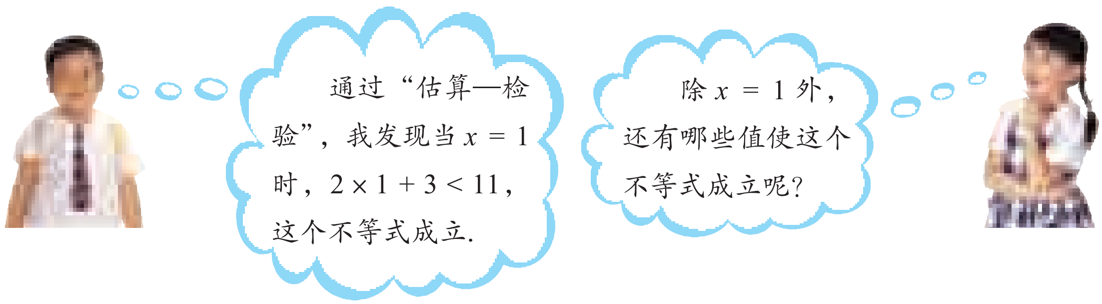
8.2　一元一次不等式

观察与思考

（1）什么数的 2 倍与 3 的和小于 11？你能用不等式表示出这个问题中的不等关系吗？

（2）观察你列出的不等式，你发现它与不等式 $-2<3$，$1+\sqrt{2}>2$，$ac<bc$ 等有什么不同？

（3）不等式 $2x+3<11$ 中含有未知数 x，x 可以取哪些实数呢？你能通过“估算—检验”的方法，说出几个使 $2x+3<11$ 成立的未知数 x 的值吗？



如果不等式中含有未知数，能使这个不等式成立的未知数的值，叫做这个**不等式的解**.

利用“估算—检验”的方法，可以知道 $x=1$ 是不等式 $2x+3<11$ 的一个解，同样地，$x=2$，3 也是这个不等式的解. 除此以外，如 $x=0$，1.5，$-\sqrt{2}$ 等也是这个不等式的解，而 $x=4$，5 ⋯ 不是这个不等式的解. 那么不等式

$$2x+3<11$$

的所有解包括哪些实数呢?

实际上，满足 $x<4$ 的任何一个实数都是不等式 $2x+3<11$ 的解，这样的实数有无数个. 反之，大于或等于 4 的任何一个实数，都不是这个不等式的解.

一般地，一个含有未知数的不等式的所有解的集合，叫做这个不等式的**解集**（solution set）.

不等式 $2x+3<11$ 的解集是 $x<4$. 这个解集可以用数轴上表示数 4 的点的左边部分来表示（图 8–3）.

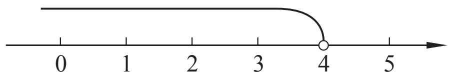


图 8–3

不等式 $2x+3\leqslant 11$ 的意义是“x 的 2 倍与 3 的和不大于 11”，它的解集是 $x\leqslant 4$. 这个解集可以用数轴上表示 4 的点及其左边的部分表示（图 8–4）.

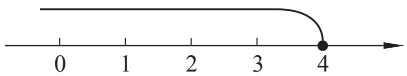
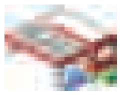


图 8–4

解集 $x<4$ 不包括 4，在数轴上表示 4 的点处画空心圆圈. 解集 $x\leqslant 4$ 包括 4，在数轴上表示 4 的点处画实心圆点.



加油站

日常生活中，常听到“不早于 6 时”、“不晚于 7 时”等说法，如果用 t 表示时间，就是“$t\geqslant 6$”，“$t\leqslant 7$”，这里符号“$\geqslant$”表示“$>$”或“$=$”，读作“大于或等于”，也可说成“不小于”；符号“$\leqslant$”，读作“小于或等于”，也可说成“不大于”. 用符号“$\geqslant$”或“$\leqslant$”表示不等关系的式子，也是不等式.

例1　在数轴上分别表示出下列不等式的解集，并写出它的所有负整数解.

（1）$x>-5$；　　　　（2）$x\geqslant -5$.

解　（1）不等式$x>-5$的解集在数轴上的表示如图8–5①所示，它的负整数解有4个，分别是-4，-3，-2，-1.

①　　　　②

图 8–5

（2）不等式$x\geqslant-5$的解集在数轴上的表示如图8–5②所示，它的负整数解有5个，分别是-5，-4，-3，-2，-1.

例2　分别写出图8–6①②所表示的关于x的不等式的解集.

①　　　　②

图 8–6

解　图8–6①所表示的不等式的解集是$x<2$；图8–6②所表示的不等式的解集是$x\geqslant-1$.

挑战自我

观察图8–6①你发现不等式$x<2$有多少个整数解？有多少个非负整数解？

练 习

1. 在数轴上表示出下列不等式的解集：

（1）$x>-2$；　（2）$x\geqslant-2$；　（3）$x<\frac{5}{2}$；　（4）$x\leqslant\frac{5}{2}$.

2. 如图，写出下列数轴上所表示的关于x的不等式的解集：

（1）　（2）

（第 2 题）

交流与发现

（1）观察下列含有未知数的不等式，你发现它们有哪些共同特征？

$$2x+3>11,\ 3(1-2y)>1-2(y+3),\ \frac{x-3}{2}\leqslant\frac{2x-1}{3}-1.$$

这些不等式都只含一个未知数，不等号左右两边都是整式，并且未知数的次数都是一次，像这样的不等式叫做**一元一次不等式**（linear inequality with one unknown）.

（2）类比一元一次方程的解法，你认为应当通过怎样的变形才能求出不等式 $2x+3>11$ 的解集？变形的依据是什么？

由不等式 $2x+3>11$，

两边同时减去3，得

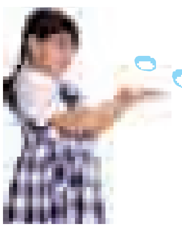
$2x>11-3$（不等式的基本性质1）.

合并同类项　$2x>8$.

两边同除以2，将未知数的系数化为1，得

$x>4$（不等式的基本性质2）.

于是，我们就求出了不等式 $2x+3>11$ 的解集 $x>4$. 像这样，求不等式解集的过程，叫做**解不等式**.



解一个一元一次不等式需要通过适当的变形，用数学符号表示出它的解集，变形的依据是不等式的基本性质.

像解方程一样，解一元一次不等式也可以移项，移项要变号！

例3　解不等式 $3(1-2y)>1-2(y+3)$.

解　去括号，得　$3-6y>1-2y-6$，

移项，得　$-6y+2y>1-6-3$，

合并同类项，得　$-4y>-8$.

系数化为1，得　$y<2$.

这个不等式的解集如图 8−7 所示.

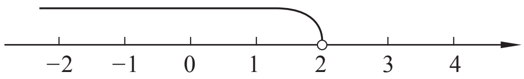


图 8−7

例4　解不等式 $\dfrac{x-3}{-2} \geqslant \dfrac{2x-1}{-3}+1$，并把它的解集在数轴上表示出来.

解　去分母，不等式两边同乘 −6，不等号方向改变，

得　　$3(x-3) \leqslant 2(2x-1)-6$.

去括号，得　　$3x-9 \leqslant 4x-2-6$.

移项，得

$$3x-4x \leqslant 9-2-6.$$

合并同类项，得

$$-x \leqslant 1.$$

系数化为 1，得

$$x \geqslant -1.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 8−8 所示.

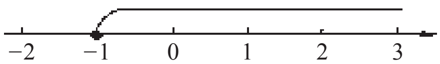


图 8−8

通过例 1 和例 2，你能总结出解一元一次不等式的步骤吗？它与解一元一次方程的步骤有哪些是共同的？有哪些步骤可能用不等式的基本性质 3？这时应当注意什么问题？与同学交流.

练 习

1. 解下列不等式，并把不等式的解集在数轴上表示出来：

（1）$4-2x > x+1$；　　（2）$3(x+4) \leqslant 2(x-1)$；

（3）$\dfrac{x-3}{2} > \dfrac{2x-3}{3}$；　　（4）$\dfrac{x+2}{3} \leqslant \dfrac{3(x-2)}{4}+\dfrac{1}{2}$.

2. 当 t 取哪些实数时，下列不等式关系成立：

（1）$-2t+3$ 不大于 $t-1$；

（2）t 与 2 的和的 3 倍不小于 t 与 4 的差.

习题8.2

复习与巩固

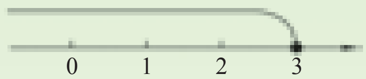
1. 已知不等式 $2x+3\geqslant 5$.

（1）写出它的五个整数解；

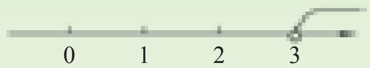
（2）写出它的三个无理数解.

2. 下列不等式的解集在数轴上表示错误的是（　　）.

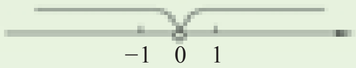
（A）$x\leqslant 3$



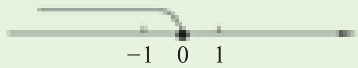
（B）$x>3$



（C）$x\neq 0$



（D）$x<0$



3. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

（1）$-2x+1>0$；　　（2）$6x-3\leqslant 4x-1$；

（3）$\dfrac{x-5}{4}>\dfrac{x+3}{6}$；　　（4）$3(x+2)-5\geqslant 1-2(x-2)$；

（5）$y+\dfrac{y-1}{2}\leqslant\dfrac{y-2}{3}$；　　（6）$2(x+1)-\dfrac{x-2}{3}>\dfrac{7x-2}{2}$.

4. 解不等式 $3(x-1)\geqslant 5(x-3)+6$，并求出它的正整数解.

5. 如果代数式 $\dfrac{3}{2}y-\dfrac{2}{3}(y+1)$ 的值大于1，那么 y 的取值范围是什么？

拓展与延伸

6. 已知关于 x 的一元一次方程 $3x+2k=x-5$ 的解是正数，那么 k 的取值范围是什么？

7. 三个连续的正整数的和小于15. 这样的正整数共有多少组？利用解一元一次不等式把它们分别写出来.

8. 当 a 为何值时，不等式 $a(x-3)>2(a-x)$ 的解集为 $x>4$.

探索与创新

9. 当 m 为怎样的值时，不等式 $\dfrac{5x-3m}{4}>\dfrac{m}{2}-\dfrac{5}{4}$ 与 $3x-1>x+1$ 的解集相同？

10. 当 k 为何值时，关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-3y=5,\\ x+y=k\end{cases}$ 的解满足 $x>y$？

8.3　列一元一次不等式解应用题

观察与思考

（1）在本章“情境导航”中的问题（1）（2）中，哪些是已知量？哪些是未知量？量与量之间的相等或不等关系分别是什么？与同学交流.

（2）如果把问题中的未知量用 x 表示，怎样才能用数学符号表示出问题中的未知量 x 和已知量之间的关系？

设购买 A 型机组 x 台，则购买 B 型机组（$10-x$）台. 根据两种机组的资金不得超过 105 万元的限制条件，可列出一个一元一次不等式，

$$12x+10\times(10-x)\leqslant 105 .$$

解得　$x\leqslant 2.5$，其非负整数解为 $x=0$，1，2 .

因此，符合条件的购买设备的方案有以下 3 种：

① 购买 10 台 B 型机组，费用为 $10\times10=100$（万元）；

② 购买 1 台 A 型机组和 9 台 B 型机组，费用为 $12\times1+10\times9=102$（万元）；

③ 购买 2 台 A 型机组和 8 台 B 型机组，费用为 $12\times2+10\times8=104$（万元）.

在问题（2）中，根据发电量不得少于 20.4 万 kw · h 的要求，依题意，得

$$2.4x+2\times(10-x)\geqslant 20.4 .$$

解得 $x\geqslant1$. 即上述方案 ② 和方案 ③ 都符合发电量的要求，但为了节省资金，应选方案 ②，即购买 1 台 A 型机组和 9 台 B 型机组.

在这一实际问题的解决过程中，我们利用了一元一次不等式表示出问题中未知量与已知量之间的不等关系，从而将实际问题转化为解一元一次不等式的问题. 由此可以体会到不等式同方程、方程组一样也是一种从现实生活中抽象出数学问题后，用数学符号表示的数学模型.

例1　一种电子琴每台进价为 1 800 元，如果商店按标价的八折出售，所得利润仍不低于实际售价的 10%，那么每台电子琴的标价在什么范围内？

解　设电子琴每台标价为 x 元，那么售出一台电子琴所得的利润不低于（$10\% \times 80\% x$）元，根据题意，得

$$80\%x - 1\,800 \geqslant 10\% \times 80\%x .$$

解这个不等式，得

$$x \geqslant 2\,500 .$$

经检验，不等式的解符合题意.

所以，每台电子琴的标价不低于2 500元.

例2　某旅游景点普通门票票价为每位30元，20人及20人以上的团体门票票价为每位25元.

（1）一个旅游团队共有18位游客来景点参观，他们选用哪种购买门票的方式较为便宜?

（2）如果团队人数不足20人，当游客人数为多少时购买20人的团体门票比购买普通门票便宜?

解　（1）18位游客购买普通门票费用为

$$18 \times 30 = 540（元）.$$

如果按20人购买团体门票，费用为

$$20 \times 25 = 500（元），$$

这时选用购买20人的团体门票的方式比购买普通门票便宜.

（2）当游客人数 x 不足20人时，如果按20人购买团体门票比购买普通门票便宜，那么

$$20 \times 25 < 30x,$$

解得　$x > \dfrac{50}{3}$.

因为　$x < 20$，得 $x = 17$，18，19 .

经检验，上面不等式的整数解符合题意.

所以当游客人数是17人、18人、19人时，选择购买20人的团体门票方式比购买普通门票便宜.

想一想，列不等式解实际应用问题一般步骤是什么?

广角镜

用不等式分析问题

问题1　小亮去文具店买铅笔和橡皮，铅笔每支0.5元，橡皮每块0.4元. 小亮带了2元钱，想尽量多买些铅笔和橡皮，他有几种不同的购买方案？

设小亮可买x支铅笔和y块橡皮，其中x，y都是非负整数. 上面的实际问题便转化为解不等式

$$0.5x + 0.4y \leqslant 2. \qquad ①$$

不等式①中含有两个未知数，且未知数的次数都是1次，它是一个二元一次不等式. 能利用一元一次不等式的知识，求出原实际问题的解吗？

由不等式①得

$$y \leqslant \frac{2-0.5x}{0.4}. \qquad ②$$

在原实际问题中，x，y都是非负整数. 取x可能的值进行实验：

当$x=0$时，由②得$y \leqslant 5$. 由题意，适合$y \leqslant 5$的最大整数解为$y=5$，这时小亮最多可买0支铅笔和5块橡皮.

当$x=1$时，由②得$y \leqslant 3.75$. 取适合$y \leqslant 3.75$的最大整数解为$y=3$，这时小亮最多可买1支铅笔和3块橡皮.

仿此x还可以分别取2，3，4，于是得到下表：

x/支	0	1	2	3	4
y/块	5	3	2	1	0
总金额/元	2	1.7	1.8	1.9	2

由上表可以看出，有5种不同的购买方案可供小亮选择.

利用类似的方法，你能解决下面的问题2吗？

问题2　某施工队需要把一批10 m长的铁管截成3 m长的铁管81根，4 m长的铁管32根. 请设计一个方案，使截取时所用掉的10 m长的铁管数量最少.

上面的问题1来源于生活，问题2来源于生产. 两个问题虽然来源不同，但都能转化为我们学过的不等式知识加以解决.

由此可见，学会用数学的思维方式去看问题，会给我们的生活和工作带来方便.

练　习

1. 时代中学举办艺术节. 为装饰会场，八年级一班的同学负责制作 240 条彩带，计划利用 4 天的课余时间完成. 第一天实际制作了 42 条，那么以后平均每天至少要制作多少条彩带，才能按时或提前完成任务？
2. 某项知识竞赛共有 20 道试题，采用如下的记分规则：每道题答对记 10 分，答错或不答扣 5 分. 小亮至少要答对几道题，他的总分才能不少于 80 分？

习题8.3

复习与巩固

1. 大刚和小亮进行投球比赛，每人连投 12 次，投中一次记 2 分，投空一次记 1 分. 大刚先投，投得 18 分，小亮要想超过大刚，应至少投中多少次？
2. 某市出租车收费标准是：起步价为 6 元（即行驶距离不超过 3 km 应付车费 6 元），超过 3 km 后，每增加 1 km 加收 1.4 元（不足 1 km 按 1 km 收费），某人乘坐出租车支付车费 17.2 元. 出租车行驶了多远的距离？
3. 某件商品的进价为 120 元，标价为 180 元，为了促销，商家决定打折销售. 如要保证打折后利率仍不低于20%，应如何打折？
4. 三个连续的正奇数之和小于 20，求这三个正奇数.
5. 小莹在暑假从图书馆借来一本 300 页的科普书，计划 10 天内读完，前 5 天因故只读了 100 页，从第 6 天起，平均每天至少要读多少页才能按计划读完？

拓展与延伸

6. A，B 两地相距 120 km . 汽车货运公司与铁路货运公司都开办运输业务，所需费用如下表所示（注：“元 / 吨 · km” 表示 1 吨货物运送 1 km 所需的费用）：

运输工具	运费/元（吨 · km）	过路费/元	装卸及管理费/元
汽车	2	200	0
火车	1.8	0	1 400

某客户有一批货物需从 A 地运往 B 地，根据他所运货物的质量，采取铁路货运的方式运输所需费用较少. 这批货物的质量不少于多少吨？

探索与创新

7. 某施工工地每天需挖土 700 m^3，现有甲、乙两队施工，如果甲队每小时挖土 55 m^3，需要费用 1 100 元，乙队每小时挖土 45 m^3，需要费用 990 元.

（1）甲、乙两队同时挖土，每天需几小时？

（2）甲、乙两队每挖土 1 m^3 的费用各是多少元？如果规定工地每天最多挖土费用不超过 14 740 元，那么甲队每天至少挖土多少立方米？

（3）在问题（2）中，能否改问乙队每天至少挖土多少立方米？

8.4　一元一次不等式组

观察与思考

思考下面的问题，并与同学交流.

（1）在直角坐标系中，当 x 满足什么条件时，点 $P(3x-9,\ 1+x)$ 在第二象限？

要使点 P 在第二象限，不等式

$$3x-9<0, \qquad ①$$

和不等式

$$1+x>0 \qquad ②$$

必须同时成立，即 x 必须满足

$$\begin{cases} 3x-9<0, & ① \\ 1+x>0. & ② \end{cases}$$

将不等式①与②联立，便组成了一个**不等式组**（system of linear inequalities），由几个含有同一个未知数 x 的一元一次不等式所组成的不等式组，叫做**一元一次不等式组**.

（2）当 x 在什么范围内取值，能使上面不等式组中的两个不等式同时成立呢？

分别求出不等式①与②的解集，得 $x<3$ 与 $x>-1$，并把它们在同一条数轴上表示出来（图 8-9）.

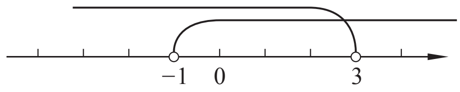


图 8-9

由图 8-9 可以看出不等式①与②的解集的公共部分为 $-1<x<3$.

这就是说，使 $x<3$ 且 $x>-1$ 同时成立的 x 的范围是 $-1<x<3$. 因此，当 $-1<x<3$ 时，点 $P(3x-9,\ 1+x)$ 在第二象限.

一般地，一元一次不等式组中各个不等式的解集的公共部分，叫做这个一元一次**不等式组的解集**. 例如，$-1<x<3$ 是不等式组 $\begin{cases}3x-9<0,\\1+x>0\end{cases}$ 的解集.

（3）类似地，当 x 分别满足什么条件时，点 $P(3x-9,\ 1+x)$ 在第一象限、第三象限或第四象限？

根据题意，x 应当分别满足下面三个一元一次不等式组：

$$\begin{cases}3x-9>0,\\1+x>0;\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-9<0,\\1+x<0;\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-9>0,\\1+x<0.\end{cases}$$

它们可以分别整理成

$$\begin{cases}x>3,\\x>-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x<3,\\x<-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x>3,\\x<-1.\end{cases}$$

（4）你能利用数轴分别确定上面所得到的一元一次不等式组的解集吗？

把每个不等式组中两个不等式的解集分别在同一条数轴上表示出来（图 8-10）：

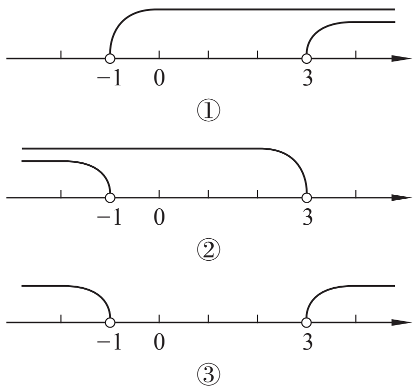


图 8-10

由图 8-10①可以看出，解集 $x>3$ 与 $x>-1$ 的公共部分是 $x>3$，所以原不等式组 $\begin{cases}3x-9<0,\\1+x>0\end{cases}$ 的解集是 $x>3$. 因此，当 $x>3$ 时，点 P 在第一象限.

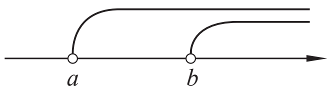
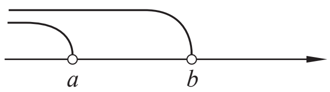
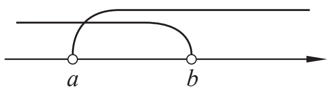
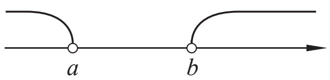
由图 8-10②可以看出，解集 $x<3$ 和 $x<-1$ 的公共部分是 $x<-1$，所以原不等式组 $\begin{cases}3x-9<0,\\1+x>0\end{cases}$ 的解集是 $x<-1$. 因此，当 $x<-1$ 时，点 P 在第三象限.

由图 8-10③可以看出，解集 $x>3$ 和 $x<-1$ 没有公共部分，所以原不等式组 $\begin{cases}3x-9>0,\\1+x<0\end{cases}$ 无解. 因此，无论 x 取何值，点 P 都不会在第四象限.

（5）一般地，一元一次不等式组经过整理，可化为下面四种情况中的一种：

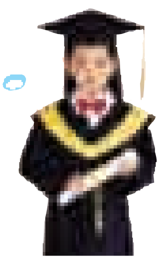
$$\begin{cases}x>a,\\x>b;\end{cases}\quad\begin{cases}x<a,\\x<b;\end{cases}\quad\begin{cases}x>a,\\x<b;\end{cases}\quad\begin{cases}x<a,\\x>b.\end{cases}\quad(a<b)$$

分别在数轴上把它们表示出来，可以得到一元一次不等式组的解集有下列四种情况：

整理后的一元一次不等式组	在同一条数轴上的表示	一元一次不等式组的解集
$\begin{cases}x>a,\\x>b.\end{cases}(a<b)$		$x>b$
$\begin{cases}x<a,\\x<b.\end{cases}(a<b)$		$x<a$
$\begin{cases}x>a,\\x<b.\end{cases}(a<b)$		$a<x<b$
$\begin{cases}x<a,\\x>b.\end{cases}(a<b)$		无解

（6）求不等式组的解集或确定不等式组无解的过程叫做解不等式组. 你能通过上面的探索活动，总结出解一元一次不等式组的步骤吗？

解一元一次不等式组，先分别求出不等式组中每个不等式的解集，并在同一条数轴上表示出来，再利用数轴，确定解集是否有公共部分，最后写出不等式组的解集.



例1　解不等式组

$$\begin{cases}5x-2\leqslant 3(x+4), & ①\\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x. & ②\end{cases}$$

解　解不等式①，得

$$x \leqslant 7.$$

解不等式②，得

$$x \leqslant 4.$$

在同一条数轴上表示出不等式①，②的解集（图8−11）.

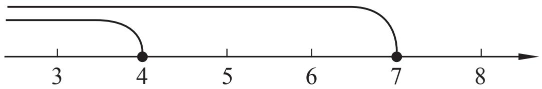


图 8−11

所以该不等式组的解集是$x \leqslant 4$.

练 习

1. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x < -2, \\ x \leqslant 1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$

2. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} 2x + 3 < 5, \\ 3x - 2 \leqslant 4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2(x+1) \geqslant 6, \\ 3(x-2) < 4x. \end{cases}$

例2　解不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} < \dfrac{3x}{5} - \dfrac{x}{10}, & ① \\ \dfrac{3x-2}{3} \geqslant \dfrac{x}{3} + \dfrac{x-2}{4}. & ② \end{cases}$$

解　解不等式①，得　$x > 2$.

解不等式②，得　$x \geqslant \dfrac{2}{5}$.

在同一条数轴上表示出不等式①与②的解集（图8−12）.

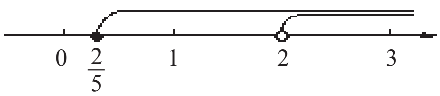


图 8−12

所以该不等式组的解集是$x>2$.

例3 解不等式$2\leqslant\frac{3x-1}{4}<5$，并写出它的所有整数解.

解法1 原不等式即不等式组

$$\begin{cases}\frac{3x-1}{4}\geqslant 2, & ①\\ \frac{3x-1}{4}<5. & ②\end{cases}$$

解不等式①，得

$$x\geqslant 3.$$

解不等式②，得

$$x<7.$$

在同一条数轴上分别表示出不等式①与②的解集（图8−13）.

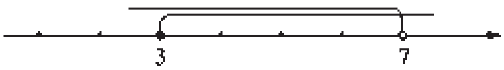


图 8−13

所以该不等式的解集为$3\leqslant x<7$，它的整数解为3，4，5，6.

解法2 将原不等式的左边、中间和右边三部分都乘4，得

$$8\leqslant 3x-1<20.$$

在这个不等式的左边、中间和右边都加上1，得

$$9\leqslant 3x<21.$$

将这个不等式的左边、中间和右边都除以3，得

$$3\leqslant x<7.$$

所以，原不等式的解集是$3\leqslant x<7$. 它的整数解为3，4，5，6.

比较一下，解法1与解法2有什么不同？与同学交流.

挑战自我

当a在什么范围内取值时，关于x的一元一次方程$\frac{2x+a}{3}=\frac{1-x}{2}$的解满足$-1\leqslant x\leqslant 1$？

史海漫游

从“韩信点兵”谈起

“韩信点兵”是一个流传很广的古代数学故事. 相传汉高祖刘邦有一次叫来大将军韩信，又传令一小队士兵按命令在隔墙站队，让队长只报出最后一排的人数. 然后向士兵发令：“每三人站成一排.”队伍站好以后，队长报告：“只有二人.”刘邦又传令：“每五人站成一排.”队长报告：“只有三人.”刘邦再传令：“每七人站成一排.”队长报告：“只有二人.”刘邦问韩信：“你知道这队士兵有多少人吗？”韩信脱口而出：“23人.”刘邦大吃一惊，不得不佩服韩信的聪明.

最早提出并记叙这个数学问题的是《孙子算经》卷下第26题：“今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三.”其大意是：求一个数，使它被3除余2；被5除余3；被7除余2. 答案23是满足上述条件的最小正整数解.《孙子算经》给出了具体解法：“凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五.”意思是：5和7的公倍数中被3除余1最小的数是70，3和7的公倍数中被5除余1最小的数是21，3和5的公倍数中被7除余1最小的数是15. 在此基础上，进一步找出余数符合题目要求的数；用70乘2得140，140是5和7的公倍数且被3除余2；用21乘3得63，63是3和7的公倍数且被5除余3；用15乘2得30，30是3和5的公倍数且被7除余2. 将得到的三数140，63，30相加得233，它被3除余2，被5除余3，被7除余2，是符合题目要求的一个数. 实际上，233与3，5，7的最小公倍数105的任意整数倍的和$233+105n$（n是整数）都满足这三个要求. 由于在“韩信点兵”的故事中提到士兵只是“一小队”，不会超过100人，故可利用下面的不等式求解

$$0<233+105n\leqslant 100,$$

得　$\dfrac{-233}{105}<n\leqslant\dfrac{-133}{105}$.

它的整数解为　$n=-2$.

将$n=-2$代入$233+105n$，得　$233+105\times(-2)=23$（人）.

宋代秦九韶在《数书九章》中具体算出上面解法中的70，21，15. 这个方法称之为“大衍求一术”，宋代数学家周密称它为“鬼谷算”、“隔墙算”，杨辉称它为“翦管术”，明代程大位称它为“物不知总”、“韩信点兵”，并在《算法统宗》中将这一算法编成歌诀：“三人同行七十（70）稀，五树梅花廿一（21）枝，七子团圆月正半（15），除百零五（105）便得知.”“大衍求一术”是我国古代最有创造性的数学成果之一. 同类算法直到1801年才出现在德国数学家高斯的《算术研究》中. 1852年英国传教士伟烈亚力最早将它介绍到西方，在国外的抽象代数学中，将其作为重要定理，称为“中国剩余定理（Chinese remainder theorem）”或“孙子定理”.

练 习

1. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+3<1-\dfrac{x+1}{5}, \\ \dfrac{2x-1}{3}<\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1}{6}; \end{cases}$　　（2）$3\leqslant\dfrac{3-x}{2}+4\leqslant7$.

2. 如果$-2a$，a，$1-a$三个实数在数轴上所对应的点从左到右依次排列，求a的取值范围.

习题8.4

复习与巩固

1. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x\geqslant0, \\ 2x+1>5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x<-1, \\ 3x-4>5x; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x-4<-6, \\ -3x-2<6; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 3x+2<-6, \\ x+3<2x-6. \end{cases}$

2. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} 2(1-2x)<3(2x-1), \\ 2-\dfrac{1}{2}x\leqslant x+3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{2-5x}{6}<\dfrac{2x-3}{2}, \\ \dfrac{x+2}{5}>\dfrac{x-1}{4}; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

3. 解下列不等式：

（1）$-1\leqslant\dfrac{1-4x}{3}\leqslant3$;　　（2）$-8\leqslant-6-\dfrac{3x-2}{4}<-5$.

4. 如果点$P(3m-9, 1-m)$在第三象限，且m为整数，求P点的坐标.

5. 当一个等腰三角形底角的度数满足什么条件时，它的顶角是一个大于60°的锐角？

6. 如果不等式组$\begin{cases} x<8, \\ x>m \end{cases}$有解，利用数轴确定$m$的取值范围.

拓展与延伸

7. 已知关于x，y的方程组$\begin{cases}x+y=3a+9,\\x-y=5a-1\end{cases}$的解是一对正数，求$a$的取值范围.

8. 请写出两个一元一次不等式组，使它们的解集都是$1\leqslant x<3$.

9. 如果不等式组$\begin{cases}-x+2<x-6,\\x>m\end{cases}$的解集为$x>4$，试确定$m$的取值范围.

探索与创新

10. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}x-a\geqslant 0,\\3-2x>-1\end{cases}$共有5个整数解，求$a$的取值范围.

11. 已知不等式组$\begin{cases}x>-1,\\x<1,\\x<1-k.\end{cases}$

（1）当$k=-\dfrac{1}{2}$时，写出它的解集；

（2）当$k=\dfrac{1}{2}$时，写出它的解集；

（3）当$k=3$时，写出它的解集；

（4）由（1）（2）（3）当k的值发生变化时，原不等式组的解集也发生变化，试根据k值的变化情况，写出原不等式组的解集.

12. 如果不等式组$\begin{cases}2x-3a<7b,\\6b-3x<5a\end{cases}$的解是$5<x<22$，求$a$，$b$的值.

回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容？总结一下，并与同学交流.
2. 在日常生活和生产实际中，不等关系到处存在.你能举出几个不等关系的实例吗？
3. 不等式有哪些基本性质？它与等式的基本性质有哪些类似和不同？
4. 什么是一元一次不等式？一元一次不等式的解与一元一次方程的解有什么区别？
5. 解一元一次不等式的步骤是什么？与解一元一次方程相比，解一元一次不等式应注意哪些问题？
6. 怎样在数轴上表示出一元一次不等式的解集？表示时应当注意哪些问题？
7. 解一元一次不等式组的一般步骤是什么？
8. 利用数轴，怎样确定由两个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的不等式组

的解集？

9. 列一元一次不等式解决实际问题的关键是什么？

10. 结合实例，说一说转化、数形结合、数学模型等数学思想在本章中的应用.

综合练习

复习与巩固

1. 指出下列变形分别依据了不等式的哪条基本性质：

（1）由 $a-8<7$，得 $a<15$；　　（2）由 $\frac{2}{5}b>a$，得 $2b>5a$；

（3）由 $5x>3x-2$，得 $2x>-2$；　　（4）由 $-\frac{1}{5}x<-3$，得 $x>15$.

2. 解下列不等式，并把它们的解集分别在数轴上表示出来：

（1）$2(x+8)<3(x-2)+1$；　　（2）$\frac{x+2}{4}-\frac{2x-3}{6}\geqslant 1$.

3. 利用数轴，确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x+3>2x-5, \\ 3x-5<x+1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 5x>4x+5, \\ 2x<3x+2; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x+1<3-x, \\ \frac{x-2}{4}<\frac{x-2}{3}; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 2x-7<3(1-x), \\ \frac{4}{3}x+3\geqslant 1-\frac{2}{3}x. \end{cases}$

4. 求不等式 $\frac{1-x}{2}<\frac{3x-2}{3}-\frac{9-2x}{4}\leqslant\frac{x-1}{2}$ 的整数解.

5. 连队执行救灾任务，原定用 8 h 行军 40 km 到达目的地. 按计划走了 30 min 后，接到命令，要求该连队至少提前 30 min 到达，这个连队的行军速度至少提高到多少？

6. x 取哪些正整数时，不等式 $x+3\geqslant 6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

7. 当 a 为何值时，关于 x 的一元一次方程 $(a-2)x+4=-ax$ 的解为正数？

8. 如果不等式组 $\begin{cases} x<8, \\ x>n \end{cases}$ 有解，那么 n 的取值范围是什么？

9. （选择题）设 a 是大于 1 的实数，如果 a，$\frac{a+2}{3}$，$\frac{2a+1}{3}$ 在数轴上对应的点分别记为 A，B，C，那么这三点自左至右的顺序是（　　）.

（A）C，B，A　　（B）B，C，A

（C）A，B，C　　（D）C，A，B

10. 如果关于x的不等式$(a+1)x>a+1$的解集是$x<1$，求a的取值范围.

拓展与延伸

11. k为何值时，解方程组$\begin{cases}x+y=2k,\\3x-y=4\end{cases}$得到的$x$，$y$的值，

（1）都小于1？

（2）都不小于2？

12. 某运输公司要将300吨货物运往某地，现有A，B两种型号的汽车调用. 已知A型汽车每辆可装该货物20吨，B型汽车每辆可装15吨. 在每辆汽车不超载的情况下，要把这300吨货物一次性装运完，并且A型汽车确定要用7辆. 至少调用B型车多少辆？

13. k取哪些整数值时，不等式$3x-k\leqslant 0$的正整数解是1，2，3？

14. 如果不等式组$\begin{cases}x-b>0,\\x-b<1\end{cases}$的解集中任何一个$x$的值均不在$2\leqslant x\leqslant 5$的范围内，则$b$的取值范围是什么？

探索与创新

15. 在$\triangle ABC$中，已知$a>b$，它的周长为p，在下列4个不等关系

① $3b<p<3a$　　② $a+2b<p<2a+b$

③ $2b<p<2(a+b)$　　④ $2a<p<2(a+b)$

中，p满足的不等关系是哪几个？

*16. 在关于x_1，x_2，x_3的三元一次方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=n_1,\\x_2+x_3=n_2,\\x_3+x_1=n_3\end{cases}$$

中，已知$n_1>n_2>n_3$，不解这个方程组，试比较x_1，x_2，x_3的大小，并用“<”把它们从小到大连接起来.

17. 某商场计划从厂家购进甲、乙、丙三种型号的电冰箱80台，其中甲种电冰箱的台数是乙种电冰箱台数的2倍，并且总金额不超过132 000元. 已知甲、乙、丙三种电冰箱的出厂价每台分别是1 200元、1 600元、2 000元.

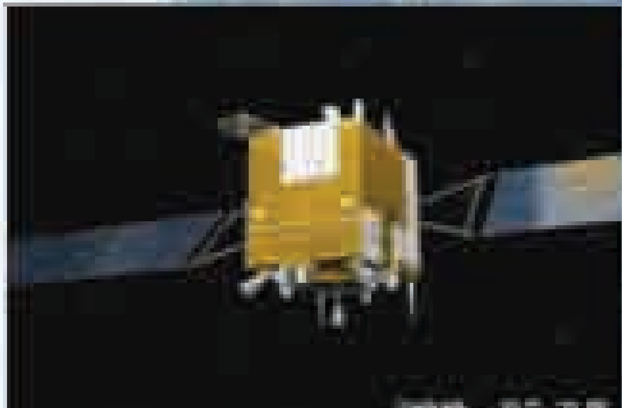
（1）至少购进乙种电冰箱多少台？

（2）如果要求甲种电冰箱的台数不超过丙种电冰箱的台数，则有哪几个购买方案？哪个方案最省钱？

第 9 章　二次根式

内容提要

- 二次根式和它的性质
- 最简二次根式
- 二次根式的加法与减法
- 二次根式的乘法与除法
- 二次根式的四则运算


“嫦娥一号”卫星

情境导航

我国自主研制的第一个月球探测器——“嫦娥一号”卫星，于2007年10月24日在西昌卫星发射中心发射成功，“嫦娥”奔月旅程正式开始.

（1）运用运载火箭发射航天飞行器，火箭必须达到一定的速度，才能克服地球引力，将飞行器送入环绕地球运行的轨道. 这个最小速度称为第一宇宙速度. 第一宇宙速度的计算公式是 $V_1=\sqrt{gR}$，其中 $g=9.8\ \text{m/s}^2$，R 为地球的半径. 你能求出第一宇宙速度吗?

（2）飞行器脱离地球引力，进入围绕太阳运行的轨道所需要的最小速度为第二宇宙速度. 第二宇宙速度的计算公式为 $V_2=\sqrt{2}V_1$，第二宇宙速度是多少?

9.1　二次根式和它的性质

交流与发现

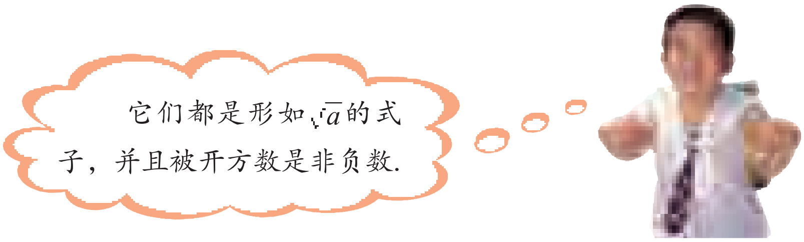
山青林场有甲、乙、丙、丁四块正方形苗圃. 已知甲苗圃的面积为 S m^2.

（1）如果乙苗圃的面积比甲苗圃小 25 m^2，那么乙苗圃的边长是多少?

（2）如果丙苗圃的面积为甲苗圃的 2 倍，那么丙苗圃的边长是多少?

（3）如果丁苗圃的面积是甲苗圃的面积的 $\frac{1}{p}$，那么丁苗圃的边长是多少?

（4）观察上面三个问题列出的算式 $\sqrt{S-25}$，$\sqrt{2S}$，$\sqrt{\frac{S}{p}}$ 以及你已学过的算术平方根 $\sqrt{2}$，$\sqrt{9}$，$\sqrt{\frac{1}{3}}$ 等，你发现它们在表达形式上有什么共同特征? 与同学交流.



一般地，

> 形如 $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子叫做**二次根式**（quadratic radical），其中 a 叫做被开方式.

例1　x 取什么实数时，二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义?

解　在实数范围内，二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义的条件是被开方式 $2x-1\geqslant 0$. 解这个一元一次不等式，得 $x\geqslant \frac{1}{2}$.

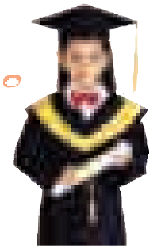
即当 x 取大于或等于 $\frac{1}{2}$ 的实数时，二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义.

我们知道，$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）表示 a 的算术平方根，即

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).$$

你能说出在这个等式中，有哪些非负数吗?

在等式 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ 中，a，$\sqrt{a}$，$(\sqrt{a})^2$ 都是非负数.



利用上面的等式，可以计算二次根式的平方.

例2　计算：

（1）$(\sqrt{15})^2$；　　（2）$(-\sqrt{0.83})^2$；　　（3）$(-3\sqrt{2})^2$.

解　（1）$(\sqrt{15})^2=15$；

（2）$(-\sqrt{0.83})^2=(\sqrt{0.83})^2=0.83$；

（3）$(-3\sqrt{2})^2=(-3)^2\times(\sqrt{2})^2=9\times 2=18$.

练　习

1. 下列各式是否二次根式？说明理由.

（1）$\sqrt{5}$；　　（2）$\sqrt{-5}$；　　（3）$\sqrt[3]{5}$；　　（4）$\sqrt{-\frac{1}{a}}\ (a<0)$.

2. 当 a 分别取什么实数时，下列各式有意义？

（1）$\sqrt{a+2}$；　　（2）$\sqrt{\frac{1}{a+2}}$；　　（3）$\sqrt{a^2+1}$.

3. 计算：

（1）$(\sqrt{12})^2$；　　（2）$\left(-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$；

（3）$(2\sqrt{3})^2$；　　（4）$\left(-5\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$.

观察与思考

（1）回忆一下，你过去是怎样求4，9，$\frac{1}{4}$，0的算术平方根的？

（2）计算 $\sqrt{2^2}$，$\sqrt{3^2}$，$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$，$\sqrt{0^2}$ 的值，你发现了什么？

（3）一般地，当 $a \geqslant 0$ 时，a^2 的算术平方根是多少？由此你能得到一个怎样的等式？

$$\sqrt{a^2} = a\ (a \geqslant 0).$$

（4）比较等式 $(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$ 与 $\sqrt{a^2} = a\ (a \geqslant 0)$，它们有哪些相同和不同？

例3　化简：

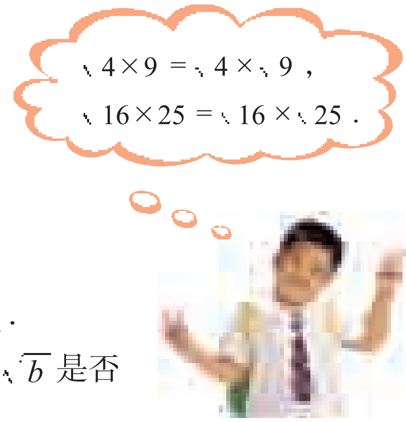
（1）$\sqrt{0.01}$；　　（2）$\sqrt{(-2)^2}$；　　（3）$\sqrt{9a^2}$ [1].

解　（1）$\sqrt{0.01} = \sqrt{(0.1)^2} = 0.1$.

（2）$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$.

（3）$\sqrt{9a^2} = \sqrt{(3a)^2} = 3a$.

交流与发现



（1）先观察下面每组中的两个算式，说出它们有什么不同，然后分别计算它们，比较运算的结果，你有什么发现？

① $\sqrt{4 \times 9} =$ ________，$\sqrt{4} \times \sqrt{9} =$ ________；

② $\sqrt{16 \times 25} =$ ________，$\sqrt{16} \times \sqrt{25} =$ ________ .

（2）如果 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，你猜测 $\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 是否相等？你能证明你的结论吗？

因为 $(\sqrt{ab})^2 = ab$，$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$，

---

[1] 如果没有特别说明，本章中被开方式中的所有字母均表示正数.

且$\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$与ab都是非负数，由算术平方根的意义，$\sqrt{ab}$与$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$都是ab的算术平方根，但ab的算术平方根只有一个，因此，

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0，b\geqslant 0).$$

这就是说，**积的算术平方根，等于积中各因式的算术平方根的积**.

例4　化简：

（1）$\sqrt{64\times 49}$；　　（2）$\sqrt{27}$；　　（3）$\sqrt{4a^2}$.

解　（1）$\sqrt{64\times 49}=\sqrt{64}\times\sqrt{49}=8\times 7=56$.

（2）$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

（3）$\sqrt{4a^2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}=2a$.

挑战自我

为了使二次根式$\sqrt{120n}$的值是正整数，实数n的最小值是多少？整数n的最小值呢？

练 习

1. 计算：

（1）$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$；　　（2）$\sqrt{0.25}$；　　（3）$-\sqrt{(2\times 3)^2}$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{25\times 169}$；　　（2）$\sqrt{24\times 6}$；　　（3）$\sqrt{20\times 35}$.

3. 化简：

（1）$\sqrt{32}$；　　（2）$\sqrt{200}$；　　（3）$\sqrt{ab^2}$.

交流与发现

（1）观察式子$\sqrt{\frac{a}{b}}$与$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，它们的运算顺序有什么不同？要使这两个式子都有意义，a，b应当分别满足什么条件？

（2）你能仿照积的算术平方根的运算性质的探索过程，探索当 $a\geqslant 0$，$b>0$ 时，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 与 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 之间的大小关系吗？你得到一个什么结论？

（3）你能证明你的结论成立吗？

将 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 与 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 分别平方，得

因为 $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}$；

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}.$$

且 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 都是非负数，所以 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 都是 $\dfrac{a}{b}$ 的算术平方根，但 $\dfrac{a}{b}$ 的算术平方根只有一个，由此得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

这就是说，**商的算术平方根，等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.**

例5 化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{81}{121}}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{3}{400}}$；　　（3）$\sqrt{\dfrac{9}{4a^2}}$.

解 （1）$\sqrt{\dfrac{81}{121}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{121}}=\dfrac{9}{11}$.

（2）$\sqrt{\dfrac{3}{400}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{400}}=\dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

（3）$\sqrt{\dfrac{9}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4a^2}}=\dfrac{3}{2a}$.

例6 化去下列各式根号里的分母：

（1）$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{1}{5a}}$.

解 （1）解法1：$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\times 2}{2\times 2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法2：$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

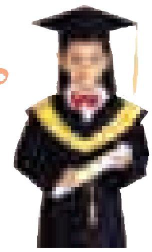
（2）$\sqrt{\frac{1}{5a}}=\sqrt{\frac{5a}{5a\cdot 5a}}=\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{(5a)^2}}=\frac{\sqrt{5a}}{5a}$.

例6（2）还有别的解法吗？与同学交流.

由例4、例5、例6可以发现，积或商的算术平方根化简后可以是一个整式或分式，如56，$\frac{9}{11}$，$\frac{3}{2a}$，也可以仍是二次根式，如$9\sqrt{5}$，$\frac{\sqrt{3}}{20}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{5a}}{5a}$. 观察这些化简后的二次根式的被开方式，你发现它们有什么共同特征？

这些二次根式的被开方式中都不含分母，并且也都不含有能开得尽方的因式，像这样的二次根式称为**最简二次根式**.

如果一个二次根式不是最简二次根式，那么可以利用积或商的算术平方根的性质，把它化简.



例7 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{32}$； （2）$\sqrt{\frac{125}{27}}$； （3）$\sqrt{\frac{a^3}{8}}$.

解 （1）$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$.

（2）$\sqrt{\frac{125}{27}}=\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{27}}=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{15}}{9}$.

（3）$\sqrt{\frac{a^3}{8}}=\sqrt{\frac{2a^3}{16}}=\frac{\sqrt{2a\cdot a^2}}{\sqrt{16}}=\frac{a\sqrt{2a}}{4}$.

挑战自我

（1）指出下列实数排列的规律，并写出第n个实数.

$\sqrt{2}$，　2，　$\sqrt{6}$，　$2\sqrt{2}$，　$\sqrt{10}$，…

（2）在这一列数中，2是第1个有理数，请指出第2个、第3个有理数，以及它们分别是这列数中的第几个实数. 你能写出这列数中的第k个有理数吗？

练 习

1. 化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{100}{16}}$；　（2）$\sqrt{\dfrac{128}{36}}$；　（3）$\sqrt{\dfrac{32}{25}}$；　（4）$\sqrt{\dfrac{492}{9}}$.

2. 下列根式中，哪些是最简二次根式？把不是最简二次根式的化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{14}$；　（2）$\sqrt{72}$；　（3）$\sqrt{25a^3}$；

（4）$\sqrt{\dfrac{y}{x}}$；　（5）$\sqrt{a+b^2}$；　（6）$\sqrt{(a+b)^3}$.

3. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{\dfrac{3}{20}}$；　（2）$\sqrt{27b^3}$；　（3）$\sqrt{\dfrac{ab}{27}}$.

习题9.1

复习与巩固

1. a取什么实数时，下列各式有意义？

（1）$\sqrt{12-3a}$；　（2）$\sqrt{2a}$；　（3）$\dfrac{1}{\sqrt{4a+3}}$；　（4）$\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}$.

2. 计算：

（1）$(\sqrt{98})^2$；　（2）$\left(\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right)^2$；　（3）$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$.

3. 化简：

（1）$\sqrt{16\times81}$；　（2）$\sqrt{16\times25\times121}$；　（3）$\sqrt{\dfrac{25}{4}\times\dfrac{169}{49}}$；

（4）$\sqrt{8m^2}$；　（5）$\sqrt{8\times18}$；　（6）$\sqrt{16(x+4)}$.

4. 化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{121}{49}}$；　（2）$\sqrt{\dfrac{25}{144}}$；

（3）$\sqrt{5+\dfrac{4}{9}}$；　（4）$\sqrt{\dfrac{0.01\times144}{0.36\times81}}$.

5. 化去根号里的分母：

（1）$\sqrt{\dfrac{1}{50}}$；　（2）$\sqrt{\dfrac{2}{45}}$.

6. 判断下列各式是否成立：

（1）$\sqrt{64+36}=\sqrt{64}+\sqrt{36}$；　（2）$\sqrt{64\times36}=\sqrt{64}\times\sqrt{36}$；

（3）$\sqrt{64-36}=\sqrt{64}-\sqrt{36}$；　（4）$\sqrt{\dfrac{64}{36}}=\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}}$.

7. 化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{1}{27}}$；　（2）$\sqrt{484}$；　（3）$\sqrt{\dfrac{27}{8}}$.

8. 地球的半径约为 6 370 km，回答“情境导航”中的问题（1）.

拓展与延伸

9. 当 x 在什么范围内取值时，$\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-x}}=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{1-x}}$？

10. 物体从高处自由下落，下落时间 t（s）与下落的高度 h（m）之间的关系是：

$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$（其中 $g\approx9.8\ \text{m/s}^2$）. 当 $h=490$ m 时，求下落的时间 t.

探索与创新

11.（1）判断下列各式是否成立：

$$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}；\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}；\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}；\cdots$$

（2）根据（1）的结果，你发现什么规律？请用含有 n 的式子将规律表示出来，并注明 n 的取值范围；

（3）证明你在（2）中写出的等式是正确的.

9.2　二次根式的加法与减法

交流与发现

如图 9-1，要用栅栏围成两个相邻的正方形羊圈，它们的面积分别为 27 m^2 和 48 m^2，栅栏的长度为多少米？与同学交流.

因为两个正方形的面积分别为 27 m^2 和 48 m^2，所以它们的边长分别为 $\sqrt{27}$ m 和 $\sqrt{48}$ m. 因此，栅栏的长度可以通过算式 $3\sqrt{27}+4\sqrt{48}$ 进行计算.

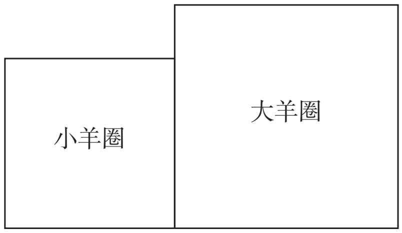


图 9-1

观察这个算式，发现 $\sqrt{27}$ 和 $\sqrt{48}$ 不是最简二次根式，可先把它们分别化简，于是

$$3\sqrt{27}+4\sqrt{48}=3\sqrt{9\times3}+4\sqrt{16\times3}=9\sqrt{3}+16\sqrt{3}.$$

算式 $9\sqrt{3}+16\sqrt{3}$ 的两项中都含有 $\sqrt{3}$，根据乘法对加法的分配律，可以将它们像合并同类项一样，把系数 9 和 16 加以合并，从而得到

$$9\sqrt{3}+16\sqrt{3}=(9+16)\sqrt{3}=25\sqrt{3}.$$

所以，栅栏的长度等于 $25\sqrt{3}$ m. 类似地，

$5\sqrt{2}+\sqrt{2}=(5+1)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

$6\sqrt{5}-4\sqrt{5}-2\sqrt{5}=(6-4-2)\sqrt{5}=0$.

二次根式相加减，应先把各个二次根式化为最简二次根式，然后把其中被开方式相同的二次根式分别合并.

例1 计算：

（1）$\sqrt{54}+\sqrt{24}$；　　（2）$\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}$.

解 （1）$\sqrt{54}+\sqrt{24}=\sqrt{9\times 6}+\sqrt{4\times 6}$

$=3\sqrt{6}+2\sqrt{6}$

$=5\sqrt{6}$.

（2）$\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

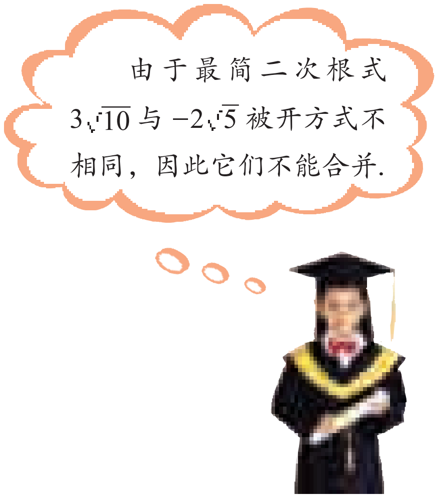
$=-\sqrt{2}$.

例2 计算：$\sqrt{90}-2\sqrt{20}+5\sqrt{\frac{4}{5}}$.

解 $\sqrt{90}-2\sqrt{20}+5\sqrt{\frac{4}{5}}$

$=3\sqrt{10}-4\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$=3\sqrt{10}-2\sqrt{5}$.



挑战自我

把二次根式 $\sqrt{23-a}$ 与 $\sqrt{8}$ 分别化成最简二次根式后，被开方式相同.

（1）如果 a 是正整数，那么符合条件的 a 有哪些？

（2）如果 a 是整数，那么符合条件的 a 有多少个？最大值是什么？有没有最小值？

练 习

1. 将下列二次根式化成最简二次根式，然后找出其中被开方式相同的二次根式：

$\sqrt{12}$，　$\sqrt{27}$，　$\sqrt{8}$，　$\sqrt{\frac{1}{2}}$，　$\sqrt{\frac{1}{48}}$.

2. 计算：

（1）$2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+6\sqrt{2}$；　　（2）$5\sqrt{3}+3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$；

（3）$\sqrt{75}+7\sqrt{12}$；　　（4）$\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

习题9.2

复习与巩固

1. 计算：

（1）$3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$；　　（2）$3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{40}-\sqrt{\dfrac{2}{5}}+2\sqrt{0.1}$；　　（4）$2\sqrt{7}+3\sqrt{28}-\sqrt{63}$.

2. 计算：

（1）$5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+2\sqrt{20}-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$；　　（2）$\sqrt{490}-\sqrt{40}+\sqrt{250}$.

3. 当 $a=15$ 时，求代数式 $\sqrt{2a-3}-\sqrt{5a}+\sqrt{7a+3}$ 的值.

拓展与延伸

4. 如果 a，b 都是有理数，且满足 $a+2b+\sqrt{2}=4+(a-b)\sqrt{2}$，求 a，b 的值.

探索与创新

5. 在矩形 $ABCD$ 中，不重叠地放上两张面积分别是 4 和 2 的正方形纸片. 矩形 $ABCD$ 至少有多大面积没被正方形盖住？

9.3　二次根式的乘法与除法

观察与思考

（1）把 9.1 节中积的算术平方根与商的算术平方根的性质逆向使用，你能得到两个怎样的等式？

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0)$.

（2）观察你得到的两个等式，它们的左右两边各含有哪几种运算？它们的运算顺序分别具有什么特征？

我们把上面的两个等式分别作为二次根式的乘法和除法法则.

例1 计算：

（1）$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$；　　（2）$2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{\dfrac{1}{6}}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$；　　（4）$\dfrac{5}{\sqrt{5}}$.

解

（1）$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{5\times 20}=\sqrt{100}=10$.

（2）$2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{\dfrac{1}{6}}=2\times 5\times\sqrt{2\times\dfrac{1}{6}}=10\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

（3）$\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{48}{3}}=\sqrt{16}=4$.

（4）$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{25}{5}}=\sqrt{5}$.

对于例1（4），小亮的解法是：$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$，他的解法与上面的解法有什么不同？你能分别说出这两种解法中，每步变形的依据吗？

挑战自我

$2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 哪个大？你是怎样比较它们的大小的？

练 习

1. 计算：

（1）$\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$；

（3）$\sqrt{\dfrac{1}{6}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{8}}$；　　（4）$\sqrt{45}\div(-\sqrt{5})$.

2. 计算：

（1）$\sqrt{45}\div3\sqrt{3}$；　　（2）$\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\div\sqrt{30}$.

3. 解答本章“情境导航”中的问题（2）.

例2 计算：

（1）$\sqrt{6}(\sqrt{12}+2\sqrt{6})$；　　（2）$(\sqrt{15}-\sqrt{75})\div\sqrt{3}$.

解 （1）$\sqrt{6}(\sqrt{12}+2\sqrt{6})$

$=\sqrt{6}\times\sqrt{12}+2\times(\sqrt{6})^2$

$=\sqrt{6^2\times2}+2\times6$

$=6\sqrt{2}+12$.

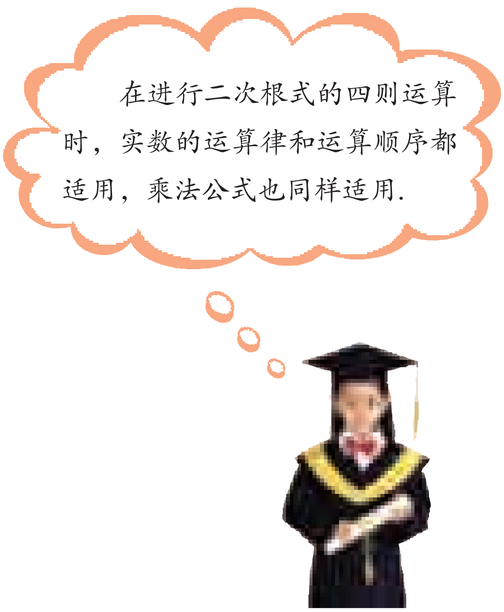
（2）$(\sqrt{15}-\sqrt{75})\div\sqrt{3}$

$=(\sqrt{15}-\sqrt{75})\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{25}$

$=\sqrt{5}-5$.



例3 计算：

（1）$(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})$；

（2）$(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$.

解 （1）$(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})=2^2-(\sqrt{7})^2=4-7=-3$.

（2）$(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=6-6\sqrt{2}+3=9-6\sqrt{2}$.

挑战自我

已知直角三角形的两条直角边长分别是$\sqrt{6}$，$\sqrt{3}$，求这个直角三角形斜边上的高.

史海漫游

秦九韶公式

秦九韶（1202～1261）是我国南宋著名的数学家. 他知识渊博，“星象、音律、算术以至营造等事无不精究”. 在数学方面，他注重搜集生产、生活、商贸以及军事中的数学问题，“设为问答以拟于用”，并于1247年完成名著《数书九章》. 这部书概括了宋元时期中国数学的主要成就，在世界数学史上也占有崇高地位.

秦九韶

《数书九章》全书共十八卷，分为大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市物九类，每类9个问题. 其中卷五第二题是：

“问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知为田几何？”

这里所说的“三斜”，指三角形的三边，大斜、中斜、小斜分别指三角形的长边、中边、短边. 秦九韶的解法是：“以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之. 同乘于上，以小斜幂乘大斜幂，减上. 余，四约之为实，开平方，得积.” 答案是“三百十五顷”.

如果将三角形沙田的长边、短边、中边分别记为a，b，c，面积记为S，那么秦九韶的解法实质上就是

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}. \qquad ①$$

公式①称为秦九韶公式.

将①式整理、变形，并设$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，可以得到

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,. \qquad ②$$

这便是著名的海伦—秦九韶公式. 当已知三角形的三条边长时，用它可以很容易求出三角形的面积. 你能由公式①推导出公式②吗？试试看.

已知三角形的边长分别是 5 cm，7 cm，8 cm，这个三角形的面积是多少？你会用公式①和公式②分别计算吗？

练习

1. 计算：

（1）$\sqrt{5}(\sqrt{15}+2\sqrt{5})$；　　（2）$\left(\sqrt{\dfrac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}$；

（3）$(\sqrt{6}+\sqrt{3})\div\sqrt{3}$；　　（4）$(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{2}-3)$.

2. 计算：

（1）$(1-\sqrt{3})^2$；　　（2）$(\sqrt{8}+\sqrt{11})(\sqrt{8}-\sqrt{11})$.

习题9.3

复习与巩固

1. 计算：

（1）$2\sqrt{15}\cdot\sqrt{75}$；　　（2）$\sqrt{17}\div\sqrt{85}$；

（3）$6\sqrt{27}\cdot\left(-2\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$；　　（4）$\sqrt{2}\div(-\sqrt{54})$.

2. 计算：

（1）$\sqrt{27}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3. 设矩形的长和宽分别为 a，b，面积为 S.

（1）如果 $a=2\sqrt{50}$ m，$b=3\sqrt{22}$ m，求 S；

（2）如果 $S=4\sqrt{6}$ m^2，$b=\sqrt{12}$ m，求 a.

4. 计算：

（1）$(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{2})$；　　（2）$(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$；

(3) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$；　　(4) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\div\sqrt{10}$.

拓展与延伸

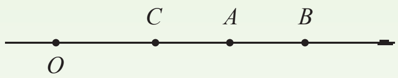
5. 计算：

(1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$；　　(2) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$；

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{7}{11}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{11}{7}}\div\sqrt{\dfrac{1}{11}}\right)$.

6. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}+1$，求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 的值.

7. 如图，在数轴上点 A，B 分别对应数 1，$\sqrt{2}$，点 B 关于点 A 的对称点为 C. 设点 C 所对应的数为 x，求 x 及 $x(x-1)$ 的值.

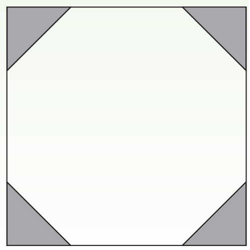


（第 7 题）

探索与创新

8. 如图，把边长为 1 的正方形适当剪去 4 个角后，得到一个正八边形. 求这个正八边形的周长和面积.

9. 已知 $2+\sqrt{3}$ 的整数部分是 a，小数部分是 b，求 a^2+b^2 的值.


（第 8 题）

回顾与总结

1. 本章主要学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.
2. 什么叫做二次根式？
3. $(\sqrt{a})^2=$________ $(a\geqslant 0)$，被开方数 a 和 $\sqrt{a}$ 都是非负数.

   当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=$________.
4. 积的算术平方根 $\sqrt{ab}=$________ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

   商的算术平方根 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=$________ $(a\geqslant 0,\ b>0)$.
5. 最简二次根式应满足哪些条件？

6. 二次根式加减法的法则是什么？
7. 二次根式的乘法与除法的法则分别是什么？
8. 在进行二次根式的四则混合运算时，应当注意哪些问题？
9. 学过本章后，你有哪些收获和体会？

综合练习

复习与巩固

1. x取什么实数时，下列各式有意义？

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$；　　（2）$\sqrt{-\dfrac{2}{x}}$.

2. 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{288}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{16}{3}}$；

（3）$\sqrt{48b^3}$；　　（4）$\sqrt{\dfrac{4x}{3y}}$.

3. 计算：

（1）$3\sqrt{24}+\sqrt{6}$；　　（2）$3\sqrt{27}-2\sqrt{12}$；

（3）$\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{10})$；　　（4）$-\sqrt{12}\div\sqrt{24}$.

4. 一个直角三角形的两条边的长分别为$\sqrt{12}$ cm和$\sqrt{6}$ cm，这个直角三角形的周长和面积是多少？

5. 射击时，枪弹射出枪口时的速度可用公式$v=\sqrt{2as}$进行计算，其中a为枪弹的加速度，s为枪筒的长. 当$a=5\times10^5\ \text{m/s}^2$，$s=0.64$ m时，求v.

6. 计算：

（1）$5\sqrt{\dfrac{1}{5}}-\sqrt{20}+2\sqrt{45}$；　　（2）$\sqrt{15}(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6})$；

（3）$(3\sqrt{5}-\sqrt{12})(\sqrt{45}+2\sqrt{3})$；　　（4）$(2\sqrt{5}+\sqrt{125})\div(-\sqrt{5})$.

7. 已知$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，求$x_1+x_2$，$x_1\cdot x_2$的值.

8. 计算：

（1）$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})$；　　（2）$\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$.

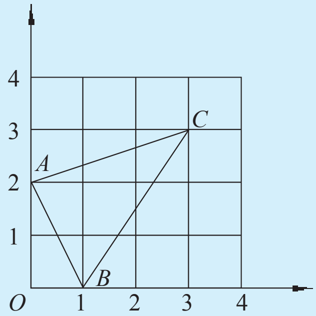
拓展与延伸

9. 矩形的两邻边长分别为$2\sqrt{3}+\sqrt{2}$和$2\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求这个矩形的面积和对角线的长.

10. 在直角坐标系中，$\triangle ABC$顶点的位置如图所示.

（1）求边AB，BC，AC的长；

（2）求$\triangle ABC$的面积.

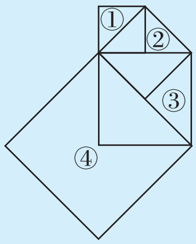


（第 10 题）

11. 已知$x-1=\sqrt{3}$，求代数式$(x+1)^2-4(x+1)+4$的值.

探索与创新

12. 如图，一个边长为 1 的正方形，以它的对角线为边向外作第 2 个正方形，再以第 2 个正方形的对角线为边向外作第 3 个正方形，以次类推……求第 n 个正方形的面积.



（第 12 题）

13. 阅读下面的问题：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3};$$

…………

（1）求$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$与$\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$的值；

（2）已知 n 是正整数，求$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$与$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$的值；

（3）计算$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$；

（4）比较$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$与$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$的大小.

第 10 章　一次函数

内容提要

- 函数的图象
- 一次函数和它的图象
- 一次函数的性质
- 一次函数与二元一次方程
- 一次函数与一元一次不等式
- 一次函数的应用

情境导航

你测量过血压吗？你的血压是多少？

血压有两种不同的计量单位：mmHg（毫米汞柱）与kPa（千帕）.

（1）已知 y（kPa）与 x（mmHg）成正比例，且30 mmHg = 4 kPa．请写出 y 与 x 的函数表达式．

（2）小亮在查体测量血压时，舒张压为 70 mmHg，收缩压为 110 mmHg，填写体检表应分别填多少 kPa（取整数）？

（3）小莹的体检表上填写的舒张压为 8 kPa，收缩压为 13 kPa，分别是多少 mmHg（取整数）？

10.1　函数的图象

在七年级上学期，我们已经认识了常量、变量和函数，你还记得它们吗？

实验与探究

将一个透明的饮料瓶均匀地划上刻度，使最小单位为 mm．在饮料瓶盖中心位置按竖直方向打一小孔，再将一根适当粗细的塑料吸管的一端插入瓶盖．将饮料瓶注入大半瓶水，拧紧瓶盖，用胶带纸将瓶口及塑料管与瓶盖的接口封好，使其不会漏水．将饮料瓶倒置并固定在铁架上（图 10−1），饮料瓶下方放置水杯，引出的塑料管用铁夹夹住，记下瓶内水面的高度．

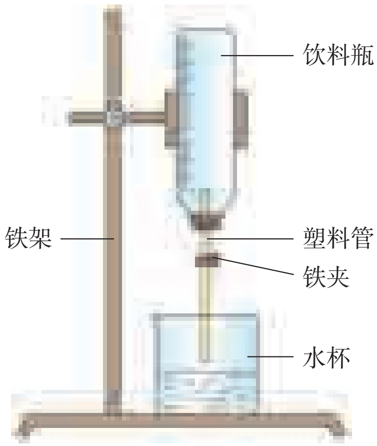


图 10−1

每四位同学一组，分别负责看秒表、控制铁夹、观察水面高度、记录数据．

打开铁夹，使水由塑料管流入水杯，分别记下从放水开始到 10 秒、20 秒、30 秒、⋯、100 秒时，瓶内水面下降的高度 L．下表是小亮实验小组得到的数据：

放水时间 t/s	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
水面下降高度 L/mm	5	10	15	19	23	27	30	33	36	38

将表中每对 t 和 L 的数据作为点的坐标，在以 t 为横轴、L 为纵轴的直角坐标系中描出各点，并将描出的点用平滑的曲线依次连接起来（图 10−2）．

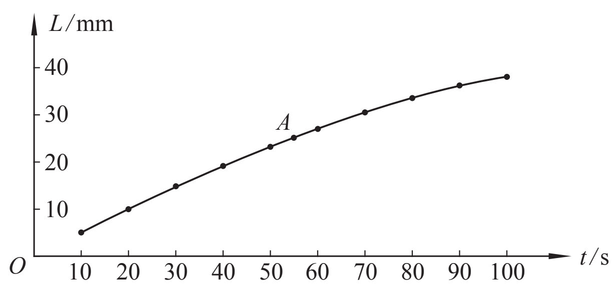
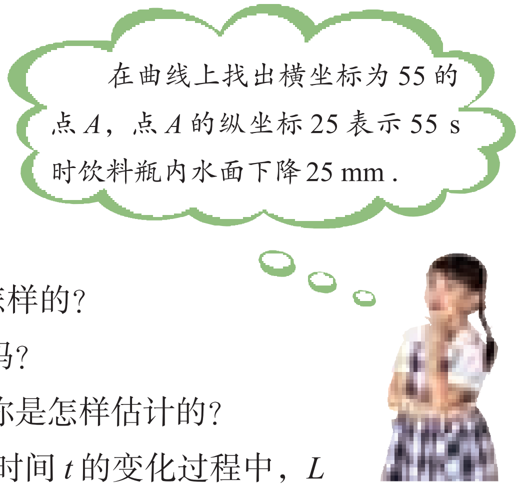


图 10−2

观察这条曲线，思考下面的问题：

（1）从放水开始到放水 10 s 时，饮料瓶内水面下降的高度是多少？从放水后 10 s 到放水后 20 s 呢？



（2）随着放水时间 t 的逐渐增大，饮料瓶内水面下降的高度 L 的变化趋势是怎样的？

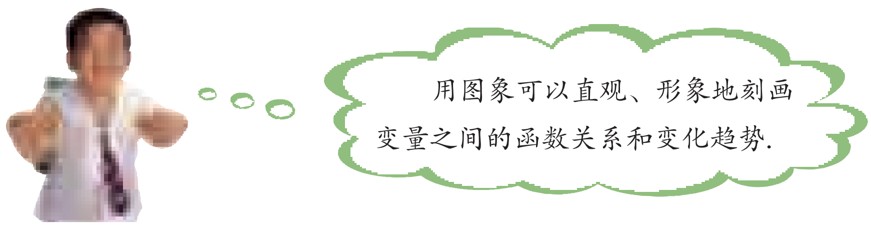
（3）t 每增加 10 s，L 的变化情况相同吗？

（4）估计当 $t = 55$ s，L 的值是多少？你是怎样估计的？

（5）你发现在水面下降高度 L 和放水时间 t 的变化过程中，L 是 t 的函数吗？哪一个变量是自变量？它们之间的函数关系是如何表达的？

图 10−2 利用饮料瓶内水面与放水时间的变化曲线表达了它们之间的函数关系，其中 t 是自变量. 我们把这条曲线称作 L 与 t 的函数关系的图象. 像这样用图象表示变量之间函数关系的方法叫做**图象法**（graph method）.

（6）通过上面的问题，你体会用图象表示函数关系有什么优点？



例1 一台家用淋浴器在使用前，水箱中的贮水量为 0 L. 使用时先向水箱注水，注满水后关闭水源并通电加热，加热完毕时切断电源，开始淋浴，水匀速放出，直至将水箱中的水用完. 在这一过程中，淋浴器中水箱的贮水量 V（L）与时间 t（min）的函数图象如图 10−3 所示. 根据图象回答下列问题：

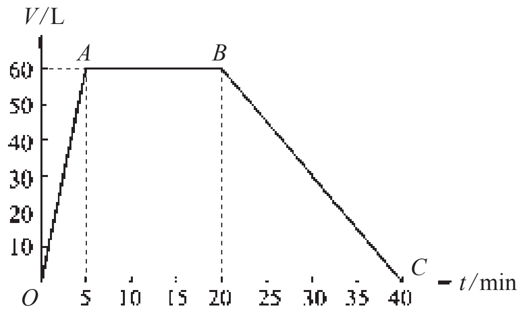


图 10−3

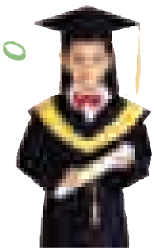
（1）注水、加热和淋浴分别用了多少时间？

（2）水箱的最大贮水量是多少升？

（3）当淋浴开始后 15 min，水箱中还有水多少升？

解　在图 10−3 中，坐标系的横轴表示使用时间 t，纵轴表示水箱贮水量 V. 从图中可以看出，V 与 t 的函数图象是折线 $OABC$，其中，A，B 是图象上的两个分段点，线段 OA，AB 和 BC 分别表示淋浴器注水、加热和均匀放水阶段水箱的贮水量 L 与时间 t 的函数关系.

如果一个函数是分段给出的，我们把它叫做分段函数，研究分段函数时应当关注分段点处函数的变化情况.



（1）由 O，A 两点的坐标分别为（0，0），（5，60）可知，当 $0<t\leqslant 5$ 时，淋浴器处于注水状态，注水用了 $5-0=5$（min）. 由 A，B 两点的坐标分别为（5，60），（20，60）可知，水箱加热时间为 $20-5=15$（min）. 由 B，C 两点的坐标分别是（20，60），（40，0）可知，淋浴放水的时间为 $40-20=20$（min）.

（2）由点 A 的纵坐标为 60 可知，水箱的最大贮水量是 60 L .

（3）当淋浴开始后 15 min，此时离开始注水时有 35 min，在折线上找出横坐标为 35 的点，其纵坐标为 15. 这就是说，此时水箱中有水15 L .

挑战自我

甲、乙两工程队参加同一项水利建设. 图 10−4 是在直角坐标系中画出的甲、乙两工程队施工的土方量 V（m³）与施工时间 t（天）的函数图象. 请根据图象回答下列问题：

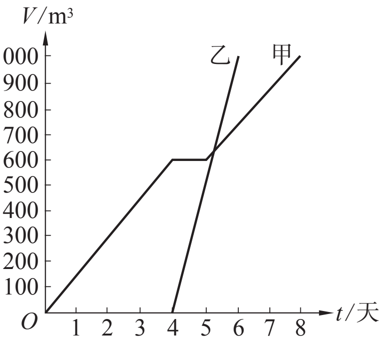


图 10−4

加油站

把两个函数图象画到同一个坐标系中，便于将它们的变化情况进行直观的比较.

（1）乙工程队比甲工程队晚开工几天？早完工几天？

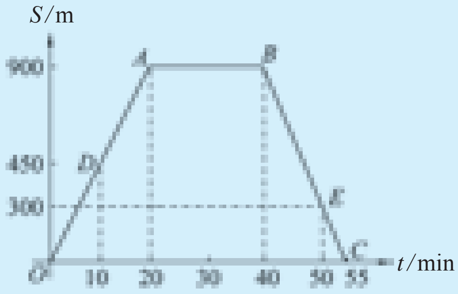
（2）甲工程队在施工中间休息了几天？

（3）甲工程队在哪一段时间内施工进度最快？

（4）从图象中你还能得到哪些信息？

练 习

1. 小亮步行从家去书店，在书店逗留一段时间，选购需要的书籍，然后回家. 小亮离开家的距离 S（m）与时间 t（min）的函数关系如图所示，根据图象回答下列问题：



（第 1 题）

（1）小亮用多少时间走到书店？小亮家距书店多远？

（2）小亮在书店逗留了多长时间？回家途中用了多长时间？

（3）小亮去书店和回家的步行速度各是多少？

（4）小亮从家里走出 10 分钟时离家多远？离书店还有多远？走出 50 分钟时离家多远？

交流与发现

（1）你还记得直角坐标系中的点与有序实数对之间有怎样的关系吗？

（2）如果变量 y 与 x 的函数表达式为 $y = x-1$，怎样用图象法表示出它们的函数关系？与同学交流.

如果能根据表达式 $y = x-1$，把每一个自变量 x 的值与相应的 y 值，分别作为点的横、纵坐标，在坐标系中描出对应的各点，所有的这些点便组成这个函数的图象. 可是这样的点有无数个，怎么办呢？

加油站

在画函数图象时，一般情况下，由于图象上的点有无数个，我们只能取 x 的有限个值，求出相应的 y 值，把它们作为有序实数对，在坐标系中描出这有限个对应点，再把它们顺次用平滑的线连接起来，就近似地画出函数图象了.

① 列表：给定自变量 x 的一些值，代入 $y = x-1$，分别求出对应的 y 值，填入下表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	…

② 描点：以表中每一对 x 与 y 的值为点的横坐标和纵坐标，在直角坐标系中分别描出对应的各点；

③ 连线：按照自变量由小到大的顺序把描出的各点顺次用一条平滑的线连接起来.

这样，就得到了函数 $y=x-1$ 的图象（图 10−5）.

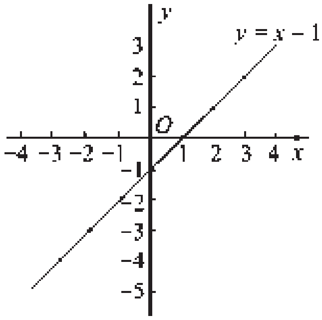


图 10−5

按照上述三个步骤画函数图象，与前面“实验与探究”中画函数图象，在方法上是一致的，这种画函数图象的方法叫做**描点法**.

（3）想一想，下列各点哪些在函数 $y=x-1$ 的图象上？哪些不在这个函数的图象上？为什么？

A（−1.5，−2.5）；　　B（−10，−9）；

C（100，99）；　　D（200，201）.

例2　画出函数 $y=-\dfrac{3}{2}x$ 的图象.

解　列表：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	3	1.5	0	−1.5	−3	−4.5	…

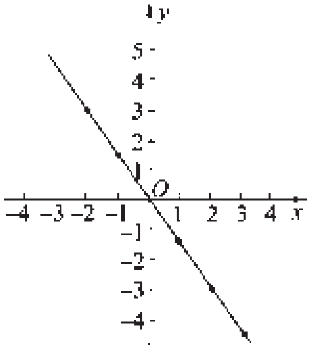


图 10−6

然后描点、连线，就得到函数 $y=-\dfrac{3}{2}x$ 的图象（图 10−6）.

练 习

1. 用描点法画出函数 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ 的图象.

2. 下列各点哪些在函数 $y=2x-1$ 的图象上？哪些点不在这个函数的图象上？

（1）（1，−2）；　　（2）（−2.5，−6）；　　（3）（0，−1）；

（4）（101，199）；　　（5）（−100，−103）；　　（6）$\left(\dfrac{3}{2}，2\right)$.

习题10.1

复习与巩固

1. 假日里，小亮和爸爸骑自行车郊游，上午8时从家出发，16时返回家中，他们离开家的距离与时间的关系如图所示. 根据该图回答下列问题：

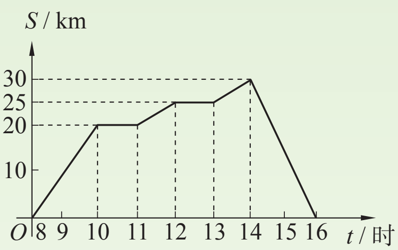
（1）他们何时到达离家最远的地方？

（2）他们何时开始第一次休息？

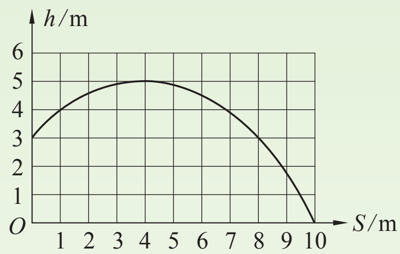
（3）10时至13时，他们走了多少千米？

（4）返回时，他们的平均速度是多少？

（5）他们离开家的距离 S（km）是时间 t（时）的函数吗？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 小亮站在高处向斜上方抛掷一个物体，如图是该物体的运行曲线，试根据该图回答以下问题：

（1）开始抛掷时物体离地面的高度是多少？

（2）当物体沿水平方向运行多少米时，它离开地面最高？最大高度约是多少？

（3）当物体落在地面时，它沿水平方向运行了多少米？

3. 函数 $y=-x+2$ 的图象如图所示. 根据图象，

（1）分别求当 $x=-1$，$x=2$ 时，所确定的 y 值；

（2）分别求当 $y=2$，$y=-2$ 时，所确定的 x 值.

（第 3 题）

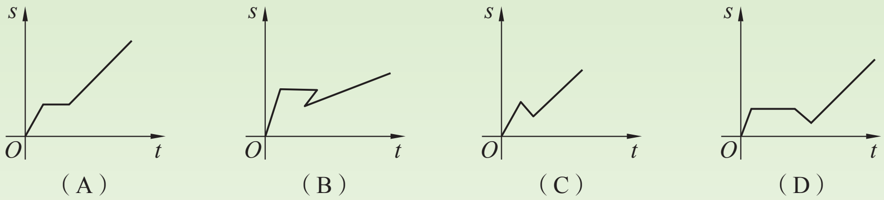
4. 用描点法画出函数 $y=-2x$ 的图象.

5. 画出函数 $y=-3x-1$ 的图象，并判断下列各点是否在这个函数的图象上：$(0，-1)$，$(-2，5)$，$(1，-2)$，$(2.5，-8.5)$.

拓展与延伸

6. 飞机起飞后，上升到高度为 a km 时，改为水平航行，一段时间后，高度又下降了 b km（$b<a$），接着飞机持续上升. 对于这一时段飞机飞行高度 s 与时间 t 的函数关

系，甲、乙、丙、丁四位同学按自己的理解各自画了 A，B，C，D 四幅示意图，其中三幅有错误，请指出哪三幅图有错误.



（第 6 题）

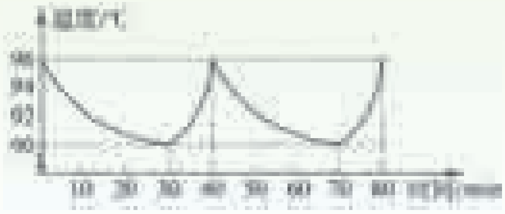
7. 已知三角形一条边的长为 x cm，这条边上的高为 6 cm，这个三角形的面积为 y cm^2.

（1）写出 y 与 x 的函数表达式；

（2）画出这个函数的图象.

探索与创新

8. 在工作状态下，饮水机通过自动加热使机中水的温度保持在一定范围内，图中曲线表示在饮水机的水温达到最高后，饮水机处于工作状态中的水的温度变化情况. 根据图象，提出一个问题，并解答所提出的问题.



（第 8 题）

10.2　一次函数和它的图象

一列高铁列车（图 10−7）自北京站出发，运行 10 km 后，便以 300 km/h 的速度匀速行驶. 如果从运行 10 km 后开始计时，你能写出该列车离开北京站的距离 S（单位：km）与时间 t（单位：h）之间的函数表达式吗?

图 10−7　高铁列车

上节提到的函数 $y=x-1$，$y=-\dfrac{3}{2}x$，$y=2x-1$，$y=2x$ 以及本节中高铁列车行驶距离与时间的函数 $S=10+300t$，这些函数

表达式有哪些共同特征？它们的一般形式是什么？

形如 $y = kx+b$（$k \neq 0$）的函数叫做x的**一次函数**（linear function），其中 k 与 b 是常数. 特别地，当 $b = 0$ 时，一次函数 $y = kx$ 也叫做**正比例函数**，k 叫做**比例系数**.

例1　铜的质量 m（单位：g）与它的体积 V（单位：cm^3）是成正比例的量. 当铜块的体积 $V = 3\ cm^3$ 时，测得它的质量是 $m = 26.7\ g$.

（1）求铜的质量 m 与体积 V 之间的函数表达式；

（2）当铜块的体积为 $2.5\ cm^3$ 时，求它的质量.

解　（1）因为 m 与 V 是成正比例的量，所以设 $m = kV$，其中 k 为比例系数.

把 $V = 3$，$m = 26.7$ 代入，

得　$26.7 = 3k$，解得　$k = 8.9$.

所以，质量 m 与体积 V 之间的函数的表达式为 $m = 8.9V$（$V > 0$），m 是 V 的正比例函数.

（2）当 $V = 2.5$ 时，

$$m = 8.9 \times 2.5 = 22.25.$$

所以，当铜块的体积为 $2.5\ cm^3$ 时，铜块的质量为 $22.25\ g$.

小资料

这里 $8.9\ g/cm^3$ 是铜的密度. 一般地，密度是指物质在单位体积下的质量，通常用 ρ 表示. 物质的质量 m、密度 ρ、体积 V 之间满足 $m = \rho V$.

例2　小亮用如图 10−8 的装置测定一根弹簧的长度与所挂重物间的函数关系，把弹簧的一端固定在铁架的横梁上，将刻度尺直立于铁架台上. 量出弹簧不挂任何重物时的长度 l_0. 在弹簧下端挂上一个钩码，待钩码静止后，量出弹簧的长度 l_1. 类似地，在弹簧的弹性限度内，依次量出弹簧下端挂 2 个、3 个、…、10 个钩码时，弹簧的长度 l_2，l_3，…，l_{10}，并将得到的数据记录在下面的表格中：

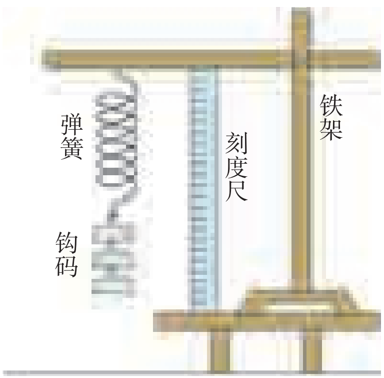


图 10−8

钩码的个数 n/个	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
弹簧长度 l/mm	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170

（1）如果用 n 表示悬挂的钩码数量，l 表示弹簧长度，在弹簧的弹性限度内，随着 n 的逐渐增加，l 的变化趋势是什么？

（2）n 每增加1个时，长度 l 伸长了多少？由此你能写出弹簧长度 l 与钩码个数 n 之间的函数表达式吗？l 是 n 的一次函数吗？

解　（1）在弹簧的弹性限度内，当 n 逐渐增加时，l 逐渐变大.

（2）从上表可知，在弹簧不挂钩码时，弹簧长度 $l_0 = 120$ mm. 当弹簧下端每增加1个钩码，弹簧长度 l 均增加5 mm. 所以弹簧长度 l 与钩码个数 n 之间函数的表达式是 $l = 120 + 5n$，由此可知，在弹性限度内，弹簧长度 l 是钩码个数 n 的一次函数.

你能再举出几个一次函数和正比例函数的实际例子吗？

广角镜

“3x + 1”问题

设有一个函数 y，它的表达式分别用两个一次函数给出：当 x 为奇数时，$y = 3x+1$；当 x 为偶数时，$y = \frac{x}{2}$. 我们把它表示成：

$$y = \begin{cases} 3x+1, & x\text{ 为奇数}; \\ \dfrac{x}{2}, & x\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

这个函数看起来似乎没有什么特别，可是如果你仔细推敲，会发现一个非常神奇的现象：取一个偶数，例如 $x = 6$，代入函数表达式，因为6是偶数，所以 $y = 3$；再将 $x = 3$ 代入函数的表达式，因为3是奇数，所以 $y = 3\times3 + 1 = 10$；再将 $x = 10$ 代入，由于10是偶数，所以 $y = 5$；… 我们把这一过程称作迭代. 继续迭代，便得到：

$6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$，

如果再继续迭代，会出现 $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1$，以至会无限地循环下去.

任取一个奇数，例如 $x = 11$，按上面的方式迭代，也会得到：

$11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

如果再继续迭代，又回到 $4 \to 2 \to 1$ 的循环.

于是有人提出了一个问题：“任何一个自然数开始，利用上面的函数关系，经过有限次的迭代，最终是否总会得到1？”

这就是数学上一个著名的“3x+1”问题（the problem of “3x+1”）. 有人猜想总能得到1，但至今未能证实，也没有人举出反例. 所以“3x+1问题”应该称为“3x+1猜想”.

破解“$3x+1$”的困难之处在哪里呢？从上面例子中出现的两列数可以看出：（1）迭代过程出现的数时而变大，时而变小，难以找出规律；（2）迭代到出现 1 时经过的迭代次数也没有明显规律；（3）迭代达到最大值的“峰值”与最初给出的数 x 也看不出有什么关系.

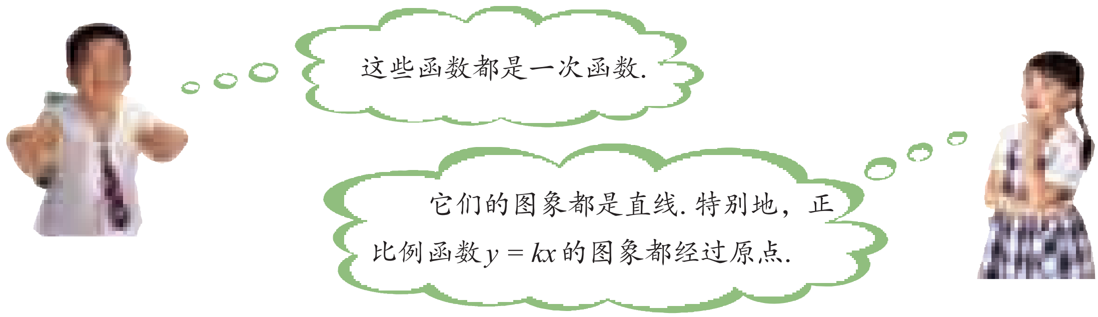
“$3x+1$”问题由于其表达式简单，而迭代过程表现出的随意性引起人们的极大关注. 20 世纪 30 年代德国汉堡大学的一名学生柯拉茨就研究过与 $3x+1$ 有关的问题. 1950 年他在美国召开的国际数学家大会上交流过他的研究成果，因此，“$3x+1$”问题也叫柯拉茨问题. 1960 年日本数学家角谷静夫传播了这一问题，于是又有“角谷猜想”的说法. 对“$3x+1$”问题的研究至今未获突破性进展. 据报导，有人运用计算机对所有小于 $2^{50}\times 100 = 112\ 589\ 990\ 684\ 262\ 400$ 的正整数作了验证，无一例外地都可最终迭代为 1 . 所以数学界有人把这一难题比作新的“费马大定理”.

练 习

1. 下列各函数关系是不是一次函数？是不是正比例函数？如果是正比例函数，指出它的比例系数.
   （1）圆的周长 C 与它的半径 r 之间的关系；
   （2）圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系；
   （3）正方形的周长 l 与它的边长 a 之间的关系；
   （4）梯形上底长为 2，高为 3，梯形面积 S 与下底长 b 之间的关系.
2. 已知函数 $y = kx + 2$，当 $x = 2$ 时，y 值为 4，求 k 的值.
3. 解答本章“情境导航”中的问题.

观察与思考

（1）观察图 10−5、图 10−6 以及习题 10.1 中第 3，4，5 题中的函数表达式和图象，你有什么发现？

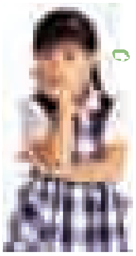


一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，所以也称为直线 $y=kx+b$.

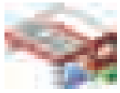
（2）你能求出一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标吗？你能求出它的图象与 y 轴交点的纵坐标吗？你是如何求出的？你能分别说明这两个交点坐标的意义吗？

（3）由（2）你发现一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标和一元一次方程 $kx+b=0$ 的解有什么关系？

（4）已知一次函数 $y=2x+4$，你能用比较简单的方法画出它的图象吗？与同学交流.



因为一次函数图象是直线，根据两点确定一条直线，只要找出坐标满足表达式的两个点，过这两点的直线就是所要作的一次函数的图象了.



加油站

坐标适合表达式 $y=kx+b$ 的点（x，y）都在直线 $y=kx+b$ 上；反之，直线 $y=kx+b$ 上的任一点的坐标（x，y）都适合表达式 $y=kx+b$.

取 $x=0$，得 $y=4$；取 $y=0$，得 $x=-2$. 过 A（0，4）与 B（-2，0）两点画一条直线，直线 AB 就是函数 $y=2x+4$ 的图象（图 10−9）.

（5）一般地，你认为选取怎样的点画直线 $y=kx+b$（$k\neq0$）比较简便？作直线 $y=kx$（$k\neq0$）呢？

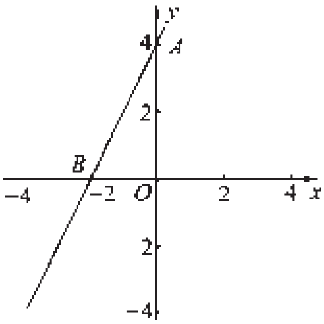


图 10−9

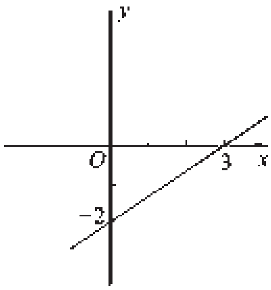
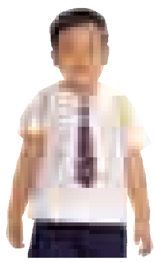


图 10−10

画直线 $y=kx$（$k\neq0$）时，只要再求出直线上一个不是原点的点，画经过这点和原点的直线就可以了.



例3　已知一次函数的图象如图 10−10 所示，写出这个函数的表达式.

解　设所求函数的表达式为 $y=kx+b$. 由图 10−10可知，该函数的图象与

x轴、y轴的交点坐标分别为（3，0），（0，−2），将它们分别代入$y=kx+b$，得

$$\begin{cases}-2=0\cdot k+b,\\0=3\cdot k+b.\end{cases}$$

解这个关于k，b的二元一次方程组，得

$$\begin{cases}k=\dfrac{2}{3},\\b=-2.\end{cases}$$

再将$k=\dfrac{2}{3}$和$b=-2$代入$y=kx+b$，得所求的一次函数的表达式为$y=\dfrac{2}{3}x-2$.

在本节的例1和例3中，通过先设出表达式中的未知系数，再根据所给条件，利用解方程或方程组确定这些未知系数. 这种方法叫做**待定系数法**（method of undetermined coefficient）. 今后在确定函数的表达式时，经常用到这种方法.

挑战自我

已知点A（1，0），B（0，−2）. 如果直线AB上有一点C在第一象限，且$\triangle BOC$的面积等于2，求点C的坐标.

练习

1. 已知直线$y=kx-1$经过点（2，3）.

（1）求k的值；

（2）画出这条直线.

2. （1）在同一直角坐标系中，画出下列三个函数的图象：

①$y=-x$；　　②$y=-x-2$；　　③$y=-x+2$.

（2）观察（1）中的三个函数的图象，它们之间有什么关系？你能得出什么结论？

习题10.2

复习与巩固

1. 某汽车油箱内存油24 L，汽车行驶4 h能将油箱内的油耗尽. 假定剩油量是汽车行驶时间的一次函数.

（1）求油箱内剩油量y（L）与汽车行驶时间t（h）之间的函数表达式；

（2）汽车行驶多长时间后，油箱内还剩8 L油？

2. 某饮料厂生产的饮料，每吨所获利润 y（元）是每吨水价 x（元）的一次函数 $y=-x+b$．当水价每吨4元时，每吨饮料的利润为200元．

（1）求 b 的值；

（2）当水价为每吨7元时，每吨饮料的利润是多少？

3. 分别画出下列函数的图象：

（1）$y=3x+2$；　　（2）$y=-3x-2$；

（3）$y=5x-2$；　　（4）$y=-5x-2$．

4. 已知一次函数的图象经过 $A(-2,\ -3)$，$B(1,\ 3)$ 两点，求这个函数的表达式，并判断点 $P(-1,\ 1)$ 是否在这个函数的图象上．

5. 在地球的表面，随着海拔高度的升高，大气压强下降，空气中的含氧量也随之下降．已知空气中的含氧量 y（$\mathrm{g/m^3}$）是大气压强 x（kPa）的正比例函数．当 $x=36$ kPa 时，$y=108\ \mathrm{g/m^3}$．请写出 y 与 x 之间的函数表达式，并画出它的图象．

拓展与延伸

6. 已知关于 x 的一次函数 $y=x+m-2$．

（1）m 为何值时，直线 $y=x+m-2$ 与 y 轴相交于正半轴？

（2）m 为何值时，直线 $y=x+m-2$ 与 y 轴相交于负半轴？

（3）m 为何值时，直线 $y=x+m-2$ 经过点 $(m,\ -m)$？

探索与创新

7. 已知直线 $y=(1-3k)x+2k-1$．

（1）k 为何值时，直线过原点？

（2）k 为何值时，直线与 y 轴交点的纵坐标是 -2？

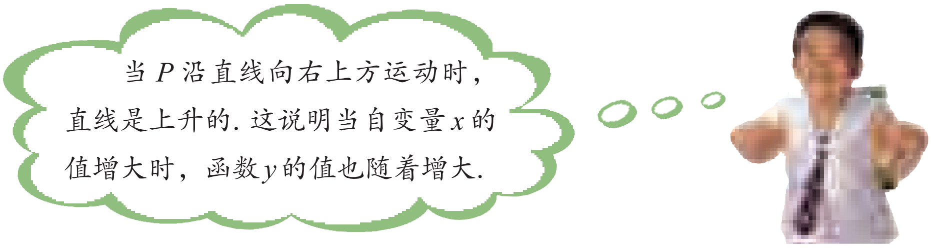
（3）k 为何值时，直线与 x 轴交于 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$？

10.3　一次函数的性质

观察与思考

（1）如图10-9，设 $P(x,\ y)$ 是直线 $y=2x+4$ 上的一个动点，当点 P 沿直线向右上方运动时，点的横坐标 x 和纵坐标 y 发生怎样的变化？这说明一次函数

$y=2x+4$ 当自变量 x 的值增大时，函数值 y 有怎样的变化？



（2）在同一直角坐标系中，分别画出直线 $y=x-1$，$y=5x$，$y=\frac{4}{3}x+2$（图 10−11），你发现它们是否也具有上述性质？

（3）在同一直角坐标系中，分别画出直线 $y=-3x-1$，$y=-x+2$，$y=-\frac{1}{2}x$（图 10−12），你又有什么发现？与同学交流.

（4）比较（2）（3）中你的发现，你能总结出一次函数 $y=kx+b$ 当自变量 x 增加时，函数值 y 的变化情况吗？

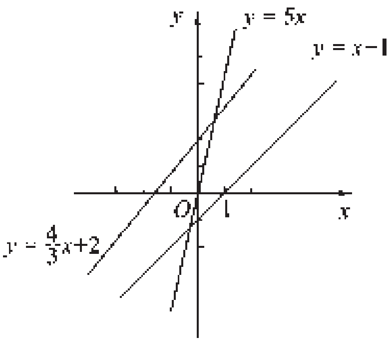


图 10−11

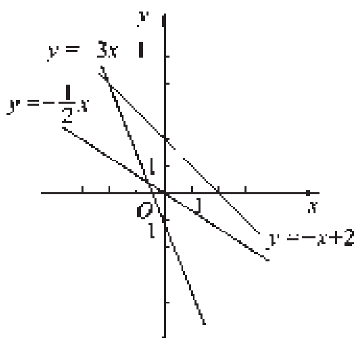


图 10−12

一般地，对于一次函数 $y=kx+b$，当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小.

例1 已知一次函数 $y=(m+2)x+\frac{3}{4}$，当 m 为何值时，y 随 x 的增大而减小？

解 根据一次函数的性质，当 $m+2<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

解不等式 $m+2<0$，得 $m<-2$.

所以，当 $m<-2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

例2　已知一次函数 $y = kx - k$，且 y 随 x 的增大而增大，试探索它的图象经过哪几个象限.

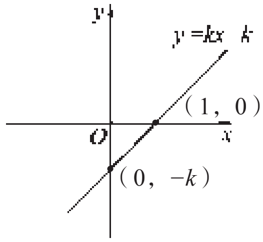


图 10-13

解　因为一次函数 $y = kx - k$ 的 y 随 x 的增大而增大，所以 $k > 0$. 又因为 $x = 0$ 时，$y = -k < 0$，所以直线 $y = kx - k$ 与 y 轴的交点（0，$-k$）在 y 轴的负半轴，且当 $y = 0$ 时，$x = 1$，故直线 $y = kx - k$ 与 x 轴的交点为（1，0）. 它的图象大致如图 10-13 所示，这条直线经过第一、三、四象限.

练 习

1. 填空：

（1）直线 $y = -4x$ 经过点（0，_____）与点（1，_____），y 随 x 的增大而_______；

（2）直线 $y = 4x - 2$ 经过点（0，_____）与点（_____，0），y 随 x 的增大而_______.

2. 回答下列问题：

（1）当 $b = 5$ 时，直线 $y = 2x + b$ 经过哪几个象限？当 $b = -5$ 时经过哪几个象限？

（2）当 $k = 3$ 时，直线 $y = kx - 1$ 经过哪几个象限？当 $k = -2$ 时经过哪几个象限？

（3）你能由 k，b 的不同取值，讨论直线 $y = kx+b$ 经过的象限吗？

习题10.3

复习与巩固

1. 在同一坐标系中，分别画出下列函数的图象，说出图象经过哪些象限，并说明当自变量 x 的值逐渐增大时，函数 y 的值的变化情况：

（1）$y = 3x$；　　　　（2）$y = -\dfrac{1}{2}x$.

2. 根据你在第 1 题中的探索，填空：

（1）对于函数 $y = kx$，当 $k<0$ 时，它的图象经过第____象限，y 随 x 的增大而______；

（2）对于函数 $y = kx$，如果 y 随 x 的增大而减小，那么 k ___ 0（填“>”或“<”）.

3. 如果直线 $y = kx + b$ 经过第一、三、四象限，那么直线 $y = -bx + k$ 经过哪几个象限？

4. 给出 m 的一个值，使一次函数 $y = \left(\dfrac{m}{2} - 1\right)x - m$ 的函数值随 x 值的增大而减小，并且对应的函数图象不经过第一象限.

拓展与延伸

5. 如果点（-2，m）和（0.5，n）都在直线 $y=\frac{4}{3}x+4$ 上，试比较 m 和 n 的大小.

6. 已知一次函数 $y=(2k-1)x+3-k$.

（1）当 k 为何值时，y 随 x 的增大而增大？

（2）当 k 为何值时，y 随 x 的增大而减小？

（3）当 k 为何值时，图象经过一、三、四象限？

探索与创新

7. 王老师让同学考虑一个一次函数，请小亮、小莹、大刚、王强分别对这个函数提出一个性质：

小亮：函数图象经过第二象限，不经过第三象限；

小莹：当 $x>0$ 时，$y<0$；

大刚：y 随着 x 的增大而减小；

王强：当 $x=-2$ 时，$y=3$.

请画出同时适合上面四个条件的一个一次函数的图象.

10.4　一次函数与二元一次方程

观察与思考

（1）你还记得二元一次方程吗？给定一个二元一次方程，例如 $3x-2y=5$，你能把方程中的未知数 y 用关于另一个未知数 x 的代数式表示吗？对于变形后得到式子，你认为可以怎样理解？

通过变形，得到 $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$，它既可以看作是一个二元一次方程，也可以看作是一次函数的表达式或一条直线.

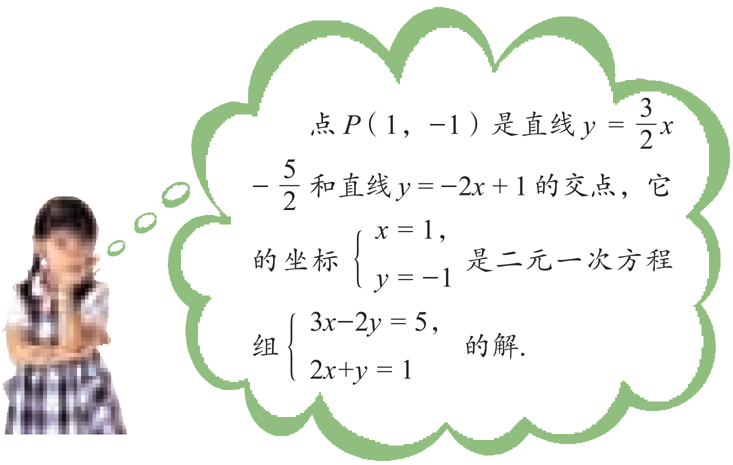
（2）对于二元一次方程 $3x-2y=5$ 的任意一个解（x，y），把它作为点的

坐标，这个点在直线$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$上吗？反之，直线$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$上的任意一个点的坐标都适合二元一次方程$3x-2y=5$吗？

一般地，二元一次方程$ax+by=c$都可看作是一个一次函数$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. 二元一次方程$ax+by=c$的任意一个解，都满足一次函数$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$，因此，这个解所对应的点在直线$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$上. 反之，直线$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$上每个点的坐标，都是二元一次方程$ax+by=c$的一个解.

（3）解方程组$\begin{cases}3x-2y=5,\\2x+y=1,\end{cases}$你发现它的解与直线$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$有什么关系？与直线$y=-2x+1$呢？由此你能得到什么结论？

（4）在同一个直角坐标系中画出直线$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$和$y=-2x+1$（图 10-14）. 观察这两条直线的交点$P$的坐标，验证你在问题（3）中得到的结论.



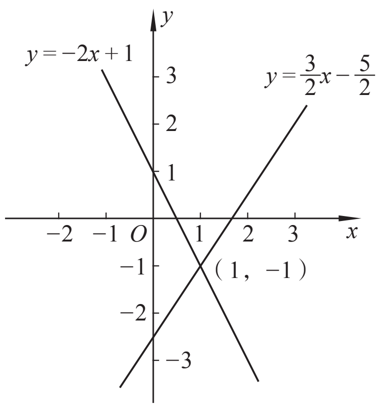


图 10-14

（5）通过以上探索，你发现二元一次方程组的解与两个一次函数图象的交点坐标之间有什么关系？你能利用这种关系解二元一次方程组吗？与同学交流.

解一个二元一次方程组，可以先写出方程组中的两个二元一次方程分别对应的一次函数，其图象的交点坐标即为方程组的解. 反之，求直角坐标系中两条直线的交点坐标，可以转化成解由两条直线的表达式组成的二元一次方程组.

例1　利用图象解二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=5, \\ 5x-2y=4. \end{cases}$$

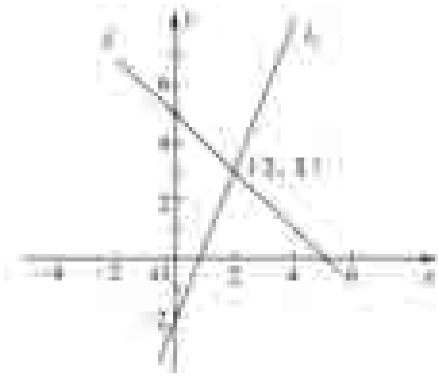


图 10−15

解　由 $x+y=5$，得 $y=-x+5$.

由 $5x-2y=4$，得 $y=\frac{5}{2}x-2$.

在同一直角坐标系中，分别画出直线 l_1：$y=-x+5$ 与直线 l_2：$y=\frac{5}{2}x-2$（图 10−15）.

由图 10−15 可以看出，直线 l_1 与 l_2 相交于点（2，3），所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

（6）怎样表示二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5x-2y=4, \\ x=2 \end{cases}$ 的解呢?

我们可以将 $y=3$ 看作关于 x，y 的二元一次方程

$$0x+y=3.$$

可以看出，在这个方程中，无论 x 取何值，y 的值总是 3，因此，在直角坐标系中，纵坐标等于 3 的点的坐标都满足方程 $0x+y=3$. 所有纵坐标等于 3 的点组成的图形是经过点（0，3），且平行于 x 轴的一条直线（图 10−16），我们把它叫做直线 $y=3$.

类似地，$x=2$ 看作关于 x，y 的二元一次方程 $x+0y=2$. 坐标满足这个方程的点组成经过点（2，0）且平行于 y 轴的一条直线，我们把它叫做直线 $x=2$（图 10−17）.

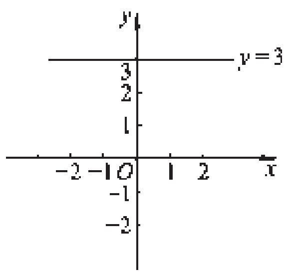


图 10−16

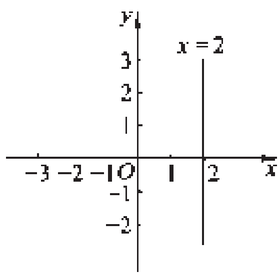


图 10−17

你能在图 10−16、图 10−17 中分别表示出二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 5x-2y=4, \\ x=2 \end{cases}$ 的解吗？

挑战自我

设 $k \neq \frac{1}{2}$．求证：不论 k 取何值，直线

$$y=(2k-1)x+(k-1)$$

总经过一个定点．

练 习

1. 在同一直角坐标系中，作出函数 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 与 $y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}$ 的图象，这两条直线的交点的坐标是哪个二元一次方程组的解？它的解是什么？
2. 利用图象法解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x+y=5, \\ x-3y=1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x+2y=4, \\ 3x-y=5. \end{cases}$

3. 利用图象表示出下列二元一次方程组解的几何意义：

（1）$\begin{cases} y=2x-3, \\ y=-5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 4x-3y=2, \\ x=-1. \end{cases}$

习题10.4

复习与巩固

1. 二元一次方程组 $\begin{cases} x-2y+2=0, \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$ 的解可以看作是哪两个一次函数图象交点的坐标？在直角坐标系中，画出它们的图象．
2. 已知一次函数 $y=2x-9$ 与 $y=-3x+6$．

（1）这两个一次函数图象的交点坐标可以看作哪个二元一次方程组的解？

（2）利用解方程组的方法求出这两个一次函数的图象交点的坐标．

3. 利用图象法解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x-3y=3, \\ 2x+y=6; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=-5. \end{cases}$

拓展与延伸

4. 直线 l 与直线 $y=2x+1$ 的交点的横坐标为 2，与直线 $y=-x+2$ 的交点的纵坐标为 1，求直线 l 的函数表达式.

5. 求直线 $y=2x+8$，$y=-2x-4$ 与 y 轴所围成的图形的面积.

探索与创新

6. 已知直线 $l_1: y=x+1$ 与直线 $l_2: y=mx+n$ 相交于点 $P(1, b)$.

（1）求 b 的值；

（2）不解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} y=x+1, \\ y=mx+n, \end{cases}$ 请直接写出它的解；

（3）直线 $l_3: y=nx+m$ 是否也经过点 P？请说明理由.

10.5　一次函数与一元一次不等式

交流与发现

在 10.2 节中，我们曾利用点（0，4），（−2，0），作出了直线 $y=2x+4$（图 10−9），并且知道直线 $y=2x+4$ 与 x 轴的交点的横坐标是一元一次方程 $2x+4=0$ 的解. 继续观察图 10−9，思考下面的问题：

（1）点 $B(-2, 0)$ 把 x 轴分成点 B 的右边与左边两部分，同时也把直线 $y=2x+4$ 分成了 x 轴上方与 x 轴的下方两部分. 你发现直线 $y=2x+4$ 在 x 轴上方的点的横坐标、纵坐标分别满足什么条件？

（2）由（1），你能借助图 10−9 分别说出一元一次不等式 $2x+4>0$ 与 $2x+4<0$ 的解集吗？

直线 $y=2x+4$ 在 x 轴上方的部分所有点的纵坐标都满足 $y>0$，即 $2x+4>0$，横坐标都满足 $x>-2$. 这就是说，一元一次不等式 $2x+4>0$ 的解集是 $x>-2$. 类似地，$2x+4<0$ 的解集是 $x<-2$.

（3）你能利用图象说出一元一次不等式 $2x+4<1$ 的解集吗？

在同一坐标系中，作出直线 $y=1$（图 10-18），它与直线 $y=2x+4$ 相交于点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 1\right)$. 直线 $y=2x+4$ 在直线 $y=1$ 下方部分的所有点的纵坐标都满足 $y<1$，即 $2x+4<1$，横坐标都满足 $x<-\dfrac{3}{2}$. 因此，不等式 $2x+4<1$ 的解集是 $x<-\dfrac{3}{2}$.

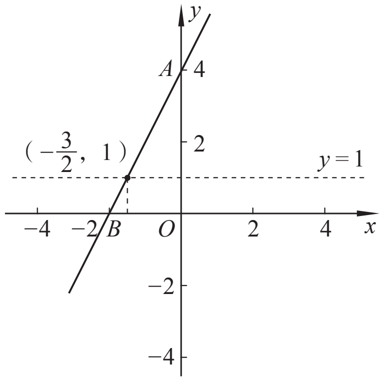


图 10-18

（4）一般地，由（2）（3）你能总结出利用图象解一元一次不等式 $ax+b>c$ 或 $ax+b<c$ 的方法吗？与同学交流.

例1　图 10-19 是一次函数 $y_1=-x+2$ 与 $y_2=3x-3$ 在同一直角坐标系中的图象，利用图象说明：当 x 取何值时，$y_1=y_2$？当 x 取何值时，$y_1>y_2$？

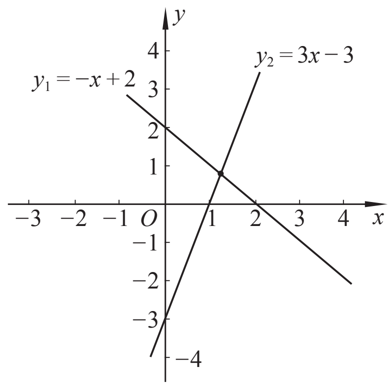


图 10-19

解　先求出两个图象交点的坐标. 令 $y_1=y_2$，即 $-x+2=3x-3$.

解得　　$x=\dfrac{5}{4}$.　　此时，$y_1=y_2=\dfrac{3}{4}$.

因此，两直线交点的坐标为 $\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$. 这说明，当 $x=\dfrac{5}{4}$ 时，$y_1=y_2=\dfrac{3}{4}$.

由图象还可以看出，当 $x<\dfrac{5}{4}$ 时，直线 y_1 在直线 y_2 的上方，此时 $y_1>y_2$. 当 $x>\dfrac{5}{4}$ 时，直线 y_1 在直线 y_2 的下方，此时 $y_1<y_2$.

你能利用一次函数的图象，分别求出一元一次不等式 $-x+2>3x-3$ 和 $-x+2<3x-3$ 的解集吗？说明你的解法.

练 习

1. 利用一次函数的图象，解一元一次不等式：

（1）$-3x+1<0$； （2）$-3x+1>-2$.

2. 已知两个一次函数 $y_1=2x$ 与 $y_2=-x+3$.

（1）当 x 取何值时，$y_1=y_2$? （2）当 x 取何值时，$y_1<y_2$?

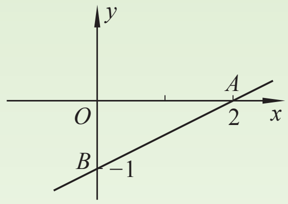
习题10.5

复习与巩固

1. 已知函数 $y=2x-1$. 当 x 取何值时，$y>1$? $x>y$? $y>x+1$?

2. 已知函数 $y_1=x-2$，$y_2=3x+1$. 当 x 取何值时，$y_1>y_2$? $y_1<y_2$?

3. 如图，直线 $y=kx+b$ 经过 $A(2, 0)$，$B(0, -1)$ 两点，试确定关于 x 的不等式 $-1<kx+b<0$ 的解集.



（第 3 题）

4. 已知直线 $y=x+b$ 过点 $(3, 4)$.

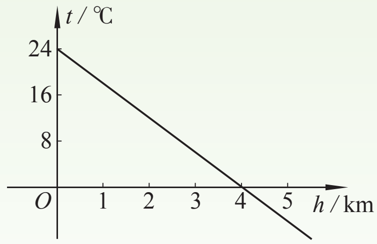
（1）求 b 的值；

（2）当 x 取何值时，$y<-2$?

拓展与延伸

5. 已知直线 $y=3x+b$ 和 $y=ax-3$ 交于点 $P(-2, -5)$，试画出这两条直线，并写出不等式 $3x+b>ax-3$ 的解集.

6. 如图是气象台某天用仪器记录的16时空中气温 t（℃）与距地面高度 h（km）之间的函数图象.



（第 6 题）

（1）根据图象，写出图中确定的 t 与 h 之间的函数表达式；

（2）根据图象，指出此时地面气温和 4 km 高空的气温；

（3）根据函数表达式，求出气温低于 10 ℃ 时 h 的范围.

探索与创新

7. 已知一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，且 $k\neq 0$），x 与 y 的部分对应值如下表所示，求不等式 $kx+b>bx+k$ 的解集.

x	-2	-1	0
y	3	2	1

10.6　一次函数的应用

观察与思考

我们知道，世界各国温度的计量单位尚不统一，常用的有摄氏温度（℃）和华氏温度（°F）两种. 它们之间的换算关系如下表所示：

摄氏温度 / ℃	…	−10	0	10	20	30	…
华氏温度 / °F	…	14	32	50	68	86	…

（1）观察上表，如果把表中的摄氏温度与华氏温度都看作变量，那么它们之间的函数关系是一次函数吗？你是如何探索得到的？

由于在上表中摄氏温度所取得值中包含0℃，为了方便，可把摄氏温度作为自变量x，用横轴表示，华氏温度y看作x的函数，用纵轴表示，建立直角坐标系. 把表中每一对（x，y）的值作为点的坐标，在直角坐标系中描出表中相应的点，观察这些点是否在同一条直线上.

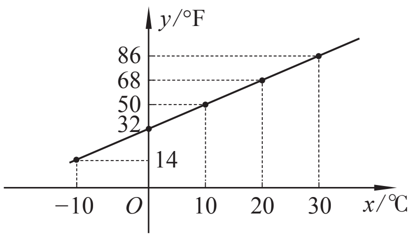
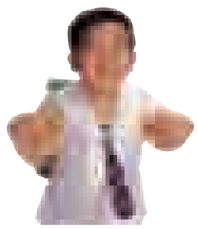


图 10-20



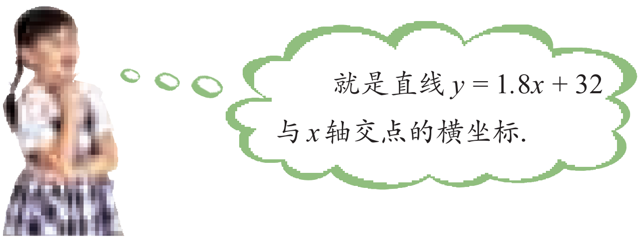
（2）你能利用（1）中的图象，写出y与x的函数表达式吗？

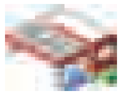
（3）除了小亮所说的方法外，你能通过分析上表中两个变量间的数量关系，判断它们之间是一次函数关系吗？

通过观察上表，可以发现两个变量对应数值之差的比是一个常数，如$\frac{68-86}{20-30}=1.8$，$\frac{50-14}{10-(-10)}=1.8$，$\frac{86-50}{30-10}=1.8$，… 特别地，如果固定（0，32）这对

值，同样有$\frac{50-32}{10-0}=1.8$，$\frac{68-32}{20-0}=1.8$，$\frac{86-32}{30-0}=1.8$，$\frac{14-32}{-10-0}=1.8$．设摄氏温度为x，相应的华氏温度为y，则有$\frac{y-32}{x-0}=1.8$，整理得$y=1.8x+32$，因此y是x的一次函数．

（4）你能求出华氏温度为0度（即0 °F）时，摄氏温度是多少度吗？

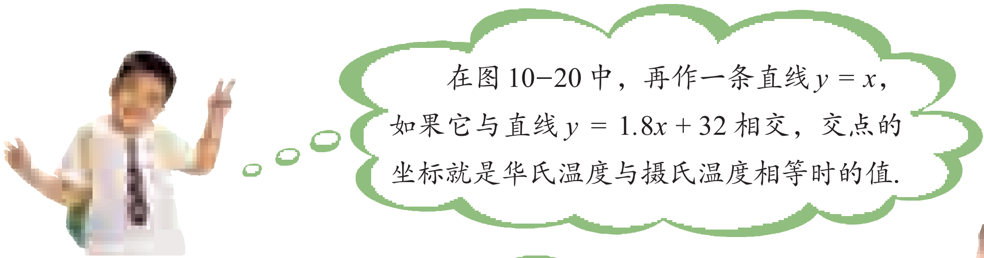


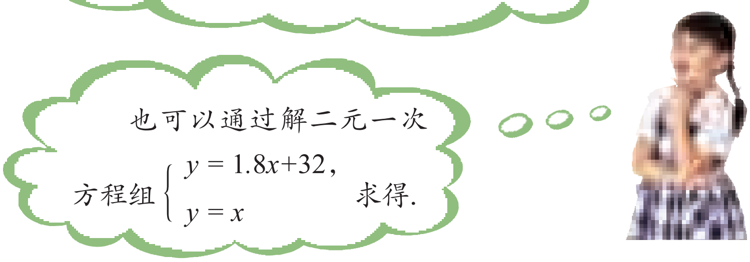


加油站

一般地，如果两个变量对应数值的差之比是一个常数k，那么这两个变量之间是一次函数关系．事实上，如果x与y是两个变量，x_0，y_0是它们的一组对应值，且$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$（$k\neq0$），那么，$y=kx+(y_0-kx_0)$，其中k，x_0，y_0都是常数．

（5）华氏温度的值与对应的摄氏温度的值有相等的可能吗？你会用哪几种方法解决这个问题？与同学交流．





例1　山青林场计划购买甲、乙两种树苗共800株，甲种树苗每株24元，乙种树苗每株30元．根据相关资料，甲、乙两种树苗的成活率分别为85%，90%．

（1）如果购买这两种树苗共用去21 000元，甲、乙两种树苗各买了多少株？

（2）如果为了保证这批树苗的总成活率不低于88%，甲种树苗至多购买多少株？

（3）在（2）的条件下，应如何选购树苗，使购买树苗的费用最低？并求最低费用．

解　（1）设购买甲种树苗x株，乙种树苗y株，根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=800, \\ 24x+30y=21\,000. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=500, \\ y=300. \end{cases}$

经检验，方程组的解符合题意. 所以购买甲种树苗500株，乙种树苗300株.

（2）设购买甲种树苗z株，则购买乙种树苗（$800-z$）株，由题意得

$$0.85z+0.9\times(800-z)\geqslant 0.88\times 800,$$

解得　$z\leqslant 320$.

所以甲种树苗至多购买320株.

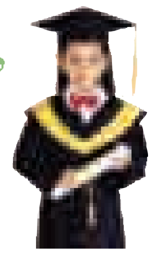
（3）设购买甲种树苗t株，购买树苗的费用为w元，由题意得

$$w=24t+30\times(800-t)=-6t+24\,000.$$

所以w是t的一次函数，且由于$k=-6<0$，因此w随t增大而减小. 由（2）知$t\leqslant 320$，因此，当t最大即$t=320$时，w最小. 这时$800-320=480$，$w=-6\times 320+24\,000=22\,080$.

所以购买甲种树苗320株、乙种树苗480株时，费用最低，最低费用为22 080元.

在例1的解决过程中，是从现实生活中抽象出数学问题，用数学符号建立函数表达式，表示数学问题中变量之间的数量关系和变化规律. 因此函数也是一种重要的数学模型.



练 习

1. 为迎接新学年的到来，时代中学计划开学前购买篮球和排球共20个，已知篮球每个80元，排球每个60元，设购买篮球x个，购买篮球和排球的总费用为y元.

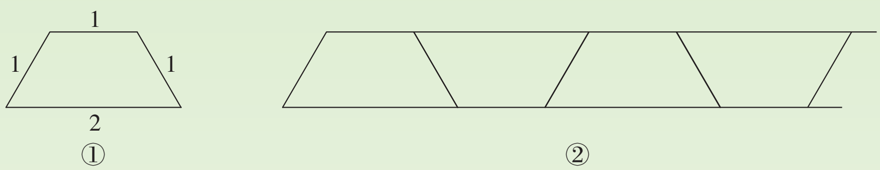
（1）求y与x的函数表达式；

（2）如果要求篮球的个数不少于排球个数的3倍，应如何购买才能使总费用最少？最少费用是多少元？

习题10.6

复习与巩固

1. 取若干个形如图①的梯形，按图②的方式排列. 随着图②中梯形个数的增加，所拼得的四边形的周长不断增加.



（第 1 题）

（1）完成下面的表格：

梯形个数 n	1	2	3	4	5	6	…
所拼得四边形周长 L	5	8	11				…

（2）你能像 10.6 节引例那样，探索 L 与 n 之间的函数关系吗？这个函数是一次函数吗？写出 L 与 n 之间的函数表达式；

（3）求 $n=20$ 时 L 的值.

2. 八年级一班制作一环套一环的彩纸环做成的彩链布置教室，小莹测量了其中部分彩纸链的长度，得到的数据如下表所示：

纸环数 x/个	1	2	3	4	…
长度 y/cm	19	36	53	70	…

（1）把上表中 x，y 的各组对应值作为点的坐标，在坐标系中描出相应的点，猜想 y 与 x 的函数关系，并求出函数表达式；

（2）教室的长为 8 m，宽为 6 m，现需沿天花板对角线各拉一根彩纸链，至少要制作多少个纸环？

3. 某车间共有工人 20 名. 已知每名工人每天可制造甲种零件 6 个或乙种零件 5 个，每制造一个甲种零件可创利润 150 元，每制造一个乙种零件可创利润 260 元. 车间每天安排 x 名工人制造甲种零件，其余工人制造乙种零件.

（1）请写出此车间每天所创利润 y（元）与 x（人）之间的函数表达式；

（2）如果要使车间每天所创利润不低于 24 000 元，你认为至少要安排多少名工人制造乙种零件？

拓展与延伸

4. 服装厂生产一种西装和领带，西装每套出厂价 200 元，领带每条出厂价 40 元. 厂方向客户提供两种优惠方案：（1）买一套西装送一条领带；（2）西装和领带均按定价的 90% 付款. 某商店要到该服装厂购买西装 20 套、领带 x 条（领带数量超过 20 条）. 请你根据 x 的不同情况，帮助商店选择最省钱的进货方案.

探索与创新

5. 如图所示，公路上有 A，B，C 三站，一辆汽车于 8:00 从离 A 站 10 km 的 P 地出发，向 C 站匀速前进，15 min 后离 A 站 20 km .

（第 5 题）

（1）设出发 x h 后汽车离 A 站 y km，写出 y 与 x 之间函数表达式；

（2）当汽车行驶到离 A 站 150 km 的 B 站时，接到通知要在 12:00 前赶到离 B 站 30 km 的 C 站. 汽车按原速能否到达？如果能，求出到达 C 站的时间；如果不能，那么车速最少应提高到多少？

回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容？总结一下，与同学交流.
2. 用图象表示函数关系有什么优点？用描点法画函数图象，一般包括哪些步骤？怎样判断一个点是否在图象上？
3. 什么是一次函数？什么是正比例函数？一次函数与正比例函数有什么关系？你能举出现实生活中有关一次函数、正比例函数的例子吗？
4. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象有什么特征？当 $k > 0$ 时，y 随 x 怎样变化？当 $k < 0$ 时呢？
5. 如何利用待定系数法确定一次函数的表达式？举例说明.
6. 一元一次方程 $kx + b = 0$ 的解与一次函数 $y = kx + b$ 的图象之间有什么关系？
7. 二元一次方程与一次函数之间有什么关系？二元一次方程组与一次函数之间有什么关系？利用图象解二元一次方程组的步骤是什么？
8. 一元一次不等式与一次函数之间有什么关系？怎样利用一次函数的图象得到一元一次不等式的解集？如何通过图象比较两个一次函数值的大小？
9. 你认为在本章的学习中，体现了哪些数学思想？举例说明.

综合练习

复习与巩固

1. 填空：

（1）如果 $P(-1, a)$ 是正比例函数 $y=3x$ 的图象上的一点，那么 $a=$ ________；

（2）如果正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$，那么 $k=$ ________ .

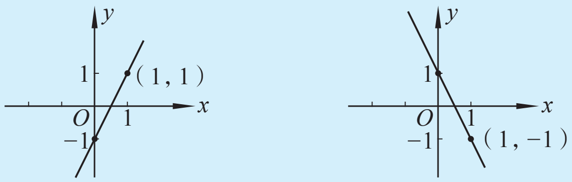
2. 已知点 $B(4, 2)$ 在直线 $y=2x+b$ 上，点 $C(5, 3)$ 在这条直线上吗？

3. 画出函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图象. 根据图象回答下列问题：

（1）y 的值随 x 的取值怎样变化？

（2）图象与坐标轴的交点坐标分别是多少？

4. 分别写出下列图象所对应的函数表达式：

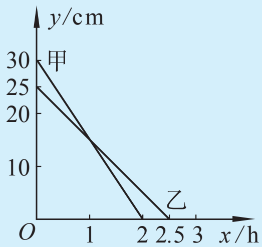


① ② ③

（第 4 题）

5. 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=1$ 时，$y=-2$，且它的图象与 y 轴交点的纵坐标是 -5，求 k 与 b 的值.

6. 同时点燃甲、乙两根蜡烛，燃烧时剩余部分的高度 y(cm) 与燃烧时间 x(h) 之间的关系如图所示. 根据图象所提供的信息，回答下列问题：



（第 6 题）

（1）甲、乙两根蜡烛燃烧前的高度分别是多少？

（2）分别求甲、乙两根蜡烛燃烧时 y 与 x 之间的函数关系式；

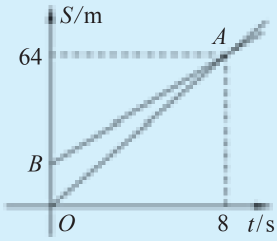
（3）点燃后经过多长时间，甲、乙两根蜡烛剩余部分的高度相等（不考虑都燃尽的情况）？在什么时间段内，甲蜡烛的剩余高度比乙蜡烛的剩余高度高？在什么时间段内，甲蜡烛的剩余高度比乙蜡烛的剩余高度低？

7. 利用图象解方程组 $\begin{cases} 5x-y=9, \\ 2y+x=4 . \end{cases}$

8. 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=-4$ 时，y 的值为 9；当 $x=2$ 时，y 的值为 -3. 求不等式 $kx+b>0$ 的解集.

拓展与延伸

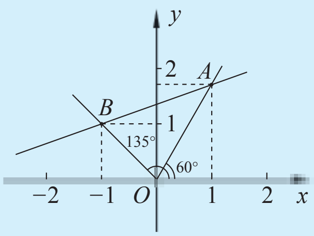
9. 如图，OA，BA 分别是甲、乙两名学生跑步的路程 S 与时间 t 的函数图象，B 点坐标为（0，16）. 根据图象判断哪名学生跑步的速度快？快者的速度比慢者的速度每秒快多少？



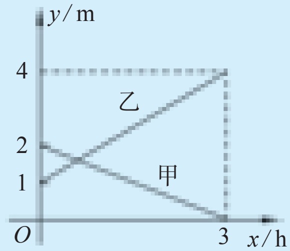
（第 9 题）

10. 给出 a 的三个值，使一次函数 $y = ax + 2a - 1$ 的图象分别经过第一、二、三象限；第二、三、四象限；第一、三、四象限.

11. 如图，在直角坐标系中，$\angle AOx = 60°$，$\angle BOx = 135°$，$OA = 2$，$OB = \sqrt{2}$，一次函数的图象经过 A，B 两点，求这个一次函数的表达式.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 有甲、乙两个长方体形的蓄水池，将甲池中的水以 6 m^3/h 的速度注入乙池，甲、乙两个蓄水池中水的深度 y（m）与注水时间 x（h）之间的函数图象如图所示，结合图象回答下列问题：

（1）分别求出甲、乙两个蓄水池中水的深度 y 与注水时间 x 之间的函数表达式；

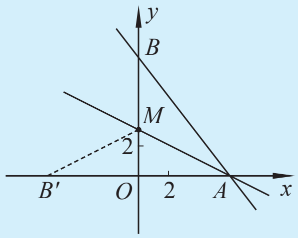
（2）注水多长时间甲、乙两个蓄水池水的深度相同？

（3）注水多长时间甲、乙两个蓄水池的蓄水量相同？

13. 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 与点 B，M 是 OB 上的一点，如果将 $\triangle ABM$ 沿直线 AM 折叠，点 B 恰好落在 x 轴上的点 B' 处，求

（1）点 B' 的坐标；

（2）直线 AM 的函数表达式.



（第 13 题）

14. 某企业的一种产品，每件出厂价为 1 万元，成本为 0.55 万元. 每生产一件产品，产生 1 吨废渣. 为达到环保要求，需要对废渣进行脱硫、脱氮等处理，现有两种方案可供选择：

方案一　由企业对废渣进行处理，每吨费用为 0.05 万元，并且每月设备维护及损耗费为 20 万元.

方案二　将废渣送废渣处理厂，每吨废渣需付费 0.1 万元.

（1）设企业每月生产 x 件产品，月利润为 y 万元，分别求上述两种方案中 y 与 x 之间的函数表达式；

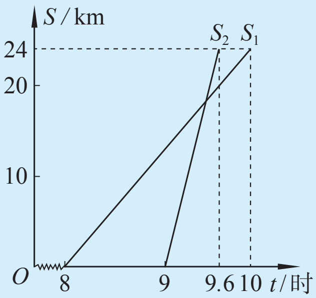
（2）怎样选择处理方案，在达到环保要求的前提下，能获得较大利润？

探索与创新

15. 小亮家与姥姥家相距 24 km. 小亮 8:00 从家出发骑自行车由他家去姥姥家，车速平均 12 km/h. 妈妈 9:00 从家出发乘车沿相同路线去姥姥家，车速平均 40 km/h.

（1）分别写出小亮和妈妈行进的路程 S(km) 与时间 t（时）之间的函数表达式，并求出 t 可以取值的范围；

（2）妈妈到达姥姥家之前，在哪段时间内，妈妈乘坐的汽车赶上并超过小亮？



（第 15（3）题）

（3）在同一坐标系中，小亮和妈妈的行进路程 S 与北京时间 t 的函数图象如图所示. 你能用图象解释问题（2）的结论吗？

16. 某果园租用 20 辆汽车装运 A，B，C 三种苹果 42 吨，到外地销售. 商定每辆车只装运同一种苹果，且必须装满，每种苹果不少于两车.

苹果品种	A	B	C
每辆汽车运载量/吨	2.2	2.1	2
每吨苹果获利/元	600	800	500

（1）设用 x 辆车装运 A 种苹果，用 y 辆车装运 B 种苹果，根据上表提供的信息，求 y 与 x 之间的函数表达式及 x 可以取值的范围；

（2）设此时外销活动的利润为 w（元），求 w 与 x 之间的函数表达式以及最大利润，并安排相应的车辆分配方案.

第 11 章　图形的平移与旋转

内容提要

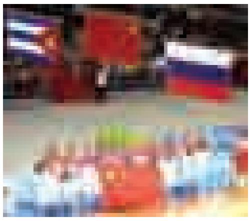
- 图形的平移
- 图形的旋转
- 图形的中心对称

情境导航

直升机在运送物资. 在这个实例中，哪些是平移现象？哪些是旋转现象？

什么是图形的平移？什么是图形的旋转？什么是图形的中心对称？这些图形变化具有哪些基本性质？

11.1　图形的平移


五星红旗冉冉升起


推拉窗轻轻打开

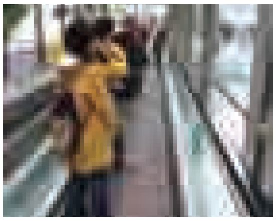

电动扶梯缓缓移动

图 11−1

在现实生活中，你见过物体平行移动的现象吗？图 11−1 中有哪些平行移动的现象？你还能举出类似的实例吗？

实验与探究

（1）如图 11−2 ①，在纸上任意画出$\triangle ABC$和一条直线l，再蒙上一张透明纸，在透明纸上画出与$\triangle ABC$重合的$\triangle A'B'C'$和与直线l重合的直线l'.


①　　②

图 11−2

（2）如图 11−2 ②，将透明纸沿直线l的某个方向拖动 5 单位长度（拖动时保持直线l与l'重合）. 这时，$\triangle A'B'C'$的位置发生了怎样的变化？如果将透明纸沿直线l的另一个方向拖动 4 单位长度呢？

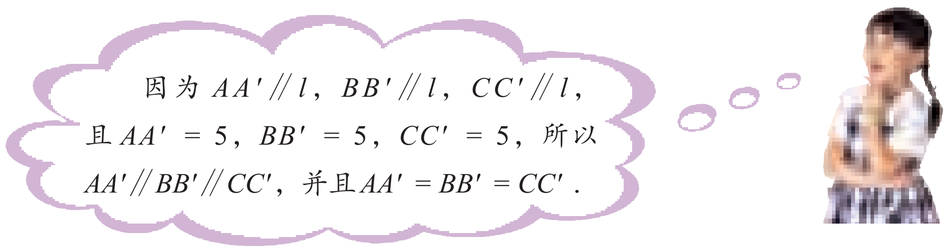
将透明纸沿某个确定的方向拖动a个单位长度，$\triangle A'B'C'$便由原来的位置沿这个方向移动了a个单位长度，由于在初始位置$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$重合，直线l'与l重合，从而可以把移动后的$\triangle A'B'C'$看做是把$\triangle ABC$沿这个确定的方向移动a个单位长度得到的.

（3）由此你发现将$\triangle ABC$移动到$\triangle A'B'C'$的位置是由哪些因素确定的？

在平面内，将一个图形沿某一个方向移动一定的距离，图形的这种变化叫做**平移**（translation）. 平移前图形上的点与平移后所到达的点叫做**对应点**. 图形平移后的位置由平移的方向与平移的距离确定.

例如在图 11–2 ② 中，将$\triangle ABC$平移到$\triangle A'B'C'$的位置，平移的方向是沿直线l的一个方向向右上方平移，平移的距离是 5 个单位长度，A与A'，B与B'，C与C'分别是对应点.

（4）在图 11–2 ② 中，连接AA'，BB'，CC'，你发现这三条线段之间有怎样的位置关系和数量关系？为什么？



（5）图 11–2 ① 中，如果$\triangle ABC$的其中一边（例如AB）平行于直线l，把$\triangle ABC$沿AB的某一个方向（例如向右）移动b个单位长度，分别画出当b小于、等于或大于线段AB的长时移动后的图形$\triangle A'B'C'$（图 11–3 ①②③）.

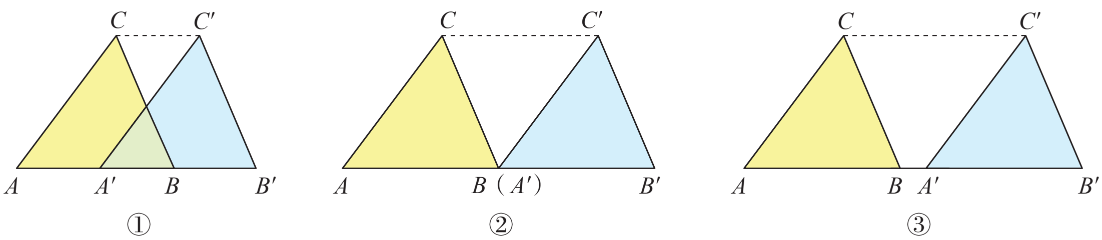
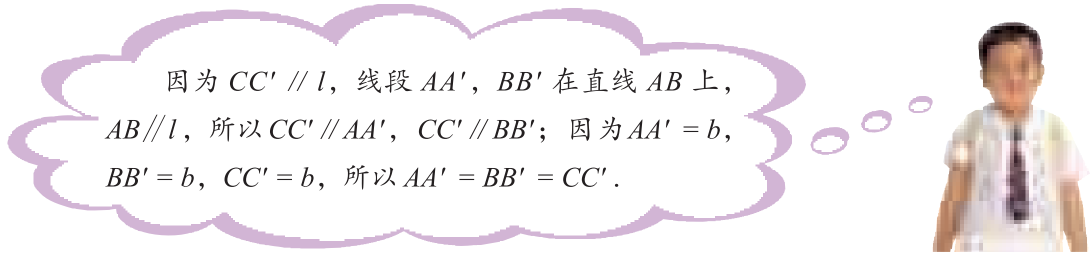


图 11–3

（6）在图 11–3 ①②③ 中，分别连接CC'，你发现线段AA'，BB'，CC'之间有怎样的关系？



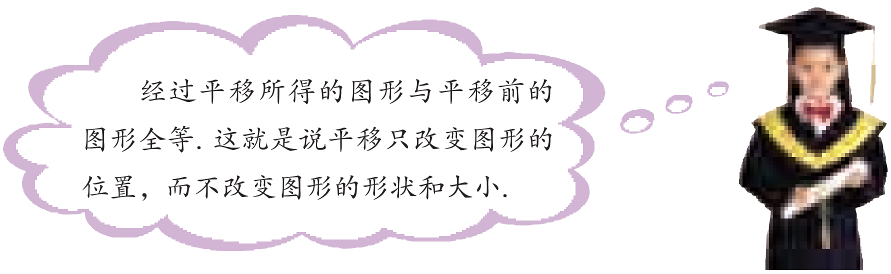
一般地，图形的平移具有下面的基本性质：

> 一个图形和它经过平移所得到的图形中，两组对应点的连线平行（或在同一条直线上）且相等.

（7）在问题（4）（5）中，$\triangle ABC$ 与它平移后得到的 $\triangle A'B'C'$ 全等吗？为什么？

在图 11−2 ② 中，四边形 $ABB'A'$ 与 $ACC'A'$ 都是平行四边形，从而 $AB = A'B'$，$BC = B'C'$，$AC = A'C'$；在图 11−3 ①②③ 中，四边形 $AA'C'C$，$BB'C'C$ 也都是平行四边形，所以 $AC = A'C'$，$BC = B'C'$. 因为 AB，$A'B'$ 在同一条直线上，由 $AA' = BB'$，可以推出 $AB = A'B'$.

综上可知，无论 $\triangle ABC$ 按哪种方式平移，都有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（SSS）.



例1　如图 11−4，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD < BC$，$AB = DC$. 你能利用平移的方法判断 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是否相等吗？说明你的理由.

解　$\angle B = \angle C$. 理由如下：

将线段 AB 沿 AD 向右平移到 DE，于是 A 与 D，B 与 E 是两组对应点. 根据平移的基本性质，$AD \underset{=}{\parallel} BE$，因为 $AD \parallel BC$，由于过 AD 外一点 B 有且只有一条直线平行于 AD，且 $BE < BC$，所以点 E 在边 BC 上.

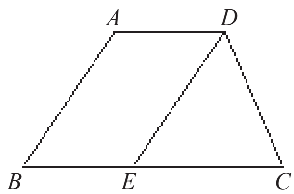


图 11−4

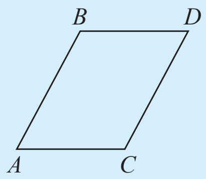
在四边形 $ABED$ 中，$AD \underset{=}{\parallel} BE$，所以四边形 $ABED$ 是平行四边形，于是 $AB = DE$. 因为 $AB = DC$，所以 $DE = DC$，从而 $\angle DEC = \angle C$. 由 $\angle B = \angle DEC$，可知 $\angle B = \angle C$.

练 习

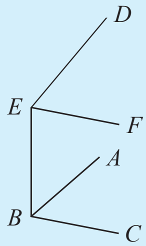
1. 填空：

（1）如图，把线段 AB 沿水平方向向右平移 3 cm 得到线段 CD，如果 $AB = 5$ cm，那么 $CD =$ ______ cm，$AC =$ ______ cm，$BD =$ ______ cm；

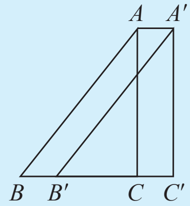
（2）如图，把 $\angle ABC$ 沿竖直方向向上平移 10 cm 得到 $\angle DEF$. 如果 $\angle ABC = 52°$，那么 $\angle DEF =$ ______ °，$BE =$ ______ cm.



（第 1 题 ①）



（第 1 题 ②）



（第 2 题）

2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 3$ cm，$AC = 4$ cm. 将 △ABC 沿 BC 方向平移 1 cm，得到△$A'B'C'$. 求四边形 $ABC'A'$ 的面积.

例2　如图 11-5，任意剪一张平行四边形纸片 $ABCD$，设 $\angle B < 90°$. 在边 BC 上取一点 E，连接 AE，沿 AE 将△ABE 剪下，将它沿边 AD 向右平移，平移的距离等于 AD 的长.

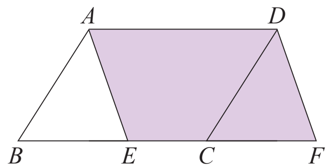


图 11-5

（1）试判断平移后所得到的四边形 $AEFD$ 的形状，并说明理由；

（2）四边形 $AEFD$ 能否是矩形？如果能，AE 应满足什么条件？如果不能，请说明理由；

（3）四边形 $AEFD$ 能否是菱形？如果能，AD 应满足什么条件？如果不能，请说明理由.

解　（1）所得到的四边形 $AEFD$ 是平行四边形. 理由是：

在上面的平移过程中，A 与 D，B 与 C，E 与 F 分别是对应点，点 B，E，C，F 在同一条直线上，根据平移的基本性质，$AD \parallel EF$ 且 $AD = EF$，所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

（2）由$\angle B < 90°$，过点A作$AE \perp BC$，垂足为E，点E在线段BC上、平移$\triangle ABE$所得到的平行四边形$AEFD$是矩形（图11－6）.

（3）当边AD等于对角线AC的长时，沿对角线将$\triangle ABC$剪下，平移$\triangle ABE$后所得到的平行四边形$ACFD$是菱形（图11－7）.

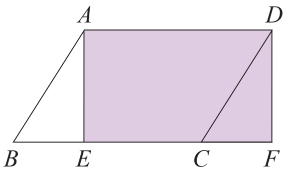


图 11－6

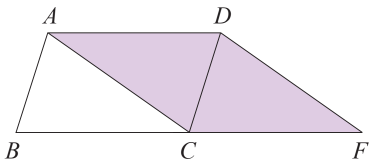


图 11－7

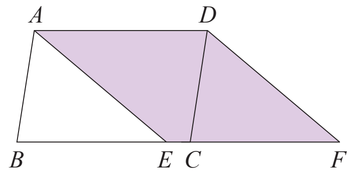


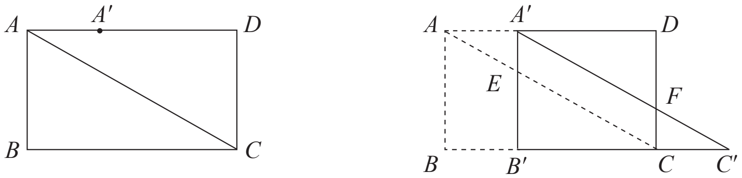
图 11－8

当AD小于AC，并且AD大于点A到BC的距离时，在边BC上截取点E，使$AE = AD$，平移$\triangle ABE$后所得到的平行四边形$AEFD$是菱形（图 11－8）.

当AD大于AC，并且AD大于AB时，对于边BC上的任意一点E，都不能使$AE = AD$，平移$\triangle ABE$后所得到的平行四边形，都不可能为菱形.

想一想，在上面的问题中，平移$\triangle ABE$后所得到的平行四边形能否是正方形？如果能，应满足什么条件？如果不能，请说明理由.

例3　如图 11－9①，A'是矩形$ABCD$边AD上的一点. 把矩形$ABCD$沿它的一条对角线AC剪开，然后把$\triangle ABC$沿AD向右平移，使平移的距离等于线段AA'的长，得到$\triangle A'B'C'$（图 11－9②）. 设$A'B'$交AC于点E，$A'C'$交CD于点F. 试判定$\triangle A'DF$与$\triangle CB'E$是否全等，说明你的结论.



①　　②

图 11－9

解　$\triangle A'DF \cong \triangle CB'E$. 理由如下：

$\because \triangle A'B'C'$是由$\triangle ABC$沿$AD$向右平移得到的，

$\therefore A'B' /\!/ AB$，$A'C' /\!/ AC$.

又$\because AB /\!/ CD$，

从而　$A'B' /\!/ CD$，

$\therefore$四边形$A'ECF$是平行四边形.

$\therefore A'F = CE$，$A'E = CF$.

$\because A'B' = CD$，

$\therefore B'E = DF$.

又 $\because \angle D = 90°$ ，

而　$AB /\!/ A'B'$，

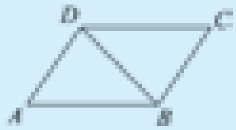
$\therefore \angle CB'E = \angle B = 90°$ ，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle A'DF \cong \mathrm{Rt}\triangle CB'E$.

在图 11−9 ② 中，你还能找到哪些全等三角形？说明你的理由.

练 习

1. 如图，把 $\square ABCD$ 沿射线 DB 方向平移，平移的距离等于线段 DB 的长，画出平移后的图形.



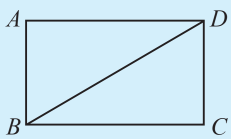
（第 1 题）

2. 如图，将两只全等的含 30° 角的三角尺按图 ① 的方式摆放在一起得到矩形 $ABCD$. 固定 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$，将 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 沿 BD 向右上方平移，得到图 ② 中的 $\triangle A'B'D'$，连接 $B'C$，$A'D$.

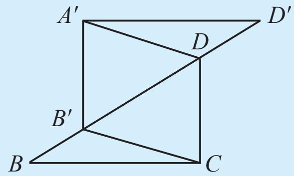
（1）判定四边形 $A'B'CD$ 的形状，并说明理由；

（2）在平移 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 的过程中，四边形 $A'B'CD$ 能是菱形吗？如果能，求出此时 BB' 的长；

（3）在平移 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 的过程中，四边形 $A'B'CD$ 能是矩形吗？说明你的结论.



①



②

（第 2 题）

交流与发现

（1）在如图 11−10 所示的直角坐标系中，已知点 A 的坐标为（−2，1）. 将点 A 分别向左、向右各平移 5 个单位长度，描出平移后点的位置，写出它的坐标. 如果将点 A 分别向上、向下各平移 3 个单位长度呢？你发现经过以上平移

后，点A的坐标发生了哪些变化？

（2）一般地，如果将点$P(a,b)$向左平移h（$h>0$）个单位长度，点P的坐标发生了哪些变化？向右平移h个单位长度呢？如果将点$P(a,b)$向上平移k（$k>0$）个单位长度，点P的坐标发生了哪些变化？向下平移k个单位长度呢？与同学交流.

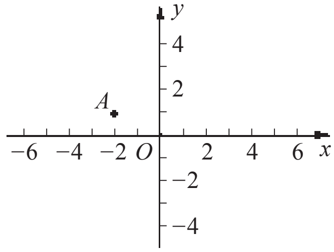


图 11−10

> 将直角坐标系中的点向右（或向左）平移h（$h>0$）个单位长度，点的纵坐标不变，横坐标增加（或减少）h个单位. 将直角坐标系中的点向上（或向下）平移k（$k>0$）个单位长度，点的横坐标不变，纵坐标增加（或减少）k个单位.

（3）描出将点$A(-2,1)$先向右平移5个单位长度，再向上平移3个单位长度后点的位置，并写出它的坐标. 你发现点A的坐标发生了哪些变化？

（4）描出将点$A(-2,1)$先向左平移2个单位长度，再向下平移4个单位长度后点的位置，并写出它的坐标. 你发现点A的坐标发生了哪些变化？

（5）把点$A(-2,1)$进行怎样的平移可以得到点$E(5,-4)$？

例4 如图 11−11，$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A(-3,3)$，$B(2,3)$，$C(0,5)$. 平移$\triangle ABC$得到$\triangle A'B'C'$，已知点A'的坐标为$(0,-2)$.

（1）求点B'，C'的坐标；

（2）画出$\triangle A'B'C'$；

（3）$\triangle A'B'C'$可以由$\triangle ABC$经过一次平移而得到吗？如果能，请在图中标出平移的方向，并求出平移的距离.

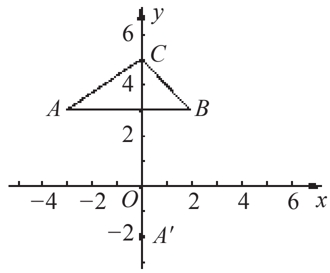
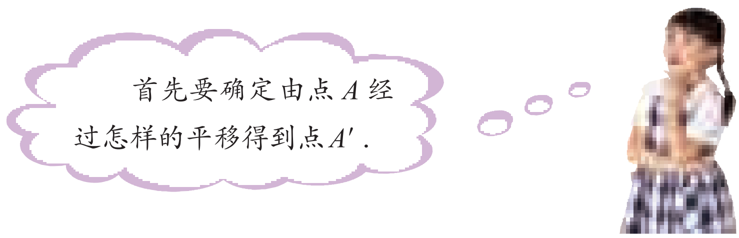


图 11−11



解 （1）因为点A与A'的坐标分别为$(-3,3)$与$(0,-2)$，由

$$0-(-3)=3, \qquad -2-3=-5$$

可知，点 A' 可以看作是将点 A 先向右平移 3 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度而得到的. 从而，点 B'，C' 可以看做是将点 B，C 分别进行了同样的平移而得到的.

所以，点 B' 的坐标为（2+3，3+(−5)），即（5，−2）；点 C' 的坐标为（0+3，5+(−5)），即（3，0）.

（2）分别作出点 B'，C'，顺次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就得到 $\triangle A'B'C'$（图 11−12）.

（3）在图 11−12 中，连接 CC'. $\triangle A'B'C'$ 也可以由 $\triangle ABC$ 沿 CC' 方向经过一次平移而得到.

$\because CC'=\sqrt{OC^2+OC'^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

$\therefore \triangle ABC$ 平移的距离为 $\sqrt{34}$ 个单位长度.

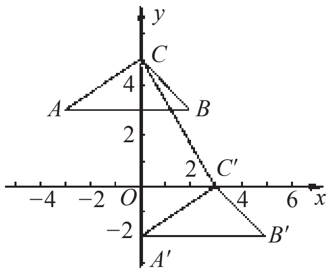


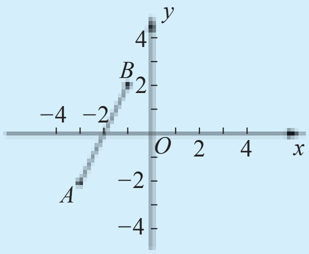
图 11−12

练 习

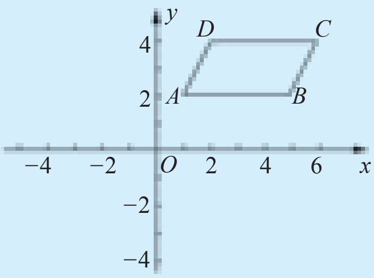
1. 如图，点 A，B 的坐标分别为（−3，−2），（−1，2）.

（1）将线段 AB 向右平移 4 个单位长度得到线段 CD，分别求点 C，D 的坐标，并在该直角坐标系中画出线段 CD；

（2）将线段 AB 向上平移 2 个单位长度得到线段 EF，分别求点 E，F 的坐标，并在该直角坐标系中画出线段 EF.



（第 1 题）



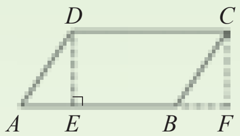
（第 2 题）

2. 如图，在直角坐标系中，将 ▱$ABCD$ 向左平移 4 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到 ▱$A'B'C'D'$. 已知点 A，B，C，D 的坐标分别为（1，2），（5，2），（6，4），（2，4），写出点 A'，B'，C'，D' 的坐标，并画出 ▱$A'B'C'D'$.

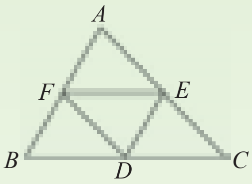
习题11.1

复习与巩固

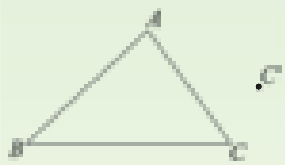
1. 如图，在▱$ABCD$中，$CD=2.5$ cm，$DE\perp AB$，垂足为点E；$CF\perp AB$交AB的延长线于点F，$AE=0.8$ cm．△BCF可以看作是由________沿________方向平移______cm而得到的．
2. 如图，点D，E，F分别是△ABC三边的中点．顺次连接点D，E，F，得到了几个全等三角形？其中，哪几个三角形可以看作是由△BDF经过平移得到的？分别说出平移的方向和距离．
3. 如图，△ABC经过平移后，点C移到了点C'处，画出平移后的△$A'B'C'$．



（第1题）

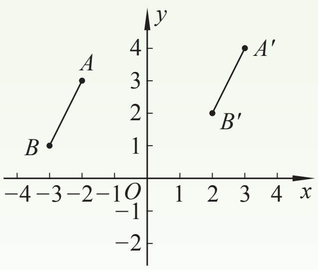


（第2题）

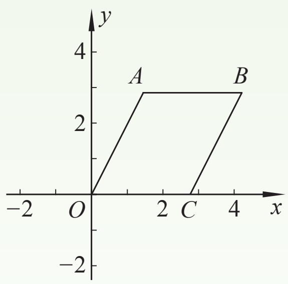


（第3题）

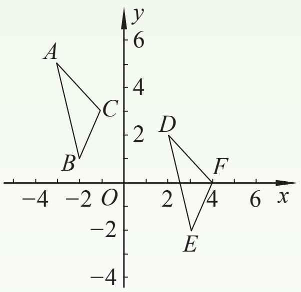
4. 如图，在直角坐标系中，线段$A'B'$是由线段AB平移得到的．已知A，B两点的坐标分别为$A(-2，3)$，$B(-3，1)$，点A'的坐标为$(3，4)$，求点B'的坐标．
5. 如图，在直角坐标系中，$ABCO$是平行四边形，已知$A(\sqrt{2},2\sqrt{2})$，$C(2\sqrt{2},0)$．
   （1）求点B的坐标；
   （2）将▱$ABCO$向右平移$\sqrt{2}$个单位长度，求所得四边形的顶点坐标；
   （3）求▱$ABCO$的面积．



（第4题）



（第5题）

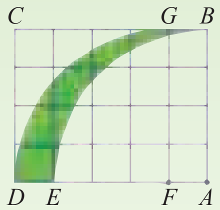


（第6题）

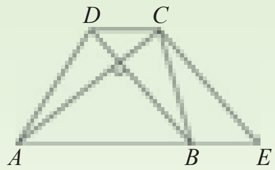
6. 如图，在直角坐标系中，△ABC经过平移后得到△DEF．已知点A，B，C，F的坐标分别为$(-3，5)$，$(-2，1)$，$(-1，3)$，$(4，0)$，求点D，E的坐标．
7. 在直角坐标系中，▱$ABCD$的顶点$A(1，2)$，$B(-2，3)$，$C(-1，-3)$．由该平行四边形经过平移得到▱$A'B'C'D'$，已知点$A'(-2，0)$，求点B'，C'，D'的坐标．

拓展与延伸

8. 如图，边长为 1 的网格中有一个“柳叶”形图形，它是由弧 $\overset{\frown}{DG}$，$\overset{\frown}{EB}$ 和线段 DE，GB 围成的，两条弧的圆心分别是点 F 和点 A，半径都等于 4．求“柳叶”形的面积．$\overset{\frown}{DG}$ 经过怎样的平移可以得到 $\overset{\frown}{EB}$？



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AC\perp BD$．沿 DC 方向将线段 BD 平移到 EC，平移的距离等于线段 DC 的长，连接 BE．

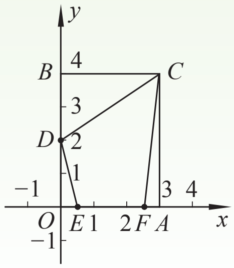
（1）AC 与 CE 是否垂直？为什么？

（2）$\triangle ACD$ 与 $\triangle BEC$ 的面积是否相等？为什么？

（3）已知 $AC=a$，$BD=b$，求梯形 $ABCD$ 的面积．

探索与创新

10. 在直角坐标系中，矩形 $OACB$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 A，B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，$OA=3$，$OB=4$，D 为边 OB 的中点．线段 EF 在边 OA 上移动，保持 $EF=2$，当四边形 $CDEF$ 的周长最小时，求点 E，F 的坐标．



（第 10 题）

11.2　图形的旋转

水　车

电风扇

汽车的方向盘

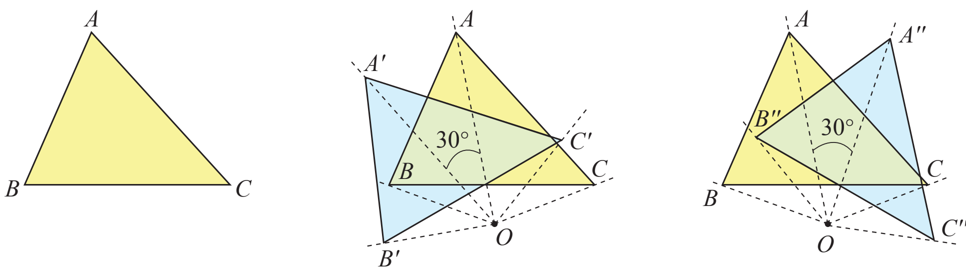
图 11−13

在日常生活中，你见过物体的旋转现象吗？章头图和图 11－13 中有哪些旋转现象？你还能举出类似的实例吗？物体在旋转的过程中，它的形状、大小是否发生了变化？

实验与探究

（1）在纸上任意画出△ABC（图 11－14①），并任取一点 O. 再蒙上一张透明纸，在透明纸上画出与△ABC 重合的△$A'B'C'$ 和点 O. 然后用大头针将点 O 固定.

（2）将透明纸绕点 O 按逆时针方向转动 30°，这时△$A'B'C'$ 的位置发生了怎样的变化（图 11－14②）？如果按顺时针方向转动 30° 呢（图 11－14③）？



①　②　③

图 11－14

将透明纸绕点 O 按某一确定的方向（逆时针或顺时针）转动角 α，△$A'B'C'$ 便由原来的位置绕点 O 按这个方向转动角 α. 由于在初始位置△$A'B'C'$（或△$A''B''C''$）与△ABC 重合，从而可以把转动后的△$A'B'C'$（或△$A''B''C''$）看做是由△ABC 绕点 O 按逆时针（或顺时针）方向转动角 α 得到的.

（3）观察图 11－14②③，你发现将△ABC 转动到△$A'B'C'$（或△$A''B''C''$）的位置是由哪些因素确定的？

在平面内，将一个图形绕一个定点按某一个方向（逆时针方向或顺时针方向）转动一定的角度，图形的这种变化叫做**旋转**（rotation）. 这个定点叫做**旋转中心**，这个角叫做**旋转角**. 旋转前图形上的点与旋转后所到达的点叫做**对应点**. 经过旋转所得到的图形的位置是由旋转中心、旋转方向和旋转角确定的.

例如，在图 11－14② 中，将△ABC 旋转到△$A'B'C'$ 的位置，旋转中心为点

O，旋转方向是逆时针方向，旋转角为30°．A，B，C 的对应点分别是 A'，B'，C'，你能指出图 11−14 ③ 中的旋转中心、旋转方向和旋转角吗？你能分别指出点 A，B，C 的对应点吗？

（4）在图 11−14 ②③ 中，分别连接 OA，OA'，OA''，你发现 OA 与 OA'，OA 与 OA'' 的长有怎样的关系？为什么？如果分别连接 OB，OB'，OB'' 和 OC，OC'，OC''，对于 OB 与 OB'，OB 与 OB'' 或 OC 与 OC'，OC 与 OC'' 你能得到类似的结论吗？比较 $\angle AOA'$ 与 $\angle BOB'$，$\angle COC'$ 以及 $\angle AOA''$ 与 $\angle BOB''$，$\angle COC''$ 的大小，你有什么发现？能对你的结论做出说明吗？

点 A 与它的对应点 A' 都在以点 O 为圆心，OA 为半径的圆上，所以 $OA=OA'$，$\angle AOA'$ 和 $\angle BOB'$ 都等于旋转角 30°，所以 $\angle AOA'=\angle BOB'$．

（5）改变（1）中的点 O 的位置（例如取在 $\triangle ABC$ 的内部或边上），或改变旋转角的大小，重复（1）中的实验，你发现 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的对应点到旋转中心点 O 的距离是否相等？两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角是否相等？

一般地，图形的旋转具有下面的基本性质：

一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等，两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角相等．

（6）$\triangle ABC$ 与它旋转后得到的 $\triangle A'B'C'$ 以及 $\triangle A''B''C''$ 全等吗？为什么？

经过旋转所得到的图形与旋转前的图形全等，即旋转只改变图形的位置，而不改变图形的形状和大小．

（7）如图 11−15，点 O 为线段 AB 上的一点．以点 O 为旋转中心，怎样画出线段 AB 按逆时针方向旋转 90° 所得的线段？

图 11−15

（8）如图 11−16，点 O 为线段 AB 外的一点，以点 O 为旋转中心，怎样画出线段 AB 按逆时针方向旋转 90° 所得的线段？

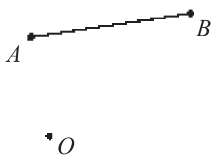


图 11−16

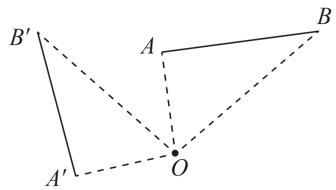


图 11−17

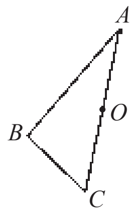


图 11−18

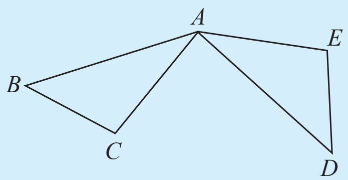
在图 11−17 中，连接 OA，OB. 分别将线段 OA，OB 按逆时针方向旋转 90°，得到线段 OA'，OB'，连接 $A'B'$，线段 $A'B'$就是 AB 绕点 O 旋转所得的线段.

（9）如图 11−18，O 是△ABC 的边 AC 的中点. 怎样画出△ABC 绕点 A 按逆时针方向旋转 30° 所得的图形？怎样画出 △ABC 绕点 O 按逆时针方向旋转 60° 所得的图形？

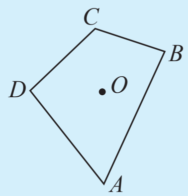
一般地，要确定一个图形绕某个点旋转后图形的位置，可以先在这个图形上选择几个关键点，利用旋转的基本性质，分别确定它们旋转后对应点的位置，便可画出旋转后的图形.

练 习

1. 如图，△ABC 按逆时针方向旋转角 α 得到△ADE.
   （1）指出图中的旋转中心；
   （2）指出△ABC 与△ADE 的对应边；
   （3）说出图中哪些角等于旋转角.
2. 如图，画出四边形 $ABCD$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 120° 得到的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

例1　在图 11−19 所示的方格纸上，图案 $ABCDO$ 是由等腰直角三角形 ABO 和等腰直角三角形 CDO 拼成的，画出这个图案绕点 O 按逆时针方向旋转90° 得到的图案.

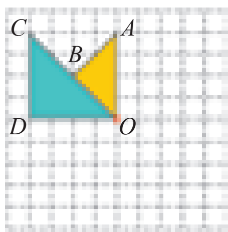


图 11−19

解　（1）设方格纸上每个小正方形的边长为 1 个单位长度，点 A，B，C，D 绕点 O 按逆时针方向旋转 90° 得到的

点分别记为 A'，B'，C'，D'. 由已知及图 11−19 可知，$\angle AOD = 90°$，且 $AO = OD = 4$，因此，点 A' 与点 D 重合. 由 $\angle BOD = 45°$，且 $BO = 2\sqrt{2}$，可以确定点 B' 的位置. 类似地，可以确定点 C'，D' 的位置（图 11−20①）；

（2）分别连接 $A'B'$，OC'，$C'D'$，OD'.

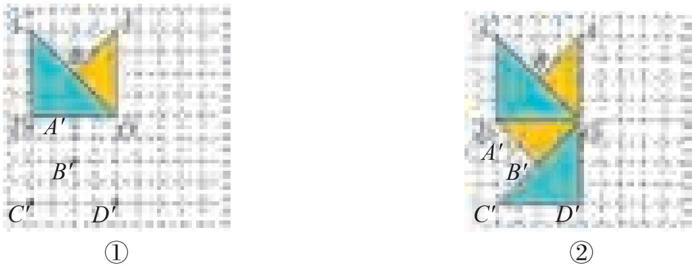


图 11−20

图案 $A'B'C'D'O$ 就是所要画的图案（图 11−20②）.

你能分别画出图案 $ABCDO$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° 和 135° 所得到的图案吗？试一试.

例2 如图 11−21，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上的一点，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 按顺时针方向旋转一定的角度，使点 E 落到 CB 的延长线上的点 F 处（图 11−21）.

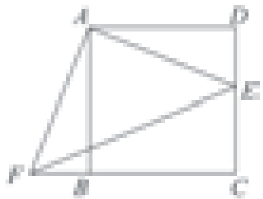


图 11−21

（1）写出它的旋转角；

（2）如果 $EF = 4$，求 AE 的长.

解 （1）旋转中心是点 A，当 AE 旋转到 AF 时，点 E 的对应点是点 F. 设旋转后点 D 的对应点是点 D'，由旋转的基本性质，可知 $AD' = AD = AB$，$\angle FAD' = \angle EAD$，所以点 D' 应与点 B 重合.

$\because \angle BAD = 90°$，

$\therefore$ 旋转角是 90°.

（2）$\because$ A 是旋转中心，E 与 F，D 与 B 分别是对应点，根据旋转的基本性质，

$\therefore AE = AF$，$\angle FAE = \angle BAD = 90°$.

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形.

$\therefore AE^2 + AF^2 = EF^2$.

$\because EF = 4$，

$\therefore 2AE^2 = 4^2$，

$\therefore AE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

挑战自我

两个全等三角形在什么条件下，可以由其中的一个三角形经过平移而得到另一个？在什么条件下，可以由其中的一个经过旋转而得到另一个？在什么条件下，可以由其中的一个经过轴对称而得到另一个？画图说明.

史海漫游

费马点

费马（Femat，1601−1665），法国数学家. 在大学学习法律，后任律师和议员. 他精通数国语言，掌握多门自然科学知识，并利用业余时间研究数学，在数论、解析几何、微积分、概率论、变分法等领域有重要开创性的贡献，被誉为“业余数学家之王”.

费马曾在一封写给意大利数学家托里切利（Torricelli，1608—1647）的信中提出三角形的一个有趣的问题：

对于任意一个三角形，是否存在一个点，它到三个顶点的距离之和最小. 托里切利成功解决了这一问题. 这个点后被称为费马点或托里切利点.

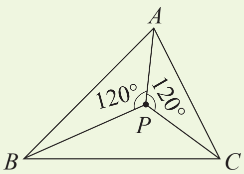


图 11−22

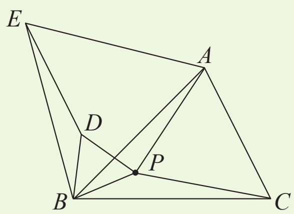


图 11−23

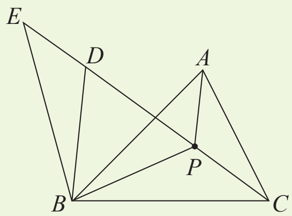


图 11−24

（1）当$\triangle ABC$每个角都小于120°时，费马点P在三角形内，且与三角形三个顶点的连线所成的角都是120°，即$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120^\circ$（图 11−22）.

理由如下：

如图 11−23，P为$\triangle ABC$内任一点，将$\triangle APB$绕B点逆时针旋转60°，得到$\triangle EDB$. 由旋转的基本性质，可知$PA=DE$，$PB=DB$，$\angle DBP=60^\circ$，从而$\triangle DBP$为等边三角形，$PB=PD$.

所以　$PA+PB+PC=DE+PD+PC$.

当E，D，P，C四点在一条直线时，线段DE，PD，PC之和最小. 如图 11−24，这时

$\angle APB=\angle BDE=180^\circ-\angle BDP=120^\circ$，

$\angle BPC=180^\circ-\angle BPD=120^\circ$，

$\angle APC=360^\circ-\angle BPC-\angle APB=120^\circ$.

因此　$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120^\circ$.

（2）当$\triangle ABC$有一个内角不小于120°时，这个角的顶点就是$\triangle ABC$的费马点.

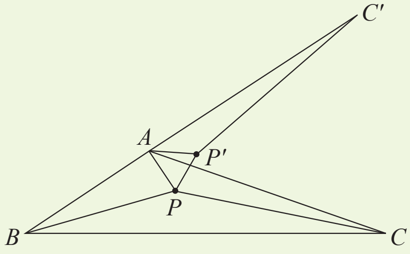


图 11−25

理由如下：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC\geqslant 120^\circ$（图11−25），设$P$为$\triangle ABC$内任意一点，将$\triangle APC$绕点$A$按逆时针方向旋转到$\triangle AP'C'$，使其中点旋转到$BA$的延长线上的点$C'$处，点$P$旋转到点$P'$处. 于是$AP=AP'$，$P'C'=PC$. 这时，旋转角$\angle PAP'=\angle CAC'=180^\circ-\angle BAC\leqslant 60^\circ$.

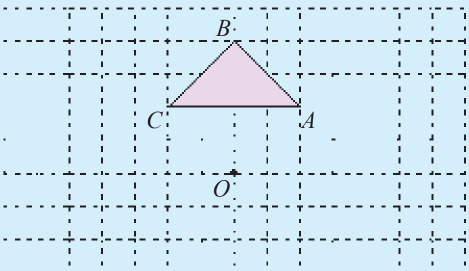
在等腰三角形PAP'中，由$\angle PAP'\leqslant 60^\circ$. 可知$\angle APP'\geqslant 60^\circ$，从而$PP'\leqslant PA$.

因此，点A满足$AB+AC=BC'<PB+PP'+P'C'\leqslant PA+PB+PC$.

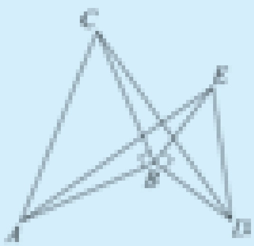
所以点A为费马点.

练 习

1. 如图，在方格纸上画出$\triangle ABC$绕点O按逆时针方向旋转90°后得到的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，将$\triangle BAE$绕点B按顺时针方向旋转90°得到$\triangle BCD$，$AB=3$，$BE=2$. 求$\triangle ABC$与$\triangle EBD$的面积的和.

实验与探究

（1）画一个等腰直角三角形ABC，$\angle A=90^\circ$，再取一个三角尺，将三角尺的直角顶点放在$\text{Rt}\triangle ABC$的斜边BC的中点O处，并使三角尺的一条直角边经过

点A，另一条直角边经过点B（图11-26①）.

（2）将三角尺绕点O按顺时针方向旋转任意一个锐角，记三角尺的两腰与Rt$\triangle ABC$的两腰AB，AC的交点分别为E，F（图11-26②）.

（3）在三角尺按（2）中的方式绕点O旋转的过程中，你发现线段AE与CF的大小有什么关系？OE与OF的大小有什么关系？说明你的理由.

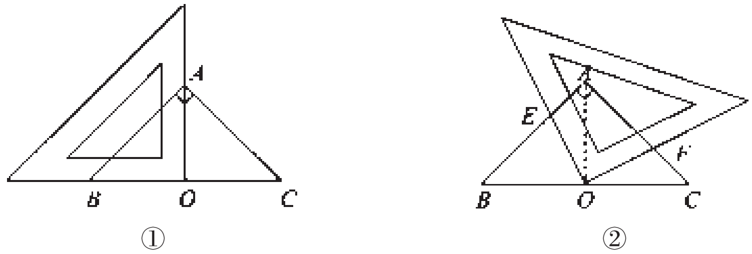
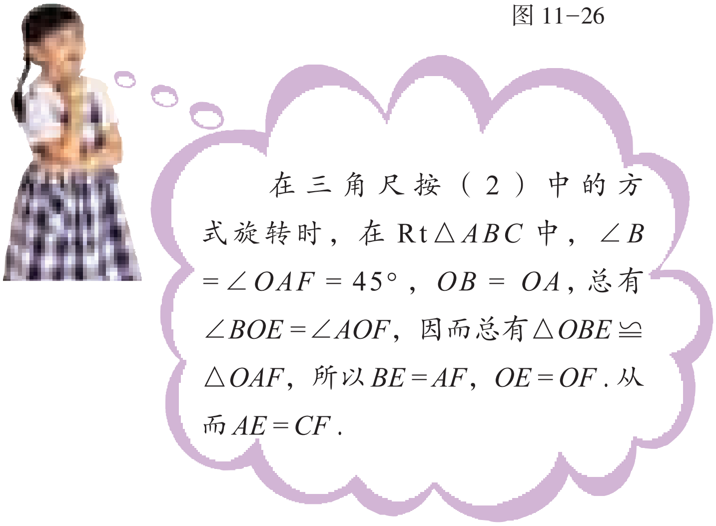


图11-26



小资料

几何图形的位置、大小或形状发生变化时．可能存在某些不变的量和不变的数量关系或位置关系．例如图形在旋转时，对应点到旋转中心的距离不变，两组对应点分别与旋转中心所成的角不变，在轴对称、平移等变化中也有不变量．有些数学问题往往需要找出变化中的不变量或不变关系，或者从不变量入手加以解决．

（4）旋转是图形的一种位置变化．通过对问题（3）的探索，你发现在上述三角尺的旋转过程中，有没有不变的量？有没有不变的等量关系？如果有，把它们分别指出来．

例3　如图11-27①，已知$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，点D是BC的中点．作正方形$DEFG$，使点A，C分别在边DG和DE上，连接AE，BG．

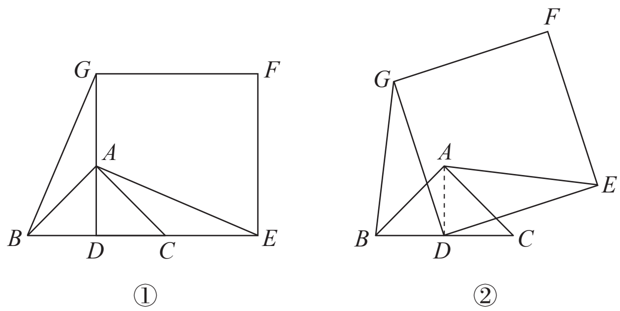


图11-27

（1）探索线段 BG 与 AE 的数量关系，写出你的结论；

（2）将正方形 $DEFG$ 绕点 D 按逆时针方向旋转一定角度（旋转角大于 $0°$，小于或等于 $360°$）时（图11−27②），判断（1）的结论是否仍然成立？

（3）已知 $BC=4$，$DE=5$，在（2）的旋转过程中，当 AE 为最大值时，求 AF 的值.

解　（1）在 $\triangle BDG$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$\because BD=AD$，$GD=DE$，$\angle GDB=\angle EDA=90°$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDG \cong \mathrm{Rt}\triangle ADE$（SAS），

$\therefore BG=AE$.

（2）这时（1）的结论仍然成立.

理由如下：连接 AD. 在 $\triangle BDG$ 和 $\triangle AED$ 中，

$\because \angle ADG+\angle BDG=90°$，$\angle ADG+\angle ADE=90°$，

$\therefore \angle BDG=\angle ADE$.

$\because BD=AD$，$GD=DE$，

$\therefore \triangle BDG \cong \triangle ADE$（SAS）.

$\therefore BG=AE$.

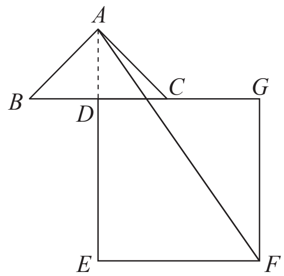


图 11−28

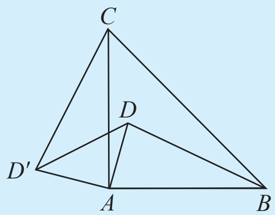
（3）如图 11−28，当正方形 $DEFG$ 绕点 D 按逆时针方向旋转 $270°$ 时，A，D，E 三点在同一条直线上，AE 取得最大值. 此时 $AE=AD+DE=2+5=7$.

$\therefore AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$.

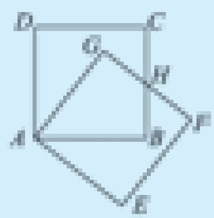
练 习

1. 如图，D 是等腰直角三角形 ABC 内一点，BC 是斜边，如果将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转到 $\triangle ACD'$ 的位置，求 $\angle ADD'$ 的度数.

2. 如图，把正方形 $ABCD$ 绕点 A 按顺时针方向旋转，得到正方形 $AEFG$，边 FG 与 BC 交于点 H. 线段 HG 与 HB 相等吗？说明你的理由.



（第 1 题）

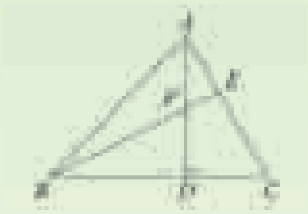


（第 2 题）

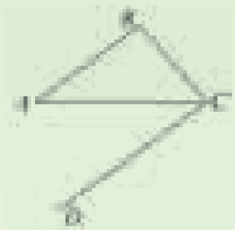
习题11.2

复习与巩固

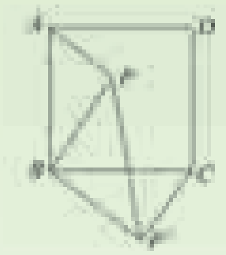
1. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，$\angle ABC = 45°$，$DF = DC$，延长 BF 交 AC 于点 E. 图中哪个三角形可以看作是由另一个三角形按逆时针方向旋转得到的？旋转中心是哪个点？旋转角是多少度？



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转后，边 AC 到达 CD 的位置，画出 $\triangle ABC$ 旋转后的图形.

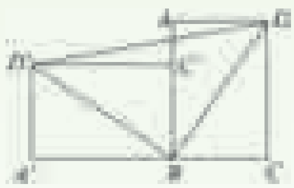
3. 如图，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，将 $\triangle ABP$ 绕点 B 按顺时针方向旋转到 $\triangle CBP'$ 的位置，$PB = 3$. 求 PP' 的长.

4. 如图，以矩形纸片 $ABCD$ 的顶点 B 为旋转中心，把纸片按逆时针方向旋转 $90°$ 到 $A'BC'D'$ 的位置，连接 BD，DD'，$D'B$. 记 $AB = a$，$BC = b$，$BD = c$.

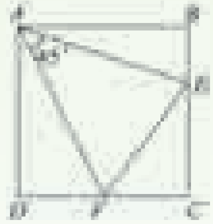
（1）分别计算 $\triangle D'A'B$，$\triangle DBC$，$\triangle D'BD$ 的面积；

（2）分别用关于 a，b 和关于 a，b，c 的代数式表示梯形 $A'CDD'$ 的面积；

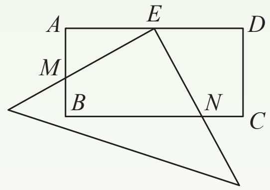
（3）由（2）的结果，你能验证勾股定理吗？



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

5. 如图，点 E 与 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 与 CD 上，$\angle EAF = 45°$.

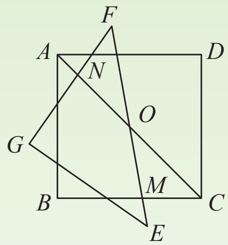
（1）以点 A 为旋转中心，将 $\triangle ABE$ 按顺时针方向旋转 $90°$，画出旋转后得到的图形；

（2）已知 $BE = 2$ cm，$DF = 3$ cm，求 EF 的长.

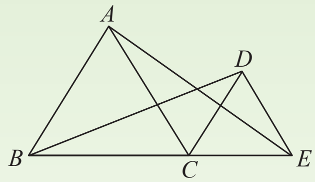
6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD = 2AB$，E 是 AD 的中点. 一个三角尺的直角顶点与点 E 重合，将三角板绕点 E 按顺时针方向旋转，当三角板的两直角边与 AB，BC 分别相交于点 M，N 时，观察并测量 EM 与 EN 的长度，你有什么发现？说明你的理由.

拓展与延伸

7. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，将 $\triangle ABC$ 绕对角线 AC 的中点 O 旋转至 $\triangle FGE$ 的位置，EF 交 BC 于点 M，GF 交 AC 于点 N. 请找出在旋转时，与线段 BM 保持相等的线段，并说明你的结论.



（第 7 题）

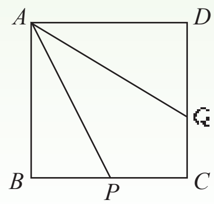


（第 8 题）

8. 如图，点 C 在线段 BE 上，且 $BC>CE$，分别以 BC，CE 为边，在 BE 上方作等边三角形 ABC 和 DCE，连接 AE，BD. 图中是否存在可以通过旋转而得到的三角形？如果存在，指出旋转中心和旋转角；如不存在，说明理由.

探索与创新

9. 如图，P，Q 分别是正方形 $ABCD$ 边 BC，DC 上的两点，且 $\angle PAQ=\angle DAQ$. 小亮认为利用旋转 Rt$\triangle ADQ$，可以推出 $PA=PB+DQ$，他的想法正确吗？如果正确，请说明理由；如果不正确，请举出反例.



（第 9 题）

11.3 图形的中心对称

实验与探究

（1）用硬纸板任意剪出一个三角形，以它为模板，在纸上画出这个三角形，记为 $\triangle ABC$. 再将三角形纸板绕它的顶点 C 旋转 $180°$，在同一张纸上画出旋转后得到的 $\triangle A'B'C'$（图 11−29）.

（2）在 $\triangle ABC$ 所在的纸上，任取一点 O，将 $\triangle ABC$ 在纸上绕点 O 旋转 $180°$，得到 $\triangle A'B'C'$，观察 $\triangle ABC$ 与旋转得到的 $\triangle A'B'C'$ 对应顶点的位置（图 11−30）.

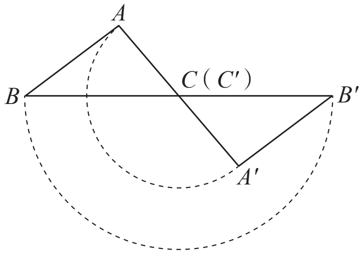


图 11−29

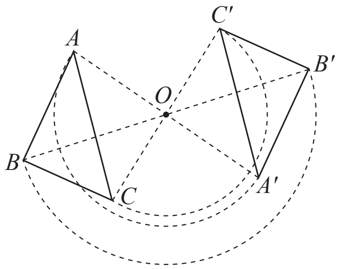
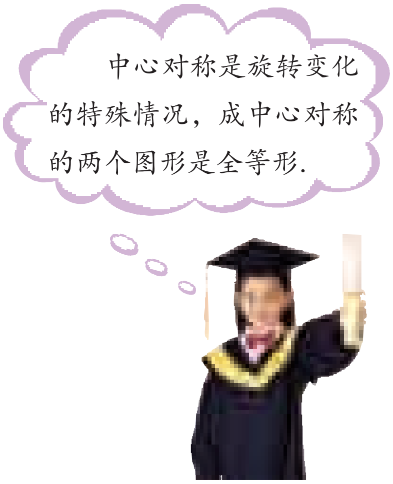


图 11−30

在平面内将一个图形绕某一定点旋转 180°，图形的这种变化叫做**中心对称**（central symmetry），这个定点叫做**对称中心**. 一个图形经过中心对称能与另一个图形重合，就说这两个图形关于这个定点**成中心对称**.

在图 11−29 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 C 成中心对称，点 C 是对称中心. 点 A，B 与点 A'，B' 分别是对应点，点 C 的对应点是其本身. 在图 11−30 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成中心对称，点 A，B，C 的对应点分别是 A'，B'，C'.



（3）观察图 11−29，你发现对应点 A，A' 的连线 AA' 与对称中心 C 之间有什么关系？B，B' 的连线呢？

（4）在图 11−30 中，分别连接对应点 A，A'；B，B'；C，C'. 你发现点 O 与这些对应点的连线分别有什么关系？说明你的理由.

将点 A 绕点 O 旋转 180° 与点 A' 重合，即线段 OA 绕点 O 旋转 180° 与线段 OA' 重合，所以点 A，O，A' 在同一条直线上. 也就是说，对应点 A，A' 的连线 AA' 经过点 O，且 $OA = OA'$，即线段 AA' 被点 O 平分.

同样地，对应点 B，B' 的连线 BB'，C，C' 的连线 CC' 都经过点 O，且 $OB = OB'$，$OC = OC'$，即线段 BB' 和 CC' 也都被点 O 平分.

一般地，中心对称有下面的基本性质：

成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

（5）如图 11−31，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成中心对称. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上任取一点 D，怎样作出点 D 的对应点？在 $\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C'$ 上任取一点 E'，怎样作出点 E' 的对应点？

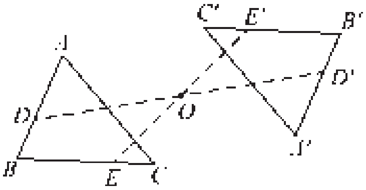
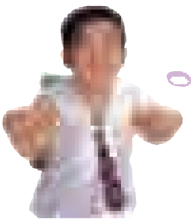


图 11−31



连接 DO，延长交 $A'B'$ 于点 D'，点 D' 就是点 D 的对应点. 同样地，连接 $E'O$，延长交 BC 于点 E，点 E 就是点 E' 的对应点.

例1　如图 11−32，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画出与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形.

解　（1）连接 AO，BO，CO，DO .

（2）分别延长 AO 到 A_1，BO 到 B_1，CO 到 C_1，DO 到 D_1，使 $OA_1 = OA$，$OB_1 = OB$，$OC_1 = OC$，$OD_1 = OD$.

（3）顺次连接 A_1，B_1，C_1，D_1 各点.

四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所要画的四边形.

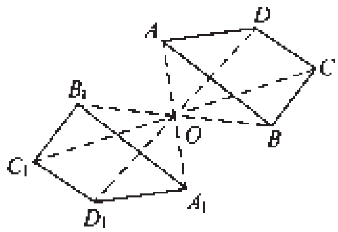


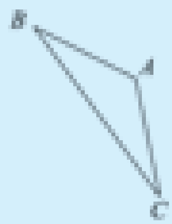
图 11−32

练 习

1.（1）如图，作出点 A 关于点 O 成中心对称的点；

（第 1（1）题）

（第 1（2）题）



（第 1（3）题）

（2）如图，作出线段 AB 关于点 O 成中心对称的线段；

（3）如图，作出 $\triangle ABC$ 关于点 A 成中心对称的图形.

2. 在直角坐标系中，已知点 A（3，0），B（0，−2），C（−2，3），D（−3，2），分别作出它们关于原点 O 成中心对称的点，并写出对称点的坐标. 由此你发现关于原点成中心对称的两个点的坐标有什么关系？

观察与思考

（1）图 11−33 是一种儿童玩具——风车的图形. 将它绕点 O 旋转 180°，所得到的图形能与原来的图形重合吗？

在平面内，一个图形经过中心对称能与原来的图形重合，这个图形叫做**中心对称图形**（central symmetry figure）.

如图 11−34，当线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180° 时，它的两个端点 A 与 B 互换了位置，旋转后的线段与原线段重合. 因此，线段是中心对称图形，中点 O 是对称中心.

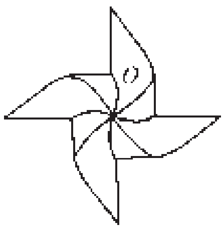


图 11−33

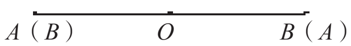


图 11−34

（2）平行四边形是中心对称图形吗？如果是，哪是它的对称中心？说明你的理由.

如图 11−35，在 ▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O. 因为 $OA = OC$，$OB = OD$，如果将 ▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，点 A 与点 C，点 B 与点 D 分别互换了位置. 旋转后所得到的图形与原来的图形重合. 因此，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

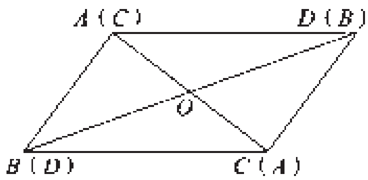


图 11−35

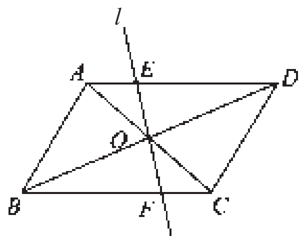


图 11−36

特别地，矩形、菱形和正方形都是中心对称图形.

（3）在 ▱$ABCD$ 的边 AB 上任取一点 E，你能确定它关于对称中心 O 的对应点 F 的位置吗？画一画，说明你的理由.

（4）如图 11−36，过 ▱$ABCD$ 的对称中心 O 任意作直线 l，交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，把 ▱$ABCD$ 分割为四边形 $ABFE$ 和四边形 $CDEF$. 这两个四边形关于点 O 成中心对称吗？与同学交流.

例2　如图 11−37，$ABCD$ 是一块正方形的土地，要在这块土地上修建两条笔直的、互相垂直的小路，把这块土地分成面积相等的四部分. 你有哪些不同的方案？画出图形，并说明理由.

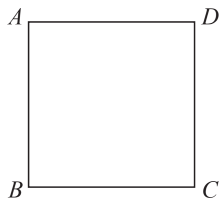


图 11−37

解　方案一：正方形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 和 BD 可作为小路的位置（图 11−38），此时正方形被分成的四个等腰直角三角形是全等的.

方案二：正方形 $ABCD$ 两组对边中点的连线 EG 和 HF 可作为小路的位置（图 11−40），此时正方形被分成的四个正方形是全等的.

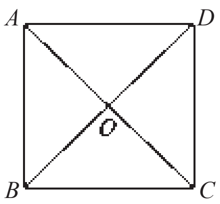


图 11−38

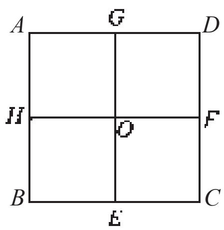


图 11−39

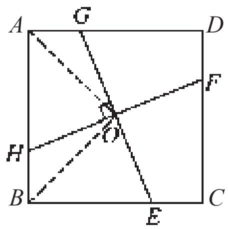


图 11−40

方案三：过正方形的对称中心 O，任意作两条互相垂直的直线 EG，HF，分别交 AB，CD 于点 H，F，交 BC，AD 于点 E，G（图 11−40），则 EG 与 HF 可作为小路的位置.

理由是：记四边形 $OGAH$，$OHBE$，$OECF$，$OFDG$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4.

因为 GE，HF 经过正方形 $ABCD$ 的对称中心 O，故四边形 $GABE$ 与 $ECDG$ 以及 $HBCF$ 与 $FDAH$ 分别关于点 O 成中心对称.

从而　$S_1+S_2=S_3+S_4$，　①

$S_2+S_3=S_4+S_1$.　②

①－②，得　$S_1-S_3=S_3-S_1$，整理得　$S_1=S_3$.

将 $S_1=S_3$ 代入①，得　$S_2=S_4$.

连接 OA，OB，则 $OA=OB$，$\angle AOB=90^\circ$．因为$\angle AOG$和$\angle BOH$都与$\angle AOH$互余，所以$\angle AOG=\angle BOH$，$\angle GAO=\angle HBO=45^\circ$，从而$\triangle AOG\cong\triangle BOH$．同理$\triangle AOH\cong\triangle BOE$．

$\therefore S_1=S_{\triangle AOG}+S_{\triangle AOH}=S_{\triangle BOH}+S_{\triangle BOE}=S_2$．

于是　$S_1=S_2=S_3=S_4$．

所以HF和GE把正方形$ABCD$分成面积相等的四部分.

在图11−40中，你还能利用$S_1=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}S_{正方形}$，说明这一结论吗?

正方形既是轴对称图形，也是中心对称图形，方案一和方案二的依据是正方形的轴对称性质，方案三的依据是正方形的中心对称性质. 方案一和方案二也可以看作是方案三的特例.

挑战自我

图11−41 ① 是一块L形钢板，怎样用一条直线把它分割为面积相等的两部分呢?

（1）图11−41 ② 是小莹想出的一种分割方案. 她的分割方案正确吗? 为什么?

（2）你还有其他的分割方案吗? 画图说明.

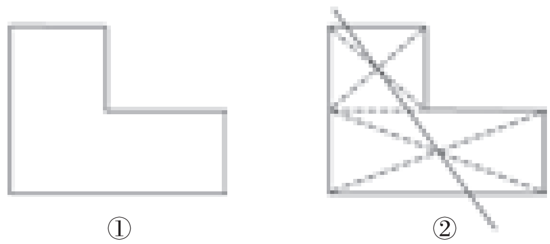
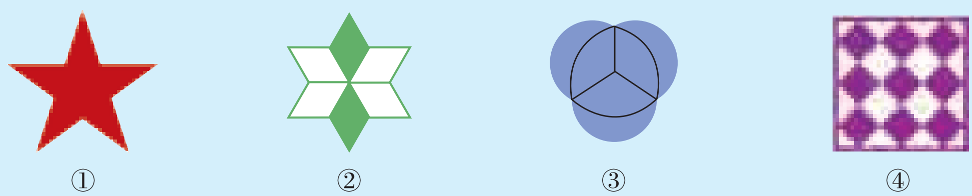


图11−41

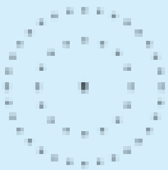
练 习

1. 正三角形是中心对称图形吗? 正六边形呢? 你能举出几个中心对称图形的实例吗?
2. 在如图所示的四个图形中，哪些是轴对称图形? 哪些是中心对称图形?

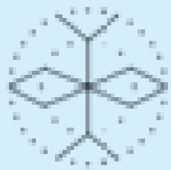


（第2题）

3. 如图，图①是由两个同心圆上的一些点组成的图形，其中每个点关于圆心成中心对称的点也在这个图案上. 图②是小亮利用图①设计的中心对称图案. 你能利用图①设计出其他的中心对称图案吗？试一试.



①



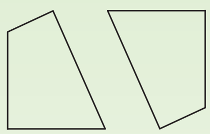
②

（第 3 题）

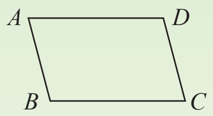
习题11.3

复习与巩固

1. 如图，已知两个四边形成中心对称，作出它们的对称中心.

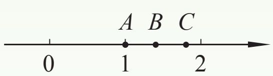


（第 1 题）

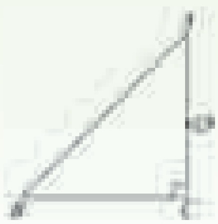


（第 2 题）

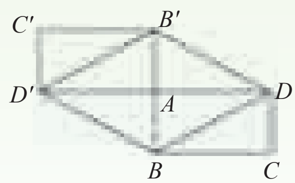
2. 如图，以▱$ABCD$ 的顶点 C 为对称中心，作出与这个平行四边形成中心对称的图形.
3. 把 26 个大写英文字母都看作图形，其中哪些是中心对称图形？
4. 如图，数轴上 A，B 两点表示的数分别是 1 和 $\sqrt{2}$，点 A 关于点 B 的对称点是点 C，则点 C 所表示的数是什么？
5. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 2$，点 O 是直角边 AC 的中点. 画出这个三角形关于点 O 成中心对称的图形，并求点 B 与它关于点 O 的对称点 B' 的距离.



（第 4 题）



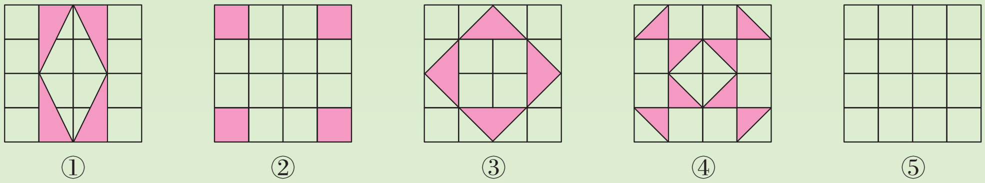
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，矩形 $ABCD$ 与矩形 $AB'C'D'$ 关于点 A 成中心对称. 试判定四边形 $BDB'D'$ 的形状，并说明你的理由.

7. 观察下面四个图案，回答下列问题：



（第 7 题）

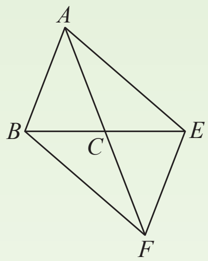
（1）请写出这四个图案的至少两个共同特征；

（2）请在图⑤中设计一个图案，使它具备你所写出的特征.

拓展与延伸

8. 如图，是由两个半圆组成的图形. 点 O 是大半圆的圆心，AB 是大半圆的直径，OA 是小半圆的直径，点 C 是 OB 的中点. 画出这个图形关于点 C 成中心对称的图形.

（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，△ABC 与△FEC 关于点 C 成中心对称. 连接 AE，BF.

（1）线段 AE 与 BF 有怎样的位置关系和大小关系？说明你的理由；

（2）如果△ABC 的面积为 3 cm²，求四边形 $ABFE$ 的面积；

（3）当∠ACB 为多少度时，四边形 $ABFE$ 为矩形？说明你的理由.

探索与创新

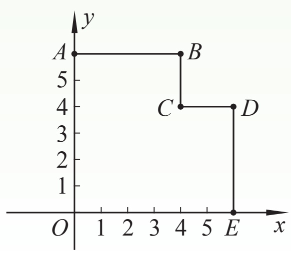
10. 设计由一个菱形和一个矩形组合而成的图案，并满足下列条件：

（1）既是轴对称图形，又是中心对称图形（设计三个图案）；

（2）是轴对称图形，但不是中心对称图形（设计两个图案）；

（3）是中心对称图形，但不是轴对称图形（设计两个图案）.

11. 如图，在平面直角坐标系中，多边形 $OABCDE$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$，$A(0, 6)$，$B(4, 6)$，$C(4, 4)$，$D(6, 4)$，$E(6, 0)$. 如果直线 l 经过点 $M(2, 3)$，且将多边形 $OABCDE$ 分割成面积相等的两部分，求直线 l 的函数表达式.



（第 11 题）

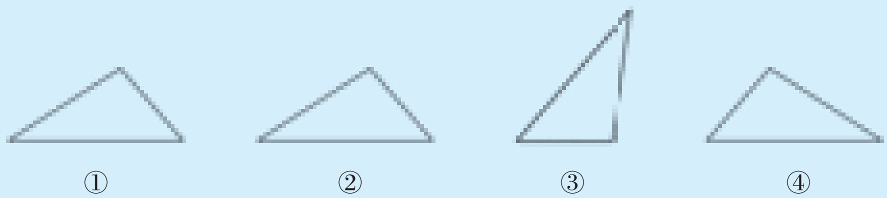
回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.
2. 什么是图形的平移？一个图形经过平移后的位置由哪些因素确定？平移的基本性质是什么？怎样画出一个图形经平移后的图形？
3. 在直角坐标系中，将一个已知顶点坐标的多边形沿坐标轴方向平移后，图形的顶点坐标会发生怎样的变化？如果依次沿两个坐标轴平移后呢？
4. 什么是图形的旋转？一个图形经过旋转后的位置由哪些因素确定？旋转的基本性质是什么？怎样画出一个图形旋转后的图形？
5. 什么是中心对称？怎样的两个图形成中心对称？中心对称的基本性质是什么？
6. 什么是中心对称图形？中心对称、中心对称图形以及两个图形成中心对称有什么区别和联系？
7. 图形的平移、旋转、中心对称和轴对称都是图形位置的变化. 图形经过这些变化所得到的图形与原图形是全等的，也就是说图形的形状、大小都不发生变化. 比较图形的轴对称与中心对称概念和性质的相同点和不同点.

综合练习

复习与巩固

1. 如图，图②③④是由图①分别经过怎样的变化而得到的？指出各个变化的名称，并分别标出对应顶点.



（第 1 题）

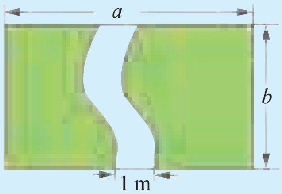
2. 如图，时代中学有一块长 a m，宽 b m 的矩形广场，广场中有一条弯曲的宽度为 1 m 的小路，其余部分为草坪. 求草坪的面积.

3. 如图，▱$ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别是 $(-3,\sqrt{2})$，$(-2,3\sqrt{2})$，点 C 的横坐标是2.

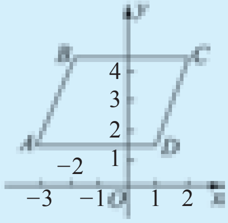
（1）求点 D 的坐标；

（2）将▱$ABCD$ 先向右、再向下各平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度，得到▱$A'B'C'D'$，求点 A'，B'，C'，D' 的坐标；

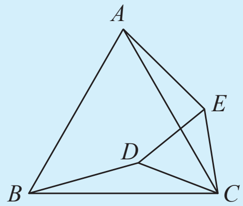
（3）求四边形 $BCC'B'$ 的面积.



（第2题）



（第3题）



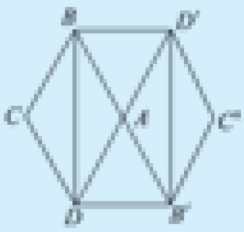
（第4题）

4. 如图，D 为等边三角形 ABC 内一点，将△BDC 绕点 C 旋转，使点 B 与点 A 重合，点 D 落在点 E 处，连接 DE. 试判定△CDE 的形状，并说明理由.

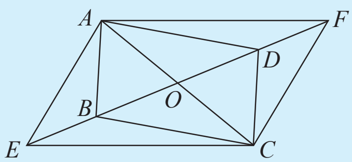
5.（1）将任意一个三角形绕它一边的中点旋转 180°，它与原来的图形构成一个什么图形？特别地，将直角三角形绕斜边中点旋转180°呢？说明你的理由；

（2）将一个怎样的三角形绕它一边的中点旋转 180°，它与原来的图形构成一个菱形？一个矩形？一个正方形？说明你的理由.

6. 如图，菱形 $ABCD$ 与菱形 $AB'C'D'$ 关于点 A 成中心对称. 连接 BD，DB'，$B'D'$，$D'B$，试判定四边形 $BDB'D'$ 的形状，并说明你的理由.



（第6题）



（第7题）

7. 如图，▱$ABCD$ 的对角线相交于 O，点 E，F 在直线 BD 上，且 $BE=DF$，请说出图中：

（1）四边形 $AECF$ 是否中心对称图形？说明理由；

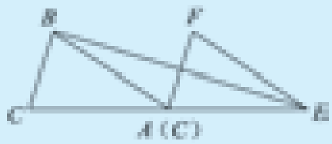
（2）四边形 $AECF$ 的对称中心是哪个点？

拓展与延伸

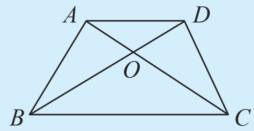
8. 如图，△ABC 的面积为3，且 $AB=AC$，将△ABC 沿射线 CA 方向平移，平移后顶点 C 到达点 A 处，得到△EFA.

（1）求平移过程中$\triangle ABC$扫过的图形的面积；

（2）判断BE与AF的位置关系，并说明理由.



（第 8 题）



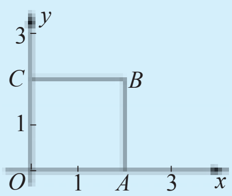
（第 9 题）

9. 在四边形$ABCD$中，$AD /\!/ BC$，试经过图形平移得到一个三角形，其三边长分别等于AC，BD，$AD+BC$.

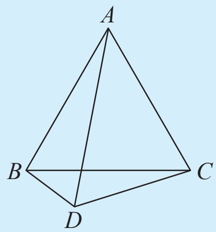
10. 如图，$OABC$是边长为 2 的正方形，将这个正方形绕点O按逆时针方向旋转$60°$. 画出旋转后的图形，并写出旋转后正方形各个顶点的坐标.

11. 已知D为等边三角形ABC外一点，$\angle BDC = 120°$，$\angle DBC = \angle DAC$. 试说明：$AD = BD + DC$.

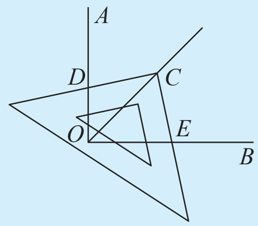
12. 如图，已知$\angle AOB = 90°$，点C为$\angle AOB$的平分线上的一点，OC的长为 1. 取一个三角尺，使它的直角顶点与点C重合，记三角尺的两条直角边与OA，OB的交点分别为D，E. 试说明：无论三角尺绕点C怎样旋转，总有$OD + OE = \sqrt{2}$.



（第 10 题）



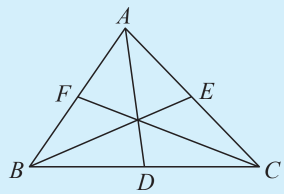
（第 11 题）



（第 12 题）

探索与创新

13. 如图，$\triangle ABC$的三条中线分别是AD，BE，CF. 试经过图形平移，得到一个三角形，其三边长度分别等于三条中线，并说明理由.

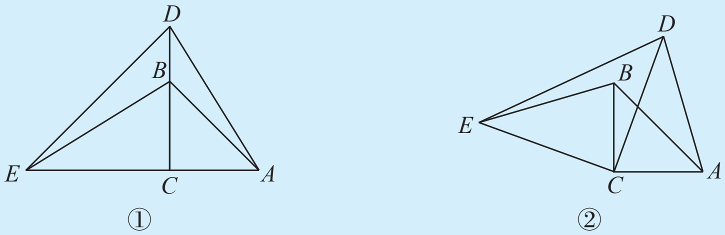


（第 13 题）

14. 两个大小不等的锐角为$45°$的三角尺（$\triangle ACB$和$\triangle DCE$）如图①所示放置，E，C，A三点在一条直线上，连接AD和BE.

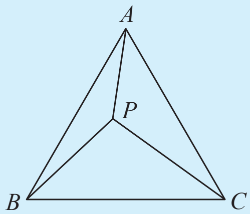
（1）试判断线段BE和AD的关系；

（2）当$\triangle DCE$绕点C顺时针旋转一定角度到如图②所示的位置时，请判断（1）的结果是否还成立，并说明理由.



（第 14 题）

15. 如图，P 是等边三角形 ABC 中的一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，试利用图形的旋转求出 $\angle APB$ 的度数.

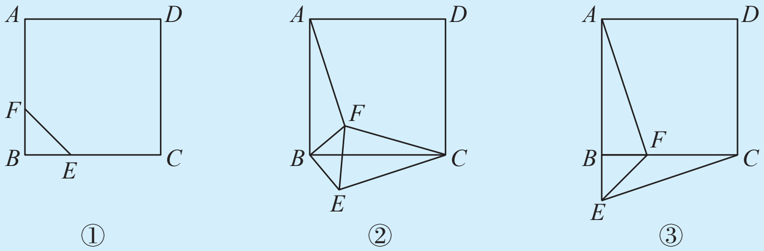


（第 15 题）

16.（1）如图①，已知正方形 $ABCD$，点 E，F 分别在边 BC，AB 上，且 $BE=BF$. 此时 AF 与 CE 有怎样的数量关系？

（2）如图②，$\triangle BEF$ 绕点 B 顺时针旋转 $\angle\alpha$. 当 $0°<\alpha<90°$ 时，连接 AF，CE，此时 AF 与 CE 仍有（1）中的数量关系吗？如果成立，请说明理由. 否则，请举出反例；

（3）当 $\alpha=90°$ 时（图③），连接 AF，CE. 猜想 AB 与 BE 有什么数量关系时，直线 AF 是 EC 的垂直平分线？试说明理由.

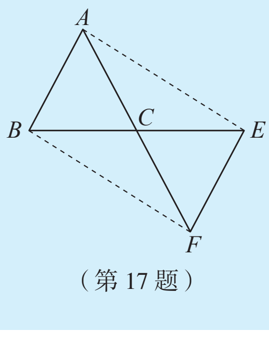


（第 16 题）

17. 如图，$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle FEC$ 关于点 C 成中心对称. 试问：

（1）$ABFE$ 是怎样的四边形？说明理由；

（2）当 $\angle BAC$ 是多少度时，四边形 $ABFE$ 是矩形？改变 $\angle BAC$ 的度数，四边形 $ABFE$ 能否成为菱形？说明理由.



（第 17 题）

综合与实践

哪条路径最短

交流与发现

（1）在七（上），我们曾遇到这样一个实际问题：如图 1，l 表示一条河流，A，B 是两个村庄，它们分别在河流的两旁. 现准备在河上建一座桥，使两村的人们来往便捷. 在哪里建桥可使 A，B 两村之间的路径最短呢？你是怎样解决的？

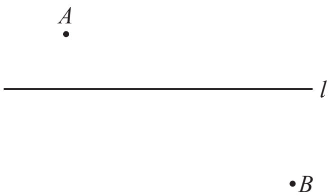
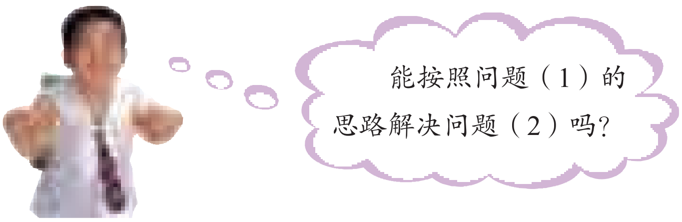


图 1

（2）上面的问题（1）属于河流很窄、宽度可以忽略不计的情况. 如果河流较宽，河的两岸互相平行（图 2），要在河上修建一座与河岸垂直的桥梁 CD，在哪里建桥可使得 A，B 两村之间的路径 $A—C—D—B$ 最短？请你设计一个解决问题的方案.



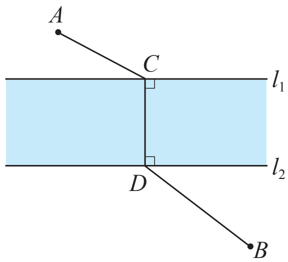


图 2

（3）小亮按照问题（1）的解决思路设计了这样一个方案：

如图 3，连接 AB，交河岸 l_1 于点 C，过点 C 作 $CD \perp l_2$，垂足为 D，连接 BD，则在点 C 处所建的垂直于河岸的桥梁 CD 是最佳的建桥方案. 此时路径 $A—C—D—B$ 是从 A 村到达 B 村的最短路径.

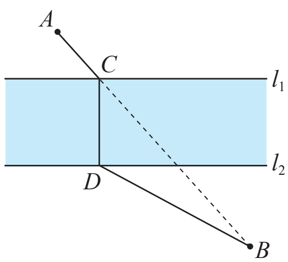


图 3

你同意他的说法吗？

（4）小莹研究了小亮的方案，认为小亮的方案并不是最佳方案. 她发现如果将图 3 中的 DB 沿 DC 的方向平移，平移的距离为 DC，使 D 与 C 重合，点 B 平移到点 B' 处（图 4）. 于是

$DB \mathrel{\underline{\parallel}} CB'$，此时路径 $A—C—D—B$ 的长 $= AC + CD + DB = AC + CB' + CD$，其中 CD 的长一定，但 $AC + CB'$ 并不是 A，B' 两点之间的最短距离.

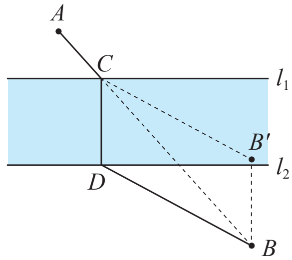


图 4

（5）你同意小莹的分析吗？你能在小莹分析的基础上，设计出一条符合问题要求的最短路径吗？说明你的理由，并与同学交流.

（6）有一段“L”形的河流（图 5），河的西侧有村庄 A，河的南侧有村庄 B. 如果要在南北走向的河道上和东西走向的河道上，分别修建一座与河岸垂直的桥梁，再修一条连接两桥的道路，使 A，B 两村之间经过这两座桥梁的路径最短. 两座桥梁的位置应当选在何处？

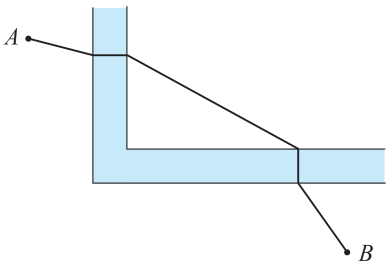
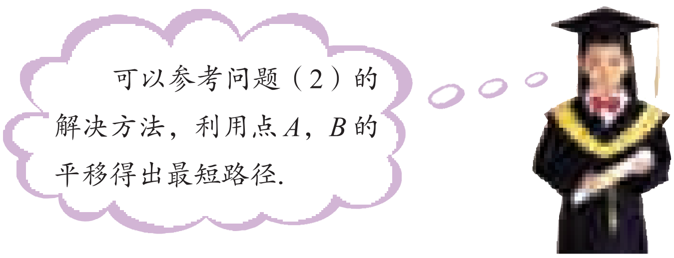
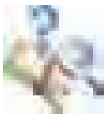


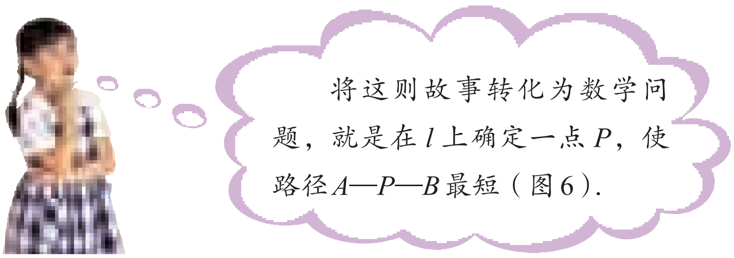
图 5





观察与思考

（1）你还记得八（上）提到的“将军饮马”这个数学故事吗？



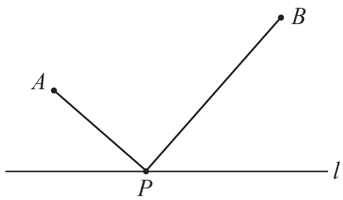


图 6

还记得当时是如何解决这个问题的吗？这个问题与上面“交流与发现”中的问题（1）有什么关系？

（2）如图 7，在河岸的同侧新建两个居民小区，现计划沿河岸修建一条长为 s 的绿化带 CD（宽度不计），供小区的居民散步休憩，当 C，D 选在何处时，路径 AC 与 BD 的和最小？你能运用图形变化的知识，把它转化为“将军饮马”问题，从而使问题得到解决吗？设计出你的方案，并说明理由.

（3）如图 8，过 A，B 分别作 $AA' \perp l$，垂足为 A'，$BB' \perp l$，垂足为 B'，设 $AA' = a$，$BB' = b$，$A'B' = c$，你能用 a，b，c，s 表示出 $AC + BD$ 的最小值吗？

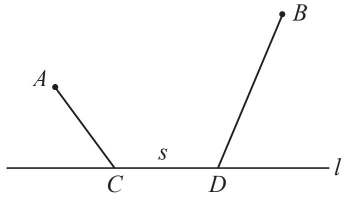


图 7

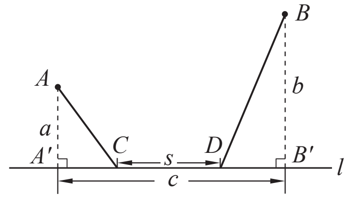
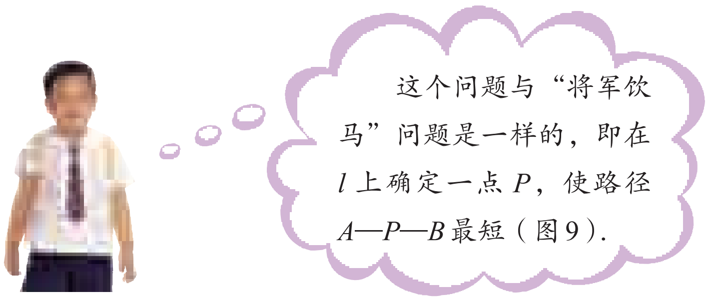


图 8

（4）如图 9，在高压输电线 l 的同侧有两个新建的居民小区 A，B，现要在 l 附近修建一个变电站，向 A，B 两个小区输送生活用电，怎样确定变电站 P 的位置，使向 A，B 两个小区架设的电线最短.

在解决这一问题时，小亮和小莹发生了争论.



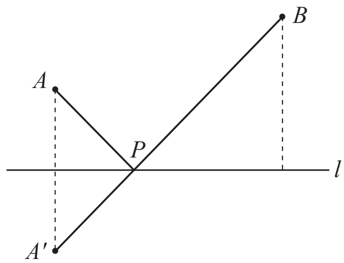


图 9

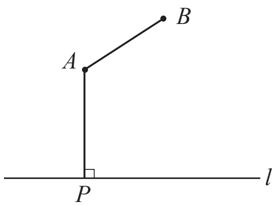
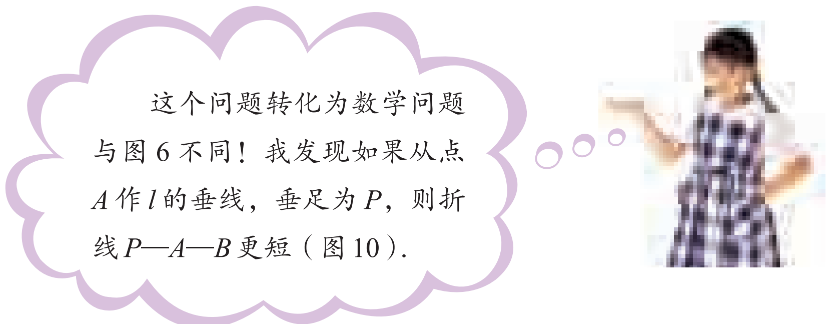


图 10



你同意他们两人中谁的意见？

（5）已知点 A 到 l 的距离为 2 km，点 B 到 l 的距离是 5 km，AB = 8 km，请你按小亮和小莹的方案分别计算，哪条供电线路的总长最短？

（6）如果只把（5）中 AB 的数据改为 9，其他数据不变，请你按小亮和小莹的方案分别计算，哪条供电线路的总长最短？如果只把（5）中 AB 的数据改为 10，又会有什么结果？

（7）由（5）（6）的结果你有什么发现？设 $AB=a$，点 A，B 到直线 l 的距离分别是 n，m（$0<n<m$），根据 a 与 m，n 三个数据之间的关系，你能分情况算出他们二人设计的方案中，哪个更节省吗？

（8）下面是有些同学提出的另外的设计方案（图 11、图 12）. 你认为这些方案可行吗？你还有其他的解决方案吗？给出一组适当的数据算出图 11、图 12 中供电线路总长度，与小亮、小莹的方案进行对比，你能得到怎样的结论？

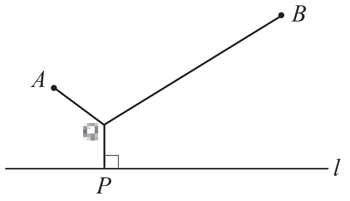


图 11

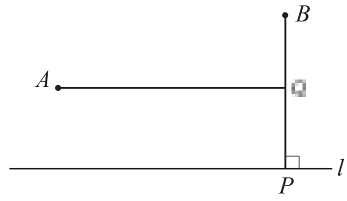


图 12

挑战自我

如图 13，A，B，C 是三个村庄，它们恰好是正方形 $ABCD$ 的三个顶点，现要在公路 BD 某处 P 的附近修建一座农产品收购站. 当点 P 选在何处时 $AP+BP+CP$ 的值最小？试利用图形的旋转，探索点 P 的位置.

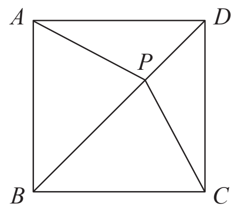
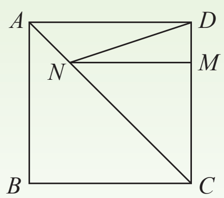


图 13

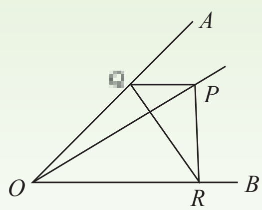
习 题

复习与巩固

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8，M 在边 DC 上，$DM=2$，N 是 AC 上一动点，则当 N 在何处时 $DN+MN$ 的长度达到最小？最小长度是多少？



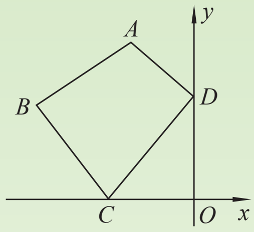
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\angle AOB=45°$，P 是 $\angle AOB$ 内的一点，$PO=10$. 点 Q，R 分别在 $\angle AOB$ 的两边上，$\triangle PQR$ 周长的最小值是多少？点 Q，P 在什么位置时，$\triangle PQR$ 的周长最小？

3. 如图，在直角坐标系中，已知 $A(-2, 5)$，$B(-5, 3)$，在 x 轴上找出一点 C，在 y 轴上找出一点 D，使四边形 $ABCD$ 周长最小.



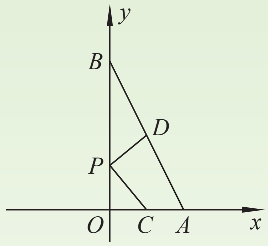
（第 3 题）

拓展与延伸

4. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴，y 轴分别交于点 $A(2, 0)$，$B(0, 4)$.

（1）求该一次函数的表达式；

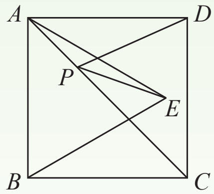
（2）O 为坐标原点，设 OA，AB 的中点分别为 C，D，点 P 为 OB 上动点，求 $PC + PD$ 的最小值，并求出此时点 P 的坐标.



（第 4 题）

探索与创新

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，且 $\triangle ABE$ 是等边三角形. 试在对角线 AC 上找到一点 P，使 $PD + PE$ 的值最小，并求这个最小值.



（第 5 题）

6. 在本“综合与实践”的例题、习题以及“挑战自我”中，为了探求各个问题中的最短路径，哪些地方运用了图形的轴对称？哪些地方运用了图形的平移或旋转？从而你受到什么启示？

后 记

这套义务教育七～九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书　数学（七～九年级）》（青岛出版社　2005年1月第一版）的基础上，依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的．经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过，准许使用．

本套教科书由展涛担任主编，殷建中担任执行主编，参加本册教材编写的有（按姓氏笔画为序）：庄梅、牟光明、刘崇渭、李元庆、李师正、李殿起、苗学良、高玉岱、殷建中、谢廷桢等同志，由李师正担任本册主编．在本套教科书的编写工作中，我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助．在此，我们一并致谢．

欢迎教师和同学们在使用本书过程中，向我们提出改进的意见和建议．

编　者

数 学

SHUXUE

绿色印刷产品

价格批准文号：鲁发改价格核［2022］022013
举报电话：12345

ISBN 978-7-5436-3784-9

9 787543 637849

定价：11.75 元