绿色印刷产品

批准文号：湘发改价费〔2017〕343 号

ISBN 978-7-5355-4396-7

9 787535 543967 >

定价：10.32元

义务教育教科书 数学 八年级下册 湖南教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级下册

湖南教育出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级下册

湖南教育出版社

义务教育教科书 数学 八年级下册

主　　编：严士健　黄楚芳

执行主编：丘维声

副 主 编：赵雄辉　胡　旺

编　　委：袁宏喜　郭玉峰　肖果能

张　华　李超贵　钟劲松

以数学为基石 提高自身的素质

亲爱的同学们：

你们在上学期学习了精彩的数学内容，与数学这位亦新亦故的朋友，相处得怎样？最让你喜欢的是什么呢？精彩的课程内容，愉快的学习经历，还是宝贵的学习心得？

请不要忘记“从熟悉的生活实例去认识数学知识”，“将数学应用于生活”，并学会在这一过程中积极探索，弄明白数学知识中的道理，并学会讲道理。这样，你将会在数学园地中感受到数学的乐趣，并提高自身的素质。

在本书的“直角三角形”和“四边形”中，我们将继续用“观察—抽象—探索—分析和论证”的思维方式来认识并掌握直角三角形、特殊四边形的性质和判定方法。我们还将认识一位新朋友——平面直角坐标系，并从数形结合的角度来认识简单图形以及图形变化的坐标表示，了解到“数”与“形”的统一将使数学更具有统摄力！在“一次函数”中，我们将首先认识函数，学习函数的表示方法，通过深入研究一次函数，掌握如何从变量关系中抽象出函数模型，并对模型进行研究，用研究得出的规律去解决一些实际问题。最后，我们将学习“频数及其分布”，学会更全面地分析、描述并掌握一组数据的特征性质，从而使我们对数据的作用有更多的体会。

当然，在我们同行的路途中，“综合与实践”“IT 教室”“数学与文化”的精彩都不容错过，它们会为你开启更宽广的数学世界。

要学好这些内容，需要我们充满信心，养成良好的学习习惯，克服许许多多的困难。要善于回忆学过的知识与方法，并找到适合自己的数学学习方法。同学们可以依照书中的栏目设置，多“动脑筋”“想一想”“说一说”“议一议”，多动手试一试，从熟悉的生活事例中认识数学，把数学应用到你的生活中去，不断提高自己探索问题的能力。

同学们，让我们在学习的过程中好好享受数学的乐趣吧！

Contents 目录

第1章

直角三角形

直角三角形是一类特殊的三角形，它有一些特殊的性质. 例如：直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$，这就是著名的勾股定理. 远早于古希腊数学家，中国古代数学家就已得到“勾三股四弦五”的结论，我国魏晋时期的数学家赵爽还用上图中的“弦图”，进一步阐释了《周髀算经》中对勾股定理的证明.

直角三角形还有哪些特殊的性质呢？怎样判定一个三角形是直角三角形呢？勾股定理在实际生活中有哪些应用呢？本章将学习这些新知识.

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)

在前面，我们已经学习了三角形边与边，边与角，角与角之间的一些性质，直角三角形作为一种特殊的三角形，除了具有一般三角形的性质外，它还具有哪些特殊性质呢？

说一说

如图 1-1，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，两锐角的和等于多少呢？

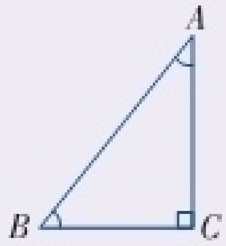


图 1-1

在 Rt△ABC 中，因为$\angle C=90°$，由三角形内角和定理，可得：$\angle A+\angle B=90°$.

由此得到：

直角三角形的两个锐角互余.

议一议

有两个锐角互余的三角形是直角三角形吗？

如图 1-2，在△ABC 中，$\angle A+\angle B=90°$，那么△ABC 是直角三角形吗？

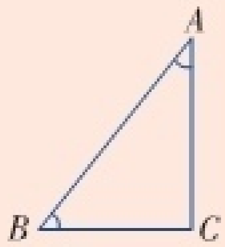


图 1-2

在△ABC 中，因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，又$\angle A+\angle B=90°$，所以$\angle C=90°$. 于是△$ABC$ 是直角三角形.

由此得到：

有两个角互余的三角形是直角三角形.

探究

如图 1-3，画一个 Rt$\triangle ABC$，并作出斜边 AB 上的中线 CD，比较线段 CD 与线段 AB 之间的数量关系，你能得出什么结论？

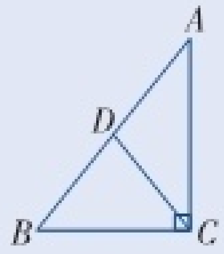
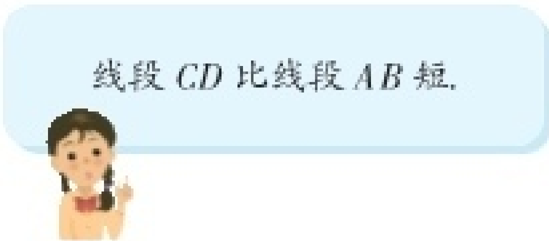
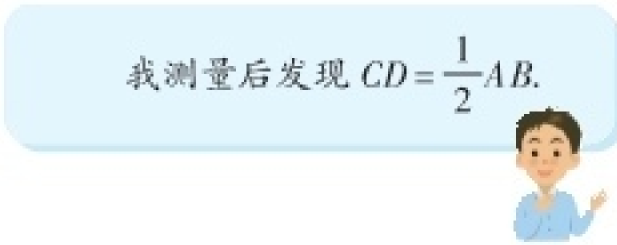


图 1-3





是否对于任意一个 Rt$\triangle ABC$，都有$CD=\frac{1}{2}AB$ 成立呢？

如图 1-4，过点 D 作 $DE\perp AC$，交 AC 于点 E；作 $DF\perp BC$，交 BC 于点 F.

$\because$ $\angle ACB=\angle AED=\angle DFB=90°$，

$\therefore$ $DE/\!/BC$，$DF/\!/AC$.

$\therefore$ $\angle A=\angle FDB$，$\angle ADE=\angle B$.

又 D 为 AB 的中点，即 $AD=DB$，

$\therefore$ $\triangle AED\cong\triangle DFB$（ASA）.

$\therefore$ $AE=DF$，$DE=BF$.

还可证 $\triangle CDE\cong\triangle DCF$，从而 $DE=CF$，$CE=DF$.

$\therefore$ $AE=CE$，$BF=CF$.

故 DE，DF 分别垂直平分边 AC，BC.

$\therefore$ $AD=CD=BD$（为什么？）.

$\therefore$ $CD=\frac{1}{2}AB$.

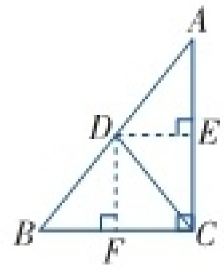


图 1-4

由此得到：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例 1 如图 1–5，已知 CD 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线，且 $CD=\dfrac{1}{2}AB$.

求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

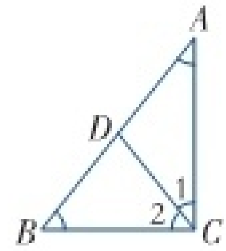


图 1–5

证明 $\because\ CD=\dfrac{1}{2}AB=AD=BD$,

$\therefore\ \angle 1=\angle A$，$\angle 2=\angle B$.

$\because\ \angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，$\angle ACB=\angle 1+\angle 2$，

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle 1+\angle 2=180^\circ$.

$\therefore\ 2(\angle A+\angle B)=180^\circ$.

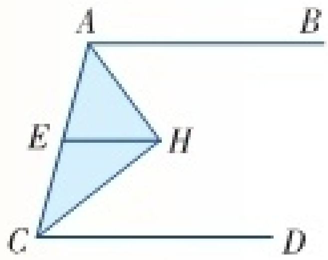
$\therefore\ \angle A+\angle B=90^\circ$.

$\therefore\ \triangle ABC$ 是直角三角形.

练习

1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边上的中线 $CD=2.5\ \mathrm{cm}$，则斜边 AB 的长是多少？

2. 如图，$AB /\!/ CD$，$\angle CAB$ 和 $\angle ACD$ 的平分线相交于 H 点，E 为 AC 的中点，$EH=2$. 那么 $\triangle AHC$ 是直角三角形吗？为什么？若是，求出 AC 的长.



（第 2 题图）

动脑筋

如图 1–6，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，如果 $\angle A=30^\circ$，那么直角边 BC 与斜边 AB 有什么关系呢？

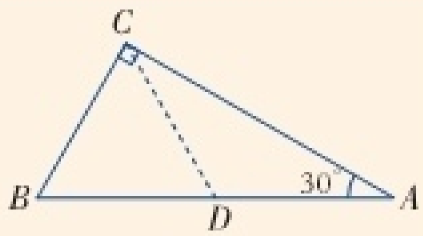


图 1–6

如图 1–6，取线段 AB 的中点 D，连接 CD.

$\because\ CD$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore\ CD=\dfrac{1}{2}AB=BD$.

$\because\ \angle BCA=90^\circ$，且 $\angle A=30^\circ$，

$\therefore\quad \angle B=60°.$

$\therefore\quad \triangle CBD$ 为等边三角形，

$\therefore\quad BC=BD=\dfrac{1}{2}AB.$

于是，我们得到：**在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.**

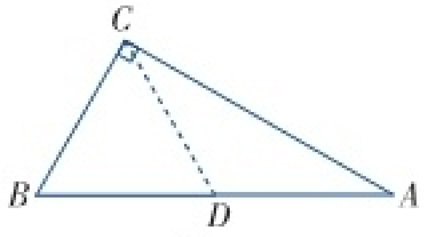


图 1-7

例 2 如图 1-7，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，若 $BC=\dfrac{1}{2}AB$，那么 $\angle A=30°$吗？

解 如图 1-7，取线段 AB 的中点 D，连接 CD.

$\because\quad CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore\quad CD=\dfrac{1}{2}AB=BD.$

$\because\quad BC=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore\quad BC=BD=CD$，即$\triangle BDC$ 为等边三角形.

$\therefore\quad \angle B=60°.$

$\because\quad \angle A+\angle B=90°$，

$\therefore\quad \angle A=30°.$

由例 2，你能得出什么结论？

例 3 如图 1-8，在 A 岛周围 20 海里[①]水域内有暗礁，一轮船由西向东航行到 O 处时，测得 A 岛在北偏东 60° 的方向，且与轮船相距 $30\sqrt{3}$ 海里. 若该船继续保持由西向东的航向，那么有触礁的危险吗？

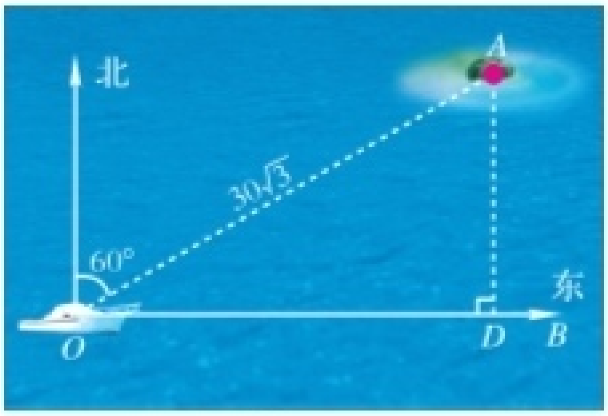


图 1-8

① 1 海里 = 1 852 m.

分析 取轮船航向所在的直线为 OB. 过点 A 作 $AD\perp OB$，垂足为 D. AD 长为 A 岛到轮船航道的最短距离，若 AD 大于 20 海里，则轮船由西向东航行就不会有触礁的危险.

解 在图 1-8 中，过点 A 作 $AD\perp OB$，垂足为 D，连接 AO.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$AO=30\sqrt{3}$ 海里，$\angle AOD=30°$，

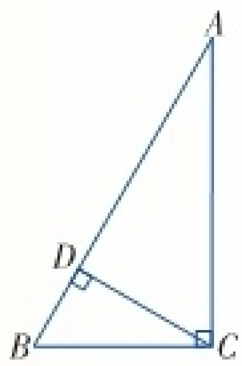
于是 $$\begin{aligned}AD&=\frac{1}{2}AO\\&=\frac{1}{2}\times 30\sqrt{3}\\&\approx 25.98(\text{海里}).\end{aligned}$$

由于 AD 长大于 20 海里，所以轮船由西向东航行不会触礁.

练习

1. 如图是某商店营业大厅电梯示意图. 电梯 AB 的倾斜角为 30°，大厅两层之间的高度 BC 为 6 m. 你能算出电梯 AB 的长度吗？

(第 1 题图)



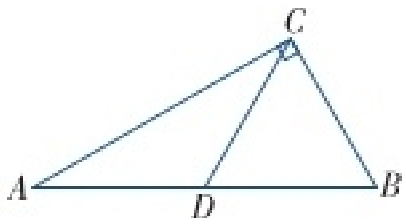
(第 2 题图)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB=90°$，CD 垂直于 AB，垂足为点 D，$\angle A=30°$. 求证：$AB=4BD$.

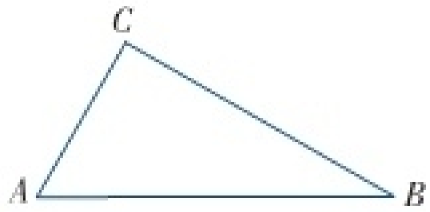
习题 1.1

A 组

1. 如图，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的中线，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle CDA=120^\circ$，求 $\angle B$ 的度数.



（第 1 题图）



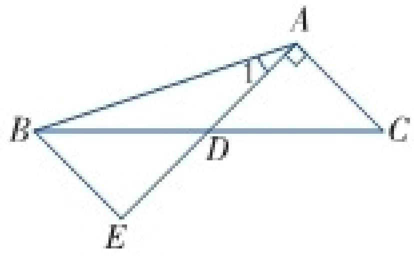
（第 2 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{3}\angle C$，$AB=8$ cm.

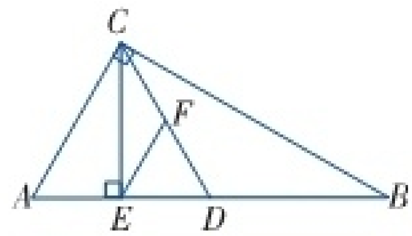
（1）求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形；

（2）求 AB 边上的中线长.

3. 如图，线段 AE 与 BC 相交于点 D，$BD=CD$，$AD=ED$，$CA\perp AE$，$\angle 1=30^\circ$，且 $AB=3$ cm. 那么线段 BE 多长呢？



（第 3 题图）



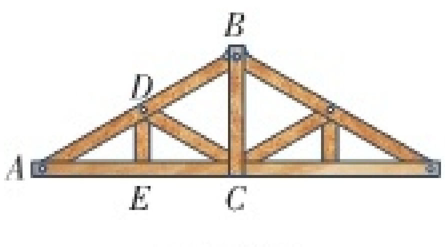
（第 4 题图）

4. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$AB=2$，CD 是斜边上的中线，CE 是高，F 是 CD 的中点.

（1）求 CD 的长；

（2）证明：$\triangle EDF$ 为等边三角形.

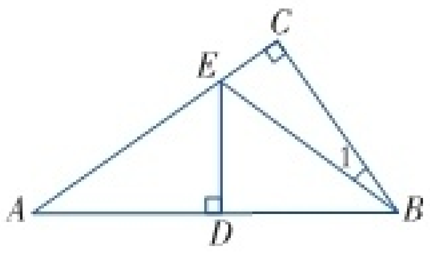
5. 如图是某建筑物的屋顶架，其中 $AB=8$ m，D 是 AB 的中点，BC，DE 都垂直于 AC. 如果 $\angle ABC=60^\circ$，那么 BC，DE，CD 各是多少米？



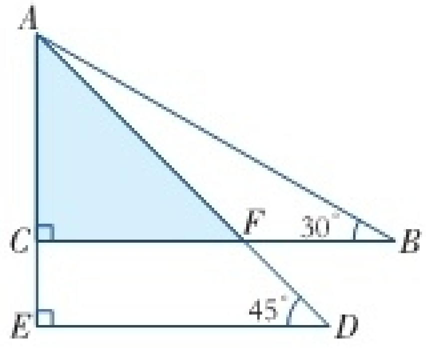
（第 5 题图）

Ⓑ 组

6. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，ED 是线段 AB 的垂直平分线，已知 $\angle 1=\frac{1}{3}\angle ABC$，求 $\angle A$ 的度数.



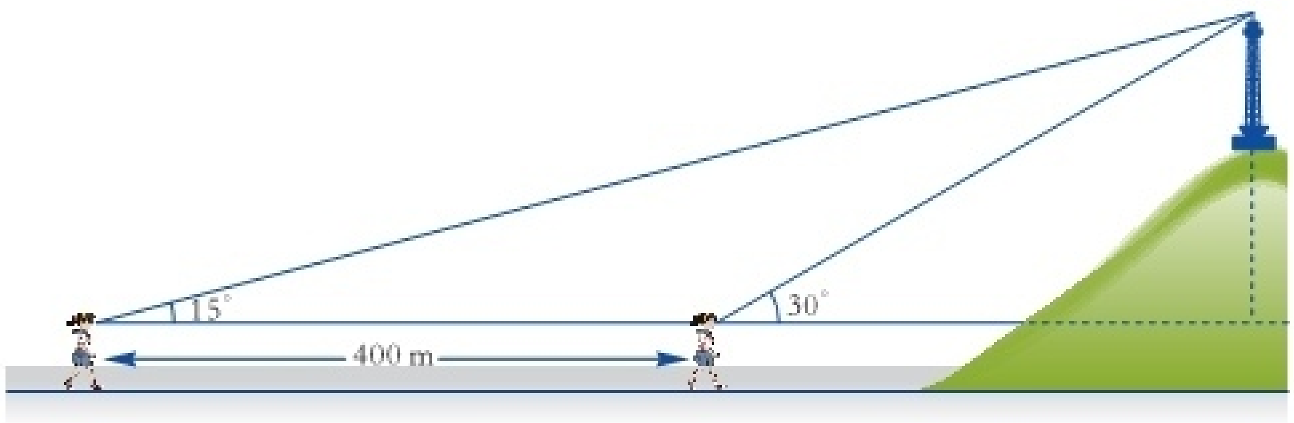
（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 将一副三角尺如图所示叠放在一起，若 $AB=14$ cm，求阴影部分△ACF 的面积.

8. 如图，小芳在山下发现正前方山上有个电视塔，测得塔尖的仰角[①]为 15°. 小芳朝正前方笔直行走 400 m，此时测得塔尖的仰角为 30°. 若小芳的眼睛离地面 1.6 m，你能算出这个电视塔塔尖离地面的高度吗？



（第 8 题图）

① 在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫作仰角.

1.2 直角三角形的性质和判定（Ⅱ）

做一做

如图 1–9，在方格纸上（设小方格边长为单位 1）画一个顶点都在格点上的直角三角形，使其两直角边分别为 3，4，量出这个直角三角形斜边的长度.

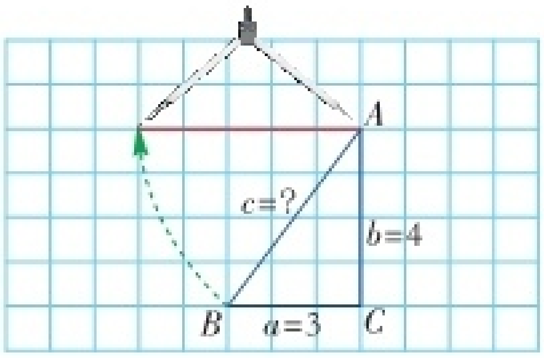


图 1–9

议一议

在方格纸上，以图 1–9 中的 Rt△ABC 的三边为边长分别向外作正方形，得到三个大小不同的正方形，如图 1–10，那么这三个正方形的面积 S_1，S_2，S_3 之间有什么关系呢？

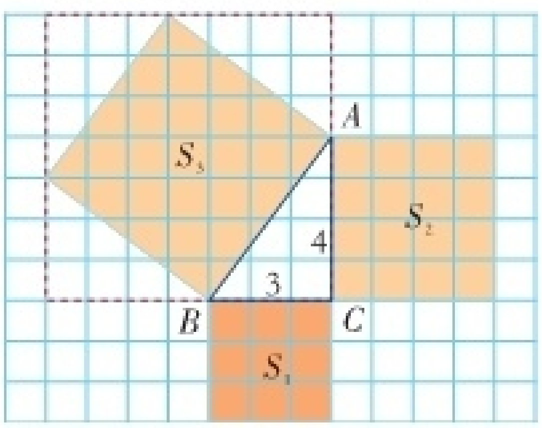
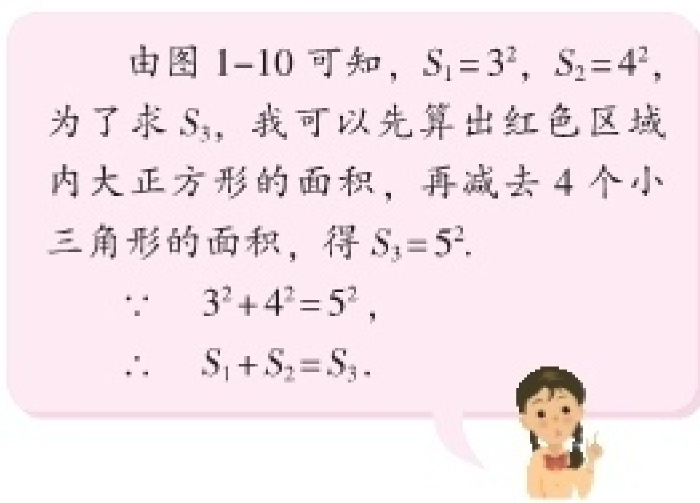


图 1–10



在图 1–10 中，$S_1+S_2=S_3$，即 $BC^2+AC^2=AB^2$，那么是否对所有的直角三角形，都有两直角边的平方和等于斜边的平方呢？

探究

如图 1–11，任作一个 Rt$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，那么 $a^2+b^2=c^2$ 是否成立呢？

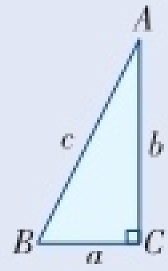


图 1–11

我们来进行研究.

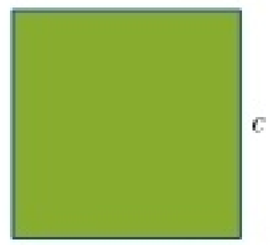


图 1–12

步骤 1　先剪出 4 个如图 1–11 所示的直角三角形，由于每个直角三角形的两直角边长为 a，b（其中 $b>a$），于是它们全等（SAS），从而它们的斜边长相等. 设斜边长为 c.

步骤 2　再剪出 1 个边长为 c 的正方形，如图 1–12 所示.

步骤 3　把步骤 1 和步骤 2 中剪出来的图形拼成如图 1–13 的图形.

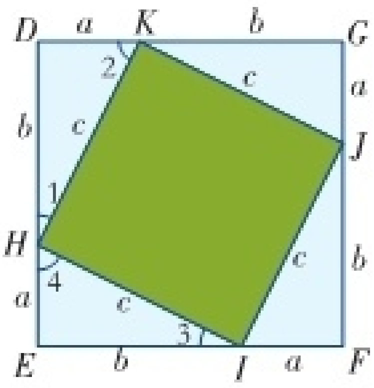


图 1–13

由于 $\triangle DHK \cong \triangle EIH$，

$\therefore \quad \angle 2=\angle 4$.

又 $\because \quad \angle 1+\angle 2=90°$，

$\therefore \quad \angle 1+\angle 4=90°$.

又 $\angle KHI=90°$，

$\therefore \quad \angle 1+\angle KHI+\angle 4=180°$，即 D，H，E 在一条直线上.

同理 E，I，F 在一条直线上；F，J，G 在一条直线上；G，K，D 在一条直线上.

因此拼成的图形是正方形 $DEFG$，它的边长为 $(a+b)$，它的面积为 $(a+b)^2$.

又正方形 $DEFG$ 的面积为 $c^2+4\cdot\dfrac{1}{2}ab$，

$$\therefore \quad (a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab.$$

$$即 \quad a^2+2ab+b^2=c^2+2ab,$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=c^2.$$

由此得到直角三角形的**性质定理**：

> **直角三角形两直角边 a，b 的平方和，等于斜边 c 的平方.**
>
> $$a^2+b^2=c^2$$

其实我国早在三千多年前就已经知道直角三角形的上述性质，由于古人称直角三角形的直角边中较短的一边为勾，较长的一边为股，斜边为弦（如图 1-14），因此这一性质被称为**勾股定理**.

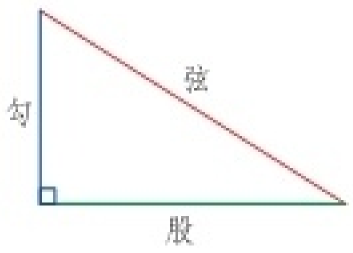


图 1-14

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系. 在直角三角形中，若已知直角三角形任意两条边长，我们可以根据勾股定理，求出第三边的长.

例 1 如图 1-15，在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC=13$ cm，$BC=10$ cm，$AD\perp BC$ 于点 D. 你能算出 BC 边上的高 AD 的长吗？

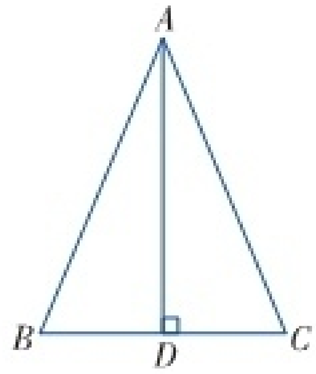


图 1-15

解 在△ABC 中，

$\because$ $AB=AC=13$，$BC=10$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=\dfrac{1}{2}BC=5$.

在 Rt△ADB 中，

由勾股定理得，$AD^2+BD^2=AB^2$，

$\therefore$ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{18\times 8}=12$.

故 AD 的长为 12 cm.

练习

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

(1) 已知 $a=25$，$b=15$，求 c；

(2) 已知 $a=5$，$c=9$，求 b；

(3) 已知 $b=5$，$c=15$，求 a.

动脑筋

如图 1-16，电工师傅把 4 m 长的梯子 AC 靠在墙上，使梯脚 C 离墙脚 B 的距离为 1.5 m，准备在墙上安装电灯. 当他爬上梯子后，发现高度不够，于是将梯脚往墙脚移近 0.5 m，即移动到 C' 处. 那么，梯子顶端是否往上移动 0.5 m 呢？

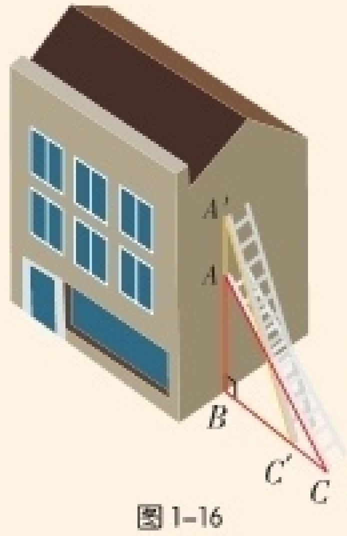


图 1-16

由图 1-16 抽象出示意图 1-17. 在 Rt△ABC 中，计算出 AB；再在 Rt△$A'BC'$ 中，计算出 $A'B$，则可得出梯子往上移动的距离为（$A'B-AB$）m.

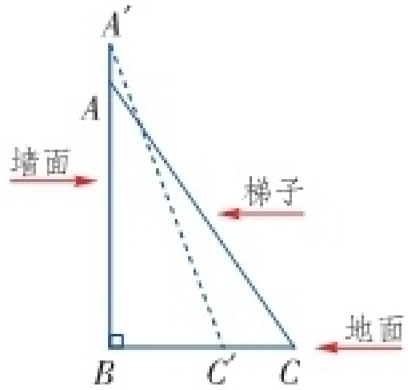


图 1-17

在 Rt△ABC 中，$AC=4$ m，$BC=1.5$ m，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{4^2-1.5^2}$

$=\sqrt{13.75}\approx 3.71$（m）.

在 Rt△$A'BC'$中，$A'C'=4$ m，$BC'=1$ m，

故 $A'B=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}\approx 3.87$（m），

因此 $A'A=3.87-3.71=0.16$（m）.

即梯子顶端 A 点大约向上移动了 0.16 m，而不是向上移动 0.5 m.

例 2 （“引葭赴岸”问题）“今有方池一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐. 问水深，葭长各几何？”[1]意思是：有一个边长为 10 尺的正方形池塘，一棵芦苇生长在池的中央，其出水部分为 1 尺. 如果将芦苇沿与水池边垂直的方向拉向岸边，它的顶端恰好碰到池边的水面. 问水深与芦苇长各为多少？


宋刻《九章算术》书影

① 该问题源自《九章算术》.

分析 根据题意，先画出水池截面示意图，如图1–18. 设 AB 为芦苇，BC 为芦苇出水部分，即 1 尺，将芦苇拉向岸边，其顶部 B 点恰好碰到岸边 B'.

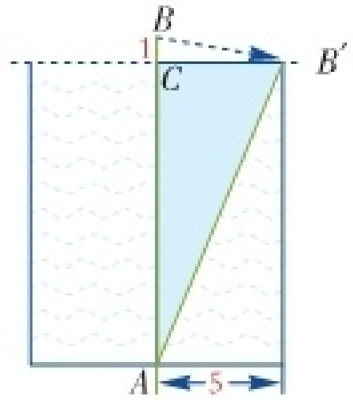


图 1–18

解 如图 1–18，设水池深为 x 尺，

则 $AC=x$ 尺，$AB=AB'=(x+1)$尺.

因为正方形池塘边长为 10 尺，所以 $B'C=5$ 尺.

在 Rt$\triangle ACB'$中，根据勾股定理，得

$$x^2+5^2=(x+1)^2,$$

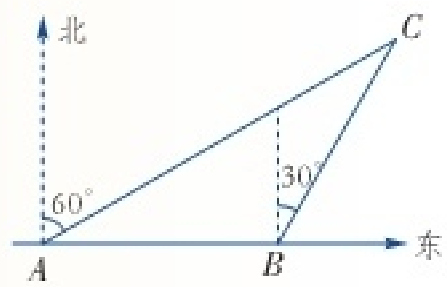
解得 $$x=12.$$

则芦苇长为 13 尺.

答：水池的深度为 12 尺，芦苇长为 13 尺.

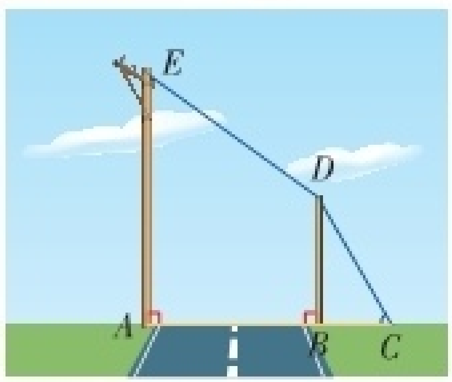
练习

1. 如图，一艘渔船以 30 海里/h 的速度由西向东追赶鱼群. 在 A 处测得小岛 C 在船的北偏东 60°方向；40 min 后，渔船行至 B 处，此时测得小岛 C 在船的北偏东 30°方向. 已知以小岛 C 为中心，周围 10 海里以内有暗礁，问这艘渔船继续向东追赶鱼群是否有触礁的危险？



(第 1 题图)

2. 如图，AE 是位于公路边的电线杆，高为 12 m，为了使电线 CDE 不影响汽车的正常行驶，电力部门在公路的另一边竖立了一根高为 6 m 的水泥撑杆 BD，用于撑起电线. 已知两根杆子之间的距离为 8 m，电线 CD 与水平线 AC 的夹角为 60°. 求电线 CDE 的总长 L（A，B，C 三点在同一直线上，电线杆、水泥杆的粗细忽略不计）.



(第 2 题图)

我们已经知道勾股定理："直角三角形两直角边 a，b 的平方和，等于斜边 c 的平方." 那么，这个定理的逆命题成立吗？

探究

如图 1–19，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，且 $a^2+b^2=c^2$，那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形吗？

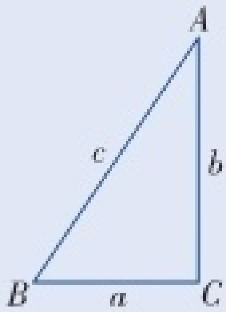


图 1–19

如果我们能构造一个直角三角形，然后证明 $\triangle ABC$ 与所构造的直角三角形全等，即可得 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

如图 1–20，作 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中，根据勾股定理得，$A'B'^2=a^2+b^2$，

$\because\ a^2+b^2=c^2$，

$\therefore\ A'B'^2=c^2$.

$\therefore\ A'B'=c$.

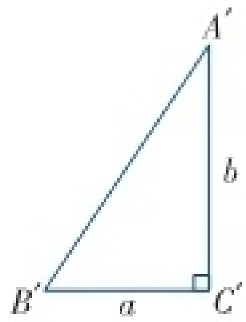


图 1–20

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because\ BC=B'C'=a$，

$AC=A'C'=b$，

$AB=A'B'=c$，

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

$\therefore\ \angle C=\angle C'=90°$.

$\therefore\ \triangle ABC$ 是直角三角形.

先构造满足某些条件的图形，然后根据所求证的图形与所构造图形之间的关系，完成证明，这也是常用的问题解决策略.

由此得到直角三角形的判定定理：

> 如果三角形的三条边长 a，b，c 满足关系：$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

上述定理被称为勾股定理的逆定理.

例 3 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

（1）$a=6$，$b=8$，$c=10$；

（2）$a=12$，$b=15$，$c=20$.

分析 根据勾股定理的逆定理，判断一个三角形是不是直角三角形，只要看两条较短边长的平方和是否等于最长边的平方.

解 （1）$\because\ 6^2+8^2=100$，$10^2=100$，

$\therefore\ 6^2+8^2=10^2$.

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

（2）$\because\ 12^2+15^2=369$，$20^2=400$，

$\therefore\ 12^2+15^2\neq 20^2$.

$\therefore$ 这个三角形不是直角三角形.

满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数称为勾股数.

例 4 如图 1-21，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=10$，$BD=6$，$AD=8$，$AC=17$. 求 DC 的长.

解 在 $\triangle ABD$ 中，$AB=10$，$BD=6$，$AD=8$，

$\because\ 6^2+8^2=10^2$，

即 $AD^2+BD^2=AB^2$，

$\therefore\ \triangle ADB$ 为直角三角形.

$\therefore\ \angle ADB=90°$.

$\therefore\ \angle ADC=180°-\angle ADB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，

$DC^2=AC^2-AD^2$，

$\therefore\ DC=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

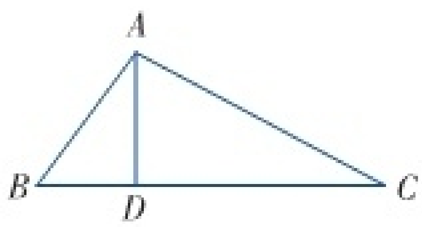


图 1-21

练习

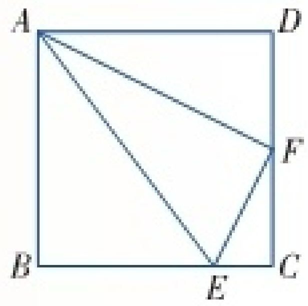
1. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=8$，$b=15$，$c=17$；　　(2) $a=10$，$b=24$，$c=25$；

(3) $a=4$，$b=5$，$c=\sqrt{41}$.

2. 如图，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，F 为 CD 的中点，E 是 BC 上一点，且 $EC=\frac{1}{4}BC$.

求证：$\triangle AEF$ 是直角三角形.



(第 2 题图)

习题 1.2

A 组

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

(1) 若 $a=8$，$c=17$，那么 $b=$__________；

(2) 若 $a=10$，$b=24$，那么 $c=$__________.

2. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

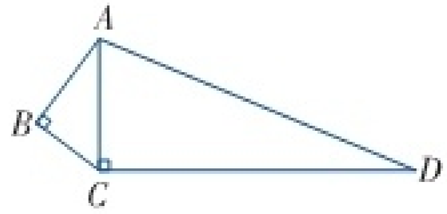
(1) $a=5$，$b=7$，$c=8$；

(2) $a=5$，$b=12$，$c=13$；

(3) $a=20$，$b=21$，$c=29$；

(4) $a=3n$，$b=4n$，$c=5n$（n 为正整数）.

3. 如图，$\angle B=\angle ACD=90°$，$BC=3$，$AD=13$，$CD=12$，求 AB 的长.

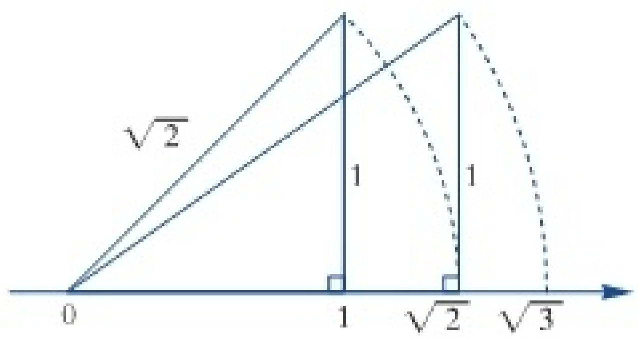


(第 3 题图)

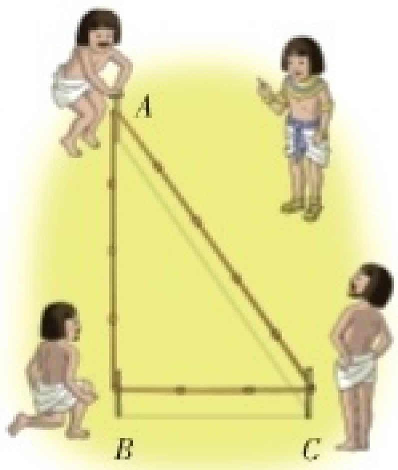
4. (1) 等边三角形的边长为 $2\sqrt{3}$，求它的中线长，并求出其面积.

(2) 等边三角形的一条角平分线长为 $\sqrt{3}$，求这个三角形的边长.

5. 如图，由勾股定理，两条直角边长都为 1 的直角三角形，其斜边长为 $\sqrt{2}$；直角边分别为 $\sqrt{2}$，1 的直角三角形，其斜边长为 $\sqrt{3}$；依此类推，在数轴上作出表示数 $\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$ 的点.



(第 5 题图)



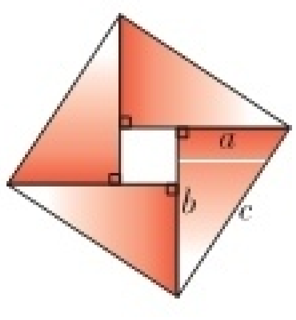
(第 6 题图)

6. 相传，古埃及人用 13 个等距的结把一根绳子分成等长的 12 段，并把它摆成 $\triangle ABC$ 的形状，如图所示. 工人们按这种造形在金字塔等建筑的拐角作出直角，试问这种“张绳法”能否得到一个直角三角形呢？请同学们动手试一试，并说说理由.

B 组

7. 我国魏晋时期的数学家赵爽在为天文学著作《周髀算经》作注解时，用 4 个全等的直角三角形拼成如下图所示的正方形，并用它证明了勾股定理，这个图被称为“弦图”. 它体现了中国古代的数学成就，是我国古代数学的骄傲. 正因为此，这个图案被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

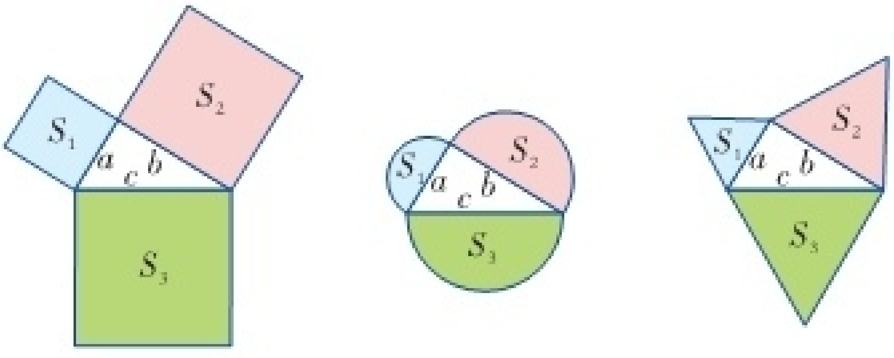
请你利用“弦图”证明勾股定理.



弦图

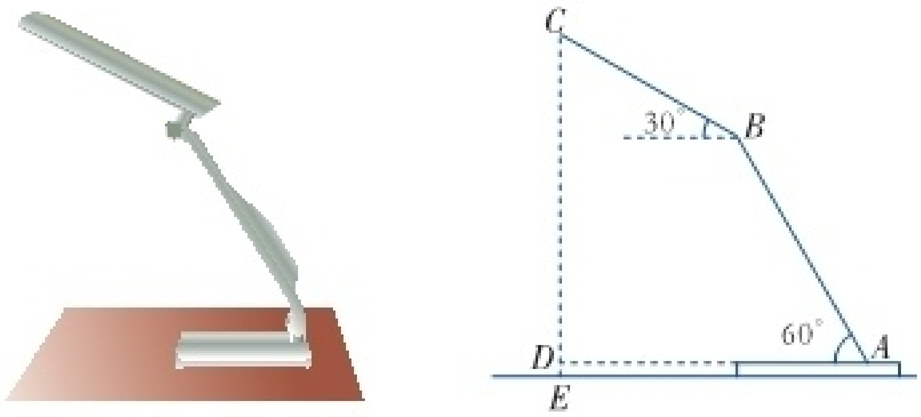
(第 7 题图)

8. 我们已经知道，以直角三角形 a，b，c 为边，向外分别作正方形，那么 $S_1+S_2=S_3$. 如图，如果以直角三角形三条边为直径向外作半圆，是否也存在 $S_1+S_2=S_3$？如果以三条边向外作等边三角形呢？



（第 8 题图）

9. 如图为放置在水平桌面上的台灯的示意图，灯臂 AB 长为 40 cm，灯罩 BC 长为 30 cm，底座厚度为 2 cm，灯臂与底座构成的 $\angle BAD=60°$. 使用时发现，光线效果最佳时灯罩 BC 与水平线所成的角为 30°，求此时灯罩顶端 C 到桌面的高度（结果精确到 0.1 cm）.



（第 9 题图）

1.3 直角三角形全等的判定

在前面的学习中，我们用 SAS，ASA，AAS 和 SSS 来判定两个三角形全等. 对于两个直角三角形，除了可以运用一般三角形全等的判定方法外，是否还有其他的判定方法呢？

探究

如图 1-22，在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，那么 Rt△$ABC$ 和 Rt△$A'B'C'$全等吗？

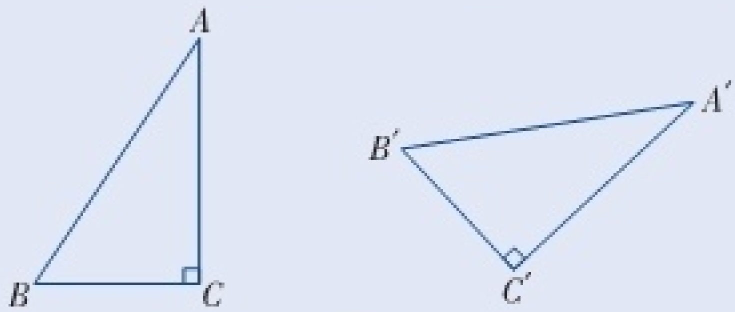
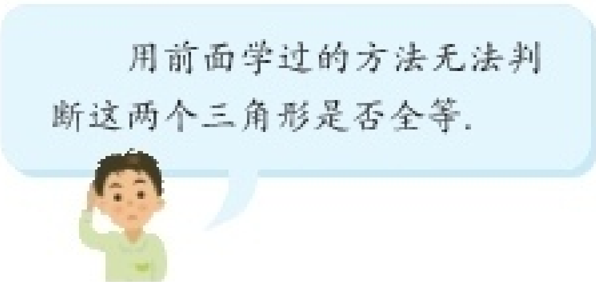
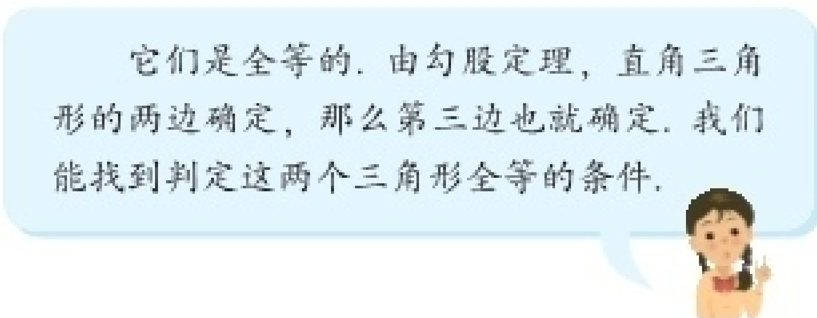


图 1-22





在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$中，

∵ $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

根据勾股定理，$BC^2=AB^2-AC^2$，

$B'C'^2=A'B'^2-A'C'^2$，

∴ $BC=B'C'$.

∴ Rt△ABC ≌ Rt△$A'B'C'$.

由此得到直角三角形全等的判定定理：

斜边、直角边定理　斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 1 如图 1–23，BD，CE 分别是 $\triangle ABC$ 的高，且 $BE=CD$.

求证：$\mathrm{Rt}\triangle BEC\cong \mathrm{Rt}\triangle CDB$.

证明　$\because$ BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore$ $\angle BEC=\angle CDB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中，

$\because$ $BC=CB$，

$BE=CD$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle BEC\cong \mathrm{Rt}\triangle CDB$（HL）.

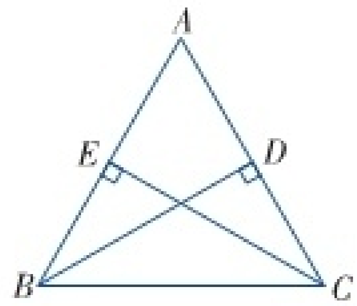


图 1–23

例 2 已知一直角边和斜边，求作直角三角形.

已知：线段 a，c（$c>a$），如图 1–24.

求作：$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使 $AB=c$，$BC=a$.

作法　(1) 作 $\angle MCN=90°$.

(2) 在 CN 上截取 CB，使 $CB=a$.

(3) 以点 B 为圆心，以 c 为半径画弧，交 CM 于点 A，连接 AB.

则 $\triangle ABC$ 为所求作的直角三角形，如图 1–25.

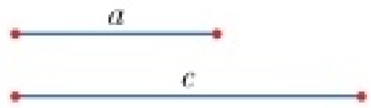


图 1–24

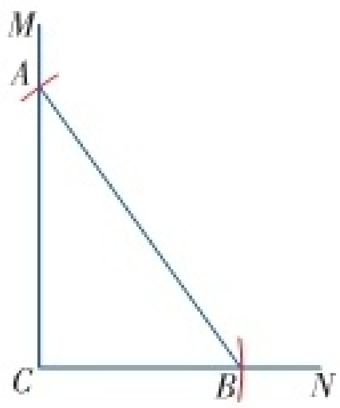


图 1–25

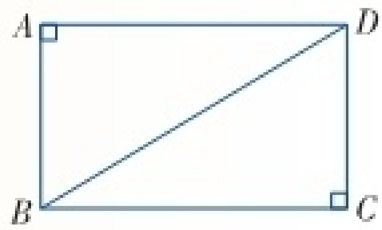
练习

1. 下面说法是否正确？为什么？

(1) 两个锐角对应相等的两个直角三角形全等；

(2) 两条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

2. 如图，$\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 都是直角，$AD=BC$. 判断 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 是否全等，并说明理由.

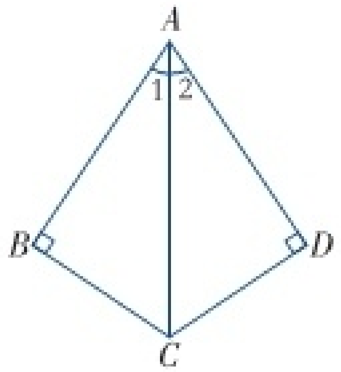


（第 2 题图）

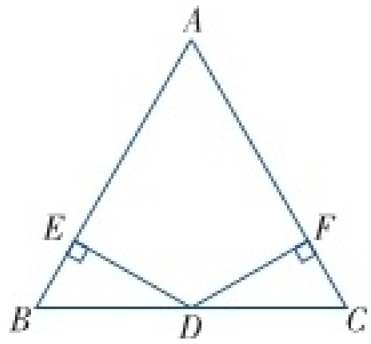
习题 1.3

A 组

1. 如图，$AB=AD$，$CB \perp AB$ 于点 B，$CD \perp AD$ 于点 D. 求证：$\angle 1=\angle 2$.



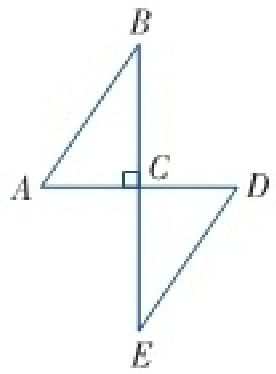
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，D 为 BC 的中点，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，且 $DE=DF$. 试问：AB 与 AC 有什么关系？

3. 如图，点 C 为 AD 的中点，过点 C 的线段 $BE \perp AD$，且 $AB=DE$. 求证：$AB \parallel ED$.



（第 3 题图）

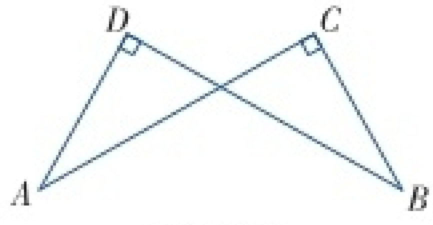
（第 4 题图）

4. 如图，已知线段 a，求作直角三角形，使一直角边为 a，斜边为 $2a$.

B 组

5. 求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形.

6. 如图，$BD \perp AD$ 于点 D，$AC \perp BC$ 于点 C，且 $AC=BD$. 求证：$AD=BC$.



（第 6 题图）

1.4 角平分线的性质

角平分线是以一个角的顶点为端点的一条射线，它把这个角分成两个相等的角.

探究

如图 1-26，在 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上任取一点 P，作 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E，试问 PD 与 PE 相等吗？

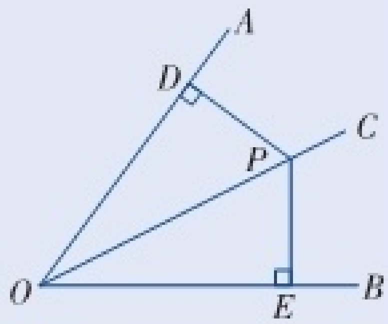
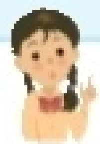


图 1-26

将 $\angle AOB$ 沿 OC 对折，我发现 PD 与 PE 重合，即 PD 与 PE 相等.

你能证明吗？



我们来证明这个结论.

$\because \quad PD \perp OA$，$PE \perp OB$，

$\therefore \quad \angle PDO = \angle PEO = 90°$.

在 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ 中，

$\because \quad \angle PDO = \angle PEO$，

$\quad\quad \angle DOP = \angle EOP$，

$\quad\quad OP = OP$，

$\therefore \quad \triangle PDO \cong \triangle PEO$.

$\therefore \quad PD = PE$.

由此得到角平分线的性质定理：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

动脑筋

角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上吗？

如图 1-27，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部，作 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E. 若 $PD=PE$，那么点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上吗？

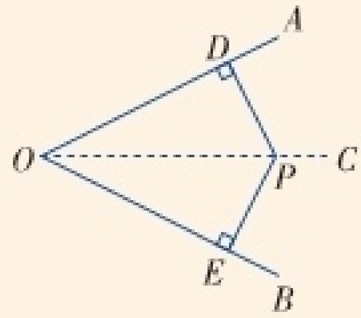


图 1-27

如图 1-27，过点 O，P 作射线 OC.

$\because$ $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在 $Rt\triangle PDO$ 和 $Rt\triangle PEO$ 中，

$\because$ $OP=OP$，

$PD=PE$，

$\therefore$ $Rt\triangle PDO \cong Rt\triangle PEO$.

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOC$.

$\therefore$ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，即点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上.

由此得到角平分线的性质定理的逆定理：

角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

例 1 如图 1-28，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$\angle 1=\angle 2$.

(1) 求证：点 B 在 $\angle ADC$ 的平分线上；

(2) 求证：BD 平分 $\angle ABC$.

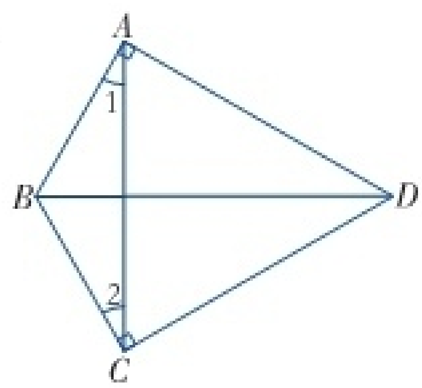


图 1-28

证明 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $BA=BC$.

又 $BA \perp AD$，$BC \perp CD$，

$\therefore$ 点 B 在 $\angle ADC$ 的平分线上.

(2) 在 Rt△BAD 和 Rt△BCD 中，

∵ $BA=BC$，$BD=BD$，

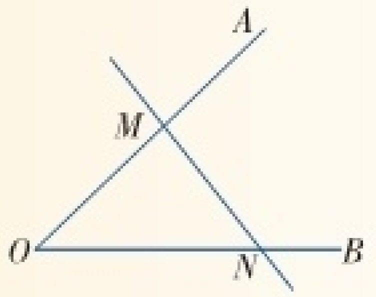
∴ Rt△BAD≌Rt△BCD.

∴ $\angle ABD=\angle CBD$.

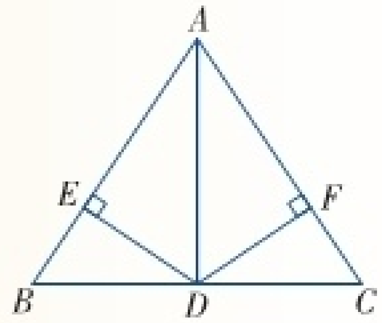
∴ BD 平分$\angle ABC$.

练习

1. 如图，在直线 MN 上求作一点 P，使点 P 到$\angle AOB$ 两边的距离相等.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在△ABC 中，AD 平分$\angle BAC$，$DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，$BD=CD$. 求证：$AB=AC$.

动脑筋

如图 1-29，已知 $EF\perp CD$，$EF\perp AB$，$MN\perp AC$，M 是 EF 的中点. 需添加一个什么条件，就可使 CM，AM 分别为$\angle ACD$ 和$\angle CAB$ 的平分线呢？

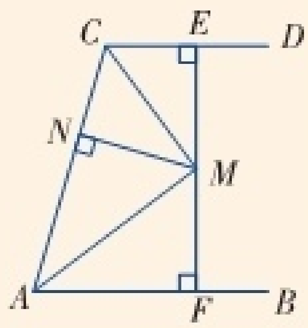


图 1-29

可以添加条件 $MN=ME$（或$MN=MF$）.

∵ $ME\perp CD$，$MN\perp CA$，

∴ M 在$\angle ACD$ 的平分线上，即 CM 是$\angle ACD$ 的平分线.

同理可得 AM 是$\angle CAB$ 的平分线.

例 2 如图 1-30，在 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线上任取一点 P，作 $PE \perp DB$，$PF \perp AC$，垂足分别为点 E，F. 试探索 $BE+PF$ 与 PB 的大小关系.

解 $\because$ AP 是 $\angle DAC$ 的平分线，

又 $PE \perp DB$，$PF \perp AC$，

$\therefore$ $PE=PF$.

在 $\triangle EBP$ 中，$BE+PE>PB$，

$\therefore$ $BE+PF>PB$.

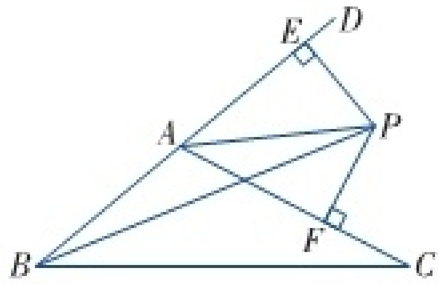


图 1-30

动脑筋

如图 1-31，你能在 $\triangle ABC$ 中找到一点 P，使其到三边的距离相等吗？

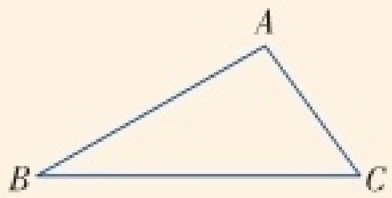


图 1-31

因为角平分线上的点到角的两边的距离相等，所以只要作 $\triangle ABC$ 任意两角（例如 $\angle A$ 与 $\angle B$）的平分线，其交点 P 即为所求作的点. 点 P 也在 $\angle C$ 的平分线上，如图 1-32.

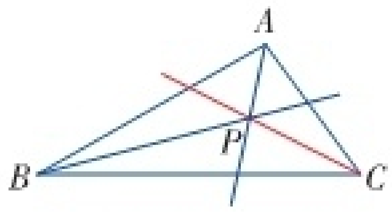
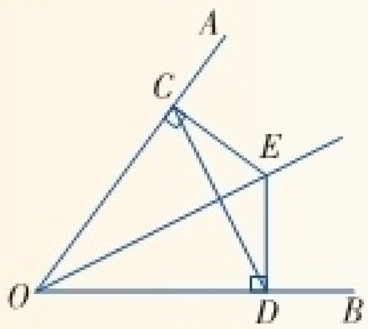


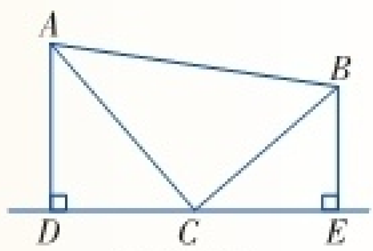
图 1-32

练习

1. 如图，E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$EC \perp OA$ 于点 C，$ED \perp OB$ 于点 D，求证：（1）$\angle ECD=\angle EDC$；（2）$OC=OD$.



（第 1 题图）



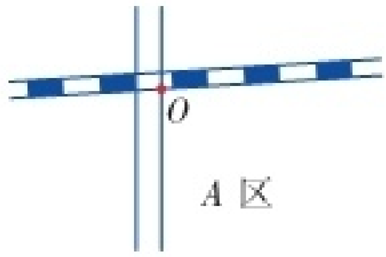
（第 2 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp DE$，$BE \perp DE$，AC，BC 分别平分 $\angle BAD$，$\angle ABE$，点 C 在线段 DE 上. 求证：$AB=AD+BE$.

习题 1.4

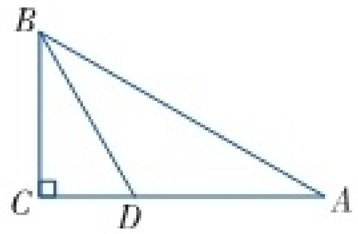
A 组

1. 如图，一个工厂在 A 区，它到公路、铁路的距离相等，并且离公路和铁路的交叉处 O 点为 500 m，在图上标出它的位置（比例尺为1∶20 000）.

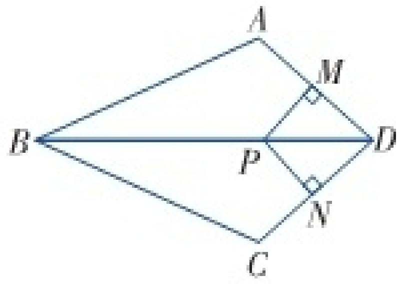


（第 1 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$ m，$DC=\frac{1}{2}AD$，BD 平分 $\angle ABC$，求 D 到 AB 的距离.



（第 2 题图）

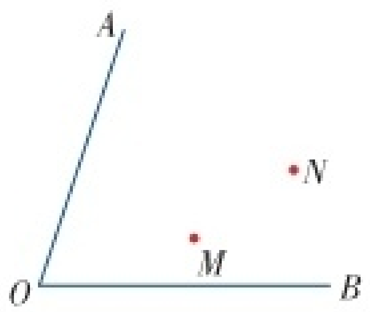


（第 3 题图）

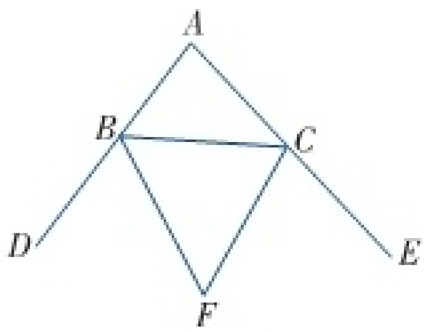
3. 如图，已知 BD 平分 $\angle ABC$，$BA=BC$，点 P 在 BD 上，作 $PM\perp AD$，$PN\perp CD$，垂足分别为点 M，N. 求证：$PM=PN$.

B 组

4. 如图，求作一点 P，使 $PM=PN$，并且使点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA，OB 的距离相等.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线 BF，CF 相交于点 F，试问点 F 在 $\angle A$ 的平分线上吗？（提示：过 F 点分别向 BD，BC，CE 作垂线）

小结与复习

回顾

1. 直角三角形的两个锐角有什么关系?

2. 直角三角形斜边上的中线与斜边有什么关系?

3. 请用自己的语言叙述勾股定理及其逆定理.

4. 判断两个直角三角形全等的方法有哪些?

5. 角平分线有哪些性质?

本章知识结构

- 直角三角形
  - 性　质
    - 直角三角形两个锐角互余
    - 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
    - 勾股定理
  - 判　定
    - 有一个角是直角的三角形是直角三角形
    - 有两个角互余的三角形是直角三角形
    - 勾股定理的逆定理
  - 全等判定方法
    - SAS　ASA　AAS　SSS
    - HL
  - 角平分线
    - 角的平分线上的点到角的两边的距离相等
    - 角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上

注意

1. “斜边、直角边定理”是判定两个直角三角形全等所独有的，在运用该判定定理时，要注意全等的前提条件是两个直角三角形.

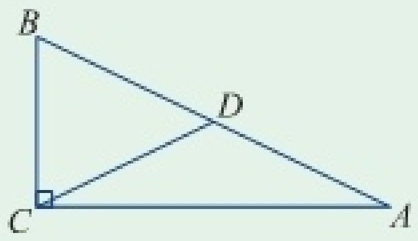
2. 要注意本章中的互逆命题，如直角三角形的性质和判定定理，勾股定理及其逆定理，角平分线的性质定理及其逆定理等，它们都是互为逆命题.

3. 勾股定理及其逆定理都体现了数形结合的思想. 勾股定理体现了由形到数，而勾股定理的逆定理是用代数方法来研究几何问题，体现了由数到形.

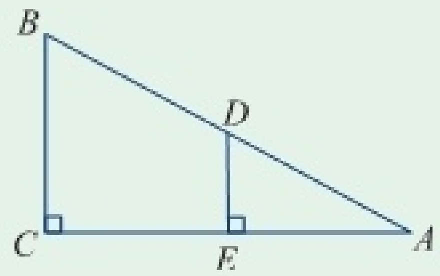
复习题 1

Ⓐ 组

1. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的中线，若 $\angle A=20°$，求 $\angle BDC$ 的度数.



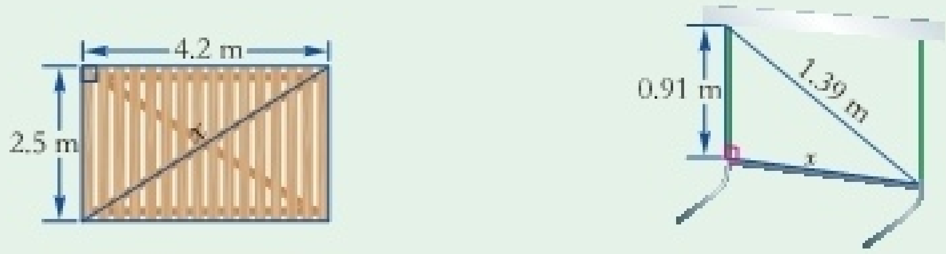
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 为 AB 的中点，$DE\perp AC$ 于点 E，$\angle A=30°$，$AB=8$，求 DE 的长.

3. 用计算器求图中的 x（结果精确到 0.1 m）.



（第 3 题图）

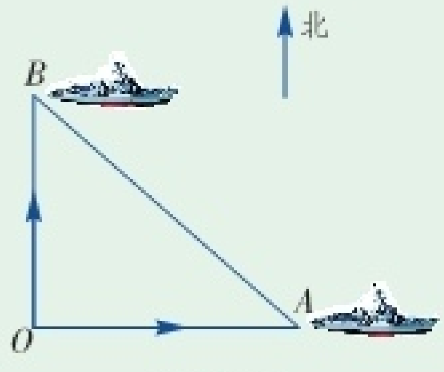
4. 判断由 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

（1）$a=15$，$b=8$，$c=17$；

（2）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{3}{4}$；

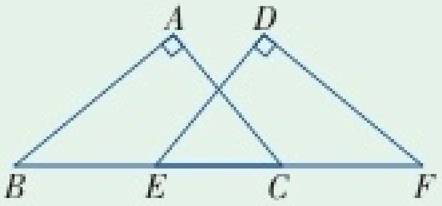
（3）$a=1.5$，$b=2$，$c=2.5$.

5. 已知 A，B 两艘船同时从港口 O 出发，船 A 以 15 km/h 的速度向东航行；船 B 以 10 km/h 的速度向北航行. 它们离开港口 2 h 后，相距多远？

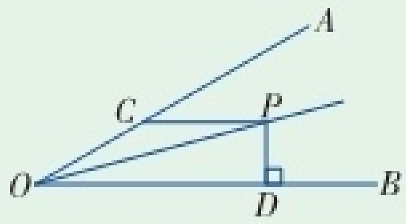


（第 5 题图）

6. 如图，点 B，E，C，F 在同一直线上，$\angle A=\angle D=90°$，$BE=FC$，$AB=DF$. 求证：$\angle ACB=\angle DEF$.



(第 6 题图)

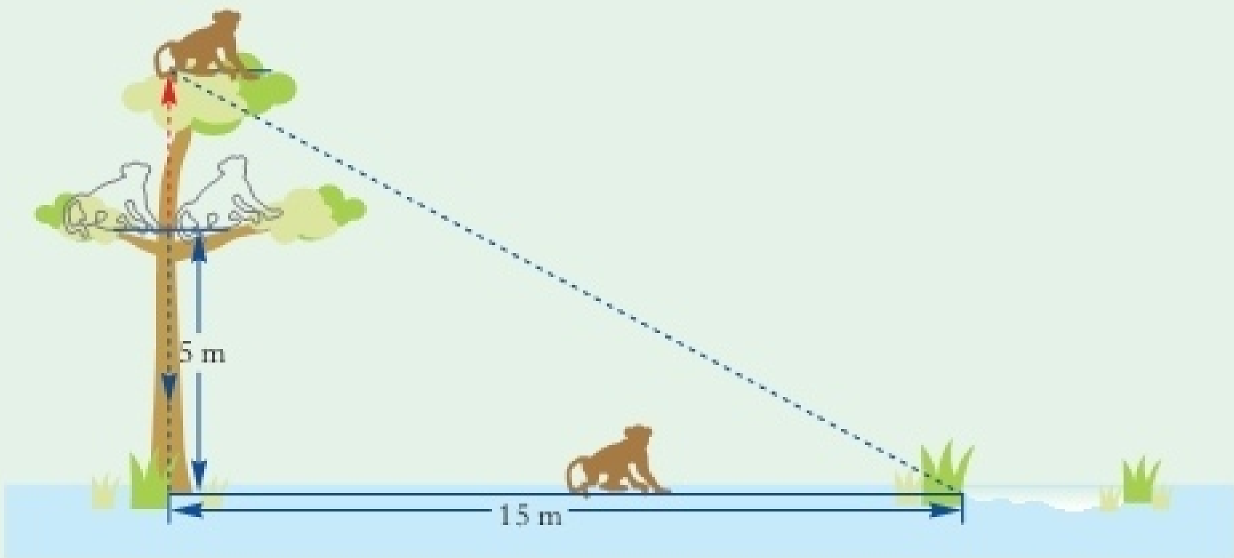


(第 7 题图)

7. 如图，已知 $\angle AOB=30°$，P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点，$CP\parallel OB$，交 OA 于点 C，$PD\perp OB$，垂足为点 D，且 $PC=4$，求 PD 的长.

B 组

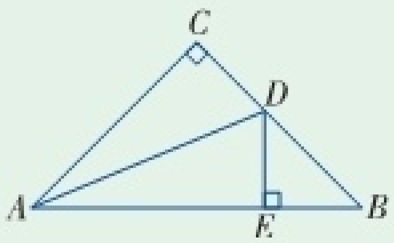
8. 如图，在一棵树的 5 m 高处有两只猴子，其中一只猴子爬下来走向离树 15 m 处的池塘，而另一只爬到树顶后直扑池塘（假设其下落的轨迹为直线）. 如果两只猴子经过的路程相等，那么这棵树有多高呢？



(第 8 题图)

9. 已知直角三角形两直角边的和为 $\sqrt{6}$，斜边长为 2，求这个直角三角形的面积.

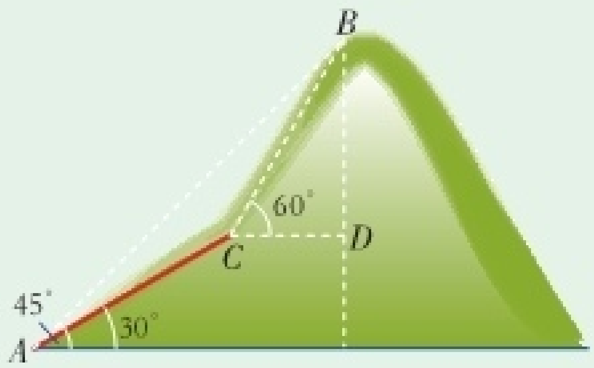
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线且交 BC 于点 D，$DE\perp AB$，垂足为点 E，若 $AB=12$ cm，求 $\triangle DEB$ 的周长.



(第 10 题图)

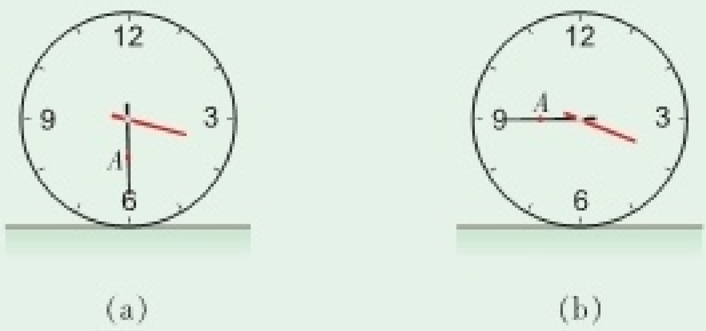
C 组

11. 如图，小明和小强攀登一无名山峰，他俩在山脚 A 处测得主峰 B 的仰角为 $45°$，然后从山脚沿一段倾角为 $30°$的斜坡走了 2 km 到达山腰 C，此时测得主峰 B 的仰角为 $60°$. 于是小明对小强说："我知道主峰多高了." 你能根据他们的数据算出主峰的高度吗？



(第 11 题图)

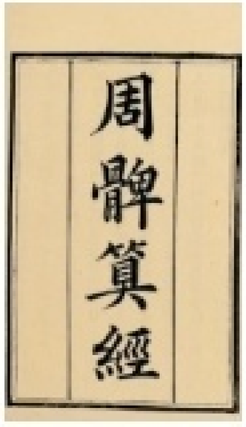
12. 图（a）表示一个时钟的钟面垂直固定于水平桌面上，其中分针上有一点 A，当钟面显示 3 点 30 分时，分针垂直于桌面，A 点距桌面的高度为10 cm. 如图（b），若此钟面显示 3 点 45 分时，A 点距桌面的高度为 16 cm. 则当钟面显示 3 点 50 分时，A 点距桌面的高度为多少？



(第 12 题图)

数学与文化

几何学的基石——勾股定理



在图形的研究中，直角三角形是最为基础的，也正因为此，在许多古代文明的历史文献中都对勾股定理有所研究.

在中国，公元前2世纪成书的《周髀算经》就明确记载了：勾广三，股修四，径隅五. 还给出了勾股定理的一般形式. 三国时代（公元3世纪初）的赵爽注《周髀算经》时，创制了“弦图”，并利用它给出了勾股定理的证明. 设两个直角边长为 a 和 b，斜边长为 c，那么三个边长之间的关系为：$a^2+b^2=c^2$.（如图1）

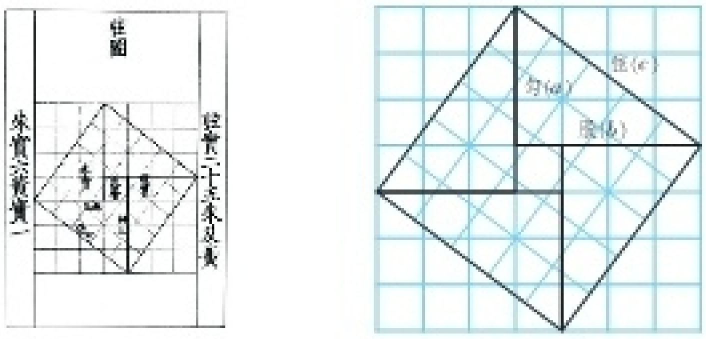
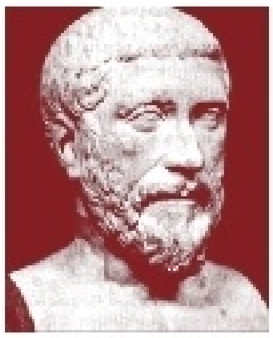


图1　赵爽用弦图来证明勾股定理



毕达哥拉斯

在西方数学史中，勾股定理被称为毕达哥拉斯定理. 毕达哥拉斯（Pythagoras，约前572—约前497），古希腊著名的哲学家、数学家. 他强调“万物皆数”，试图用数来解释一切事物. 相传毕达哥拉斯在参加一次聚会时，对脚下那些排列规则的正方形地砖产生了兴趣，他发现若以一块地砖的对角线为边画一个正方形，那么这个正方形的面积恰好等于2块地砖的面积和. 毕达哥拉斯最先发现勾股定理对于等腰直角三角形是成立的. 他于是受到启发，并进一步给出了一般的证明.

说到勾股定理就不能不谈到勾股数，我们把像3，4，5这样一组满足$a^2+b^2=c^2$的整数解称为勾股数.历史上著名的美索不达米亚文明所刻写的泥版中（如图2），其中有一块就记录了15组勾股数.即使是在今天，能够计算出15组勾股数也不是一件容易的事情，而这项工作是在公元前1900—前1600年的古巴比伦时代完成的，这不得不让人惊叹.

图2 “普林顿322”泥版

关于勾股数，历史上还有一个著名的数学猜想与此密切相关，这就是费马大定理.出生于17世纪的法国数学家费马（Fermat）在阅读古希腊数学家丢番图的著作《算术》时发现：勾股定理$a^2+b^2=c^2$中，a，b，c这3个数有可能同时都是整数.但是，费马猜想，平方的情况是特殊的，对于一般的等式$a^n+b^n=c^n$，当自然数$n\geqslant 3$时，不存在满足$abc\neq 0$的整数解.费马将这个问题写在书页边，同时写道：“我已经找到了这个定理的绝妙的证明方法，但是，这里的空白处太窄了，写不下.”问题是简洁的，但人们一直未找到费马所说的“绝妙证明”.历经3个世纪，经过几代数学家的努力，这个问题于1995年被英国数学家怀尔斯（Wiles）所攻克.

勾股定理作为几何学中一条最基本的定理，以其数形统一的思想方法推动着数学的发展，而且在现实生活中也有着广泛的应用.勾股定理——这一颗几何学中光彩夺目的明珠，被誉为“几何学的基石”.

第2章

四边形

在现实生活中，我们经常可以见到四边形的身影，它们把世界装扮得如此多姿多彩，使人赏心悦目．

在小学，我们已经接触了一些四边形，例如长方形、正方形、平行四边形等．平行四边形、菱形、矩形、正方形还有哪些进一步的性质？如何判定一个四边形是平行四边形、菱形、矩形还是正方形？它们相互之间有哪些关系？本章将学习这些知识．

2.1 多边形

观察

你能从图 2-1 中找出一些由线段首尾相连所组成的图形吗？

图 2-1

在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫作**多边形**（polygon）①.

组成多边形的各条线段叫作多边形的**边**.

相邻两条边的公共端点叫作多边形的**顶点**.

连接不相邻的两个顶点的线段叫作多边形的**对角线**.

相邻两边组成的角叫作多边形的**内角**，简称多边形的**角**.

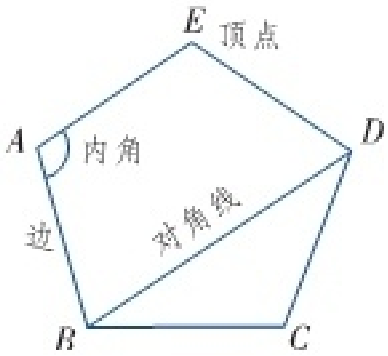


图 2-2

例如在图 2-2 中，AB 是边，E 是顶点，BD 是对角线，$\angle A$ 是内角.

多边形根据边数可以分为三角形，四边形，五边形，……

在平面内，边相等、角也都相等的多边形叫作**正多边形**.

动脑筋

三角形的内角和等于 180°，四边形的内角和是多少度呢？

如图 2-3，四边形 $ABCD$ 的一条对角线 AC 把它分成两个三角形，因此四边形的内角和等于这两个三角形的内角和，即 $180^\circ \times 2 = 360^\circ$.

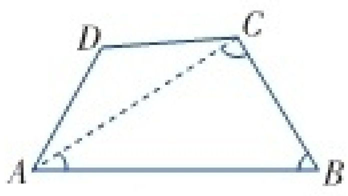
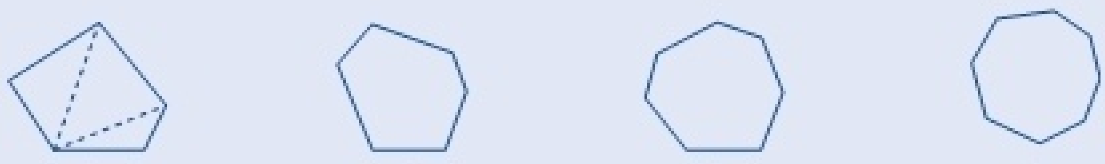


图 2-3

① 本书今后所介绍的多边形都是指凸多边形，即多边形总在任何一条边所在直线的同一旁.

探究

在下列各个多边形中，任取一个顶点，通过该顶点画出所有对角线，并完成下表.



图形	边数	可分成三角形的个数	多边形的内角和
五边形	5	3	$(5-2)\times 180°$
六边形	6		
七边形	7		
八边形	8		
…	…	…	…
n 边形	n		

如图 2-4，n 边形共有 n 个顶点 A_1，A_2，A_3，…，A_n. 与顶点 A_1 不相邻的顶点有 $(n-3)$ 个，因此从顶点 A_1 出发有（$n-3$）条对角线，n 边形被分成了（$n-2$）个三角形. n 边形的内角和等于这（$n-2$）个三角形的内角和，即（$n-2$）$\cdot 180°$. 由此得出：

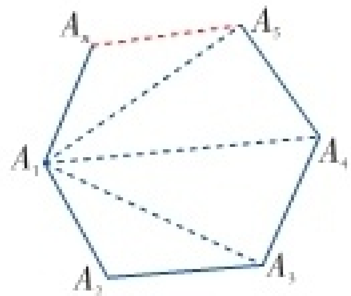


图 2-4

n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

动脑筋

你还可以用其他方法探究 n 边形的内角和公式吗？

如图 2-5，在 n 边形内任取一点 O，与多边形各顶点连接，把 n 边形分成 n 个三角形，用 n 个三角形的内角和 $n \cdot 180°$减去中心的周角 $360°$，得 n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180°$.

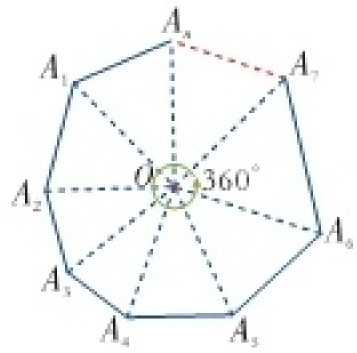


图 2-5

例 1 （1）十边形的内角和是多少度？

（2）一个多边形的内角和等于 1 980°，它是几边形？

解 （1）十边形的内角和是

$$(10-2) \times 180° = 1\,440°.$$

（2）设这个多边形的边数为 n，则

$$(n-2) \times 180° = 1\,980°,$$

解得 $n = 13$.

所以这是一个十三边形.

练习

1. （1）正十二边形每一个内角是多少度？

（2）一个多边形的内角和等于 1 800°，它是几边形？

2. 过多边形某个顶点的所有对角线，将这个多边形分成 10 个三角形，那么这个多边形是几边形？

多边形的内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫作这个多边形的一个外角（exterior angle）. 如图 2-6，$\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角.

在多边形的每个顶点处取一个外角，它们的和叫作这个多边形的外角和.

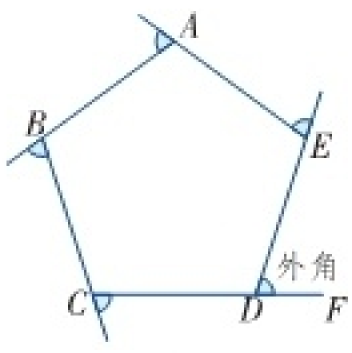


图 2-6

动脑筋

我们已经知道三角形的外角和为 360°，那么四边形的外角和为多少度呢？

如图 2-7，在四边形 $ABCD$ 的每一个顶点处取一个外角，如∠1，∠2，∠3，∠4.

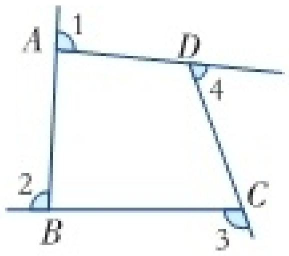


图 2-7

∵ $\angle 1+\angle DAB=180°$，$\angle 2+\angle ABC=180°$，

$\angle 3+\angle BCD=180°$，$\angle 4+\angle ADC=180°$，

又 $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle ADC=360°$，

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=4\times 180°-360°=360°$.

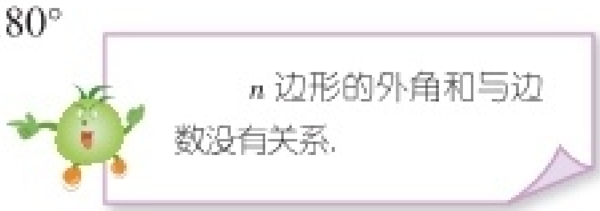
∴ 四边形的外角和为360°.

探究

三角形的外角和是 360°，四边形的外角和是 360°，n 边形（n 为不小于 3 的任意整数）的外角和都是 360°吗？n 边形的外角和与边数有关系吗？

类似于求四边形外角和的思路，在 n 边形的每一个顶点处取一个外角，其中每一个外角与它相邻的内角之和为 180°. 因此，这 n 个外角与跟它相邻的内角之和加起来是 $n\cdot 180°$，将这个总和减去 n 边形的内角和 $(n-2)\cdot 180°$所得的差即为 n 边形的外角和.

$$
\begin{aligned}
& n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180° \\
&=[n-(n-2)]\cdot 180° \\
&=2\times 180°=360°.
\end{aligned}
$$



由此得出：

任意多边形的外角和等于 360°.

例 2 一个多边形的内角和等于它外角和的 5 倍，它是几边形？

解 设多边形的边数为 n，则它的内角和为$(n-2)\cdot 180°$.

由题意得

$$(n-2)\cdot 180°=360°\times 5,$$

解得 $n=12$.

因此这个多边形是十二边形.

观察

三角形具有稳定性，那么四边形呢？用 4 根木条钉成如图 2-8 的木框，随意扭转四边形的边，它的形状会发生变化吗？

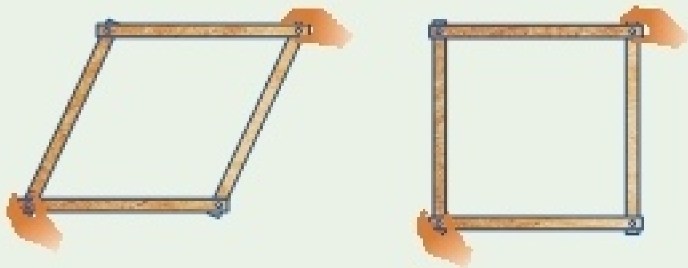


图 2-8

我们发现，四边形的边长不变，但它的形状改变了，这说明**四边形具有不稳定性**.

(a)　　(b)　　(c)

图 2-9

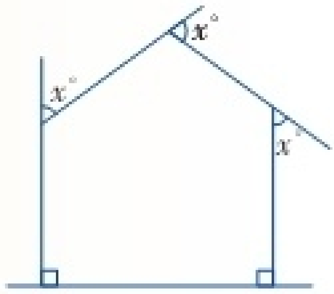
在实际生活中，我们经常利用四边形的不稳定性，例如图 2-9（a）中的电动伸缩门、图 2-9（b）中的升降器. 有时又要克服四边形的不稳定性，例如在图 2-9（c）中的栅栏两横梁之间加钉斜木条，构成三角形，这是为了利用三角形的稳定性.

练习

1. 一个多边形的每一个外角都等于 45°，这个多边形是几边形？它的每一个内角是多少度？

2. 如图，求图中 x 的值.

3. 请举出日常生活中利用四边形不稳定性的一些例子.



（第 2 题图）

习题 2.1

A 组

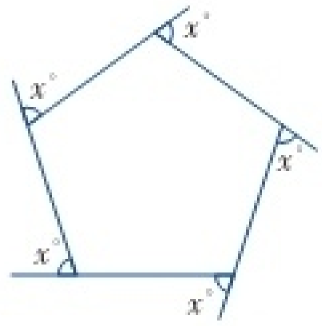
1. (1) 一个多边形的内角和等于 1 440°，它是几边形？

(2) 一个多边形的每一个内角都等于 108°，它是几边形？

2. (1) 一个多边形的每一个外角都等于 36°，它是几边形？

(2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？

3. 如图，求图中 x 的值.



(第 3 题图)

4. 如果一个多边形的每一个外角都等于与它相邻的内角，那么这个多边形的每一个外角是多少度？它是几边形？

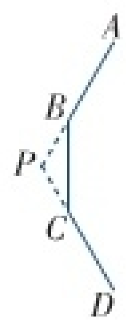
B 组

5. 在四边形的 4 个内角中，最多能有几个钝角，最多能有几个锐角？

6. (1) 如果两个多边形的边数相差 1，那么这两个多边形的内角和相差多少？

(2) 如果两个多边形的边数相差 1，那么这两个多边形的外角和有什么关系？

7. 如图为一个正 n 边形的一部分，AB 和 DC 延长后相交于点 P. 若 $\angle BPC=120°$，求 n.



(第 7 题图)

2.2 平行四边形

2.2.1 平行四边形的性质

做一做

在小学，我们已经认识了平行四边形. 在图 2-10 中找出平行四边形，并把它们勾画出来.

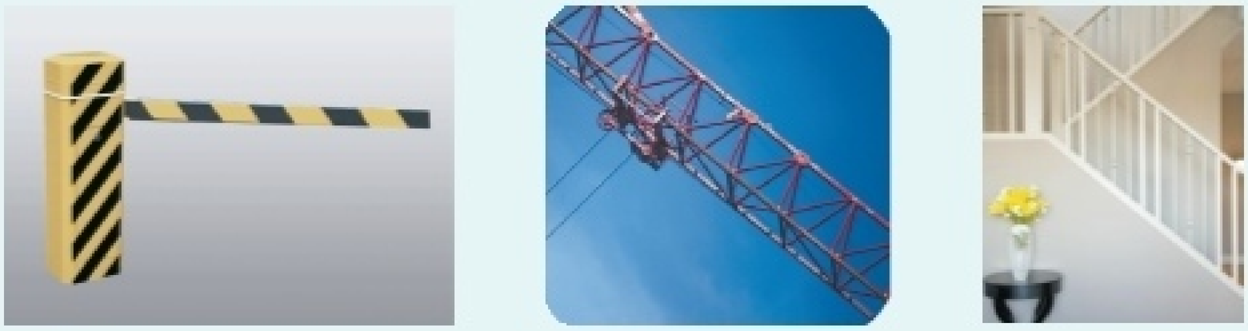


图 2-10

两组对边分别平行的四边形叫作**平行四边形**（parallelogram）.

如图 2-11，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

平行四边形 $ABCD$ 记作“$▱ABCD$”.

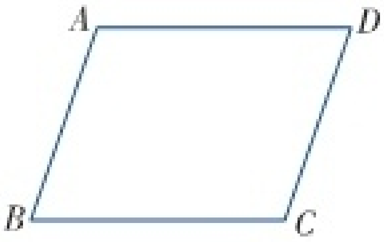


图 2-11

探究

每位同学根据定义画一个平行四边形，测量平行四边形（或者图 2-12 中的 $▱ABCD$）四条边的长度、四个角的大小，由此你能做出什么猜测？

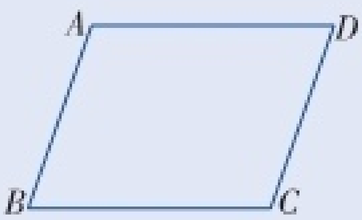
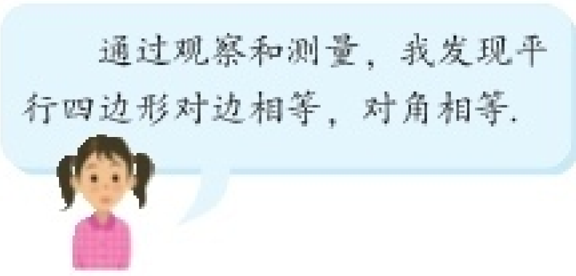
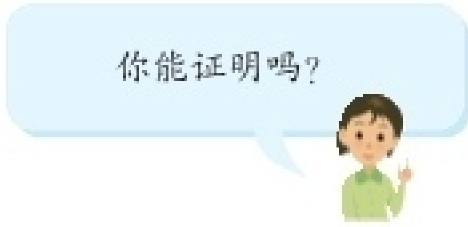


图 2-12





下面我们来证明这个结论.

图 2-13

如图 2-13，连接 AC.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$（平行四边形的两组对边分别平行）.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又 $AC = CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $AB = CD$，$BC = DA$，$\angle B = \angle D$.

又 $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$，

$\therefore$ $\angle BAD = \angle DCB$.

由此得到平行四边形的性质定理：

平行四边形的对边相等，平行四边形的对角相等.

例 1 如图 2-14，四边形 $ABCD$ 和 $BCEF$ 均为平行四边形，$AD = 2$ cm，$\angle A = 65°$，$\angle E = 33°$，求 EF 和 $\angle BGC$.

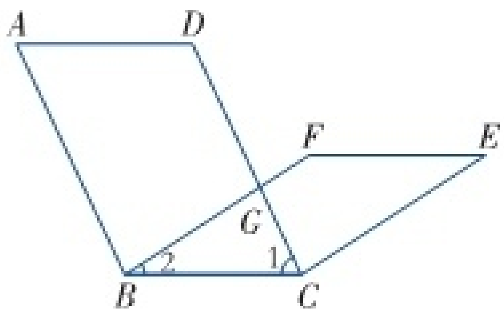


图 2-14

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AD = BC = 2$ cm，$\angle 1 = \angle A = 65°$.

$\because$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

$\therefore$ $EF = BC = 2$ cm，$\angle 2 = \angle E = 33°$.

$\therefore$ 在 $\triangle BGC$ 中，$\angle BGC = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 82°$.

例 2 如图 2-15，直线 l_1 与 l_2 平行，AB，CD 是 l_1 与 l_2 之间的任意两条平行线段. 试问：AB 与 CD 是否相等？为什么？

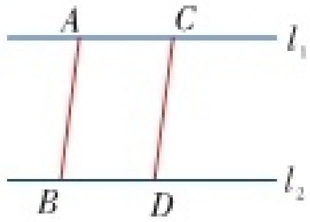


图 2-15

解 $\because\ l_1 \parallel l_2,\ AB \parallel CD$,

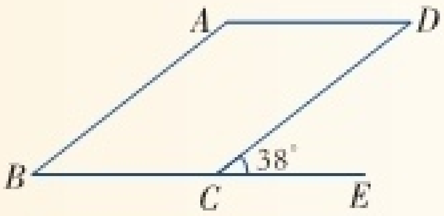
$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形.

$\therefore\ AB = CD$.

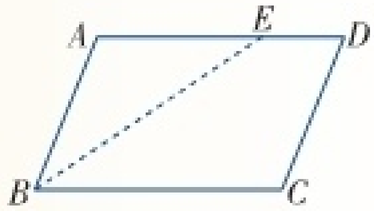
夹在两条平行线间的平行线段相等.

练习

1. 如图，▱$ABCD$ 的一个外角为 38°，求∠A，∠B，∠BCD，∠D 的度数.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，∠ABC = 68°，BE 平分∠ABC，交 AD 于点 E. AB = 2 cm，ED = 1 cm.

（1）求∠A，∠C，∠D 的度数；

（2）求▱$ABCD$ 的周长.

探究

如图 2–16，已知▱$ABCD$ 两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，比较 OA，OC，OB，OD 的长度，有哪些线段相等？你能做出什么猜测？

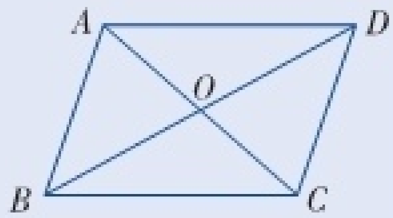


图 2–16

我发现 $OA = OC$，$OB = OD$.

我猜测点 O 是每条对角线的中点.

这个猜测正确吗？下面我们来进行证明.

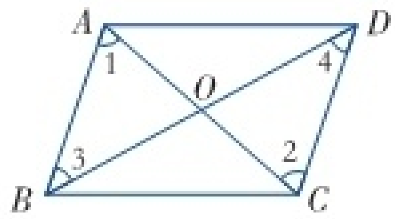


图 2-17

如图 2-17，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AB \parallel DC$，$AB = DC$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

$\therefore$ $\triangle OAB \cong \triangle OCD$.

$\therefore$ $OA = OC$，$OB = OD$.

由此得到平行四边形的性质定理：

平行四边形的对角线互相平分.

例 3 如图 2-18，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC = 6$，$BD = 10$，$CD = 4.8$. 试求$\triangle COD$ 的周长.

解 $\because$ AC，BD 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线，

$\therefore$ $OC = \frac{1}{2}AC = 3$，$OD = \frac{1}{2}BD = 5$.

又 $\because$ $CD = 4.8$，

$\therefore$ $\triangle COD$ 的周长为 $3 + 5 + 4.8 = 12.8$.

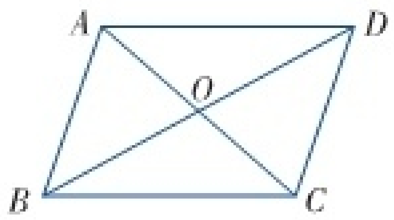


图 2-18

例 4 如图 2-19，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 O 的直线 MN 分别交 AD，BC 于点 M，N.

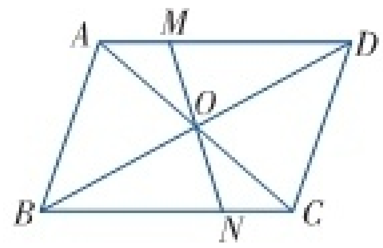


图 2-19

求证：点 O 是线段 MN 的中点.

证明 $\because$ AC，BD 为▱$ABCD$ 的对角线，且相交于点 O，

$\therefore$ $OA = OC$.

$\because$ $AD \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle MAO = \angle NCO$.

又 $\angle AOM = \angle CON$，

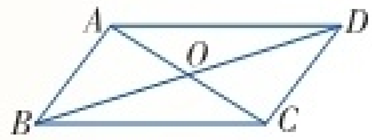
$\therefore$ $\triangle AOM \cong \triangle CON$.

$\therefore$ $OM = ON$.

$\therefore$ 点 O 是线段 MN 的中点.

练习

1. 如图，在▱$ABCD$中，$BC=10$ cm，$AC=8$ cm，$BD=14$ cm.



(第1题图)

(1) 求$\triangle AOD$的周长；

(2) $\triangle ABC$与$\triangle BCD$的周长哪个长？长多少？

2. 平行四边形一条对角线的两个端点到另一条对角线的距离相等吗？为什么？

2.2.2 平行四边形的判定

动脑筋

从平移把直线变成与它平行的直线受到启发，你能不能从一条线段AB出发，画出一个平行四边形呢？

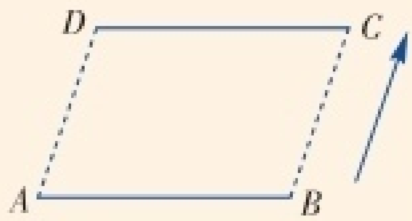


图 2-20

如图 2-20，把线段AB平移到某一位置，得到线段DC，则可知$AB \parallel DC$，且$AB=DC$. 由于点A，B的对应点分别是点D，C，连接AD，BC，由平移的性质：两组对应点的连线平行且相等，即$AD \parallel BC$. 由平行四边形的定义可知四边形$ABCD$是平行四边形.

实际上，上述问题抽象出来就是：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗？如图 2-21，已知$AB \parallel DC$，且$AB=DC$，如果连接AC，也可证明四边形$ABCD$是平行四边形，请你完成这个证明过程.

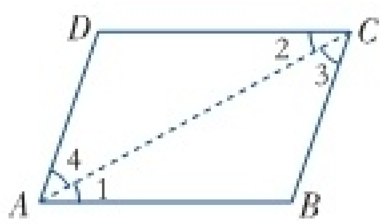


图 2-21

由此得到平行四边形的判定定理 1：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例 5 如图 2-22，点 E，F 在 $\square ABCD$ 的边 BC，AD 上，$BE=\dfrac{1}{3}BC$，$FD=\dfrac{1}{3}AD$，连接 BF，DE.

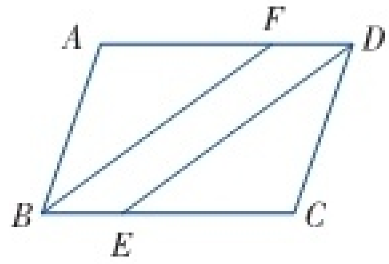


图 2-22

求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$.

$\because$ $BE=\dfrac{1}{3}BC$，$FD=\dfrac{1}{3}AD$，

$\therefore$ $BE=FD$.

又 $\because$ $BE \parallel FD$，

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

“$\underline{\parallel}$” 读作“平行且等于”.

动脑筋

如图 2-23，用两支同样长的铅笔和两支同样长的钢笔能摆成一个平行四边形的形状吗？

把上述问题抽象出来就是：两组对边分别相等的四边形是平行四边形吗？

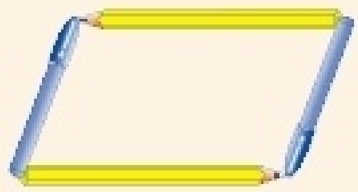


图 2-23

下面我们来证明这个结论.

如图 2-24，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，$AD=BC$，连接 AC.

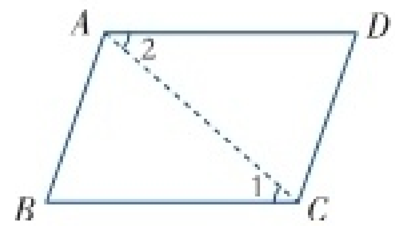


图 2-24

$\because$ $AB=CD$，$BC=DA$，$AC=CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

则 $AD \parallel BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

由此得到平行四边形的判定定理 2：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

例 6 如图 2-25，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

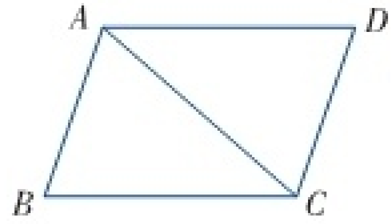


图 2-25

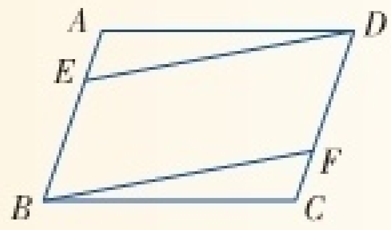
证明 $\because$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$，

$\therefore$ $AB=CD$，$BC=DA$.

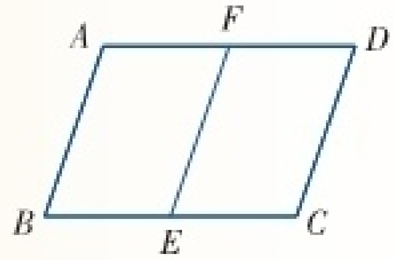
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

练习

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE=CF$. 求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$AB=DC$，E，F 分别是边 BC，AD 上的中点. 找出图中所有的平行四边形，并说明理由.

动脑筋

观察图 2-26，从“平行四边形对角线互相平分”这一性质受到启发，你能画出一个平行四边形吗？

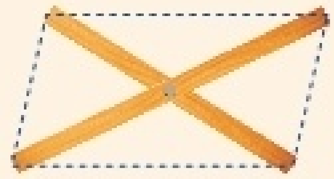


图 2-26

过点 O 画两条线段 AC，BD，使得 $OA=OC$，$OB=OD$.

连接 AB，BC，CD，DA，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，如图 2-27.

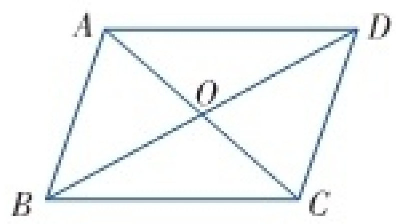


图 2-27

你能说出这样画出的四边形 $ABCD$ 一定是平行四边形的道理吗？

如图 2-27，在四边形 $ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$，

又　$\angle AOB=\angle COD$，

$\therefore$　$\triangle AOB\cong\triangle COD$.

$\therefore$　$AB=CD$，$\angle ABO=\angle CDO$.

从而　$AB\parallel CD$.

$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由此得到平行四边形的判定定理 3：

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 7 如图 2-28，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在 BD 上，且 $OE=OF$.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

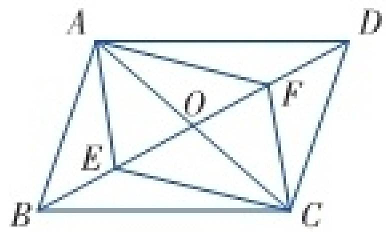


图 2-28

证明　$\because$　四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$　$OA=OC$.

又 $\because$　$OE=OF$，

$\therefore$　四边形 $AECF$ 是平行四边形.

例 8 如图 2-29，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

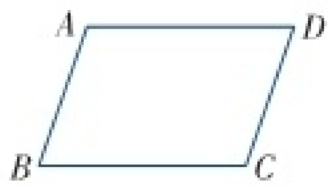


图 2-29

证明　$\because$　$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$，

$\therefore$　$\angle A+\angle B=\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ$.

$\therefore$　$AD\parallel BC$，

同理，$AB\parallel DC$.

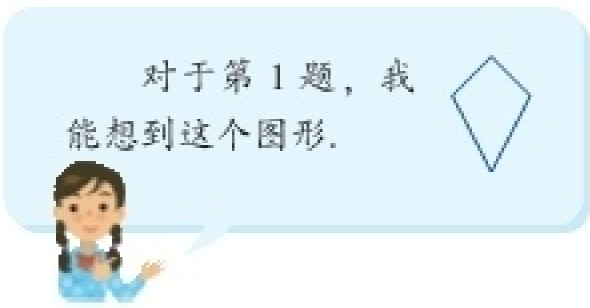
$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

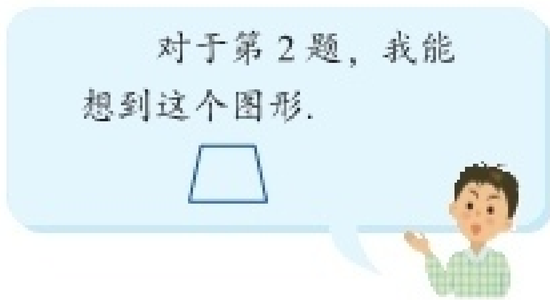
由例 8 可以得到，两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

议一议

1. 两组邻边分别相等的四边形一定是平行四边形吗？如果是，请说明理由；如果不是，请举出反例.

2. 一组对边相等，另一组对边平行的四边形一定是平行四边形吗？如果是，请说明理由；如果不是，请举出反例.

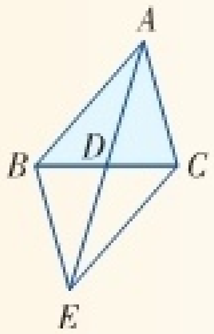




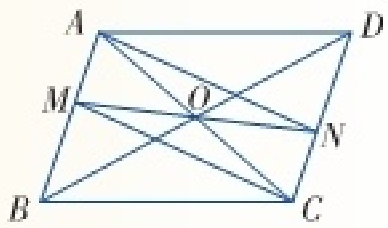
练习

1. 如图，把$\triangle ABC$的中线AD延长至E，使得$DE=AD$，连接EB，EC.

求证：四边形$ABEC$是平行四边形.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

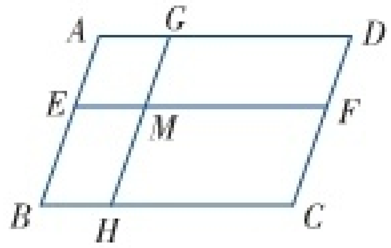
2. 如图，▱$ABCD$的对角线相交于点O，直线MN经过点O，分别与AB，CD交于点M，N，连接AN，CM.

求证：四边形$AMCN$是平行四边形.

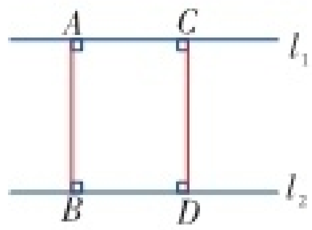
习题 2.2

A 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$EF \parallel AD$，在 AD 边上取一点 G，过点 G 作直线 $GH \parallel AB$，分别与 EF，BC 相交于点 M，H. 问图中有多少个平行四边形？试找出所有与 $\angle A$ 相等的角.



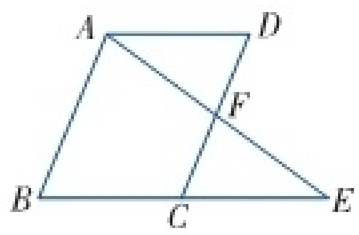
（第 1 题图）



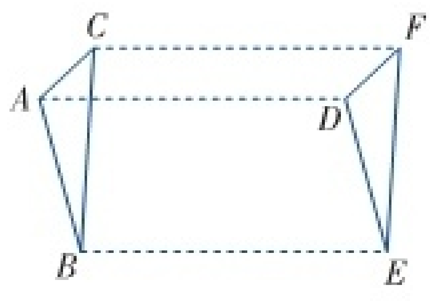
（第 2 题图）

2. 如图，$l_1 \parallel l_2$，AB，CD 都是 l_1 与 l_2 的公垂线段. 你能讲出“两平行线的所有公垂线段都相等”的道理吗？

3. 如图，C 为 BE 的中点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，AE 与 CD 相交于点 F. 求证：$AF=EF$.



（第 3 题图）



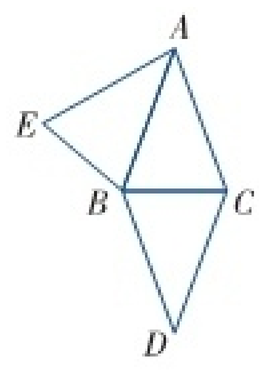
（第 4 题图）

4. 如图，向右平移 3 个单位，$\triangle ABC$ 的像是 $\triangle DEF$，连接 AD，BE，CF. 找出图中所有的平行四边形，并说明理由.

5. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形（其中 $AB>BC$），把它沿底边 BC 翻折，得到 $\triangle DBC$.

（1）四边形 $ABDC$ 是平行四边形吗？为什么？

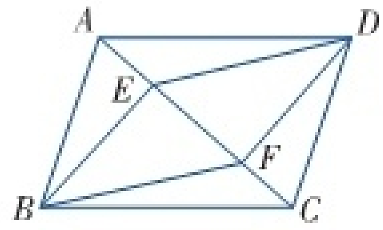
（2）如果把图中的等腰三角形 ABC 沿一条腰 AB 翻折，得到 $\triangle AEB$，四边形 $AEBC$ 是平行四边形吗？



（第 5 题图）

6. 如图，已知 E，F 是▱$ABCD$ 对角线 AC 上的两点，并且 $AE=CF$.

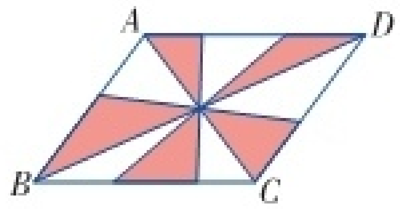
求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.



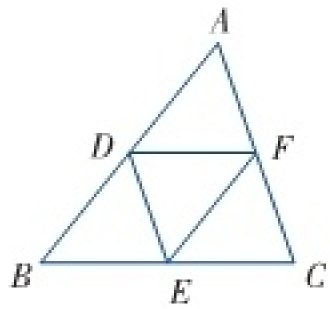
（第 6 题图）

B 组

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，AC，BD 为对角线，$BC=6$，BC 边上的高为 4，求图中红色部分的面积.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. 如图，在△ABC 中，D，E，F 分别是边 AB，BC，CA 上的点，且 $DE\parallel AC$，$FE\parallel AB$，$DF\parallel BC$.

（1）找出图中所有的平行四边形，并说明理由；

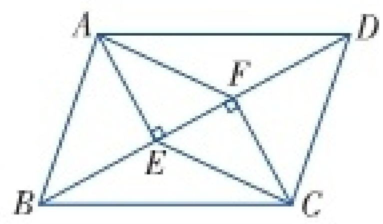
（2）△DEF 的三个角分别与△ABC 的哪个角相等？为什么？

（3）说明 D，E，F 分别是 AB，BC，CA 的中点.

9. 证明：平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等.

10. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为点 E，F.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



（第 10 题图）

2.3 中心对称和中心对称图形

如图 2–30，在平面内，将△OAB 绕点 O 旋转180°，所得到的像是△OCD. 从这个例子我们引出下述概念：

在平面内，把一个图形上的每一个点 P 对应到它在绕点 O 旋转 180°下的像 P'，这个变换称为关于点 O **中心对称**（central symmetry）.

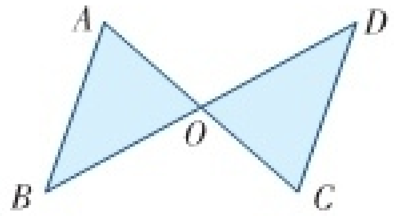


图 2–30

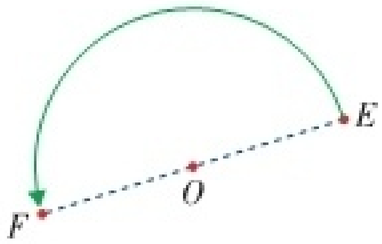


图 2–31

如图 2–31，在平面内，把点 E 绕点 O 旋转180°，得到点 F，此时称点 E 和点 F 关于点 O 对称，也称点 E 和点 F 是一对对应点. 由于点 E，O，F 在一条直线上，且 $OE=OF$，因此点 O 是线段 EF 的中点. 反之，如果点 O 是线段 EF 的中点，那么点 E 和点 F 关于点 O 对称.

在平面内，如果一个图形 G 绕点 O 旋转 180°，得到的像与另一个图形 G' 重合，那么称这两个图形关于点 O 中心对称，点 O 叫作**对称中心**. 此时，图形 G 上每一个点 E 与它在图形 G' 上的对应点 F 关于点 O 对称，从而点 O 是线段 EF 的中点.

由此得到下述性质：

> **成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.**

例 如图 2–32，已知△ABC 和点 O，求作一个△$A'B'C'$，使它与△ABC 关于点 O 成中心对称.

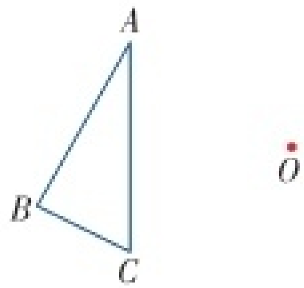


图 2–32

作法 （1）连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对应点 A'.

（2）用同样的方法作出点 B 和 C 关于点 O 的对应点

B'和 C'.

(3) 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$.

则$\triangle A'B'C'$即为所求作的三角形，如图 2-33.

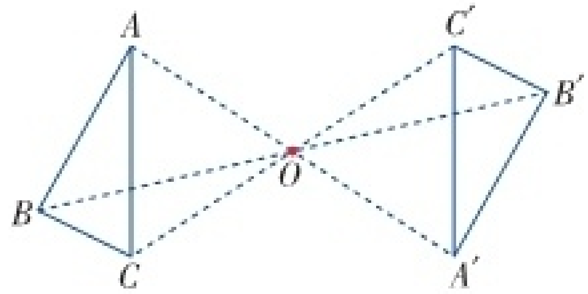


图 2-33

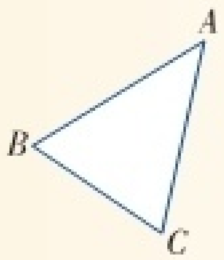
练习

1. 判断（对的画“√”，错的画“×”）：

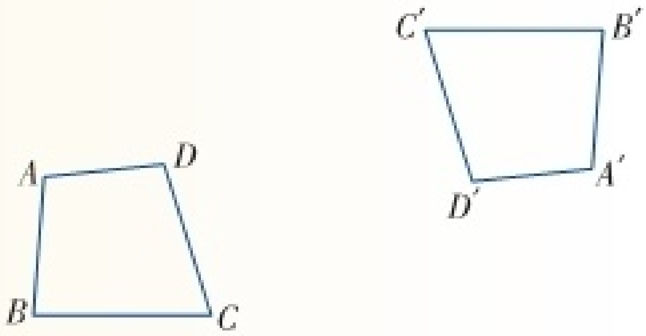
(1) 线段 AB 的中点 O 是点 A 与点 B 的对称中心. (　)

(2) 等边三角形 ABC 的三条中线的交点是点 A 与点 B 的对称中心. (　)

2. 画出$\triangle ABC$ 关于点 A 成中心对称的图形.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$关于某点中心对称，找出它们的对称中心.

观察

如图 2-34，将线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180°，你有什么发现？

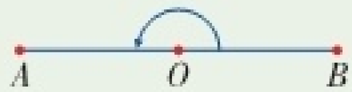


图 2-34

我发现线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180°后，与它自身重合.

像这样，如果一个图形绕一个点 O 旋转 180°，所得到的像与原来的图形互相重合，那么这个图形叫作**中心对称图形**（central symmetry figure），这个点 O 叫作它的**对称中心**.

由上可得：线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心.

做一做

如图 2-35，▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，则 $OA=OC$，$OB=OD$. 把▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，则：

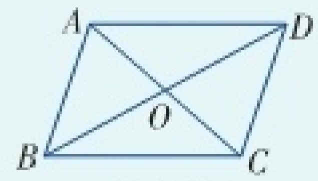


图 2-35

（1）点 A 的像是______；（2）点 B 的像是______；

（3）边 AB 的像是______；（4）点 C 的像是______；

（5）边 BC 的像是______；（6）点 D 的像是______；

（7）边 CD 的像是______；（8）边 DA 的像是______.

从上述结果看出，▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，它的像与自身重合，因此

平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

动脑筋

你能利用平行四边形是中心对称图形，将其绕对称中心旋转 180°，来理解平行四边形的性质吗？

说一说

图 2-36 是一行英文字母，其中哪些字母可看作是中心对称图形？

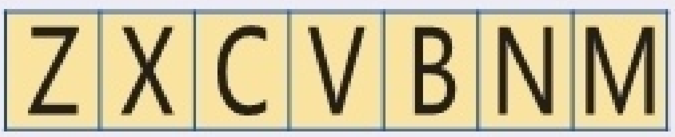
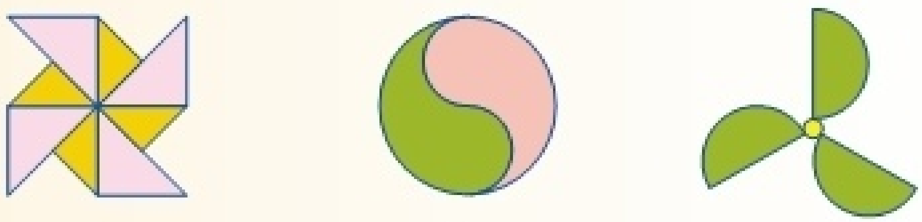


图 2-36

练习

1. 试举出生活中一些中心对称图形的例子.

2. 下列图形中，哪些是中心对称图形？如果是，找出它们的对称中心.



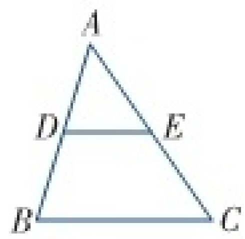
(1)　(2)　(3)

(第 2 题图)

习题 2.3

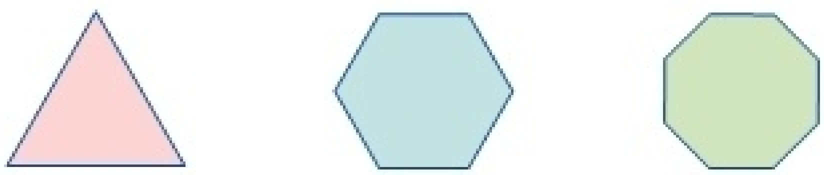
A 组

1. 如图，已知△ABC，点 D，E 为 AB，AC 的中点，试以顶点 E 为对称中心，作一个与△ADE 成中心对称的图形.



(第 1 题图)

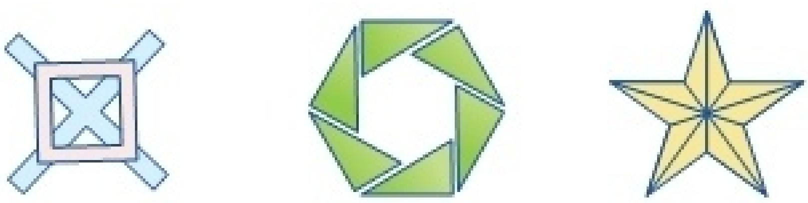
2. 如图是正三角形、正六边形、正八边形，它们是中心对称图形吗？如果是，找出它们的对称中心.



(第 2 题图)

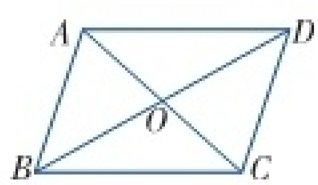
B 组

3. 下列图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的有（　）



(A)　(B)　(C)

(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 $BD=4$ cm，将▱$ABCD$ 绕其对称中心旋转 180°，求点 D 所转过的路径长.

2.4 三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫作三角形的**中位线**.

如图 2-37，D，E，F 分别为 $\triangle ABC$ 三边中点，所以，DF，DE，EF 分别是三角形的三条中位线.

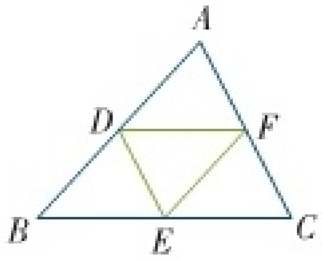


图 2-37

探究

如图 2-38，EF 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线.

$EF \parallel BC$ 吗？量一量 EF 与 BC 的长各是多少？你能猜测出 EF 和 BC 具有怎样的位置关系和数量关系吗？为什么？

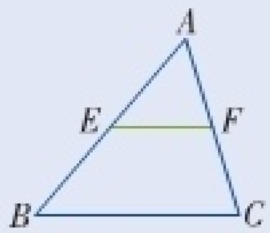
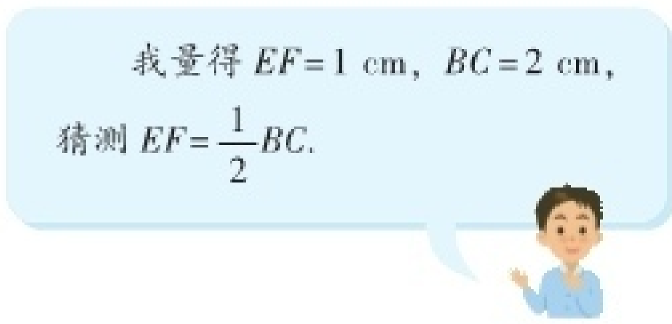


图 2-38



这些猜测正确吗？我们来进行证明.

如图 2-39，将 $\triangle AEF$ 绕点 F 旋转 $180°$，设点 E 的像为点 G，易知点 A 的像是点 C，点 F 的像还是点 F，且 E，F，G 在一条直线上.

由于旋转不改变图形的形状和大小，所以有

$CG = AE = BE$，$GF = EF$，$\angle G = \angle AEF$.

则　$EA \parallel CG$，即　$BE \parallel CG$.

$\therefore$　四边形 $BCGE$ 是平行四边形.

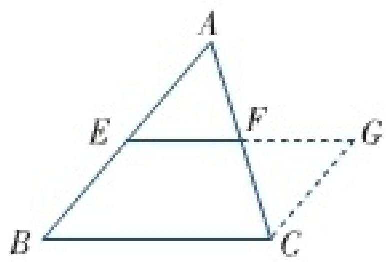


图 2-39

$\therefore\quad EG \underset{=}{\parallel} BC.$

又 $\because\quad EF=FG,$

$\therefore\quad EF=\dfrac{1}{2}EG=\dfrac{1}{2}BC.$

从而 $\quad EF \underset{=}{\parallel} \dfrac{1}{2}BC.$

由此得到三角形的**中位线定理**：

> 三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

例 如图 2-40，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点 E，F，G，H，得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？为什么？

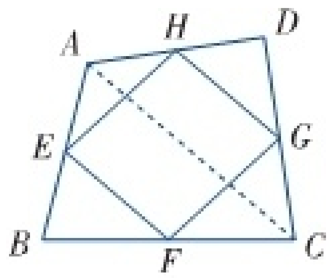


图 2-40

解 连接 AC.

$\because\quad EF$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线，

$\therefore\quad EF \parallel AC$，且 $EF=\dfrac{1}{2}AC.$

又 $\because\quad HG$ 是 $\triangle DAC$ 的一条中位线，

$\therefore\quad HG \parallel AC$，且 $HG=\dfrac{1}{2}AC.$

$\therefore\quad EF \parallel HG$，且 $EF=HG.$

$\therefore\quad$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

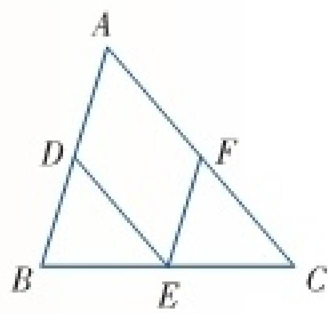
练习

1. 已知 $\triangle ABC$ 各边的长度分别为 3 cm，3.4 cm，4 cm，求连接各边中点所构成的 $\triangle DEF$ 的周长.

2. 如图，$\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 上的中点分别是 D，E，F.

(1) 四边形 $ADEF$ 是平行四边形吗？为什么？

(2) 四边形 $ADEF$ 的周长等于 $AB+AC$ 吗？为什么？



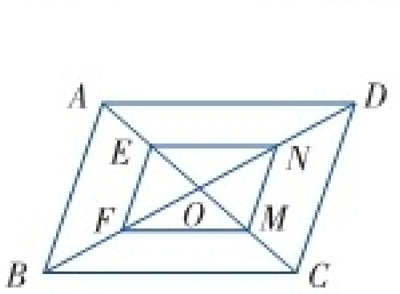
(第 2 题图)

习题 2.4

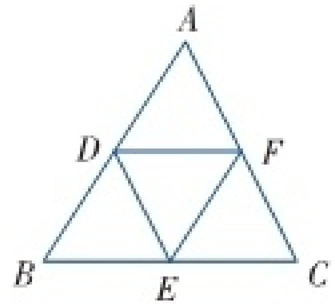
A 组

1. 如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，点E，F，M，N分别是OA，OB，OC，OD的中点.

求证：四边形$EFMN$是平行四边形.



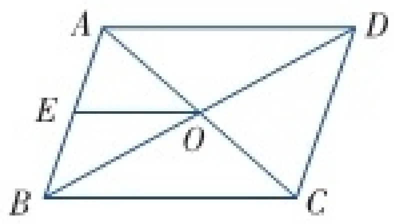
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，点D，E，F分别为$\triangle ABC$三边的中点，若$\triangle DEF$的周长为 10，求$\triangle ABC$的周长.

3. 如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，点E是AB的中点，$OE=3$ cm，求AD的长.



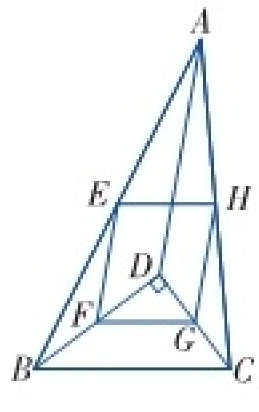
(第 3 题图)

B 组

4. 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分吗？为什么？

5. 证明：过三角形一边中点与另一边平行的直线必平分第三边.

6. 如图，D是$\triangle ABC$内一点，$BD\perp CD$，$AD=6$，$BD=4$，$CD=3$，点E，F，G，H分别是AB，BD，CD，AC的中点，求四边形$EFGH$的周长.



(第 6 题图)

2.5 矩　形

2.5.1 矩形的性质

观察

在小学，我们初步认识了长方形，观察图 2-41 中的长方形，它是平行四边形吗？它有什么特点呢？

图 2-41

我发现这些长方形的对边平行且相等，因此，它们是平行四边形.

我发现这些四边形的四个角都是直角.

在一个平行四边形中，只要有一个角是直角，那么其他三个角都是直角.

有一个角是直角的平行四边形叫作**矩形**（rectangle），也称为长方形.

平行四边形 $\xrightarrow{\text{有一个角是直角}}$ 矩形

可以知道：

矩形的四个角都是直角，对边相等，对角线互相平分.

由于矩形是平行四边形，因此

矩形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

动脑筋

如图 2-42，四边形 $ABCD$ 为矩形，那么对角线 AC 与 DB 相等吗?

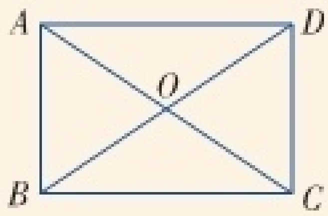


图 2-42

如图 2-42，四边形 $ABCD$ 是矩形，于是有

$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB=90°$，$BC=CB$.

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore$ $AC=DB$.

由此得到矩形的性质：

矩形的对角线相等.

例 1 如图 2-43，矩形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AC=4$ cm，$\angle AOB=60°$. 求 BC 的长.

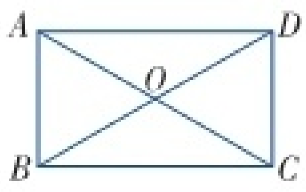


图 2-43

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ $OA=OB=\dfrac{1}{2}AC=2$ cm.

又 $\angle AOB=60°$，

$\therefore$ $\triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore$ $AB=OA=2$ cm.

$\because$ $\angle ABC=90°$，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ (cm).

做一做

画出一个矩形 $ABCD$（如图 2-44），把它剪下来，怎样折叠能使矩形在折痕两旁的部分互相重合？满足这个要求的折叠方法有几种？由此猜测：矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？你的猜测正确吗？

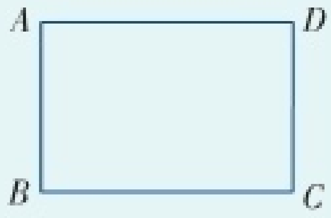


图 2-44

如图 2-45，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，过点 O 作直线 $EF \perp BC$，且分别与边 BC，AD 相交于点 E，F. 由于 $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=OC$，因此△$OBC$ 是等腰三角形，从而直线 EF 是线段 BC 的垂直平分线.

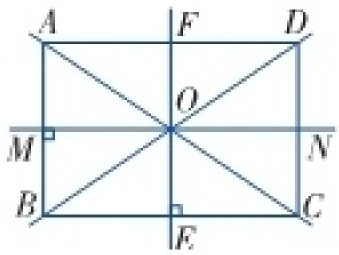


图 2-45

由于 $AD /\!/ BC$，因此 $EF \perp AD$. 同理，直线 EF 是线段 AD 的垂直平分线.

因此点 B 和点 C 关于直线 EF 对称，点 A 和点 D 关于直线 EF 对称，从而在关于直线 EF 的轴反射下，矩形 $ABCD$ 的像与它自身重合，因此矩形 $ABCD$ 是轴对称图形，EF 是它的一条对称轴.

类似地，过点 O 作直线 $MN \perp AB$，且分别与边 AB，DC 相交于点 M，N，则点 M，N 分别是边 AB，DC 的中点，直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的一条对称轴.

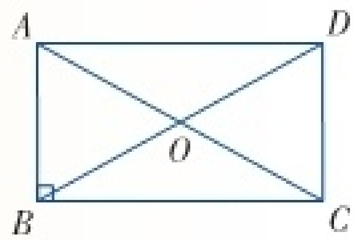
由此得到：

矩形是轴对称图形，过每一组对边中点的直线都是矩形的对称轴.

练习

1. 已知矩形的一条对角线的长度为 2 cm，两条对角线的一个夹角为 60°，求矩形的各边长.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，试利用矩形的性质证明：直角三角形 ABC 斜边 AC 上的中线 BO 等于斜边的一半.



（第 2 题图）

2.5.2 矩形的判定

动脑筋

矩形的四个角是直角，那么，四个角是直角的四边形是矩形吗？三个角是直角呢？两个角是直角呢？

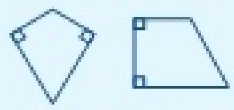
如图 2-46，四边形 $ABCD$ 的四个角都是直角. 由于“同旁内角互补，两直线平行”，因此 $AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$，从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $\square ABCD$ 是矩形. 由此得到四个角是直角的四边形是矩形.

图 2-46

三个角是直角的四边形，容易知道另一个角也是直角，由此得到：

三个角是直角的四边形是矩形.

四边形中只有两个角是直角，我想到了右边的图形：



动脑筋

从“矩形的两条对角线相等且互相平分”这一性质受到启发，你能画出一个对角线长度为 4 cm 的矩形吗？这样的矩形有多少个？

过点 O 画两条线段 AC，BD，使得 $OA=OC=2$ cm，$OB=OD=2$ cm. 连接 AB，BC，CD，DA. 则四边形 $ABCD$ 是矩形，且它的对角线长度为 4 cm，如图 2-47. 这样的矩形有无穷多个.

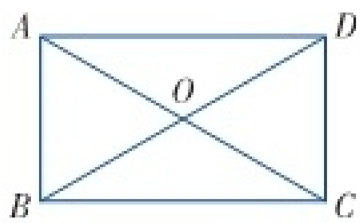


图 2-47

你能说出这样画出的四边形一定是矩形的道理吗？

如图 2-47，由画法可知，四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相平分，因此它是平行四边形，又已知其对角线相等，上述问题抽象出来就是：对角线相等的平行四边形是矩形吗？

我们来进行证明.

在▱$ABCD$ 中，由于$AB=DC$，$AC=DB$，$BC=CB$，

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore\ \angle ABC=\angle DCB$.

又$\because\ \angle ABC+\angle DCB=180°$，

$\therefore\ \angle ABC=90°$.

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是矩形.

由此得到矩形的判定定理：

对角线相等的平行四边形是矩形.

议一议

对角线相等的四边形是矩形吗？

例 2 如图 2-48，在▱$ABCD$ 中，它的两条对角线相交于点 O.

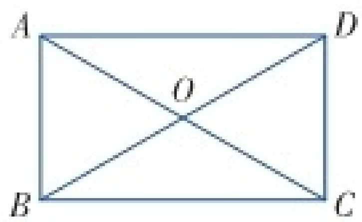


图 2-48

(1) 如果▱$ABCD$ 是矩形，试问：$\triangle OBC$ 是什么样的三角形？

(2) 如果$\triangle OBC$ 是等腰三角形，其中 $OB=OC$，那么▱$ABCD$ 是矩形吗？

解 (1) $\because$ ▱$ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ AC 与 DB 相等且互相平分.

$\therefore\ OB=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}AC=OC$.

$\therefore\ \triangle OBC$ 是等腰三角形.

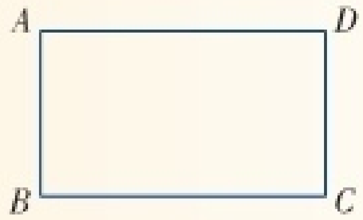
(2) $\because\ \triangle OBC$ 是等腰三角形，其中 $OB=OC$，

$\therefore\ AC=2OC=2OB=BD$.

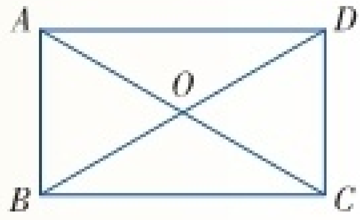
$\therefore$ ▱$ABCD$ 是矩形.

练习

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第 1 题图）



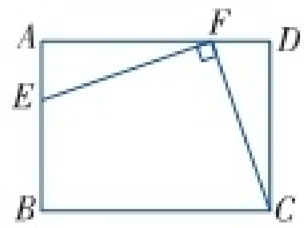
（第 2 题图）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，$AB=2$，$AC=4$，求▱$ABCD$ 的面积.

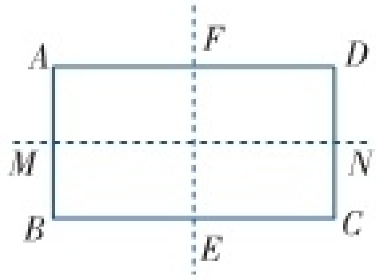
习题 2.5

A 组

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AB 上一点，F 是 AD 上一点，$EF \perp FC$，且 $EF=FC$，$DF=4$ cm，求 AE 的长.



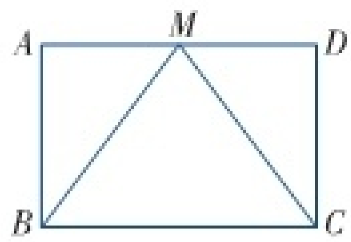
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，矩形 $ABCD$ 被它的两条对称轴 MN，FE 分成四个小四边形，它们都是矩形吗？为什么？

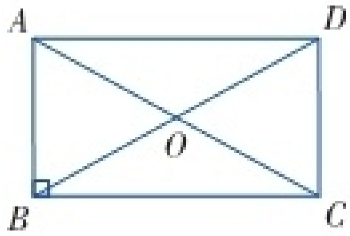
3. 如图，在▱$ABCD$ 中，M 为 AD 的中点，$BM=CM$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第 3 题图）

4. 如图，三角形 ABC 是直角三角形，BO 是它斜边 AC 上的中线，延长 BO 至 D，使 $OD=OB$，连接 AD，DC.

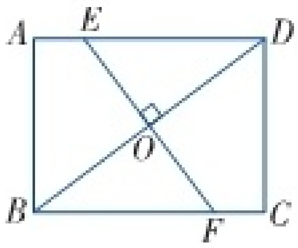
求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



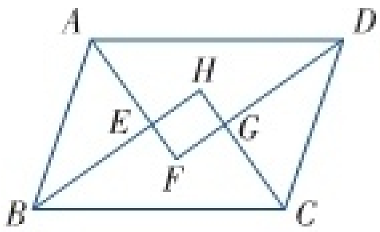
（第 4 题图）

B 组

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$AD=4$ cm，过对角线 BD 的中点 O 作 BD 的垂线 EF，分别交 AD，BC 于点 E，F，求 AE 的长.



（第 5 题图）



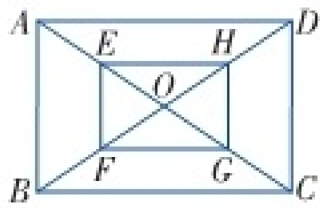
（第 6 题图）

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，各内角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点，连接 EF，FG，GH，HE.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



（第 7 题图）

2.6 菱　形

2.6.1 菱形的性质

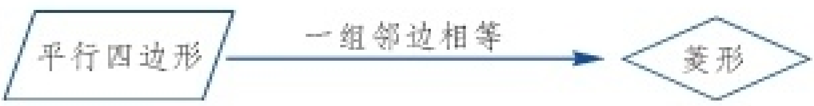
观察

观察图 2-49 中的平行四边形，它们有什么特点？

图 2-49

它们的邻边相等.

一组邻边相等的平行四边形叫作**菱形**（rhombus）.



可以知道：

> 菱形的四条边都相等，对角相等，
> 对角线互相平分.

由于菱形是平行四边形，因此

> 菱形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

动脑筋

如图 2-50，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，DB 相交于点 O. 对角线 $AC \perp DB$ 吗？你的理由是什么？

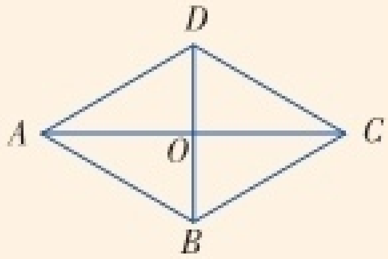


图 2-50

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore$ $DA = DC$.

$\therefore$ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上.

又点 O 为线段 AC 的中点，

$\therefore$ 直线 DO（即直线 DB）是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore$ $AC \perp DB$.

由此得到菱形的性质：

菱形的对角线互相垂直.

做一做

把图 2-50 中的菱形 $ABCD$ 沿直线 DB 对折（即作关于直线 DB 的轴反射），点 A 的像是_____，点 C 的像是_____，点 D 的像是_____，点 B 的像是_____，边 AD 的像是_____，边 CD 的像是_____，边 AB 的像是_____，边 CB 的像是_____.

从上述结果看出，在关于直线 DB 的轴反射下，菱形 $ABCD$ 的像与它自身重合. 同理，在关于直线 AC 的轴反射下，菱形 $ABCD$ 的像与它自身重合.

由此得到：

菱形是轴对称图形，两条对角线所在直线都是它的对称轴.

动脑筋

如图 2-50，你能利用菱形的性质说明菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ 吗？

$\because\ S_{菱形ABCD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}$，

又 $AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$$\begin{aligned}\therefore\ S_{菱形ABCD}&=\frac{1}{2}AC\cdot DO+\frac{1}{2}AC\cdot BO\\&=\frac{1}{2}AC(DO+BO)\\&=\frac{1}{2}AC\cdot BD.\end{aligned}$$

菱形的面积等于两条对角线长度乘积的一半.

例 1 如图 2-51，菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 的长度分别为 4 cm，3 cm，求菱形 $ABCD$ 的面积和周长.

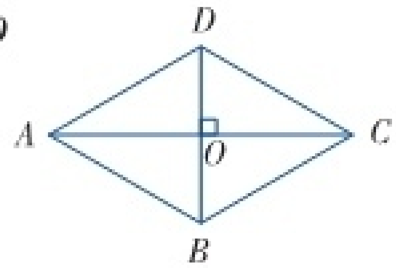


图 2-51

解 菱形 $ABCD$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\times4\times3=6\ (\text{cm}^2).$$

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，

$$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2\ (\text{cm}),\ OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times3=1.5\ (\text{cm}),$$

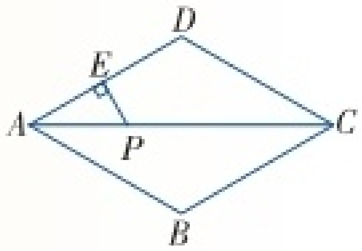
所以，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2^2+1.5^2}=\sqrt{6.25}=2.5$（cm）.

因此，菱形 $ABCD$ 的周长为 $2.5\times4=10$（cm）.

练习

1. 菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O. 已知 $AB=5$ cm，$OB=3$ cm，求菱形 $ABCD$ 的两条对角线的长度以及它的面积.

2. 如图，点 P 是菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点，$PE\perp AD$ 于点 E，$PE=4$ cm，求点 P 到 AB 的距离.



（第 2 题图）

2.6.2 菱形的判定

动脑筋

如图 2-52，用 4 支长度相等的铅笔能摆成菱形吗？

把上述问题抽象出来就是：四条边都相等的四边形是菱形吗？

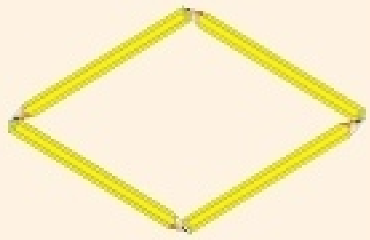


图 2-52

下面我们来证明这个结论.

如图 2-53，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$.

∵ $AD=BC$，$AB=DC$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $AB=AD$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

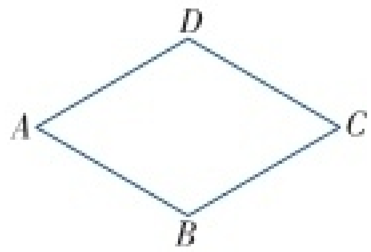


图 2-53

由此得到菱形的判定定理 1：

四条边都相等的四边形是菱形.

例 2 如图 2-54，在四边形 $ABCD$ 中，线段 BD 垂直平分 AC，且相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$.

求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

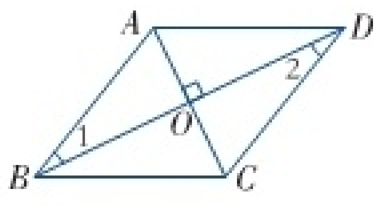


图 2-54

证明 ∵ 线段 BD 垂直平分 AC，

∴ $BA=BC$，$DA=DC$，$OA=OC$.

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle AOB=\angle COD$，$OA=OC$，

∴ $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

∴ $AB=CD$.

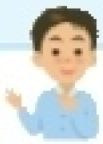
∴ $AB=BC=CD=DA$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形（四条边都相等的四边形是菱形）.

动脑筋

菱形的两条对角线互相垂直且平分，从菱形的这一性质受到启发，你能画出一个菱形吗？

过点 O 画两条互相垂直的线段 AC，BD，使得 $OA=OC$，$OB=OD$. 连接 AB，BC，CD，DA. 则四边形 $ABCD$ 是菱形，如图 2-55.



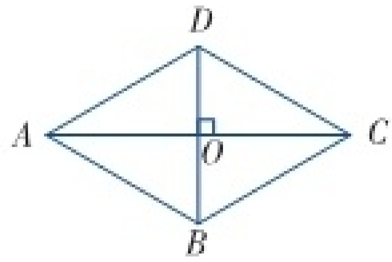


图 2-55

你能说出这样画出的四边形 $ABCD$ 一定是菱形的道理吗？

如图 2-55，由画法可知，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 互相平分，因此它是平行四边形. 又已知其对角线互相垂直，上述问题抽象出来就是：对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗？

我们来进行证明.

在▱$ABCD$ 中，$AC\perp BD$，$OA=OC$，

$\therefore$ BD 所在的直线是 AC 的垂直平分线.

$\therefore$ $DA=DC$.

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是菱形.

由此得到菱形的判定定理 2：

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

例 3 如图 2-56，在▱$ABCD$ 中，$AC=6$，$BD=8$，$AD=5$. 求 AB 的长.

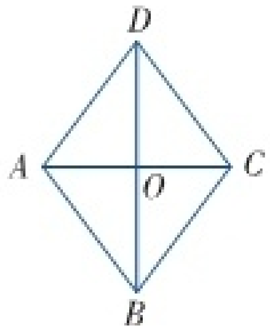


图 2-56

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ $OA=\dfrac{1}{2}AC=3$，$OD=\dfrac{1}{2}BD=4$.

又 $\because$ $AD=5$，满足 $AD^2=OA^2+OD^2$，

∴ $\triangle DAO$ 是直角三角形.

∴ $\angle DOA=90°$，即 $DB\perp AC$.

∴ ▱$ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

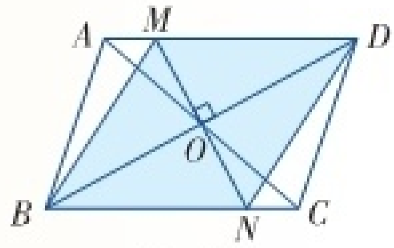
∴ $AB=AD=5$.

练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长度分别为 4 cm，3 cm.

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作 $MN\perp BD$，分别交 AD，BC 于点 M，N.

求证：四边形 $BNDM$ 是菱形.



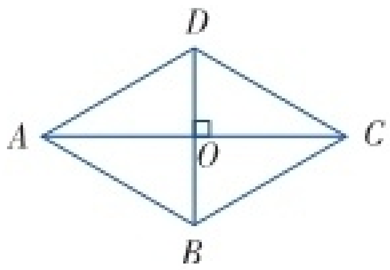
（第 2 题图）

习题 2.6

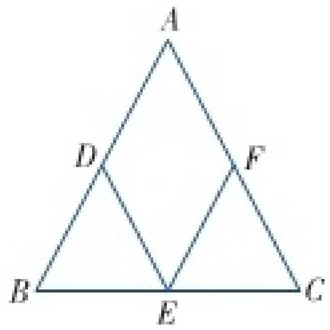
A 组

1. 菱形的对角线的交点到一组邻边的距离相等吗？为什么？

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，边长为 2 cm，$\angle BAD=60°$，求菱形 $ABCD$ 的两条对角线的长度以及它的面积.



（第 2 题图）



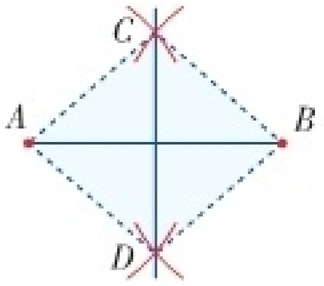
（第 3 题图）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D，E，F 分别是 AB，BC，AC 边的中点.

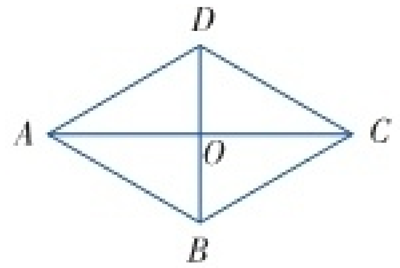
(1) 求证：四边形 $ADEF$ 是菱形；

(2) 若 $AB=12$ cm，求菱形 $ADEF$ 的周长.

4. 小明在作线段 AB 的垂直平分线时，是这样操作的：如图，分别以点 A，B 为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$ 的定长 a 为半径画弧，两弧相交于 C，D，则直线 CD 即为所求. 根据他的作图方法可知四边形 $ADBC$ 一定是菱形吗？试说明理由.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

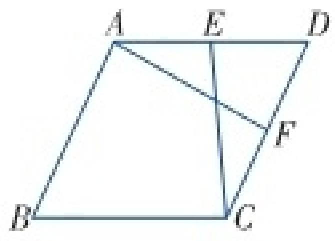
5. 如图，▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$OA=3$，$OB=2$，$AB=\sqrt{13}$.

（1）$\triangle AOB$ 是直角三角形吗？为什么？

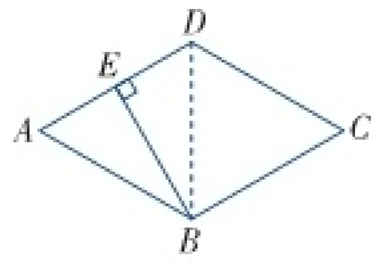
（2）▱$ABCD$ 是菱形吗？为什么？

B 组

6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E，F 是边 AD，CD 的中点，$AF=3$ cm，求 CE 的长.



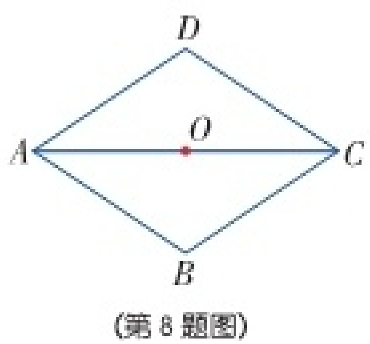
（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，作 $BE\perp AD$，垂足为点 E. 求证：$AE=DE$.

8. 如图，把等腰三角形 ABC 绕它的底边 AC 上的中点 O 旋转 180°，得到三角形 CDA，试问：四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？



（第 8 题图）

2.7 正方形

观察

装修房子铺地面的瓷砖（如图 2-57）大多是正方形的形状，它是什么样的四边形呢？它与平行四边形、矩形、菱形有什么关系？

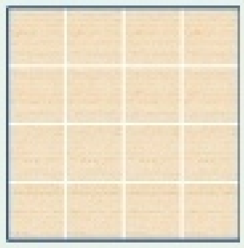


图 2-57

正方形的四条边都相等，四个角都是直角.

正方形既是矩形又是菱形.

我们把有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫作**正方形**（square）.

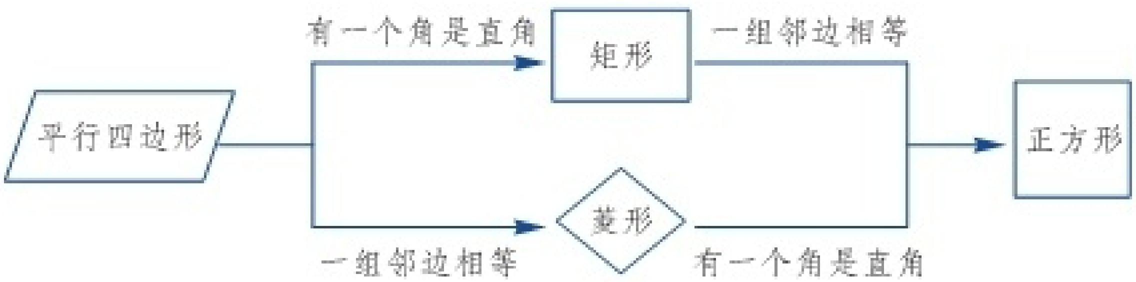


图 2-58

可以知道：

> 正方形的四条边都相等，四个角都是直角.
> 正方形的对角线相等，且互相垂直平分.

由于正方形既是矩形，又是菱形，因此

> 正方形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.
> 正方形是轴对称图形，两条对角线所在直线，以及过每一组对边中点的直线都是它的对称轴.

例 1 如图 2-59，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 上任意一点，过点 D 作 $DF \perp DE$ 交 BC 的延长线于点 F.

求证：$DE = DF$.

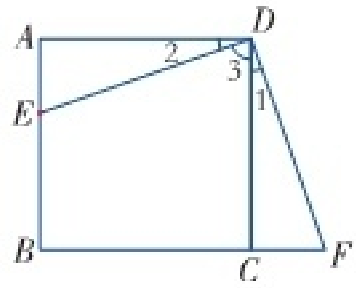


图 2-59

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ $AD = CD$，$\angle A = \angle DCF = 90°$.

$\because$ $DF \perp DE$，

$\therefore$ $\angle EDF = 90°$，即 $\angle 1 + \angle 3 = 90°$，

又 $\because$ $\angle 2 + \angle 3 = 90°$，

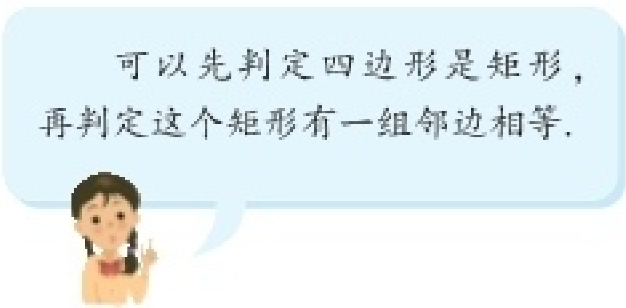
$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

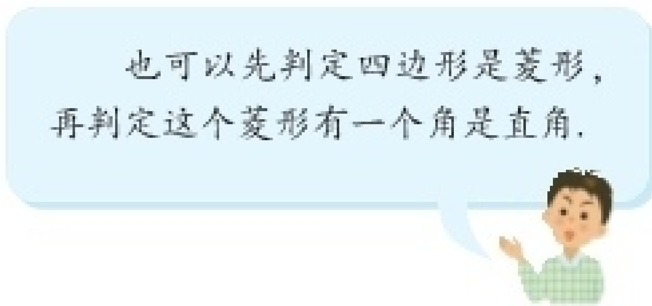
$\therefore$ $\triangle AED \cong \triangle CFD$（ASA）.

$\therefore$ $DE = DF$.

说一说

观察示意图 2-58，说一说如何判断一个四边形是正方形？





例 2 如图 2-60，已知点 A'，B'，C'，D'分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA' = BB' = CC' = DD'$.

求证：四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

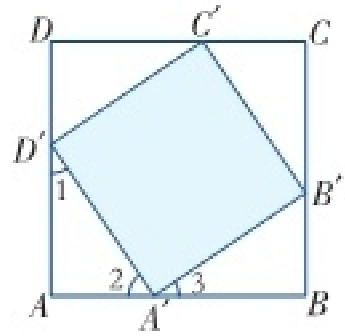


图 2-60

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$.

又 $\because$ $AA' = BB' = CC' = DD'$，

$\therefore$ $D'A = A'B = B'C = C'D$.

又 $\because$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$，

$\therefore$ $\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$.

$\therefore$ $A'D' = B'A' = C'B' = D'C'$.

$\therefore$ 四边形 $A'B'C'D'$是菱形.

又∵　$\angle 1=\angle 3$，$\angle 1+\angle 2=90°$，

∴　$\angle 2+\angle 3=90°$.

∴　$\angle D'A'B'=90°$.

∴　四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

练习

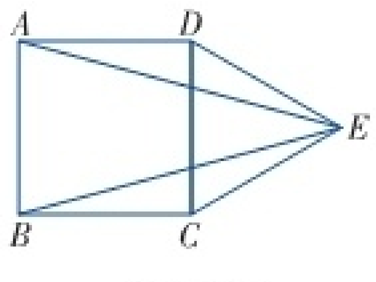
1. 已知正方形的一条对角线长为 4 cm，求它的边长和面积.

2. 如果一个矩形的两条对角线互相垂直，那么这个矩形一定是正方形吗？为什么？

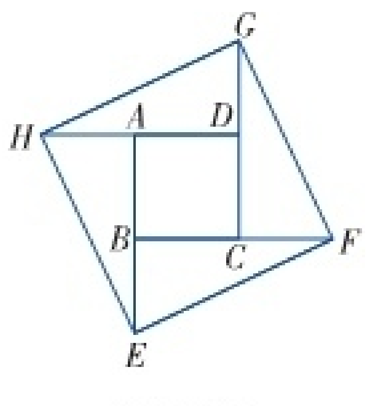
习题 2.7

A 组

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧作等边$\triangle DCE$，求$\angle AEB$ 的度数.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

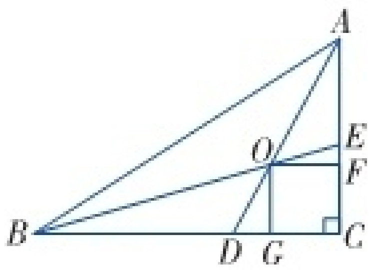
2. 如图，将正方形 $ABCD$ 的各边 AB，BC，CD，DA 顺次延长至 E，F，G，H，且使$BE=CF=DG=AH$.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

B 组

3. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，两锐角的平分线 AD，BE 相交于点 O，$OF\perp AC$ 于点 F，$OG\perp BC$ 于点 G.

求证：四边形 $OGCF$ 是正方形.



(第 3 题图)

IT教室

用计算机验证成中心对称的两个图形的性质

1. 打开“几何画板”，选择工具栏中的【多边形工具】，作任意的一个四边形 $ABCD$. 选择工具栏中的【点工具】，在四边形 $ABCD$ 外作一点 O.

2. 点击点 O，选择菜单【变换】中的【标记中心】，使点 O 为旋转中心.

3. 选中四边形 $ABCD$ 和点 O，选择菜单【变换】中的【旋转】，在弹出的对话框中输入 180，点击【旋转】按钮，得到四边形 $A'B'C'D'$，如图 1 所示.

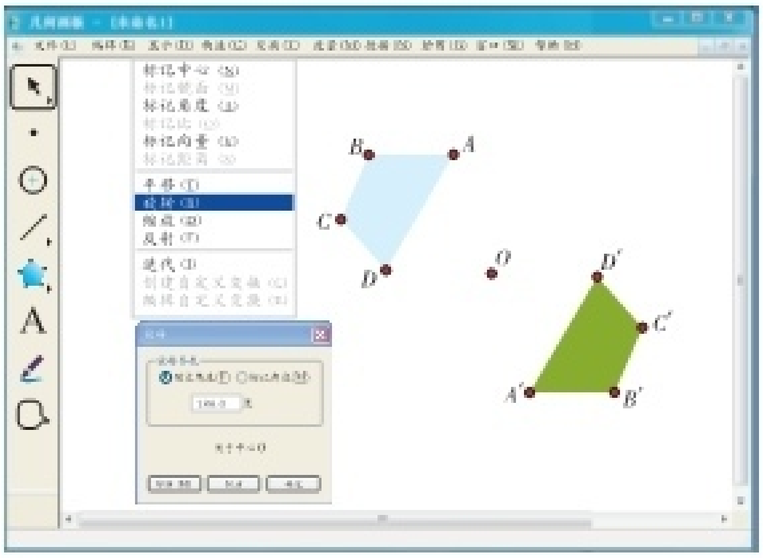


图 1

4. 分别连接 AA'，BB'，CC' 和 DD'，如图 2，这些线段交于一点吗？交于哪一点？

5. 任意拖动点 A 改变四边形 $ABCD$ 的形状，四边形 $A'B'C'D'$ 的形状也相应发生变化了吗？AA'，BB'，CC' 和 DD' 这 4 条线段仍相交于一点吗？

6. 分别测量 AO 和 $A'O$ 的长度，它们的长度有什么关系？BO 和 $B'O$，CO 和 $C'O$，DO 和 $D'O$ 呢？

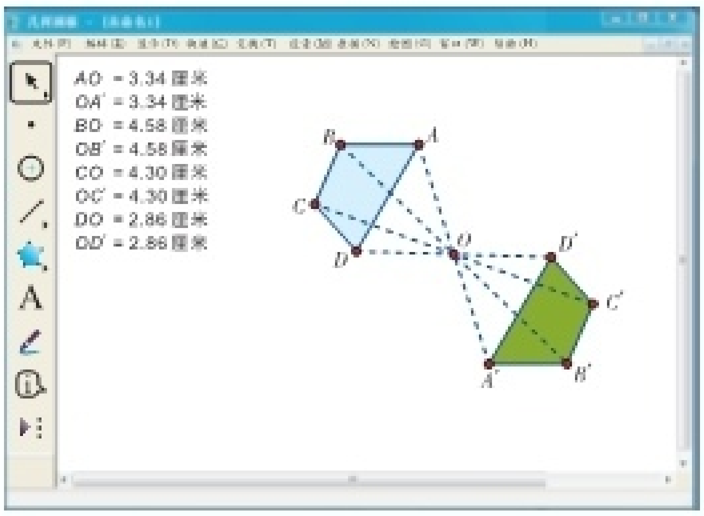


图 2

小结与复习

回顾

1. n 边形内角和公式是什么？这个公式是如何推导出来的？

2. n 边形外角和是多少？

3. 平行四边形有哪些性质？怎样判定一个四边形为平行四边形？

4. 什么样的图形叫作成中心对称？什么样的图形叫作中心对称图形？它们二者有何区别与联系？

5. 三角形中位线定理是什么？

6. 矩形、菱形、正方形各具有哪些性质，如何判定一个四边形为矩形、菱形、正方形呢？

本章知识结构

注意

1. 平行四边形的性质与判定是本章的重点，注意从边、角、对角线等方面来分析平行四边形的特征. 矩形、菱形、正方形均为特殊的平行四边形，图形越特殊，它的性质就越多，注意体会一般与特殊的关系.

2. 成中心对称是对两个图形说的，它表示两个图形之间的对称关系，中心对称图形是对一个图形说的，它表示某个图形的特征.

3. 对特殊的四边形，还要注意从对称性的角度把握其特征，并领会它们的内在联系与区别.

4. 注意体会本章中的互逆命题，如平行四边形、矩形、菱形的性质和判定定理等.

复习题 2

A 组

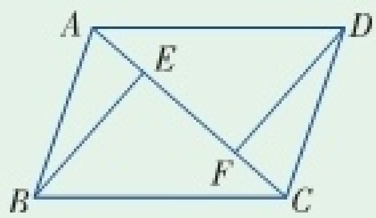
1. （1）是否存在一个多边形，它的每个内角都等于相邻外角的 4 倍？

（2）是否存在一个多边形，它的每个外角都等于相邻内角的 4 倍？

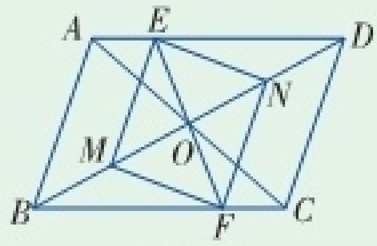
2. 填写下表，在空格中用“√”表示图形具有的性质.

图形＼性质	对边相等	对边平行	四边相等	对角线相等	对角线互相垂直	对角线互相平分	对角相等
平行四边形							
矩　形							
菱　形							
正方形							

3. 如图，点 E，F 是▱$ABCD$ 对角线 AC 上的点，$CE=AF$，线段 BE 与 DF 有怎样的关系？



（第 3 题图）

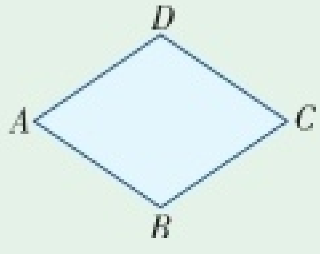


（第 4 题图）

4. 如图，▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O，EF 经过点 O，分别与边 AD，BC 相交于点 E，F，点 M，N 分别是线段 OB，OD 的中点.

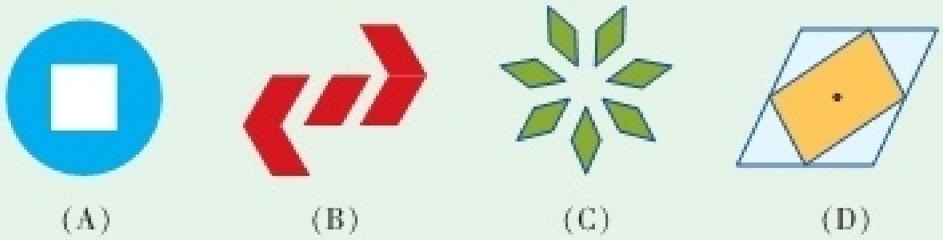
求证：四边形 $EMFN$ 是平行四边形.

5. 作出菱形 $ABCD$ 关于 C 点成中心对称的图形.

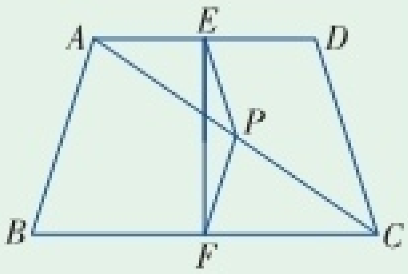


（第 5 题图）

6. 下列图形中不是中心对称图形的有（　　）



(第 6 题图)



(第 7 题图)

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 AC 的中点，E，F 分别是 AD，BC 的中点，$AB=DC$，$\angle PEF=18°$，求 $\angle EPF$ 的度数.

8. 设矩形的一条对角线长为 2 cm，两条对角线组成的对顶角中，有一组是 120°，求矩形的周长.

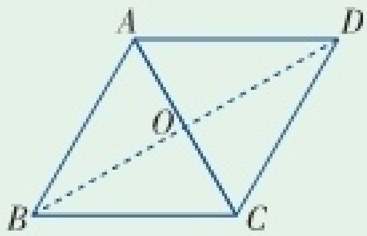
9. 两条平行线被第三条直线所截，两组内错角的平分线相交所成的四边形是矩形吗？为什么？

10. 如图，把边长为 2 cm 的等边 $\triangle ABC$ 绕边 AC 的中点 O 旋转 180°，得到 $\triangle CDA$.

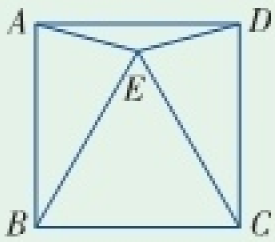
（1）四边形 $ABCD$ 是什么样的四边形？试说明理由.

（2）求四边形 $ABCD$ 的两条对角线的长度.

（3）求四边形 $ABCD$ 的面积.



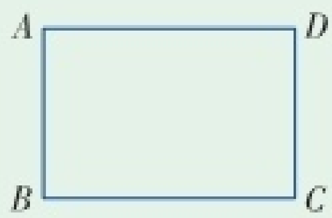
(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle EBC$ 是等边三角形，求 $\angle AED$.

B 组

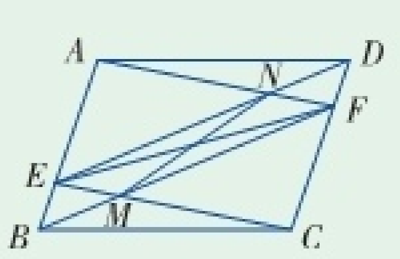


(第 12 题图)

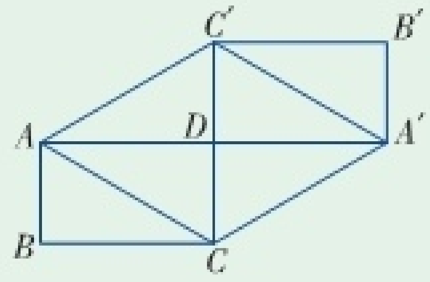
12. 如图为矩形 $ABCD$，一条直线将该矩形分割成两个多边形，若这两个多边形的内角和分别为 M 和 N，则 $M+N$ 不可能是（　　）

（A）360°　（B）540°　（C）720°　（D）630°

13. 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，CD 上的一点，且 $BE=DF$. BF 与 CE 相交于点 M，DE 与 AF 相交于点 N. EF 与 MN 互相平分吗？为什么？



（第 13 题图）

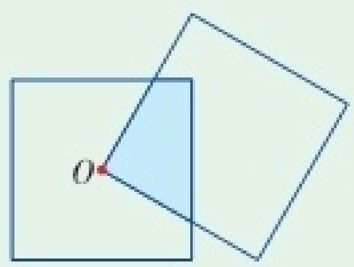


（第 14 题图）

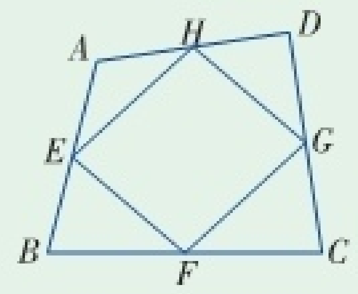
14. 如图，矩形 $ABCD$ 和矩形 $A'B'C'D$ 关于点 D 成中心对称.

求证：四边形 $ACA'C'$ 是菱形.

15. 如图，两个边长为 2 的正方形重叠在一起，O 是其中一个正方形的中心，求阴影部分的面积.



（第 15 题图）

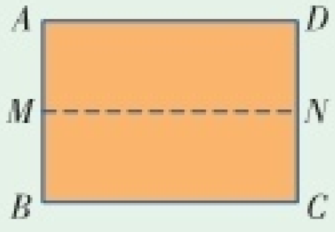


（第 16 题图）

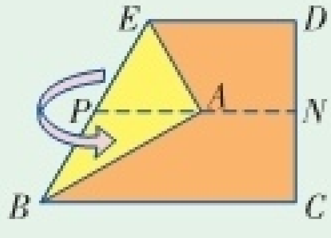
16. 如图，已知 E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点，则四边形 $EFGH$ 是什么四边形？若把条件中的四边形 $ABCD$ 依次改为矩形、菱形、正方形，其他条件不变，则所得的四边形 $EFGH$ 是什么四边形？试说明理由.

Ⓒ 组

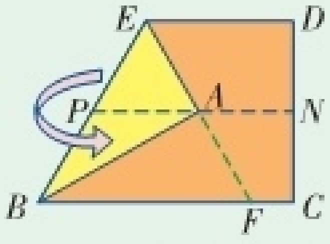
17. 准备一张 A4 的纸按下图操作：



（1）把矩形 $ABCD$ 对折，得折痕 MN.



（2）把 A 折向 MN，得 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$.



（3）沿线段 EA 折叠，得到另一条折痕 EF，展开后可得等边三角形 EBF.

你能说出按上述步骤可以折出一个等边三角形的道理吗？

平面图形的镶嵌

观察一些地板的图案（如图 1），我们发现它们是由正方形或者矩形的地砖铺成的.

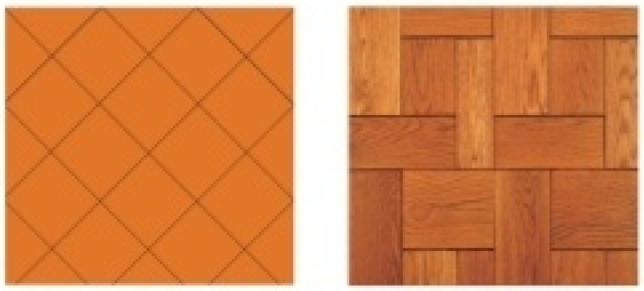


图1

像用地砖铺地一样，用形状、大小完全相同的一种或几种平面图形进行拼接，彼此之间不留空隙、不重叠地铺成一片，这就是平面图形的镶嵌．那么什么样的平面图形能够进行镶嵌呢？

操作步骤

1. 成立研究小组，确定研究目标.

2. 确定研究步骤.

（1）了解教室、自己家里的房间、人行道或商场等地面是用什么形状的地砖铺成的，各条边长是多少，每个拼接点处有几个角.

（2）对搜集的情况进行分类，用纸板剪出相应的图形进行拼摆，用文字记录操作结果.

（3）分析拼摆成功的方案，这与拼接点处的角的大小有什么关系吗？

（4）撰写研究报告，向全班同学展示研究成果.

以小组为单位，在老师的组织、指导下，依照上述步骤，完成探索研究活动，并思考下列问题.

做一做

1. 用纸板分别剪一些形状及大小完全相同的等边三角形、正方形、正五边形、正六边形，用其中的一种正多边形拼一拼，看能否镶嵌成平面图案，并与同伴交流.

2. 用纸板任意剪一些形状、大小完全相同的三角形、四边形（如图 2），用其中的一种纸板做试验拼一拼，看能否镶嵌成平面图案，并与同伴交流.

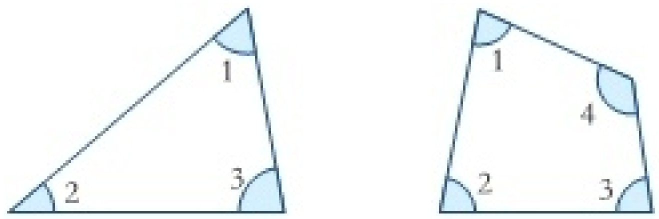


图 2

想一想

1. 观察图 3，全等的正六边形能够进行镶嵌，正六边形的每个内角是多少度？在一个顶点处的三个正六边形，分别有一个内角，它们彼此相邻，这三个内角的和是多少度？

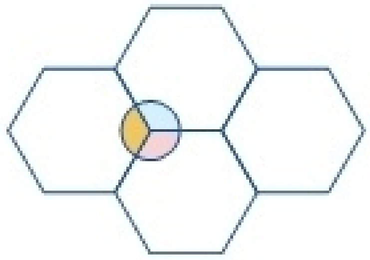


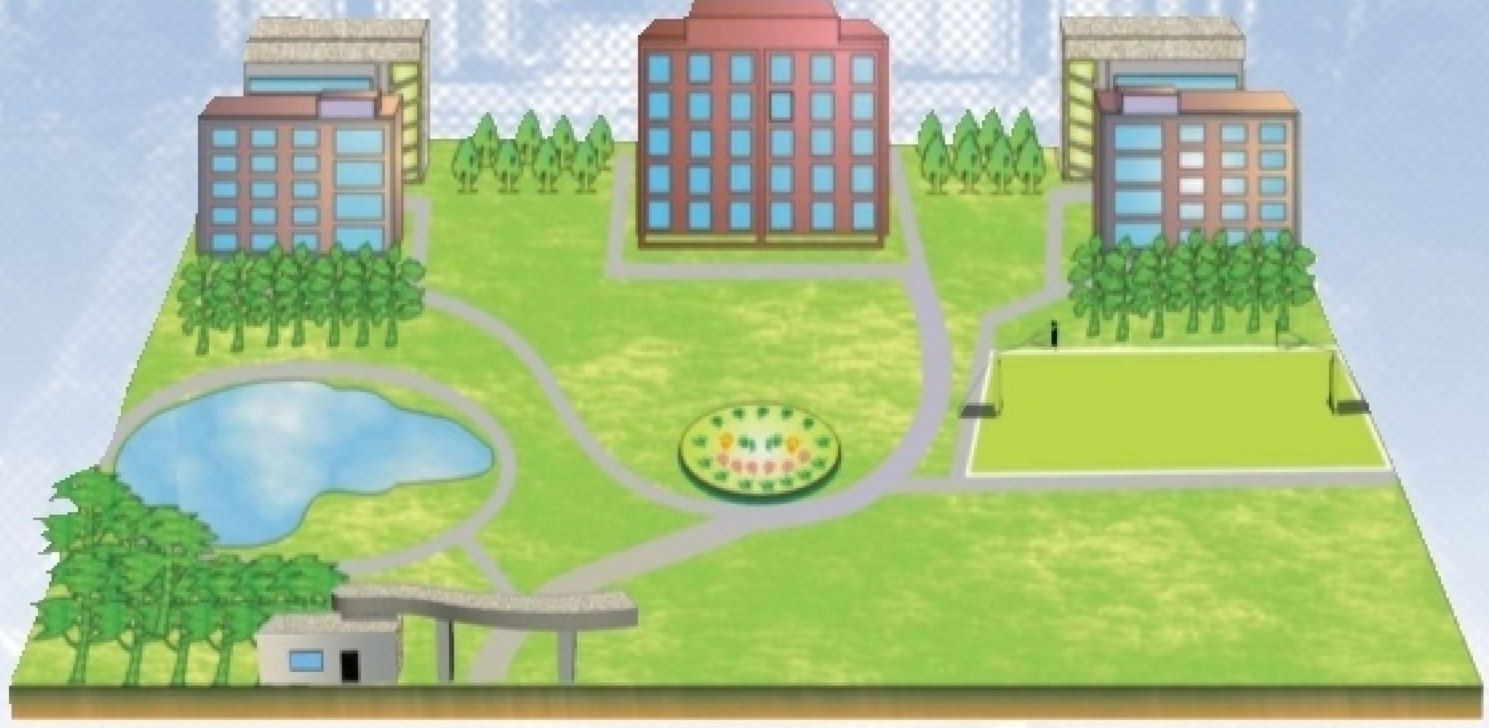
图 3

2. 事实上，在拼接某种多边形时，如果能在每个拼接点处恰好拼成周角，即 360°，那么这个多边形可以进行镶嵌. 想一想，全等的正五边形能进行镶嵌吗？

拓　展

1. 用剪好的正多边形中的两种纸板做试验拼一拼，看哪两种正多边形纸板能组合镶嵌成平面图案，并把结果列成表格形式.

2. 搜集并参考一些镶嵌图案，运用三角形、四边形或正六边形进行简单的镶嵌设计. 将设计过程中最精彩之处写进总结报告，与同学分享.



第3章

图形与坐标

在生活中，我们经常需要确定物体的位置，而利用有序数对来描述位置是最常用的方法之一.

那么如何用有序数对来表示如上图的校园建筑物的位置呢？这需要构造平面直角坐标系.

本章我们将学习如何构造平面直角坐标系，并借助平面直角坐标系来表示平面内的点、简单图形以及图形变换等.

3.1 平面直角坐标系

说一说

生活中，我们常常遇到描述各种物体的位置，结合图 3-1 说一说，如何确定李亮同学在教室里的座位呢？

图 3-1

从上面的例子可以看到，为了确定物体在平面上的位置，我们经常用“第 4 组、第 2 排”这样含有两个数的用语来确定物体的位置. 为了使这种方法更加简便，我们可以用一对有顺序的实数(简称为有序实数对)来表示 . 例如，李亮在教室里的座位可以简单地记作(4，2).

动脑筋

怎样用有序实数对来表示平面内点的位置呢？

从李亮座位的例子可以看到，第 4 组是从横的方向来数的，第 2 排是从纵的方向来数的. 这启发我们，为了用有序实数对表示平面内的一个点，可以在平面内画两条互相垂直的数轴，其中一条叫**横轴**（abscissa axis，通常称为 x

轴），另一条叫纵轴（ordinate axis，通常称为 y 轴），它们的交点 O 是这两条数轴的原点. 通常，我们取横轴向右为正方向，纵轴向上为正方向，横轴与纵轴的单位长度通常取成一致（有时也可以不一致），这样建立的两条数轴构成平面直角坐标系①（orthogonal coordinate system），记作 Oxy，如图 3-2 所示.

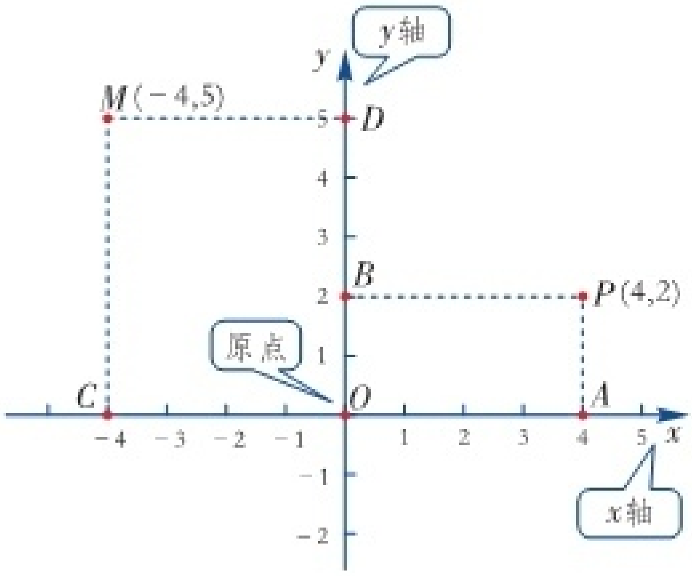


图 3-2

例如，在图 3-2 中，为了用有序实数对表示点 M，我们过点 M 作 x 轴的垂线，垂足为点 C，x 轴上的点 C 表示 -4；再过点 M 作 y 轴的垂线，垂足为点 D，y 轴上的点 D 表示 5，于是（-4，5）就表示了点 M. 我们把（-4，5）叫作点 M 的坐标（coordinate），其中 -4 叫作横坐标（abscissa），5 叫作纵坐标（ordinate）.

反之，为了指出坐标为（4，2）的点，我们在 x 轴上找到表示 4 的点 A，过点 A 作 x 轴的垂线；再在 y 轴上找到表示 2 的点 B，过点 B 作 y 轴的垂线，这两条垂线相交于点 P，则点 P 就是坐标为（4，2）的点.

综上所述，**在建立了平面直角坐标系后，平面上的点与有序实数对一一对应.**

在平面直角坐标系中，两条坐标轴(即横轴和纵轴)把平面分成如图 3-3 所示的Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个区域，我们把这四个区域分别称为第一，二，三，四象限，坐标轴上的点不属于任何一个象限.

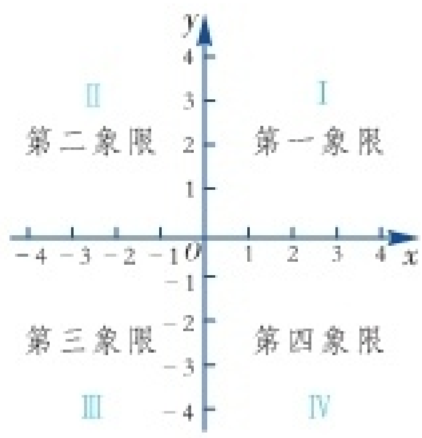


图 3-3

想一想，原点 O 的坐标是什么？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特征？

① 平面直角坐标系简称为直角坐标系.

例 1 如图 3-4，写出平面直角坐标系中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.

解 所求各点的坐标为：$A(3,\ 4)$，$B(-4,\ 3)$，$C(-3,\ 0)$，$D(-2,\ -4)$，$E(0,\ -3)$，$F(3,\ -3)$.

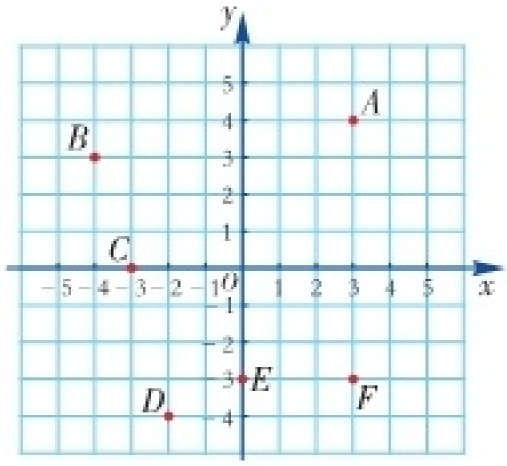


图 3-4

例 2 在平面直角坐标系中，描出下列各点，并指出它们分别在哪个象限.

$A(5,\ 4)$，$B(-3,\ 4)$，$C(-4,\ -1)$，$D(2,\ -4)$.

解 如图 3-5，先在 x 轴上找到表示 5 的点，再在 y 轴上找出表示 4 的点，过这两个点分别作 x 轴，y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A. 类似地，其他各点的位置如图所示.

点 A 在第一象限，点 B 在第二象限，点 C 在第三象限，点 D 在第四象限.

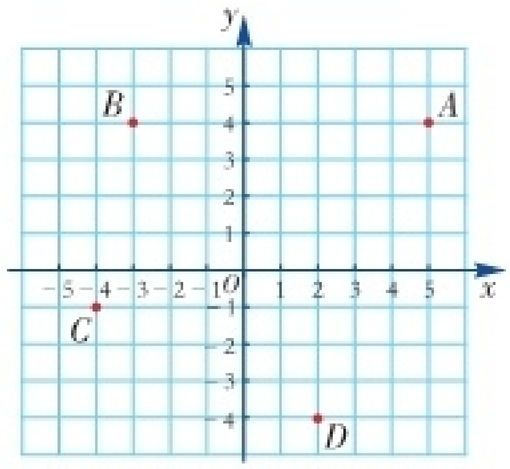


图 3-5

做一做

结合例 1、例 2 的解答，试说出平面直角坐标系中四个象限的点的坐标有什么特征，并填写下表：

点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限		
在第二象限		
在第三象限		
在第四象限		

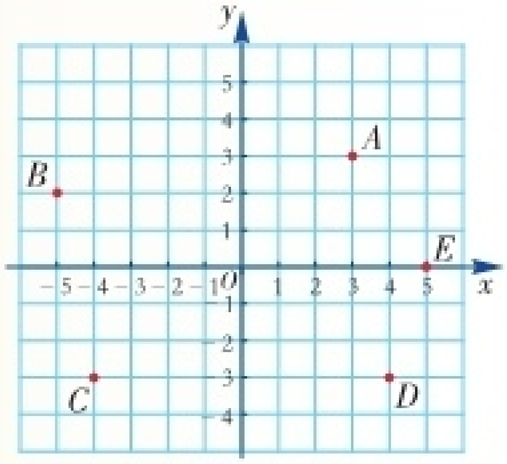
练习

1. 如图，在平面直角坐标系中，

(1) 写出点 A，B，C，D，E 的坐标；

(2) 描出点 $P(-2, -1)$，$Q(3, -2)$，$S(2, 5)$，$T(-4, 3)$，分别指出各点所在的象限.

2. 在平面直角坐标系中，已知点 P 在第四象限，距离 x 轴 2 个单位长度，距离 y 轴 3 个单位长度，则点 P 的坐标为________.



(第 1 题图)

动脑筋

如图 3-6 是某中学的校区平面示意图（一个方格的边长代表 1 个单位长度），试建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示校门、图书馆、花坛、体育场、教学大楼、国旗杆、实验楼和体育馆的位置.

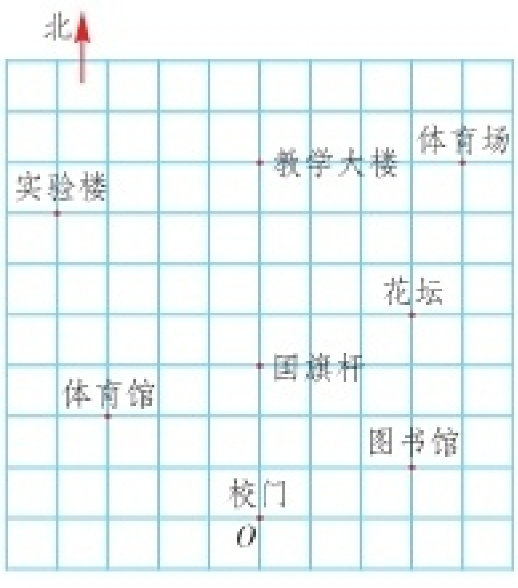


图 3-6

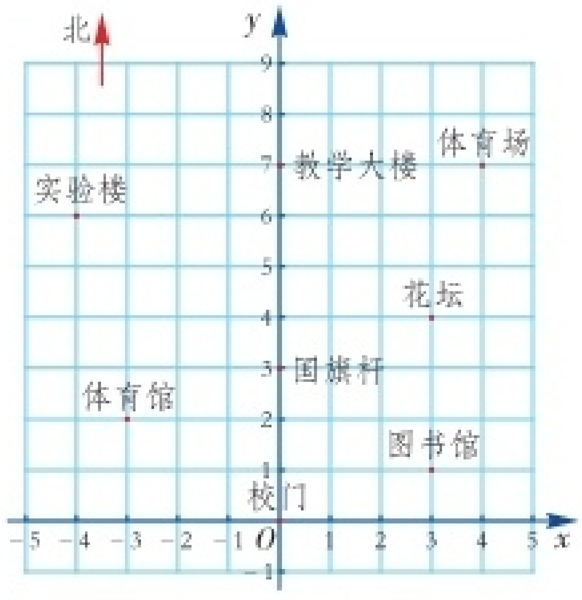


图 3-7

如图 3-7 所示，以校门所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，建立平面直角坐标系.

校门的位置为 (0, 0)，图书馆的位置为 (3, 1)，花坛的位置为 (3, 4)，

体育场的位置为（4，7），教学大楼的位置为（0，7），国旗杆的位置为（0，3），实验楼的位置为（-4，6），体育馆的位置为（-3，2）．

做一做

若以国旗杆所在位置为原点建立平面直角坐标系，则校区内各建筑物的坐标会发生变化吗？试写出此时各点的坐标．

例 3 根据以下条件画一幅示意图，标出学校、书店、电影院、汽车站的位置．

（1）从学校向东走 500 m，再向北走 450 m 到书店．

（2）从学校向西走 300 m，再向南走 300 m，最后向东走 50 m 到电影院．

（3）从学校向南走 600 m，再向东走 400 m 到汽车站．

解 如图 3-8，以学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴，y 轴的正方向，建立平面直角坐标系，规定 1 个单位长度代表 100 m 长．

根据题目条件，点 A（5，4.5）是书店的位置，点 B(-2.5，-3）是电影院的位置，点 C(4，-6）是汽车站的位置．

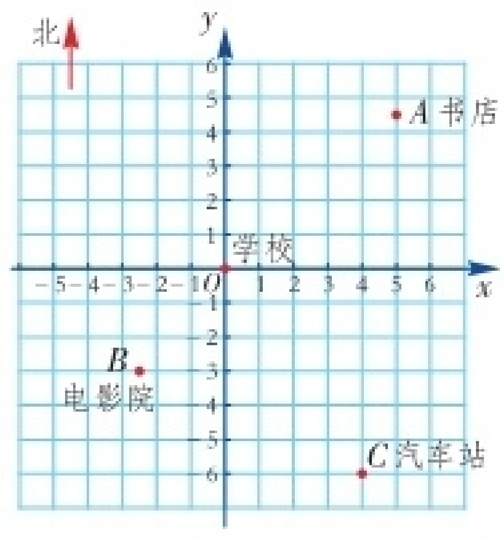


图 3-8

在日常生活中，除了用平面直角坐标系刻画物体之间的位置关系外，有时还可借助方向和距离（或称方位）来刻画两物体的相对位置．

动脑筋

（1）如图 3-9，李亮家距学校 1 000 m，如何用方向和距离来描述李亮家相对于学校的位置？

（2）反过来，学校相对于李亮家的位置怎样描述呢？

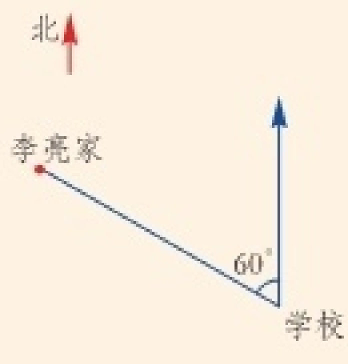


图 3-9

李亮家在学校的北偏西 60°的方向上，与学校的距离为 1 000 m；反过来，学校在李亮家南偏东 60°的方向上，与李亮家的距离为 1 000 m.

我们把北偏西 60°，南偏东 60°这样的角称为**方位角**.

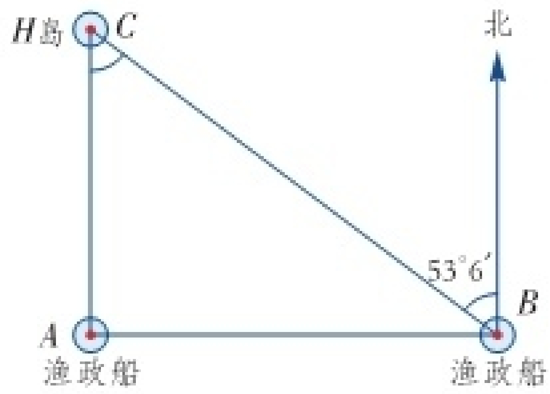


图 3–10

例 4 如图 3–10，12 时我渔政船在 H 岛正南方向，距 H 岛 30 海里的 A 处，渔政船以每小时 40 海里的速度向东航行，13 时到达 B 处，并测得 H 岛的方向是北偏西 $53°6'$. 那么此时渔政船相对于 H 岛的位置怎样描述呢？

分析 如图 3–10，设 H 岛所在处为 C，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle CAB=90°$，利用勾股定理可以求出 BC 间的距离.

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $AC=30$ 海里，$AB=40$ 海里，$\angle CAB=90°$，

$\therefore$ $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50$（海里）.

由于在点 B 处测得 H 岛在北偏西 $53°6'$的方向上，

则 $\angle BCA=53°6'$.

故此时，渔政船在 H 岛南偏东 $53°6'$的方向，距 H 岛 50 海里的位置.

练习

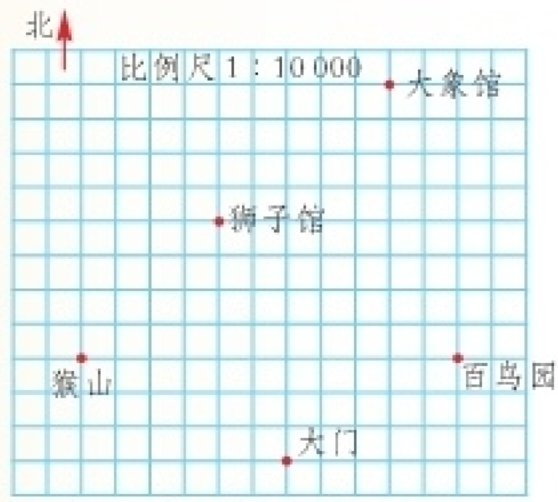
1. 如图是某动物园的部分平面示意图，试建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示大门、百鸟园、大象馆、狮子馆和猴山的位置.

2. 如右图，通过测量（用刻度尺和量角器）回答下列问题：

（1）猴山在大门的北偏西______°的方向上，到大门的距离约为______m.

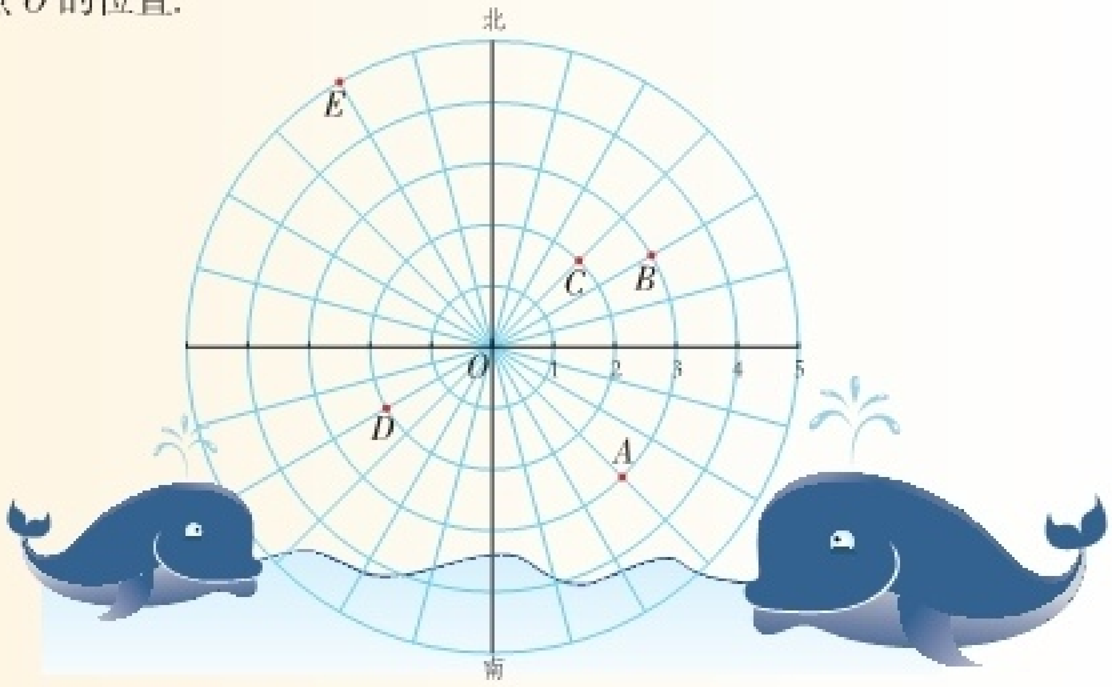
（2）百鸟园在狮子馆的南偏东______°的方向上，到狮子馆的距离约为______m.

（3）大象馆在大门的北偏东______°的方向上，到大门的距离约为______m.



（第 1 题图）

3. 如图，一艘海洋科考船在 O 点用雷达发现了几群鲸鱼，规定 1 个单位长度代表 100 m 长，试用适当的方法来表示 A，B，C，D，E 这 5 个目标鱼群相对于点 O 的位置.

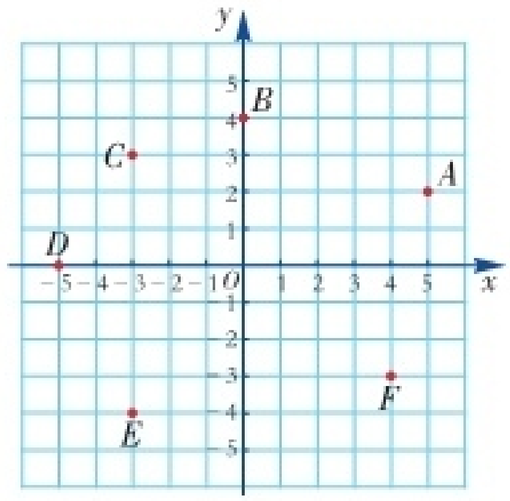


(第 3 题图)

习题 3.1

A 组

1. 如图，写出平面直角坐标系中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.



(第 1 题图)

2. 建立平面直角坐标系，描出下列各点，并指出它们分别在哪个象限或坐标轴上.

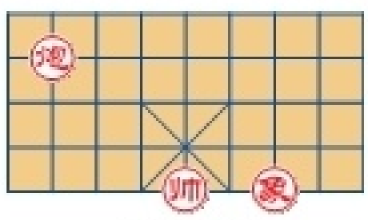
$A(1, 3)$，$B(-2, 1)$，$C(3, -4)$，

$D(-4, -2)$，$E(-3, 0)$，$F(0, -5)$.

3. 如图，象棋盘上若“帅”位于点 (1，-2)，“象”位于点 (3，-2)，则“炮”位于点 (   )

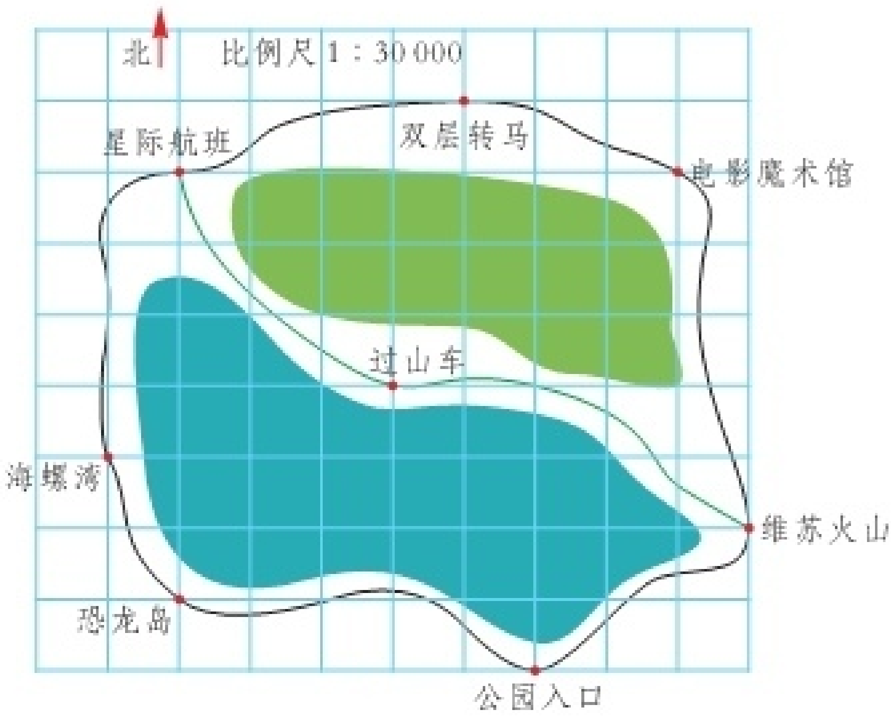
(A) (-1，1)　　(B) (-1，2)

(C) (-2，1)　　(D) (-2，2)



(第 3 题图)

4. 如图是某游乐公园的平面示意图，建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示各点的位置.



（第 4 题图）

5. 用量角器和刻度尺，结合上图回答下列问题：

（1）维苏火山在公园入口的北偏东 _____°的方向上，到入口的距离约为 _____m；

（2）过山车在电影魔术馆的南偏西 _____°的方向上，到电影魔术馆的距离约为 _____m；

（3）星际航班在过山车的北偏西 _____°的方向上，到过山车的距离约为 _____m.

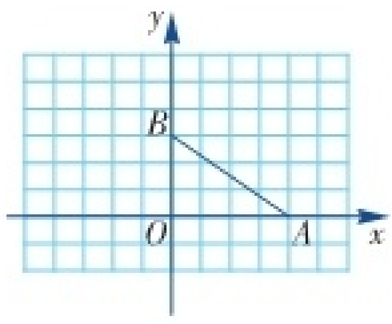
6. 根据以下条件画一幅示意图，标出校门、李明家、王强家、张英家的位置.

李明出校门向东走 200 m，再向北走 400 m 就到家了；王强出校门向西走 300 m，再向北走 450 m 也到家了；张英出校门向东走 300 m，再向南走 250 m 到家.

B 组

7. 你能判断点 $A\ (-1-a^2,\ 3+b^2)$ 是哪个象限的点吗？

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(4,\ 0)$，点 $B(0,\ 3)$，若有一个直角三角形与 Rt$\triangle AOB$ 全等，且与其共 OB 边，试写出这个直角三角形顶点的坐标.



（第 8 题图）

3.2 简单图形的坐标表示

动脑筋

如图 3-11，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6.

（1）如果以点 B 为原点，以 BC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么 y 轴是哪条直线？写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标.

（2）如果以正方形的中心为原点，建立平面直角坐标系，那么 x 轴和 y 轴分别是哪条直线？此时正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标分别是多少？

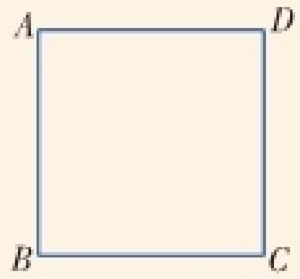


图 3-11

（1）如图 3-12，以点 B 为原点，分别以 BC，AB 所在直线为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，规定 1 个单位长度为 1，此时，点 B 的坐标为 (0，0).

因为 $AB=6$，$BC=6$，可得点 A，C，D 的坐标分别为 $A(0，6)$，$C(6，0)$，$D(6，6)$.

（2）如图 3-13，以正方形的中心 O 为坐标原点，分别以过正方形的中心且垂直两组对边的两条对称轴为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系.

此时，点 A，B，C，D 的坐标分别为 $A(-3，3)$，$B(-3，-3)$，$C(3，-3)$，$D(3，3)$.

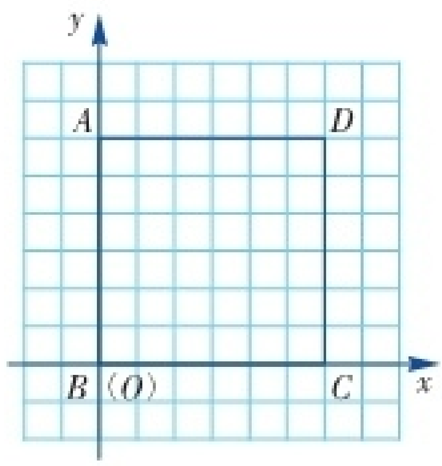


图 3-12

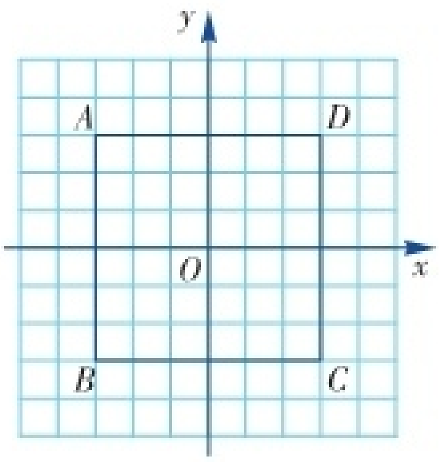


图 3-13

平面直角坐标系的构建不同，则点的坐标也不同. 在建立直角坐标系时，应使点的坐标简明.

例 1 如图 3-14，矩形 $ABCD$ 的长和宽分别为 8 和 6，试建立适当的平面直角坐标系表示矩形 $ABCD$ 各顶点的坐标，并作出矩形 $ABCD$.

图 3-14

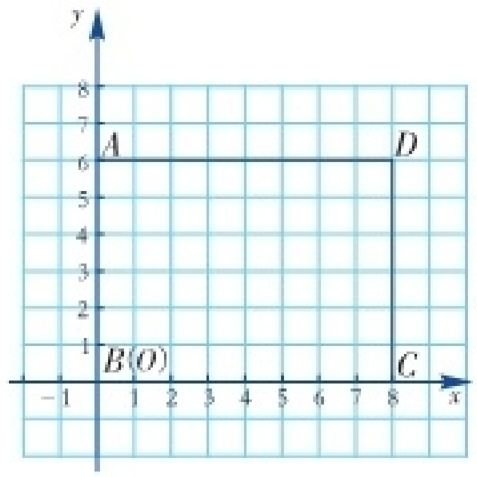


图 3-15

解 如图 3-15，以点 B 为坐标原点，分别以 BC，AB 所在直线为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系. 规定 1 个单位长度为 1.

点 B 的坐标为 (0, 0). 因为 $BC=8$，$AB=6$，可得点 A，C，D 的坐标分别为：$A(0,\ 6)$，$C(8,\ 0)$，$D(8,\ 6)$. 依次连接 A，B，C，D，则图 3-15 中的四边形就是所求作的矩形.

在例 1 中，还可以怎样建立平面直角坐标系？

例 2 图 3-16 是一个机器零件的尺寸规格示意图，试建立适当的平面直角坐标系表示其各顶点的坐标，并作出这个示意图.

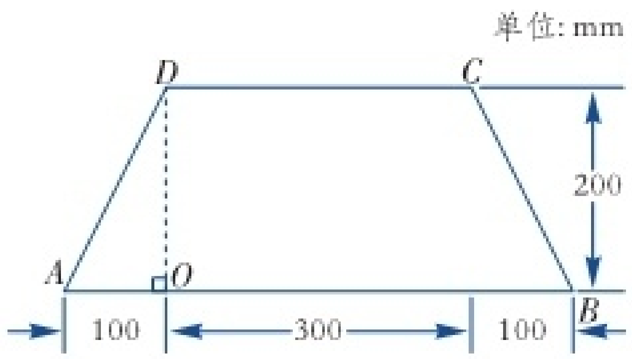


图 3-16

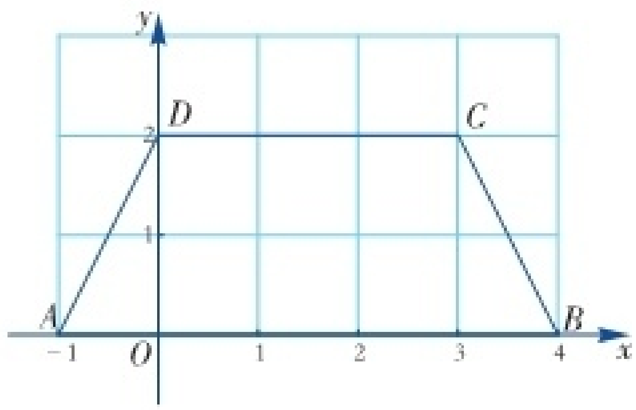


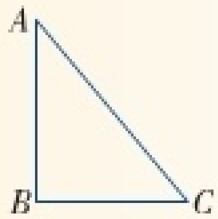
图 3-17

解 过点 D 作 AB 的垂线，垂足为点 O，以点 O 为原点，分别以 AB，DO 所在直线为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，如图 3-17.

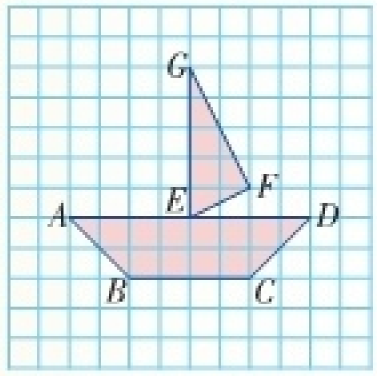
规定 1 个单位长度为 100 mm，则四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为：$A(-1,\ 0)$，$B(4,\ 0)$，$C(3,\ 2)$，$D(0,\ 2)$. 依次连接 A，B，C，D，则图 3-17 中的四边形 $ABCD$ 即为所求作的图形.

练习

1. 如图，Rt△ABC 的两直角边 AB，BC 的长分别为 6，5，试建立适当的平面直角坐标系来表示 Rt△ABC 各顶点的坐标.



(第 1 题图)



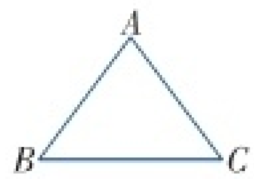
(第 2 题图)

2. 如图是在方格纸中画出的船，试建立适当的平面直角坐标系来表示它，并写出其各顶点的坐标.

习题 3.2

A 组

1. 如图，已知等腰三角形 ABC 的腰长 AB 为 5，底边 BC 的长为 6，试建立适当的平面直角坐标系来表示等腰三角形 ABC 各顶点的坐标.



(第 1 题图)

2. 在平面直角坐标系中描出下列各点，并将各组的点顺次连接起来.

(1) (4，1)，(9，1)，(9，5)，(4，5)，(4，1)；

(2) (4，5)，(9，5)，(6.5，7)，(4，5)；

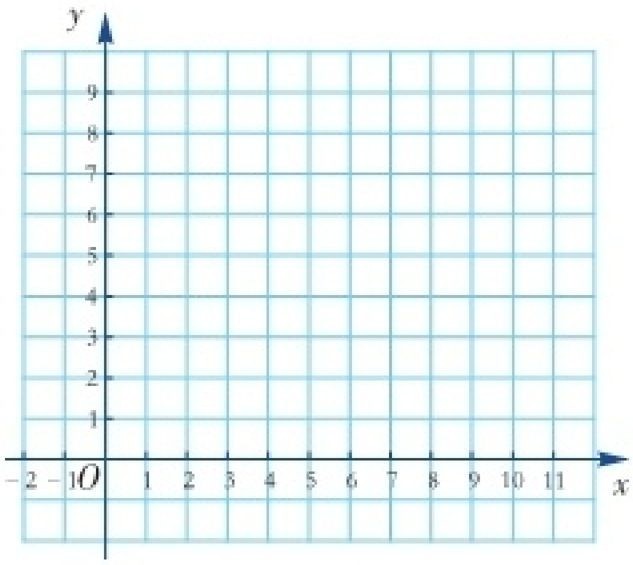
(3) (9，2)，(10，2)，(9，3)；

(4) (10，2)，(11，3)，(10，4)，(9，3)；

(5) (4，1)，(4，3)，(3，4)，(3，2)，(4，1)；

(6) (3，3)，(3，4)，(2，4)，(3，3).

观察所得的图形，你觉得它像什么？



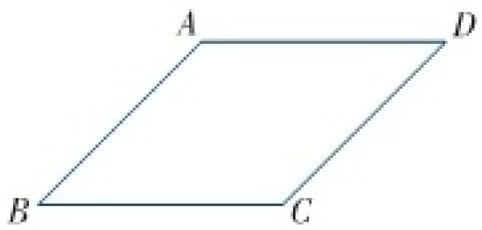
(第 2 题图)

B 组

3. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 6，$\angle ABC=45°$.

（1）试建立适当的平面直角坐标系表示该菱形，并写出其各顶点的坐标.

（2）若要计算出该菱形的面积，你有什么办法？



(第 3 题图)

4. 小芳想创作“X”图案，她在平面直角坐标系中描出下列各点：

$A(4,\ 1)$，$B(5,\ 2)$，$C(6,\ 3)$，$D(7,\ 4)$，$E(8,\ 5)$，$F(4,\ 5)$，$G(0,\ -1)$，$H(7,\ 2)$，$I(8,\ 1)$.

小芳能设计出“X”图案吗？若不能，哪个点的位置需要变化，如何变化？

3.3 轴对称和平移的坐标表示

动脑筋

如图 3-18，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为（3，2）.

（1）分别作出点 A 关于 x 轴，y 轴的对称点 A'，A''，并写出它们的坐标；

（2）比较：点 A 与 A' 的坐标之间有什么关系？点 A 与 A''呢？

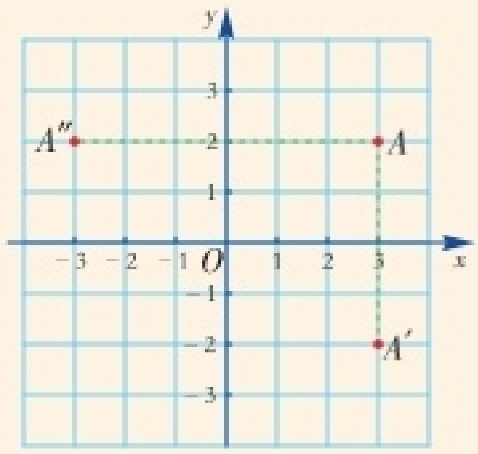


图 3-18

坐标变化

	横坐标	纵坐标
$A(3,2) \xleftrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}} A'(3,-2)$	不变	互为相反数
$A(3,2) \xleftrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}} A''(-3,2)$	互为相反数	不变

一般地，在平面直角坐标系中，点（a，b）关于 x 轴的对称点的坐标为（a，$-b$），关于 y 轴的对称点的坐标为（$-a$，b）.

做一做

如图 3-19，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2,4)$，$B(1,2)$，$C(5,2)$.

（1）作出$\triangle ABC$ 关于 y 轴的轴对称图形，并写出其顶点坐标；

（2）作出$\triangle ABC$ 关于 x 轴的轴对称图形，并写出其顶点坐标.

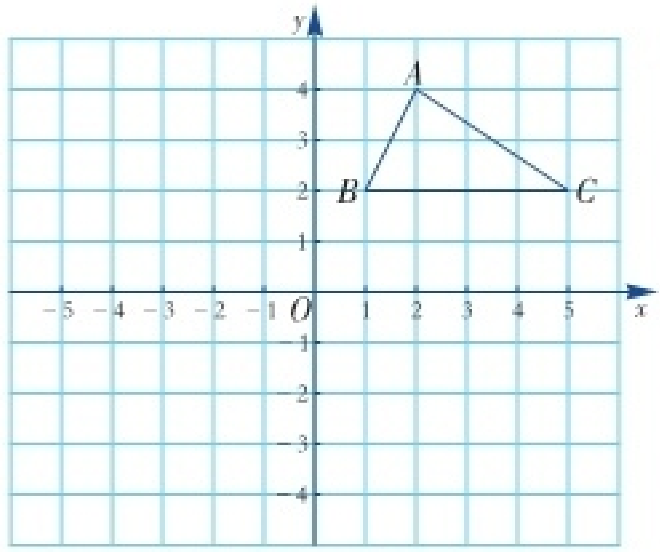


图 3–19

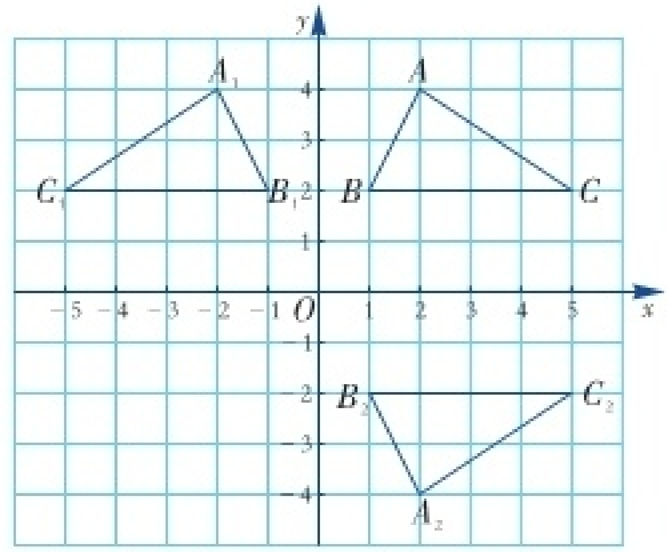


图 3–20

（1）如图 3–20，分别作出点 A，B，C 关于 y 轴的对称点 A_1，B_1，C_1，并连接这三点，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求作的图形. 此时其顶点坐标分别为 $A_1(-2,4)$，$B_1(-1,2)$，$C_1(-5,2)$.

（2）类似（1）的作法，可作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴的轴对称图形 $\triangle A_2B_2C_2$，其顶点坐标分别为 $A_2(2,-4)$，$B_2(1,-2)$，$C_2(5,-2)$.

例 1 如图 3–21，求出折线 $OABCD$ 各转折点的坐标以及它们关于 y 轴的对称点 O'，A'，B'，C'，D' 的坐标，并将点 O'，A'，B'，C'，D' 依次用线段连接起来.

解 折线 $OABCD$ 各转折点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(3,3)$，$C(3,5)$，$D(0,5)$，它们关于 y 轴的对称点的坐标是 $O'(0,0)$，$A'(-2,1)$，$B'(-3,3)$，$C'(-3,5)$，$D'(0,5)$. 将各点依次连接起来，得到图 3–22.

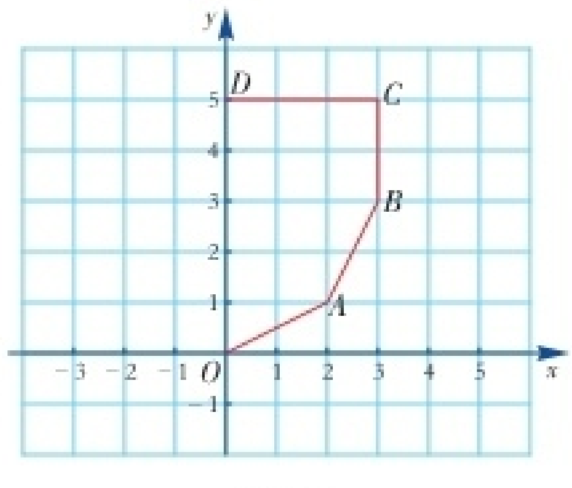


图 3–21

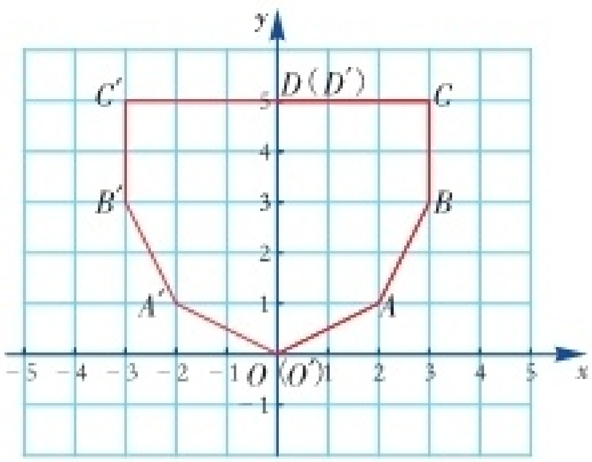
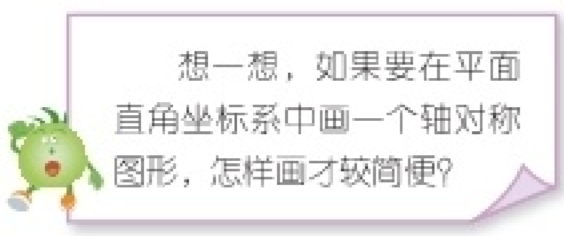


图 3–22



练习

1. 填空.

(1) 点 $B(2, -3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是________；

(2) 点 $A(-5, 3)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是________.

2. 已知矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-7, -2)$，$B(-7, -5)$，$C(-3, -5)$，$D(-3, -2)$，以 y 轴为对称轴作轴反射，矩形 $ABCD$ 的像为矩形 $A'B'C'D'$，求矩形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标.

3. (1) 如果点 $A(-4, a)$ 与点 $A'(-4, -2)$ 关于 x 轴对称，则 a 的值为________.

(2) 如果点 $B(-2, 2b+1)$ 与点 $B'(2, 3)$ 关于 y 轴对称，则 b 的值为________.

动脑筋

如图 3-23，在平面直角坐标系中，$A(1, 2)$ 分别沿坐标轴方向作以下变换，试作点 A 的像，并写出像的坐标.

(1) 点 A 向右平移 4 个单位，像为点 A_1；

(2) 点 A 向左平移 3 个单位，像为点 A_2；

(3) 点 A 向上平移 2 个单位，像为点 A_3；

(4) 点 A 向下平移 4 个单位，像为点 A_4.

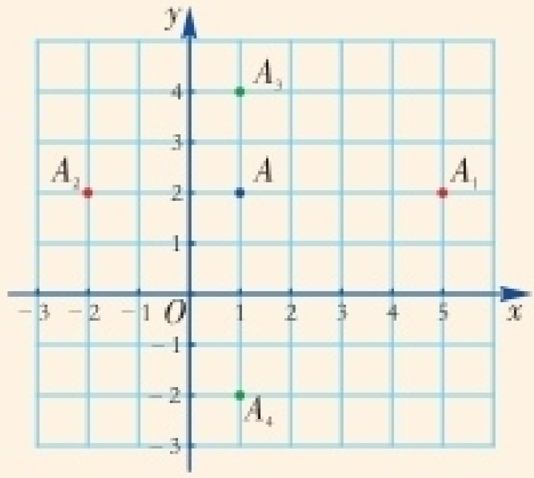


图 3-23

$A(1, 2)$ $\xrightarrow{\text{向右平移 4 个单位}}$ $A_1(5, 2)$

$A(1, 2)$ $\xrightarrow{\text{向左平移 3 个单位}}$ $A_2(-2, 2)$

$A(1, 2)$ $\xrightarrow{\text{向上平移 2 个单位}}$ $A_3(1, 4)$

$A(1, 2)$ $\xrightarrow{\text{向下平移 4 个单位}}$ $A_4(1, -2)$

坐标变化

横坐标	纵坐标
加 4	不变
减 3	不变
不变	加 2
不变	减 4

一般地，在平面直角坐标系中，将点 (a, b) 向右（或向左）平移 k 个单位，其像的坐标为 $(a+k, b)$（或 $(a-k, b)$）；将点 (a, b) 向上（或向下）平移 k 个单位，其像的坐标为 $(a, b+k)$（或 $(a, b-k)$）.

动脑筋

如图 3-24，线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(1, 1)$，$B(4, 4)$.

（1）将线段 AB 向上平移 2 个单位，作出它的像 $A'B'$，并写出点 A'，B'的坐标；

（2）若点 $C(x, y)$ 是平面内的任一点，在上述平移下，像点 $C'(x', y')$ 与点 $C(x, y)$ 的坐标之间有什么关系？

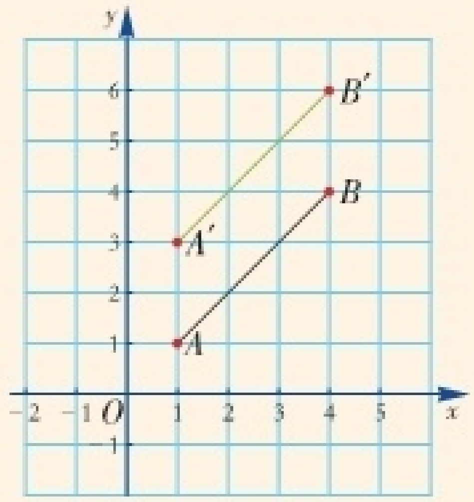


图 3-24

（1）将线段 AB 向上平移 2 个单位，则线段 AB 上每一个点都向上平移了 2 个单位，由点 A，B 的坐标可知其像的坐标是 $A'(1, 3)$，$B'(4, 6)$. 连接点 A'，B'，所得线段 $A'B'$即为所求作的像，如图 3-24.

（2）同理可求出，像点 C'与点 C 之间的坐标关系为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + 2. \end{cases}$$

例 2 如图 3-25，$\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(3, 3)$，$B(2, 1)$，$C(5, 1)$.

（1）将 $\triangle ABC$ 向下平移 5 个单位，作出它的像，并写出像的顶点坐标；

（2）将 $\triangle ABC$ 向左平移 7 个单位，作出它的像，并写出像的顶点坐标.

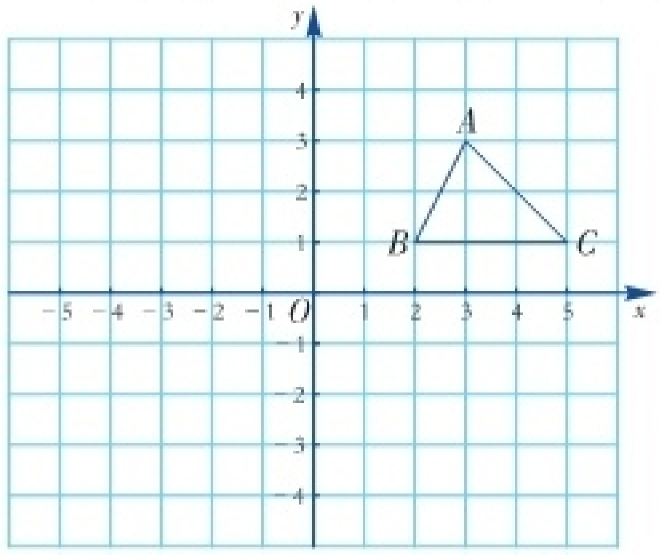


图 3-25

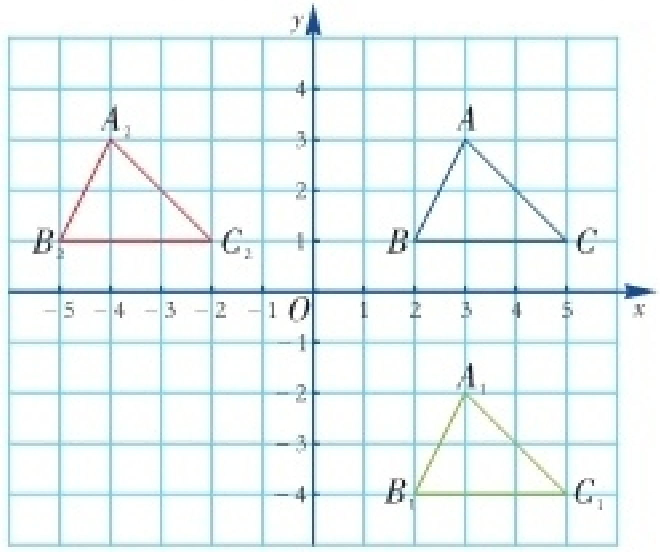


图 3-26

分析 根据平移的性质，将△ABC向下或向左平移k个单位，△ABC的每一个点都向下或向左平移了k个单位，求出顶点A，B，C的像的坐标，作出这些像点，依次连接它们，即可得到△ABC的像.

解 (1) 将△ABC向下平移5个单位，则横坐标不变，纵坐标减5，由点A，B，C的坐标可知其像的坐标分别是$A_1(3，-2)$，$B_1(2，-4)$，$C_1(5，-4)$，依次连接点A_1，B_1，C_1，即可得△ABC的像△$A_1B_1C_1$，如图3-26.

(2) 将△ABC向左平移7个单位，则横坐标减7，纵坐标不变，由点A，B，C的坐标可知其像的坐标分别是$A_2(-4，3)$，$B_2(-5，1)$，$C_2(-2，1)$，依次连接点A_2，B_2，C_2，即可得△ABC的像△$A_2B_2C_2$，如图3-26.

练习

1. 填空：

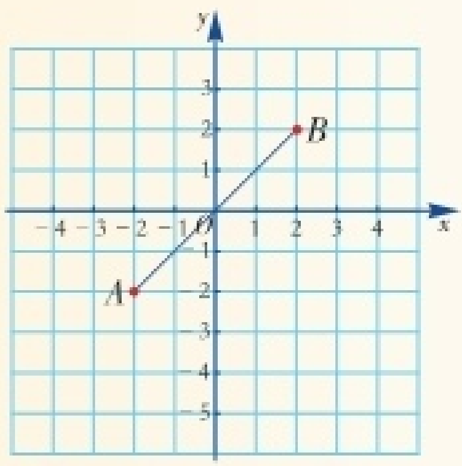
(1) 点$A(-1，2)$向右平移2个单位，它的像是点A'________；

(2) 点$B(2，-2)$向下平移3个单位，它的像是点B'________.

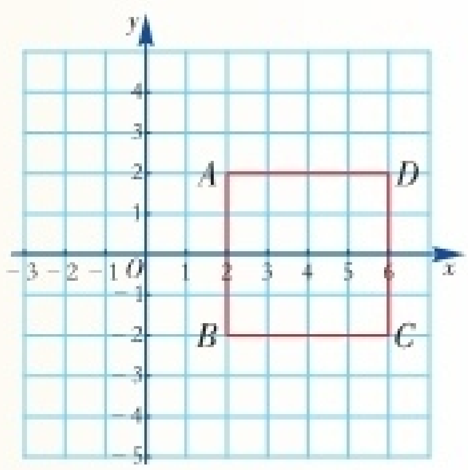
2. 如图，线段AB的两个端点坐标分别为$A(-2，-2)$，$B(2，2)$. 线段AB向下平移3个单位，它的像是线段$A'B'$.

(1) 试写出点A'，B'的坐标；

(2) 若点$C(x，y)$是平面内的任一点，在上述平移下，像点$C'(x'，y')$与点$C(x，y)$的坐标之间有什么关系？



(第2题图)



(第3题图)

3. 如图，正方形$ABCD$的顶点坐标分别为$A(2，2)$，$B(2，-2)$，$C(6，-2)$，$D(6，2)$，将正方形$ABCD$向左平移4个单位，作出它的像，并写出像的顶点坐标.

探究

如图 3-27，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(-4, -1)$，$B(-5, -3)$，$C(-2, -4)$. 将 $\triangle ABC$ 向右平移 7 个单位，它的像是 $\triangle A_1B_1C_1$；再向上平移 5 个单位，$\triangle A_1B_1C_1$ 的像是 $\triangle A_2B_2C_2$.

（1）分别写出 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$ 的顶点坐标；

（2）将 $\triangle ABC$ 作沿射线 AA_2 的方向的平移，移动的距离等于线段 AA_2 的长度，则 $\triangle ABC$ 的像是 $\triangle A_2B_2C_2$ 吗？

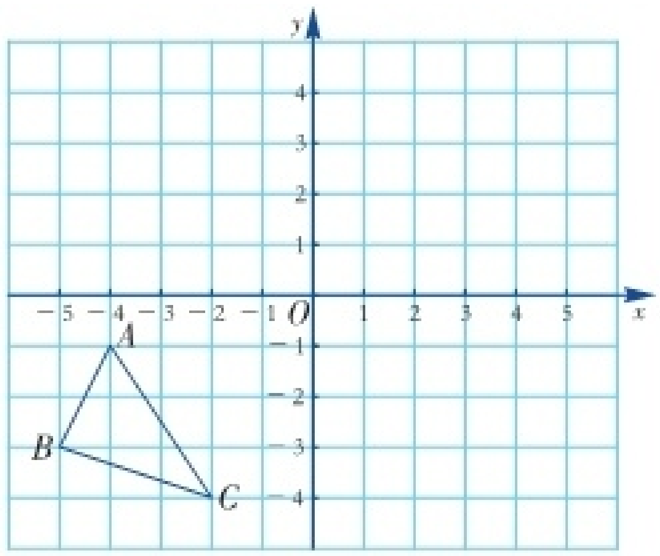


图 3-27

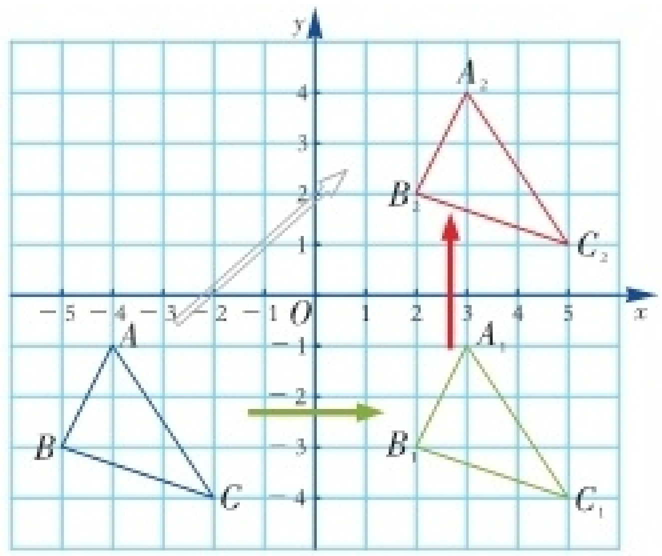


图 3-28

（1）$\triangle A_1B_1C_1$ 的顶点坐标分别为：$A_1(3, -1)$，$B_1(2, -3)$，$C_1(5, -4)$；$\triangle A_2B_2C_2$ 的顶点坐标分别为：$A_2(3, 4)$，$B_2(2, 2)$，$C_2(5, 1)$.

（2）在这个平移下，点 $A(-4, -1)$ 的像是点 $A_2(3, 4)$. 点 A_2 的横坐标是 $3=(-4)+7$，点 A_2 的纵坐标是 $4=(-1)+5$. 因此在这个平移下，平面内任一点 $P(x, y)$ 与其像点 $P'(x', y')$ 的坐标有如下关系：

$$\begin{cases} x'=x+7, \\ y'=y+5. \end{cases}$$

按照这个关系，点 $B(-5, -3)$ 的像点的坐标为 $(2, 2)$，从而点 B 的像点是 B_2；点 $C(-2, -4)$ 的像点的坐标为 $(5, 1)$，从而点 C 的像点是 C_2. 因此 $\triangle ABC$ 的像是 $\triangle A_2B_2C_2$，如图 3-28.

例3 如图 3-29，四边形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为 $A(1, 2)$，$B(3, 1)$，$C(5, 2)$，$D(3, 4)$.

将四边形 $ABCD$ 先向下平移 5 个单位，再向左平移 6个单位，它的像是四边形 $A'B'C'D'$. 写出四边形 $A'B'C'D'$的顶点坐标，并作出该四边形.

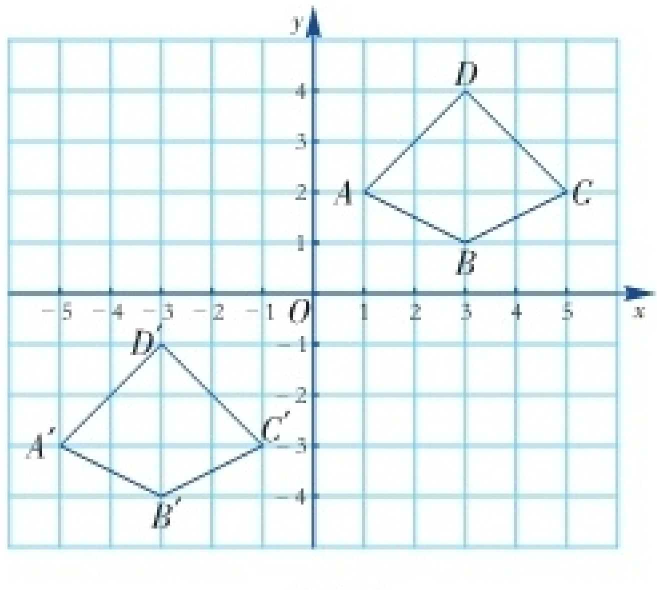


图 3-29

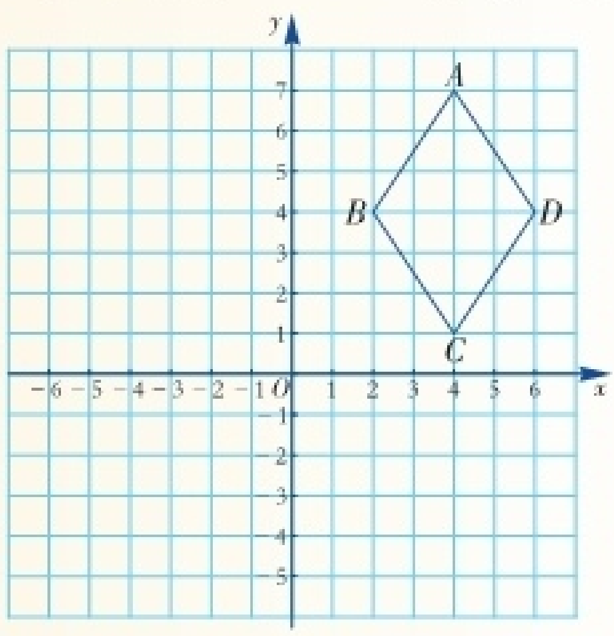
解 四边形 $ABCD$ 先向下平移 5 个单位，再向左平移 6 个单位，在这个平移下，平面内任一点 $P(x, y)$ 与其像点 $P'(x', y')$ 的坐标有如下关系：

$$\begin{cases} x' = x - 6, \\ y' = y - 5. \end{cases}$$

按照这个关系，由点 A，B，C，D 的坐标可知其像的坐标分别是 $A'(-5, -3)$，$B'(-3, -4)$，$C'(-1, -3)$，$D'(-3, -1)$. 依次连接点 A'，B'，C'，D'，即得四边形 $A'B'C'D'$，如图 3-29.

练习

如图，菱形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为 $A(4, 7)$，$B(2, 4)$，$C(4, 1)$，$D(6, 4)$. 将菱形 $ABCD$ 向下平移 3 个单位，它的像是菱形 $A'B'C'D'$. 写出菱形 $A'B'C'D'$的顶点坐标，并作出该图形. 将菱形 $A'B'C'D'$向左平移 6 个单位，它的像是菱形 $A''B''C''D''$，写出菱形 $A''B''C''D''$的顶点坐标，并作出该图形.



习题 3.3

A 组

1. 填空：

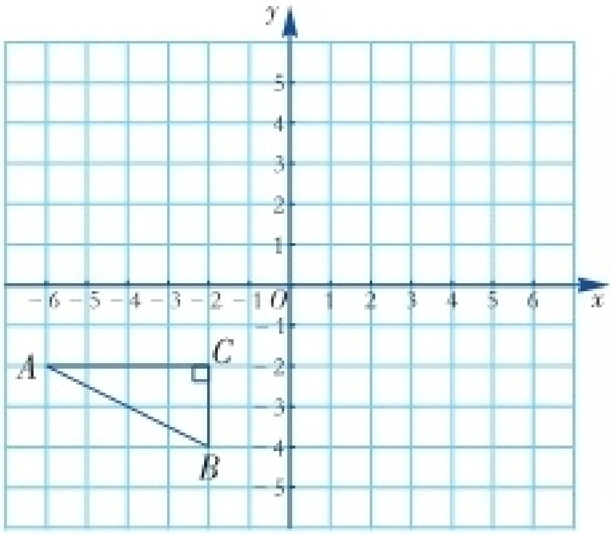
(1) 点 $A(5, -3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 ________；

(2) 点 $B(3, 2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是________；

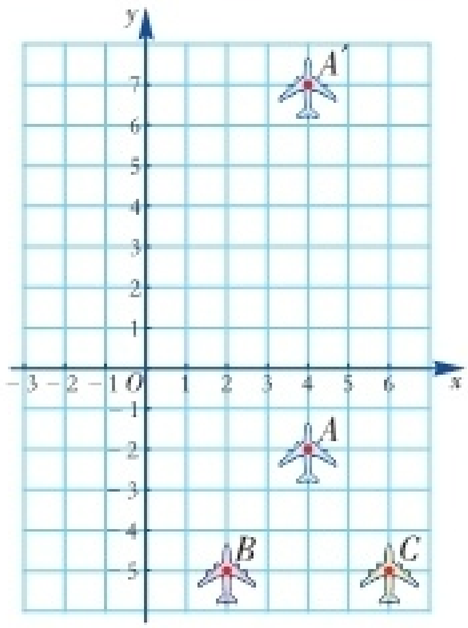
(3) 点 $P(-3, 5)$ 向上平移 2 个单位，它的像是点 P' ________；

(4) 点 $M(-3, 5)$ 向左平移 3 个单位，它的像是点 M' ________.

2. 如图，以 x 轴为对称轴作轴反射，画出 Rt△ABC 在轴反射下的像，并写出像与原像的顶点坐标.



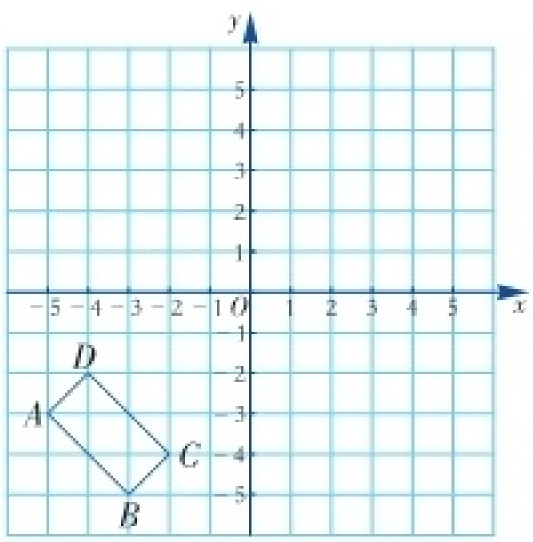
(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图，三架飞机 A，B，C 保持编队飞行（机与机之间的距离保持不变）. 它们现在的坐标为 $A(4, -2)$，$B(2, -5)$，$C(6, -5)$. 1 min 后，飞机 A 飞到 A'位置，此时飞机 B，C 分别飞到什么位置呢？写出这三架飞机在新位置的坐标.

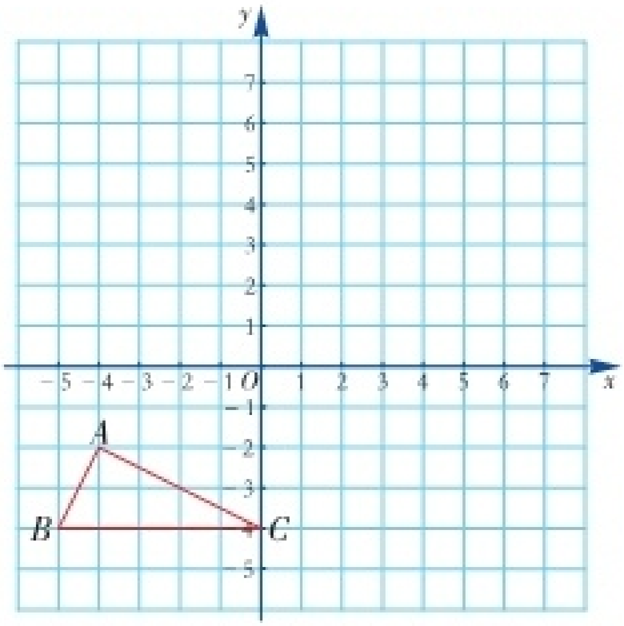
4. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别是 $A(-5, -3)$，$B(-3, -5)$，$C(-2, -4)$，$D(-4, -2)$. 将矩形 $ABCD$ 先向右平移 8 个单位，再向上平移 4 个单位，它的像是矩形 $A'B'C'D'$. 写出矩形 $A'B'C'D'$的顶点坐标，并画出该矩形.



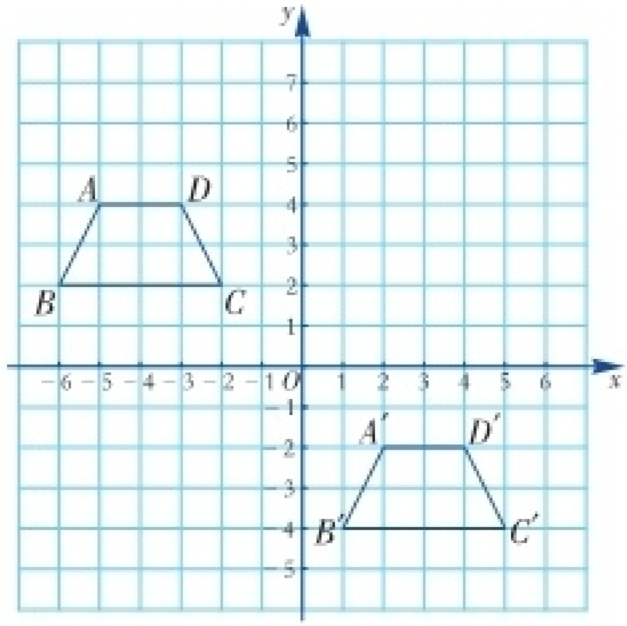
(第 4 题图)

B 组

5. 如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(-4，-2)$，$B(-5，-4)$，$C(0，-4)$. 作一个平移，平面内任意一点 $P(x_0，y_0)$ 的像是点 $P'(x_0+7，y_0+6)$，$\triangle ABC$ 的像是 $\triangle A'B'C'$，求 $\triangle A'B'C'$ 的三个顶点 A'，B'，C' 的坐标.



（第 5 题图）



（第 6 题图）

6. 如图，四边形 $A'B'C'D'$ 可以由四边形 $ABCD$ 经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么关系？

小结与复习

回顾

1. 画一个平面直角坐标系，试说明如何确定给定点的坐标.

2. 在平面直角坐标系中，四个象限中的点与坐标轴上的点的坐标有什么特征？

3. 举例说明如何用方位角和距离来刻画两个物体的相对位置.

4. 画一个正方形，建立适当的平面直角坐标系，写出它的顶点坐标.

5. 写出点 $P(x, y)$ 关于 x 轴，y 轴的对称点的坐标.

6. 将点 $P(x, y)$ 向左（或右）平移 k 个单位，它的像点 $P'(x', y')$ 的坐标是多少？

将点 $Q(x, y)$ 向上（或下）平移 k 个单位，它的像点 $Q'(x', y')$ 的坐标是多少？

7. 将平面内一点 $P(x, y)$ 先向左平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位，它的像点 P' 的坐标为 (x', y')，写出 x'，y' 与 x，y 的关系式.

本章知识结构

注意

1. 同一个点，在不同的平面直角坐标系中，其坐标也不相同，所以，我们说一个点的坐标，都是对某一个确定的坐标系来说的.

2. 确定一个点 $P(x, y)$ 关于坐标轴对称的点的坐标或是沿坐标轴方向平移后的点的坐标，可以通过画图来帮助理解. 数形结合将帮助我们更好地理解变换的坐标表示和在变换下图形的位置的变化.

复习题 3

A 组

1. 建立平面直角坐标系，并描出下列各点，说一说这些点的位置有什么规律，你还能再找到一些类似的点吗？

$A(-3, -3)$，$B(-2, -2)$，$C(-1, -1)$，$D(0, 0)$，$E(1, 1)$，$F(2, 2)$.

2. 如图是某城市的局部区域示意图，你能用合适的方法来表示图中各建筑的位置吗？

（第 2 题图）

3. 结合上图，通过测量（用刻度尺和量角器）回答下列问题：

（1）地铁站在体育馆的北偏东 ______°的方向上，与体育馆的距离约为 ______m；

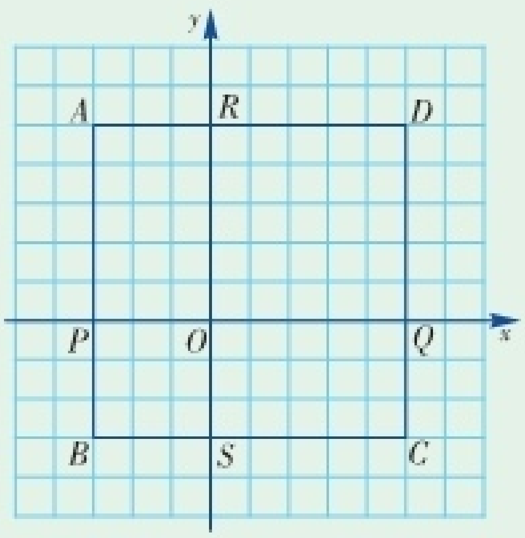
（2）电影院在百货商场的南偏东 ______°的方向上，与百货商场的距离约为 ______m；

（3）第一中学在体育馆的南偏西______°的方向上，与体育馆的距离约为 ______m.

4. 如图，已知 $A(-3, 5)$ 及 $B(-3, -3)$ 是正方形 $ABCD$ 的两个顶点. 正方形与 x 轴相交于点 P 和 Q，与 y 轴相交于点 R 和 S.

（1）求点 C，D，P，Q，R，S 的坐标；

（2）求长方形 $ABSR$ 与 $RSCD$ 的周长之差.



（第 4 题图）

5. 在平面直角坐标系中描出下列各点，并将各组的点顺次连接起来.

(1) (2, 0), (4, 0), (6, 2), (6, 6), (5, 8), (4, 6),
(2, 6), (1, 8), (0, 6), (0, 2), (2, 0);

(2) (1, 3), (2, 2), (4, 2), (5, 3);

(3) (1, 4), (2, 4), (2, 5), (1, 5), (1, 4);

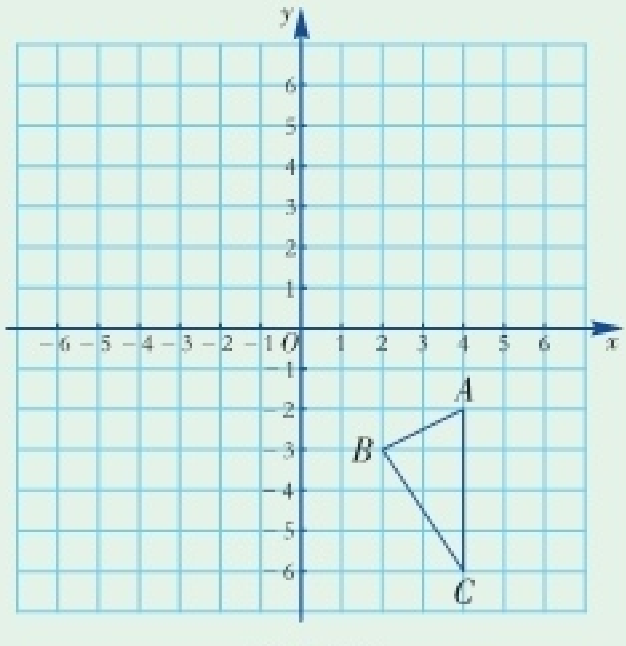
(4) (4, 4), (5, 4), (5, 5), (4, 5), (4, 4);

(5) (3, 3).

观察所得的图形，你觉得它像什么？

6. 建立平面直角坐标系，描出 $A(2, 1)$，$B(0, -3)$，$C(4, -4)$ 三点，依次连接各点得到 $\triangle ABC$，分别作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴和 y 轴对称的图形，并写出它们各顶点的坐标.

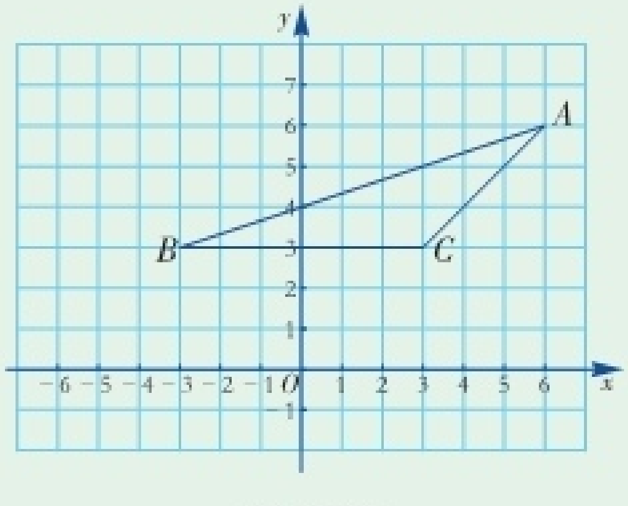
7. 如图，将 $\triangle ABC$ 先向左平移 7 个单位，再向上平移 8 个单位，它的像是 $\triangle A'B'C'$，写出 $\triangle A'B'C'$ 的顶点坐标，并作出该图形.



(第 7 题图)

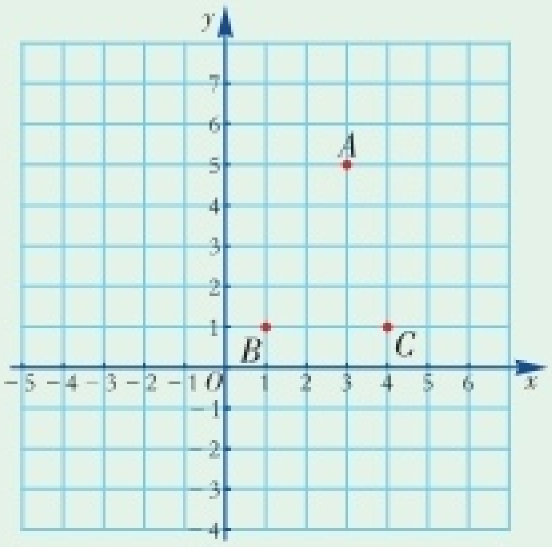
B 组

8. 如图，$\triangle ABC$ 的坐标分别为 $A(6, 6)$，$B(-3, 3)$，$C(3, 3)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



(第 8 题图)

9. 如图，在平面直角坐标系内，以 $A(3,\ 5)$，$B(1,\ 1)$，$C(4,\ 1)$ 三点为顶点画平行四边形.



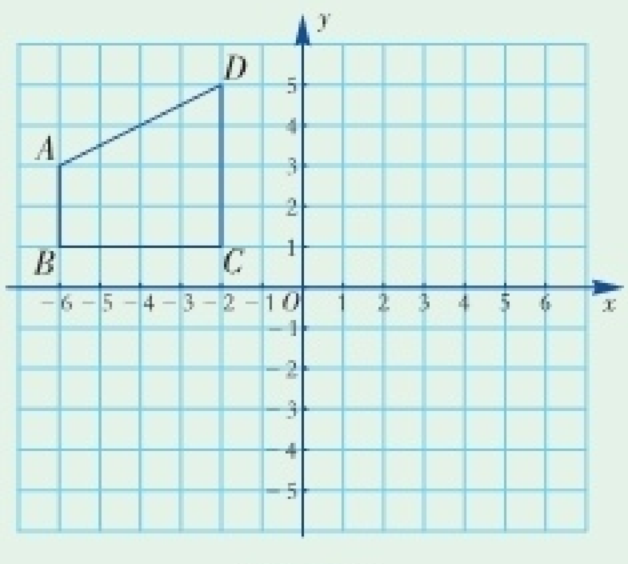
(第 9 题图)

(1) 可以画多少个平行四边形？

(2) 写出每个平行四边形第四个顶点 D 的坐标，并指出它所在的象限.

C 组

10. 如图，将四边形 $ABCD$ 各顶点的横坐标、纵坐标分别乘 -1，得到的图形与原图形有什么变化？作出坐标变化后的图形，这一过程可以看作是一个什么变换？



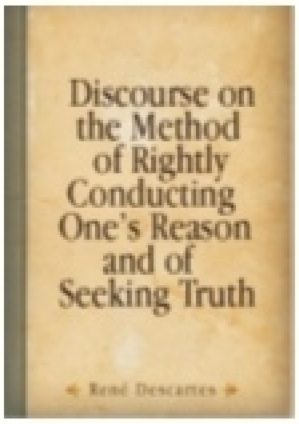
(第 10 题图)

11. 建立一个平面直角坐标系，描出点 $A(0,\ 0)$，$B(-3,\ 3)$，过 A，B 两点画直线 AB，若点 C 是直线 AB 上任意一点，则点 C 的横坐标与纵坐标有什么关系？

笛卡儿与坐标系

勒奈·笛卡儿（René Descartes），1596 年 3 月 31 日生于法国都兰城，是欧洲近代哲学的奠基人之一，同时他也是一位勇于探索的科学家，在物理学、生物学等领域都有值得称道的创见，被誉为“近代科学的始祖”.

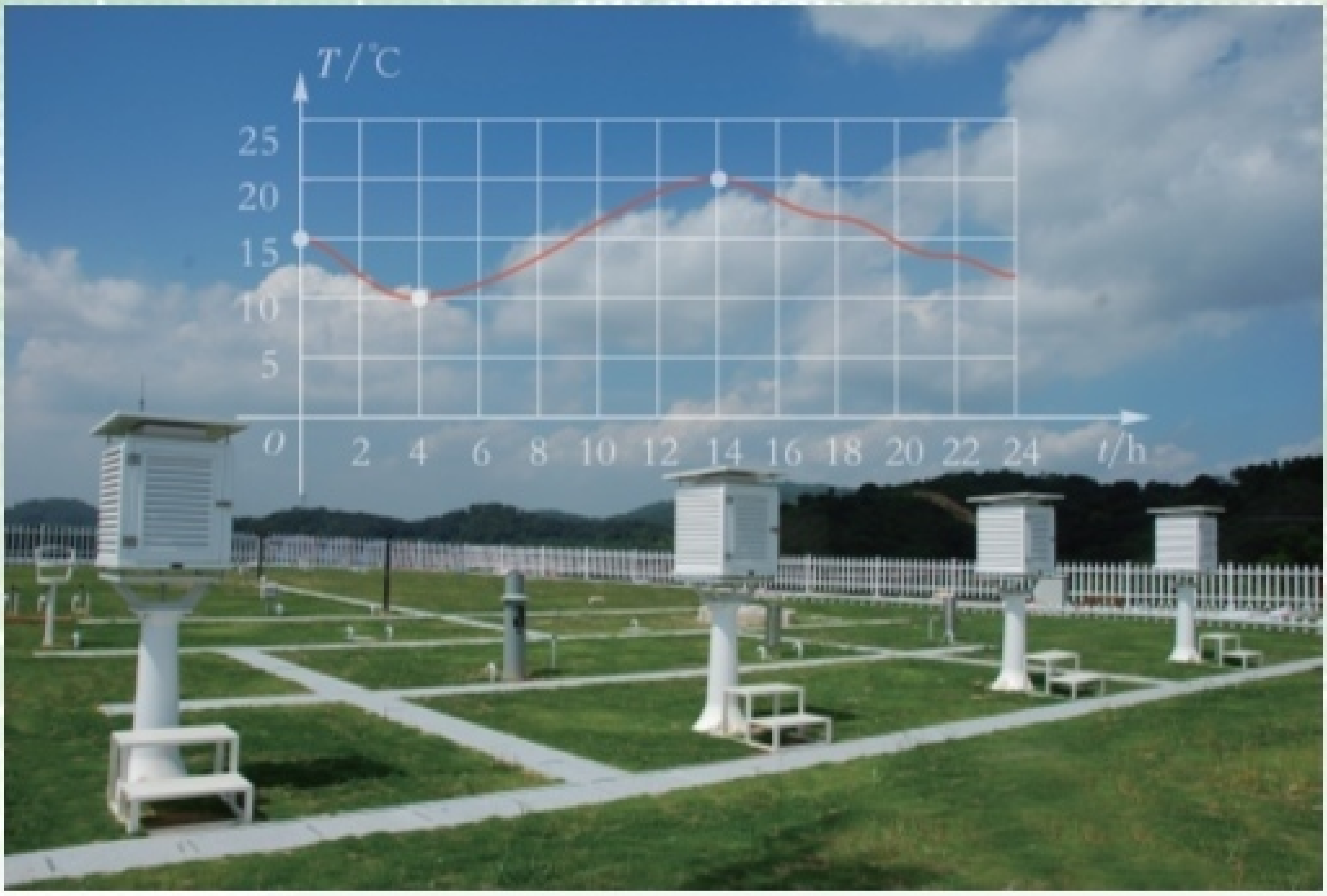
笛卡儿的名言：“我思故我在。”



笛卡儿 1637 年发表著名哲学论著《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》（简称《方法论》），《几何学》是其中的一篇论文。

笛卡儿对数学最重要的贡献是创立了解析几何. 当时，几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位，笛卡儿认为古希腊的几何学过于依赖于图形，束缚了人的想象力. 而对于当时流行的代数学，他觉得它完全从属于法则和公式，不能成为一门改进智力的科学. 因此他提出必须把几何与代数的优点结合起来，建立一种“真正的数学”.

1637 年，笛卡儿发表了《几何学》，他从天文和地理的经纬度出发，用平面上的一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述空间上的点，从而创立了坐标系，进而创立了解析几何学. 笛卡儿向世人表明：几何问题不仅可以归结成为代数形式，而且可以通过代数变换来发现、证明几何性质. 解析几何的出现，改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向，把相互对立着的“数”与“形”统一起来，使得几何曲线与代数方程相结合. 笛卡儿的这一天才创举，为微积分的创立奠定了基础，从而开拓了变量数学的广阔领域. 因此，他被后世称为解析几何的创始者.



第4章

一次函数

在自然现象和日常生活中，我们经常会遇到许多变化的量．其中有些量随着另一些量的变化而变化，例如气温会随着时间的变化而变化；居民天然气缴费随使用量的变化而变化；汽车匀速行驶，行驶里程随行驶时间的变化而变化．你了解这些变量之间的关系吗？

函数是刻画变量之间关系的常用模型．什么是函数？函数的图象有什么特征？什么是一次函数？一次函数的图象有什么特征？如何建立一次函数模型来解决现实生活中的问题？本章我们将学习函数，并重点研究一次函数．

4.1 函数和它的表示法

4.1.1 变量与函数

动脑筋

1. 图 4-1 是某地气象站用自动温度记录仪描出的某一天的温度曲线，它反映了该地某一天的气温 T(℃) 是如何随时间 t 的变化而变化的，你能从图中得到哪些信息？

图 4-1

2. 当正方形的边长 x 分别取 1，2，3，4，5，…时，正方形的面积 S 分别是多少？试填写下表：

边长 x	1	2	3	4	5	6	7	…
面积 S								…

3. 某城市居民用的天然气，1 m^3 收费 2.88 元，使用 x (m^3) 天然气应缴纳的费用 y(元)为 $y=2.88x$. 当 $x=10$ 时，缴纳的费用为多少？

第 1 个问题中，某地一天中的气温随着时间的变化而变化，从图 4-1 可看出，4 时的气温是_______℃，14 时的气温是________℃.

第 2 个问题中，正方形的面积随着它的边长的变化而变化.

第 3 个问题中，使用天然气缴纳的费用 y 随所用天然气的体积 x 的变化而变化. 例如，当 $x=10$ 时，$y=$______(元)；当 $x=20$ 时，$y=$______(元).

在讨论的问题中，取值会发生变化的量称为**变量**(variable)，取值固定不变的量称为**常量**(或常数)(constant).

上述问题中，时间 t，气温 T；正方形的边长 x，面积 S；使用天然气的体积 x，应缴纳的费用 y 等都是变量. 每使用 1 m^3 天然气应缴纳 2.88 元，2.88 是常量.

一般地，如果变量 y 随着变量 x 而变化，并且对于 x 取的每一个值，y 都有唯一的一个值与它对应，那么称 y 是 x 的**函数**(function)，记作 $y=f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是英文 a function of x （x 的函数）的简记. 这时把 x 叫作**自变量**(independent variable)，把 y 叫作**因变量**(dependent variable). 对于自变量 x 取的每一个值 a，因变量 y 的对应值称为**函数值**(value of function)，记作 $f(a)$.

说一说

1. 在问题 1 中，________是自变量，________是______的函数.
2. 在问题 2 中，正方形的边长是______，正方形的面积是边长的________.
3. 在问题 3 中，________是自变量，________是________的函数.

在考虑两个变量间的函数时，还要注意自变量的取值范围. 如上述第 1 个问题中，自变量 t 的取值范围是 $0 \leqslant t \leqslant 24$；而第 2、3 个问题中，自变量 x 的取值范围分别是 $x>0$，$x \geqslant 0$.

例 1 如图 4-2，已知圆柱的高是 4 cm，底面半径是 r(cm)，当圆柱的底面半径 r 由小变大时，圆柱的体积 V(cm^3) 是 r 的函数.

(1) 用含 r 的代数式来表示圆柱的体积 V，指出自变量 r 的取值范围.

(2) 当 $r=5$，10 时，V 是多少（结果保留 π）?

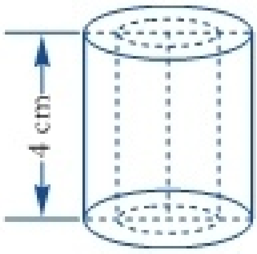


图 4-2

解 (1) 圆柱的体积 $V=4\pi r^2$，自变量 r 的取值范围是 $r>0$.

（2）当 $r=5$ 时，$V=4\pi\times25=100\pi$（cm^3）；

当 $r=10$ 时，$V=4\pi\times100=400\pi$（cm^3）.

练习

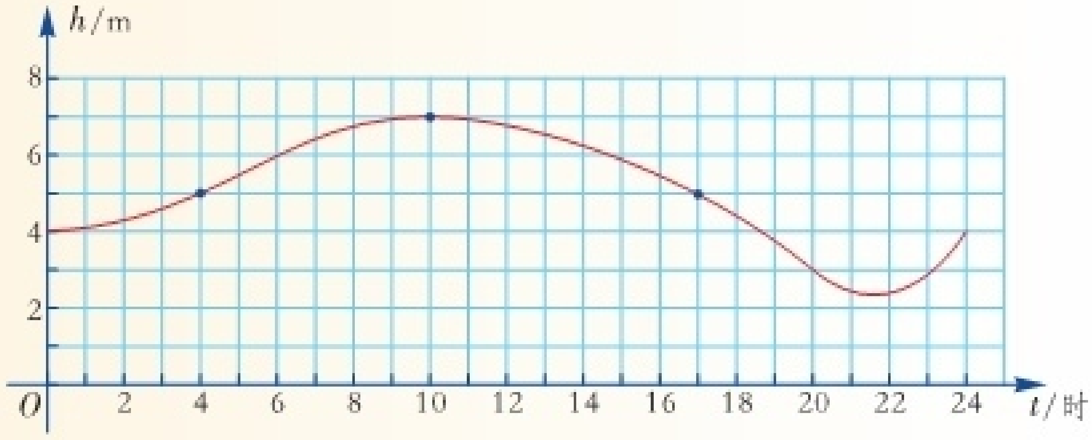
1. 指出下列变化过程中，哪个变量随着另一个变量的变化而变化？

（1）一辆汽车以 80 km/h 的速度匀速行驶，行驶的路程 s(km) 与行驶时间 t(h).

（2）圆的半径 r 和圆面积 S 满足：$S=\pi r^2$.

（3）银行的存款利率 P 与存期 t.

2. 如图，A 港口某天受潮汐的影响，24 小时内港口水深 h(m) 随时间 t(时) 的变化而变化.



(第 2 题图)

（1）水深 h 是时间 t 的函数吗？

（2）当 t 分别取 4，10，17 时，h 是多少？

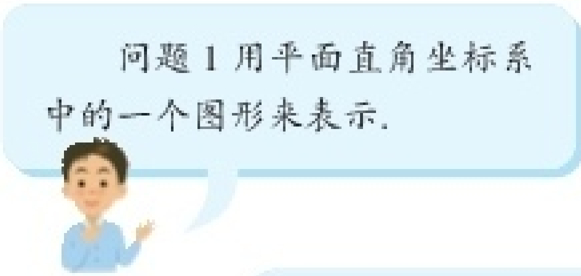
4.1.2 函数的表示法

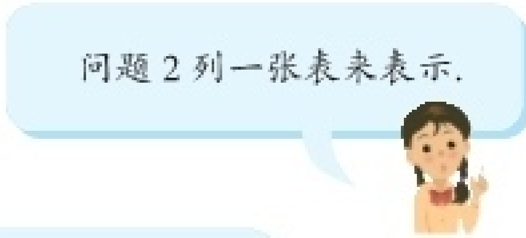
说一说

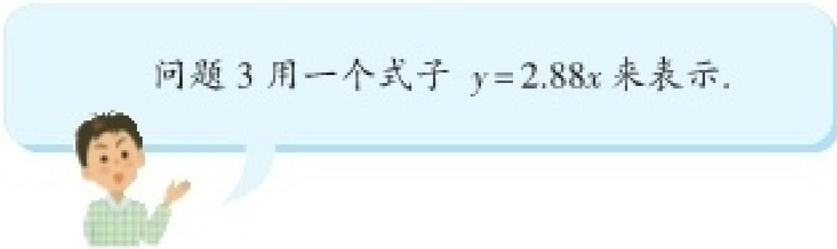
（1）上节问题 1 是怎样表示气温 T 与时间 t 之间的函数关系的？

（2）上节问题 2 是怎样表示正方形面积 S 与边长 x 之间的函数关系的？

（3）上节问题 3 是怎样表示缴纳的天然气费 y 与所用天然气的体积 x 之间的函数关系的？







像上节问题 1 那样，建立平面直角坐标系，以自变量取的每一个值为横坐标，以相应的函数值（即因变量的对应值）为纵坐标，描出每一个点，由所有这些点组成的图形称为这个**函数的图象**（graph of function）. 这种表示函数关系的方法称为**图象法**.

像上节问题 2 那样，列一张表，第一行表示自变量取的各个值，第二行表示相应的函数值（即因变量的对应值），这种表示函数关系的方法称为**列表法**.

像上节问题 3 那样，用式子表示函数关系的方法称为**公式法**，这样的式子称为**函数的表达式**(expression of function).

我们可以看到，用图象法、列表法、公式法均可以表示两个变量之间的函数关系.

用图象法表示函数关系，可以直观地看出因变量如何随着自变量而变化；

用列表法表示函数关系，可以很清楚地看出自变量取的值与因变量的对应值；

用公式法表示函数关系，可以方便地计算函数值.

动脑筋

用边长为 1 的等边三角形拼成如图 4-3 所示的图形，用 y 表示拼成的图形的周长，用 n 表示其中等边三角形的数目，显然拼成的图形的周长 y 是 n 的函数.

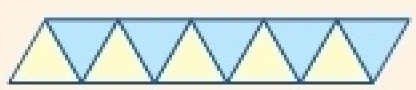


图 4-3

（1）填写下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y									…

（2）试用公式法表示这个函数关系.

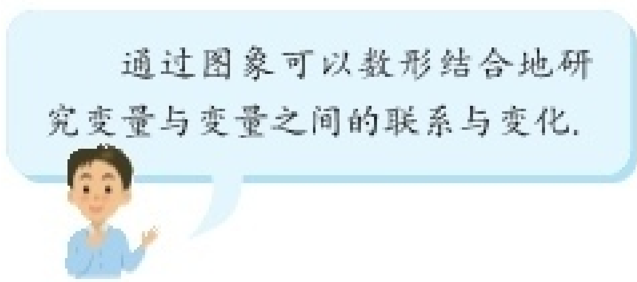
（3）试用图象法表示这个函数关系.

（1）当只有 1 个等边三角形时，图形的周长为 3，每增加 1 个三角形，周长就增加 1，因此填表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	3	4	5	6	7	8	9	10	…

（2）n 是自变量，y 是因变量，周长 y 与三角形个数 n 之间的函数表达式是 $y=n+2$（n 为正整数）.

（3）因为函数 $y=n+2$ 中，自变量 n 的取值范围是正整数集，因此在平面直角坐标系中可以描出无数个点，这些点组成了 $y=n+2$ 的函数图象，如图 4–4.



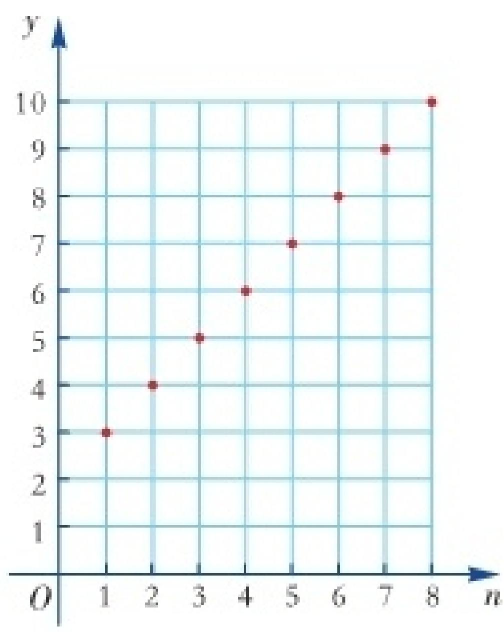


图 4–4

例 2 某天 7 时，小明从家骑自行车上学，途中因自行车发生故障，修车耽误了一段时间后继续骑行，按时赶到了学校. 图 4–5 反映了他骑车的整个过程，结合图象，回答下列问题：

（1）自行车发生故障是在什么时间？此时离家有多远？

（2）修车花了多长时间？修好车后又花了多长时间到达学校？

（3）小明从家到学校的平均速度是多少？

解 （1）从横坐标看出，自行车发生故障的时间是 7:05；从纵坐标看出，此时离家 1 000 m.

（2）从横坐标看出，小明修车花了 15 min；小明修好车后又花了 10 min 到达学校.

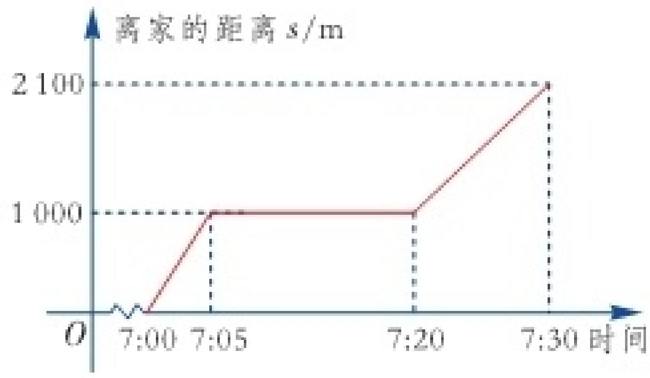


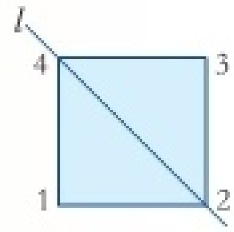
图 4–5

（3）从纵坐标看出，小明家离学校 2 100 m；从横坐标看出，他在路上共花了 30 min，因此，他从家到学校的平均速度是

$$2\ 100 \div 30 = 70\ (\text{m/min}).$$

练习

1. 如图，将一个正方形的顶点分别标上号码 1，2，3，4，直线 l 经过第 2，4 号顶点. 作这个正方形关于直线 l 的轴对称图形，那么正方形的各个顶点分别变成哪个顶点？填在下表中：



（第 1 题图）

x	1	2	3	4
y				

这个表给出了 y 是 x 的函数. 画出它的图象，它的图象由几个点组成？

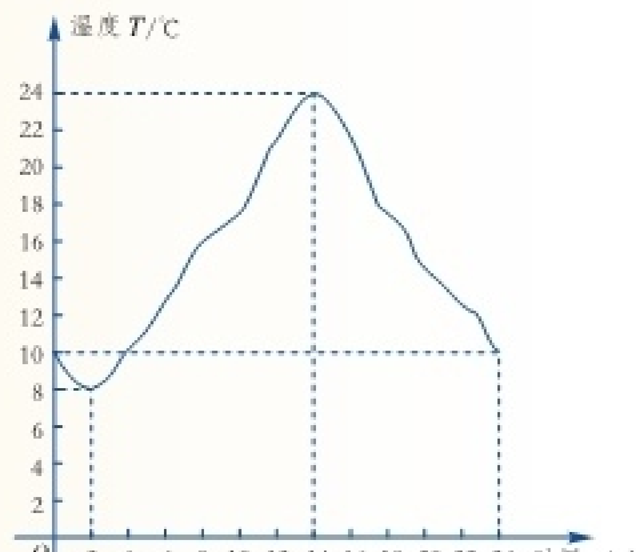
2. 等腰三角形的底角的度数为 x，顶角的度数为 y，写出 y 随 x 而变化的函数表达式，并指出自变量 x 的取值范围.

3. 如图是 A 市某一天内的气温随时间而变化的函数图象，结合图象回答下列问题：

（1）这一天中的最高气温是多少？是上午时段，还是下午时段？

（2）最高气温与最低气温相差多少？

（3）什么时段，气温在逐渐升高？什么时段，气温在逐渐降低？

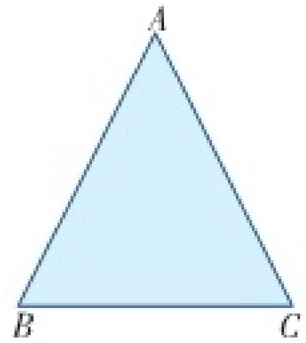


（第 3 题图）

习题 4.1

A 组

1. 要制作一个如图所示的等腰三角形 ABC，已知它的周长为 40 cm，设底边 BC 的长为 y(cm)，腰 AB 的长为 x(cm).



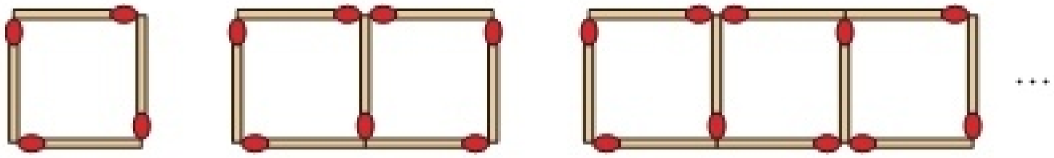
(第 1 题图)

(1) 用含 x 的代数式表示底边长 y，并指出其中的常量与变量，自变量与因变量，以及自变量的取值范围；

(2) 当 $x=15$ 时，求底边 BC 的长.

2. n 边形的内角和 S 是边数 n 的函数吗？若是，请写出函数的表达式.

3. 如图是用火柴棒按规律拼摆的图形.



(第 3 题图)

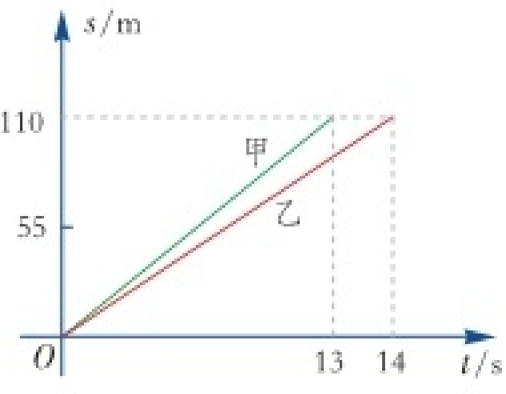
(1) 用 y 表示摆成第 n 个图形所需的火柴根数，试完成下表：

n	1	2	3	4	5	…
y						

(2) 用公式法表示 y 与 n 之间的函数关系；

(3) 画出这个函数的图象.

4. 甲、乙两人在一次跨栏比赛中，路程 s(m) 与时间 t(s) 的函数关系如图所示，回答下列问题：



(第 4 题图)

(1) 这次比赛的赛程是多少？

(2) 甲、乙二人谁先到达终点？

(3) 求乙在这次比赛中的平均速度.

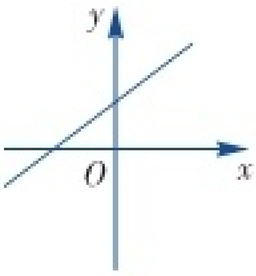
5. 玩具店每月的盈利 p(元) 是售出玩具数量 q(件) 的函数，且 $p=65q-9\,750$.

(1) 已知某月玩具店的售出玩具数为 500 件，求该月的盈利.

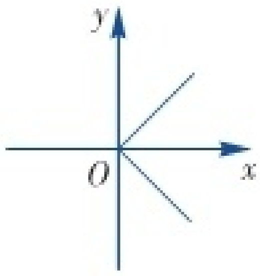
(2) 如果一个月内共售出玩具 150 件，该玩具店是否盈利？

B 组

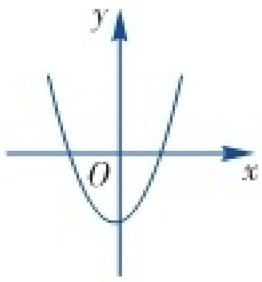
6. 下列图象中，表示 y 不是 x 的函数的是（　　）



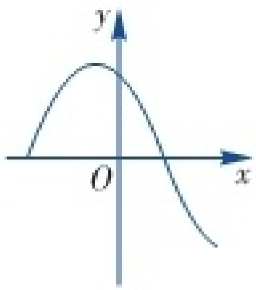
（A）



（B）

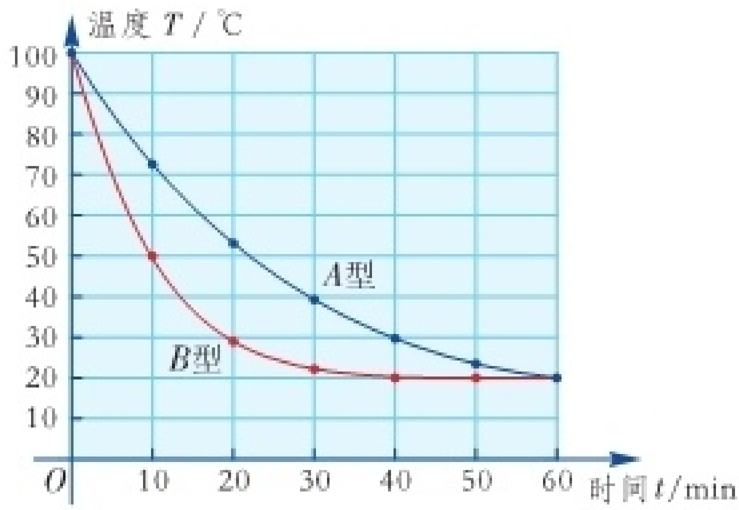


（C）



（D）

7. 如图是某两种品牌保温杯的保温效果试验比较示意图，利用图象回答下列问题：



（第 7 题图）

（1）该试验中，哪个是自变量，哪个是因变量？

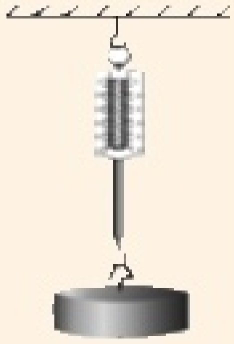
（2）从该试验你能得出哪种品牌的保温杯保温效果好？

4.2 一次函数

动脑筋

1. 某地电费的单价为 0.8 元/(kW·h)，请用表达式表示电费 y(元) 与所用电量 x(kW·h) 之间的函数关系.

2. 某弹簧秤最大能称不超过 10 kg 的物体，秤的原长为 10 cm，每挂 1 kg 物体，弹簧伸长 0.5 cm. 挂上重物后弹簧的长度为 y(cm)，所挂物体的质量为 x(kg). 请用表达式表示弹簧长度 y 与所挂物体质量 x 之间的函数关系.



在问题 1 中，用电量 x(kW·h) 是自变量，电费 y(元) 是 x 的函数，它们之间的数量关系为

$$电费=单价\times用电量,$$

即

$$y=0.8x. \qquad ①$$

在问题 2 中，所挂物体质量 x(kg) 是自变量，弹簧的长度 y(cm) 是 x 的函数，它们之间的数量关系为

$$弹簧长度=原长+弹簧伸长量,$$

即

$$y=10+0.5x. \qquad ②$$

说一说

函数①、②式有什么共同的特征？

像 $y=0.8x$，$y=10+0.5x$ 一样，它们都是关于自变量的一次式，像这样的函数称为**一次函数** (linear function). 它的一般形式是：

$$y=kx+b\ (k,\ b\ 为常数,\ k\neq 0).$$

特别地，当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx$（k 为常数，$k\neq 0$）也叫作**正比例函数**，其中 k 叫作比例系数.

上述问题中，分别有：每使用 1 kW·h 电，需付费 0.8 元；每挂上 1 kg 物体，弹簧伸长 0.5 cm.

其中弹簧的长度 y 与所挂物体的质量 x 之间的关系如下表所示：

		+1	+1	+1	+1			+1
自变量 x	0	1	2	3	4	…	9	10
因变量 y	10	10.5	11	11.5	12	…	14.5	15
		+0.5	+0.5	+0.5	+0.5			+0.5

你能仿照上述表格，将电费问题中的自变量与因变量的变化过程表示出来吗？

可以看出，一次函数的特征是：**因变量随自变量的变化是均匀的**（即自变量每增加 1 个最小单位，因变量都增加（或都减少）相同的数量）.

一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq 0$）的自变量取值范围是实数集. 但在实际问题中，要根据具体情况来确定它的自变量取值范围. 例如，在第 1 个问题中，自变量的取值范围是 $x\geqslant 0$；在第 2 个问题中，自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 10$.

例 科学研究发现，海平面以上 10 km 以内，海拔每升高 1 km，气温下降 6 ℃. 某时刻，若甲地地面气温为 20 ℃，设高出地面 x(km) 处的气温为 y(℃).

（1）求 y(℃) 随 x(km) 而变化的函数表达式.

（2）若有一架飞机飞过甲地上空，机舱内仪表显示飞机外面的温度为 −34 ℃，求飞机离地面的高度.

解 （1）高出地面的高度 x(km) 是自变量，高出地面 x km 处的气温 y(℃) 是 x 的函数，它们之间的数量关系为

甲地高出地面 x km 处的气温 = 地面气温 − 下降的气温，

即
$$y=20-6x.$$

（2）当 $y=-34$ 时，

即 $20-6x=-34$，解得 $x=9$.

答：此时飞机离地面的高度为 9 km.

练习

1. 下列函数中，哪些是一次函数？哪些是正比例函数？

$$y=7-x,\ y=-4x,\ y=\frac{3}{x},\ y=2x^2+x-1,\ y=2x-3.$$

2. 某租车公司提供的汽车，每辆车日租金为 350 元，每行驶 1 km 的附加费用为 0.7 元. 求租一辆汽车一天的费用 y(元) 随行驶路程 x(km) 而变化的函数表达式，并求当 $y=455$ 时，x 的值.

习题 4.2

A 组

1. 下面给出的几个函数关系中，成正比例函数关系的是（　　）

(A) 正方体的体积与棱长

(B) 正方形的周长与边长

(C) 菱形的面积一定，它的两条对角线长

(D) 圆的面积与它的半径

2. 下表为一个图案中红色和白色瓷砖数量的关系.

红色瓷砖数量(r)	3	4	5	6	7
白色瓷砖数量(w)	6	8	10	12	14

设 r 和 w 分别为红色和白色瓷砖的数量，下列函数表达式可以表示 w 与 r 之间的关系的是（　　）

(A) $w=r+3$　　　　(B) $w=2r$

(C) $w=\frac{r}{2}$　　　　(D) $w=r+7$

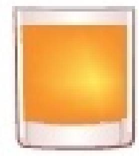
3. 假设某种储蓄的月利率是 0.16%，存入 1 000 元本金后，用表达式表示本息和 y(元) 与所存月数 x 之间的函数关系（利息 = 本金 × 月利率 × 月数），y 是关于 x 的一次函数吗？

4. 一支蜡烛长 12 cm，点燃时每分钟缩短 0.3 cm，写出点燃后蜡烛长度 y(cm) 随点燃时间 x(min) 而变化的函数表达式，并指出自变量 x 的取值范围.

B 组

5. 桌子上放着一个透明的空杯子，金黄色的果汁均匀地倒入杯子中，并测得如下数据：

杯中果汁质量 x(g)	50	100	150	200	250	300
杯中果汁的高度 h(cm)	1	2	3	4	5	6



（1）如果用 x 表示杯中的果汁质量，h 表示杯中果汁的高度，随着 x 的逐渐变大，h 的变化趋势是什么？

（2）估计当 $x=350$ 时，h 的值是多少？你是怎样估计的？

（3）用表达式表示两个变量之间的函数关系.

6. 某商店购进的一种家电产品，如果每天卖出 12 件，则 25 天可以全部售完.

（1）试为这种家电产品的存货量 y(件) 与售出时间 x(天) 的关系建立一个函数模型；

（2）销售 10 天后，这种家电产品还有多少件？

4.3 一次函数的图象

探究

画出正比例函数 $y=2x$ 的图象.

列表： 先取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值，列成表格如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

描点： 建立平面直角坐标系，以自变量值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出这些点，如图 4-6.

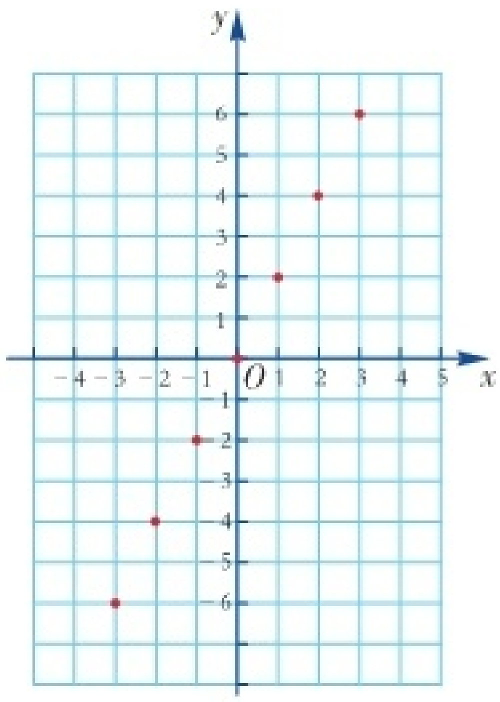


图 4-6

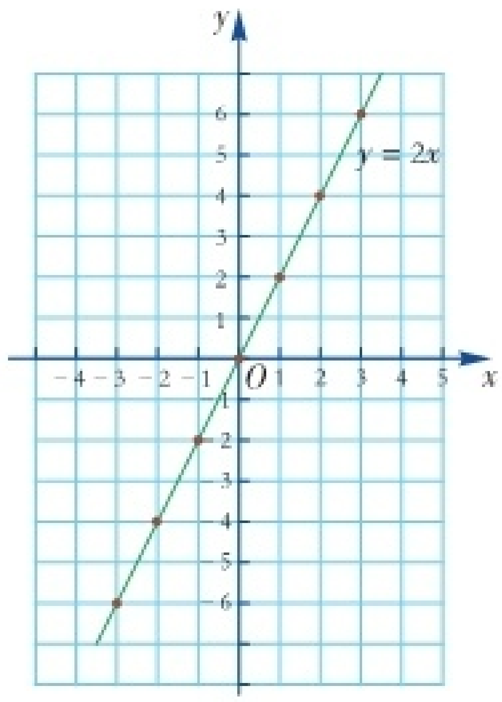


图 4-7

连线： 观察描出的这些点的分布，我们可以猜测 $y=2x$ 的图象是经过原点的一条直线，数学上可以证明这个猜测是正确的. 因此，用一条直线将平面直角坐标系中的各点连接，即可得到 $y=2x$ 的图象. 如图 4-7 所示.

类似地，数学上已经证明：**正比例函数 $y=kx$（k 为常数，$k\neq0$）的图象是一条直线**. 由于两点确定一条直线，因此画正比例函数的图象，只要描出图象上的两个点，然后过这两点作一条直线即可. 我们常常把这条直线叫作“直线 $y=kx$”.

例 1 画出正比例函数 $y=-2x$ 的图象.

解 当 $x=0$ 时，$y=0$；

当 $x=1$ 时，$y=-2$.

在平面直角坐标系中描出两点 $O(0，0)$，$A(1，-2)$，过这两点作直线，则这条直线是 $y=-2x$ 的图象，如图 4-8 所示.

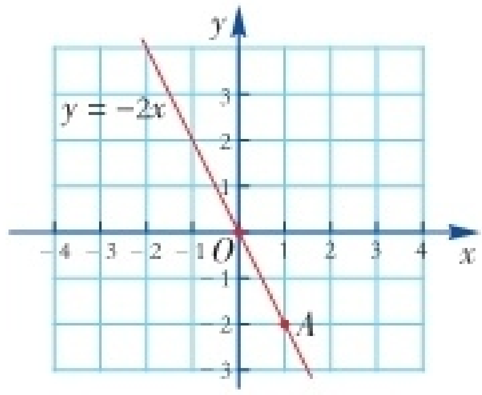


图 4-8

从图中可以看出，$y=-2x$ 的图象是经过原点的一条直线.

做一做

在平面直角坐标系中（如图 4-9），任意画一个正比例函数 $y=kx$（k 为常数，$k\neq0$）的图象，它是经过原点的一条直线吗？

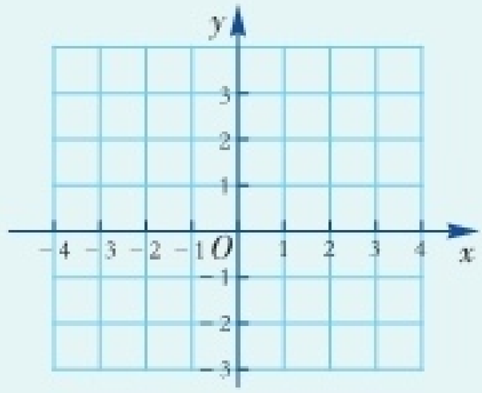
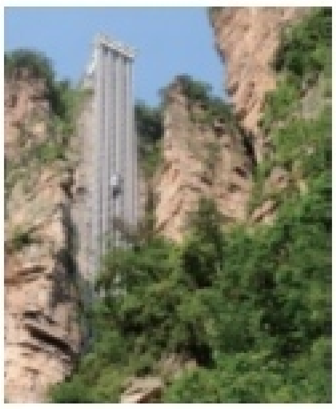


图 4-9

一般地，直线 $y=kx$（k 为常数，$k\neq0$）是一条**经过原点的直线**. 当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第三、一象限从左向右上升，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第二、四象限从左向右下降，y 随 x 的增大而减小.

例 2 某国家森林公园的一个旅游景点的电梯运行时，以 3 m/s 的速度上升，运行总高度为 300 m.



（1）求电梯运行高度 h（m）随运行时间 t（s）而变化的函数表达式；

（2）画出这个函数的图象.

解 （1）由路程 = 速度 × 时间，可知 $h=3t$，$0\leqslant t\leqslant 100$.

（2）当 $t=0$ 时，$h=0$；当 $t=100$ 时，$h=300$，在平面直角坐标系中描出两点 $O(0,\ 0)$，$A(100,\ 300)$. 过这两点作线段 OA，线段 OA 即函数 $h=3t(0\leqslant t\leqslant 100)$ 的图象，如图 4–10.

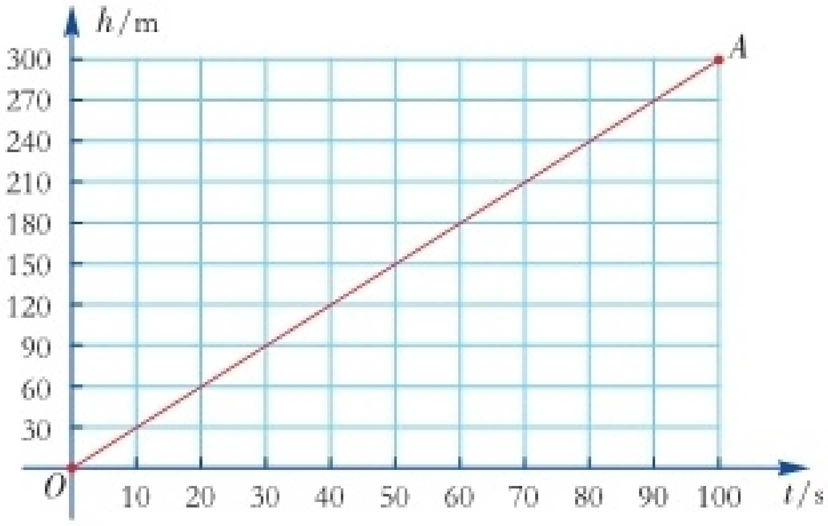
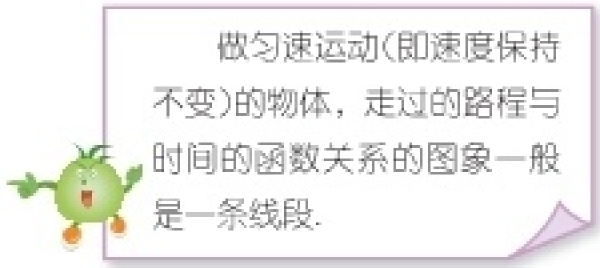


图 4–10



练习

1. 画出正比例函数 $y=-\dfrac{1}{3}x$，$y=3x$ 的图象，并分别指出其经过哪些象限.

2. 已知矩形的一边长为 6 cm，另一边长为 x cm，面积为 $y(\text{cm}^2)$.

（1）求 y 随 x 而变化的函数表达式；

（2）画出该函数的图象；

（3）当 $x=3$，4，5 时，y 是多少？

探究

在平面直角坐标系中，先画出函数 $y=2x$ 的图象，然后探索 $y=2x+3$ 的图象是什么样的图形，猜测 $y=2x+3$ 的图象与 $y=2x$ 的图象有什么关系？

先取自变量 x 的一些值，算出 $y=2x$，$y=2x+3$ 对应的函数值，列成表格如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2x$	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…
$y=2x+3$	…	-3	-1	1	3	5	7	9	…

从上表可以看出，横坐标相同，$y=2x+3$ 的点的纵坐标比 $y=2x$ 的点的纵坐标大 3，于是将 $y=2x$ 的图象向上平移 3 个单位，就得到 $y=2x+3$ 的图象，如图 4-11.

由于平移把直线变成与它平行的直线，因此 $y=2x+3$ 的图象是与 $y=2x$ 平行的一条直线.

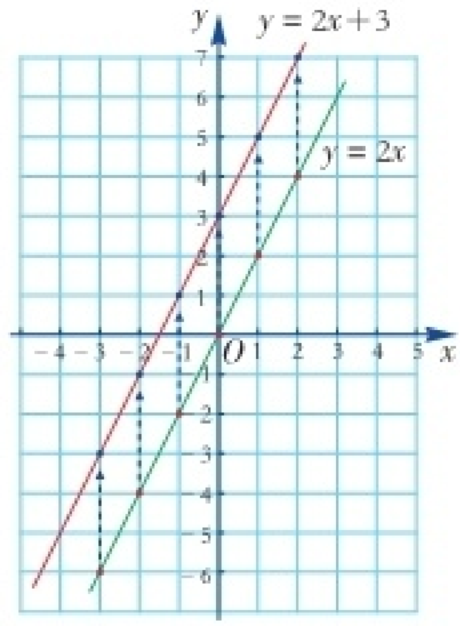


图 4-11

类似地，可以证明，一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，它与正比例函数 $y=kx$ 的图象平行，**一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq 0$）的图象可以看作由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度而得到**（当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移）.

由于两点确定一条直线，因此画一次函数的图象，只要描出图象上的两个点，然后过这两点作一条直线即可. 我们常常把这条直线叫作“直线 $y=kx+b$”.

例 3 画出一次函数 $y=-2x-3$ 的图象.

解 当 $x=0$ 时，$y=-3$；

当 $x=1$ 时，$y=-5$.

在平面直角坐标系中描出两点 $A(0,-3)$，$B(1,-5)$，过这两点作直线，则这条直线是一次函数 $y=-2x-3$ 的图象，如图 4-12.

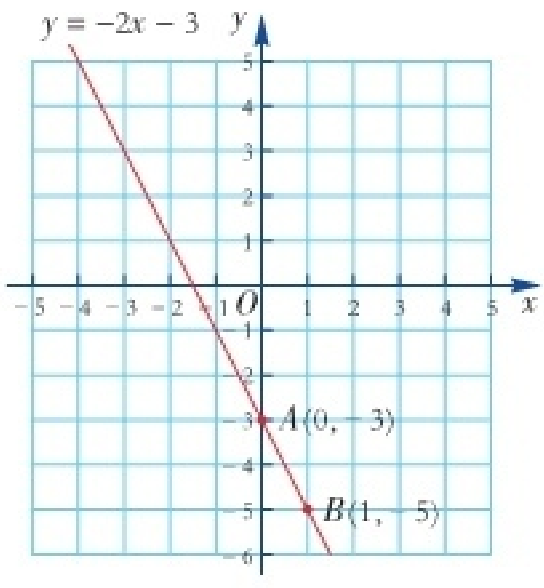


图 4-12

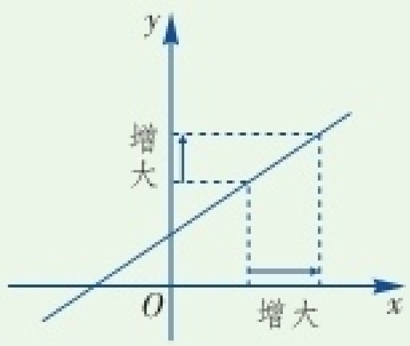
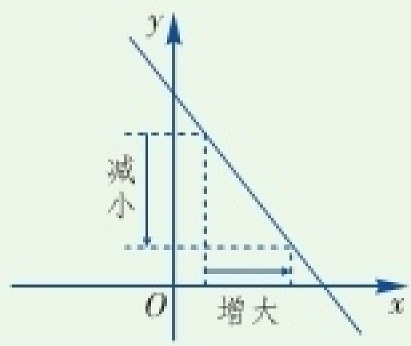
议一议

观察画出的一次函数 $y=2x+3$，$y=-2x-3$ 的图象，你能发现当自变量 x 的取值由小变大时，对应的函数值如何变化吗？

如图 4-11，对于 $y=2x+3$，当自变量 x 的取值由小变大时，对应的函数值 y 由小变大.

如图 4-12，对于 $y=-2x-3$，当自变量 x 的取值由小变大时，对应的函数值 y 由大变小.

一般地，一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$）具有如下性质：

$y=kx+b$	$k>0$	$k<0$
图象		
函数值 y 的变化	函数值 y 随自变量 x 的增大而增大	函数值 y 随自变量 x 的增大而减小

例 4 图 4-13 描述了某一天小亮从家骑车去书店购书，然后又骑车回家的情况. 你能说出小亮在路上的情形吗？

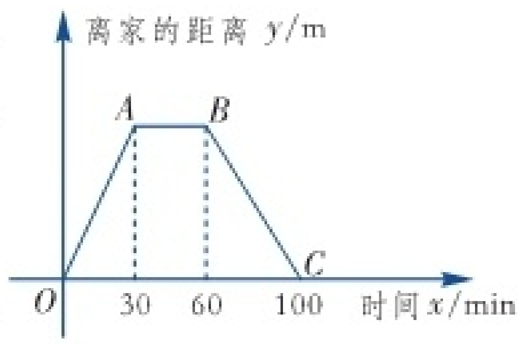


图 4-13

分析 小亮骑车离家的距离 y 是时间 x 的函数，这个函数图象由 3 条线段组成，每一条线段代表一个阶段的活动.

解 第一段是从原点出发的线段 OA. 从横坐标看出，小亮路上花了 30 min，当横坐标从 0 变化到 30 时，纵坐标均匀增加，这说明小亮从家出发匀速前进 30 min，到达书店.

第二段是与 x 轴平行的一条线段 AB，当横坐标从 30 变化到 60 时，纵坐标没有变化，这说明小亮在书店购书待了 30 min.

第三段是与 x 轴有交点的线段 BC. 从横坐标看出，小亮路上花了 40 min. 当横坐标从 60 变化到 100 时，纵坐标均匀减少，这说明小亮从书店出发匀速前进 40 min，返回家中.

实际上，我们还可以比较第一段与第三段线段，发现第一段更“陡”，这说明去书店的速度更快，而回家的速度要慢一些.

练习

1. （1）将直线 $y=3x$ 向下平移 2 个单位，得到直线____________；

（2）将直线 $y=-x-5$ 向上平移 5 个单位，得到直线____________.

2. 过两点分别作出一次函数 $y=\frac{1}{4}x+3$ 和 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 的图象，并指出函数值如何随自变量的变化而变化？

习题 4.3

A 组

1. 在同一平面直角坐标系中，分别画出下列一次函数的图象，它们之间有什么关系？

（1）$y=3x$；　　（2）$y=3x+3$；

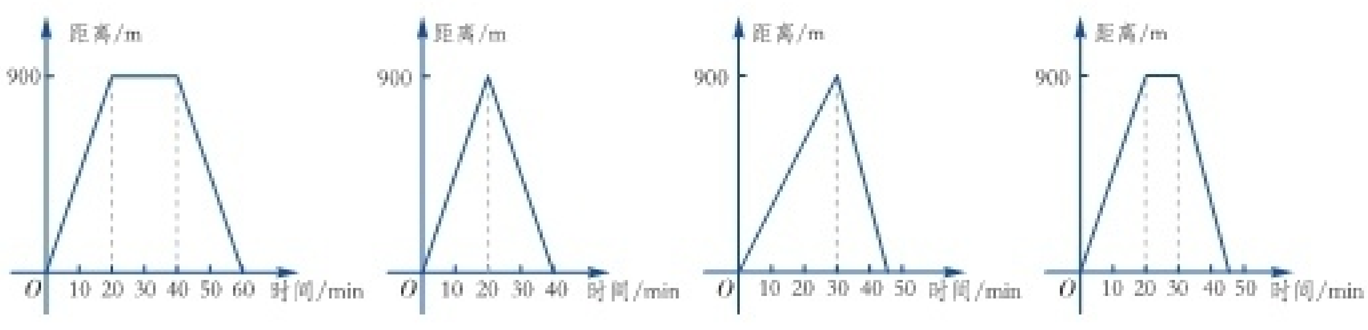
（3）$y=3x-1$.

2. 画出下列一次函数的图象，并指出函数值如何随自变量的变化而变化.

（1）$y=-x$；　　（2）$y=x+1$；

（3）$y=3x+1$；　　（4）$y=-\frac{1}{3}x+1$.

3. 小明的父母去散步，从家走了 20 min 到一个离家 900 m 的报亭，母亲随即按原速返回. 父亲在报亭待了 10 min 后，用 15 min 返回家中. 下面的图象中哪一个表示父亲离家后的时间与距离之间的关系？哪一个表示母亲的行走过程？



（A）　（B）　（C）　（D）

B 组

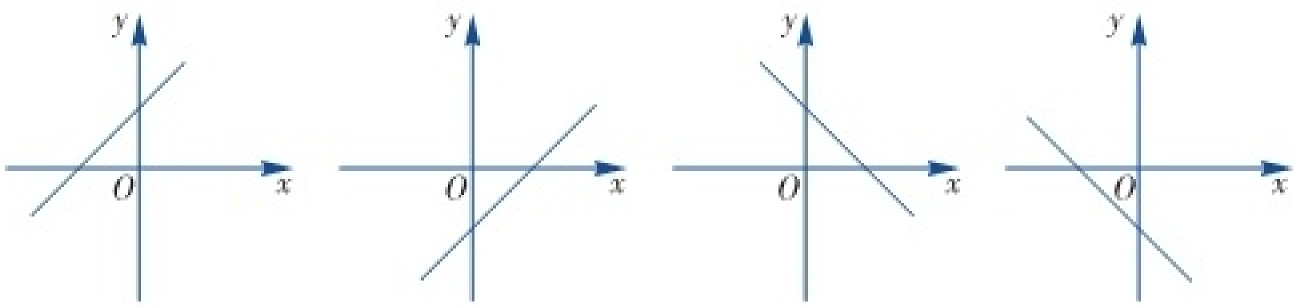
4. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图象：

$$y=x-1，y=\frac{1}{4}x-1，y=3x-1.$$

你能不能看出哪条直线的“坡度比较陡”，即哪个函数的函数值随自变量的增大而增大得更快呢？

5. 画出直线 $y=5x+5$ 的图象，你能写出图象与 x 轴的交点的坐标吗？还能写出这条直线与 y 轴的交点的坐标吗？

6. 正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的函数值 y 随 x 的增大而增大，则一次函数 $y=x+k$ 的图象大致是（　　）



（A）　（B）　（C）　（D）

7. 像 $y=2$ 这样的函数称为常值函数，试画出函数 $y=2$ 的图象.

4.4 用待定系数法确定一次函数表达式

许多实际问题的解决都需要求出一次函数的表达式. 怎样才能简便地求出一次函数的表达式呢?

探究

如图 4-14，已知一次函数的图象经过 $P(0, -1)$，$Q(1, 1)$ 两点. 怎样确定这个一次函数的表达式呢?

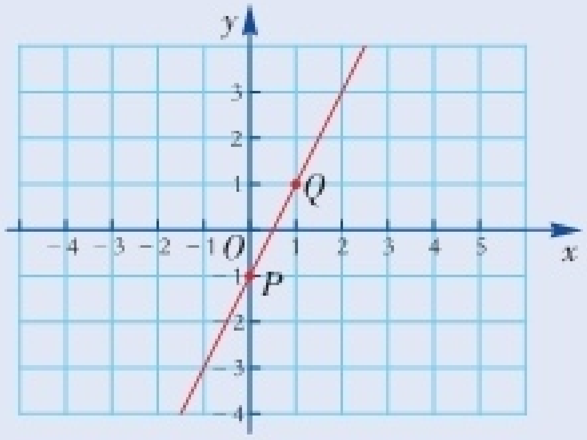


图 4-14

因为一次函数的一般形式是 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$），要求出一次函数的表达式，关键是要确定 k，b 的值（即待定的系数）.

因为 $P(0, -1)$ 和 $Q(1, 1)$ 都在该函数图象上，因此它们的坐标应满足 $y=kx+b$，将这两点坐标代入该式中，得到一个关于 k，b 的二元一次方程组:

$$\begin{cases} k\cdot 0+b=-1, \\ k+b=1. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} k=2, \\ b=-1. \end{cases}$

所以，这个一次函数的表达式为 $y=2x-1$.

像这样，通过先设定函数表达式（确定函数模型），再根据条件确定表达式中的未知系数，从而求出函数的表达式的方法称为**待定系数法**（method of undetermined coefficients）.

议一议

要确定正比例函数的表达式需要几个条件? 举例和大家交流.

例 1 温度的度量有两种：摄氏温度和华氏温度. 在 1 个标准大气压下，水的沸点是 100 ℃，用华氏温度度量为 212 °F；水的冰点是 0 ℃，用华氏温度度量为 32 °F. 已知摄氏温度与华氏温度满足一次函数关系，你能不能想出一个办法将华氏温度换算成摄氏温度？

解 用 C，F 分别表示摄氏温度与华氏温度，由于摄氏温度与华氏温度的关系近似于一次函数关系，因此可以设

$$C=kF+b,$$

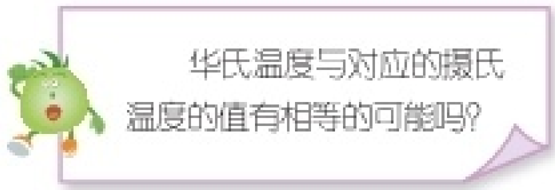
由已知条件，得

$$\begin{cases}212k+b=100,\\32k+b=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $k=\dfrac{5}{9}$，$b=-\dfrac{160}{9}$.

因此摄氏温度与华氏温度的函数表达式为

$$C=\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}.$$



有了这个表达式就可以将华氏温度换算成摄氏温度了.

例 2 某种拖拉机的油箱可储油 40 L，加满油并开始工作后，油箱中的剩余油量 y(L) 与工作时间 x(h) 之间为一次函数关系，函数图象如图 4–15 所示.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）一箱油可供拖拉机工作几小时？

解 （1）设一次函数的表达式为 $y=kx+b$ ，

由于点 $P(2，30)$，$Q(6，10)$ 都在一次函数图象上，将这两点坐标代入表达式，得

$$\begin{cases}2k+b=30,\\6k+b=10.\end{cases}$$

解得 $k=-5$ ，$b=40$.

所以 $y=-5x+40$.

（2）当剩余油量为 0 时，即 $y=0$ 时，

得 $$-5x+40=0\ ,\ x=8.$$

所以一箱油可供拖拉机工作 8 h.

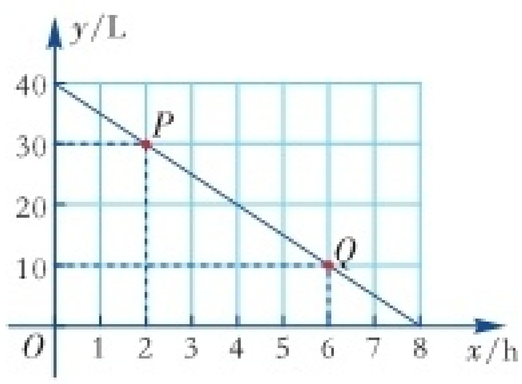


图 4–15

练习

1. 把 84 ℉换算成摄氏温度.

2. 已知一次函数的图象经过两点 $A(-1,3)$，$B(2,-5)$，求这个函数的表达式.

3. 酒精的体积随温度的升高而增大，体积与温度之间在一定范围内近似于一次函数关系，现测得一定量的酒精在 0 ℃时的体积为 5.250 L，在 40 ℃时的体积为 5.481 L，求这些酒精在 10 ℃和 30 ℃时的体积各是多少？

习题 4.4

A 组

1. 已知正比例函数的图象经过点 $M(-1,5)$，求这个函数的表达式.

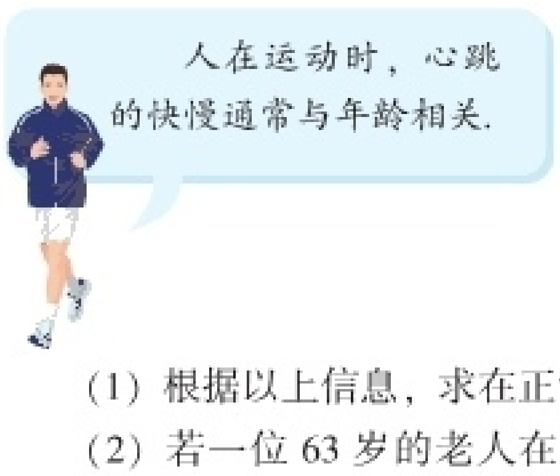
2. 已知 y 是 x 的一次函数，且当 $x=4$ 时，$y=9$；当 $x=6$ 时，$y=-1$.

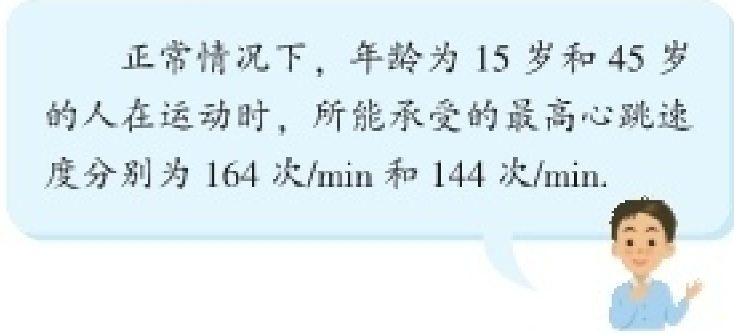
(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，求 y 的值；

(3) 当 $y=7$ 时，求自变量 x 的值.

3. 医学研究表明，在正常情况下，人在运动时所能承受的每分钟心跳的最高次数 S(次) 与人的年龄 n(岁) 近似于一次函数关系.





(1) 根据以上信息，求在正常情况下，S 关于 n 的函数表达式；

(2) 若一位 63 岁的老人在跑步机上锻炼，仪器测得他 10 s 的心跳为 24 次，问他心跳是否正常？

B 组

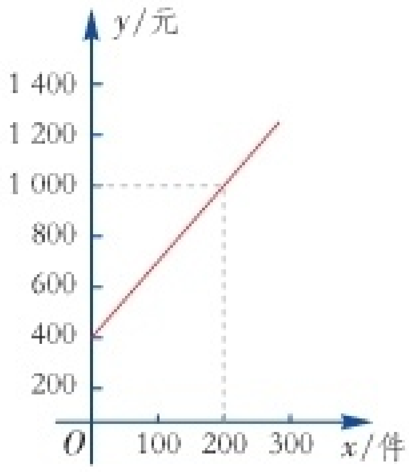
4. 已知 $y-3$ 与 x 成正比例，且 $x=2$ 时，$y=7$.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）当 $x=-\frac{1}{2}$时，求 y 的值；

（3）将所得函数的图象平移，使它过点（2，-1），求平移后图象的表达式.

5. 某商场的营业员小李销售某种商品，她的月收入与她该月的销售量之间成一次函数关系，其图象如图所示.



（第 5 题图）

根据图象提供的信息，解答下列问题：

（1）小李在没有销售量时的收入是多少元？

（2）求小李的月收入 y(元) 关于月销售量 x(件) 的函数表达式；

（3）已知小李 4 月份的销售量为 250 件，小李 4 月份的收入是多少元？

4.5 一次函数的应用

动脑筋

某地为保护环境，鼓励节约用电，实行阶梯电价制度．规定每户居民每月用电量不超过 160 kW·h，则按 0.6 元/(kW·h) 收费；若超过 160 kW·h，则超出部分每 1 kW·h 加收 0.1 元．

（1）写出某户居民某月应缴纳的电费 y(元) 与用电量 x(kW·h) 之间的函数表达式；

（2）画出这个函数的图象；

（3）小王家 3 月份，4 月份分别用电 150 kW·h 和 200 kW·h，应缴纳电费各多少元？

（1）电费与用电量相关．

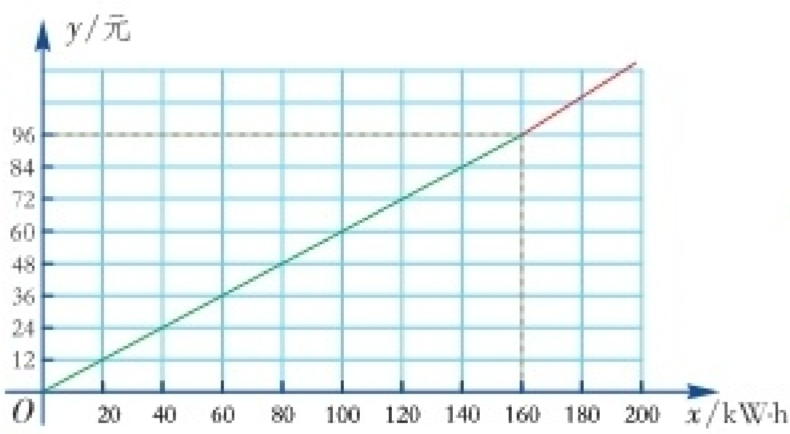
当 $0 \leqslant x \leqslant 160$ 时，$y = 0.6x$；

当 $x > 160$ 时，$y = 160 \times 0.6 + (x - 160) \times (0.6 + 0.1) = 0.7x - 16$．

y 与 x的函数表达式也可以合起来表示为

$$y = \begin{cases} 0.6x & (0 \leqslant x \leqslant 160), \\ 0.7x - 16 & (x > 160). \end{cases}$$

（2）该函数的图象如图 4-16．



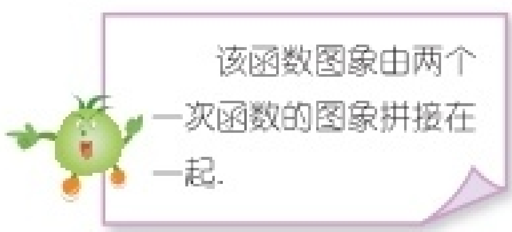


图 4-16

（3）当 $x = 150$ 时，$y = 0.6 \times 150 = 90$，即 3 月份的电费为 90 元．

当 $x = 200$ 时，$y = 0.7 \times 200 - 16 = 124$，即 4 月份的电费为 124 元．

例 1 甲、乙两地相距 40 km，小明 8:00 点骑自行车由甲地去乙地，平均车速为 8 km/h；小红 10:00 坐公共汽车也由甲地去乙地，平均车速为 40 km/h. 设小明所用的时间为 x(h)，小明与甲地的距离为 y_1(km)，小红离甲地的距离为 y_2(km).

（1）分别写出 y_1，y_2 与 x 之间的函数表达式；

（2）在同一个直角坐标系中，画出这两个函数的图象，并指出谁先到达乙地.

解 （1）小明所用时间为 x h，由"路程 = 速度 × 时间"可知 $y_1 = 8x$，自变量 x 的取值范围是 $0 \leqslant x \leqslant 5$.

由于小红比小明晚出发 2 h，因此小红所用时间为（$x-2$）h.

从而 $y_2 = 40(x-2)$，自变量 x 的取值范围是 $2 \leqslant x \leqslant 3$.

（2）将以上两个函数的图象画在同一个直角坐标系中，如图 4-17 所示.

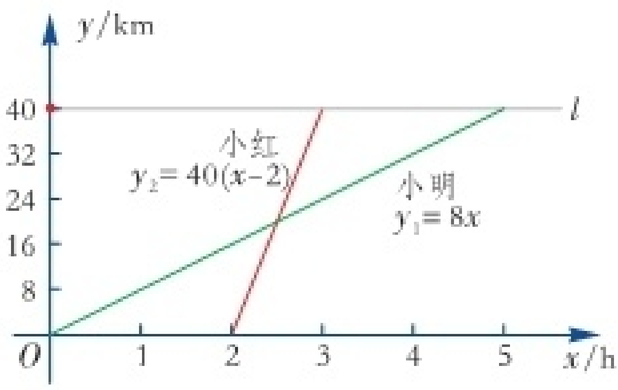


图 4-17

过点 M(0，40）作射线 l 与 x 轴平行，它先与射线 $y_2 = 40(x-2)$ 相交，这表明小红先到达乙地.

练习

1. 某音像店对外出租光盘的收费标准是：每张光盘在出租后头两天的租金为 0.8 元 / 天，以后每天收 0.5 元. 求一张光盘在租出后第 n 天的租金 y(元) 与时间 t(天) 之间的函数表达式.

2. 某移动公司对于移动话费推出两种收费方式：

A 方案：每月收取基本月租费 25 元，另收通话费为 0.36 元/min；

B 方案：零月租费，通话费为 0.5 元/min.

(1) 试写出 A，B 两种方案所付话费 y(元) 与通话时间 t(min) 之间的函数表达式；

(2) 分别画出这两个函数的图象；

(3) 若林先生每月通话 300 min，他选择哪种付费方式比较合算？

动脑筋

奥运会早期，男子撑杆跳高的纪录如下表所示：

年份	1900	1904	1908
高度（m）	3.33	3.53	3.73

观察这个表中第二行的数据，你能为奥运会的撑杆跳高纪录与奥运年份的关系建立函数模型吗？

上表中每一届纪录比上一届的纪录提高了 0.2 m，可以尝试建立一次函数模型.

用 t 表示从 1900 年起增加的年份，那么，奥运会男子撑杆跳高的纪录 y(m) 与 t 之间的函数表达式可以设为 $y=kt+b$.

由于 $t=0$（即 1900 年）时，撑杆跳高的纪录为 3.33 m；$t=4$（即 1904 年）时，纪录为 3.53 m，因此

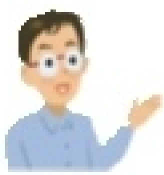
$$\begin{cases} b=3.33, \\ 4k+b=3.53. \end{cases}$$

解得 $b=3.33$，$k=0.05$.

于是 $y=0.05t+3.33$. ①

当 $t=8$ 时，$y=3.73$，这说明 1908 年的撑杆跳高纪录也符合公式①.

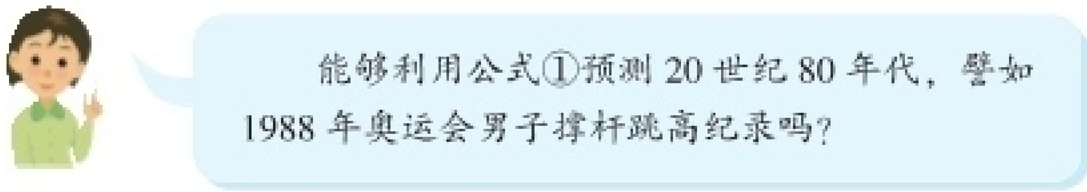
公式①就是奥运会早期男子撑杆跳高纪录 y 与时间 t 之间的函数表达式.



能利用公式①预测 1912 年奥运会的男子撑杆跳高纪录吗？

$$y=0.05\times 12+3.33=3.93.$$

实际上，1912 年奥运会男子撑杆跳高纪录约为 3.93 m. 这表明用所建立的函数模型，在已知数据邻近做预测，结果与实际情况比较吻合.



$$y=0.05\times 88+3.33=7.73.$$

然而，1988 年奥运会的男子撑杆跳高纪录是 5.90 m，远低于 7.73 m. 这表明用所建立的函数模型远离已知数据做预测是不可靠的.

例 2 请每位同学伸出一只手掌，把大拇指与小拇指尽量张开，两指间的距离称为指距. 已知指距与身高具有如下关系：

指距 x（cm）	19	20	21
身高 y（cm）	151	160	169

（1）求身高 y 与指距 x 之间的函数表达式；

（2）当李华的指距为 22 cm 时，你能预测他的身高吗？

解 （1）上表 3 组数据反映了身高 y 与指距 x 之间的对应关系，观察这两个变量之间的变化规律，当指距增加 1 cm，身高就增加 9 cm，可以尝试建立一次函数模型.

设身高 y 与指距 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$.

将 $x=19$，$y=151$ 与 $x=20$，$y=160$ 代入上式，

得 $\begin{cases}19k+b=151,\\20k+b=160.\end{cases}$

解得 $k=9$，$b=-20$.

于是 $y=9x-20$. ①

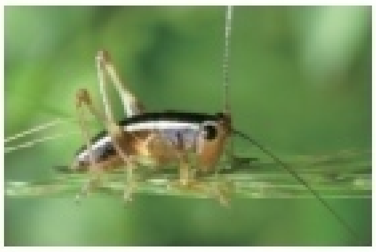
将 $x=21$，$y=169$ 代入①式也符合.

公式①就是身高 y 与指距 x 之间的函数表达式.

（2）当 $x=22$ 时，$y=9\times 22-20=178$.

因此，李华的身高大约是 178 cm.

练习



1. 在某地，人们发现某种蟋蟀 1 min 所叫次数与当地气温之间近似为一次函数关系. 下面是蟋蟀所叫次数与气温变化情况对照表：

温度（℃）	…	15	17	20	…
蟋蟀叫的次数	…	84	98	119	…

（1）根据表中数据确定该一次函数的表达式；

（2）如果蟋蟀 1 min 叫了 63 次，那么该地当时的气温大约为多少摄氏度？

（3）能用所求出的函数模型来预测蟋蟀在 0 ℃时所鸣叫的次数吗？

2. 某商店今年 7 月初销售纯净水的数量如下表所示：

日期	1	2	3
数量（瓶）	160	165	170

（1）你能为销售纯净水的数量与时间之间的关系建立函数模型吗？

（2）用求出的函数表达式预测今年 7 月 5 日该商店销售纯净水的数量.

动脑筋

一次函数 $y=5-x$ 的图象如图 4-18 所示.

（1）方程 $x+y=5$ 的解有多少个？写出其中的几个.

（2）在直角坐标系中分别描出以这些解为坐标的点，它们在一次函数 $y=5-x$ 的图象上吗？

（3）在一次函数 $y=5-x$ 的图象上任取一点，它的坐标满足方程 $x+y=5$ 吗？

（4）以方程 $x+y=5$ 的解为坐标的所有点组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象相同吗？

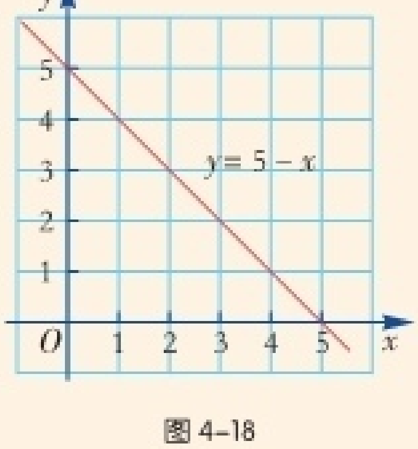


图 4-18

我们知道二元一次方程 $x+y=5$ 的解有无数组，以这些解为坐标的点在一次函数 $y=5-x$ 的图象上. 将方程 $x+y=5$ 化成一次函数的形式：$y=5-x$，易知该一次函数的图象上任意一点的坐标也满足方程 $x+y=5$.

事实上，以二元一次方程 $x+y=5$ 的解为坐标的点所组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象完全相同.

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 图象上任意一点的坐标都是二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的一个解，以二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的解为坐标的点都在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上.

动脑筋

你能找到下面两个问题之间的联系吗？

（1）解方程：$3x-6=0$.

（2）已知一次函数 $y=3x-6$，问 x 取何值时，$y=0$？

（1）方程 $3x-6=0$ 的解为 $x=2$.

（2）画出函数 $y=3x-6$ 的图象（如图 4–19），从图中可以看出，一次函数 $y=3x-6$ 的图象与 x 轴交于点（2，0），这就是当 $y=0$ 时，得 $x=2$，而 $x=2$ 正是方程 $3x-6=0$ 的解.

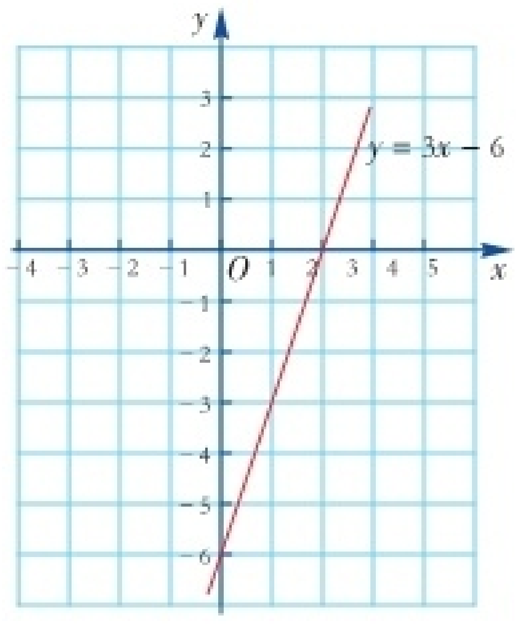


图 4–19

一般地，一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象与 x 轴的交点的横坐标是一元一次方程 $kx+b=0$ 的解. 任何一个一元一次方程 $kx+b=0$ 的解，就是一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

例 3 已知一次函数 $y=2x+6$，求这个函数的图象与 x 轴交点的横坐标.

解法一 （1）令 $y=0$，解方程 $2x+6=0$，得

$$x=-3.$$

所以一次函数 $y=2x+6$ 的图象与 x 轴交点的横坐标为 -3.

解法二 画出函数 $y=2x+6$ 的图象（如图 4-20），直线 $y=2x+6$ 与 x 轴交于点 $(-3, 0)$，所以该图象与 x 轴交点的横坐标为 -3.

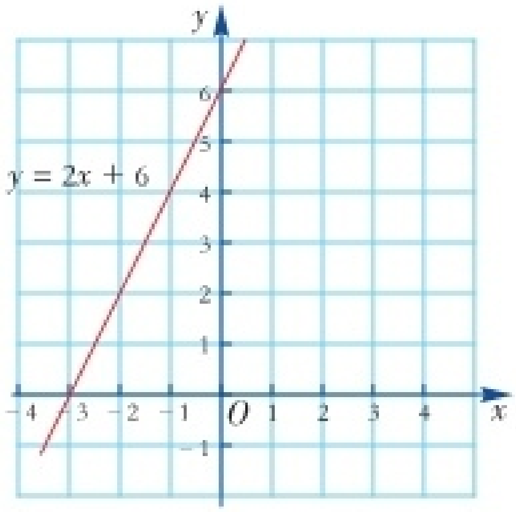


图 4-20

上面这两种解法分别从“数”与“形”的角度出发来解决问题.

练习

1. 把下列二元一次方程改写成 $y=kx+b$ 的形式.

（1）$3x+y=7$；（2）$3x+4y=13$.

2. 已知函数 $y=3x+9$，自变量满足什么条件时，$y=0$？

3. 利用函数图象，解方程 $3x-9=0$.

习题 4.5

A 组

1. 某商店一种商品的定价为每件 20 元. 商店为了促销，决定如果购买 5 件以上，则超过 5 件的部分打七折.

（1）用表达式表示购买这种商品的货款 y（元）与购买数量 x（件）之间的函数关系；

（2）当 $x=4$，$x=6$ 时，货款分别为多少元？

2. 某食品公司到果园基地购买优质柑橘，果园基地对购买量在 3 000 kg 以上（含 3 000 kg）的有两种销售方案. 甲方案：每千克 9 元，由基地送货上门. 乙方案：每千克 8 元，由顾客自己租车运回. 已知该公司租车从基地到公司的运输费为 5 000 元.

（1）分别写出该公司两种购买方案的应付款额 y(元) 与所购买的水果量 x(kg) 之间的函数表达式，并指出自变量 x 的取值范围.

（2）若购买量分别为 4 500 kg，5 100 kg，选择哪种购买方案付款少？试说明理由.

3. 变量 y 随着变量 x 的变化而变化，且测得如下数据：

x	1	1.05	1.10	1.15	1.20
y	1	1.10	1.20	1.30	1.40

（1）你能为变量 y 与 x 的关系建立函数模型吗？

（2）当 $x=1.08$ 时，y 等于多少？

（3）用所求出的函数表达式预测 $x=1.25$ 时，y 等于多少？

4. 小明在练习 100 m 短跑，今年1~4 月份的 100 m 短跑成绩如下表所示：

月 份	1	2	3	4
成 绩（s）	15.6	15.4	15.2	15

（1）你能为小明的 100 m 短跑成绩与时间（月份）之间的关系建立函数模型吗？

（2）用所求出的函数表达式预测小明今年 6 月份的 100 m 短跑成绩.

（3）能用所求出的表达式预测小明明年 12 月份的 100 m 短跑成绩吗？

5. 画出函数 $y=-2x+3$ 的图象，结合图象求方程 $-2x+3=0$ 的解.

B 组

6. 小刚和小强在一条由西向东的公路上行走，出发的时间相同. 小强从 A 地出发，小刚从小强东边 80 m 处出发. 小刚、小强每分钟分别走 40 m，60 m.

（1）分别写出小刚、小强离 A 地的距离 y(m) 与行走时间 t(min) 之间的函数表达式.

（2）在同一个直角坐标系中，分别画出上述两个函数的图象.

（3）你能从图象上看出，在出发后几分钟小强追上小刚吗？

（4）你能从图象上看出，谁先到达与 A 地相距 300 m 的 B 地吗？

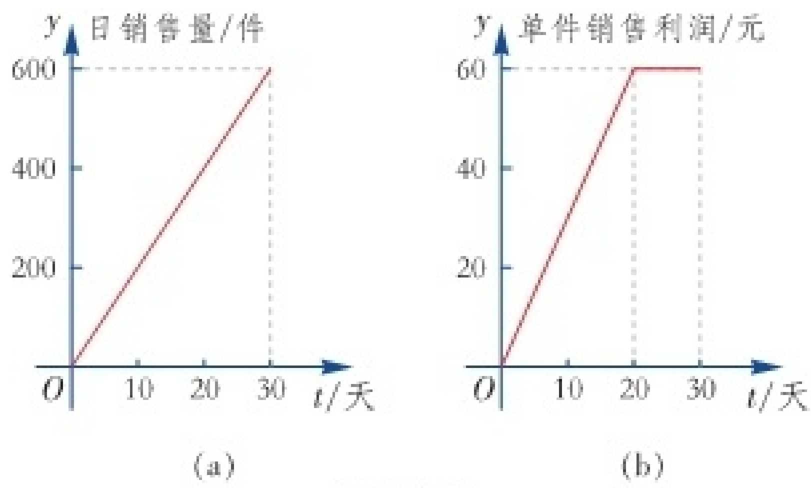
7. 某商品的单价为 60 元时，销售量为 8 000 件，由此开始，价格每提高 1 元，需求量就减少 500 件.

(1) 用表达式表示这种商品的需求量 y(件) 与单价 x(元) 之间的函数关系，其中 $x \geqslant 60$；

(2) 当价格为 70 元时，这种商品的需求量是多少?

(3) 当价格提高到多少元时，这种商品就卖不出去了?

8. A 公司专销某产品，第一批产品上市 30 天内全部售完. 该公司对第一批产品上市后的市场销售情况进行了跟踪调查，调查结果如图所示，其中，图 (a) 中的线段表示的是市场日销售量与上市时间之间的关系，图 (b) 中的折线段表示的是单件产品的销售利润与上市时间之间的关系.



(第 8 题图)

(1) 试写出第一批产品的市场日销售量 y(件) 与上市时间 t(天) 之间的函数表达式；

(2) 第一批产品上市后，哪一天这家公司的市场日销售利润最大? 最大日销售利润是多少万元?

用计算机绘制一次函数的图象

1. 打开“几何画板”，选择【绘图】菜单，点击【绘制新函数】，如图 1 所示，弹出【新建函数】对话框，如图 2 所示.

图 1

图 2

2. 在弹出对话框中输入“$2x+3$”，点击“确定”按钮，则在工作区中出现“$y=2x+3$”的图象，如图 3 所示.

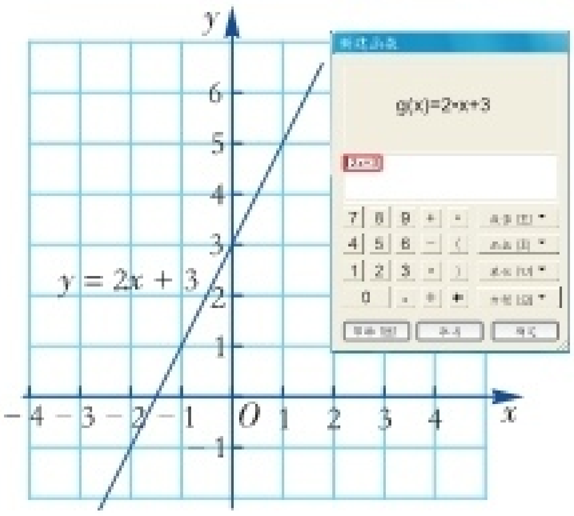


图 3

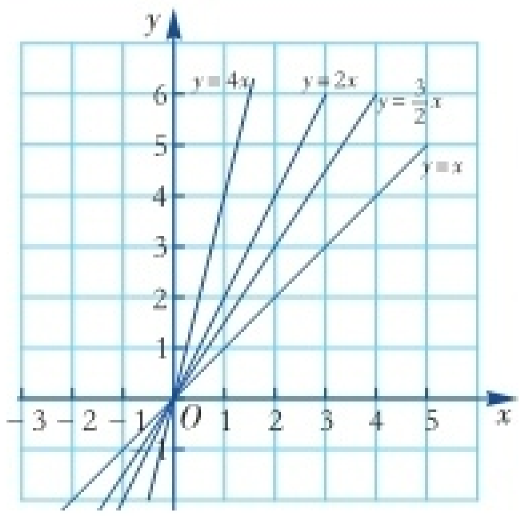


图 4

3. 在同一坐标系中作出 $y=x$，$y=\dfrac{3x}{2}$，$y=2x$，$y=4x$ 的图象，如图 4 所示，你能发现哪个图象更“陡”，这与系数 k 有什么关系吗?

4. 用同样的方法分别作出 $y=3x$，$y=3x-2$，$y=3x+6$ 的图象，你发现它们之间的位置有什么关系?

5. 你能利用几何画板作出 $x=2$ 和 $y=2$ 的图象吗? 试试看.

小结与复习

回顾

1. 举例说明什么是函数，指出其中的自变量和因变量.

2. 函数有哪些表示方法？它们各有什么特点？

3. 什么是一次函数？什么是正比例函数？它们之间有什么关系？

4. 正比例函数 $y=kx$ 的图象与一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象有何关系？它们各具有什么性质？

5. 举例说明如何用待定系数法求一次函数的表达式.

6. 一次函数与二元一次方程有何关系？

本章知识结构

注意

1. 在本章学习中，我们经历了从具体情境中抽象出数学问题，用函数表达式表示问题中的数量关系，进而得到函数模型这一过程，注意体会函数是刻画现实世界数量关系的有效模型.

2. 研究函数问题时，通过函数图象可以数形结合地研究函数，有助于我们更全面地掌握函数的特征.

3. 在研究函数问题时，要关注函数自变量的取值范围. 函数表达式本身以及实际问题中自变量代表的意义对自变量有限制.

复习题 4

A 组

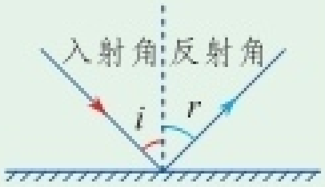
1. 下列各小题中的说法对不对？为什么？

（1）圆的周长 C 是它的半径 r 的函数；

（2）周长为 10 cm 的矩形的面积 S 是它的一条边长 x 的函数；

（3）菱形的面积 S 是它的一条对角线长 x 的函数；

（4）入射光线照射到平面镜上，如果入射角的度数为 i，反射角的度数为 r，那么 r 是 i 的函数.



（第 1 题图）

2. 指出第 1 题中函数例子的自变量和因变量.

3. 某复印店用 A4 纸复印一张收费 0.1 元，用公式法表示收费 y(元) 与复印数量 x（张）之间的函数关系，这是不是正比例函数？画出它的图象.

4. 某型号体温计中，刻度为 35 ℃处，水银柱长 2.5 cm. 体温每升高 1 ℃，水银柱就伸长 0.7 cm.

（1）求水银柱长 y(cm) 随体温 x(℃) 而变化的函数表达式，其中$35 \leqslant x \leqslant 42$. 这是不是一次函数？画出它的图象.

（2）分别求当体温为 37 ℃，38.6 ℃时，水银柱长多少？

5. 在同一直角坐标系中，画出下列一次函数的图象，并利用图象法和公式法分别求出该函数图象与 x 轴的交点.

（1）$y=\frac{1}{2}x+3$；　　（2）$y=2x-1$；　　（3）$y=-3x+5$.

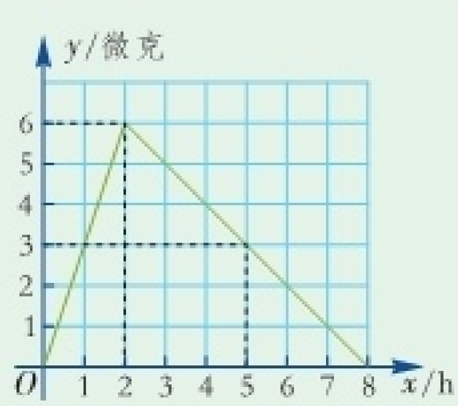
6. 某医药生产厂家研制了一种新药，经临床试验发现，成人按规定剂量服用，每毫升血液中含药量 y(微克) 随时间 x(h) 而变化的情况如图所示.

（1）写出 $x \leqslant 2$ 与 $x>2$ 时，y 与 x 之间的函数表达式；

（2）当成人每毫升血液中含药量为 3 微克以上时，他服药已经多长时间了？

（3）当服药 4 h 后，血液中含药量为多少微克？

（4）研究表明，当血液中含药量 $y \geqslant 3$（微克）时，对治疗疾病有效，则有效时间有多长？



（第 6 题图）

（5）服药后经过多长时间，人体内无药量？

7. 某公司急需租一辆汽车，甲汽车出租公司的出租条件为每千米的租车费为 2 元，乙汽车出租公司的条件是每月需支付固定租金 800 元，另外每千米的租车费为 1.2 元. 若设汽车行驶路程为 x(km)，租用甲公司的费用为 y_1(元)，租用乙公司的费用为 y_2(元).

（1）分别写出 y_1，y_2 随 x 而变化的函数表达式；

（2）在 1 个月内，当汽车行驶路程超过多少千米时，租用乙公司的汽车较合算？

8. 如图是全球在 2004—2006 年的 DVD 销售数量统计图.

（第 8 题图）

（1）观察图中数据，你能为 DVD 销售数量与年份建立函数模型吗？

（2）若 2007 年全球 DVD 的销售量为 3 450 万台，与你所建立的函数模型基本吻合吗？

（3）考虑到计算机的普及和网络视频的冲击，你认为还能用该函数模型来预测 2010 年的 DVD 销售量吗？

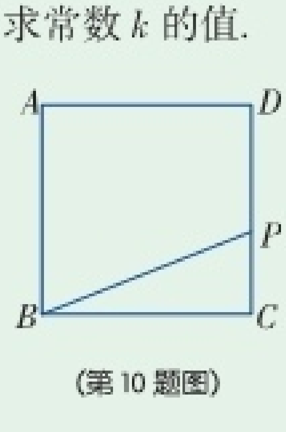
B 组

9. 若直线 $y=kx+6$ 与两坐标轴所围成的三角形面积是 24，求常数 k 的值.

10. 如图为边长是 2 的正方形 $ABCD$，点 P 在 CD 上，且从点 C 运动到点 D. 设$CP=x$，四边形 $ABPD$ 的面积为 y.

（1）求 y与 x 之间的函数表达式及 x 的取值范围；

（2）说明是否存在点 P，使四边形 $ABPD$ 的面积为 1.5.



（第 10 题图）

11. 某一天小军从家里走路去学校，开始 10 min，他每分钟走 60 m；然后他越走越快，过了 5 min 后，他每分钟

走 80 m，再经过 6 min，到达了学校. 小军走路的速度 v 是时间 t 的函数，画出这个函数可能的图象.

C 组

12. 正方形的面积 S 是边长 x 的函数，它的表达式是$S=x^2$. 如果正方形的边长的变化范围很小，例如 x 从 1 变到 1.08，我们来观察面积 S 的变化情况：

x	1	1.02	1.04	1.06	1.08
y	1	1.040	1.082	1.124	1.166

（1）分别计算 x 从 1 变到 1.02，从 1.02 变到 1.04，从 1.04 变到 1.06，从 1.06 变到 1.08 时，面积 S 增大了多少；

（2）根据第(1)题的计算结果，当边长 x 从 1 变到 1.08 时，正方形的面积 S 可不可以看成边长 x 的一次函数？由此受到启发，你能做出什么猜测？

13. 某城市的一种出租汽车，当行驶路程小于 3 km 时，车费都为 10 元；大于或等于 3 km，但小于 15 km 时，超过 3 km 的那部分路程每千米收费 1.6 元；大于或等于 15 km 时，超过 15 km 的那部分每千米收费 2.4 元. 乘客为了估算应付的车费，需要一个较简单的计费公式.

（1）你能给出估算车费 y(元）与行驶路程 x(km）之间的函数表达式吗？

（2）画出这个函数的图象；

（3）当行驶路程为 30 km 时，估算车费是多少？

第5章

数据的频数分布

在前面的学习中，我们知道平均数、中位数、众数以及方差从不同的方面概括地描述了一组数据的特征性质．但为了更全面地掌握一组数据，我们需要对这组数据的分布情况进行分析．例如某射击运动员进行射击训练，教练员需要根据前一阶段的得分情况进行分析，这就需要用到频数和频数直方图．

那么什么叫频数，什么叫频率？怎样绘制频数分布表和频数直方图来反映数据的分布情况？这将是我们在本章要学习的主要内容．

5.1 频数与频率

在前面的学习中，我们知道一组数据的平均数（中位数、众数）、方差反映了这组数据一般的、全局的性质，但这还不够，在许多实际问题中，我们还需要对收集的数据进行必要的归纳和整理，了解其分布情况，从而更具体地掌握这组数据.

动脑筋

为推广全民健身运动，某单位组织员工进行爬山比赛，50 名报名者的年龄如下：

22	25	27	35	37	49	48	52	57	59	60	26	58
39	41	45	47	23	26	30	32	33	36	43	29	20
23	20	51	53	50	34	38	58	26	48	34	37	
51	55	21	38	40	54	42	60	21	25	26	55	

为了公平起见，拟分成青年组（35 岁以下）、中年组（35~50 岁）、老年组（50 岁以上）进行分组竞赛.

请用整理数据的方法，借助统计图表将上述数据进行表述.

可以采用“画记”的方法得到下表：

组　别	画　记	报名人数
青年组（35 岁以下）	正 正 正 正	20
中年组（35~50 岁）	正 正 正 丅	17
老年组（50 岁以上）	正 正 下	13

根据上表可以发现，青年组报名人数最多，中年组其次，老年组最少.

我们把在不同小组中的数据个数称为**频数**（absolute frequency），例如上表

中 20，17，13 分别是青年组、中年组、老年组的频数. 我们把每一组的频数与数据总数的比叫作这一组数据的**频率**（relative frequency），例如上表中青年组的频数为 20，频率为 $\frac{20}{50}=0.4$.

我们还可以用条形图（图 5-1）来表示各组人数.

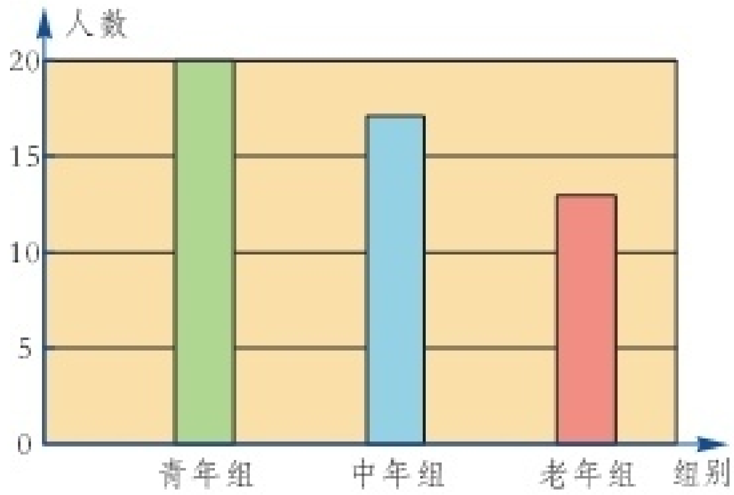


图 5-1

例 小芳参加校射击队，在一次射击训练中，她先射击了 15 次，教练对其射击方法作了一些指导后，又射击了 15 次. 她两次射击得分情况如下表所示：

前 15 次射击得分情况

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
环数	7	8	7	7	8	9	8	8	9	7	8	7	7	9	9

后 15 次射击得分情况

次数	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
环数	8	8	7	10	8	9	9	8	9	10	10	9	9	8	10

（1）用表格表示小芳射击训练中前 15 次和后 15 次射击得分的频数和频率.

（2）分别求出前 15 次和后 15 次射击得分的平均数（精确到 0.01），比较射击成绩的变化.

解 （1）经整理，各个数据的频数和频率如下：

前 15 次射击得分情况

环 数	7	8	9	10
频 数	6	5	4	0
频 率	0.40	0.33	0.27	0

后 15 次射击得分情况

环 数	7	8	9	10
频 数	1	5	5	4
频 率	0.07	0.33	0.33	0.27

从表中可以看出，小芳前 15 次的射击成绩中，7 环最多，8 环其次，9 环较少，10 环没有；后 15 次射击成绩中，7 环最少，8 环和 9 环最多，10 环有 4 次.

（2）前 15 次射击成绩的平均数是：

$$\frac{7\times6+8\times5+9\times4+10\times0}{15}$$

$$=7\times\frac{6}{15}+8\times\frac{5}{15}+9\times\frac{4}{15}+10\times\frac{0}{15}\approx7.87.$$

可以发现前 15 次射击成绩的平均值是以频率为权的加权平均.

同理可求得后 15 次射击成绩的平均数是 8.80.

后 15 次平均数大，说明经过调整射击方法后，小芳得高分的次数增加，平均成绩得到了提高.

练习

某班进行 1 min 跳绳测验，40 名同学跳绳的成绩（单位：次）如下：

100	50	120	90	70	80	110	120	130	140
75	85	97	108	111	118	122	98	80	90
98	102	106	60	65	99	100	116	107	98
80	86	97	99	101	88	146	117	95	116

（1）按每分钟不足 60 次为“不达标”，60～90 次为“良”，90 次以上为“优”，编制成绩统计表（用频数和频率表示）.

（2）计算这个班的达标率.

一枚硬币有两面，我们称有国徽的一面为“正面”，另一面为“反面”．掷一枚硬币，当硬币落在桌面时，可能出现“正面朝上”，也可能出现“反面朝上”．每次掷币，两种情形必然出现一种，也只能出现一种．究竟出现哪种情形，在掷币之前无法预测，只有掷币之后才能知道．

做一做

与同桌同学合作，掷 10 次硬币，并把 10 次试验结果记录下来：

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
结果(填“正”或“反”)										

（1）计算“正面朝上”和“反面朝上”的频数各是多少，它们之间有什么关系？

（2）计算“正面朝上”和“反面朝上”的频率各是多少，它们之间有什么关系？

假设某同学掷 10 次硬币的结果如下：

次 数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
结 果	反	正	正	正	反	反	反	正	反	反

那么，出现“正面朝上”的频数是 4，频率为$\frac{4}{10}=0.4$；出现“反面朝上”的频数是 6，频率为$\frac{6}{10}=0.6$.

可以发现，“正面朝上”和“反面朝上”的频数之和为试验总次数；而这两种情况的频率之和为 1.

一般地，如果重复进行n次试验，某个试验结果出现的次数 m 称为这个试验结果在这 n 次试验中出现的频数，而频数与试验总次数的比$\frac{m}{n}$称为这个试验结果在这 n 次试验中出现的频率.

做一做

一次掷两枚硬币，用 A，B，C 分别代表可能发生的三种情形：

A. 两枚硬币都是“正面朝上”；

B. 两枚硬币都是“反面朝上”；

C. 一枚硬币“正面朝上”，另一枚硬币“反面朝上”.

每次掷币都发生 A，B，C 三种情形中的一种，并且只发生一种.

现在全班同学每人各掷两枚硬币 5 次，记录所得结果，将全班的结果汇总填入下表中，并计算频率.

A，B，C 发生的频数与频率

	频 数	频 率
A		
B		
C		
合计		

说一说，出现哪一种情形的频率高？

练习

全班每组同学抛掷一枚硬币 40 次，记录出现“正面朝上”的结果，将各组试验结果汇总，完成下表：

累计掷币次数	40	80	120	160	200	240
“正面朝上”的频数 m						
“正面朝上”的频率 $\frac{m}{n}$						

根据上表，在下图中绘制“正面朝上”的频率变化折线统计图.

习题 5.1

A 组

1. 某中学八年级(2)班 40 名同学投票选举班长，候选人包括陈佳、彭晓、黄敏和汤伟四位. 为了方便记录，他们的得票分别以 C，P，H，T 来代表，投票结果如下：

P	P	H	C	C	C	T	H	P	T
T	P	H	T	C	C	T	P	P	H
T	H	P	C	P	H	H	T	T	C
T	T	C	H	P	P	T	H	T	P

（1）请根据上述投票结果完成下表：

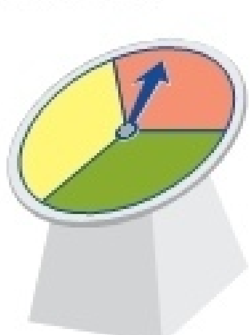
得票人	C	P	H	T
频　数				
频　率				

（2）如果得票最高的候选人被选为班长，则四人中哪一位会当选？

2. 如图为一个转盘，让转盘自由转动 18 次，记录每次指针指向区域的颜色如下：

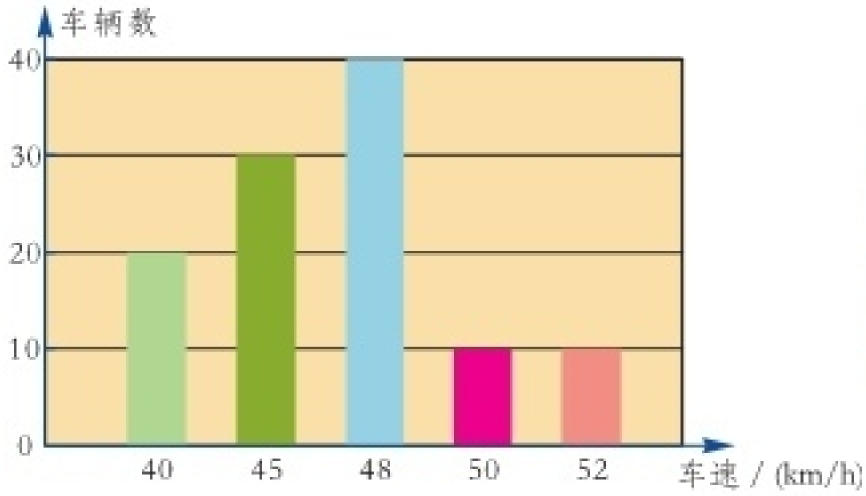
黄　红　绿　绿　红　黄　绿　红　红

黄　绿　红　黄　红　绿　绿　黄　黄



请制作反映指针指向区域颜色的频数分布表，并计算相应的频率.

3. 某城市交警为检测刚建成通车的城市隧道的通行速度，观测到某时段的来往车辆车速（单位：km/h）如下图所示：



（第 3 题图）

（1）计算这些车的平均车速.

（2）以哪一个速度行驶的车辆最多？以不超过 50 km/h 的速度行驶的汽车占总监测量的百分之几？

（3）若要对该隧道的通行速度进行限制，你有什么好的建议？

B 组

4. 某中学为了了解学生的课外阅读情况，就“我最喜爱的课外读物”从文学、艺术、科普和其他四个类别进行了抽样调查（每位同学仅选一项），并根据调查结果制作了下表：

类　别	频数（人数）	频　率
文　学	m	0.42
艺　术	22	0.11
科　普	66	n
其　他		
合　计		1

（1）上表中 $m=$__________，$n=$__________；

（2）在这次抽样调查中，哪类读物最受学生欢迎？ 哪类读物受欢迎程度最少？

（3）若学校计划购买 3 000 册图书，你对购书计划能提出什么好的建议吗？

5. 统计本班同学的到校方式，根据实际情况（例如步行、乘公交车、骑自行车等）分组列出调查结果，求各组的频数与频率，并用统计图表示出来.

5.2 频数直方图

动脑筋

为了了解居民的消费水平，调查组在某社区随机调查某宿舍 30 户家庭 6 月份饮食消费的情况，数据如下表所示：（单位：元）

家庭编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
消费金额	804	844	956	830	780	820	900	830	820	784	820	804	824	740	824
家庭编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
消费金额	812	788	872	758	876	776	796	828	844	766	836	764	838	730	826

如何更直观地了解这 30 户家庭 6 月份饮食消费的分布情况呢？

由于上述数据较多，且分布比较零散，我们需要把这些数据进行必要的归纳和整理，先进行适当分组，并借助表格将各组的频数进行统计整理，以便分析这组数据的分布规律.

（1）分组.

① 确定最小值 m 和最大值 M.

由表中可以看出，29 号家庭月饮食消费最低，3 号家庭月饮食消费最高，故

$$m = 730，M = 956.$$

② 确定组距和组数.

把所有数据分成若干组，每个小组的两个端点数据之间的距离称为组距. 根据问题的需要，各组的组距可以相同也可以彼此不同. 本问题中，我们作等距分组.

为了分组的方便，我们取略小于 m 的数作为第一组的下限，例如取 720；而取略大于 M 的数作为最后一组的上限，例如取 960. 然后将 720 到 960 分成若干组，假定每 40 元为一组(即取组距为 40 元)，则可分为

$$(960 - 720) \div 40 = 6(组).$$

所分 6 组为

$720 \leqslant x < 760$，　$760 \leqslant x < 800$，

$800 \leqslant x < 840$，　$840 \leqslant x < 880$，

$880 \leqslant x < 920$，　$920 \leqslant x < 960$.

组距和组数的确定没有固定的标准，可根据所研究的具体问题来确定．当数据在 100 个以内时，可依数据个数的多少，分成 5~12 组.

（2）列频数分布表.

统计属于每组中的数据的个数(频数)，为避免数据的重复和遗漏，我们仍采用“画记”的方法，得到下面的频数分布表（frequency distribution table）.

调查对象 6 月份饮食消费支出频数分布表

分　组	画　记	频　数
$720 \leqslant x < 760$	下	3
$760 \leqslant x < 800$	正丅	7
$800 \leqslant x < 840$	正正正	14
$840 \leqslant x < 880$	正	4
$880 \leqslant x < 920$	一	1
$920 \leqslant x < 960$	一	1

（3）绘制频数直方图.

为了更直观地反映一组数据的分布情况，可以以频数分布表为基础，绘制频数直方图（简称直方图）（histogram）. 在直角坐标系中，以组距为宽，频数为高作小矩形，就可以得到下面的直方图(图 5-2)：

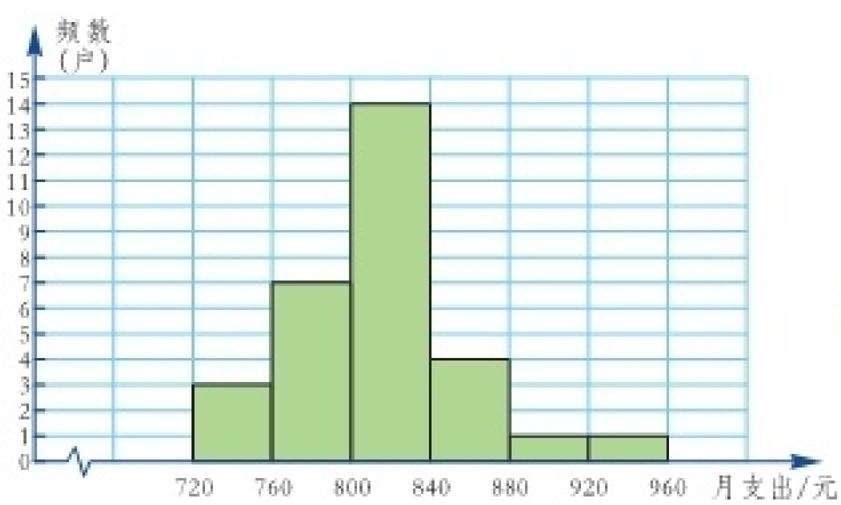


图 5-2

在绘制频数直方图时，应注意：

1. 横轴和纵轴加上适当的刻度，标明各轴所代表的名称和单位.

2. 各个小矩形之间无空隙.

3. 小矩形的边界对应于各组的组界.

议一议

根据图 5-2，你能从频数直方图中获得哪些信息？

（1）这 30 户家庭的饮食消费月支出集中在哪一组？

（2）是支出较高（超过 880 元）的家庭多，还是支出较低（月支出不足 800 元）的家庭多？

（3）请对这 30 户家庭的月饮食消费的整体水平作出评价.

我能看出在各个范围内分布的数据的个数（频数）.

我还能看出这 30 户家庭的月饮食消费水平集中在哪一组.

动脑筋

把图 5-2 中的频数直方图的纵轴改成“频数/组距”，重新计算后得图 5-3，此时，小长方形的面积表示什么？

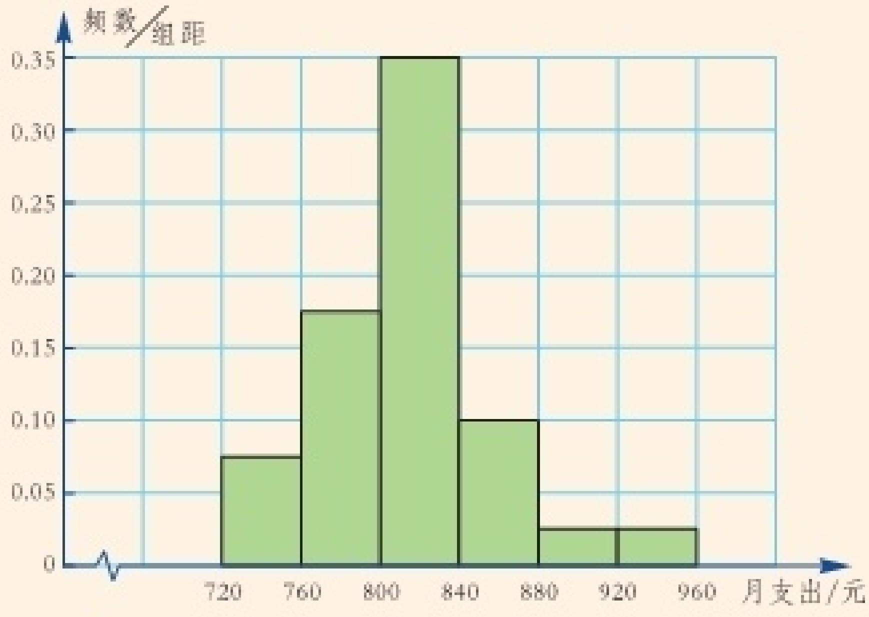


图 5-3

小长方形的面积 = 组距 × $\dfrac{\text{频数}}{\text{组距}}$ = 频数

例 为了了解某中学八年级两个班男生的身体发育情况，对 40 名男生的身高（单位：cm）进行了测量，结果如下：

175	168	170	176	167	181	162	173	171	177
179	172	165	167	172	173	166	177	169	181
160	163	166	177	175	174	173	174	171	171
180	170	165	175	165	174	169	163	166	166

（1）制作样本的频数分布表，绘制频数直方图.

（2）根据频数直方图分析，身高在哪个范围内的人数最多？有多少人？40 名男生的平均身高在这个范围内吗？

解 （1）在样本数据中，最大值是 181，最小值是 160，它们的差是 21.

取组距为 5 cm，则 $\frac{21}{5}=4.2$，可分为 5 组，即 $160 \leqslant x<165$，$165 \leqslant x<170$，$170 \leqslant x<175$，$175 \leqslant x<180$，$180 \leqslant x<185$.

列频数分布表如下：

分 组	画 记	频 数
$160 \leqslant x<165$	正	4
$165 \leqslant x<170$	正正丅	12
$170 \leqslant x<175$	正正下	13
$175 \leqslant x<180$	正下	8
$180 \leqslant x<185$	下	3

根据上表绘制频数直方图，如图 5-4.

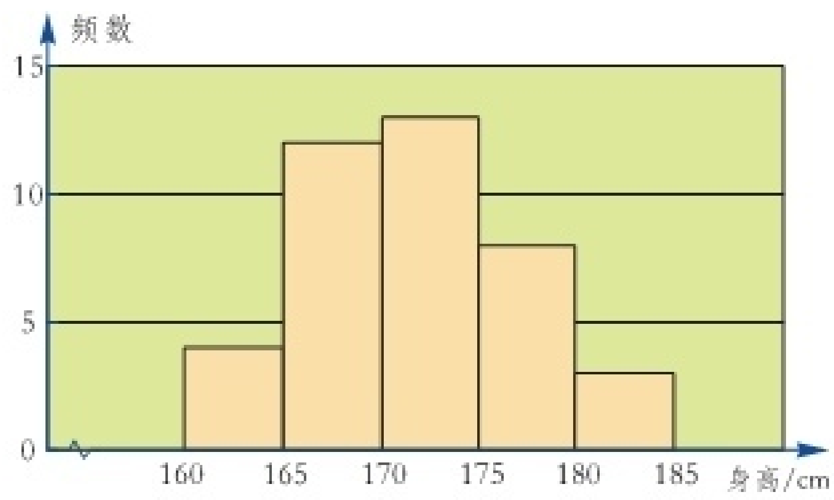
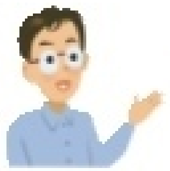


图 5-4

（2）从频数直方图中可以看出，身高在 $170 \leqslant x < 175$ 范围内的人数最多，有 13 人. 通过计算可知这 40 名男生的平均身高是171 cm，在 $170 \leqslant x < 175$ 的范围内.



在对数据的频数分布进行分析时，要善于利用频数直方图解释数据中蕴含的信息.

练习

下列数据为美玲最近 40 次使用移动电话的通话时间（单位：min）记录：

6	11	30	8	28	16	21	8	17	14
20	1	19	14	6	11	7	13	2	23
12	19	9	2	12	16	3	17	15	9
10	25	12	14	6	7	20	5	13	15

（1）将上述数据分组，制作频数分布表，并绘制出频数直方图.

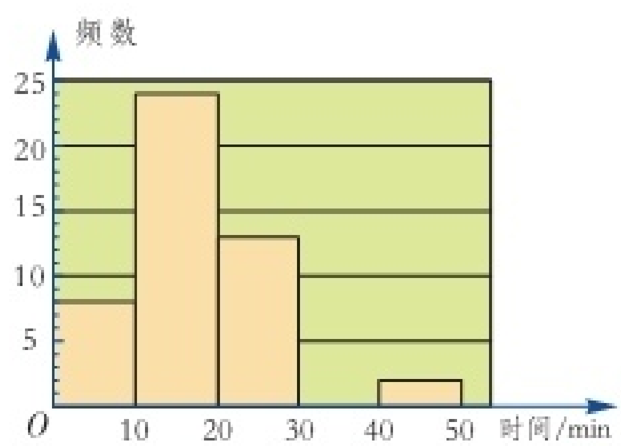
（2）美玲的通话时间在哪个范围内最多？她通话时间的平均值在这个范围内吗？

习题 5.2

A 组

1. 李老师为了了解本班学生的作息时间，调查班上 50 名学生上学路上花费的时间，他发现学生所花时间都少于 50 min，然后将调查数据整理，作出如右图所示的频数直方图的一部分.

（1）补全频数直方图；



（第 1 题图）

（2）该班学生在路上花费的时间在哪个范围内最多？

（3）该班学生上学路上花费时间在 30 min 以上（含 30 min）的人数占全班人数的百分比是多少？

2. 某班 30 名男生跳高成绩（单位：cm）统计如下表：

130	140	110	130	120	130	130	120	130	130	120	130	140	130	130
120	140	130	120	120	130	120	140	110	120	130	130	130	140	130

绘制频数直方图表示这 30 名男生跳高成绩的分布情况，若该班要选出成绩比较好的学生参加年级跳高比赛，应选择哪个范围内的学生参赛呢？

B 组

3. 下面数据是截至 2010 年菲尔兹奖[①]得主获奖时的年龄：

29	39	35	33	39	28	33	35	31	31	37	32	38
36	31	39	32	38	37	34	29	34	38	32	35	36
33	29	32	35	36	38	39	39	40	38	37	39	39
34	35	40	36	36	37	40	31	38	36	40	37	37


菲尔兹奖章

请将以上数据适当分组，制作频数分布表及频数直方图，并说明哪个年龄段的数学家获奖人数最多.

4. 做一统计活动.

（1）统计全班同学的跳远成绩（单位：cm）；

（2）将收集的数据适当分组，列频数分布表；

（3）根据频数分布表，绘制频数直方图；

（4）在频数直方图中，哪一组范围内的人数最多？本班同学的平均跳远成绩在这一段范围内吗？

① 菲尔兹奖是国际上享有崇高声誉的一个数学奖项，每 4 年评选一次，主要授予 40 岁以下作出杰出贡献的数学家.

小结与复习

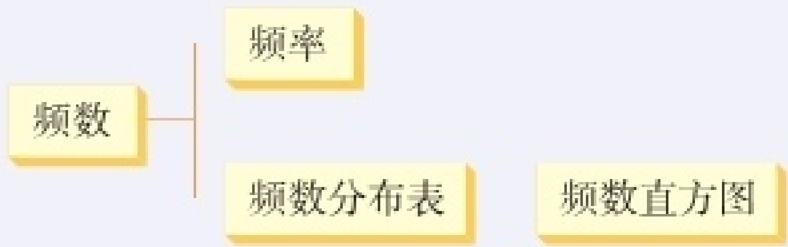
回顾

1. 举例说明频数和频率的意义.

2. 说一说绘制频数直方图的方法和步骤.

3. 试结合实例说明如何利用频数直方图来解释数据中蕴含的信息.

本章知识结构



注意

1. 前面我们已经学会用一些特征数（如平均数、中位数、众数、方差）来描述一组数据在某些方面的特征性质. 这种做法的优点是集中、概括. 但将一组数据提炼为一个数，不可避免地会丢失数据的许多信息. 所以要全面、具体地掌握一组数据，不仅要了解数据的特征性质，还要了解数据的分布情况，而频数直方图能直观地反映一组数据中各数据在不同范围的分布情况，它能比较全面地刻画数据组的本质属性.

2. 绘制频数直方图时，要注意组距的选取，若组距选择太宽，则从直方图中无法读取有用信息；若组距选择太窄，则直方图中可获取的信息少.

3. 频数直方图本质上是一种条形统计图，注意体会它与条形统计图的区别与联系.

复习题 5

A 组

1. 对八年级（1）班全体学生的出生月份进行统计，结果如下：

8	3	1	4	10	11	12	5	6	7
6	5	3	8	7	12	10	11	8	7
1	2	2	3	9	12	8	4	6	5
11	12	10	7	3	5	9	8	2	6

（1）根据以上数据，填写下表：

出生月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
频　数												
频　率												

（2）这个班哪个月份出生的人数最多？哪个月份出生的人数最少？

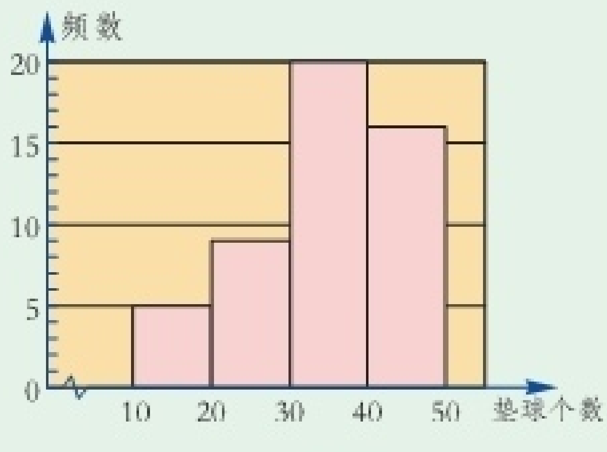
（3）这个班是上半年出生的人数多，还是下半年出生的人数多？

2. 小组合作抛掷一枚均匀的骰子（骰子 6 个面上分别刻有 1，2，3，4，5，6）100 次，制作出现数字 1，2，3，4，5，6 的频数分布表，并计算相应的频率.

3. 某班体育课举行“排球 30 s 对墙垫球比赛”，右图是反映该班垫球成绩的频数直方图.

（1）该班共有多少名学生参加比赛？

（2）垫球数 30 次以上的学生占总人数的百分比是多少？



（第 3 题图）

4. A 城市一报刊亭统计了连续 30 个星期《城市周刊》的销售量（单位：本），结果如下：

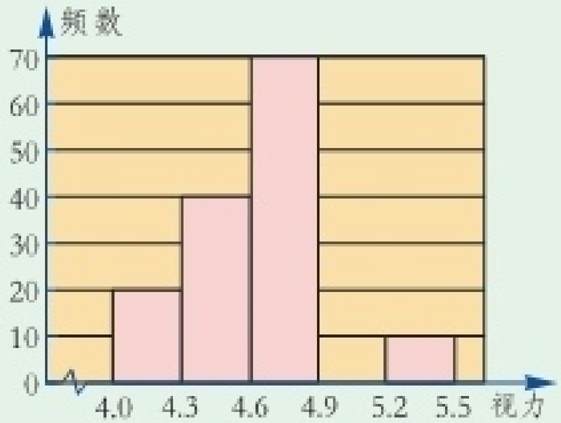
24	19	22	20	21	21	22	20	18	19
19	22	23	20	19	24	26	21	20	19
22	18	21	22	23	18	20	23	22	21

请将上述数据适当分组，制作频数分布表及频数直方图，并分析数据的分布情况.

B 组

5. 某校八年级学生进行了一次视力调查，绘制出频数分布表和频数直方图的一部分如下.

视　力	频数（人数）	频　率
$4.0 \leqslant x < 4.3$	20	0.1
$4.3 \leqslant x < 4.6$	40	0.2
$4.6 \leqslant x < 4.9$	70	0.35
$4.9 \leqslant x < 5.2$	a	0.3
$5.2 \leqslant x < 5.5$	10	b



（第 5 题图）

请根据图表信息回答下列问题：

（1）在频数分布表中，a 的值为 ______，b 的值为 ______；

（2）将频数直方图补充完整；

（3）甲同学说“我的视力情况是此次抽样调查所得数据的中位数”，问甲同学的视力情况在哪个范围内？

（4）若视力在 4.9 以上（含 4.9）均属正常，求视力正常的人数占被调查人数的百分比.

6. 某银行为了提高服务水平，随机调查了 40 名顾客的等待时间（单位：min），结果如下：

2	5	10	3	8	20	25	30	10	15
35	21	7	5	4	18	11	13	20	16
6	12	8	14	15	10	5	21	23	10
3	33	24	15	17	20	27	8	6	16

（1）将数据适当分组，并绘制相应的频数直方图；

（2）这 40 名顾客的平均等待时间是多少？这 40 名顾客的等待时间中，哪一个范围内的人数最多？你对该银行改进服务质量有什么好的建议？

Ⓒ组

7. 据媒体报道：某市 4 月份空气质量优良. 该市某中学八年级课外兴趣小组据此提出了“今年究竟能有多少天空气质量达到优良”的问题，他们上网查出国家环境保护部所公布的环境空气质量标准，见下表.

环境空气质量标准

空气污染指数	$0 \leqslant x \leqslant 50$	$51 \leqslant x \leqslant 100$	$101 \leqslant x \leqslant 150$	$151 \leqslant x \leqslant 200$
空气质量级别	Ⅰ级(优)	Ⅱ级(良)	Ⅲ1(轻微污染)	Ⅲ2(轻度污染)
空气污染指数	$201 \leqslant x \leqslant 250$	$251 \leqslant x \leqslant 300$	大于 300	
空气质量级别	Ⅳ1(中度污染)	Ⅳ2(中度重污染)	Ⅴ(重度污染)	

他们同时查询市环保监测站提供的资料，并从数据中随机抽取了今年 1—4 月份中 30 天的空气污染指数如下：

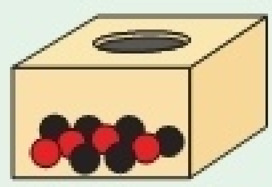
某市 30 天空气污染指数

30	32	40	42	45	45	77	83	85	87
90	113	127	153	132	98	65	50	53	57
64	66	77	92	98	130	46	150	187	201

（1）请根据环境空气质量标准和抽查的空气污染指数，绘制频数直方图.

（2）请根据频数直方图，估计该市今年（按 365 天计算）空气质量是优良（包括Ⅰ、Ⅱ级）的天数，并评估该市的空气质量水平. 到互联网查找资料，与全国其他城市比较，该市处于什么空气质量水平？

8. 箱子中装有 10 个球，球的大小、质量等完全相同，但颜色不同，其中有 6 个球是黑色的，4 个球是红色的. 我们做重复摸球的游戏，每次摸球之后，观察球的颜色，然后放回箱子中，把球搅乱后再摸.



若每次只摸一球，摸球 10 次，然后计算红球出现的频数、频率和黑球出现的频数、频率. 先猜一猜哪个频率可能较大，再具体摸球 10 次，检验你的猜测，并与同伴一起比较你们得到的结果.

数学词汇汉英对照表

（按词汇所在页码出现的先后排序）

后　记

本册教科书是依据教育部颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），在原实验教科书的基础上修订而成的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过.

本书在修订过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧.一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见.在此，对所有为本次修订提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持.对此，我们表示诚挚的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期的任务，我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们.让我们携起手来，共同完成义务教育教科书建设这一光荣的使命！

湖南教育出版社

2013年10月

义务教育教科书

数　学

八年级　下册

责任编辑：胡　旺　钟劲松

湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

客服电话：0731－85486979

湖南出版中心重印

湖南省新华书店发行

湖南天闻新华印务有限公司印装

787×1092　16开　印张：10.75　字数：186000

2004年12月第1版　2021年11月第2版第9次印刷

印数：1—540 000册

ISBN 978－7－5355－4396－7

定价：10.32元(2022春)