国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHU XUE

必修

第一册

江苏凤凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

普通高中教科书

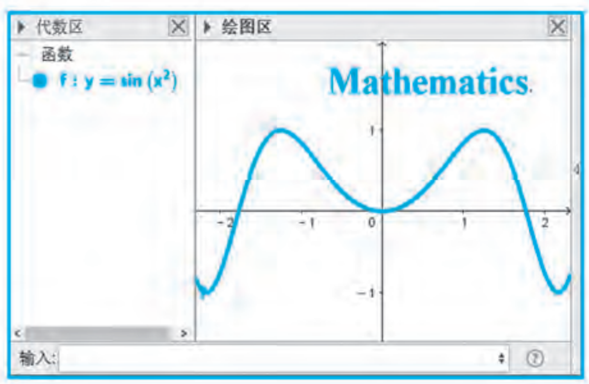
数学

SHU XUE

必修

第一册

苏教版高中数学教材编写组 编著



江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

主　　编　单　塼　李善良

副 主 编　葛　军　徐稼红　石志群

本册主编　葛　军

编写人员　于　明　张松年　葛　军　樊亚东　徐稼红　李善良
　　　　　石志群　孙旭东　张乃达　陈光立　单　塼

责任编辑　田　鹏

大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学，欢迎你进入高中，开始新的数学学习！

我们知道，数学是高中阶段的重要学科，不仅是学习物理、化学等学科的基础，而且可以帮助我们认识世界，改造世界，创造新的生活，对我们的终身发展有较大的影响.

怎样学习数学？

第一，要学会发现问题、提出问题. 面对各种情境（生活的、数学的、科学的），我们需要学会观察、实验、归纳，学会从特殊到一般、从具体到抽象、从模糊到清晰，大胆地提出数学问题.

第二，要尝试分析并解决所提出的问题. 通过抽象、推理、建模、运算等多种活动，建立数学理论，并运用这些数学理论去解决问题.

第三，要学会回顾反思. 在解决完问题之后，要思考：我们是如何解决这个问题的，从中可以得到哪些启发，还能提出哪些问题.

在数学学习过程中，我们要主动地学习数学基础知识、基本技能，自觉地感悟基本数学思想，不断积累数学活动经验，提升数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等核心素养，并逐步学会用数学眼光观察世界、用数学思维思考世界、用数学语言表达世界.

通过数学学习，我们会发现数学非常奇妙，非常有趣. 数学将给我们以新奇和动力，我们的思维水平会不断提高，我们的创造能力会得到发展. 我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、本章回顾、本章测试等内容构成一个完整的体系. 它体现了教科书的基本要求，是所有学生应当掌握的内容，相信你一定能学好这部分内容.

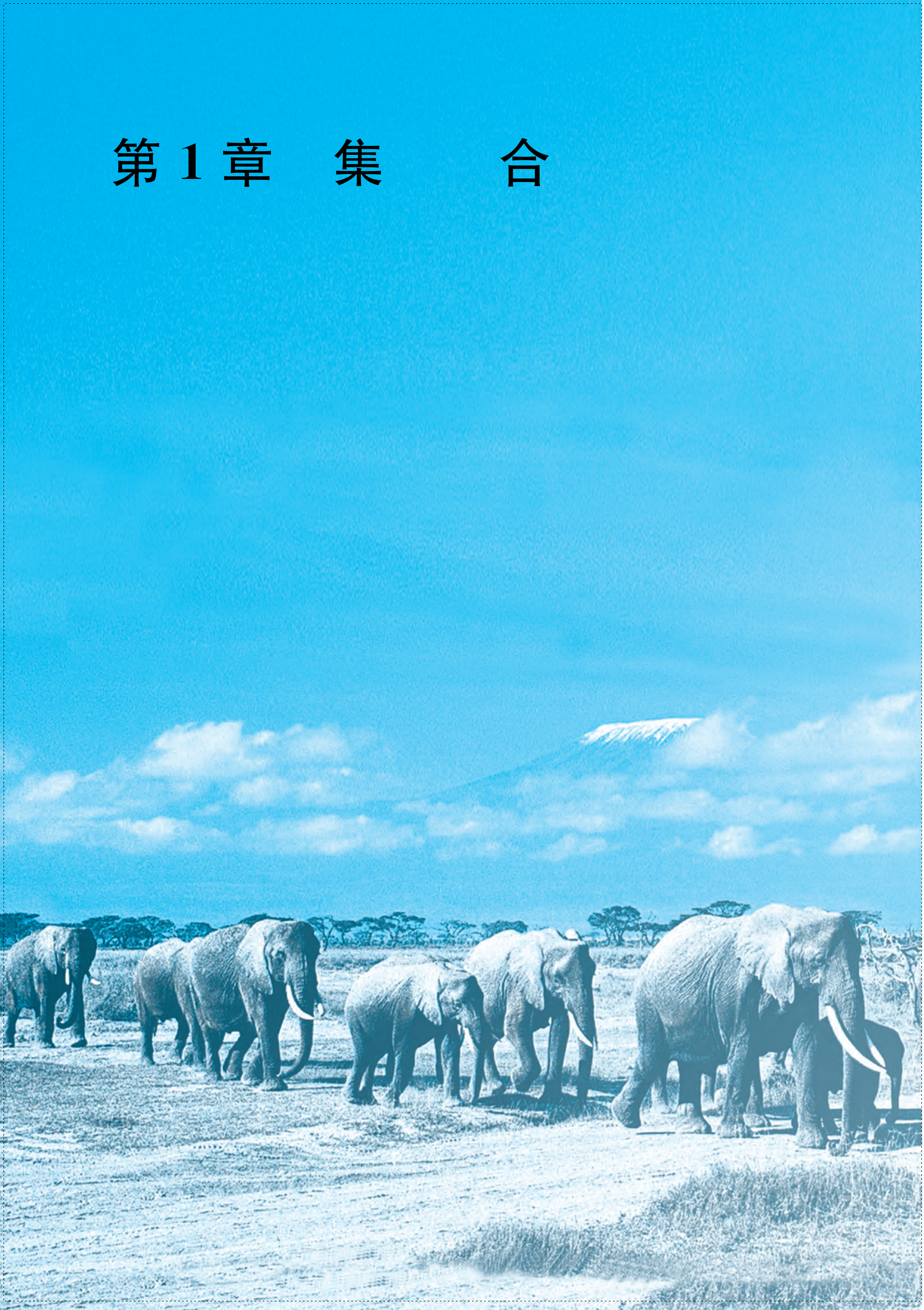
本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接、问题与探究、应用与建模，以及习题中的“思考·运用”“探究·拓展”等. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，相信你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

$\in$	$x \in A$	x 属于 A；x 是集合 A 的一个元素
$\notin$	$y \notin A$	y 不属于 A；y 不是集合 A 的一个元素
$\{,\cdots,\}$	$\{a, b, c, \cdots, n\}$	诸元素 a，b，c，$\cdots$，n 构成的集合
$\{\mid\}$	$\{x \mid p(x), x \in A\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素的集合
$\varnothing$		空集
$\mathbf{N}$		非负整数集；自然数集
$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$		正整数集
$\mathbf{Z}$		整数集
$\mathbf{Q}$		有理数集
$\mathbf{R}$		实数集
$\subseteq$	$B \subseteq A$	B 包含于 A；B 是 A 的子集
$\subsetneqq$	$B \subsetneqq A$	B 真包含于 A；B 是 A 的真子集
$\not\subseteq$	$B \not\subseteq A$	B 不包含于 A；B 不是 A 的子集
$\cup$	$A \cup B$	A 与 B 的并集
$\cap$	$A \cap B$	A 与 B 的交集
$\complement$	$\complement_A B$	A 中子集 B 的补集或余集
$[,]$	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的闭区间
$(,)$	(a, b)	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的开区间
$[,)$	$[a, b)$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的左闭右开区间
$(,]$	$(a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的左开右闭区间
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	p 推出 q，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p 是 q 的充要条件
$\nRightarrow$	$p \nRightarrow q$	p 不能推出 q，p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件
$\forall$	$\forall x$	对任意的 x，对所有的 x
$\exists$	$\exists x$	存在 x
$\sin x$		x 的正弦
$\cos x$		x 的余弦
$\tan x$		x 的正切

第 1 章　集　　合




集合
集合的概念与表示
子集、全集、补集
交集、并集

数学也是一种语言，从它的结构和内容来看，这是一种比任何国家的语言都要完善的语言.

……通过数学，自然界在论述；通过数学，世界的创造者在表达；通过数学，世界的保护者在讲演.

——狄尔曼

蓝蓝的天空中，一群鸟在欢快地飞翔；

茫茫的草原上，一群羊在悠闲地走动；

清清的湖水里，一群鱼在自由地游泳；

……

鸟群、羊群、鱼群……都是“同一类对象汇集在一起”，这就是本章将要学习的集合.

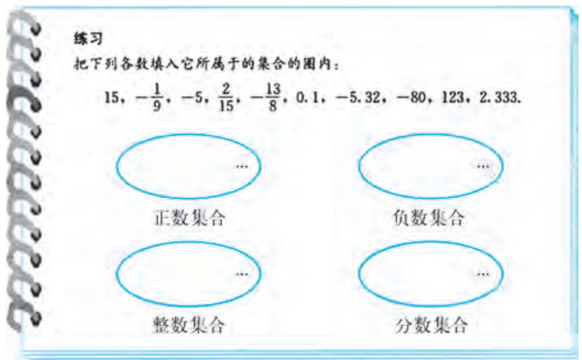
其实，在过去的学习中，我们已经使用了“自然数集”“有理数集”“实数集”等术语. 我们知道，所有的自然数在一起组成“自然数集”，所有的有理数在一起组成“有理数集”，所有的实数在一起组成“实数集”. 我们还知道，“实数集”包含“有理数集”，“有理数集”包含“自然数集”……

这里，用“集合”来描述研究的对象，既简洁又清晰. 那么，

● 怎样用集合语言来刻画研究的对象呢？

1.1 集合的概念与表示

在初中的数学学习中，我们曾做过下面的作业：



这里有“正数集合”“负数集合”“整数集合”“分数集合”，那么，

- 什么是集合？
- 如何用数学语言表示集合？

考察一下“整数集合”，15 可以填入“整数集合”的圈内，而 $-\frac{1}{9}$ 不能填入这个圈内；-5 可以填入“整数集合”的圈内，而 $\frac{2}{15}$ 不能填入这个圈内……可以发现，对于给定的数，这个数要么可以填入“整数集合”，要么不可以填入“整数集合”，两者有且只有一种情形成立.

这说明，“整数集合”由确定的、互不相同的“数”组成，对于任意给定的一个数，这个数要么在“整数集合”中，要么不在“整数集合”中，两者一定有一个成立，而且只有一个成立.

康托尔（G. Cantor，1845—1918），德国数学家、集合论创始人，他在 1874 年发表了关于集合论的论文.

一般地，一定范围内某些确定的、不同的对象的全体组成一个**集合**（set）. 集合中的每一个对象称为该集合的**元素**（element），简称**元**.

“中国的直辖市”组成一个集合，该集合的元素就是北京、天津、上海和重庆这 4 个城市.

“young 中的字母”组成一个集合，该集合的元素就是 y，o，u，n，g 这 5 个字母.

“book 中的字母”也组成一个集合，该集合的元素就是 b，o，k 这 3 个字母.

“1～10 以内的所有质数”组成一个集合，该集合的元素就是 2，3，5，7 这 4 个数.

为书写方便，我们通常用大写拉丁字母来表示集合，例如集合 A、集合 B 等.

特别地，全体自然数组成的集合，叫作**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

全体正整数组成的集合，叫作**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合，叫作**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合，叫作**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合，叫作**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

集合的元素常用小写拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素，那么就记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”，例如，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$；如果 a 不是集合 A 的元素，那么就记作 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$，读作“a 不属于 A”，例如，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$.

列举法和描述法是表示集合的常用方式.

列举法 将集合的元素一一列举出来，并置于花括号“{ }”内，例如{北京，天津，上海，重庆}，{y，o，u，n，g}. 用这种方法表示集合，元素之间要用逗号分隔，但列举时与元素的次序无关.

$\{x \mid p(x)\}$ 中 x 为集合的代表元素，$p(x)$ 指元素 x 具有的性质.

描述法 将集合的所有元素都具有的性质(满足的条件)表示出来，写成 $\{x|p(x)\}$ 的形式，如：$\{x|x$ 为中国的直辖市$\}$，$\{x|x$ 为 young 中的字母$\}$，$\{x \mid x<-3, x\in\mathbf{R}\}$.

为了直观地表示集合，我们常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合，称为 Venn 图，例如图 1-1-1.

文恩(J. Venn，1834—1923)，英国数学家.

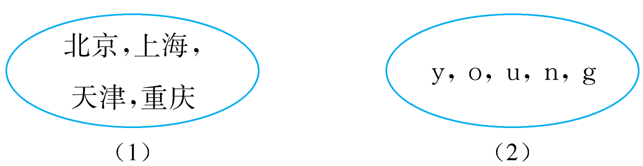


图 1-1-1

一个集合可以用不同的方法表示. 例如，由方程 $x^2-1=0$ 所有的实数解组成的集合，可以表示为下列形式.

(1) 列举法：$\{-1, 1\}$(也可以是$\{1, -1\}$)；

(2) 描述法：$\{x \mid x^2-1=0, x\in\mathbf{R}\}$(也可以是$\{x \mid x$ 为方程 $x^2-1=0$ 的实数解$\}$).

从上面的讨论中，我们可以看到，集合是由元素唯一确定的. 对于给定的 a 和集合 A，我们能够判定 $a\in A$，还是 $a\notin A$. 如果两个集合所含的元素完全相同(即 A 中的元素都是 B 的元素，B 中的元素也都

是 A 的元素)，那么称这两个集合**相等**，例如

$$\{北京，天津，上海，重庆\}=\{上海，北京，天津，重庆\}.$$

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 1 且小于 13 的所有偶数组成的集合；

(2) 由 1～15 以内的所有质数组成的集合.

解 (1) 设大于 1 且小于 13 的所有偶数组成的集合为 A，那么

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

(2) 设由 1～15 以内的所有质数组成的集合为 B，那么

$$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}.$$

例 2 用描述法表示下列集合：

(1) 大于 1 的所有偶数组成的集合；

(2) 不等式 $2x-3>5$ 的解集.

解 (1) 设大于 1 的偶数为 x，并且满足条件

$$x>1, x=2k, k\in \mathbf{N}.$$

因此，这个集合表示为

$$A=\{x \mid x>1, x=2k, k\in \mathbf{N}\}.$$

(2) 由 $2x-3>5$ 可得 $x>4$，故不等式 $2x-3>5$ 的解集为

$$\{x \mid x>4, x\in \mathbf{R}\}.$$

集合$\{x \mid x>4, x\in \mathbf{R}\}$可以简记为$\{x \mid x>4\}$.

例 1 中的集合的元素都有有限个，例 2 中的集合的元素都有无限个.

一般地，含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**.

我们把不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如，集合 $\{x \mid x^2+x+1=0, x\in \mathbf{R}\}$ 就是空集.

练 习

1. 用"$\in$"或"$\notin$"填空：

1 ________ $\mathbf{N}$，-3 ________ $\mathbf{N}$，0 ________ $\mathbf{N}$，$\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{N}$，

1 ________ $\mathbf{Z}$，-3 ________ $\mathbf{Q}$，0 ________ $\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{R}$.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x+1=0\}$；

(2) $\{x|x$ 为 15 的正约数$\}$；

(3) $\{x|x$ 为不大于 10 的正偶数$\}$.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 奇数的集合；

(2) 正偶数的集合；

(3) 不等式 $x^2+1\leqslant 0$ 的解集.

4. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2+2x-15=0$ 的根的集合；

(2) 不等式 $4x-3<5$ 的解集.

5. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{a \mid 0\leqslant a<6,\ a\in \mathbf{N}\}$；

(2) “mathematics 中的字母”组成的集合；

(3) 汉字“永”的笔画组成的集合.

习题 1.1

感受 · 理解

1. 用“$\in$”或“$\notin$”填空：

$\dfrac{2}{7}$ ________ $\mathbf{Q}$, π ________ $\mathbf{Q}$, $\sqrt{7}$ ________ $\mathbf{R}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x^2+3x-18=0,\ x\in \mathbf{R}\}$；

(2) $\{x \mid x$ 为不超过 5 的自然数$\}$；

(3) $\{x \mid -3<2x-1\leqslant 3,\ x\in \mathbf{Z}\}$；

(4) $\{(x,\ y) \mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y<2,\ x,\ y\in \mathbf{Z}\}$.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 不等式 $3x+2>5$ 的解集；

(2) 平面直角坐标系中第二象限的点组成的集合；

(3) 二次函数 $y=x^2-2x+3$ 图象上的点组成的集合.

思考 · 运用

4. 用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 若 $A=\{x \mid x^2-x=0\}$，则 1 ________ A，-1 ________ A；

(2) 若 $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5,\ x\in \mathbf{N}\}$，则 1 ________ B，1.5 ________ B；

(3) 若 $C=\{x \mid -1<x<3,\ x\in \mathbf{Z}\}$，则 0.2 ________ C，3 ________ C.

5. 设 a，b 为实数，已知 $M=\{1,\ 2\}$，$N=\{a,\ b\}$，且 $M=N$，求 a，b 的值.

6. 已知 $A=\{x \mid x=3k+1,\ k\in \mathbf{Z}\}$，问：$-1$，5，7 三个数中，哪些数是 A 的元素?

探究 · 拓展

7. (写作题)我们使用符号“$\in$”代表短语“是……的元素”(is an element of). 符号“$3\in A$”表示“3 是集合 A 的元素”. 如果“3 不是集合 A 的元素”，那么写成“$3\notin A$”. 虽然“$\in$”看起来有点像字母“e”，但这两个符号并不相同，不应混淆.

请查阅有关资料，寻找最先引入符号“$\in$”的数学家，以及符号“$\in$”的原始意义等信息，写一篇关于符号“$\in$”的短文.

1.2 子集、全集、补集

观察下列各组集合：

(1) $A=\{-1, 1\}$，$B=\{-1, 0, 1, 2\}$；

(2) $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{R}$；

(3) $A=\{x \mid x$ 为正方形$\}$，$B=\{x \mid x$ 为四边形$\}$.

- 集合 A 与 B 之间具有怎样的关系？
- 如何用数学语言来表述这种关系？

观察(1)，可以发现，集合 A 中的每个元素都是集合 B 的元素.

观察(2)(3)，它们也有同样的特征.

这时称 A 是 B 的子集. 一般地，

> 如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素(若 $a \in A$，则 $a \in B$)，那么集合 A 称为集合 B 的**子集**(subset)，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作“集合 A 包含于集合 B”或“集合 B 包含集合 A”.

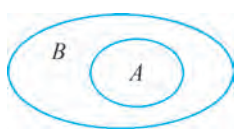


图 1-2-1

例如，$\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbf{N}$，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$，$\{x \mid x$ 为正方形$\} \subseteq \{x \mid x$ 为四边形$\}$ 等.

$A \subseteq B$ 可以用 Venn 图来表示(图 1-2-1).

根据子集的定义，我们知道 $A \subseteq A$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

对于空集 $\varnothing$，我们规定 $\varnothing \subseteq A$，即**空集是任何集合的子集**.

例 1 判断下列各组集合中，A 是否为 B 的子集.

(1) $A=\{0, 1\}$，$B=\{-1, 0, 1, -2\}$；

(2) $A=\{0, 1\}$，$B=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{N}\}$.

解 (1) 因为 $0 \in B$，$1 \in B$，即 A 中的每一个元素都是 B 的元素，所以 A 是 B 的子集.

(2) 因为 $1 \in A$，但 $1 \notin B$，所以 A 不是 B 的子集.

思　考

$A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 能否同时成立？

例 2 写出集合$\{a, b\}$的所有子集.

解 集合$\{a, b\}$的所有子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$.

集合$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$有多少个子集？

如果 $A \subseteq B$，并且 $A \neq B$，那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**(proper subset)，记为 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$，读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”，如$\{a\} \subsetneqq \{a, b\}$.

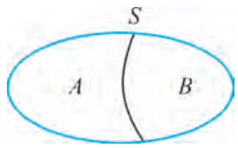


图 1-2-2

例 3 下列各组的 3 个集合中，哪 2 个集合之间具有包含关系？

(1) $S=\{-2,-1,1,2\}$，$A=\{-1,1\}$，$B=\{-2,2\}$；

(2) $S=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x>0\}$；

(3) $S=\{x \mid x$ 为整数$\}$，$A=\{x \mid x$ 为奇数$\}$，$B=\{x \mid x$ 为偶数$\}$.

解 在(1)(2)(3)中都有 $A\subsetneqq S$，$B\subsetneqq S$，可以用图 1-2-2 来表示.

思 考

观察例 3 中每一组的 3 个集合，它们之间还有什么关系？

在例 3 中，观察(1)，可以发现，$A\subseteq S$，S 中的元素 -2，-1，1，2 去掉 A 中的元素 -1，1 后，剩下的元素为 -2，2，这两个元素组成的集合就是 B.

观察(2)(3)，它们也有同样的特征. 这时称 B 是 A 在 S 中的补集. 一般地，

> 设 $A\subseteq S$，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的**补集**(complementary set)，记为 $\complement_S A$（读作"A 在 S 中的补集"），即
>
> $$\complement_S A=\{x \mid x\in S，且\ x\notin A\}.$$

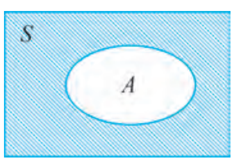


图 1-2-3

$\complement_S A$ 可用图1-2-3中的阴影部分来表示.

对于例 3，我们有

$$B=\complement_S A，A=\complement_S B.$$

如果一个集合包含我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为**全集**(universal set)，全集通常记作 U.

例如，在实数范围内讨论集合时，$\mathbf{R}$ 便可看作一个全集 U.

例 4 设全集 $U=\mathbf{R}$，不等式组 $\begin{cases}2x-1>0,\\3x-6\leqslant 0\end{cases}$ 的解集为 A，试求 A 及 $\complement_U A$，并把它们分别表示在数轴上.

解 $A=\{x \mid 2x-1>0，且\ 3x-6\leqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$，

$\complement_U A=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\dfrac{1}{2}，或\ x>2\right\}$，在数轴上分别表示如下（图 1-2-4）.

注意实心点与空心点的区别.

图 1-2-4

练　习

1. 写出下列集合的所有子集：

(1) $\{1\}$；　(2) $\{1, 2\}$；　(3) $\{1, 2, 3\}$.

2. 已知全集 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，分别根据下列条件求 $\complement_U A$.

(1) $A=\{0, 2, 4, 6\}$；

(2) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

(3) $A=\varnothing$.

3. 判断下列表述是否正确：

(1) $a\subseteq\{a\}$；　(2) $\{a\}\in\{a, b\}$；

(3) $\{a, b\}\subseteq\{b, a\}$；　(4) $\{-1, 1\}\subsetneqq\{-1, 0, 1\}$；

(5) $0\in\varnothing$；　(6) $\{0\}=\varnothing$；

(7) $\varnothing\subseteq\{0\}$；　(8) $\varnothing\subsetneqq\{-1, 1\}$.

4. 若 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x \mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U A=$________，$\complement_U B=$________.

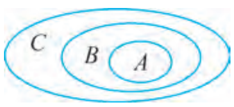
5. $\complement_U(\complement_U A)=$________.

6. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x<0\}$，求 $\complement_U A$.

习题 1.2

感受・理解

1. 如图，试说明集合 A，B，C 之间有什么包含关系.



（第 1 题）

2. 指出下列各组集合 A 与 B 之间的关系：

(1) $A=\{-1, 1\}$，$B=\mathbf{Z}$；

(2) $A=\{-1, 0, 1\}$，$B=\{x|x^2-1=0\}$；

(3) $A=\{1, 3, 5, 15\}$，$B=\{x \mid x$ 是 15 的正约数$\}$；

(4) $A=\mathbf{N}^*$，$B=\mathbf{N}$.

3. 已知 $U=\{x \mid x$ 是至少有一组对边平行的四边形$\}$，$A=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，求 $\complement_U A$.

4. (1) 已知 $U=\{1, 2, 3, 4\}$，$A=\{1, 3\}$，求 $\complement_U A$；

(2) 已知 $U=\{1, 3\}$，$A=\{1, 3\}$，求 $\complement_U A$；

(3) 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x\geqslant 2\}$，求 $\complement_U A$；

(4) 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid -2\leqslant x<2\}$，求 $\complement_U A$.

思考・运用

5. 设 A 是一个集合，下列关系是否成立？

(1) $A=\{A\}$；(2) $A\subseteq\{A\}$；(3) $A\in\{A\}$.

6. 已知 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0, 2, 4\}$，$C=\{0, 2, 6\}$，写出所有满足上述条件的集合 A.

7. 设 m 为实数，若 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x<1\}$，$B=\{x \mid x>m\}$.

(1) 当 $\complement_U A\subseteq B$ 时，求 m 的取值范围；

(2) 当 $\complement_U A\supseteq B$ 时，求 m 的取值范围.

探究・拓展

8. 子集符号“$\subseteq$”与不等号“$\leqslant$”看起来很相似.“$\leqslant$”具有下面的性质：

(1) 如果 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c$，那么 $a\leqslant c$；

(2) 如果 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，那么 $a=b$.

试写出“$\subseteq$”相应的“性质”，并判断其正确性.

1.3 交集、并集

集合 A 在集合 S 中的补集 $\complement_S A$ 是由给定的两个集合 A，S 得到的一个新集合. 这种由两个给定集合按照某种规则得到一个新集合的过程称为集合的运算. 集合的交与并也是常见的两种集合运算.

观察下列各组集合：

(1) $A=\{-1, 1, 2, 3\}$，$B=\{-2, -1, 1\}$，$C=\{-1, 1\}$；

(2) $A=\{x \mid x \leqslant 3\}$，$B=\{x \mid x>0\}$，$C=\{x \mid 0<x \leqslant 3\}$；

(3) $A=\{x \mid x$ 为矩形$\}$，$B=\{x \mid x$ 为菱形$\}$，$C=\{x \mid x$ 为正方形$\}$.

- 集合 A，B，C 之间具有怎样的关系？
- 如何用数学语言表述这种关系？

观察(1)，可以发现，$1 \in A$ 且 $1 \in B$，即元素 1 既属于集合 A 又属于集合 B. 这样的元素还有 -1. 所有这样的元素构成的集合就是 $C=\{-1, 1\}$. (2)(3)也具有这种特征.

这时称 C 是 A 与 B 的交集. 一般地，

> 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(intersection set)，记作 $A \cap B$(读作“A 交 B”)，即
> $$A \cap B=\{x \mid x \in A，且 x \in B\}.$$

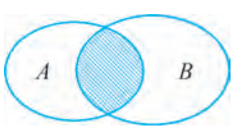


图 1－3－1

$A \cap B$ 可用图 1－3－1 中的阴影部分来表示.

显然有

$$A \cap B=B \cap A,$$

$$A \cap B \subseteq A,$$

$$A \cap B \subseteq B.$$

思　考

$A \cap B=A$ 可能成立吗？ $A \cap B=\varnothing$ 可能成立吗？

交集 $A \cap B$ 是由给定的两个集合 A，B 经过“运算”而得到的新集合，这种运算称为“交”. 而集合间另一种称为“并”的运算也十分常见. 观察集合 $A=\{-1, 1, 2, 3\}$，集合 $B=\{-2, -1, 1\}$，集合 $D=\{-2, -1, 1, 2, 3\}$，可以发现，集合 D 是由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的.

这时，D 称为 A 与 B 的并集. 一般地，

由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(union set)，记作 $A \cup B$(读作"A 并 B")，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}.$$

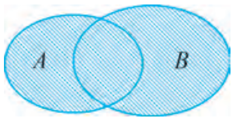


图 1-3-2

$A \cup B$ 可用图 1-3-2 中的阴影部分来表示.

显然有

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \subseteq A \cup B,$$

$$B \subseteq A \cup B.$$

思　考

$A \cup B = A$ 可能成立吗？$A \cup \complement_U A$ 是什么集合？

例 1　已知 $A = \{-1, 0, 1\}$，$B = \{0, 1, 2, 3\}$，求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

解　$A \cap B = \{-1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1\}$；

$A \cup B = \{-1, 0, 1\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

例 2　学校举办了排球赛，高一(1)班 45 名同学中有 12 名同学参赛. 后来又举办了田径赛，班上有 20 名同学参赛. 已知两项都参赛的有 6 名同学. 两项比赛中，高一(1)班共有多少名同学没有参加过比赛？

解　设 $U = \{x \mid x\text{ 为高一(1)班的同学}\}$，$A = \{x \mid x\text{ 为参加排球赛的同学}\}$，$B = \{x \mid x\text{ 为参加田径赛的同学}\}$，则 $A \cap B = \{x \mid x\text{ 为排球赛和田径赛都参加的同学}\}$.

画出 Venn 图(图 1-3-3)：

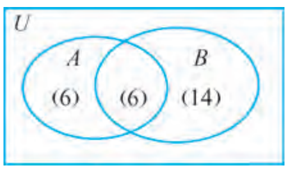


图 1-3-3

可知没有参加过比赛的同学有

$$45 - (12 + 20 - 6) = 19(\text{名}).$$

答　这个班共有 19 名同学没有参加过比赛.

例 3　设 $A = \{x \mid x > 0\}$，$B = \{x \mid x \leqslant 1\}$，求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

解　$A \cap B = \{x \mid x > 0\} \cap \{x \mid x \leqslant 1\} = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$；

$A \cup B = \{x \mid x > 0\} \cup \{x \mid x \leqslant 1\} = \mathbf{R}$.

为了叙述方便，在以后的学习中，我们常常会用到"区间"的概念.

设 a，$b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，规定

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”.

$[a, b]$，(a, b)分别叫作闭区间、开区间；$[a, b)$叫作左闭右开区间，$(a, b]$叫作左开右闭区间；a，b叫作相应区间的端点.

区间$[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b)$在数轴上的表示分别为图 1-3-4(1)(2)(3)(4)(5)(6).

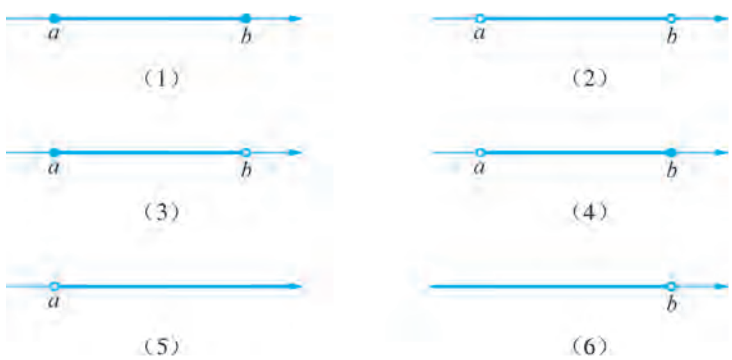


图 1-3-4

练　习

1. 已知 $A = \{x \mid x$ 为小于 7 的正偶数$\}$，$B = \{-2, 0, 2, 4\}$，求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.
2. 设 U 为全集，若 A 为 U 的子集，则
   $A \cap A =$ ________，$A \cup A =$ ________，$A \cap \varnothing =$ ________，
   $A \cup \varnothing =$ ________，$A \cap \complement_U A =$ ________，$A \cup \complement_U A =$ ________.
3. 根据下列条件，分别求 $A \cap B$，$A \cup B$.
   (1) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$，$B = \{-1, 0, 4\}$；
   (2) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$，$B = \{-1, 0, 1\}$；
   (3) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$，$B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$；
   (4) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$，$B = \varnothing$.
4. 根据下列条件，分别求 $A \cap B$，$A \cup B$.
   (1) $A = \{x \mid x \geqslant 0\}$，$B = \{x \mid x \leqslant 0\}$；
   (2) $A = \{x \mid x \geqslant 0\}$，$B = \{x \mid x < 2\}$；
   (3) $A = \{x \mid x \geqslant 0\}$，$B = \{x \mid x > 2\}$.
5. 设 $A = \{(x, y) \mid y = -4x + 6\}$，$B = \{(x, y) \mid y = 5x - 3\}$，求 $A \cap B$.
6. 设 $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$.

习题 1.3

感受·理解

1. 填表：

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			$A \cap B$
B			

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B		$B \cup A$	

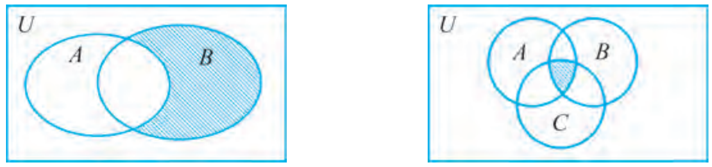
$\cap$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$
$\varnothing$			
A			
$\complement_U A$			

$\cup$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$
$\varnothing$			
A			
$\complement_U A$			

2. 已知 $A=(-1, 3]$，$B=[2, 4)$，求 $A \cap B$.
3. 已知 $A=(0, 1]$，$B=[-1, 0]$，求 $A \cup B$.
4. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$.
   (1) $B \subseteq A$ 成立吗?$A \subseteq B$ 成立吗?
   (2) 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.
5. 已知 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 3, 4\}$，$C=\{1, 5, 6\}$，求 $A \cap (B \cap C)$ 和 $(A \cup B) \cup C$.
6. 已知 $A=\{x \mid x \leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x \leqslant 1\}$，求 $A \cap B$，并判断 A 与 B 之间的关系.
7. 在平面内，设 A，B，O 均为定点，P 为动点，下列集合分别表示什么图形?
   (1) $\{P \mid PA = PB\}$；
   (2) $\{P \mid PO = 1\}$.

8. 某班级有三个微信群，文学群成员有：梅、兰、竹、桂、松、柳，数学群成员有：梅、竹、松、枫、杨、桦，音乐群成员有：兰、菊、荷、桂、松、柳. 用集合表示三个群的成员.

9. 写出阴影部分所表示的集合.



（1）　　　　（2）

（第 9 题）

思考·运用

10. （1）已知 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,3,5\}$，$B=\{1,4\}$，求 $\complement_U(A\cup B)$ 与 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

（2）在下图中用阴影表示 $\complement_U(A\cup B)$ 与 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

（3）由（1）（2），你有什么发现？

（第 10(2) 题）

11. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 2<x<4\}$，分别求 $A\cap B$，$A\cup B$，$A\cup\complement_U B$.

12. 设 m 为实数，$A=\{m+1,-3\}$，$B=\{2m-1,m-3\}$. 若 $A\cap B=\{-3\}$，求 m 的值.

探究·拓展

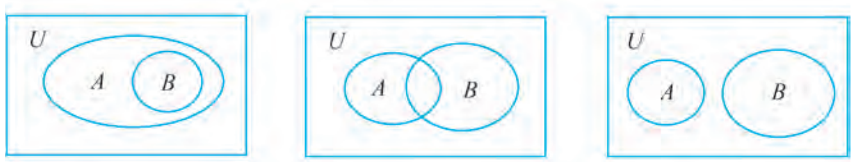
13. （探究题）我们知道，如果集合 $A\subseteq S$，那么 S 的子集 A 的补集为 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$. 类似地，对于集合 A，B，我们把集合 $\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$ 叫作集合 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$. 例如，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，则有 $A-B=\{1,2,3\}$，$B-A=\{6,7,8\}$.

据此，试回答下列问题：

（1）S 是高一(1)班全体同学的集合，A 是高一(1)班全体女同学的集合，求 $S-A$ 及 $\complement_S A$；

（2）在下列各图中用阴影表示集合 $A-B$；

（3）如果 $A-B=\varnothing$，集合 A 与 B 之间具有怎样的关系？



（第 13(2) 题）

问题与探究

集合运算的运算律

我们知道实数“$+$”“$\times$”运算有如下运算律成立：

$a+b=b+a$，$a\times b=b\times a$；

$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$；

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$；

……

集合运算“$\cup$”“$\cap$”是否也满足一些运算律呢？通过具体例子，画 Venn 图进行探究，并比较集合运算“$\cup$”“$\cap$”的运算律与实数运算“$+$”“$\times$”的运算律的相同点与不同点.

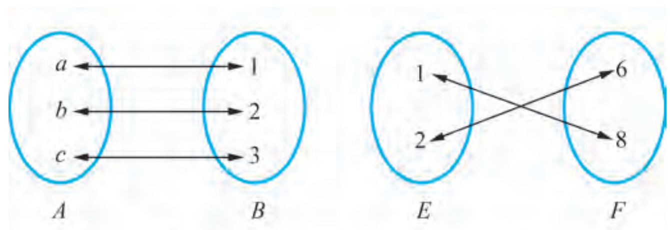
阅 读

有限集与无限集

在本章1.1节中，我们曾讨论过有限集和无限集. 例如，$\{1, 2, 3\}$是有限集，$\mathbf{N}^*$是无限集. 对于有限集$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$，$C=\{a, b, c\}$，我们知道集合A的元素比集合B的元素多，A与C的元素一样多. 然而，对于两个无限集$\mathbf{N}^*=\{1, 2, 3, \cdots\}$，$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$，你能判断哪一个集合的元素“更多”吗?

德国数学家康托尔根据人们在计数时运用的“一一对应”思想给出了两个集合“等势”的概念：若两个无限集的元素之间能建立起一一对应，则称这两个集合等势.

先看有限集之间的“一一对应”. 教室里有45个座位，老师走进教室，一看坐满了人，他无须一个个地点数，便知听课人数为45，这是因为每个人坐1个座位，且每个座位上都坐1个人，两者一一对应，从而听课人数与座位数相等. 下图也清楚地表明，元素之间有一一对应关系的两个集合，其元素个数相等.



(1) (2)

我们也可以建立$\mathbf{N}^*$与$\mathbf{N}$这两个无限集之间的一一对应，如

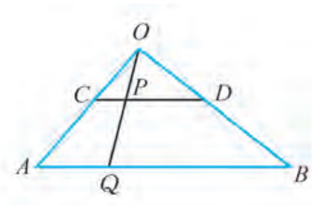
$$\begin{array}{cccccc}\{1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{0, & 1, & 2, & 3, & \cdots\}\end{array}$$

于是，$\mathbf{N}^*$与$\mathbf{N}$等势. 通俗地说，它们的元素“一样多”!

从下面的一一对应中，你能得到什么结论?

$$\begin{array}{cccccccc}\{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots\} & \quad n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \quad \updownarrow \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \cdots\} & \quad 2n\end{array}$$

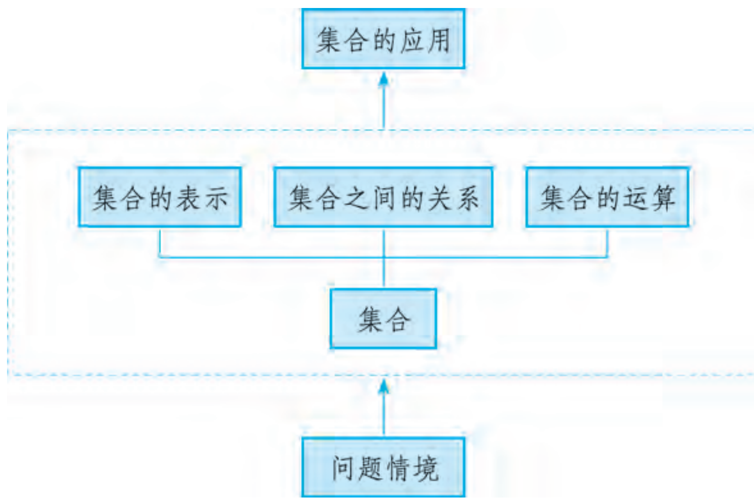
$$\begin{array}{ccccccc}\{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\} & \quad n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \quad \updownarrow \\ \{1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & \cdots\} & \quad n^2\end{array}$$



$$\begin{array}{c}P \\ \updownarrow \\ Q\end{array}$$

本章回顾

本章主要学习了集合的初步知识，包括集合的有关概念、集合的表示、集合之间的关系及集合的运算等.



我们从生活中的实例出发，探索了用集合语言来描述数学对象的方法. 应用集合语言，可以更为清晰地表达我们的思想. 集合是整个数学的基础，它在以后的学习中有着极为广泛的应用.

复 习 题

感受·理解

1. 用适当的方法表示“小于 5 的自然数”所构成的集合.

2. 判断下列集合是有限集还是无限集：

(1) $A=\left\{x \mid |x|<10,\ x\in \mathbf{Z}\right\}$；

(2) $\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{n}{n+1},\ n\in \mathbf{N}\right\}$；

(3) $S=\{P \mid AP+PB=AB\}$（A，B 为平面上两个不同的定点，P 为动点）.

3. 已知 $U=\{x \mid x$ 是三角形$\}$，$A=\{x \mid x$ 是等边三角形$\}$，求 $\complement_U A$.

4. 已知 $A=\{0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

5. 已知 $A=\{x \mid x<2\}$，$B=\{x \mid x>1\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

6. 设 a 为实数，$A=[1,\ 4)$，$B=(-\infty,\ a)$. 若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

7. 已知 $A=[-1,\ 2)$，对于下列全集 U，分别求 $\complement_U A$：

(1) $U=\mathbf{R}$；　　(2) $U=(-\infty,\ 3]$；

(3) $U=[-2,\ 2]$；　　(4) $U=[-1,\ 2)$.

8. 求满足 $\{1, 3\} \cup A = \{1, 3, 5\}$ 的集合 A.

9. 设 x 为实数，$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{1, x\}$. 若 $A \cup B = A$，求 x 的值.

思考・运用

10. 试用 Venn 图表示集合 U，A，B，使得 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A \cup B = U$，$A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

11. 高一年级某班共有 45 人，其中文艺爱好者 20 人，体育爱好者 15 人，文艺、体育均不爱好的 20 人，问：文艺、体育均爱好的有多少人？

12. 利用 Venn 图，探求 $\complement_U(A \cap B)$，$\complement_U A$，$\complement_U B$ 三者之间的关系.

13. 设 m 为实数，若 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid x - m = 0, x \in \mathbf{R}\}$，求当 $B \subsetneqq A$ 时 m 的取值集合.

探究・拓展

14. 设 A，B 均为有限集，A 中元素的个数为 m，B 中元素的个数为 n，$A \cup B$ 中元素的个数为 s，下列各式能成立吗？

(1) $m + n > s$；

(2) $m + n = s$；

(3) $m + n < s$.

15. (阅读题)对于集合 A，B，我们把集合$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$记作 $A \times B$. 例如，$A = \{1, 2\}$，$B = \{3, 4\}$，则有 $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$，$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$，$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$，$B \times B = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

(1) 已知 $C = \{a\}$，$D = \{1, 2, 3\}$，求 $C \times D$；

(2) 已知 $A \times B = \{(1, 2), (2, 2)\}$，求集合 A，B；

(3) 若 A 有 3 个元素，B 有 4 个元素，$A \times B$ 有几个元素？

本章测试

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-1=0, x\in\mathbf{R}\}$,用列举法表示 A,$A=$________.

2. 若用描述法表示所有负偶数构成的集合 M,则 $M=$______________.

3. 有下列命题:① 空集是任何集合的真子集;② 设 $A\subseteq B$,若 $m\in A$,则 $m\in B$;③ $\{0, 1, 2\}\subseteq\{1, 2, 0\}$. 其中,正确的有________.(填序号)

4. 若集合 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,集合 $B=\{-1, 0, 1, 6\}$,则 $A\cup B=$______________,$A\cap B=$________.

5. 设 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x \mid x<1\}$,则 $\complement_U A=$________.

6. 某班 45 名学生中,有围棋爱好者 22 人,足球爱好者 28 人,同时爱好这两项的人最少有________人,最多有________人.

二、选择题

7. 若 $M=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,$N=\{x \mid x^2-2x-3=0, x\in\mathbf{R}\}$,则 $\complement_M N=$(　　).

A. $\{-1, 3\}$　　B. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

C. $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$　　D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

8. 若集合 $M=\{x \mid -1<x<1\}$,$N=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$,则 $M\cap N=$(　　).

A. $\{x \mid -1<x<2\}$　　B. $\{x \mid 0\leqslant x<1\}$

C. $\{x \mid 0<x<1\}$　　D. $\{x \mid -1<x<0\}$

9. 若非空且互不相等的集合 M,N,P 满足:$M\cap N=M$,$N\cup P=P$,则 $M\cup P=$(　　).

A. M　　B. N

C. P　　D. $\varnothing$

10. 满足 $\{1\}\subseteq A\subsetneqq\{1, 2, 3\}$ 的集合 A 的个数为(　　).

A. 2　　B. 3

C. 8　　D. 4

三、解答题

11. 设 m 为实数,$M=\{2, m\}$,$N=\{2m, 2\}$. 若 $M=N$,求 m 的值.

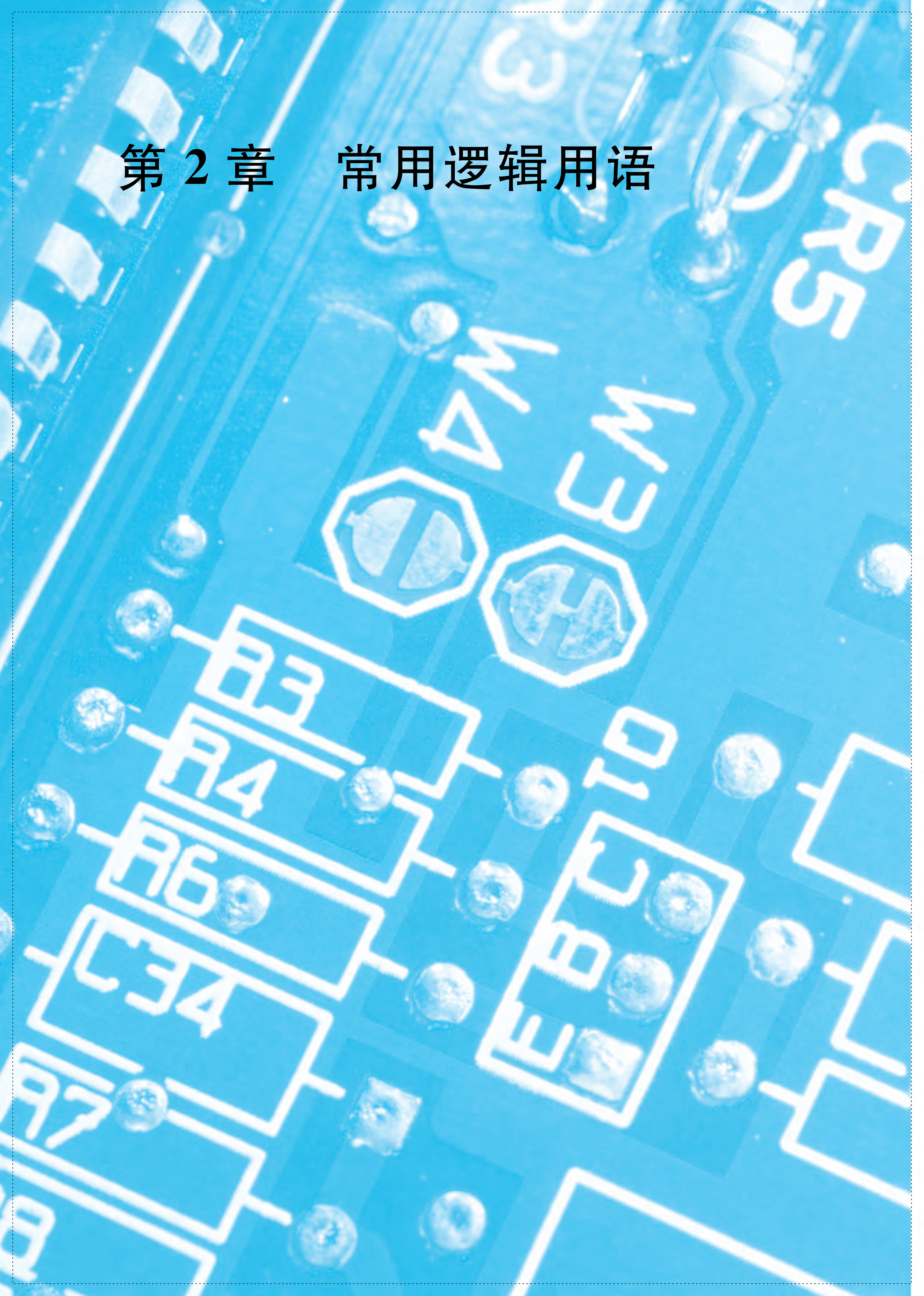
12. 已知 $A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,$A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,求集合$A$,$B$,并用 Venn 图表示.

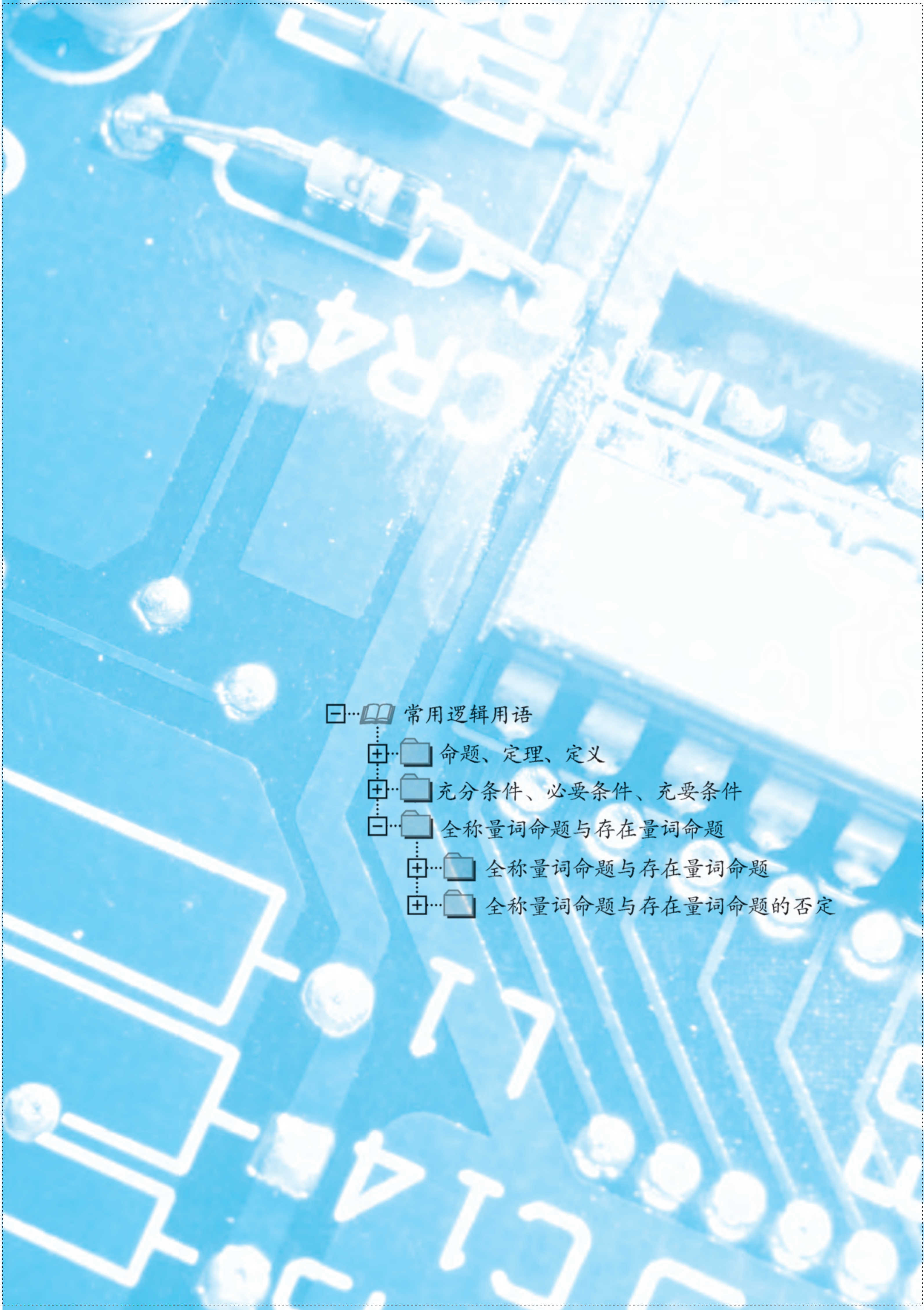
13. 已知 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x \mid x<2\}$,求 $\complement_U(A\cap B)$.

14. 设 m 为实数,集合 $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x \mid m\leqslant x\leqslant m+2\}$. 若 $A\supseteq B$,求 m 的取值范围.

15. 已知 $M=\{1\}$,$N=\{1, 2\}$,设 $A=\{(x, y) \mid x\in M, y\in N\}$,$B=\{(x, y) \mid x\in N, y\in M\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

第 2 章　常用逻辑用语





常用逻辑用语

- 命题、定理、定义
- 充分条件、必要条件、充要条件
- 全称量词命题与存在量词命题
  - 全称量词命题与存在量词命题
  - 全称量词命题与存在量词命题的否定

要想获得真理和知识，唯有两件武器，那就是清晰的直觉和严格的演绎.

——笛卡儿

我们来考察下列两个命题：

命题 1：两个偶数的和是偶数.

命题 2：和是偶数的两个数一定都是偶数.

为了判断这两个命题的正确性，我们换一种语言来表述它们：

命题 1：如果 a 是任意的偶数，b 是任意的偶数，那么 $a+b$ 一定是偶数.

命题 2：如果 $a+b$ 是偶数，那么 a 和 b 都是偶数.

对于命题 1，

因为 a 是偶数，所以存在 $m\in\mathbf{Z}$，使 $a=2m$.

因为 b 是偶数，所以存在 $n\in\mathbf{Z}$，使 $b=2n$.

所以 $a+b=2m+2n=2(m+n)$.

因为 $m\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Z}$，所以 $m+n\in\mathbf{Z}$，

所以 $a+b$ 为偶数.

对于命题 2，

取 $a=3$，$b=5$，这时 $a+b=8$ 是偶数，但 3 不是偶数，5 也不是偶数.

经过上述推理，我们可以判断命题 1 是正确的，命题 2 是错误的.

数学研究过程中，提出问题、解决问题需要进行数学推理，数学推理要用数学语言表达，需要使用一些基本用语，例如，“如果”“那么”“因为”“所以”“任意的”“存在”……

- 这些用语的含义是什么？
- 在推理过程中，怎样使用这些用语？

2.1 命题、定理、定义

在数学中，我们将可判断真假的陈述句叫作**命题**(proposition)．例如：

(1) 如果两条平行直线被第三条直线所截，那么同位角相等；

(2) 有一个内角是 $60°$ 的等腰三角形是正三角形；

(3) 如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等；

(4) 对顶角相等；

(5) 若 $x^2=1$，则 $x=1$；

(6) 若一个三角形是直角三角形，则这个三角形的两个锐角互余．

其中语句(1)(2)(4)(6)判断为真，语句(3)(5)判断为假．因而它们都是命题．

● 观察上述命题中的(1)(3)(5)(6)，这些命题具有怎样的表示形式？

观察上述命题中的(1)(3)(5)(6)，可以发现，这些命题都具有“如果 p，那么 q”或“若 p，则 q”的形式，例如：

命题(1)中：p 是“两条平行直线被第三条直线所截”，q 是“同位角相等”；

命题(3)中：p 是“两个三角形的面积相等”，q 是“这两个三角形全等”；

命题(5)中：p 是“$x^2=1$”，q 是“$x=1$”；

等等．

数学中，许多命题可表示为“如果 p，那么 q”或“若 p，则 q”的形式，其中 p 叫作命题的条件，q 叫作命题的结论．

例 1 指出下列命题中的条件 p 和结论 q：

(1) 若 $ab=0$，则 $a=0$；

(2) 若 $a<0$，则 $|a|>0$；

(3) 如果二次函数 $y=x^2+k$ 的图象经过坐标原点，那么 $k=0$；

(4) 如果两个三角形的三边分别对应相等，那么这两个三角形全等．

解 (1) p：$ab=0$，q：$a=0$．

(2) p：$a<0$，q：$|a|>0$．

(3) p：二次函数 $y=x^2+k$ 的图象经过坐标原点，q：$k=0$．

（4）p：两个三角形的三边分别对应相等，q：这两个三角形全等.

例 2 将下列命题改写成“若 p，则 q”（或“如果 p，那么 q”）的形式：

（1）有一个内角是 $60°$ 的等腰三角形是正三角形；

（2）对顶角相等；

（3）平行四边形的对角线互相平分；

（4）对角线互相平分的四边形是平行四边形.

解 （1）若一个等腰三角形有一个内角是 $60°$，则这个三角形是正三角形.

（2）若两个角是对顶角，则这两个角相等.

（3）如果一个四边形是平行四边形，那么这个四边形的对角线互相平分.

（4）如果一个四边形的对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形.

例 3 判断下列命题的真假：

（1）若 $a=b$，则 $a^2=b^2$；

（2）若 $a^2=b^2$，则 $a=b$；

（3）全等三角形的面积相等；

（4）面积相等的三角形全等.

解 （1）当 $a=b$ 时，显然有 $a^2=b^2$.

所以，命题为真.

判断命题为真，需要进行证明. 判断命题为假，该怎样做？

（2）当 $a=1$，$b=-1$ 时，$a^2=b^2=1$，即由 $a^2=b^2$，不能推出 $a=b$.

所以，命题为假.

（3）由全等三角形的定义可知，当两个三角形全等时，这两个三角形的面积一定相等.

所以，命题为真.

（4）如图 2-1-1，直角三角形 ABC 与等腰三角形 $A'BC$ 同底等高，这两个三角形的面积相等，但这两个三角形不全等.

所以，命题为假.

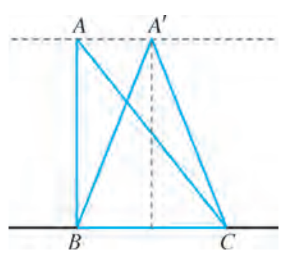


图 2-1-1

在数学中，有些已经被证明为真的命题可以作为推理的依据而直接使用，一般称之为**定理**(theorem).

在数学中，我们经常遇到**定义**(definition). 定义是对某些对象标明符号、指明称谓，或者揭示所研究问题中对象的内涵. 例如“两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形”. 定义的特点是用已知的对象及关系来解释、刻画陌生的对象，并加以区别，如“平行四边形”就是通过“四边形”与两组“对边”分别“平行”来描述的.

练 习

1. 写出下列命题的条件和结论：

(1) 如果两个三角形相似，那么这两个三角形的对应角相等；

(2) 如果一个四边形是平行四边形，那么这个四边形的对角相等；

(3) 若 a, b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数；

(4) 若两个实数的积为正数，则这两个实数的符号相同；

(5) 若 $a=b$，则 $a^2=ab$；

(6) 若 $q\geqslant -1$，则方程 $x^2+2x-q=0$ 有实数解.

2. 将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式：

(1) 绝对值相等的数也相等；

(2) 矩形的对角线相等；

(3) 角平分线上的点到角两边的距离相等；

(4) 两角分别相等的两个三角形相似.

3. 判断下列命题的真假：

(1) 若一个三角形中有两个角互余，则这个三角形是直角三角形；

(2) 若一个整数的个位数字是 0，则这个数是 5 的倍数；

(3) 等腰三角形的底角相等；

(4) 矩形的对角线相等.

习题 2.1

感受 · 理解

1. 写出下列命题的条件与结论：

(1) 如果两个三角形全等，那么这两个三角形的对应高相等；

(2) 如果两个三角形的两边及其夹角分别相等，那么这两个三角形全等；

(3) 若一个四边形是菱形，则这个四边形的四边相等；

(4) 若两条直线被一组平行线所截，则所得的对应线段成比例.

2. 将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式：

(1) 平面内垂直于同一条直线的两条直线平行；

(2) 平行于同一条直线的两条直线平行；

(3) 两个无理数的和是无理数；

(4) 乘积为正数的两个数同号；

(5) 两个奇数的和是偶数；

(6) 矩形的四个角相等；

(7) 等腰三角形的两个底角相等；

(8) 直径所对的圆周角是直角.

思考・运用

3. 判断下列命题的真假：

(1) 若 $x^2+x-2=0$，则 $x=1$；

(2) 若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A\cup B$；

(3) 若 $x>1$，则 $x^2>1$；

(4) 若函数 $y=x^2+2x+m$ 的图象经过坐标原点，则 $m=0$；

(5) 若 $\sqrt{a^2}=\sqrt{b^2}$，则 $a=b$；

(6) 若 $a+b>0$，则 $a^2+b^2>0$.

探究・拓展

4. 考察下述推导过程，找出错误原因.

若 $x=y$，则有

$$xy=y^2,$$

从而有 $$x^2-xy=x^2-y^2,$$

即有 $$x(x-y)=(x+y)(x-y).$$

所以 $$x=x+y.$$

又因为 $$x=y,$$

所以 $$x=2x.$$

所以 $$1=2.$$

2.2 充分条件、必要条件、充要条件

一般地，当命题“若 p，则 q”为真命题时，我们就说“由 p 可以推出 q 成立”，记作“$p \Rightarrow q$”，读作“p 推出 q”；如果命题“若 p，则 q”为假命题，就说“由 p 不能推出 q 成立”，记作“$p \nRightarrow q$”，读作“p 不能推出 q”. 例如：

（1）$x = y \Rightarrow x^2 = y^2$，但 $x^2 = y^2 \nRightarrow x = y$；

（2）$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$，但 $x^2 > 1 \nRightarrow x > 1$；

（3）$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$，但 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \nRightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

这里，“$x>1$”表示“x 是大于 1 的实数”；“$S_{\triangle ABC}$”表示“$\triangle ABC$ 的面积”.

● 如果“$p \Rightarrow q$”，那么 p，q 之间有怎样的关系？

分析(1)(2)(3)，可以发现，“$p \Rightarrow q$”的含义是：一旦 p 成立，q 一定也成立. 即 p 对 q 的成立是充分的.

也可以这样说：如果 q 不成立，那么 p 一定不成立. 即 q 对 p 的成立是必要的.

一般地，

> 如果“$p \Rightarrow q$”，那么称 p 是 q 的**充分条件**(sufficient condition)，也称 q 是 p 的**必要条件**(necessary condition).

例 1 下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的充分条件的有哪些？

（1）p：$x = 2$，q：$x^2 - x - 2 = 0$；

（2）p：四边形的对角线相等，q：四边形是正方形；

（3）p：同位角相等，q：两条直线平行；

（4）p：四边形是平行四边形，q：四边形的对角线互相平分.

解 （1）因为 $p \Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（2）因为 $p \nRightarrow q$，所以 p 不是 q 的充分条件.

（3）因为 $p \Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（4）因为 $p \Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

例 2 下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的必要条件的有哪些？

（1）p：$|x| = 1$，q：$x = 1$；

（2）p：两个直角三角形全等，q：两个直角三角形的斜边相等；

(3) p：同位角相等，q：两条直线平行；

(4) p：四边形是平行四边形，q：四边形的对角线互相平分.

解 (1) 因为 $q \Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要条件.

(2) 因为 $q \not\Rightarrow p$，所以 p 不是 q 的必要条件.

(3) 因为 $q \Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要条件.

(4) 因为 $q \Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要条件.

观察例 1(3)和例 2(3)、例 1(4)和例 2(4)，可以发现，其中既有 $p \Rightarrow q$，也有 $q \Rightarrow p$.

一般地，

> 如果 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的**充分且必要条件**(sufficient and necessary condition)，简称为 p 是 q 的**充要条件**，也称 q 的充要条件是 p.

为了方便起见，如果 p 是 q 的充要条件，就记作 $p \Leftrightarrow q$，称为“p 与 q 等价”，或“p 等价于 q”.

不难发现，“$\Rightarrow$”和“$\Leftrightarrow$”都具有传递性，即

如果 $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow s$，那么 $p \Rightarrow s$；

如果 $p \Leftrightarrow q$，$q \Leftrightarrow s$，那么 $p \Leftrightarrow s$.

例 3 指出下列命题中，p 是 q 的什么条件：

(1) p：两个三角形全等，q：两个三角形的对应角相等；

(2) p：三角形的三边相等，q：三角形是等边三角形；

(3) p：$a^2 = b^2$，q：$a = b$；

(4) p：$x > y$，q：$x^2 > y^2$.

解 (1) 根据三角形全等的性质，得出两个三角形的对应角相等，所以

$$p \Rightarrow q.$$

反过来，由两个三角形的对应角相等，不能得出两个三角形全等. 例如，两个等腰直角三角形，它们对应的角相等，但对应边不相等，这两个三角形就不全等. 所以 $q \not\Rightarrow p$.

因此，p 是 q 的充分条件，但 p 不是 q 的必要条件.

(2) 根据等边三角形的定义，可知三边相等的三角形是等边三角形，所以

$$p \Rightarrow q.$$

反过来，根据等边三角形的定义，可知等边三角形的三边相等，所以

$$q \Rightarrow p.$$

因此，$p \Leftrightarrow q$，即 p 是 q 的充要条件.

（3）因为

$$a^2=b^2\Rightarrow a^2-b^2=0\Rightarrow (a-b)(a+b)=0$$
$$\Rightarrow a-b=0 \text{ 或 } a+b=0\Rightarrow a=-b \text{ 或 } a=b,$$

所以
$$p\nRightarrow q.$$

反过来，

$$a=b\Rightarrow a-b=0\Rightarrow (a-b)(a+b)=0$$
$$\Rightarrow a^2-b^2=0\Rightarrow a^2=b^2,$$

所以
$$q\Rightarrow p.$$

还可以通过举反例来说明，如 $2^2=(-2)^2$，但 $2\neq -2$.

因此，$q\Rightarrow p$，但 $p\nRightarrow q$，即 p 是 q 的必要条件，但 p 不是 q 的充分条件.

（4）取 $x=1$，$y=-2$，此时，$x>y$，但 $x^2<y^2$，所以

$$p\nRightarrow q.$$

反过来，取 $x=-2$，$y=-1$，此时，$x^2>y^2$，但 $x<y$，所以

$$q\nRightarrow p.$$

因此，p 不是 q 的充分条件，p 也不是 q 的必要条件.

在初中数学学习中，我们经常遇到性质定理和判定定理.

性质定理是指某类对象具有的具体特征. 例如，性质定理“平行四边形的对角线互相平分”表明：“平行四边形”具有“对角线互相平分”的特征，当然还有其他的特征，如“对角相等”“对边相等”“对边平行”等.

这时，我们看到，性质定理具有“必要性”，“对角线互相平分”是“四边形是平行四边形”的必要条件. 图 2－2－1 中条件 2，3，4…都是“四边形是平行四边形”的必要条件.

图 2－2－1

判定定理是指对象只要具有某具体的特征，就一定有该对象的所有特征. 例如，判定定理“对角线互相平分的四边形是平行四边形”表明，只要四边形具有“对角线互相平分”这个特征，就一定具有“平

行四边形”的所有特征 1，2，3，4….

这时，我们看到，判定定理具有“充分性”，“四边形对角线互相平分”是“四边形是平行四边形”的充分条件. 图 2－2－2 中条件 2，3，4…都是“四边形是平行四边形”的充分条件.

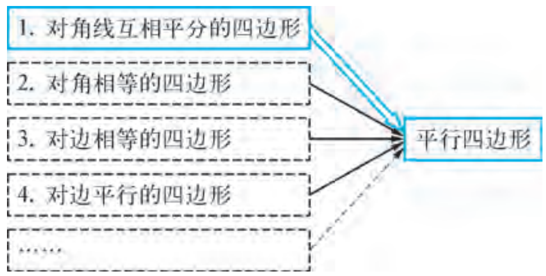


图 2－2－2

进一步，我们看到，“四边形对角线互相平分”是“四边形是平行四边形”的充要条件，即“四边形对角线互相平分”与“四边形是平行四边形”等价，这与平行四边形的定义“两组对边分别平行的四边形”也等价. 因此，“对角线互相平分的四边形”也可以作为“平行四边形”的定义. 同样地，下列三个命题：

（1）两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

（2）一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

（3）两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

其中的任何一个命题都可以作为平行四边形的定义.

练　习

1. 下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的充分条件的有哪些？

（1）p：三角形有一个内角是 60°，q：三角形是正三角形；

（2）p：两个角相等，q：两个角是对顶角；

（3）p：四边形是平行四边形，q：四边形的对角线互相平分；

（4）p：$x>2$，q：$x>1$.

2. 下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的必要条件的有哪些？

（1）p：两条直线平行，q：同位角相等；

（2）p：四边形的对角线互相平分，q：四边形是矩形；

（3）p：$a=b$，q：$|a|=|b|$；

（4）p：$x^2=1$，q：$x=1$.

3. 从符号“$\Rightarrow$”“$\nRightarrow$”“$\Leftrightarrow$”中选择适当的一个填空：

（1）$x^2>1$ ________ $x>1$；

（2）a，b 都是偶数________ $a+b$ 是偶数；

（3）$x^2=1$ ________ $|x|=1$；

（4）n 是偶数________ n 是 4 的倍数.

习题 2.2

感受·理解

1. 下列所给的各组 p, q 中，p 是 q 的充分条件的有哪些？p 是 q 的必要条件的有哪些？p 是 q 的充要条件的有哪些？
   (1) p：两个三角形全等，q：两个三角形的面积相等；
   (2) p：三角形是直角三角形，q：三角形的两个锐角互余；
   (3) p：$m \leqslant 1$，q：关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数解；
   (4) p：$ab=0$，q：$a=0$.
2. 从符号"$\Rightarrow$""$\nRightarrow$""$\Leftrightarrow$"中选择适当的一个填空：
   (1) $x \in A$ ________ $x \in A \cap B$；
   (2) $x \notin A \cup B$ ________ $x \notin A \cap B$；
   (3) $x \in \complement_U(A \cup B)$ ________ $x \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$；
   (4) $x \in \complement_U(A \cap B)$ ________ $x \in (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

思考·运用

3. 下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的什么条件？
   (1) p：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC > \angle ABC$，q：$\triangle ABC$ 中，$BC > AC$；
   (2) p：$a^2 < 1$，q：$a < 2$；
   (3) p：$\dfrac{b}{a} < 1$，q：$b < a$；
   (4) p：$m \leqslant 1$，q：关于 x 的方程 $mx^2+2x+1=0$ 有两个实数解.
4. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$，求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根是 1 的充要条件为 $a+b+c=0$.

探究·拓展

5. 设集合 $A=\{x \mid x \text{ 满足条件 } p\}$，$B=\{x \mid x \text{ 满足条件 } q\}$.
   (1) 如果 $A \subseteq B$，那么 p 是 q 的什么条件？
   (2) 如果 $B \subseteq A$，那么 p 是 q 的什么条件？
   (3) 如果 $A=B$，那么 p 是 q 的什么条件？
   试举例说明.

2.3 全称量词命题与存在量词命题

在日常生活和学习中，我们经常遇到这样的语句：

(1) 对任意实数 x，都有 $x^2 \geqslant 0$；

(2) 存在有理数 x，使 $x^2 - 2 = 0$；

(3) 有的矩形是菱形；

(4) 所有的质数都是奇数；

(5) 有一个素数是偶数.

● 这些语句中用到了“任意”“存在”“有的”等词，它们表示什么含义？

2.3.1 全称量词命题与存在量词命题

语句(1)使用了“任意”，表示对每一个实数 x，必定有“$x^2 \geqslant 0$”，即没有使“$x^2 \geqslant 0$”不成立的实数 x 存在.

语句(2)使用了“存在”，表示至少可以找到一个有理数 x，使“$x^2 - 2 = 0$”成立.

语句(3)使用了“有的”，表示可以找到一个矩形，它是菱形.

语句(4)使用了“所有”，表示每一个质数都是奇数.

“所有”“任意”“每一个”等表示全体的词在逻辑学中称为**全称量词**(universal quantifier)，通常用符号“$\forall x$”表示“对任意 x”.

上面的语句(1)可以表示为“$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geqslant 0$”，即“任意实数的平方都不小于 0”.

“存在”“有的”“有一个”等表示部分或个体的词在逻辑学中称为**存在量词**(existential quantifier)，通常用符号“$\exists x$”表示“存在 x”.

上面的语句(2)可以表示为“$\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 - 2 = 0$”，即“方程 $x^2 - 2 = 0$ 存在有理数解”.

含有全称量词的命题称为**全称量词命题**(universal proposition)，含有存在量词的命题称为**存在量词命题**(existential proposition). 它们的一般形式可表示为：

全称量词命题：$\forall x \in M, p(x)$；

存在量词命题：$\exists x \in M, p(x)$.

其中，M 为给定的集合，$p(x)$是一个关于 x 的语句.

在语句(1)～(5)中，哪些是命题？如果是命题，又有哪些是全称量词命题，哪些是存在量词命题？

例 1 判断下列命题的真假：

(1) $\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 > x$;

(2) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 > x$;

(3) $\exists x \in \mathbf{Q}$, $x^2 - 8 = 0$;

(4) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 2 > 0$.

解 (1) 因为当 $x = 2$ 时，$x^2 > x$ 成立，所以，

"$\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 > x$"是真命题.

(2) 因为当 $x = 0$ 时，$x^2 > x$ 不成立，所以，

"$\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 > x$"是假命题.

(3) 因为使 $x^2 - 8 = 0$ 成立的 x 的值只有 $x = 2\sqrt{2}$ 与 $x = -2\sqrt{2}$，但它们都不是有理数，所以，

"$\exists x \in \mathbf{Q}$, $x^2 - 8 = 0$"是假命题.

(4) 因为对任意实数 x，都有 $x^2 \geqslant 0$，所以，

对任意实数 x，都有 $x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$，即

对任意实数 x，都有 $x^2 + 2 > 0$ 成立，因此，

"$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$"是真命题.

由例 1 我们发现：

要判定一个存在量词命题为真，只要在给定的集合中找到一个元素，使命题为真即可；否则命题为假.

要判定一个全称量词命题为真，必须对给定的集合中的每一个元素，命题都为真；但要判定一个全称量词命题为假，只要在给定的集合中找到一个元素，使命题为假.

思考

给定的集合对存在量词命题、全称量词命题的真假有没有影响？试举例说明.

练习

1. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题：

(1) 任何实数的平方都是非负数；

(2) 任何数与 0 相乘，都等于 0；

(3) 任何一个实数都有相反数；

(4) 有些三角形的三个内角都是锐角.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 任意一个平行四边形对边都相等；

(2) 有的四边形既是矩形又是菱形；

(3) 实系数方程都有实数解；

(4) 有的正数比它的倒数小.

2.3.2 全称量词命题与存在量词命题的否定

给出下列命题：

(1) 所有的正方形都是矩形；

(2) 存在有理数 x，使 $x^2-2=0$；

(3) 对任意的实数 a，都有 $|a|\geqslant 0$；

(4) 有的矩形是菱形.

命题(1)的否定是"不是所有的正方形都是矩形"，换言之，"有的正方形不是矩形". 命题否定后，全称量词变为存在量词，"肯定"变成"否定".

命题(2)的否定是"不存在有理数 x，使 $x^2-2=0$"，换言之，"对所有的有理数 x，$x^2-2\neq 0$". 命题否定后，存在量词变为全称量词，"肯定"变成"否定".

命题(3)的否定是"不是对任意的实数 a，都有 $|a|\geqslant 0$"，换言之，"存在实数 a，使 $|a|<0$". 命题否定后，全称量词变为存在量词，"肯定"变成"否定".

命题(4)的否定是"不是有的矩形是菱形"，换言之，"所有的矩形都不是菱形". 命题否定后，存在量词变为全称量词，"肯定"变成"否定".

一般地，我们有：

"$\forall x\in M,\ p(x)$" 的否定为"$\exists x\in M,\ \neg p(x)$"，

"$\exists x\in M,\ p(x)$" 的否定为"$\forall x\in M,\ \neg p(x)$".

其中，"$\neg p(x)$"是对语句"$p(x)$"的否定.

对一个命题进行否定，就得到了一个新的命题，这两个命题的关系是"一真一假"或"此假彼真".

例 2 写出下列命题的否定：

(1) 所有的无理数都是实数；

(2) $\forall x\in \mathbf{R},\ x^2+x+1>0$；

(3) 菱形不是矩形；

(4) $\exists x\in \mathbf{R},\ x^2-x+1=0$.

解 (1) "所有的无理数都是实数"的否定是

"有的无理数不是实数".

注意它与"$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+x+1\leqslant 0$"的区别.

(2) "$\forall x\in \mathbf{R},\ x^2+x+1>0$" 的否定是

"$\exists x\in \mathbf{R},\ x^2+x+1\leqslant 0$".

(3) "菱形不是矩形"是指"任意一个菱形都不是矩形"，它的否

定是 “存在一个菱形，它是矩形”，

或 “存在是矩形的菱形”.

(4) “$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2 - x + 1 = 0$” 的否定是

“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 - x + 1 \neq 0$”.

一般地，对全称量词命题的否定，主要是对全称量词的否定，“任意”“所有”的否定分别是“存在”“不都”；对存在量词命题的否定，主要是对存在量词的否定，“存在”“有”的否定分别是“任意”“所有”.

练 习

1. 写出下列命题的否定：

(1) 所有的矩形都是平行四边形；

(2) 有的梯形是平行四边形；

(3) 锐角都相等；

(4) 有的梯形是等腰梯形.

2. 写出下列命题的否定：

(1) 三角形的内角和是 $180°$；

(2) 所有的正三角形都相似；

(3) 二次函数有最小值；

(4) 有的实系数一元二次方程无实数解.

3. 命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 \geqslant 0$”的否定为(　　).

A. $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 < 0$　　　B. 不存在 $x \in \mathbf{R}$，$x^2 < 0$

C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2 \geqslant 0$　　　D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2 < 0$

习题 2.3

感受·理解

1. 指出下列语句中的全称量词或存在量词：

(1) 任一个质数都是奇数；

(2) 所有实数的绝对值都是正数；

(3) 有些相似三角形全等；

(4) 有的四边形有外接圆；

(5) 任意一个矩形都是轴对称图形；

(6) 有一个数不能做除数.

2. 试判断下列命题的真假：

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 3x + 4 > 0$；

(2) $\forall x \in \{1, -1, 0\}, 2x + 1 > 0$；

(3) $\exists x \in \mathbf{N}, 1 + x^2 \leqslant x$；

(4) $\exists x \in \mathbf{N}^*$，使 x 为 5 的约数.

思考·运用

3. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题，并判断它们的真假：

(1) 有的偶数是 3 的倍数；

（2）矩形的对角线相等；

（3）有的平行四边形的四个角都相等；

（4）平面内，与一个圆只有一个公共点的直线是该圆的切线.

4. 写出下列命题的否定：

（1）菱形的对角线互相垂直平分；

（2）有的三角形一条边上的高与中线相等；

（3）每一个正整数都比它的倒数大；

（4）有的二次函数的图象关于坐标原点中心对称.

5. 写出下列命题的否定，并判断其真假：

（1）大于 3 的自然数是不等式 $x^2>10$ 的解；

（2）存在有序整数组 (x, y) 满足 $xy=x+y$；

（3）任何一个四边形的四个顶点都共圆；

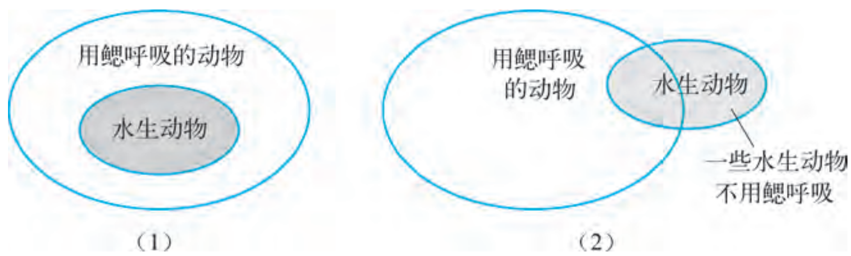
（4）有的反比例函数的图象与 x 轴有公共点.

探究·拓展

6. （阅读题）假设我们要否定命题“所有水生动物都用鳃呼吸”，可以这样做：

画出表示用鳃呼吸的动物的集合，并包含表示所有水生动物的集合，如图(1)所示，那么此图就表示“所有水生动物都用鳃呼吸”.

再将图(1)中水生动物的集合部分地移出用鳃呼吸的动物的集合，如图(2)，那么此图就表示“并非所有水生动物用鳃呼吸”，即“一些水生动物不用鳃呼吸”. 这就得到了原命题的否定.



（第 6 题）

可以看出，当我们否定一个含有全称量词的命题时，就会得到一个含有存在量词的命题.

试举社会生活或其他学科中命题的例子，并图示命题及该命题的否定.

问题与探究

“DY 三角形”

有一类三角形，我们暂且称为“DY 三角形”. 下面围绕“DY 三角形”提出许多陈述，不妨暂且称为“命题”.

第一组：

① DY 三角形有两条边相等；

② DY 三角形有两个内角相等；

③ DY 三角形有一边上的高、中线及所对角的平分线重合；

④ DY 三角形有两条边上的中线相等；

⑤ DY 三角形有两条边上的高相等；

⑥ DY 三角形的三个内角的和为 180°；

……

第二组：

① 有两条边相等的三角形是 DY 三角形；

② 有两个内角相等的三角形是 DY 三角形；

③ 有一边上的高、中线及所对角的平分线重合的三角形是 DY 三角形；

④ 有两条边上的中线相等的三角形是 DY 三角形；

⑤ 有两条边上的高相等的三角形是 DY 三角形；

⑥ 三个内角的和为 180°的三角形是 DY 三角形；

……

由于没有给出“DY 三角形”的定义，所以上述两组“命题”无法判断真假.

如果给出了“DY 三角形”的定义，那么这些“命题”有的是真命题，有的是假命题. 在真命题中，有的可以作为“DY 三角形”的性质定理，有的可以作为“DY 三角形”的判定定理，有的可以作为“DY 三角形”的定义.

如果把“有两条边相等的三角形是 DY 三角形”作为“DY 三角形”的定义，试判断上述命题的真假（可以自己尝试证明，或者查阅资料），并指出哪些命题是“DY 三角形”的性质定理，哪些命题是“DY 三角形”的判定定理.

“DY 三角形”的定义、性质定理、判定定理构成了一个关于“DY 三角形”的知识体系. 在分析的基础上，试再给出两个关于“DY 三角形”的“定义、性质定理、判定定理”的知识体系.

阅 读

有趣的悖论

悖论是指逻辑上可以推导出互相矛盾，但表面上又能自圆其说的命题或结论. 悖论的出现往往是因为人们对某些概念的理解和认识不够深刻所致. 有些悖论是很有趣的，对推动数学发展有一定的促进作用.

1. 芝诺悖论

阿基里斯追一只海龟，若海龟在阿基里斯的前面，尽管阿基里斯奔跑的速度比海龟爬行的速度快，但阿基里斯还是永远追不上海龟.

这是因为阿基里斯必须跑到海龟的出发点 A；而当他到达点 A 时，海龟又向前爬了一段，到达了点 B；当阿基里斯到达点 B 时，海龟又向前爬了一段，到达了点 C……如此一直追下去，尽管阿基里斯和海龟的距离在无限地缩小，但永远追不上海龟.

2. 理发师悖论

理发师悖论是数学家罗素给出的.

在萨维尔村，理发师挂出一块招牌“我只给村里所有那些不给自己理发的人理发”. 有人问他“你给不给自己理发?”理发师无言以对.

如果他不给自己理发，他就属于“不给自己理发的人”，他就要给自己理发；如果他给自己理发，那么他就成了“给自己理发的人”，他就不该给自己理发.

悖论有三种主要形式：

(1) 一种论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的(佯谬).

(2) 一种论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了(似是而非的理论).

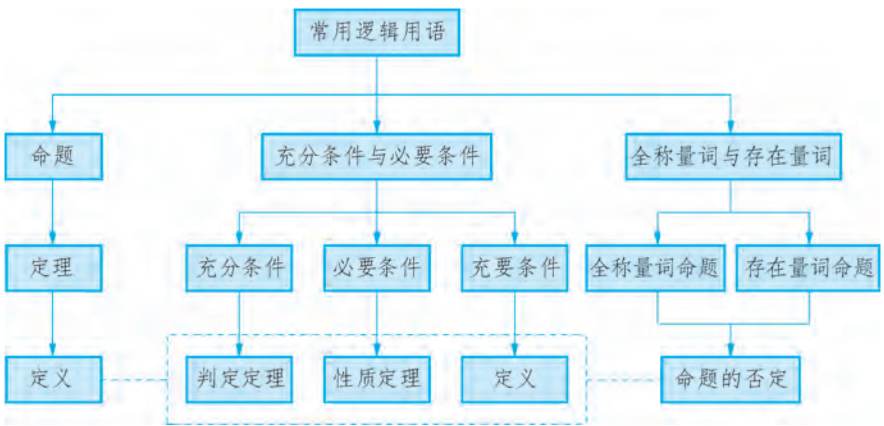
(3) 一系列推理看起来好像无法打破，可是却导致逻辑上自相矛盾.

悖论是表面上同一命题或推理中隐含着两个对立的结论，而这两个结论似乎都能自圆其说. 悖论的抽象公式是：若事件 A 发生，则推导出 A 不发生；若事件 A 不发生，则推导出 A 发生.

悖论促进了数学、逻辑学、语义学等学科的发展.

本章回顾

本章我们主要学习了命题、充分条件与必要条件、全称量词与存在量词，研究了判定定理、性质定理、定义分别与充分条件、必要条件、充要条件的关系，以及全称量词命题与存在量词命题的否定，体会了常用逻辑用语在表达数学内容中的作用.



在学习数学时，合理使用逻辑用语，既能使数学问题的描述简明扼要，又能深刻揭示知识的本质.

学习本章，应弄清楚命题与定理、定义之间的关系，弄清楚充分条件、必要条件、充要条件的含义，理解判定定理、性质定理、定义分别与充分条件、必要条件、充要条件的关系，会用全称量词和存在量词描述一些数学命题，会准确地写出全称量词命题与存在量词命题的否定.

通过本章的学习，我们要体会逻辑用语在数学表述和论证中的作用，逐步形成自觉地利用逻辑知识对一些命题之间的逻辑关系进行分析和推理的意识，能对一些逻辑推理中的错误进行甄别和纠正，使我们对问题的表述更准确、贴切，增强我们学习数学、运用数学的信心和能力.

复习题

感受·理解

1. 根据下列所给的各组 p，q 填空：

① p：$a<0$，q：$|a|>0$；

② p：两个三角形的两边及其夹角分别对应相等，q：两个三角形全等；

③ p：$a=b$，q：$a^2=b^2$；

④ p：二次函数 $y=x^2+k$ 的图象过坐标原点，q：$k=0$；

⑤ p：两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补，q：这两条直线平行；

⑥ p：两直角三角形的斜边相等，q：两直角三角形全等.

其中

p 是 q 必要条件的有________；

p 是 q 充分条件的有________；

p 是 q 充要条件的有________.

（填写序号）

2. 指出下列命题中，p 是 q 的什么条件：

（1）p：$x=1$，q：$|x|=1$；

（2）p：两直线平行，q：同位角相等；

（3）p：点在角的平分线上，q：点到角的两边所在直线的距离相等；

（4）p：斜边相等，q：两直角三角形全等.

3. 写出下列命题的否定：

（1）对任意的正数 x，都有 $\sqrt{x}>x-1$；

（2）存在实数 x，使得 $x^2+1<2x$；

（3）有的三角形最长边与最短边的和等于第三边的 2 倍；

（4）有的三角形内切圆的半径等于外接圆半径的一半；

（5）反比例函数的图象关于 y 轴对称；

（6）有的等腰三角形是直角三角形.

思考·运用

4. 指出下列定理是判定定理还是性质定理：

（1）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

（2）有两个角互余的三角形是直角三角形；

（3）菱形的对角线互相垂直；

（4）两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；

（5）三边对应成比例的两个三角形相似；

（6）相似三角形的面积比等于相似比的平方.

5. 已知 p，q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件. 用“充分条件”“必要条件”“充要条件”“既不充分又不必要条件”之一填空：

（1）s 是 r 的____________________；

（2）r 是 q 的____________________；

（3）p 是 q 的____________________.

探究·拓展

6. （阅读题）《墨经》上说：“小故，有之不必然，无之必不然. 体也，若有端. 大故，有之必然，若见之成见也.”查阅有关资料，说明这一段文字的含义，并了解《墨经》的内容.

本章测试

一、填空题

1. 将命题“菱形的对角线互相垂直”改写成“若 p，则 q”的形式为__________.

2. 命题“$\forall x \in \mathbf{R}, 2x+1>0$”的否定是____________________.

3. 命题“$\exists x \in \mathbf{R}, 2x^2-x+3=0$”的否定是____________________.

4. 命题“若 $x>0$，则 $x^2>0$”的真假性是__________.（填“真”或“假”）

5. 设 $a, b \in \mathbf{R}$，则“$a^2+b^2=0$”的充要条件是__________.

6. 若不等式 $|x|<a$ 的一个充分条件为 $0<x<1$，则实数 a 的取值范围是__________.

二、选择题

7. 对于命题 p：全等三角形的面积相等，命题 q：面积相等的三角形全等，下列说法中正确的是（　　）.

A. p 和 q 都是真命题　　B. p 和 q 都是假命题

C. p 是真命题，q 是假命题　　D. p 是假命题，q 是真命题

8. “$a\neq0$”是“$ab\neq0$”的（　　）.

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

9. 设 $a, b \in \mathbf{R}$，则“$ab+1\neq a+b$”的充要条件是（　　）.

A. a，b 不都为 1　　B. a，b 都不为 1

C. a，b 中至多有一个是 1　　D. a，b 都不为 0

10. 若命题“$\forall x \in \mathbf{R}, x^2+1>m$”是真命题，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty, 1]$　　B. $(-\infty, 1)$　　C. $[1, +\infty)$　　D. $(1, +\infty)$

三、解答题

11. 设 p：$|a|>|b|$，q：$a>b$，判断命题“若 p，则 q”的真假.

12. 指出下列命题是全称量词命题还是存在量词命题，写出它们的否定，并判断它们的真假：

（1）有的无限小数是有理数；

（2）对任意的实数 x，$x^2+2>0$.

13. 设 p：$4x-3<1$；q：$x-(2a+1)<0$，若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

14. 设 $a, b, c\in\mathbf{R}$，求关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 -1 的一个充要条件.

15. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，非空集合 $B=\{x \mid 2-a\leqslant x\leqslant 1+2a\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，求 a 的取值范围；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，求 a 的取值范围.

第3章　不等式

- 不等式
  - 不等式的基本性质
  - 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b\geqslant 0)$
    - 基本不等式的证明
    - 基本不等式的应用
  - 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式
    - 从函数观点看一元二次方程
    - 从函数观点看一元二次不等式

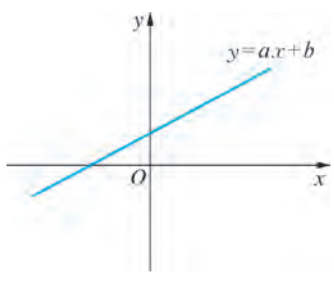
数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在于各部分之间的联系.

——希尔伯特

在自然界和社会生活中，存在着大量的相等关系、不等关系、函数关系. 我们曾经用等式(包括方程)刻画一些相等关系，用不等式刻画一些不等关系，用函数刻画一些函数关系，研究了等式、不等式、函数所具有的性质，并应用这些性质去解决问题.

在研究的过程中，我们看到，相等关系与不等关系是紧密联系的. 例如，一元一次方程 $ax+b=0$ 与一元一次不等式 $ax+b>0$，在结构、性质、解法等方面就具有很大的相似性.

我们还看到，等式、不等式、函数之间也是紧密联系的. 例如，一元一次方程 $ax+b=0$、一元一次不等式 $ax+b>0$ 与一次函数 $y=ax+b$ 之间具有“统一性”：从函数观点看，一元一次方程 $ax+b=0$ 的解就是一次函数 $y=ax+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，一元一次不等式 $ax+b>0$ 的解集就是一次函数 $y=ax+b$ 的图象在 x 轴上方部分的所有点的横坐标 x 所成的集合.



当然，我们还会遇到更多的、更一般的涉及不等关系的问题. 面对新的问题，我们可以尝试利用上述解决问题的方法，去分析问题、解决问题. 例如，

- 不等式具有哪些性质？
- 怎样从函数观点解决不等式、方程的问题？

3.1 不等式的基本性质

我们知道，实数可分为正数、零和负数，任给一个实数，它只可能为正数、零和负数中的一种．那么，对于任意两个实数 a，b，它们的差 $a-b$ 也只可能为正数、零和负数中的一种．

当 $a-b$ 为正数时，称 $a>b$；

当 $a-b$ 为零时，称 $a=b$；

当 $a-b$ 为负数时，称 $a<b$．

即有如下基本事实：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0,$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0,$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

在小学和初中，我们知道等式有如下基本性质：

(1) 若 $a=b$ 且 $b=c$，则 $a=c$；

(2) 若 $a=b$，则 $a\pm c=b\pm c$；

(3) 若 $a=b$，则 $ac=bc$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$ $(c\neq 0)$．

● 不等式有哪些基本性质呢？

利用上述的基本事实，可以证明不等式的下列基本性质．

性质 1　若 $a>b$，则 $b<a$．

性质 2　若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$．

性质 3　若 $a>b$，则 $a+c>b+c$．

性质 4　若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；

　　　　若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$．

性质 5　若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$．

性质 6　若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$．

性质 1　若 $a>b$，则 $b<a$．

分析　要证 $b<a$，只要证 $b-a<0$．

证明　因为 $a>b$，所以 $a-b>0$．

又因为正数的相反数是负数，所以 $-(a-b)<0$，

即 $$b-a<0.$$

所以 $$b<a.$$

性质 2 若 $a>b$, $b>c$,则 $a>c$.

分析 要证 $a>c$,只要证 $a-c>0$.

证明 因为 $a>b$, $b>c$,所以

$$a-b>0,\ b-c>0.$$

由两个正数的和是正数,得 $(a-b)+(b-c)>0$,

即 $$a-c>0.$$

因此 $$a>c.$$

性质 3 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$.

分析 要证 $a+c>b+c$,只要证$(a+c)-(b+c)>0$,即 $a-b>0$.

证明 因为 $a>b$,所以 $a-b>0$.

又因为 $$(a+c)-(b+c)=a-b,$$

所以 $$(a+c)-(b+c)>0.$$

故 $$a+c>b+c.$$

本性质告诉我们,不等式两边都加上(或都减去)同一个实数,不等号的方向不变. 利用它可以把不等式中某一项改变符号后,从不等式的一边移到另一边,即

$$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b.$$

性质 4 若 $a>b$, $c>0$,则 $ac>bc$;若 $a>b$, $c<0$,则 $ac<bc$.

证明 $ac-bc=(a-b)c$.

因为 $a>b$,所以 $a-b>0$.

因此,当 $c>0$ 时,$(a-b)c>0$,从而 $ac>bc$;

当 $c<0$ 时,$(a-b)c<0$,从而 $ac<bc$.

本性质告诉我们,不等式两边都乘以同一个正数,不等号的方向不变;不等式两边都乘以同一个负数,不等号的方向改变.

性质 5 若 $a>b$, $c>d$,则 $a+c>b+d$.

证明 由 $a>b$ 和性质 3,得 $a+c>b+c$.

还有其他证法吗?

又由 $c>d$ 和性质 3,得 $b+c>b+d$.

于是,由性质 2,得 $a+c>b+d$.

本性质告诉我们,两个同向不等式两边分别相加,所得的不等式和原不等式同向.

性质 6 若 $a>b>0$, $c>d>0$,则 $ac>bd$.

证明 因为 $a>b>0$, $c>0$,由性质 4,得 $ac>bc$.

因为 $c>d>0$，$b>0$，由性质4，得 $bc>bd$.

由性质2，得 $ac>bd$.

特别地，当 $a=c$，且 $b=d$ 时，有 $a^2>b^2$.

以后，我们可以用数学归纳法证明如下结论：

$$若\ a>b>0，则\ a^n>b^n(n\in \mathbf{N}^*).$$

本性质告诉我们，两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得的不等式和原不等式同向.

性质5和性质6也可以看成是前面性质的推论.

以上性质是求解和证明不等式的基础.

例1 求解不等式 $90-\frac{10}{3}t\geqslant 80$，并用不等式的性质说明理由.

解 不等式 $90-\frac{10}{3}t\geqslant 80$ 两边同乘以3，得

$$270-10t\geqslant 240. \quad (不等式性质4)$$

两边同加上 -270，得 $-10t\geqslant 240-270$. （不等式性质3）

即 $$-10t\geqslant -30.$$

两边同乘以 $-\frac{1}{10}$，得 $t\leqslant 3$. （不等式性质4）

例2 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

证法1 由 $a>b$，得 $a-b>0$；由 $c<d$，得 $d-c>0$.

因为 $(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$，所以

$$a-c>b-d.$$

证法2 因为 $c<d$，所以 $-c>-d$.

又因为 $a>b$，所以 $a+(-c)>b+(-d)$.

即 $$a-c>b-d.$$

例3 比较两数 $(a^2+1)^2$ 与 a^4+a^2+1 的大小.

解 因为 $(a^2+1)^2-(a^4+a^2+1)$

$=a^4+2a^2+1-a^4-a^2-1$

$=a^2$.

当 $a=0$ 时，$a^2=0$，所以 $(a^2+1)^2=a^4+a^2+1$；

当 $a\neq 0$ 时，$a^2>0$，所以 $(a^2+1)^2>a^4+a^2+1$.

练习

1. 回答下列问题，并说明理由.

(1) 由 $a>b$，能否得到 $ac^2>bc^2$？

(2) 由 $a>b$，$c>d$，能否得到 $a-c>b-d$？

(3) 由 $a>b$，$c>d$，能否得到 $ac>bd$？

2. 解不等式 $10-\frac{5}{2}x\geqslant 3$，并用不等式的性质说明理由.

3. 比较两数 $(x+1)(x^2-x+1)$ 与 $(x-1)(x^2+x+1)$ 的大小.

4. 已知 $a<b<0$，求证：$a^2>b^2$.

5. 已知 $a\geqslant b>0$，求证：$b\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant a$.

习题 3.1

感受・理解

1. 解不等式 $2-\frac{x-1}{3}<\frac{x+1}{2}$，并用不等式的性质说明理由.

2. 已知 $a\neq b$，比较 a^2-ab 与 $ba-b^2$ 的大小.

3. 已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+2)^2$ 与 x^4+x^2+4 的大小.

4. 证明下面的结论：

(1) 如果 $a>b>0$，$c>d$，且 $c>0$，那么 $ac>bd$；

(2) 如果 $a<b<0$，$c<d<0$，那么 $ac>bd$；

(3) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$；

(4) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，$e>0$，那么 $\frac{e}{ac}<\frac{e}{bd}$.

5. 设 m 为实数，解关于 x 的不等式 $m(x+2)<x+m$.

6. 设 x，y 为正数，比较 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 与 $\frac{1}{x+y}$ 的大小.

思考・运用

7. 已知 $-1<x<y<0$，比较 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，x^2，y^2 的大小关系.

8. 已知 $a<b<0$，求证：$a^4>b^4$.

9. 已知 $a>b>0$，求证：

(1) $\sqrt{a}>\sqrt{b}$；

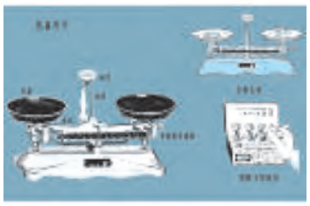
(2) $a>\sqrt{ab}>b$.

10. 已知 $a>b$，$ab\neq 0$，试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

探究・拓展

11. 已知 b g 糖水中含有 a g 糖 $(b>a>0)$，若再添加 m g 糖 $(m>0)$ 溶解在其中，则糖水变得更甜(即糖水中含糖浓度变大). 试根据这个事实写出 a，b，m 所满足的不等关系，并给予证明.

3.2 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ $(a, b\geqslant 0)$



把一个物体放在天平的一个盘子上，在另一个盘子上放砝码使天平平衡，称得物体的质量为 a. 如果天平制造得不精确，天平的两臂长略有不同(其他因素不计)，那么 a 并非物体的实际质量. 不过，我们可作第二次测量：把物体调换到天平的另一个盘子上，此时称得物体的质量为 b. 那么如何合理地表示物体的质量呢?

简单的做法是，把两次称得物体的质量“平均”一下，以

$$A=\frac{a+b}{2}$$

表示物体的质量. 这样的做法合理吗?

设天平的两臂长分别为 l_1, l_2，物体实际质量为 M，根据力学原理有

$$l_1M=l_2a,$$
$$l_2M=l_1b.$$

将上述两个等式的两边分别相乘，得

$$l_1l_2M^2=l_1l_2ab,$$

所以 $$M=\sqrt{ab}.$$

由此可知，物体的实际质量是 $\sqrt{ab}$. 对于正数 a, b，我们把 $\frac{a+b}{2}$ 称为 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 称为 a，b 的几何平均数.

● 两个正数 a，b 的算术平均数和几何平均数之间具有怎样的大小关系?

3.2.1 基本不等式的证明

当 $a>0$, $b>0$ 时，我们可以尝试作出长度为 $\sqrt{ab}$ 和 $\frac{a+b}{2}$ 的两条线段，再比较这两条线段的长.

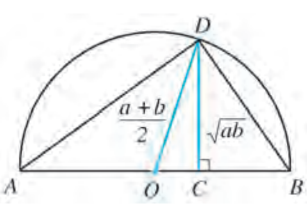


图 3-2-1

如图 3-2-1，AB 是 $\odot O$ 的直径，$AC=a$，$CB=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交 $\odot O$ 的半圆于点 D，连接 AD, BD，易知 $\triangle ACD\backsim\triangle DCB$，故 $\frac{CD}{CB}=\frac{CA}{CD}$，得 $CD=\sqrt{ab}$.

而 $OD=\dfrac{a+b}{2}$，且 $CD\leqslant OD$，

所以

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},$$

当且仅当点 C 与点 O 重合，即 $a=b$ 时，等号成立.

也就是说，两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数，当两个正数相等时，两者相等.

下面证明上述猜想是正确的.

证法 1 对于正数 a，b，有

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}&=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})\\&=\frac{1}{2}[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}]\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.\end{aligned}$$

因为 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，所以 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant0$，即 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$ 时，等号成立.

证法 2 对于正数 a，b，要证

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},$$

只要证 $$2\sqrt{ab}\leqslant a+b,$$

只要证 $$0\leqslant a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b,$$

只要证 $$0\leqslant(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

因为最后一个不等式成立，所以 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ 成立，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

证法 3 对于正数 a，b，有

$$\begin{aligned}&(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0,\\&\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geqslant0,\\&\Rightarrow a+b\geqslant2\sqrt{ab},\\&\Rightarrow \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

当 $a, b \geqslant 0$ 时，这个不等式仍然成立.

如果 a,b 是正数，那么 $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立）.

我们把不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ （$a, b \geqslant 0$）称为**基本不等式**.

当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时，由 $(a-b)^2 \geqslant 0$ 可得

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, a^2+b^2+2ab \geqslant 4ab,$$

即

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，其中的等号成立.

当 $a>0, b>0$ 时，请用基本不等式证明这两个不等式.

从而得到：

当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时，

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}\ (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时，等号成立});$$

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时，等号成立}).$$

这两个不等式通常可以直接使用.

例 1 设 a, b 为正数，证明下列不等式成立：

(1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqslant 2$；　　(2) $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqslant 4$.

证明 (1) 因为 a, b 为正数，所以 $\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}$ 也为正数.

由基本不等式，得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}=2,$$

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=b$ 时，取得等号. 所以原不等式成立.

(2) 因为 a, b 为正数，所以 $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}$ 也为正数.

由基本不等式，得

$$a+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}=2,$$

$$b+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}}=2,$$

所以

$$a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4,$$

当且仅当 $a=\dfrac{1}{a}, b=\dfrac{1}{b}$，即 $a=b=1$ 时，取得等号.

因此，原不等式成立.

例 2 设 $y=x+\dfrac{16}{x+2}$，$x\in(-2,+\infty)$，求 y 的最小值.

解 因为 $x>-2$，所以 $x+2>0$.

由基本不等式，得

$$\begin{aligned}x+\frac{16}{x+2}&=(x+2)+\frac{16}{x+2}-2\\&\geqslant 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}-2\\&=6,\end{aligned}$$

当且仅当 $x+2=\dfrac{16}{x+2}$，即 $x=2$ 时，等号成立.

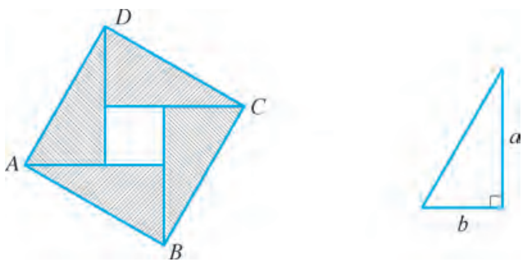
因此，当 $x=2$ 时，y 的最小值为 6.

练　习

1. 计算下列两个数的算术平均数与几何平均数(其中 $p>0$)：

(1) 2，8；　(2) 3，12；　(3) p，$9p$；　(4) 2，$2p^2$.

2. 如图，我国古代的“弦图”是由四个全等的直角三角形围成的. 设直角三角形的直角边长为 a，b，根据图示，大正方形的面积与四个小直角三角形的面积之和存在不等关系，用 a，b 表示这种关系.



(第 2 题)

3. 证明：

(1) $a+\dfrac{1}{a-1}\geqslant 3\ (a>1)$；　(2) $x+\dfrac{1}{x}\leqslant -2\ (x<0)$.

4. 求 $4x^2+\dfrac{9}{x^2}$ 的最小值.

5. 设 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，利用直角三角形三边关系，证明 $1<\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

3.2.2 基本不等式的应用

基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\ (a，b\geqslant 0)$ 常用于证明一些不等式以及求某些函数的最大值或最小值.

例 3 用长为 $4a$ 的铁丝围成一个矩形，怎样才能使所围矩形的

面积最大?

解 设矩形长为 $x\ (0<x<2a)$,则宽为 $2a-x$,矩形面积为

$$S=x(2a-x),$$

且 $x>0$, $2a-x>0$.

由基本不等式,得

$$\sqrt{x(2a-x)}\leqslant\frac{x+(2a-x)}{2}=a.$$

也可转化为求二次函数 $S=x(2a-x)$ 的最大值.

上式当且仅当 $x=2a-x$,即 $x=a$ 时,等号成立.

由此可知,当$x=a$ 时,$S=x(2a-x)$ 取得最大值 a^2.

答 将铁丝围成正方形时面积最大,最大面积为 a^2.

例 4 某工厂建造一个无盖的长方体贮水池,其容积为 $4\ 800\ \mathrm{m}^3$,深度为 3 m. 如果池底每平方米的造价为 150 元,池壁每平方米的造价为 120 元,怎样设计水池能使总造价最低? 最低总造价为多少元?

解 设总造价为 y 元($y>0$),池底的一边长为 x m($x>0$),则另一边长为$\frac{4\ 800}{3x}$ m,即$\frac{1\ 600}{x}$ m. 由题中条件可得

$$\begin{aligned}y&=150\times\frac{4\ 800}{3}+2\times120\times3\times\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)\\&=150\times1\ 600+720\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right).\end{aligned}$$

由题意知 $x>0$,及 $x+\frac{1\ 600}{x}\geqslant2\sqrt{1\ 600}=80$(当且仅当 $x=40$ 时,等号成立),所以

$y\geqslant150\times1\ 600+720\times80=297\ 600$,且 $x=40$ 时,取得等号.

答 当水池设计成底面边长为 40 m 的正方形时,总造价最低,为 297 600 元.

对于正数 a, b,在运用基本不等式时,应注意:

(1) 和 $a+b$ 为定值时,积 ab 有最大值(如例 3);积 ab 为定值时,和$a+b$ 有最小值(如例 4).

(2) 取等号的条件$\left(当且仅当 a=b 时,\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}\right)$.

例 5 如图 3-2-2,在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,$AC=b$,$BC=a$,且$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. 当 $\triangle ABC$ 的面积最小时,求 a, b 的值.

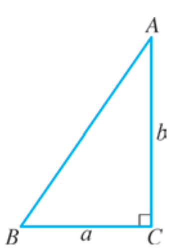


图 3-2-2

解 由题意知 $a>0$, $b>0$,由基本不等式,得

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}.$$

因为$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，所以$1\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，故$ab\geqslant 8$.

于是，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\geqslant 4$，当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$，即$a=2$，$b=4$时，等号成立.

因此，当$\triangle ABC$的面积最小时，$a=2$，$b=4$.

例 6 如图 3-2-3，一份印刷品的排版面积(矩形)为A，它的两边都留有宽为a的空白，顶部和底部都留有宽为b的空白. 如何选择纸张的尺寸，才能使纸的用量最少?

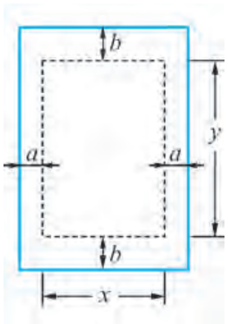


图 3-2-3

解 设纸张的面积为S，排版矩形的长和宽分别是x，y $(x>0$，$y>0)$，则$xy=A$.

$$\begin{aligned}S&=(x+2a)(y+2b)\\&=xy+2bx+2ay+4ab\\&\geqslant xy+2\sqrt{4abxy}+4ab\\&=A+4\sqrt{abA}+4ab\\&=(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2.\end{aligned}$$

当且仅当$2bx=2ay$，即$x=\sqrt{\frac{Aa}{b}}$，$y=\sqrt{\frac{Ab}{a}}$时，S有最小值$(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2$，此时纸张的长和宽分别为$\sqrt{\frac{Aa}{b}}+2a$和$\sqrt{\frac{Ab}{a}}+2b$.

答 当纸张的长和宽分别为$\sqrt{\frac{Aa}{b}}+2a$和$\sqrt{\frac{Ab}{a}}+2b$时，纸张的用量最少.

练 习

1. 若$m>0$，$n>0$，$mn=81$，则$m+n$的最小值是(　　).

   A. 4　　B. $4\sqrt{3}$

   C. 9　　D. 18

2. 若直角三角形的面积为50，则两条直角边的和的最小值是(　　).

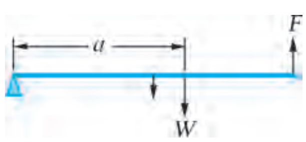
   A. $5\sqrt{2}$　　B. 10

   C. $10\sqrt{2}$　　D. 20

3. 设$x>0$，$y>0$，且$2x+5y=20$，求xy的最大值.

4. 将一段圆木制成横截面是矩形的柱子，怎样加工才能使横截面的面积最大?

5. 如图，质量是W的重物挂在杠杆上距支点a处. 质量均匀的杆子每单位长度的质量为m. 杠杆应当多长，才能使得加在另一端用来平衡重物的力F最小?



(第 5 题)

习题 3.2

感受·理解

1. 证明下列不等式：

(1) $a^2+b^2 \geqslant 2a+2b-2$；　　(2) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$；

(3) 若 $a, b \in (0, +\infty)$，则 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

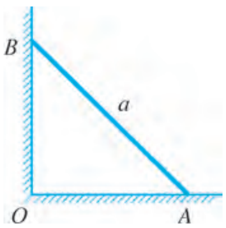
2. 设 $x>0$，$y>0$，且 $xy=4$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

3. 证明：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2+1} \geqslant 1$；　　(2) $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2$.

4. 求 $1+2x^2+\dfrac{8}{x^2}$ 的最小值.

5. 设 a, b 是正实数，求证：$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.



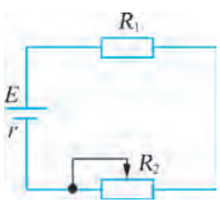
（第 6 题）

6. 如图，墙角线互相垂直，长为 a m 的木棒 AB 的两个端点分别在这两墙角线上，如何放置木棒才能使围成区域的面积最大？

7. 已知 a, b, c, d 都是正数，且 $a<b$，$c<d$，求证：$\dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a+d}{b+d}$.

思考·运用

8. 当 $x \neq 0$ 时，求 $x+\dfrac{4}{x}$ 的取值范围.



（第 9 题）

9. 如图，电路中电源的电动势为 E，内阻为 r，R_1 为固定电阻，R_2 是一个滑动变阻器. 已知 R_2 消耗的电功率为 $P=\left(\dfrac{E}{r+R_1+R_2}\right)^2 R_2$. 当 R_2 调至何值时，$\left(\dfrac{E}{r+R_1+R_2}\right)^2 R_2$ 最大？最大值是多少？

10. 某种产品的两种原料相继提价，产品生产者决定根据这两种原料提价的百分比，对产品分两次提价，现在有三种提价方案：

方案甲：第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$；

方案乙：第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$；

方案丙：第一次提价 $\dfrac{p+q}{2}\%$，第二次提价 $\dfrac{p+q}{2}\%$.

其中 $p>q>0$，比较上述三种方案，哪一种提价少？哪一种提价多？

探究·拓展

11. （阅读题）甲、乙两同学分别解“设 $x \in [1, +\infty)$，求函数 $y=2x^2+1$ 的最小值”的过程如下：

甲：$y=2x^2+1 \geqslant 2\sqrt{2x^2 \cdot 1}=2\sqrt{2}x$，又 $x \geqslant 1$，所以 $2\sqrt{2}x \geqslant 2\sqrt{2}$.

从而 $y \geqslant 2\sqrt{2}x \geqslant 2\sqrt{2}$，即 y 的最小值是 $2\sqrt{2}$.

乙：因为 $y=2x^2+1$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的图象随着 x 增大而逐渐上升，即 y 随 x 增大而增大，所以 y 的最小值是 $2\times 1^2+1=3$.

试判断谁错，错在何处？

3.3 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

我们知道，一次函数、一元一次方程、一元一次不等式之间有着密切的联系. 例如，可以借助函数 $y=2x-3$ 的图象来求解 $2x-3=0$，$2x-3>0$，$2x-3<0$. 反过来，也可以通过求解 $2x-3=0$，$2x-3>0$，$2x-3<0$，来深入理解函数 $y=2x-3$ 的性质. 那么，

● 怎样从函数观点进一步解决方程、不等式的问题？

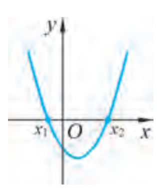
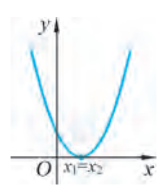
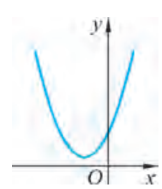
3.3.1 从函数观点看一元二次方程

从函数的观点看，方程 $x^2-2x-3=0$ 的两个根 $x_1=-1$，$x_2=3$，就是二次函数 $y=x^2-2x-3$ 当函数值取零时自变量 x 的值，即二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴交点的横坐标. 这时，我们称 -1，3 为二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的零点.

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的根就是二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 当函数值取零时自变量 x 的值，即二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，也称为**二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的零点**.

当 $a>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点之间的关系如表 3-3-1 所示：

表 3-3-1

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两个相异的实数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点	有两个零点 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有一个零点 $x=-\dfrac{b}{2a}$	无零点

当 $a<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点之间的关系请同学们自行完成（见练习 1）.

例 1 求证：二次函数 $y=2x^2+3x-7$ 有两个零点.

分析 要证明二次函数 $y=2x^2+3x-7$ 有两个零点，只需证明一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根即可.

证明 考察一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$.

因为
$$\Delta=3^2-4\times2\times(-7)=65>0,$$
所以方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根.

因此，二次函数 $y=2x^2+3x-7$ 有两个零点.

例 2 判断二次函数 $y=x^2-2x-1$ 在区间 $(2,3)$ 上是否存在零点.

可以作出函数图象进行直观判断.

解 根据求根公式可得一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根分别为
$$x_1=1+\sqrt{2},\ x_2=1-\sqrt{2}.$$
因为
$$1<\sqrt{2}<2,$$
所以
$$2<1+\sqrt{2}<3.$$
因此，二次函数 $y=x^2-2x-1$ 在区间 $(2,3)$ 上存在零点.

练习

1. 当 $a<0$ 时，请填下表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根			
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点			

2. 画出二次函数 $y=x^2-x-2$ 的图象，并指出该函数的零点.

3. 求下列二次函数的零点：

(1) $y=(x+1)(x-1)$；

(2) $y=x^2-4x$；

(3) $y=-3x^2-9$；

(4) $y=-x^2+2x-1$.

3.3.2 从函数观点看一元二次不等式

我们来看下面的问题：

某杂志以每册 2 元的价格发行时，发行量为 10 万册. 经过调查，若单册价格每提高 0.2 元，则发行量就减少 5 000 册. 要使杂志社的销售收入大于 22.4 万元，每册杂志的价格应定在怎样的范围内？

设每册杂志价格提高 x 元，则发行量减少

$$0.5\times\frac{x}{0.2}=\frac{5x}{2}$$

万册，杂志社的销售收入为 $(2+x)\left(10-\frac{5x}{2}\right)$ 万元.

根据题意，得 $$(2+x)\left(10-\frac{5x}{2}\right)>22.4,$$

化简，得 $$5x^2-10x+4.8<0.$$

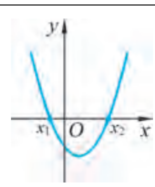
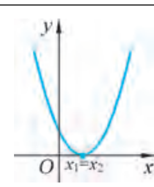
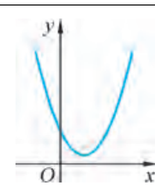
像这样只含有一个未知数，并且未知数最高次数是 2 的整式不等式叫作**一元二次不等式**.

我们知道，一元二次方程和相应的二次函数有着密切的联系，一元二次方程的根就是相应二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标. 那么，

● 一元二次不等式和相应的二次函数是否也有内在的联系？

当 $a>0$ 时，我们有表 3-3-2：

表 3-3-2

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两个相异的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
$ax^2+bx+c>0$ 的解集	$(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	**R**
$ax^2+bx+c<0$ 的解集	(x_1, x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$

当 $a<0$ 时，通过不等式两边同乘以 -1，可将问题转化为二次项系数为正的情形，利用表 3-3-2 解决.

例 1 解下列不等式：

(1) $x^2-7x+12>0$；　　(2) $-x^2-2x+3\geqslant 0$；

(3) $x^2-2x+1<0$；　　(4) $x^2-2x+2>0$.

解 (1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=4$.

根据 $y=x^2-7x+12$ 的图象(图 3-3-1(1))，可得原不等式的解集为

$$\{x\mid x<3 \text{ 或 } x>4\}.$$

对于二次项系数为负数的不等式，可以先把二次项系数化成正数，然后再求解.

(2) 不等式两边同乘以 -1，得

$$x^2+2x-3\leqslant 0.$$

方程 $x^2+2x-3=0$ 的解为 $x_1=-3$，$x_2=1$.

根据 $y=x^2+2x-3$ 的图象(图 3-3-1(2))，可得原不等式的解集为

$$\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}.$$

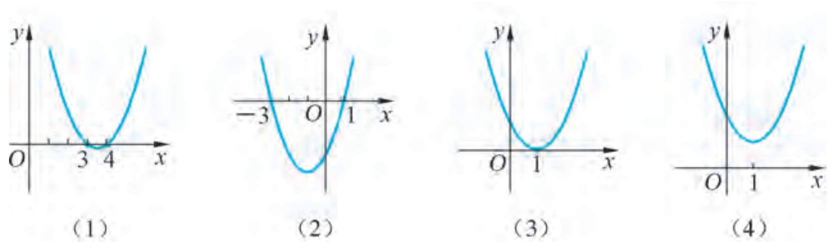


图 3-3-1

(3) 方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的解 $x_1=x_2=1$.

根据 $y=x^2-2x+1$ 的图象(图 3-3-1(3))，可得原不等式的解集为 $\varnothing$.

(4) 因为 $\Delta<0$，所以方程 $x^2-2x+2=0$ 无实数解.

根据 $y=x^2-2x+2$ 的图象(图 3-3-1(4))，可得原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

练　习

1. (1) 不等式 $(x-1)(x-3)>0$ 的解集为(　　).

A. $\{x|x<1\}$　　B. $\{x|x>3\}$

C. $\{x|x<1 \text{ 或 } x>3\}$　　D. $\{x|1<x<3\}$

(2) 不等式 $-x^2+2x-4>0$ 的解集为(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $\varnothing$

C. $\{x|x>0, x\in\mathbf{R}\}$　　D. $\{x|x<0, x\in\mathbf{R}\}$

2. 解下列不等式：

(1) $x^2+4x-12>0$；　　(2) $x^2-x+1\leqslant 0$；

(3) $2x^2-5x+3<0$；　　(4) $3x^2-x-4>0$；

(5) $2x^2+4x+3>0$；　　(6) $9x^2-6x+1\leqslant 0$.

3. 解下列不等式：

(1) $-6x^2-x+2<0$；　　(2) $1-4x^2>4x+2$；

(3) $1-3x<x^2$；　　(4) $(x-2)(x+2)>1$.

4. 当 x 是什么实数时，函数 $y=-x^2+5x+14$ 的值是：

(1) 0？

(2) 正数？

(3) 负数？

5. (1) 已知集合 $M=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 7\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$，求 $M\cap N$；

(2) 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\mid (x-2)(x-5)<0\}$，求 $A\cup B$.

例 2 用一根长为 100 m 的绳子能围成一个面积大于 600 m² 的矩形吗？当长、宽分别为多少米时，所围成的矩形的面积最大？

解 设矩形一边的长为 x m，则另一边的长为 $(50-x)$ m，其中 $0<x<50$.

由题意，得 $$x(50-x)>600,$$

即 $$x^2-50x+600<0,$$

解得 $$20<x<30.$$

所以，当矩形一边的长在 20 m 至 30 m 的范围内取值时，能围成一个面积大于 600 m² 的矩形.

用 S 表示矩形的面积，则

$$\begin{aligned}S&=x(50-x)\\&=-(x-25)^2+625\ (0<x<50).\end{aligned}$$

你能用基本不等式来求 $x(50-x)$ 的最大值吗？

当 $x=25$ 时，S 取得最大值，此时 $50-x=25$.

答 当矩形的长、宽都为 25 m 时，所围成的矩形的面积最大.

例 3 某小型服装厂生产一种风衣，日销货量 x 件（$x\in\mathbf{N}^*$）与货价 p 元/件之间的关系为 $p=160-2x$，生产 x 件所需成本为 $C=500+30x$ 元. 问：该厂日产量多大时，日获利不少于 1 300 元？

解 由题意，得 $$(160-2x)x-(500+30x)\geqslant 1\,300,$$

化简，得 $$x^2-65x+900\leqslant 0,$$

解得 $$20\leqslant x\leqslant 45.$$

答 该厂日产量在 20 件至 45 件时，日获利不少于 1 300 元.

例 4 汽车在行驶中，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，我们称这段距离为“刹车距离”. 刹车距离是分析事故产生原因的一个重要因素.

在一个限速为 40 km/h 的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场勘查测得甲车的刹车距离小于 12 m，乙车的刹车距离略超过 10 m. 又知甲、乙两种车型的刹车距离 s(单位：m)与车速 x(单位：km/h)之间分别有如下关系：

一般来说，刹车距离与车速是二次函数关系.

$$s_{甲}=0.1x+0.01x^2,\quad s_{乙}=0.05x+0.005x^2.$$

问：甲、乙两车有无超速现象？

分析 根据汽车的刹车距离可以估计汽车的车速.

解 由题意知，对于甲车，有 $0.1x+0.01x^2<12$，

即 $$x^2+10x-1\,200<0,$$

解得 $$-40<x<30.$$

这表明甲车的车速低于 30 km/h，未超过规定限速.

对于乙车，有 $0.05x+0.005x^2>10$，

即 $$x^2+10x-2\,000>0,$$

解得 $x>40$ 或 $x<-50$ (不合实际意义，舍去).

这表明乙车的车速超过 40 km/h，超过规定限速.

答 甲车未超过规定限速，乙车超过规定限速.

练　习

1. 如果某厂扩建后计划后年的产量不低于今年的 2 倍，那么明、后两年每年的平均增长率至少是多少？
2. 销售某种商品，单价为 a 元时，销售量是 b. 经市场调研可以预测，若单价上涨 $m\%$，则销售量将减少 $\frac{m}{150}$. 为了使该商品的销售金额最大，m 应定为多少？
3. 国家为了加强对饮用酒生产的宏观管理，实行征收附加税政策. 已知某种酒每瓶 70 元，不征收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若政府征收附加税，每销售 100 元要征税 R 元(叫作税率 $R\%$)，则每年的销售量将减少 $10R$ 万瓶. 要使每年在此项经营中所收取的附加税不少于 112 万元，R 应怎样确定？

习题 3.3

感受·理解

1. 证明：函数 $y=x^2-x+1$ 没有零点.
2. 设 m 为实数，若函数 $y=x^2-mx+2$ 有且只有一个零点，求 m 的值.
3. 设 k 为实数，若方程 $x^2-3x+k-3=0$ 有实数根，求 k 的取值范围.
4. 证明：函数 $y=5x^2-7x-1$ 的一个零点在区间$(-1, 0)$内，另一个零点在区间$(1, 2)$内.
5. 解下列不等式：

(1) $x(x-1)\leqslant 0$；　(2) $(x+1)(x-5)>0$；

(3) $x^2-6x+9\leqslant 0$；　(4) $3x^2-7x+2>0$；

(5) $-2x^2-x+6\geqslant 0$；　　(6) $x^2+x+1>0$.

6. 解下列不等式：

(1) $2x^2-3x>2$；　　(2) $3x^2-5x+4>0$；

(3) $x(x+2)<x(3-x)+1$；　　(4) $(3x-1)(x+1)>4$.

7. 当 x 是什么实数时，函数 $y=-x^2-8x+20$ 的值是：

(1) 0?

(2) 正数?

(3) 负数?

8. 制作一个高为 20 cm 的长方体容器，底面矩形的长比宽多 10 cm，并且容积不少于 4 000 cm^3. 问：底面矩形的宽至少应是多少?

9. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(2,0)$ 两点，求关于 x 的不等式 $x^2+bx+c>0$ 的解集.

思考・运用

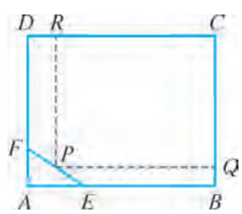
10. 设 m 为实数，已知二次函数 $y=x^2-5x+m$ 的两个零点都在区间 $(0,+\infty)$ 内，求 m 的取值范围.

11. (1) k 是什么实数时，方程 $x^2+2(k-1)x+3k^2-11=0$ 有两个不相等的实数根?

(2) 已知不等式 $x^2-2x+k^2-1>0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 k 的取值范围.

12. 已知不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集是 $\{x \mid 3<x<4\}$，求实数 a，b 的值.

13. 如图，某房地产开发公司要在矩形地块 $ABCD$ 上规划出一块矩形地块 $PQCR$ 建造住宅区. 为了保护文物，住宅区不能超越文物保护区 $\triangle AEF$ 的界线 EF. 由实地测量知，$AB=200$ m，$AD=160$ m，$AE=60$ m，$AF=40$ m. 问：怎样设计矩形住宅区的长和宽，才能使其面积最大? 最大面积是多少?



(第 13 题)

14. 已知某公司每天生产的某种产品的数量 x（单位：百件）与其成本 y（单位：千元）之间的函数解析式可以近似地用 $y=ax^2+bx+c$ 表示，其中 a，b，c 为常数. 现有实际统计数据如下表所示：

产品数量 x/百件	6	10	20
成本 y/千元	104	160	370

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 若每件产品销售价为 200 元，则该公司每天生产多少产品时才能盈利?（假设每天生产的产品可以全部售完）

探究・拓展

15. (阅读题) 重新考察不等式 $5x^2-10x+4.8<0$. 这个不等式的左边可分解因式为 $(x-1.2)(5x-4)$. 根据实数乘法的符号法则，问题可归结为求一元

一次不等式组

$$(1)\begin{cases}x-1.2<0,\\5x-4>0\end{cases}\quad 和 \quad (2)\begin{cases}x-1.2>0,\\5x-4<0\end{cases}$$

的两个解集的并集.

不等式组(1)的解为 $0.8<x<1.2$，不等式组(2)无解，从而不等式 $5x^2-10x+4.8<0$ 的解集为 $\{x\mid 0.8<x<1.2\}$.

试用上述方法解下面的不等式：

(1) $(2x-3)(x+1)>0$；　　(2) $(1-x)(2+x)\geqslant 0$；

(3) $\dfrac{x-1}{x+3}<0$；　　(4) $\dfrac{1-2x}{x+4}\leqslant 0$.

问题与探究

基本不等式的推广

我们已知基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ $(a,\ b\geqslant 0)$，那么，对于 3 个正数 $a,\ b,\ c$，是否有

$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}?$$

对于 4 个正数 $a,\ b,\ c,\ d$，是否有

$$\sqrt[4]{abcd}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}?$$

给出一些具体数，借助计算机（器）验证一下，并尝试给出证明. 你还会有什么猜想？

阅 读

不等号的演变

在早期,人们使用文字或象征性记号来记述不等关系.例如,荷兰数学家吉拉尔(A. Girard, 1595—1632)在他1629年所著《代数新发现》一书中,使用下面记号:

A ff B　表示 A 大于 B,B § A　表示 B 小于 A.

1631年,英国数学家奥特雷德(W. Oughtred, 1574—1660)在《数学入门》一书中,用符号:

⊐　表示大于,⊐　表示小于.

也有传说,用符号:

⊏　表示大于,⊐　表示小于.

1634年,法国数学家厄里岗(P. Herigone)在《数学教程》一书中,采用符号:

$a3\mathrm{I}2b$　表示 a 大于 b,$b2\mathrm{I}3a$　表示 a 小于 b.

他的意思是说,因为 $3>2$,所以 $a3>2b$ (a, b 为正数),故 $a>b$,小于号的意思也是这样的.

1631年,英国数学家、望远镜发明者哈里奥特(T. Harriot, 1560—1621)去世后10周年,人们出版了他的遗著《分析术实例》.在这本书中,他写道:

大于的记号:$a>b$ 表示 a 量大于 b 量,

小于的记号:$a<b$ 表示 a 量小于 b 量.

这一简洁优美的记号,不管后人采用怎样的方式去创造不等号,最终都无法取代"$>$""$<$"两个记号."$>$""$<$"直到18世纪初才被广泛使用.

至于"$\neq$""$\ngtr$""$\nless$"的出现,乃是近代之事.一般人不使用"$\nless$""$\ngtr$",而使用"$\geqslant$""$\leqslant$"(或"$\geqq$""$\leqq$")两个记号,表示"大于或等于""小于或等于".

在数学史上,也有数学家使用"$\eqslantgtr$"表示"等于或大于","$\eqslantless$"表示"等于或小于".

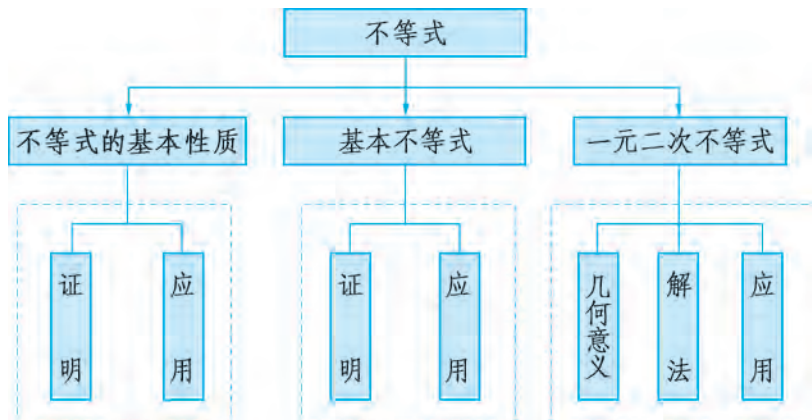
在少数数学著作中,也出现用"$\vee$"表示小于,"$\wedge$"表示大于.例如,$2\vee3$ 表示"2小于3",$9\wedge7$ 表示"9大于7",这种写法没有得到广泛传播,更多的数学书只将符号"$\vee$"表示"$<$""$>$""$\leqslant$""$\geqslant$"中的一种.例如,$a\vee b$ 表示"$a>b$""$a<b$""$a\leqslant b$""$a\geqslant b$"中的一种.

高等数学中,还出现"$\ll$"表示"远小于","$\gg$"表示"远大于".

在有些计算机语言中,使用"$<>$"表示"不等于","$>=$"表示"大于或等于","$<=$"表示"小于或等于".

本章回顾

本章研究了不等式的基本性质及基本不等式的应用，探讨了二次函数、一元二次方程和一元二次不等式之间的关系.



不等式是刻画现实世界中不等关系的数学模型，在实际问题中有着广泛的应用.

学习本章时应注重体会类比、数形结合等数学思想的应用，学会通过二次函数图象理解一元二次不等式与一元二次方程、二次函数的联系，并能解释基本不等式的几何意义. 在此基础上，体会不等式在解决实际问题中的作用，进一步提高解决实际问题的能力.

复习题

感受・理解

1. 设 a, b, c, d 是实数，求证：$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$.

2. 求函数 $y=2-3x-\dfrac{4}{x}\ (x>0)$ 的最大值.

3. 设实数 x 满足 $x>-1$，求函数 $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ 的最小值.

4. 设圆的半径为 r，求半圆上一点到直径两端点距离之和的最大值.

5. 解下列不等式：

(1) $2x^2+5x-3>0$；

(2) $2+x-x^2 \leqslant 0$；

(3) $x^4-x^2-2 \geqslant 0$；

(4) $2x-\sqrt{x}>1$.

6. 设 a, b, c 为实数，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x \mid x<1$ 或 $x>3\}$，求 $a:b:c$.

7. 设 m 为实数，已知函数 $y=x^2-(m-1)x-2m$ 有两个零点，求 m 的取值范围.

8. 以速度 v(单位：m/s)从地面竖直向上发射子弹，经过时间 t(单位：s)的子弹高度 h(单位：m)可由二次函数 $h=vt-4.9t^2$ 确定. 已知发射后第 5 s 末时的子弹高度为 245 m，试求子弹在 245 m 以上的高度能持续多长时间.

9. 一个动力船拖动载重量相等的小船若干只，在两个港口之间来回运货. 若拖 4 只小船，则每天能往返 16 次；若拖 7 只小船，则每天能往返 10 次. 已知增加的小船只数与相应减少的往返次数成正比例. 试问：每次拖多少只小船时，能使每天运货总量最大?

思考·运用

10. 设 a, b, c, x, y, z 都是正数，求证：

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

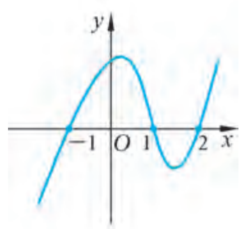
11. 设 a, b, c, d 为实数，求证：$ab+bc+cd+da\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2$.

12. 函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示.

(1) 方程 $y=0$ 的根是________________；

(2) 不等式 $y<0$ 的解集是________________；

(3) 不等式 $y>0$ 的解集是________________.



(第 12 题)

13. 设 m 为实数，$y=(m+1)x^2-mx+m-1$.

(1) 若方程 $y=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是____________；

(2) 若不等式 $y>0$ 的解集为 $\varnothing$，则 m 的取值范围是____________；

(3) 若不等式 $y>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 m 的取值范围是____________.

14. 汽车在行驶过程中，遇到特别情况需要刹车，从刹车(刹死车轮)到停止汽车所走过的路程称为刹车距离.

已知某汽车的刹车距离 s(单位：m)与速度 v(单位：m/s)之间的关系可近似表示为 $s=0.072v^2$. 若该汽车在某路段行驶过程中，前方 80 m 处可能会突然出现障碍物，驾驶员从发现障碍物到刹车需经过 0.8 s 的反应时间，为了安全，汽车必须在障碍物前 5 m 处停住. 问：这辆汽车在该路段最大限制速度是多少?

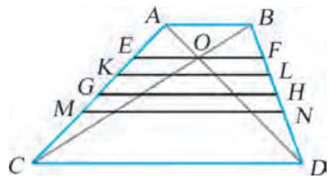
15. 设正数 x, y 满足下列条件，分别求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

(1) $x+y=1$；

(2) $x+2y=1$.

探究·拓展

16. 如图，$ABDC$ 为梯形，其中 $AB=a$，$CD=b$，设 O 为对角线的交点. GH 表示平行于两底且与它们等距离的线段（即梯形的中位线），KL 表示平行于两底且使梯形 $ABLK$ 与梯形 $KLDC$ 相似的线段，EF 表示平行于两底且过点 O 的线段，MN 表示平行于两底且将梯形 $ABDC$ 分为面积相等的两个梯形的线段.



（第 16 题）

试研究线段 GH，KL，EF，MN 与代数式 $\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 之间的关系，并据此推测它们之间的一个大小关系. 你能用基本不等式证明所得到的猜测吗？

本章测试

一、填空题

1. 不等式 $x^2+2x-8\geqslant 0$ 的解集是__________________.

2. 设 m 为实数，若二次函数 $y=x^2-2x+m$ 在区间 $(1,\ +\infty)$ 上有且仅有一个零点，则 m 的取值范围是________.

3. 若 $x>0$，则 $2+3x+\dfrac{4}{x}$ 的最小值等于________.

4. 设 $a,\ b$ 为正实数，若 $a+b=4$，则 ab 的最大值是________.

5. 设 k 为实数，若关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx+k+1=0$ 没有实数根，则 k 的取值范围是________.

6. 某公司一年购买某种货物 400 t，每次都购买 x t，运费为 4 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 x 的值为________.

二、选择题

7. 若实数 $x,\ y$ 满足 $xy=1$，则 x^2+y^2 的最小值是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

8. 若 $a<b<0$，则（　　）.

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $0<\dfrac{a}{b}<1$　　C. $ab>b^2$　　D. $\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$

9. 设 $a,\ b,\ m$ 均为正数，且 $a<b$，那么（　　）.

A. $\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}$　　B. $\dfrac{a+m}{b+m}=\dfrac{a}{b}$

C. $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$　　D. $\dfrac{a+m}{b+m}$ 与 $\dfrac{a}{b}$ 的大小随 m 变化而变化

10. 下列命题中不正确的是（　　）.

A. 当 $x>1$ 时，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$　　B. 当 $x<0$ 时，$x+\dfrac{1}{x}<-2$

C. 当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$　　D. 当 $x>2$ 时，$\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{2}$

三、解答题

11. 已知不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为 A，不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为 B，求 $A\cap B$.

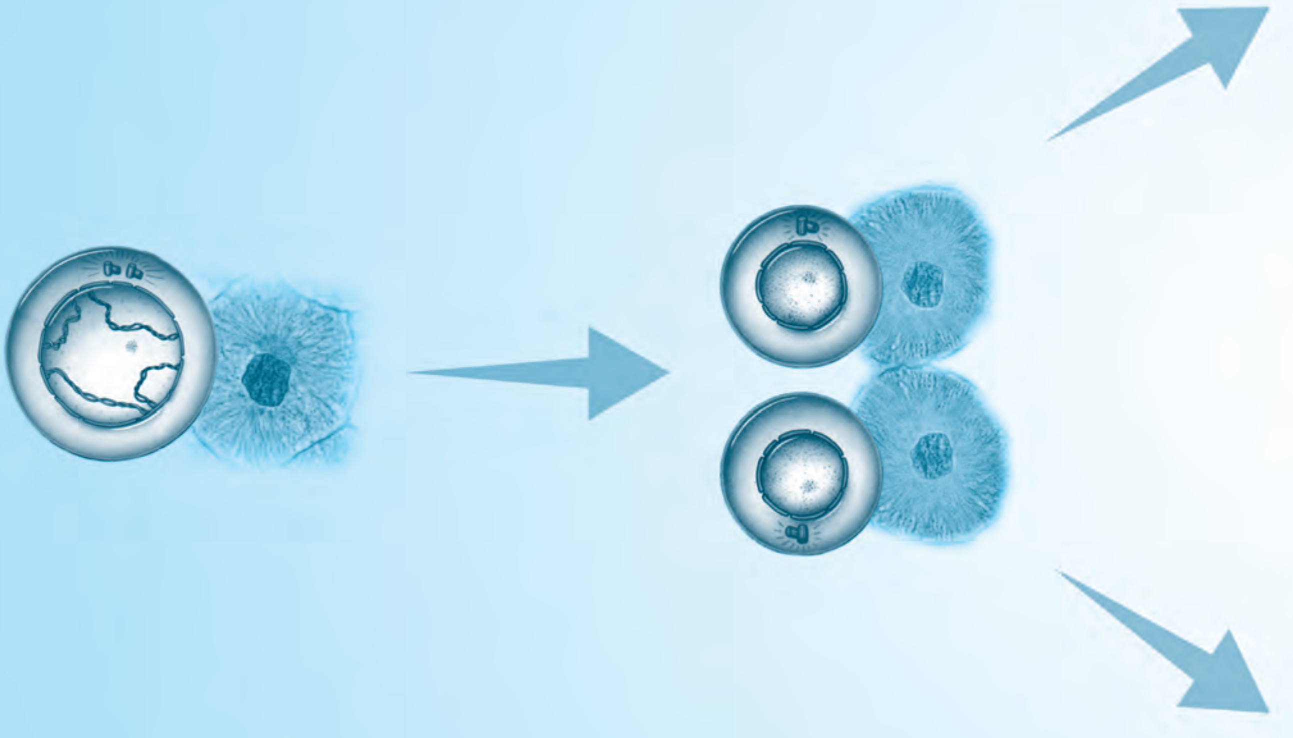
12. 设 k 为实数，若关于 x 的不等式 $2x^2-kx-k>0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

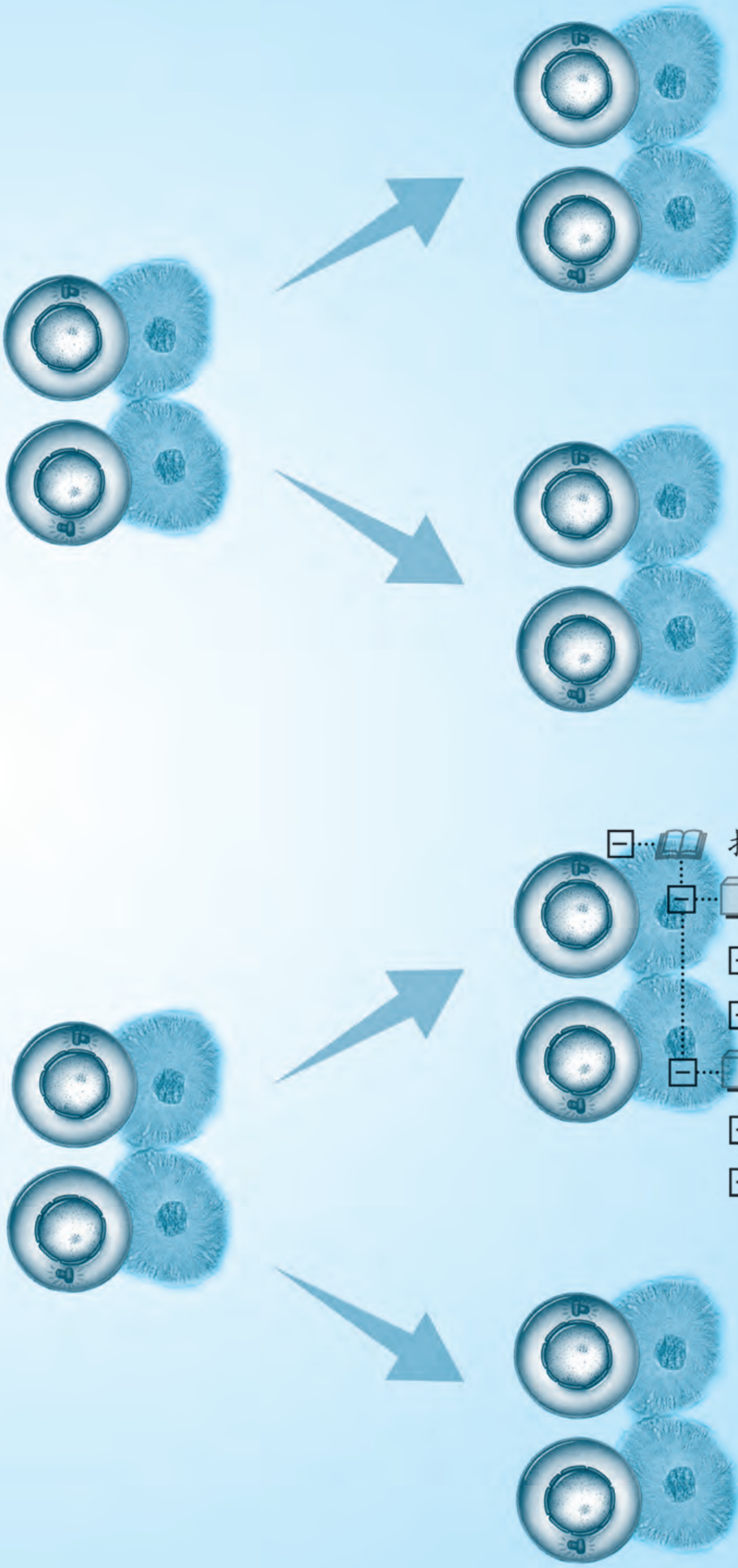
13. 设正数 $a,\ b$ 满足 $a+b=2$，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2$.

14. 设 $a>0,\ b>0$，求证：$a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$.

15. 某单位要建造一间地面面积为 12 m^2 的背靠墙的长方体形小房，房屋正面的造价为 1 200 元/m^2，房屋侧面的造价为 800 元/m^2，屋顶的造价为 5 800 元. 如果墙高 3 m，且不计房屋背面的费用，问：怎样设计房屋能使总造价最低？最低总造价是多少？

第 4 章　指数与对数





- 指数与对数
  - 指数
    - 根式
    - 指数幂的拓展
  - 对数
    - 对数的概念
    - 对数的运算性质

我们欣赏数学，我们需要数学.

——陈省身

对数的发明“以其节省劳力而延长了天文学家的寿命”.

——拉普拉斯

在初中，我们就知道了

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0,\ n\in \mathbf{N}).$$

这样，指数幂的概念中，指数的范围就从正整数拓展到了负整数. 自然地，我们想知道：指数幂中的指数的范围能否再拓展呢？

例如，$a^{\frac{1}{2}}$有意义吗？

设想将整数指数运算 $a^m a^n=a^{m+n}(m,\ n\in \mathbf{Z})$ 进行推广.

令 $m=n=\frac{1}{2}$，得

$$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}=a=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.$$

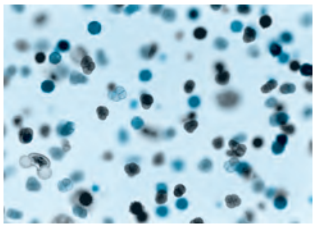
这说明，如果将 $a^{\frac{1}{2}}$ 看成一个数，那么它是 a 的平方根. 用同样的思路，我们可以获得 $a^{\frac{n}{m}}(m,\ n\in \mathbf{N},\ m\neq 0)$ 的意义.

这样，我们将指数幂 a^b 中指数 b 的范围从正整数推广到负整数、分数.

更一般地，

● 对一般的实数 b，a^b 的意义是什么？

4.1 指数



某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个……如果分裂一次需要 10 min，那么，1 个细胞 1 h 后分裂成多少个细胞？

假设细胞分裂的次数为 x，相应的细胞个数为 y，则

$$y = 2^x.$$

由题中条件可知，$x = 60 \div 10 = 6$，

那么，当 $x = 6$ 时，

$$y = 2^6 = 64,$$

即 1 个细胞 1 h 后分裂成 64 个细胞.

在上述例子中，x 只能取正整数. 可以规定 $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}$ 和 $2^0 = 1$，使得 2^x 对 x 取负整数和 0 也是有意义的. 那么，

● 2^x 中的 x 能取分数甚至无理数吗？

4.1.1 根式

我们知道，如果 $x^2 = a$，那么 x 称为 a 的平方根；如果 $x^3 = a$，那么 x 称为 a 的立方根.

一般地，如果 $x^n = a$ $(n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$，那么称 x 为 a 的 **n 次方根**（n-th root）.

当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数. 这时，a 的 n 次方根只有一个，记为 $x = \sqrt[n]{a}$. 例如，

$$3^3 = 27 \Rightarrow 3 = \sqrt[3]{27};$$

$$(-2)^3 = -8 \Rightarrow -2 = \sqrt[3]{-8};$$

$$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}.$$

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数. 这时，正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示，它们可以合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ 的形式. 例如，

$$x^4 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{6};$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

这里 $\pm\sqrt[4]{6}$ 是指两个值，即 $\sqrt[4]{6}$ 和 $-\sqrt[4]{6}$.

需要注意的是，**0 的 n 次方根等于 0**.

式子$\sqrt[n]{a}$叫作**根式**(radical)，其中 n 叫作根指数，a 叫作被开方数.

例 1 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{5})^2$；(2) $(\sqrt[3]{-2})^3$；

(3) $\sqrt[4]{(-2)^4}$；(4) $\sqrt{(3-\pi)^2}$.

解 (1) $(\sqrt{5})^2=5$.

(2) $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$.

(3) $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$.

(4) $\sqrt{(3-\pi)^2}=\sqrt{(\pi-3)^2}=\pi-3$.

观察下列各式：

$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{(-2)^2}=2=|-2|$；

$\sqrt[4]{2^4}=2$，$\sqrt[4]{(-2)^4}=2=|-2|$；

$\sqrt[6]{2^6}=2$，$\sqrt[6]{(-2)^6}=2=|-2|$；

$\sqrt[3]{3^3}=3$，$\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$；

$\sqrt[5]{3^5}=3$，$\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$；

……

可以发现：

对于 $n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$，

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

练 习

1. 计算：

(1) $\sqrt{25}$；(2) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$；

(3) $\sqrt[5]{32}$；(4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$；(2) $(\sqrt[3]{4})^3$；

(3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt[4]{(a-4)^4}\ (a>4)$；(2) $\sqrt[3]{(2-a)^3}$；

(3) $\sqrt{a^2+2a+1}\ (a>-1)$；(4) $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt[3]{a^3}\ (a<1)$.

4.1.2 指数幂的拓展

观察下面的变形： $(2^5)^2=2^{10}$，

得 $\sqrt{2^{10}}=2^5$.

又由 $5=\frac{10}{2}$，得 $\sqrt{2^{10}}=2^{\frac{10}{2}}$.

类似地，可以得到 $\sqrt[3]{3^{12}}=3^{\frac{12}{3}}$，$\sqrt[5]{3^{15}}=3^{\frac{15}{5}}$，

……

这表明，当 m 被 n 整除时，就有

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\ (a>0,\ m,\ n\text{ 均为正整数}).$$

一般地，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,\ m,\ n\text{ 均为正整数}).$$

这就是正数 a 的正分数指数幂的意义. 由此可知，$2^{\frac{1}{2}}$ 的意义为

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

仿照负整数指数幂的意义，我们规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0,\ m,\ n\text{ 均为正整数}),$$

且 **0 的正分数指数幂为 0，0 的负分数指数幂没有意义.**

有了分数指数幂的意义以后，指数幂的概念就从整数指数推广到有理数指数. 对于有理数指数幂，原整数指数幂的运算性质保持不变，即

在本书中，若无特殊说明，底数中的字母均为正数.

$$a^s a^t=a^{s+t}, \quad ①$$

$$(a^s)^t=a^{st}, \quad ②$$

$$(ab)^t=a^t b^t, \quad ③$$

其中 $s,\ t\in\mathbf{Q},\ a>0,\ b>0$.

例 2 求下列各式的值：

(1) $100^{\frac{1}{2}}$； (2) $8^{\frac{2}{3}}$；

(3) $9^{-\frac{3}{2}}$； (4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

解 (1) $100^{\frac{1}{2}}=(10^2)^{\frac{1}{2}}=10^{2\times\frac{1}{2}}=10$.

(2) $8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$.

(3) $9^{-\frac{3}{2}}=(3^2)^{-\frac{3}{2}}=3^{-3}=\frac{1}{27}$.

(4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=(3^{-4})^{-\frac{3}{4}}=3^3=27$.

例 3 用分数指数幂的形式表示下列各式($a>0$):

(1) $a^2\sqrt{a}$; (2) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$; (3) $\sqrt{a\sqrt{a}}$.

解 (1) $a^2\sqrt{a}=a^2a^{\frac{1}{2}}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}}=a^{-\frac{3}{2}}$.

(3) $\sqrt{a\sqrt{a}}=(a\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}=(aa^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$.

我们已将指数式 a^x 中的指数 x 从整数推广到分数(有理数),是否还可以将指数推广到无理数呢?例如,“$2^{\sqrt{2}}$”有意义吗?

利用计算器,可以计算出表 4-1-1 中的数值:

表 4-1-1

x	2^x	用计算器计算 2^x 的值
1	2^1	2
1.4	$2^{1.4}$	2.639 015 821 …
1.41	$2^{1.41}$	2.657 371 628 …
1.414	$2^{1.414}$	2.664 749 650 …
1.414 2	$2^{1.4142}$	2.665 119 088 …
⋮	⋮	⋮
$\sqrt{2}$	?	?

随着 x 的取值越来越接近于$\sqrt{2}$, 2^x 的值也越来越接近于一个实数,我们把这个实数记为 $2^{\sqrt{2}}$.

一般地,当 $a>0$ 且 x 是一个无理数时,a^x 也是一个确定的实数.有理数指数幂的运算性质对无理数指数幂同样适用.

这样,指数幂的概念从有理指数幂推广到实数指数幂.

以后可以证明,当 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$ 时,一定有唯一的实数 x,满足 $a^x=N$.

练 习

1. 用根式的形式表示下列各式 ($a>0$):

(1) $a^{\frac{1}{2}}$; (2) $a^{\frac{1}{5}}$;

(3) $a^{\frac{3}{4}}$; (4) $a^{\frac{7}{5}}$;

(5) $a^{-\frac{3}{5}}$; (6) $a^{-\frac{3}{2}}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式:

(1) $\sqrt{a}\ (a>0)$; (2) $\sqrt[3]{x^2}$;

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$；　　(4) $\sqrt{x^3}\ (x>0)$；

(5) $\sqrt{x^4y^3}\ (y>0)$；　　(6) $\frac{m^2}{\sqrt{m}}\ (m>0)$；

(7) $\sqrt[3]{(a+b)^2}$；　　(8) $\sqrt{(m-n)^2}\ (m>n)$．

3. 求下列各式的值：

(1) $25^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $64^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$；　　(4) $32^{-\frac{1}{5}}$；

(5) $25^{\frac{3}{2}}$；　　(6) $\left(\frac{25}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$；

(7) $27^{\frac{2}{3}}$；　　(8) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$.

4. 化简下列各式（$a>0$，$b>0$，$x>0$，$y>0$）：

(1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}$；

(3) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{8}}$；　　(4) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$；

(5) $(a^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{5}{2}}$；　　(6) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$；

(7) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}$；　　(8) $(x^{\frac{3}{2}}y)^2\div(xy^{\frac{2}{3}})$.

习题 4.1

感受·理解

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{16}$；　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$；

(3) $\sqrt{10^4}$；　　(4) $\sqrt[5]{(-0.1)^5}$；

(5) $\sqrt[6]{(x-y)^6}\ (x>y)$；　　(6) $\sqrt[3]{-(2x+y)^3}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式（$a>0$，$b>0$）：

(1) $\sqrt[3]{a^2}$；　　(2) $\sqrt{a^3}$；

(3) $a\sqrt{a}$；　　(4) $(\sqrt[3]{a})^2$；

(5) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$；　　(6) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$；

(7) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；　　(8) $(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $36^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$；

(3) $10\,000^{\frac{1}{4}}$；　　(4) $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$；

(5) $4^{-\frac{3}{2}}$；　　(6) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

4. 用计算器计算下列各式的值：

(1) $5^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $321^{\frac{2}{3}}$；

(3) $25.8^{\frac{3}{4}}$；　　(4) $723^{\frac{5}{3}}$.

5. 化简下列各式（$a>0$，$b>0$）：

(1) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{7}{12}}$；　　(2) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}$；

(3) $(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}})^{12}$；　　(4) $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{4}})^{12}$；

(5) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$；　　(6) $2a^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{2}{3}}\right)$；

(7) $(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{-\frac{1}{4}})(2a^{\frac{1}{2}}-3b^{-\frac{1}{4}})$；　　(8) $(a^2-2+a^{-2})\div(a^2-a^{-2})$.

6. 设 a，b 是正数，下列各题中的两个代数式是否恒等？为什么？

(1) $(a^m)^n$ 与 a^na^m；　　(2) $a^{\frac{1}{n}}$ 与 $\frac{1}{a^n}$；

(3) $a^{\frac{m}{n}}$ 与 $\frac{a^m}{a^n}$；　　(4) $(a+b)^n$ 与 a^n+b^n.

思考・运用

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$，
$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

7. 利用分数指数幂计算：$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

8. 已知 $a+a^{-1}=3$，求下列各式的值：

(1) $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$；　　(2) $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}$.

9. 解下列方程：

(1) $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}$；　　(2) $2x^{\frac{3}{4}}-1=15$.

4.2 对数

已知 1 个细胞经过 x 次分裂后，相应的细胞个数为

$$y=2^x.$$

由此，若知道了分裂的次数 x，就能求出分裂后相应的细胞数 y. 反过来，

● 若知道了分裂后相应的细胞数 y，怎样求出分裂的次数 x 呢?

4.2.1 对数的概念

上述问题也就是在 $y=2^x$ 中，已知 y，求 x，此时问题就转化为已知底数和幂的值求指数的问题.

一般地，

> 如果
>
> $$a^b=N(a>0,\ a\neq 1),$$
>
> 那么就称 b 是以 a 为底 N 的**对数**(logarithm)，记作
>
> $$\log_a N=b,$$
>
> 其中，a 叫作对数的**底数**，N 叫作**真数**.

由对数的定义可知，$a^b=N$ 与 $b=\log_a N$ 两个等式所表示的是 a，b，N 这 3 个量之间的同一个关系. 例如：

$$3^2=9\Leftrightarrow \log_3 9=2,$$

$$\log_4 2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}}=2.$$

根据对数的定义，要解决本节开头提出的问题，就只要计算 $\log_2 y$ 的值.

例 1 将下列指数式改写成对数式：

(1) $2^4=16$； (2) $3^{-3}=\dfrac{1}{27}$；

(3) $5^a=20$； (4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=0.45$.

解 (1) $\log_2 16=4$.

(2) $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3$.

(3) $\log_5 20 = a$.

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 0.45 = b$.

例 2 将下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_5 125 = 3$； (2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2$；

(3) $\log_{10} a = -1.699$.

解 (1) $5^3 = 125$.

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2} = 3$.

(3) $10^{-1.699} = a$.

例 3 求下列各式的值：

(1) $\log_2 64$； (2) $\log_9 27$.

解 (1) 由 $2^6 = 64$，得 $\log_2 64 = 6$.

(2) 设 $x = \log_9 27$，则根据对数的定义知 $9^x = 27$，

即 $$3^{2x} = 3^3,$$

得 $$2x = 3,\ x = \frac{3}{2},$$

所以 $$\log_9 27 = \frac{3}{2}.$$

通常将以 10 为底的对数称为**常用对数**(common logarithm)，如 $\log_{10} 2$，$\log_{10} 12$ 等. 为了方便起见，对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$，如 $\lg 2$，$\lg 12$ 等.

在科学技术中，常常使用以 e 为底的对数，这种对数称为**自然对数**(natural logarithm). $e = 2.718\,28\cdots$ 是一个无理数. 正数 N 的自然对数 $\log_e N$ 一般简记为 $\ln N$，如 $\log_e 2$，$\log_e 15$ 分别记为 $\ln 2$，$\ln 15$ 等.

$e = 1 + 1 + \dfrac{1}{1\times2} + \dfrac{1}{1\times2\times3} + \dfrac{1}{1\times2\times3\times4} + \cdots \approx 2.718$，是一个重要的常数.

练 习

1. 根据对数的定义，写出下列各对数的值 $(a > 0, a \neq 1)$：

$\log_{10} 100 =$ ______，$\log_{25} 5 =$ ______，$\log_2 \dfrac{1}{2} =$ ______，$\log_5 1 =$ ______，

$\log_3 3 =$ ______，$\log_{\frac{1}{3}} 3 =$ ______，$\log_a 1 =$ ______，$\log_a a =$ ______.

2. 填空：

题 号	指 数 式	对 数 式
(1)		$\log_2 16 = 4$
(2)	$3^{-3} = \dfrac{1}{27}$	
(3)		$\log_5 25 = a$

3. 将下列指数式改写成对数式：

(1) $3^5=243$； (2) $2^{-8}=\dfrac{1}{256}$；

(3) $2^x=10$； (4) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=12$.

4. 将下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}4=-4$； (2) $\lg 10\,000=4$；

(3) $\lg a=0.477\,1$； (4) $\ln 12=b$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\log_4 64$； (2) $\log_7\sqrt{7}$；

(3) $\log_2\dfrac{1}{8}$； (4) $\log_{\frac{1}{3}}9$；

(5) $\lg 1\,000$； (6) $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

6. 利用计算器计算下列对数的值(结果保留 4 位小数)：

(1) $\lg 2$； (2) $\lg 5$；

(3) $\lg 1.078$； (4) $\lg 0.84$.

7. 已知 $a>0, a\neq 1, N>0, b\in\mathbf{R}$.

(1) $\log_a a^2=$______，$\log_a a^5=$______，$\log_a a^{-3}=$______，$\log_a a^{\frac{1}{5}}=$______，一般地，$\log_a a^b=$______，请证明这个结论；

(2) 证明：$a^{\log_a N}=N$.

4.2.2 对数的运算性质

我们知道，指数幂运算有下列性质：

$$a^s a^t=a^{s+t}；$$

$$\frac{a^s}{a^t}=a^{s-t}；$$

$$(a^s)^t=a^{st}.$$

根据对数的定义，有

$$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,\ a\neq 1,\ N>0),$$

那么，对数运算也有相应的性质吗?

设 $M=a^s,\ N=a^t$，

于是 $$MN=a^{s+t}.$$

由对数的定义得

$$\log_a M=s,\ \log_a N=t,$$

$$\log_a(MN)=s+t.$$

因此， $$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

一般地，我们可以得到如下的对数运算性质：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N, \quad ①$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N, \quad ②$$

$$\log_a M^n=n\log_a M, \quad ③$$

其中 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，$n\in\mathbf{R}$.

思考

你能证明性质②和性质③吗？

例 4 求下列各式的值：

(1) $\log_2(2^3\times 4^5)$； (2) $\log_5 125$.

解 (1) $\log_2(2^3\times 4^5)=\log_2 2^3+\log_2 4^5=3+5\log_2 4=3+5\times 2=13$.

(2) $\log_5 125=\log_5 5^3=3\log_5 5=3$.

例 5 已知 $\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$，求下列各式的值(结果保留 4 位小数)：

(1) $\lg 12$； (2) $\lg\frac{27}{16}$.

解 (1) $\lg 12=\lg(2^2\times 3)=\lg 2^2+\lg 3=2\lg 2+\lg 3\approx 2\times 0.3010+0.4771=1.0791$.

(2) $\lg\frac{27}{16}=\lg 3^3-\lg 2^4=3\lg 3-4\lg 2\approx 3\times 0.4771-4\times 0.3010=0.2273$.

用计算器检验运算的结果.

练 习

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xy^2z^3)$； (2) $\lg\frac{\sqrt{x}}{yz^2}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\log_3(9\times 27)$； (2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4^5\times 8^2)$；

(3) $\lg 25+\lg 4$； (4) $\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}9$.

3. 已知 $\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$，求下列各式的值(结果保留 4 位小数)：

(1) $\lg 18$； (2) $\lg 72$；

(3) $\lg\frac{3}{4}$； (4) $\lg 15$.

4. 设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，试用 a，b 表示下列各对数：

(1) $\lg 108$； (2) $\lg\frac{18}{25}$.

5. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}$； (2) $\log_3 45-\log_3 5$.

例 6 试用常用对数表示 $\log_3 5$.

解 设 $t=\log_3 5$，则 $3^t=5$.

两边取常用对数，得 $\lg 3^t=\lg 5$，

即 $$t\lg 3=\lg 5,$$

所以 $$t=\frac{\lg 5}{\lg 3}.$$

故 $$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}.$$

例 7 证明：$\log_a N=\dfrac{\log_c N}{\log_c a}$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，$N>0$，$c>0$，$c\neq 1$.

证明 设 $t=\log_a N$，则 $a^t=N$.

两边取以 c 为底的对数，得 $\log_c(a^t)=\log_c N$，

即 $$t\log_c a=\log_c N,$$

所以 $$t=\frac{\log_c N}{\log_c a}.$$

故 $$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}.$$

因此，我们有

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a},$$

其中 $a>0$，$a\neq 1$，$N>0$，$c>0$，$c\neq 1$.

$\log_b a\cdot\log_a x=?$

$\log_b a\cdot\log_a b=?$

这个公式称为对数的**换底公式**.

例 8 求 $\log_8 9\times\log_3 32$ 的值.

解 $$\log_8 9\times\log_3 32=\frac{\lg 9}{\lg 8}\times\frac{\lg 32}{\lg 3}=\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\times\frac{5\lg 2}{\lg 3}=\frac{10}{3}.$$

例 9 如图 4 - 2 - 1，2000 年我国国内生产总值（GDP）为 89 442 亿元. 如果我国 GDP 年均增长 7.8%，那么按照这个增长速度，在 2000 年的基础上，经过多少年以后，我国 GDP 就能实现比 2000 年翻两番的目标？

解 假设经过 x 年实现 GDP 比 2000 年翻两番的目标. 根据题意，得 $$89\,442\times(1+7.8\%)^x=89\,442\times 4,$$

即 $$1.078^x=4,$$

故 $$x=\log_{1.078}4=\frac{\lg 4}{\lg 1.078}\approx 18.5.$$

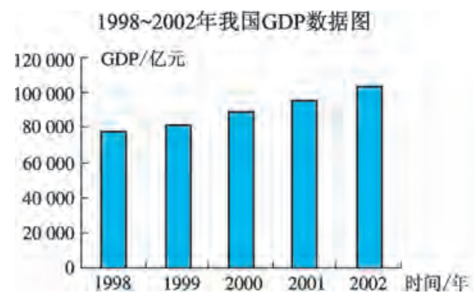


图 4-2-1

答 约经过 19 年以后，我国 GDP 就能实现比 2000 年翻两番的目标.

例 10 要测定古物的年代，可以用放射性碳法：在动植物的体内都含有微量的放射性^{14}C. 动植物死亡后，停止了新陈代谢，^{14}C 不再产生，且原有的^{14}C 会自动衰变. 经过 5 730 年（^{14}C 的半衰期），它的残余量只有原始量的一半. 经过科学测定，若^{14}C 的原始含量为 1，则经过 x 年后的残留量为 $y=0.999\,879^x$.

用放射性碳法，测得我国辽东半岛普兰店附近的泥炭中发掘出的古莲子中^{14}C 的残余量占原来的 87.9%，试推算古莲子的生活年代.

解 由题设可知，原始量为 1 的^{14}C 经过 x 年后的残余量是 $y=0.999\,879^x$.

由 $y=87.9\%=0.879$ 可知

$$0.879=0.999\,879^x,$$

两边取常用对数，得

$$x\lg 0.999\,879=\lg 0.879,$$

从而

$$x=\frac{\lg 0.879}{\lg 0.999\,879}\approx 1\,066.$$

答 古莲子约是 1 066 年前的遗物.

练 习

1. 利用对数的换底公式，计算下列各式的值：

   (1) $\log_2 5\times\log_5 4$；

   (2) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\log_5 6\times\log_6 7\times\log_7 8$.

2. 证明：$\log_3 4=\dfrac{1}{\log_4 3}$.

3. 利用对数的换底公式，计算 $\log_2\dfrac{1}{25}\times\log_3\dfrac{1}{8}\times\log_5\dfrac{1}{9}$.

4. 利用计算器，计算下列各式的值（结果保留 4 位小数）：

   (1) $\log_2 5+\lg 5$；　　(2) $\log_5 3.14-\log_7 3$；

   (3) $\log_2\sqrt{3}\div\log_5 3$；　　(4) $\lg 2\times\log_3 10$.

5. 截至 1999 年底，我国人口约 13 亿. 如果此后的人口年平均增长率为 1%，那么约经过多少年后，我国人口数将达到 18 亿？

习题 4.2

感受・理解

1. 将下列指数式改写成对数式：

(1) $3^2=9$； (2) $7^{-2}=\frac{1}{49}$；

(3) $8^{\frac{5}{3}}=32$； (4) $3^m=2$.

2. 将下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_2 8=3$； (2) $\log_9 3=\frac{1}{2}$；

(3) $\log_{49}\frac{1}{7}=-\frac{1}{2}$； (4) $\log_2 5=2.321\,9$；

(5) $\lg 6=0.778\,2$； (6) $\ln 10=2.302\,6$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_3 81$； (2) $\log_4\frac{1}{64}$；

(3) $\log_{3.4}3.4$； (4) $\log_{0.45}1$；

(5) $\lg 125+\lg 8$； (6) $\log_2 56-\log_2 7$.

4. 利用计算器，求下列各式的值（结果保留 4 位小数）：

(1) $\lg 36-\lg 4$； (2) $\lg 36\times\lg 9$；

(3) $2\lg 5\div 3\lg 2$； (4) $\lg\sqrt{3}$.

5. 已知 $\lg 2\approx 0.301\,0$，$\lg 3\approx 0.477\,1$，求下列各式的值（结果保留 4 位小数）：

(1) $\lg 54$； (2) $\lg 1.5$；

(3) $\lg\frac{4}{9}$； (4) $\lg 45$.

6. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}}3$； (2) $2\lg 4+\lg\frac{5}{8}$；

(3) $(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 50$.

7. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，试用 a，b 表示下列各对数：

(1) $\lg 36$； (2) $\lg 15$；

(3) $\lg\frac{3}{5}$； (4) $\lg 1.8$.

8. 如果我国国内生产总值（GDP）2020 年比 2010 年翻一番，那么平均每年的增长率是多少？（精确到 0.1%）

9. 设 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，$n\in\mathbf{R}$，证明：$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a M^n=n\log_a M$.

思考・运用

10. 设 a，b 均为不等于 1 的正数，利用对数的换底公式，证明：

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$；

(2) $\log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}\log_a b\ (m\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{R},\ n\neq 0)$.

11. (1) 设 $\lg 6=a$，$\lg 12=b$，试用 a，b 表示 $\lg 24$ 和 $\lg 120$；

(2) 设 $\lg 6=a$，$\lg 15=b$，试用 a，b 表示 $\lg 24$ 和 $\lg 120$.

探究·拓展

12. (阅读题)对数可以将乘除运算转化为加减运算，通过对数转换，可以简化运算过程．例如，1，10，100，1 000，10 000，…成 10 倍增长，取常用对数后就变为 0，1，2，3，4，….

我们再来看物理学中的一个例子．声强是表示声波强度的物理量，可用公式 $I=\frac{1}{2}\rho vA^2\omega$ 表示，其中 v 表示声速，ω 和 A 分别是声波的频率和振幅，ρ 是媒质的密度．

由于声强的变化范围非常大，数量级可以相差很多，因此常采用对数标度，这就引入了声强级的概念，规定声强级 $L=\lg\frac{I}{I_0}$．通常规定 $I_0=10^{-20}\ \mathrm{W/m^2}$（相当于频率为 1 000 Hz 时能够引起听觉的最弱的声强），这时计算出来的 L 就是声强 I 的量度，式中声强级的单位称为贝尔．实际上，由于贝尔这个单位太大，通常采用贝尔的 $\frac{1}{10}$ 作单位，这就是分贝（dB）：$L=10\lg\frac{I}{I_0}$（dB）．

当被测量的声强 I 为声强 I_0 的 100 倍时，声强级 L 为多少分贝？

问题与探究

秘诀在对数

一次速算表演中，主持人出题：一个 35 位整数的 31 次方根仍是一个整数，下面我报出这个 35 位数，请说出它的 31 次方根. 这个 35 位数是……

未等主持人报出第一位数字，速算专家已经写出了这个数的 31 次方根：13.

还不知道什么数，他居然能求出方根，并且是 31 次方根，又用的是心算，而且闪电般地快！你很惊奇吧？

其实很简单，因为只有一个整数，它的 31 次方是一个 35 位整数. 你知道为什么吗？在事先不知道题目的情况下，速算专家是怎么如此快速地推算出这个结论的呢？

现在只告诉你，速算专家的秘诀是：他心中记住了下面的表(表中常用对数为近似值).

真数	常用对数	真数	常用对数
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0.90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
10	1.00	19	1.28

如果你不能心算，也可以借助笔把专家的思路弄清了，再自己试一试. 比如下面的题目：一个 20 位整数的 64 次方根仍是一个整数，这个 64 次方根是多少？

阅 读

纳皮尔(J. Napier,1550—1617),苏格兰数学家,对数发明人.

对数概念的形成和发展

对数是由苏格兰数学家纳皮尔(J. Napier,1550—1617)发明的,纳皮尔为了简化天文学问题的球面三角计算,在没有指数概念的情况下发明了对数,并于1614年在《奇妙对数定律说明书》中,介绍了他的方法和研究成果.

18世纪的欧拉(L. Euler,1707—1783)深刻地揭示了指数与对数的密切联系,他曾说"对数源出于指数".

在纳皮尔的著作发表40年后,对数传入我国,logarithm一词被译成"比例数".后又逐步演变成"对数",意指"对(照)表中的数".清代数学家戴煦(1805—1860)等,经过独立的刻苦研究,也取得了很多成就.

现在通用的"常用对数",是与纳皮尔同时期的英国数学家布里格斯(H. Briggs,1561—1631)引入的,并于1617年出版了常用对数表.1622年,英国数学家斯皮德尔(J. Speidell)给出了以e为底的自然对数表.

恩格斯在他的著作《自然辩证法》中,曾经把笛卡儿的坐标系、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼茨的微积分共同称为17世纪的三大数学发明.法国著名的数学家、天文学家拉普拉斯(P. S. Laplace,1749—1827)曾说:对数可以缩短计算时间,"在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍".

由此可见,对数的发明对于人们研究科学和了解自然起了重大作用.

写 作

收集有关对数概念的形成和发展的历史资料,撰写小论文,论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用.

本章回顾

本章从初中学习的指数概念出发，建立了分数指数幂、实数指数幂等概念. 以指数概念为基础，给出对数的定义，并研究了指数运算、对数运算的相关性质.

$$a^n\ (n\in \mathbf{Z})$$

$$\downarrow$$

$$a^b\ (b\in \mathbf{R})$$

$$\downarrow$$

$$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$$

在研究指数幂的扩展和对数运算性质的过程中，我们采用了由特殊到一般、类比等方法，通过具体例子的研究，进而推广，得到一般的结论，通过类比得到相似的结论.

复习题

感受·理解

1. 计算 $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{25}$ 的值.

2. 计算 $\log_2 5\times\log_3 2\times\log_5 3$ 的值.

3. 将下列指数式化为对数式（其中 $a>0$，$a\neq1$）：

(1) $a^0=1$； (2) $a^1=a$；

(3) $a^b=100$； (4) $a^2=N$.

4. 求证：

(1) $\log_2 64=3\log_8 64$； (2) $\log_3 81=\dfrac{4}{3}\log_2 8$.

5. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列式子：

(1) $\lg(xyz)$； (2) $\lg(xy^{-2}z^{-1})$；

(3) $\lg\dfrac{y^3z}{\sqrt{x}}$； (4) $\lg\dfrac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$.

6. 计算：

(1) $\lg 8+\lg 1\,250$； (2) $2\lg 0.1+\lg 0.001$；

(3) $\log_2(\log_4 16)$； (4) $\dfrac{\log_8 27}{\log_4 9}$.

7. 计算：

(1) $(\lg 2)^2+\lg 5\times\lg 20+\lg 0.1$；

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5-1}$.

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

8. 设 a 是非零实数，已知 $a-a^{-1}=1$，求 $\frac{(a^3+a^{-3})(a^2+a^{-2}-5)}{a^4-a^{-4}}$ 的值.

9. 计算 $(\lg 2)^3+3\lg 2\cdot\lg 5+(\lg 5)^3$ 的值.

思考・运用

10. 已知 $\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，试计算 $\lg 18$ 的值.

11. 求下列各式中的 x：

(1) $\log_{\sqrt{2}} x=4$；

(2) $\lg(2x)=3\lg x-3$；

(3) $\log_{\sqrt{x}}(2x)=4$.

12. 设 x，y 为正数，满足 $x+y=7\sqrt{xy}$，求证：$\log_a\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}=\frac{\log_a x+\log_a y}{4}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

探究・拓展

13. (探究题)我们知道，任何一个正实数 N 可以表示成 $N=a\times 10^n(1\leqslant a<10,\ n\in\mathbf{Z})$，此时 $\lg N=n+\lg a(0\leqslant\lg a<1)$. 当 $n>0$ 时，N 是 $n+1$ 位数.

(1) 试用上述方法，判断 2^{100} 是多少位数($\lg 2\approx 0.3010$)；

(2) 当 $n<0$ 时，你有怎样的结论？

本章测试

一、填空题

1. 计算：$\sqrt[5]{-32}=$ ________.

2. 化简：$\sqrt[4]{(a-b)^8}=$ ________.

3. 用分数指数幂表示下列各式($a>0$，$b>0$)：

(1) $a\sqrt[3]{a}=$ ________； (2) $(\sqrt[3]{a})^4\cdot\sqrt{ab^5}=$ ________.

4. 将下列指数式化为对数式：

(1) $2^6=64\Leftrightarrow$ ________； (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^a=N\Leftrightarrow$ ________.

5. 将下列对数式化为指数式：

(1) $\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ ________； (2) $\log_x 10=2\Leftrightarrow$ ________.

6. 计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}=$ ________.

二、选择题

7. 若正数 x，y 满足 $x^4=16$，$y^4=81$，则 $x+y=$ (　　).

A. 5　　B. 1　　C. 13　　D. 17

8. 若 $\log_2 x=-3$，则 $x=$ (　　).

A. -3　　B. 9　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{9}$

9. 若 $\log_x\frac{1}{27}=-3$，则 $x=$ (　　).

A. 81　　B. $\frac{1}{81}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

10. 若 $x>0$，$y>0$，则下列各式中恒等的是(　　).

A. $\lg x+\lg y=\lg(x+y)$　　B. $\lg x^2=(\lg x)^2$

C. $\frac{\lg x}{n}=\lg\frac{x}{n}$　　D. $\lg x^{\frac{1}{n}}=\frac{\lg x}{n}$

三、解答题

11. 已知 $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=3$，求下列各式的值：

(1) $a+a^{-1}$； (2) a^2+a^{-2}；

(3) $\dfrac{a+a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$.

12. 计算：

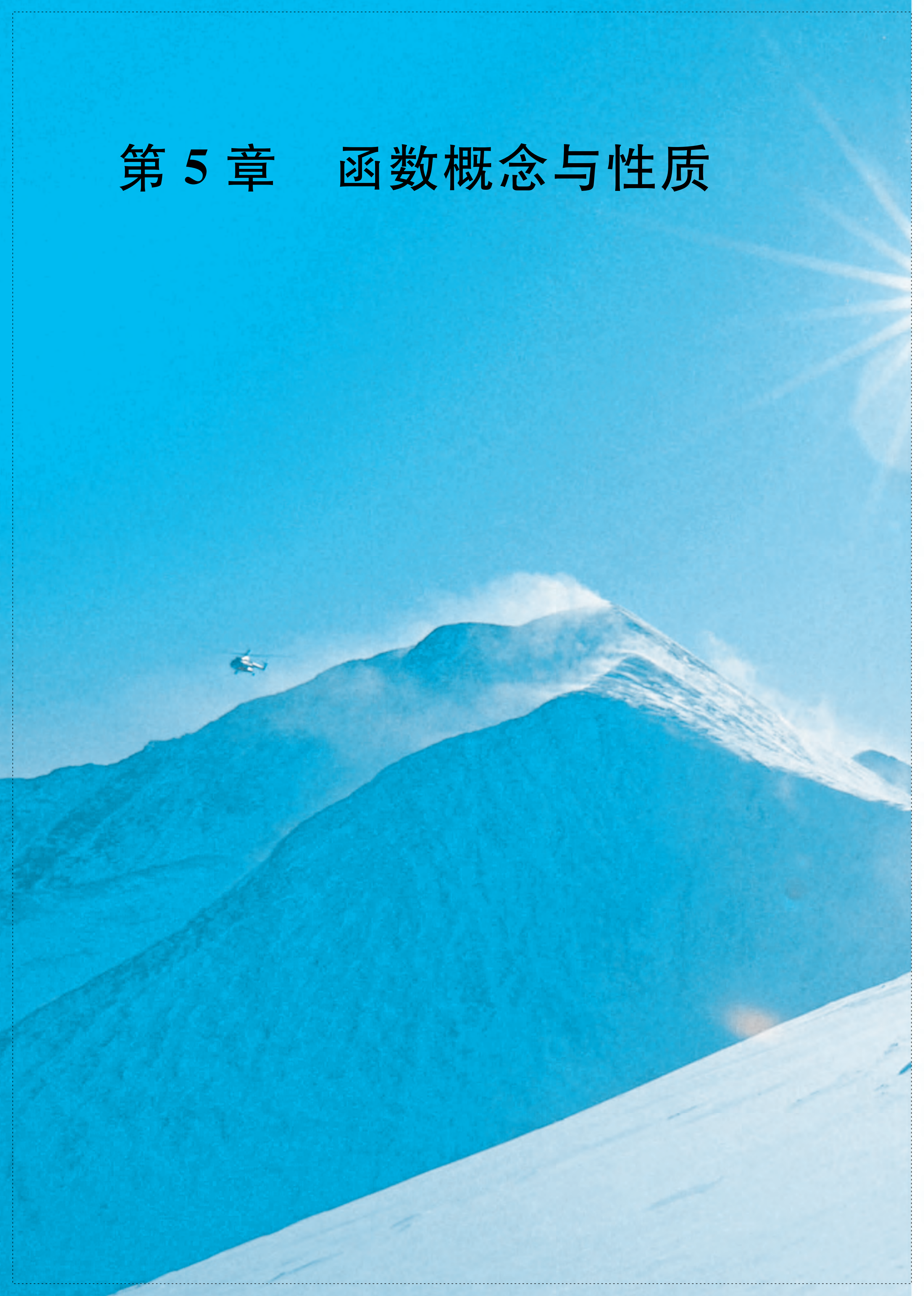
(1) $\lg 25+\lg 2\lg 50+(\lg 2)^2$； (2) $e^{\ln 3}+\log_{\sqrt{5}}25+(0.125)^{-\frac{2}{3}}$.

13. 已知 $\log_2 3=a$，$\log_2 7=b$，试用 a，b 表示 $\log_{42} 56$.

14. 求 $\lg\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$ 的值.

15. 设 $a>0$，$a\neq 1$，已知 $m=a^x$，$n=a^y$，$m^y n^x=a^{\frac{2}{z}}$，求证：$xyz=1$.

第 5 章　函数概念与性质



函数概念与性质

- 函数的概念和图象
- 函数的表示方法
- 函数的单调性
- 函数的奇偶性

数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动就进入了数学；有了变数，辩证法就进入了数学．

——恩格斯

函数概念是近代数学思想之花．

——托马斯

在初中，我们学习了一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq 0$），反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$），二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$），知道了“函数”的定义：在一个变化过程中的两个变量，记为 x 和 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么称 y 是 x 的函数，x 是自变量．利用函数可以描述变量之间的关系和规律．

随着研究的深入，我们会遇到更多的问题，例如：

（1）设 x 表示圆的半径，则圆的周长与直径的比值为 $y=\pi$．当 x（$x\in(0,+\infty)$）变化时，y 是 x 的函数吗？

（2）函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$（$x\in\mathbf{R}$）与函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$（$x\in(0,+\infty)$）是同一个函数吗？

（3）数学家狄利克雷曾给出一个例子：$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ y 是 x 的函数吗？

● 怎样进一步认识“函数”概念？

5.1 函数的概念和图象

在现实生活中，我们可能会遇到下列问题：

1. 人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据. 从中国统计年鉴中可以查得我国 1979～2014 年人口数据资料(年末)如表 5－1－1 所示，你能根据该表说出我国人口的变化情况吗？

表 5－1－1　1979～2014 年我国人口数据表

年　　份	1979	1984	1989	1994	1999	2004	2009	2014
人口数/百万	975	1 044	1 127	1 199	1 258	1 300	1 335	1 368

2. 一物体从静止开始下落，下落的距离 y(单位：m)与下落时间 x(单位：s)之间近似地满足关系式 $y = 4.9x^2$. 若一物体下落 2 s，你能求出它下落的距离吗？

3. 图 5－1－1 为某市一天 24 小时内的气温变化图.

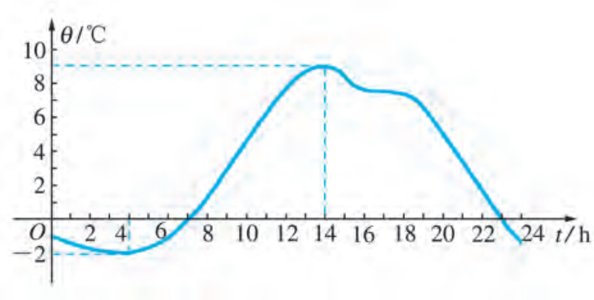


图 5－1－1

(1) 上午 6 时的气温约是多少？全天的最高、最低气温分别是多少？

(2) 在什么时刻，气温为 0℃？

(3) 在什么时段内，气温在 0℃以上？

在上述的每个问题中都含有两个变量，当一个变量的取值确定后，另一个变量的值随之唯一确定. 根据初中学过的知识，每一个问题都涉及一个确定的函数. 这就是它们的共同特点.

● 如何用集合语言来阐述上述 3 个问题的共同特点？

第一，每个问题均涉及两个非空数集 A，B.

例如，在第一个问题中，一个集合 A 由年份数组成，即

$A = \{1979, 1984, 1989, 1994, 1999, 2004, 2009, 2014\}$；

另一个集合 B 由人口数(百万)组成,即

$$B=\{975,\ 1\,044,\ 1\,127,\ 1\,199,\ 1\,258,\ 1\,300,\ 1\,335,\ 1\,368\}.$$

第二,每个问题均存在某种对应关系,对于 A 中任意元素 x,B 中总有一个元素 y 与之对应.

例如,在第一个问题中,若 x(年份)取 1979,则 y(百万)取 975. 这时,我们说"1979 对应到 975",或者说"输入 1979,输出 975",简记为

$$1979 \longrightarrow 975.$$

图 5-1-2 所示的"箭头图"可以清楚地表示这种对应关系,这种对应具有"一个输入值对应到唯一的输出值"的特征.

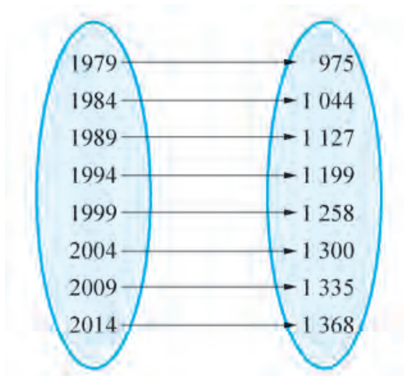
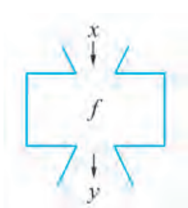


图 5-1-2

一般地,

> 给定两个非空实数集合 A 和 B,如果按照某种对应关系 f,对于集合 A 中的每一个实数 x,在集合 B 中都有唯一的实数 y 和它对应,那么就称 f: $A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**(function),记作
>
> $$y=f(x),\ x\in A.$$
>
> 其中,x 叫作自变量,集合 A 叫作函数的**定义域**(domain).

y 也称为因变量.



若 A 是函数 $y=f(x)$ 的定义域,则对于 A 中的每一个 x(输入值),都有一个 y(输出值)与之对应. 我们将所有输出值 y 组成的集合 $\{y \mid y=f(x),\ x\in A\}$ 称为函数的**值域**(range).

考察本章引言中的问题(1),对于每一个 x ($x\in(0,+\infty)$),都有唯一的实数 $y=\pi$ 与 x 对应. 因此,$y=\pi$ ($x\in(0,+\infty)$) 是 x 的函数.

由函数定义还可知,虽然两个函数的表达形式不同,但如果其对应关系相同,定义域相同,那么这两个函数就是同一个函数. 例如函

数 $y=x^2(x\in(0,+\infty))$ 与函数 $s=t^2(t\in(0,+\infty))$ 是同一个函数. 如果两个函数的表达式相同,即其对应关系相同,但定义域不同,那么这两个函数就是不同的函数. 例如本章引言问题(2)中函数 $y=\frac{1}{2}x^2(x\in\mathbf{R})$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,函数 $y=\frac{1}{2}x^2(x\in(0,+\infty))$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,它们是两个不同的函数.

给定函数时要指明函数的定义域. 对于用表达式表示的函数,如果没有指明定义域,那么,就认为函数的定义域是指使函数表达式有意义的输入值的集合.

例 1 判断下列对应是否为函数:

(1) $x\to\frac{2}{x}$, $x\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$;

(2) $x\to y$,这里 $y^2=x$, $x\in\mathbf{N}$, $y\in\mathbf{R}$;

(3) 当 x 为有理数时,$x\to 1$;当 x 为无理数时,$x\to 0$.

解 (1) 对于任意一个非零实数 x,$\frac{2}{x}$ 由 x 唯一确定,所以当 $x\neq 0$ 时 $x\to\frac{2}{x}$ 是函数,这个函数也可以表示为 $f(x)=\frac{2}{x}\ (x\neq 0)$.

(2) 考虑输入值为 4,即当 $x=4$ 时输出值 y 由 $y^2=4$ 给出,得 $y=2$ 和 $y=-2$. 这里一个输入值与两个输出值对应,所以,$x\to y(y^2=x,\ x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{R})$ 不是函数.

(3) 由题意知,对于任意的有理数 x,总有唯一的元素 1 与之对应;对于任意的无理数 x,总有唯一的元素 0 与之对应. 因此,根据函数的定义,可知这个对应是函数,可以表示为

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数叫作狄利克雷函数.

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$; (2) $g(x)=\frac{1}{x+1}$.

解 (1) 当 $x-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$ 时,$\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义;当 $x-1<0$,即 $x<1$ 时,$\sqrt{x-1}$ 在实数范围内没有意义.

因此,这个函数的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 1\}$.

(2) 当 $x+1\neq 0$,即 $x\neq -1$ 时,$\frac{1}{x+1}$ 有意义;当 $x+1=0$ 时,即 $x=-1$ 时,$\frac{1}{x+1}$ 没有意义.

因此,这个函数的定义域是 $\{x\mid x\neq -1,\text{且 }x\in\mathbf{R}\}$.

例 3 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in\{-1,0,1,2,3\}$；

(2) $f(x)=(x-1)^2+1$.

解 (1) 函数的定义域为$\{-1,0,1,2,3\}$.

因为 $$f(-1)=[(-1)-1]^2+1=5,$$

$$f(0)=2,\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=5,$$

所以这个函数的值域为$\{1,2,5\}$.

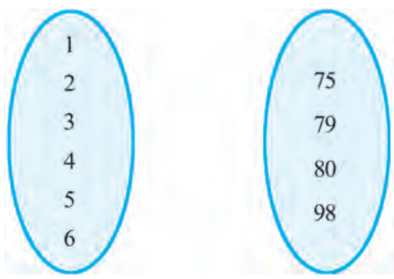
(2) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为$(x-1)^2+1\geqslant 1$，所以这个函数的值域为$\{y\mid y\geqslant 1\}$.

练 习

1. 某班级学号为 1～6 的学生参加数学测试的成绩如下表所示，试将学号与成绩的对应关系用“箭头图”表示在下图中.

学 号	1	2	3	4	5	6
成 绩	80	75	79	80	98	80



（第 1 题）

2. 从甲地到乙地的火车票价为 80 元，儿童乘火车时，按照身高选择免票、半票或全票. 选购票种的规则如下表所示：

身高 h/m	购票款数/元
$h\leqslant 1.2$	0
$1.2<h\leqslant 1.5$	40
$h>1.5$	80

(1) 若儿童身高 h 为输入值，相应的购票钱款为输出值，则 $1.0\rightarrow$ ______，$1.3\rightarrow$ ______，$1.6\rightarrow$ ______；

(2) 若购票钱款为输入值，儿童身高 h 为输出值，则 $0\rightarrow$ ______，$40\rightarrow$ ______.

3. 判断下列对应是否为从 A 到 B 的函数：

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{0,2,4,6,8\}$，对任意的 $x\in A$，$x\rightarrow 2x$；

(2) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\mid x<10, x\in\mathbf{N}\}$，对任意的 $x\in A$，$x\rightarrow 2x+1$；

(3) $A=B=\mathbf{N}^*$，对任意的 $x\in A$，$x\rightarrow x-1$；

(4) A 为正实数集，$B=\mathbf{R}$，对任意的 $x\in A$，$x\rightarrow x$ 的算术平方根.

4. 判断下列对应是否为函数：

(1) $x \longrightarrow -\frac{1}{2}x$，$x \in \mathbf{R}$；

(2) $x \rightarrow 1$，$x \in \mathbf{R}$；

(3) $x \longrightarrow y$，其中 $y = |x|$，$x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{R}$；

(4) $t \longrightarrow s$，其中 $s = t^2$，$t \in \mathbf{R}$，$s \in \mathbf{R}$；

(5) $x \longrightarrow y$，其中 $y^2 = x$，$x \in [0, +\infty)$，$y \in \mathbf{R}$；

(6) $x \longrightarrow y$，其中 y 为不大于 x 的最大整数，$x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{Z}$.

5. 已知函数 $f(x) = x - x^2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(n+1) - f(n)$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = 1 - 3x$； (2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$；

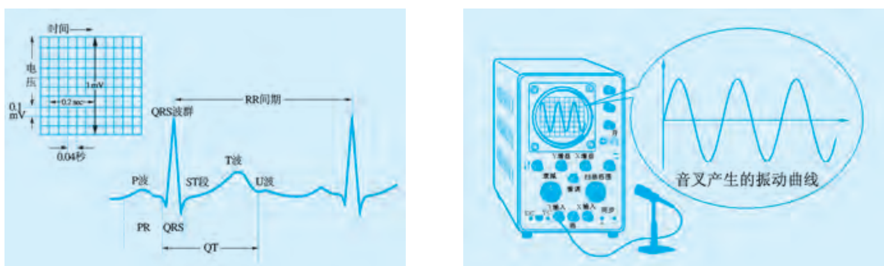
(3) $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{1-x}$； (4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$.

7. 求下列函数的值域：

(1) $f(x) = x^2 + x$，$x \in \{1, 2, 3\}$； (2) $f(x) = (x-1)^2 - 1$；

(3) $f(x) = x + 1$，$x \in (1, 2]$.

在初中，我们已学过函数的图象，并能作出函数 $y = 2x - 1$，$y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 以及 $y = x^2$ 的图象. 社会生活中还有许多函数图象的例子，如图 5－1－3 所示的心电图、示波图等.



(1) (2)

图 5－1－3

将自变量的一个值 x_0 作为横坐标，相应的函数值 $f(x_0)$ 作为纵坐标，就得到坐标平面上的一个点 $(x_0, f(x_0))$. 当自变量取遍函数定义域 A 中的每一个值时，就得到一系列这样的点. 所有这些点组成的集合(点集)为

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\},$$

即

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\},$$

所有这些点组成的图形就是函数 $y = f(x)$ 的图象. 例如，初中学习过的 $y = \frac{1}{x}$ 的图象就是由点集 $\left\{(x, y) \,\middle|\, y = \frac{1}{x}, x \neq 0, x \in \mathbf{R}\right\}$ 中元

素（点）组成的图形.

例 4 试画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=x+1$；

(2) $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[1,3)$.

解 描点作出图象，函数图象分别如图 5－1－4 和 5－1－5 所示.

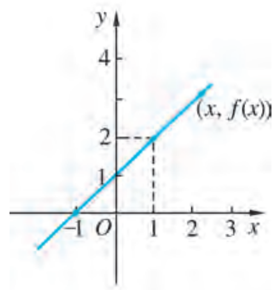


图 5－1－4

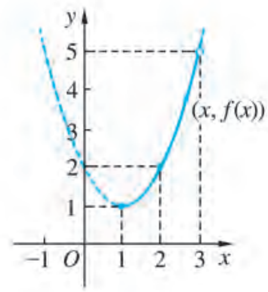


图 5－1－5

函数 $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[1,3)$ 的图象为函数 $g(x)=(x-1)^2+1$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象上 $x\in[1,3)$ 的一段. 其中，点(1，1)在图象上，用实心点表示；而点(3，5)不在图象上，用空心点表示.

例 5 在 5.1 节开头的第一个问题中，如果把人口数 y(百万)看作年份 x 的函数，试根据表 5－1－1，画出这个函数的图象.

解 由表 5－1－1 的数据，画出的函数图象是 8 个点，如图 5－1－6 所示.

请画出本节开头第二个问题中函数 $y=4.9x^2(x\geqslant 0)$ 的图象.

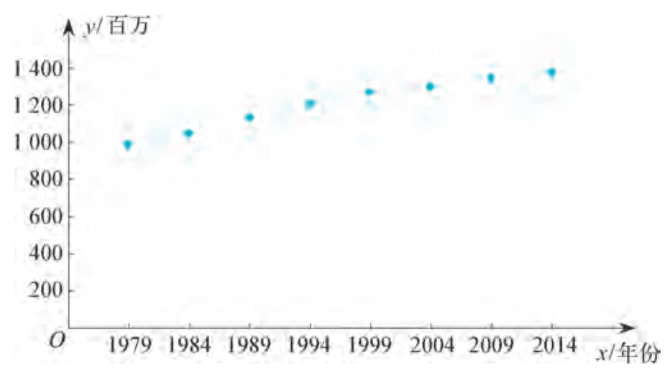


图 5－1－6

思 考

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，集合 $P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}$ 与 $Q=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 相等吗？请说明理由.

例 6 试画出二次函数 $f(x)=x^2+1$ 的图象，并根据图象回答下列问题：

(1) 比较 $f(-2)$，$f(1)$，$f(3)$ 的大小；

(2) 若 $0<x_1<x_2$，试比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

解 函数图象如图 5－1－7.

(1) 根据图 5－1－7(1)，容易发现

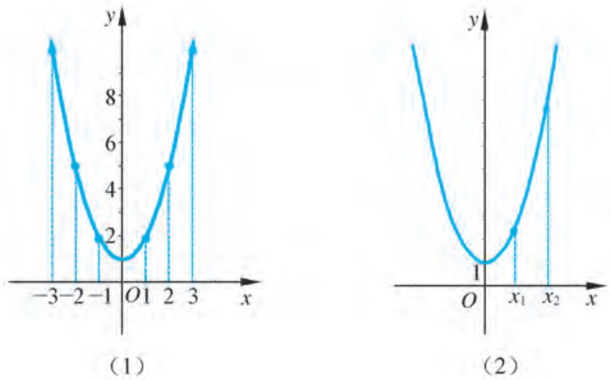


图 5－1－7

由 $f(-2)=f(2)$ 知，点 $(-2,\ f(-2))$ 与点 $(2,\ f(2))$ 关于 y 轴对称.

$$f(-2)=f(2),$$

$$f(1)<f(2)<f(3),$$

所以 $$f(1)<f(-2)<f(3).$$

(2) 根据图 5－1－7(2)容易发现，当 $0<x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2).$$

思　考

在例 6(2)中，

(1) 如果把“$0<x_1<x_2$”改为“$x_1<x_2<0$”，那么 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 哪个大?

(2) 如果把“$0<x_1<x_2$”改为“$|x_1|<|x_2|$”，那么 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 哪个大?

请结合图象回答上述两个问题，并用不等式的基本知识来解决例 6 及上述思考中的问题.

信息技术

下面我们介绍在 Excel 工作表中用“描点连线”的方法绘制函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 的图象，不妨作 $x\in[-2,\ 2]$上的图象.

(1) 第一列产生自变量的值：在单元格 A1，A2 内分别输入-2，-1.9，选中这两个单元格后，按住鼠标左键并向下方拖曳“填充柄”，如图 5－1－8，直到单元格内出现填充值 2 时为止.

(2) 第二列产生对应的函数值：如图 5－1－9，在 B1 内输入“$=(A1-1)$^2+1”，敲回车键或在编辑栏内选中“√”，拖曳 B1 的填充柄至所需的单元格(或双击 B1 的填充柄)，得到与第一列相对应的函数值.

Excel 中加、减、乘、除及乘方运算符号分别为＋，－，*，/，^.

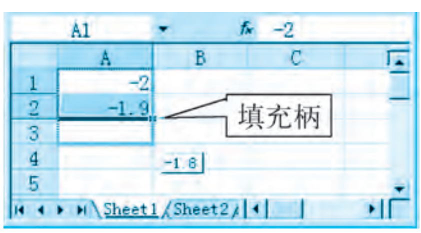


图 5－1－8

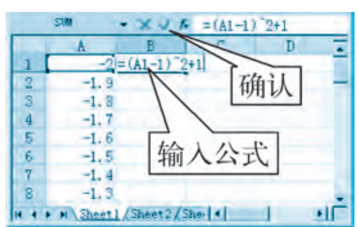
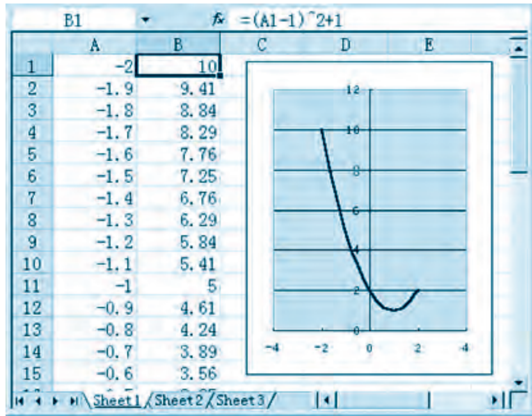


图 5－1－9

(3) 成图：光标置于数据区的任一位置，插入“图表”，选择“XY散点图/无数据点平滑线散点图”，点击“完成”，便得函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 在区间 $[-2,2]$ 上的图象，如图 5-1-10.

取点的多寡，可以根据需要灵活调整，只要改变 A1 和 A2 格两个数的间隔步长即可.



	A	B
1	-2	10
2	-1.9	9.41
3	-1.8	8.84
4	-1.7	8.29
5	-1.6	7.76
6	-1.5	7.25
7	-1.4	6.76
8	-1.3	6.29
9	-1.2	5.84
10	-1.1	5.41
11	-1	5
12	-0.9	4.61
13	-0.8	4.24
14	-0.7	3.89
15	-0.6	3.56

图 5-1-10

你能用上面的方法绘制函数 $f(x)=x^3$ 的图象吗？

练习

1. 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=2x-1$；

(2) $f(x)=2x-1,\ x\in[-1,2)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1,\ x\in(0,+\infty)$；

(5) $f(x)=x^2,\ x\in[-1,2]$；

(6) $f(x)=(x-1)^2,\ x\in[0,3]$.

2. 先画出下列函数的图象，再求出每个函数的值域：

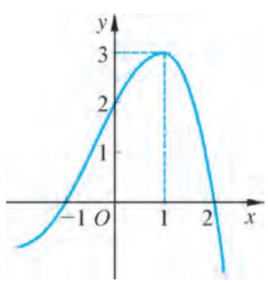
(1) $f(x)=(x-1)^2,\ x\in\{-1,0,1,2\}$；

(2) $f(x)=x^2,\ x\in[1,2)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in[1,3)$；

(4) $f(x)=\sqrt{x}$，x 为正实数.

3. 根据如图所示的函数 $y=f(x)$ 的图象填空：



(第 3 题)

(1) $f(0)=$________，$f(1)=$________，$f(2)=$________；

(2) 若 $-1<x_1<x_2<1$，则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系是____________.

习题 5.1

感受·理解

1. 已知函数 $y=5x-2$.

(1) 当 $x=0,1,5$ 时，分别求出 y 的值；

(2) 当 $y=0,1,5$ 时，分别求出 x 的值.

2. 判断下列对应 f 是否为从集合 A 到集合 B 的函数：

(1) $A=\left\{\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right\}$，$B=\{-6,-3,1\}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-6$，$f(1)=-3$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$；

(2) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{7, 8, 9\}$, $f(1)=f(2)=7$, $f(3)=8$;

(3) $A=B=\{1, 2, 3\}$, $f(x)=2x-1$;

(4) $A=B=\{x \mid x \geqslant -1\}$, $f(x)=2x+1$;

(5) $A=\mathbf{Z}$, $B=\{-1, 1\}$, n 为奇数时, $f(n)=-1$; n 为偶数时, $f(n)=1$.

3. 求下列函数的定义域、值域,并画出图象:

(1) $f(x)=3x$;　　(2) $f(x)=-3x+1$;

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$;　　(4) $f(x)=-\dfrac{1}{x}+1$;

(5) $f(x)=1-x^2$;　　(6) $f(x)=x^2+2x$.

4. 判断下列各组函数是否是同一个函数,并说明理由:

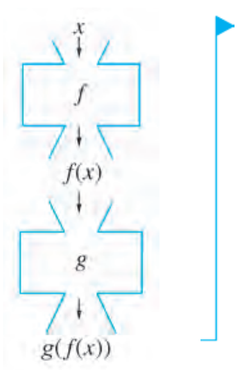
(1) $y=x$, $y=\dfrac{x^2}{x}$;　　(2) $y=x^2$, $y=x^2$, $x\in[0,+\infty)$;

(3) $y=x$, $s=t$;　　(4) $f(x)=1$, $g(x)=1$.

思考 · 运用

5. 已知函数 $f(x)=ax+b$, 且 $f(3)=7$, $f(5)=-1$,求 $f(0)$, $f(1)$ 的值.

6. 直线 $x=a$ 和函数 $y=x^2+1$ 的图象的公共点可能有几个?



7. 已知 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$, $g(t)=\dfrac{t}{1-t}$,求证: $f(t)-g(t)=-2g(t^2)$.

8. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别由下表给出,那么 $f(f(1))=$________, $f(g(2))=$________, $g(f(3))=$________, $g(g(4))=$________.

x	1	2	3	4	x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	1	$g(x)$	2	1	4	3

9. 设函数 $f(x)=2x+3$, 函数 $g(x)=3x-5$, 求 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

探究 · 拓展

10. 已知集合 $A=\mathbf{R}$, $B=\{-1, 1\}$,对应关系 f 如下:当 x 为有理数时, $f(x)=-1$;当 x 为无理数时, $f(x)=1$. 该对应是从集合 A 到集合 B 的函数吗?

11. (操作题)将一枚骰子投掷 10 次,并将每次骰子向上的点数记录在下表中. 规定对应关系 f: 对每一投掷序号 $n(n=1, 2, \cdots, 10)$ 对应到这次骰子的向上点数. 试判断对应 f 是否为函数. 若是,这个函数值域一定是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 吗?

投掷序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
向上点数										

5.2 函数的表示方法

让我们再来看 5.1 节开头的 3 个函数问题.

● 这 3 个函数是怎样表示的?

在第一个问题中,只要知道了表 5－1－1 中的某个年份,就能从此表中查得相应的人口数. 这种用列表来表示两个变量之间函数关系的方法称为**列表法**.

在第二个问题中,物体下落时间 x 与下落距离 y 的函数关系为 $y=4.9x^2\ (x\geqslant 0)$. 这种用等式来表示两个变量之间函数关系的方法称为**解析法**. 这个等式通常叫作函数的解析表达式,简称解析式.

在第三个问题中,我们用图象表示了时刻与气温的关系. 这种用图象表示两个变量之间函数关系的方法称为**图象法**.

列表法、解析法、图象法是表示函数的 3 种常用方法.

用列表法表示函数关系,不必通过计算就可以知道自变量取某个值时,相应的函数值是多少;用解析法表示函数关系,便于用解析式研究函数的性质;而用图象法表示函数关系,可以从整体上直观而形象地表示出函数的变化情况.

例 1 购买某种饮料 x 听,所需钱数为 y 元. 若每听 2 元,试分别用解析法、列表法、图象法将 y 表示成 $x\,(x\in\{1, 2, 3, 4\})$ 的函数,并指出这个函数的值域.

解 (1) 解析法:$y=2x,\ x\in\{1, 2, 3, 4\}$.

(2) 列表法:如表 5－2－1 所示.

表 5－2－1

x/听	1	2	3	4
y/元	2	4	6	8

(3) 图象法:图象由点(1, 2),(2, 4),(3, 6),(4, 8)组成,如图 5－2－1 所示.

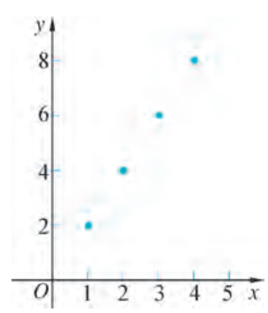


图 5－2－1

函数的值域是$\{2, 4, 6, 8\}$.

例 2 画出函数 $f(x)=|x|$ 的图象,并求 $f(-3)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(1)$的值.

解 因为

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的图象为过原点且平分第一象限、第二象限的一条折线,如图 5-2-2 所示. 其中,

$$f(-3)=3,\ f(3)=3,\ f(-1)=1,\ f(1)=1.$$

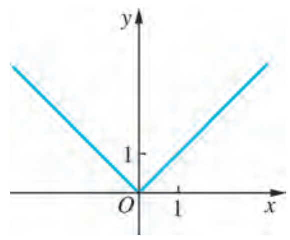


图 5-2-2

例 3 某市出租汽车收费标准如下:在 3 km 以内(含 3 km)路程按起步价 9 元收费,超过3 km 的路程按 2.4 元/km 收费. 试写出收费额(单位:元)关于路程(单位:km)的函数解析式.

解 设路程为 x km 时,收费额为 y 元,则由题意得:当 $x\leqslant 3$ 时,$y=9$;当 $x>3$ 时,按 2.4 元/km 所收费用为 $2.4\times(x-3)$,那么有

$$y=9+2.4\times(x-3).$$

于是,收费额关于路程的函数解析式为

$$y=\begin{cases}9, & 0<x\leqslant 3,\\ 9+2.4\times(x-3), & x>3,\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}9, & 0<x\leqslant 3,\\ 2.4x+1.8, & x>3.\end{cases}$$

分段函数是一个函数,而不是几个函数.

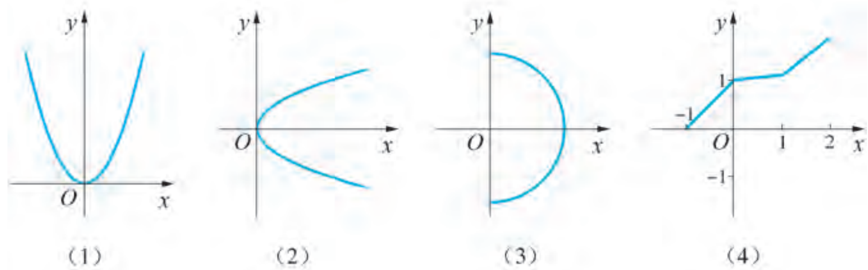
例 2、例 3 中的函数具有共同特点:在定义域内不同部分上,有不同的解析表达式. 像这样的函数,通常叫作**分段函数**(piecewise function).

练　习

第 2 题与例 2 的图象之间有什么关系?

1. 1 n mile(海里)约合 1 852 m,根据这一关系,写出米数 y 关于海里数 x 的函数解析式.
2. 画出函数 $f(x)=|x+3|$ 的图象.
3. (1) 用长为 30 cm 的铁丝围成矩形,试将矩形面积 S(单位:cm^2)表示为矩形一边长 x(单位:cm) 的函数,并画出函数的图象;
   (2) 用细铁丝围一个面积为 1 cm^2 的矩形,试将所用铁丝的长度 l(单位:cm)表示为矩形的某条边长 x(单位:cm)的函数.

4. 下列图象中，表示函数关系 $y=f(x)$ 的有________.



（第 4 题）

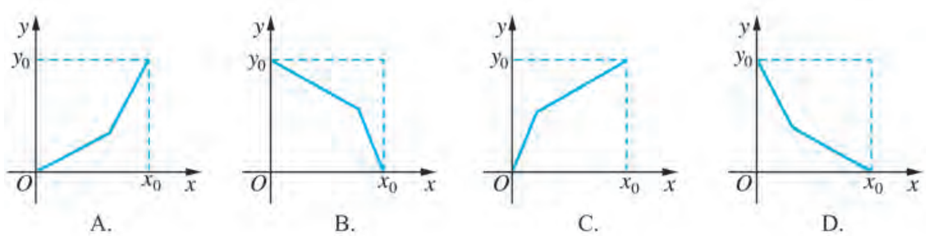
习题 5.2

感受・理解

1. 物体从静止开始下落，下落的距离与下落时间的平方成正比. 已知开始下落的 2 s 内，物体下落了 19.6 m，求开始下落的 3 s 内物体下落的距离.
2. 某公司将进一批单价为 8 元的商品，若按 10 元/个销售，每天可卖出 100 个；假设销售价每上涨 1 元/个，每天的销售量就减少 10 个.
   (1) 设商品的销售价上涨 x 元/个 $(0\leqslant x\leqslant 10,\ x\in \mathbf{N})$，每天的利润为 y 元，试用列表法表示函数 $y=f(x)$；
   (2) 求销售价为 13 元/个时每天的销售利润；
   (3) 如果销售利润为 360 元，那么销售价上涨了多少元？
3. 设距地面高度 x(单位：km)的气温为 y(单位：℃)，在距地面高度不超过 11 km时，y 随着 x 的增加而降低，且每升高 1 km，大气温度降低 6℃；高度超过 11 km 时，气温可视为不变. 设地面气温为 22℃，试写出 $y=f(x)$ 的解析式，并分别求高度为 3.5 km 和 12 km 的气温.
4. 建造一个容积为 8 m^3、深为 2 m 的长方体形状的无盖水池，已知池底和池壁的造价分别为 120 元/m^2 和 80 元/m^2，求总造价 y(单位：元)关于底面一边长 x(单位：m)的函数解析式，并指出该函数的定义域.
5. 画出函数 $f(x)=-x^2+x+1(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象，并根据图象回答下列问题：
   (1) 当 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小；
   (2) 是否存在 $x_0\in[-1,\ 1]$，使得 $f(x_0)=-2$？
6. 已知 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5\}$，试写出从 A 到 B 的两个函数.
7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ x^2, & x<0, \end{cases}$ 求 $f(2)$，$f(f(-2))$的值.
8. 画出函数 $y=x^3(x\in\{-2,\ -1.5,\ -1,\ -0.5,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2\})$ 的图象.

思考・运用

9. 某人去上班，先跑步，后步行. 如果 y 表示该人离单位的距离，x 表示出发后的时间，那么下列图象中符合此人走法的是(　　).



10. 请写出 3 个不同的函数 $y=f(x)$ 的解析式，满足 $f(1)=1$，$f(2)=4$.

11. 已知某皮鞋厂一天的生产成本 C(单位：元)与生产数量 n(单位：双)之间的函数关系式是 $C=4\,000+50n$.

(1) 求一天生产 1 000 双皮鞋的成本；

(2) 如果某天的生产成本是 48 000 元，那么这一天生产了多少双皮鞋？

(3) 若每双皮鞋的售价为 90 元，且生产的皮鞋全部售出，试写出这一天的利润 P 关于这一天生产数量 n 的函数关系式，并求出每天至少生产多少双皮鞋，才能不亏本.

12. 从 2006 年 11 月 15 日起，国内投寄首重 100 g 以内的外埠信函的邮资标准是：每封信的质量不超过 20 g 付邮资 120 分，超过 20 g 而不超过 40 g 付邮资 240 分，超过 40 g 而不超过 60 g 付邮资 360 分，依此类推. 试画出反映每封不超过 90 g 的信函应付邮资 y(单位：分)与信函的质量 x(单位：g)之间的函数关系的图象.

探究・拓展

13. (开放题)已知一个函数的解析式为 $y=x^2$，它的值域为区间[1，4]，这样的函数有多少个？试写出其中两个函数.

5.3 函数的单调性

在 5.1 节开头的第三个问题中，气温 θ 是关于时间 t 的函数，记为 $\theta = f(t)$. 观察这个气温变化图（如图 5-3-1），说出气温在哪些时段内是逐渐升高的，在哪些时段内是逐渐下降的.

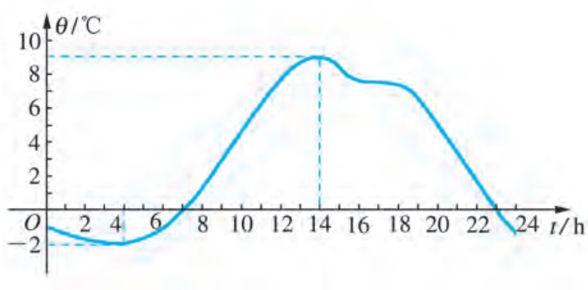
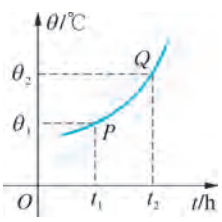
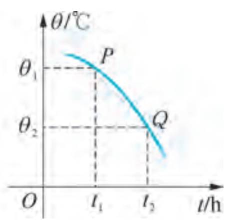


图 5-3-1

● 怎样用数学语言刻画上述某一时段内“随着时间的增加气温逐渐升高”这一特征？





由图 5-3-1 可知，从 4 时到 14 时这一时间段内，图象呈上升趋势，气温逐渐升高. 也就是说，对于这段图象上的任意两点 $P(t_1, \theta_1)$，$Q(t_2, \theta_2)$，当 $t_1 < t_2$ 时，都有 $\theta_1 < \theta_2$. 类似地，对于区间 $(14, 24)$ 内任意两个值 t_1, t_2，当 $t_1 < t_2$ 时，都有 $\theta_1 > \theta_2$.

一般地，

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I \subseteq A$.

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

那么称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**增函数**（也称在 I 上单调递增）（图 5-3-2(1)），I 称为 $y = f(x)$ 的**增区间**.

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**减函数**（也称在 I 上单调递减）（图 5-3-2(2)），I 称为 $y = f(x)$ 的**减区间**.

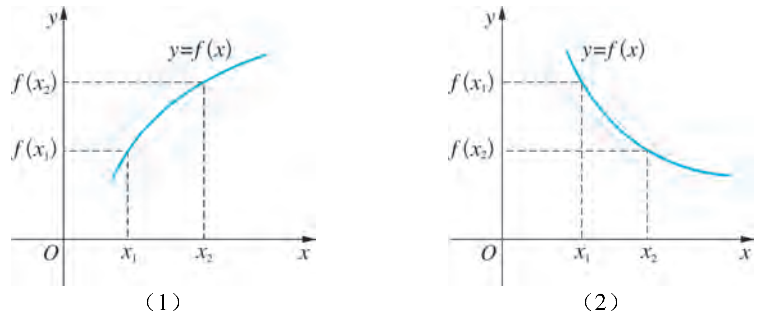


图 5-3-2

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数或减函数，那么称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上具有单调性. 增区间和减区间统称为单调区间.

例 1 画出下列函数图象，并写出单调区间：

(1) $y=-x^2+2$；

(2) $y=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$.

解 (1) 函数图象如图 5-3-3(1)，增区间为 $(-\infty,\ 0]$，减区间为 $[0,\ +\infty)$.

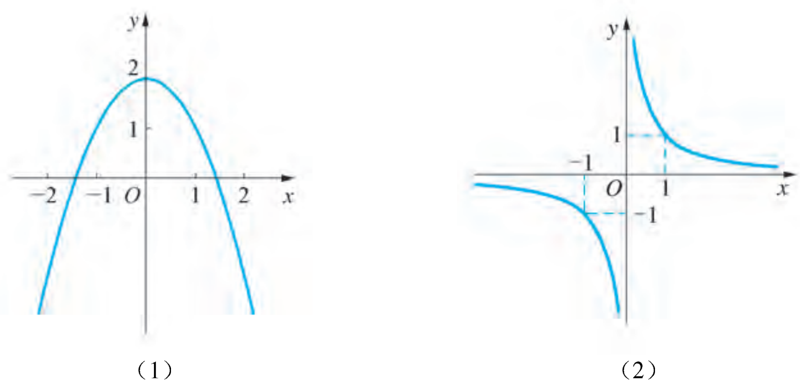


图 5-3-3

(2) 函数图象如图 5-3-3(2)，$(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ +\infty)$ 是两个减区间.

例 2 证明：函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}-1$ 在区间 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数.

证明 设 $x_1,\ x_2$ 为区间 $(-\infty,\ 0)$ 上的任意两个值，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1-x_2<0,\ x_1x_2>0.$$

因为

$$\begin{aligned}&f(x_1)-f(x_2)\\&=\left(-\frac{1}{x_1}-1\right)-\left(-\frac{1}{x_2}-1\right)\\&=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2},\end{aligned}$$

记 $y_2-y_1=\Delta y$，$x_2-x_1=\Delta x$，那么函数的单调性与 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的符号有什么关系？

所以 $$f(x_1)-f(x_2)<0,$$
即 $$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=-\dfrac{1}{x}-1$ 在区间$(-\infty, 0)$上是增函数.

在图 5-3-1 中，我们从图象上看出 14 时的气温为全天的最高气温，它表示在 0～24 时，气温于 14 时达到最大值. 从中可以看出，图象在这一点的位置最高.

在图 5-3-3(1)中，可以看出对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有
$$f(x)\leqslant 2=f(0).$$

一般地，

设 $y=f(x)$ 的定义域为 A.

如果存在 $x_0\in A$，使得对于任意的 $x\in A$，都有
$$f(x)\leqslant f(x_0),$$
那么称 $f(x_0)$为 $y=f(x)$ 的**最大值**(maximum value)，记为
$$y_{\max}=f(x_0);$$

如果存在 $x_0\in A$，使得对于任意的 $x\in A$，都有
$$f(x)\geqslant f(x_0),$$
那么称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的**最小值**(minimum value)，记为
$$y_{\min}=f(x_0).$$

例 3 图 5-3-4 为函数 $y=f(x)$，$x\in[-4, 7]$ 的图象，指出它的最大值、最小值及单调区间.

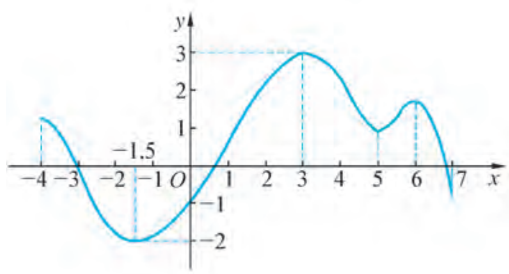


图 5-3-4

解 观察函数图象可以知道，图象上位置最高的点是$(3, 3)$，最低的点是$(-1.5, -2)$.

因此，当 $x=3$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得最大值，即 $y_{\max}=3$；当 $x=-1.5$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得最小值，即 $y_{\min}=-2$.

函数的增区间为$[-1.5, 3]$，$[5, 6]$；减区间为$[-4, -1.5]$，$[3, 5]$，$[6, 7]$.

例 4 求下列函数的最小值：

(1) $y=x^2-2x$；

(2) $y=\dfrac{1}{x}$，$x\in[1,3]$.

解 (1) 因为 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，且当 $x=1$ 时 $y=-1$.

所以函数在 $x=1$ 时取得最小值 -1，即 $y_{\min}=-1$.

(2) 因为对于任意实数 $x\in[1,3]$，都有 $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{3}$，且当 $x=3$ 时 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}$.

所以函数在 $x=3$ 时取得最小值 $\dfrac{1}{3}$，即 $y_{\min}=\dfrac{1}{3}$.

思考

例 4 中的两个函数有无最大值？

例 5 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，$a<c<b$. 在区间 $[a,c]$ 上，$f(x)$ 单调递增；在区间 $[c,b]$ 上，$f(x)$ 单调递减. 试证明 $f(x)$ 在 $x=c$ 时取得最大值.

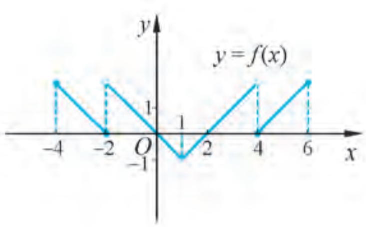
证明 因为在区间 $[a,c]$ 上，$f(x)$ 单调递增，所以对于任意 $x\in[a,c]$，都有 $f(x)\leqslant f(c)$.

又因为在区间 $[c,b]$ 上，$f(x)$ 单调递减，所以对于任意 $x\in[c,b]$，都有 $f(x)\leqslant f(c)$.

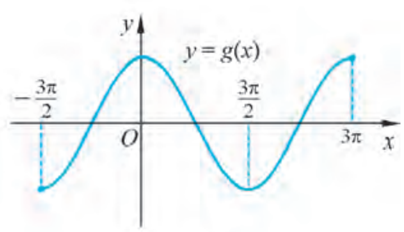
因此，对于任意 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)\leqslant f(c)$，即 $f(x)$ 在 $x=c$ 时取得最大值.

练习

1. 判断函数 $f(x)=x^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数还是减函数.
2. 画出函数 $f(x)=|x+1|$ 的图象，并根据图象写出 $f(x)$ 的单调区间.
3. 判断函数 $f(x)=-x^2+2x$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数还是减函数.
4. 求函数 $f(x)=-x^2+2x$ 在 $[0,10]$ 上的最大值和最小值.
5. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1]$ 上有最大值吗？有最小值吗？
6. 证明：函数 $f(x)=-2x+1$ 是减函数.
7. 下图分别为函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象，试写出函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的增区间.



(1)



(2)

(第 7 题)

8. 判断下列说法是否正确：

(1) 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)>f(1)$，则函数 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数；

(2) 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)>f(1)$，则函数 $f(x)$ 在 **R** 上不是减函数；

(3) 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，在区间 $[0, +\infty)$ 上也单调递增，则函数 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数；

(4) 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，在区间 $(0, +\infty)$ 上也单调递增，则函数 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数.

习题 5.3

感受·理解

1. 已知 k，b 是常数，填写下表：

函　数	$y=kx+b$		$y=\frac{k}{x}$	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
单调区间				
单 调 性				

2. 指出下列函数的单调区间：

(1) $y=1-3x$；

(2) $y=\frac{1}{x}+2$；

(3) $y=x^2+1$；

(4) $y=-x^2+x-1$.

3. 画出下列函数的图象，指出函数的单调区间，并求出函数的最大值或最小值：

(1) $f(x)=-x^2-1$；

(2) $f(x)=x^2-2x-1$，$x\in[-1, 1]$；

(3) $f(x)=x|x|$；

(4) $f(x)=-2\sqrt{x}$；

(5) $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\geqslant 0, \\ -x-2, & x<0; \end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x\in[0, +\infty), \\ -x^2+2x-1, & x\in(-\infty, 0). \end{cases}$

4. 设 a 为实数，已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 **R** 上是减函数，且 $f(a+1)>f(2a)$，求 a 的取值范围.

5. 证明：

(1) 函数 $f(x)=-2x^2+3$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是增函数；

(2) 函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数；

(3) 函数 $f(x)=2-\frac{3}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是增函数.

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

思考·运用

6. 证明：函数 $f(x)=2x^3-\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

7. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

(1) 求证：$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增；

(2) 试求函数 $f(x)$ 的最大值或最小值.

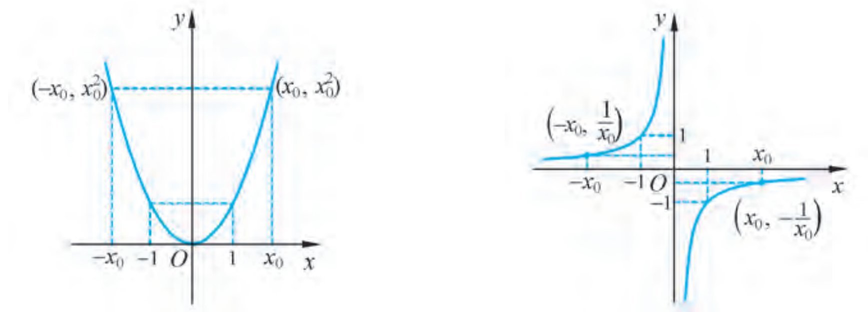
探究·拓展

8. 利用技术工具(如计算器或计算机)画函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图象，并求函数的单调区间.

5.4 函数的奇偶性

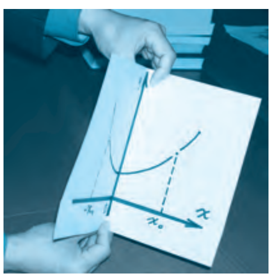
在我们的日常生活中，可以观察到许多对称现象：美丽的蝴蝶，盛开的花朵，六角形的雪花晶体，有倒影的山水景色……

观察函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 的图象(图 5－4－1)，我们发现，函数 $f(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称，而函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ 的图象关于原点对称.



(1)　　　　(2)

图 5－4－1



● 怎样用数量关系来刻画函数图象的这种对称性？

对于函数 $f(x)=x^2$，当自变量取一对相反数时，它们的函数值相等. 例如，

$$f(-2)=4=f(2),$$

$$f(-1)=1=f(1),$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

实际上，对于函数 $f(x)=x^2$ 定义域 $\mathbf{R}$ 内任意一个 x，都有 $f(-x)=x^2=f(x)$. 这时我们称函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数.

对于函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，当自变量取一对相反数时，它们的函数值也互为相反数. 例如，

$$f(-2)=\frac{1}{2}=-f(2),$$

$$f(-1)=1=-f(1),$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=3=-f\left(\frac{1}{3}\right).$$

实际上，对于函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 定义域 $\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq 0\}$ 内任意一个 x，都有 $f(-x)=\frac{1}{x}=-f(x)$. 这时我们称函数 $f(x)=-\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 为奇函数.

一般地，

> 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A.
>
> 如果对于任意的 $x\in A$，都有 $-x\in A$，并且
>
> $$f(-x)=f(x),$$
>
> 那么称函数 $y=f(x)$ 是**偶函数**(even function)；
>
> 如果对于任意的 $x\in A$，都有 $-x\in A$，并且
>
> $$f(-x)=-f(x),$$
>
> 那么称函数 $y=f(x)$ 是**奇函数**(odd function).

奇偶性是函数的整体性质.

如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，那么我们称函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

根据函数奇偶性的定义可知，偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

例 1 判定下列函数是否为偶函数或奇函数：

(1) $f(x)=x^2-1$；　　(2) $f(x)=2x$；

(3) $f(x)=2|x|$；　　(4) $f(x)=(x-1)^2$.

解 (1) 函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^2-1$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=2(-x)=-2x=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=2x$ 是奇函数.

(3) 函数 $f(x)=2|x|$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=2|-x|=2|x|=f(x),$$

所以函数 $f(x)=2|x|$ 是偶函数.

(4) 函数 $f(x)=(x-1)^2$ 的定义域是 **R**.

因为 $f(1)=0$，$f(-1)=4$，所以

$$f(1)\neq f(-1),\ f(1)\neq -f(-1).$$

因此,根据函数奇偶性定义可以知道,函数 $f(x)=(x-1)^2$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

例 2 判断函数 $f(x)=x^3+5x$ 是否具有奇偶性.

解 函数 $f(x)$的定义域为 **R**.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^3+5(-x)\\&=-(x^3+5x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

探 究

具有奇偶性的函数,其定义域具有怎样的特点?

练 习

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ (　　).

A. 是奇函数但不是偶函数　　B. 是偶函数但不是奇函数

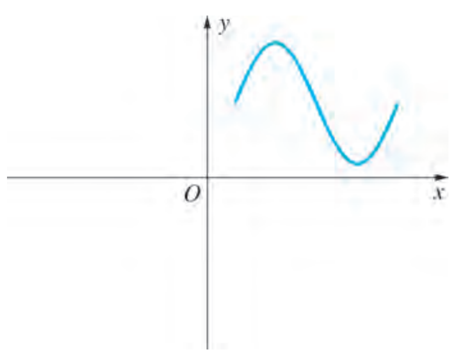
C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

2. 函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象是否关于某条直线对称? 它是否为偶函数?

3. 已知函数 $f(x)$在 y 轴右边的图象如图所示.

(1) 若 $f(x)$是偶函数,试画出函数 $f(x)$在 y 轴左边的图象;

(2) 若 $f(x)$是奇函数,试画出函数 $f(x)$在 y 轴左边的图象.



(第 3 题)

4. 对于定义在 **R** 上的函数 $f(x)$,下列判断是否正确?

(1) 若 $f(x)$是偶函数,则 $f(-2)=f(2)$;

(2) 若 $f(-2)=f(2)$,则函数 $f(x)$是偶函数;

(3) 若 $f(-2)\neq f(2)$,则函数 $f(x)$不是偶函数;

(4) 若 $f(-2)=f(2)$，则函数 $f(x)$ 不是奇函数.

借助 Excel 或其他计算工具画出函数 $f(x)=x^3-x$ 的图象.

5. 证明函数 $f(x)=x^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$；

(3) $f(x)=2|x|-3$.

7. 求证：

(1) $f(x)=|x+3|+|x-3|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；

(2) $g(x)=|x+3|-|x-3|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

习题 5.4

感受·理解

1. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=2x^2-7$；

(2) $f(x)=x^3+5x$；

(3) $f(x)=5x-3$.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$，试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并画出函数的图象.

3. 证明函数 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的图象关于原点对称.

4. 证明函数 $g(x)=|x|+x^2$ 的图象关于 y 轴对称.

思考·运用

5. 设 m 为实数，函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 是偶函数，求 m 的值.

6. 已知函数 $f(x)=ax^3-bx+1$，a，$b\in\mathbf{R}$，且 $f(-2)=-1$，求 $f(2)$ 的值.

7. 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时 $f(x)=1$，求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) 求证：函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；

(2) 求证：函数 $h(x)=f(x)-f(-x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；

(3) 试判断：定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 能否表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

探究·拓展

9. 设 a 为给定实数，函数 $f(x)$ 的定义域为 A.

(1) 若对于任意 $x\in A$，都有 $f(a-x)-f(a+x)=0$，问：此函数的图象一定具有怎样的对称性？说明理由.

(2) 若对于任意 $x\in A$，都有 $f(a-x)+f(a+x)=0$，问：此函数的图象一定具有怎样的对称性？说明理由.

链 接

映射的概念

我们已经知道，函数是建立在两个非空数集之间的一种对应关系：对于集合 A 中的每一个实数 x，在集合 B 中都有唯一的实数 y 和它对应. 是否存在两个普通集合之间的类似的对应关系呢？

例如，坐标平面内的所有点组成的集合为 A，所有的有序数对组成的集合为

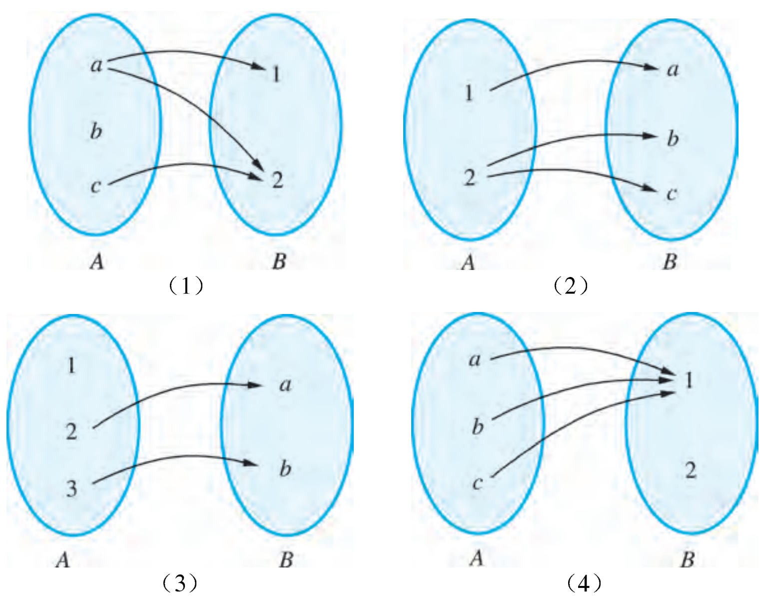
$$B=\{(x,\ y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}.$$

让每一点与其坐标对应，则 A 中的每一个元素(点)，在 B 中都有唯一的元素(有序数对)与之对应.

一般地，设 A，B 是两个非空集合，如果按某种对应关系 f，对于 A 中的每一个元素，在 B 中都有唯一的元素与之对应，那么这样的对应称为从集合 A 到集合 B 的**映射**(mapping)，记为

$$f:A\to B.$$

例 如图所示的对应中：



根据映射的定义，可以知道图中，(4)的对应是从 A 到 B 的映射，(1)(2)(3)的对应不是从 A 到 B 的映射.

请思考：

1. 假定某高中每个班级都有 45 位同学，每个班级学生按 1～45 进行编号，全校学生的姓名都不相同. 设集合 $A=\{x\mid x$ 为某高中的学生的姓名$\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 45,\ x\in\mathbf{N}\}$，$f$：每个学生姓名对应学生的编号；$g$：每个编号对应学生的姓名. 问：$f$ 是否为从 A 到 B 的映射？g 是否为从 B 到 A 的映射？
2. 设 $A=B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \cdots,\ x,\ y,\ z\}$（元素为 26 个英文

字母),作映射f:$A \to B$为

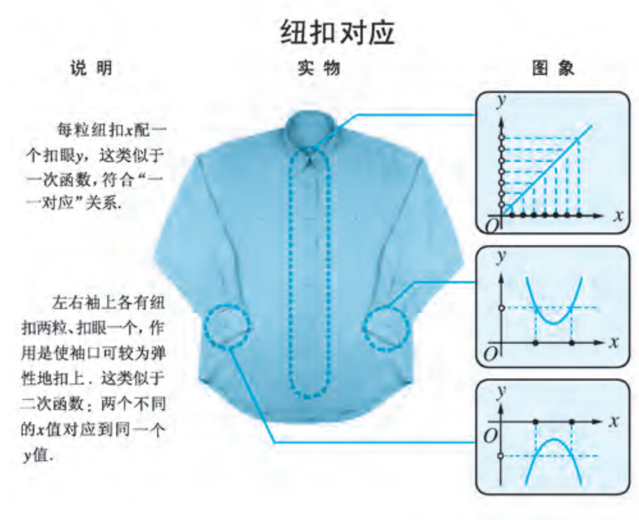
$$
\begin{aligned}
A &= \{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\} \\
B &= \{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}
\end{aligned},
$$

并称A中字母拼成的文字为明文,相应的B中对应字母拼成的文字为密文.

(1) *mathematics*的密文是什么?

(2) 试破译密文*ju jt gvooz*.

3. 如图,小明同学在学习映射时,找到了生活中的一个实例——纽扣对应.你能再举一些生活中与映射有关的例子吗?



4. 映射与函数有什么区别与联系?

问题与探究

$f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$ 和 $f(g(x))$ 的单调性

我们知道，函数 $f(x)=x^3$ 与 $g(x)=2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上都是增函数，那么，函数 $f(x)+g(x)$ 即 x^3+2x 在 $\mathbf{R}$ 上是否仍是增函数？能说明理由吗？

一般地，设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为 A，尝试探究：

(1) 若函数 $f(x)$，$g(x)$都是增函数，试判别函数 $f(x)+g(x)$ 在定义域 A 上的单调性，并说明理由.

又若 $f(x)$，$g(x)$都是减函数，结果如何呢？试说明理由.

(2) 函数 $f(x)$，$g(x)$都是增函数或都是减函数，判别函数 $f(x)g(x)$ 在定义域 A 上的单调性.

总结上述探究(1)(2)，你能得到哪些结论？并继续探究，将你探究的结果填入下表中(用“增函数”“减函数”“不能确定”填空)：

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)g(x)$
增函数	增函数		
增函数	减函数		
减函数	增函数		
减函数	减函数		

我们知道，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2x$ 与定义在非负实数集上的函数 $g(x)=x^2$ 都是增函数，那么函数 $f(g(x))$是否仍为增函数？说明理由.

一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 F，$g(x)$的定义域为 G，且 $g(x)$的值域为 F 的子集.

(1) 若 $f(x)$，$g(x)$都是增函数，试判别 $f(g(x))$的单调性；

(2) 若 $f(x)$是增函数，$g(x)$是减函数，试判别 $f(g(x))$的单调性.

总结上述探究(1)(2)，你能得到哪些结论？并继续探究，将你探究的结果填入下表中(用“增函数”“减函数”“不能确定”填空)：

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$
增函数	增函数	
增函数	减函数	
减函数	增函数	
减函数	减函数	

阅 读

函数概念的形成与发展

1637 年，法国数学家笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)在《几何学》中第一次提到“未知和未定的量”，涉及了变量，同时也引入函数的思想. 1692 年，德国数学家莱布尼茨(G. Leibniz，1646—1716)最早使用“函数”这个词，他用“函数”表示随着曲线的变化而改变的几何量，如切线和点的纵坐标等.

1718 年，瑞士数学家约翰 · 伯努利(J. Bernoulli，1667—1748)给出函数新的解释：“由变量 x 和常量用任何方式构成的量都可以叫作 x 的函数.”

1755 年，瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)给出了函数的如下定义：“如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之而改变，那么将前面的变量称为后面变量的函数.”在函数概念形成的早期阶段，由于接触到的函数都是解析式形式，于是多数人认为函数一定能用解析式表示，他们很难理解不能用解析式表示的函数.

随着微积分等数学领域研究的深入，人们对函数的本质理解也不断加深. 1837 年，德国数学家狄利克雷(P. G. Dirichlet，1805—1859)认为：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，那么 y 是 x 的函数.”此外，他还给出了“狄利克雷函数”：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

自此，人们对函数的本质有了深刻的理解. “变量 y 是 x 的函数”意味着：只要有一个法则存在，使得这个函数定义域中的每一个值 x，有一个确定的 y 值和它对应，而不管这个法则是公式、图象、表格还是其他形式.

19 世纪 70 年代后，集合概念的出现使函数概念又得到进一步的发展. 人们用集合和对应的语言来定义函数概念，可以更深入地理解函数本质.

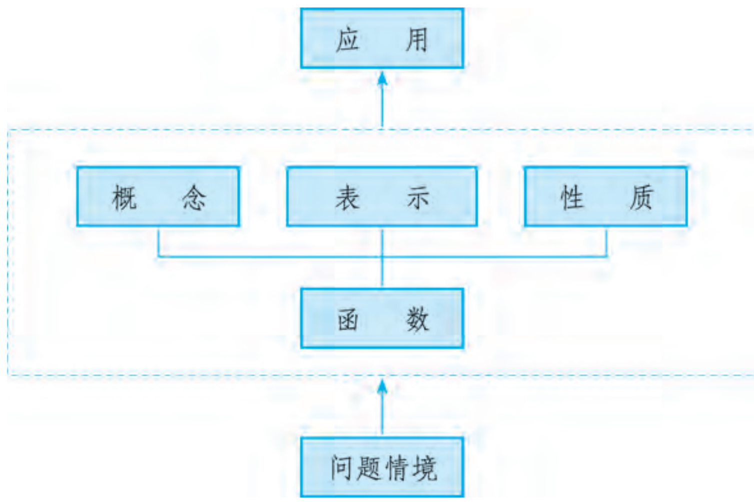
1859 年，我国清朝数学家李善兰(1811—1882)将 function 一词译成“函数”，并给出定义：“凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数.”这里的“函”，是包含的意思. 在国外的数学书上，习惯将函数(即对应关系)记为 f，而在国内的数学书上，通常将函数写为 $f(x)$.

写 作

收集函数概念的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述函数发展的过程、重要的结果，函数发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献.

本章回顾

本章从实际背景出发，抽象出函数概念，给出函数的表示方法，研究了函数的单调性、奇偶性，进而运用这些性质解决一些问题.



本章从3个具体问题入手，通过对不同问题所具有的共同属性的分析与概括，建立了一般函数的概念. 函数是建立在两个非空数集 A，B 上的一种对应关系. 对集合 A 中每一个元素 x，按照对应关系 f，在集合 B 中都有唯一的 $y=f(x)$ 与之对应，则称 $y=f(x)$ 为集合 A 上的函数.

本章在研究函数性质的过程中，主要运用了数形结合的方法. 通过函数的图象可以探索函数的性质，利用函数的性质又可以研究函数的图象. 这种研究方法在以后的学习中会经常使用.

复习题

感受·理解

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3x+5}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x+4}$.

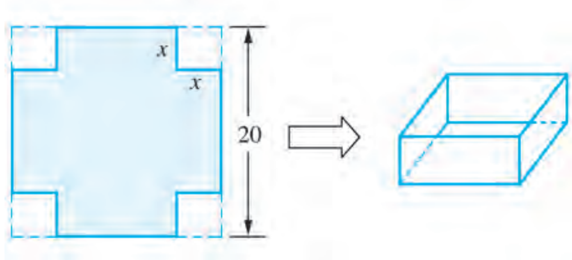
2. 画出下列函数的图象：

(1) $y=1+\dfrac{|x|+x}{2}$；　　(2) $y=|x^2-x|$.

3. 已知函数 $f(x)=2x+1$，$x\in[1,5]$，试求函数 $f(2x-3)$ 的表达式.

4. 已知二次函数的图象顶点为 $A(1,16)$，且图象在 x 轴上截得的线段长为8，求这个二次函数的解析式.

5. 如图，在 1 张边长为 20 cm 的正方形铁皮的 4 个角上，各剪去 1 个边长是 x cm的小正方形，折成 1 个容积是 y cm^3 的无盖长方体铁盒. 试写出用 x 表示 y 的函数关系式，并指出它的定义域.



（第 5 题）

6. 设一个函数的解析式为 $f(x)=2x+3$，它的值域为 $\{-1, 2, 5, 8\}$，求此函数的定义域.

7. 画出函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2-4, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图象，并求出 $f(-2)$，$f(1)$，$f(f(2))$的值.

8. 设 a 为非零常数，试研究函数 $y=ax^3$ 的单调性.

9. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$，$a<c<b$. 在区间 $[a, c]$ 上，$f(x)$ 单调递减；在区间 $[c, b]$ 上，$f(x)$ 单调递增. 求证：$f(x)$ 在 $x=c$ 时取得最小值.

思考 · 运用

10. 已知一个函数的解析式为 $y=x^2$，它的值域是 $\{1, 4\}$，求此函数的定义域.

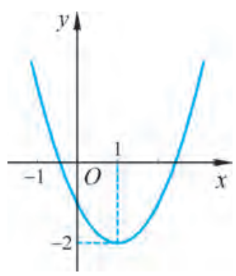
11. 求满足下列条件的函数 $f(x)$的解析式：

(1) $f(1+x)=3x+2$;

(2) $f(2x)=3x^2+1$.

12. 设 $A\subseteq \mathbf{Z}$，且 $A\neq\varnothing$，从 A 到 $\mathbf{Z}$ 的两个函数分别为 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=3x+5$. 若对于 A 中的任意一个 x，都有 $f(x)=g(x)$，试求集合 A.

13. 已知函数 $f(x)=x+1$，试求 $f(f(f(x)))$ 的表达式，并猜一猜 $\underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n个f}(x)\cdots))))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的表达式.



（第 14(2)题）

14. (1) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象之间有什么关系?

(2) 已知函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的图象如图所示，画出下列函数的图象：

① $y=f(-x)$;　　② $y=-f(x)$;

③ $y=f(x)+1$;　　④ $y=f(x-2)$.

探究 · 拓展

15. (1) 已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，对于任意的 $x, y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：$f(0)=0$，且 $f(x)$是奇函数;

(2) 请写出几个满足上述条件的函数.

本章测试

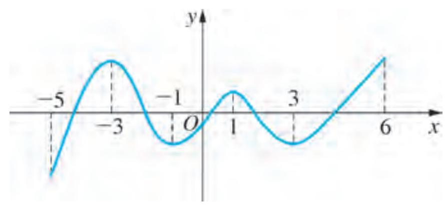
一、填空题

1. 函数 $f(x)=x+\frac{1}{2x+1}$ 的定义域为________.

2. 函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 的值域为________.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 1,\\ x^2, & x<1,\end{cases}$ 那么 $f(f(3))$ 的值为________.

4. 如果函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，那么此函数的减区间为________.



（第 4 题）

5. 设 m 为实数，若函数 $f(x)=x^2-mx+m+2(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，则 m 的值为________.

6. 设 m 为实数，若函数 $f(x)=x^2+mx-2$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上单调递减，则 m 的取值范围为________.

二、选择题

7. 如果函数 $f(x)=x^2+2x-3$，$x\in[0, 2]$，那么函数 $f(x)$ 的值域为（　　）.

A. $[-4, +\infty)$　　B. $[-4, 5]$

C. $[-3, 5]$　　D. $[0, 5]$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，则下列关系式中成立的是（　　）.

A. $f(-1)<f(-2)$　　B. $f(1)<f(2)$

C. $f(-1)<f(2)$　　D. $f(-1)>f(2)$

9. 已知集合 $A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{-1, 1, 3\}$，下列对应关系中，从 A 到 B 的函数为（　　）.

A. $f: x\rightarrow y=x$　　B. $f: x\rightarrow y=x^2$

C. $f: x\rightarrow y=2x$　　D. $f: x\rightarrow y=2x-1$

10. 若函数 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^3+x+1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式为（　　）.

A. $f(x)=x^3+x-1$

B. $f(x)=-x^3-x-1$

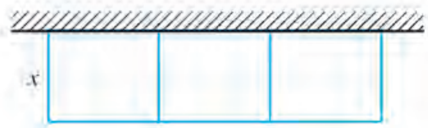
C. $f(x)=x^3-x+1$

D. $f(x)=-x^3-x+1$

三、解答题

11. 已知集合 $A=\{-1, 0, 1\}$，$B=\{0, 1\}$，试写出从 A 到 B 的两个函数.

12. 有一批材料可以建成长为 200 m 的围墙，现用该材料一边靠墙围成一块矩形场地，中间用同样的材料隔成 3 个面积相等的小矩形（如图）. 设与墙垂直的一边长为 x m，试写出围成的矩形的面积 S（单位：m^2）关于边长 x 的函数解析式.



（第 12 题）

13. 记函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=x^2-2x+3$ 的值域为集合 N，求：

(1) M，N；

(2) $M\cap N$，$M\cup N$.

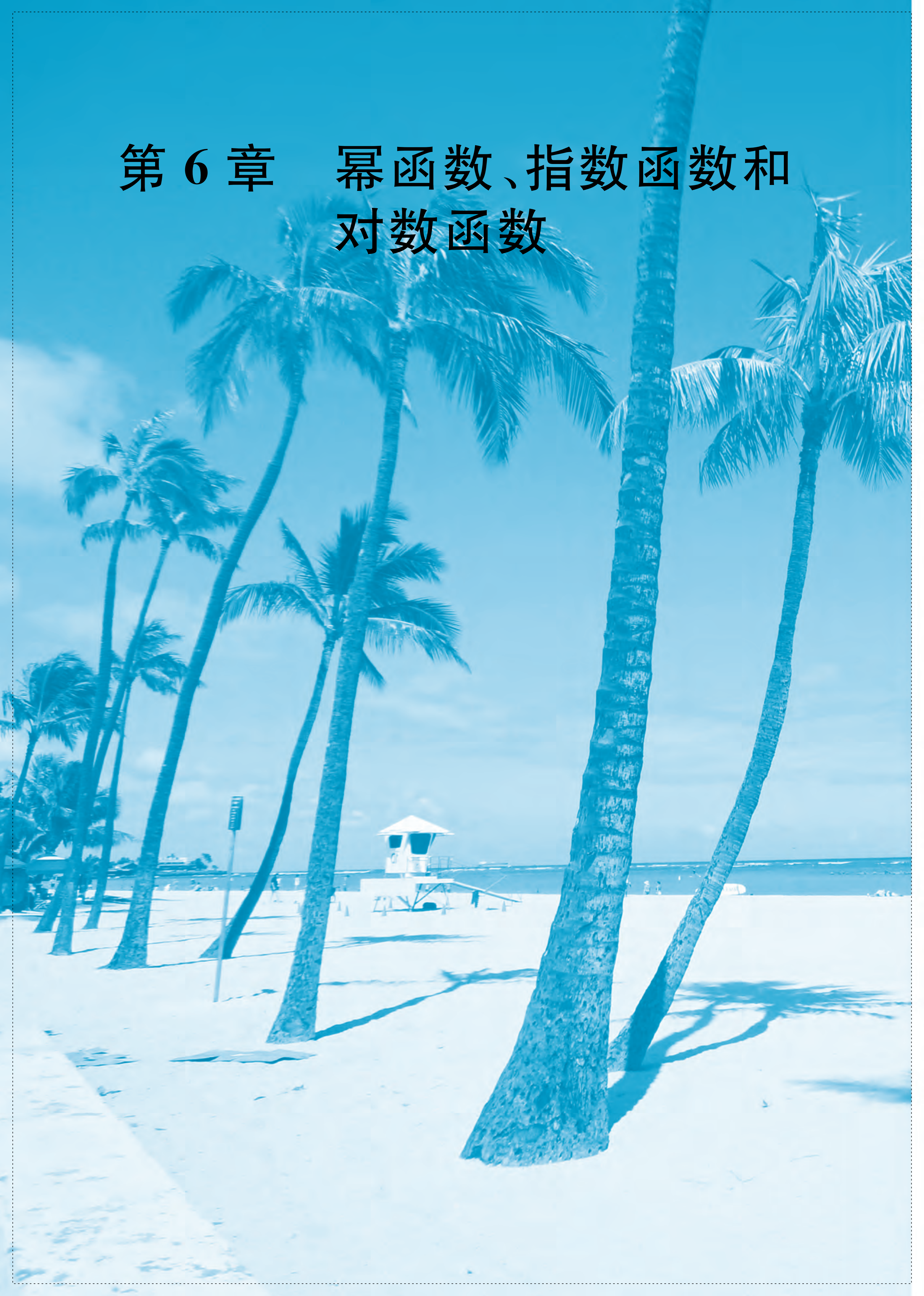
14. 利用函数单调性的定义，证明：函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减.

15. 已知函数 $f(x)=|x+2|+x-3$.

(1) 用分段函数的形式表示 $f(x)$；

(2) 画出 $y=f(x)$ 的图象，并写出函数的单调区间、值域.

第 6 章　幂函数、指数函数和对数函数



幂函数、指数函数和对数函数

- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数

函数概念的分析，为探索种种运动规律提供有力工具，教给人们如何依据已有的经验去预测未来的事物，从而进一步获得自然界的科学知识，从千姿百态的现象中总结出反映本质的基本规律.

——普林希姆

等式 $2^3=8$ 给出了三个数 2，3，8 之间的一种关系，用符号抽象后可表示为

$$a^b=N.$$

在 $a^b=N$ 中，如果给定 a，b，N 三个数中的两个数，那么 $a^b=N$ 就成为以另一个数为未知数的方程，如：

$$2^3=x,$$
$$x^3=8,$$
$$2^x=8.$$

对此，我们已分别学习了乘方运算、开方运算和对数运算.

进一步，在 $a^b=N$ 中，如果只给定 a，b，N 三个数中的一个数，那么 $a^b=N$ 就成为另两个数之间的“函数关系”，如：

$$x^3=y,$$
$$2^x=y,$$
$$2^y=x.$$

- 上述 x，y 的关系中，可得到怎样的函数模型？
- 这些函数有哪些性质和应用？

6.1 幂函数

试考察下列问题：

(1) 正方体的边长为 x，体积为 y，则 $y=x^3$.

(2) 若某放射性物质每经过 1 年，其剩留量是原来的 x 倍，则质量为 1 的这种物质经过 100 年后，其剩留量应为 $C=x^{100}$.

(3) 如果某人驾车在 t s 内行进了 1 km，那么该车的平均速度为 $v=t^{-1}$ km/s.

● 函数 $y=x^3$，$C=x^{100}$，$v=t^{-1}$具有什么共同特征？

这些函数的表达式是一个指数幂的形式，底数是自变量，指数是常数，这样的函数称为幂函数.

一般地，

> 我们把形如
>
> $$y=x^{\alpha}$$
>
> 的函数称为**幂函数**(power function)，其中 x 是自变量，α 是常数.

下面我们结合第 5 章讨论的函数的基本内容，如函数的定义域、值域、图象、单调性、奇偶性等，来认识一些幂函数的性质.

例 1 写出下列函数的定义域，并分别指出它们的奇偶性：

(1) $y=x^3$； (2) $y=x^{\frac{1}{2}}$； (3) $y=x^{-2}$.

解 (1) 函数 $y=x^3$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$-x\in\mathbf{R}$，且都有 $(-x)^3=(-1)^3x^3=-x^3$，所以由奇函数的定义知，函数 $y=x^3$ 是奇函数.

(2) 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y=\sqrt{x}$，其定义域是 $[0,+\infty)$.

因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x\notin(0,+\infty)$，所以由奇函数、偶函数的定义可知，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(3) 由函数 $y=x^{-2}$ 即 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 可知 $x\neq0$，所以此函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq0$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，$-x\neq0$，且 $(-x)^{-2}=(-1)^{-2}\cdot x^{-2}=x^{-2}$，所以由偶函数的定义知，函数 $y=x^{-2}$ 是偶函数.

思 考

函数 $y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-2}$ 的单调性如何？

在同一坐标系内画出幂函数 $y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，如图 6-1-1 所示.

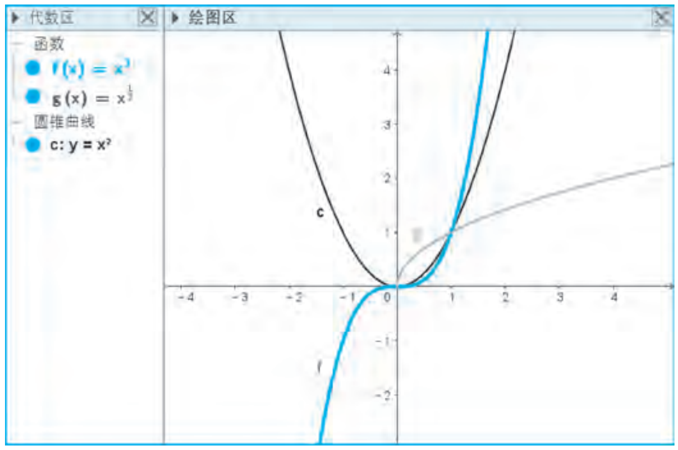


图 6-1-1

观察图象，可以发现这 3 个函数有如下共同特性：

(1) 函数的图象都过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$；

(2) 在第一象限内，函数的图象随 x 的增大而上升，函数在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

一般地，对于函数 $y=x^{\alpha}$，当 $\alpha>0$ 时，也具有上述两条性质.

例 2 试比较下列各组数的大小：

(1) 1.1^3，0.89^3；

(2) $2.1^{\frac{1}{2}}$，$2^{\frac{1}{2}}$，$1.8^{\frac{1}{2}}$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.3}$，$1$，$3^{\frac{1}{3}}$.

解 (1) 因为函数 $y=x^3$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，又 $1.1>0.89$，所以 $1.1^3>0.89^3$.

(2) 因为函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，又 $2.1>2>1.8$，所以 $2.1^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{1}{2}}>1.8^{\frac{1}{2}}$.

(3) 因为函数 $y=x^{1.3}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，又 $1=1^{1.3}$，$\frac{1}{2}<1$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.3}<1^{1.3}=1$.

因为函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，又 $1^{\frac{1}{3}}=1$，$3>1$，所以 $3^{\frac{1}{3}}>1^{\frac{1}{3}}=1$. 于是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.3}<1<3^{\frac{1}{3}}$.

在同一坐标系内画出幂函数 $y=x^{-1}$，$y=x^{-3}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图象，

如图 6－1－2 所示.

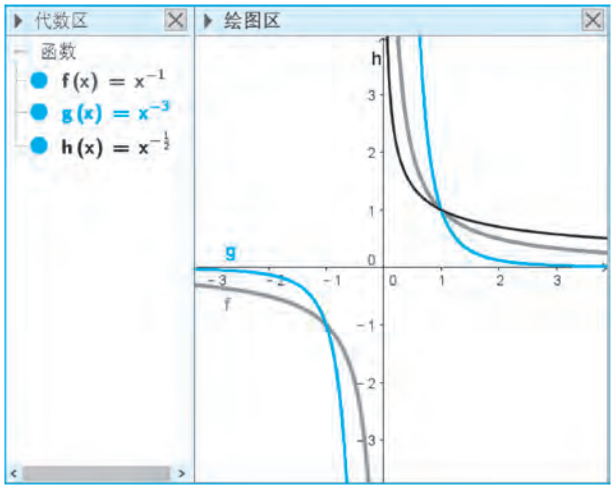


图 6－1－2

观察图象，可以发现，这 3 个函数有如下共同特性：

（1）函数的图象都过点(1，1)；

（2）在第一象限内，函数的图象随 x 的增大而下降，函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

一般地，对于函数 $y=x^{\alpha}$，当 $\alpha<0$ 时，也具有上述两条性质.

能否利用函数单调性定义给出严格证明？

信息技术

GeoGebra(简称 GGB)是一款用于大中小学数学教与学的免费开源软件，主界面包括代数区、绘图区、3D 绘图区、表格区等. 代数区除了可以进行数值计算，还可以进行符号运算(如因式分解、求方程的根等)；绘图区可以作出各种平面几何图形或函数的图象；3D 绘图区能够作出空间三维图形；表格区具有类似 Excel 的功能，可以像 Excel 那样进行操作.

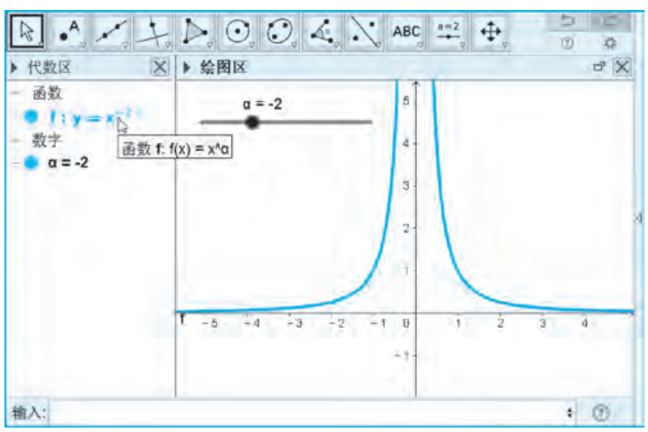


图 6－1－3

用 GGB 作函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象，可以直接在“输入”框中键入“$y=x$^α”后，确认“创建滑动条：α”. 拖动滑动条就能直观地观察函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象变化情况(图 6－1－3).

练　习

1. 分别写出下列函数的定义域,并指出它们的奇偶性:

(1) $y=x^4$;　　(2) $y=x^{\frac{1}{4}}$;

(3) $y=x^{-3}$;　　(4) $y=x^{\frac{2}{3}}$.

2. 已知幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象过点$(2,\sqrt{2})$,试求出这个函数的解析式.

3. 画出函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象,并指出其单调区间.

4. 试比较下列各组数中两个数的大小:

(1) $2.2^{\frac{1}{5}}$, $2.3^{\frac{1}{5}}$;　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

(3) $1.2^{-\frac{1}{2}}$, $1.3^{-\frac{1}{2}}$;　　(4) 0.2^5, 0.3^5.

习题 6.1

感受・理解

1. 分别写出下列函数的定义域,并指出它们的奇偶性:

(1) $y=x^5$;　　(2) $y=x^{\frac{5}{6}}$;

(3) $y=x^{-\frac{4}{5}}$;　　(4) $y=x^{-\frac{3}{2}}$.

2. 比较下列各组数中两个数的大小:

(1) $5.23^{\frac{1}{2}}$, $5.24^{\frac{1}{2}}$;　　(2) 0.26^{-1}, 0.27^{-1};

(3) $1.4^{-\frac{3}{2}}$, $1.7^{-\frac{3}{2}}$;　　(4) $(-0.72)^3$, $(-0.75)^3$.

3. 画出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象,并指出其奇偶性、单调性.

4. 在同一坐标系内画出下列函数的图象,并加以比较:

(1) $y=x^{\frac{1}{2}}$, $y=x^{\frac{1}{3}}$;　　(2) $y=x^{-1}$, $y=x^{-2}$.

5. 证明:幂函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间$[0,+\infty)$ 上是增函数.

思考・运用

6. 汽车在隧道内行驶时,安全车距 d(单位:m)正比于车速v(单位:km/h) 的平方与车身长(单位:m)的积,且安全车距不得小于半个车身长.假定车身长约为4 m,车速为60 km/h,安全车距为 14.4 个车身长,试写出 d 与 v 之间的函数关系式.

7. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$,对于任意的 x_1, $x_2\in[0,+\infty)$,试比较 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小.

6.2 指数函数

庄子，战国中期著名的思想家、哲学家和文学家，是道家学派的主要代表人物之一，主要著作有《庄子》.

试考察下列问题：

(1) 在 4.1 节研究细胞分裂时，得到函数 $y=2^x$.

(2) 在 4.2.2 节的例 10 中，得到函数 $y=0.999\,879^x$.

(3) 庄子曰："一尺之捶，日取其半，万世不竭"("捶"同"棰"). 设经过的天数为 x(天)，木棰剩余的长度为 y(尺)，则有 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

● 函数 $y=2^x$，$y=0.999\,879^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 具有什么共同特征？

这些函数的表达式都是指数幂形式，底数为常数，指数为自变量，这样的函数称为指数函数.

一般地，

> 函数
>
> $$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$
>
> 叫作**指数函数**(exponential function)，它的定义域是 $\mathbf{R}$.

在图 6-2-1 中，我们同时画出了指数函数 $y=10^x$，$y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象. 观察图 6-2-1，通过研究函数的定义域、值域、奇偶性、单调性等，我们可以发现指数函数的性质如表 6-2-1 所示.

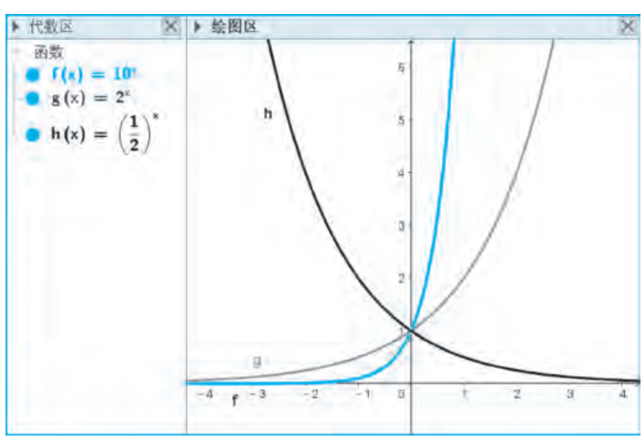
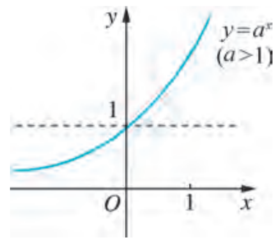
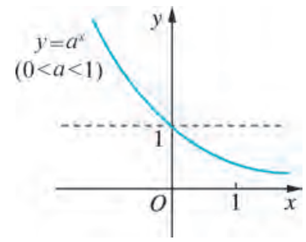


图 6-2-1

表 6-2-1 指数函数 $y=a^x$ 的图象与性质

<table>
<tr><th></th><th>$a>1$</th><th>$0<a<1$</th></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">(1) 定义域：$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 值域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3) 图象过定点$(0,1)$，图象在 x 轴的上方</td></tr>
<tr><td>(4) 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数；
当 $x>0$ 时，$y>1$；
当 $x<0$ 时，$0<y<1$</td><td>在$(-\infty,+\infty)$上是减函数；
当 $x>0$ 时，$0<y<1$；
当 $x<0$ 时，$y>1$</td></tr>
</table>

探究

(1) 在画图过程中，你还发现了指数函数的其他性质吗？

(2) 函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象有怎样的关系？你能得到更一般的结论吗？

例 1 比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$；

(2) $0.5^{-1.2}$，$0.5^{-1.5}$；

(3) $1.5^{0.3}$，$0.8^{1.2}$.

解 (1) 考察指数函数 $y=1.5^x$.

因为 $$1.5>1,$$

所以 $y=1.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

又因为 $$2.5<3.2,$$

所以 $$1.5^{2.5}<1.5^{3.2}.$$

利用计算工具(计算器或计算机)可以验证例 1 中的结论.

(2) 考察指数函数 $y=0.5^x$.

因为 $$0<0.5<1,$$

所以 $y=0.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

又因为 $$-1.2>-1.5,$$

所以 $$0.5^{-1.2}<0.5^{-1.5}.$$

(3) 考察指数函数 $y=1.5^x$.

因为 $$1.5>1,$$

所以 $y=1.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

又因为 $$0.3>0,$$
所以 $$1.5^{0.3}>1.5^0=1.$$
同理 $$0.8^{1.2}<0.8^0=1,$$
故 $$1.5^{0.3}>0.8^{1.2}.$$

例 2 (1) 已知 $3^x\geqslant 3^{0.5}$，求实数 x 的取值范围；

(2) 已知 $0.2^x<25$，求实数 x 的取值范围.

解 (1) 因为 $$3>1,$$
所以指数函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

由 $3^x\geqslant 3^{0.5}$ 可得 $x\geqslant 0.5$.

故 x 的取值范围为区间 $[0.5,+\infty)$.

(2) 因为 $$0<0.2<1,$$
所以指数函数 $y=0.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

因为 $$25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=0.2^{-2},$$
所以 $$0.2^x<0.2^{-2}.$$

由此可得 $x>-2$.

故 x 的取值范围为区间 $(-2,+\infty)$.

例 3 说明下列函数的图象与指数函数 $y=2^x$ 的图象的关系，并画出它们的示意图：

(1) $y=2^{x-2}$； (2) $y=2^{x+2}$.

解 比较函数 $y=2^x$ 与函数 $y=2^{x-2}$，$y=2^{x+2}$ 的取值关系，列表如表 6-2-2 所示.

表 6-2-2

x	$y=2^{x-2}$	$y=2^x$	$y=2^{x+2}$
⋮	⋮	⋮	⋮
-4	2^{-6}	2^{-4}	$\boxed{2^{-2}}$
-3	2^{-5}	2^{-3}	$\boxed{2^{-1}}$
-2	2^{-4}	$\boxed{2^{-2}}$	$\boxed{2^{0}}$
-1	2^{-3}	$\boxed{2^{-1}}$	2^{1}
0	$\boxed{2^{-2}}$	$\boxed{2^{0}}$	2^{2}
1	$\boxed{2^{-1}}$	2^{1}	2^{3}
2	$\boxed{2^{0}}$	2^{2}	2^{4}
⋮	⋮	⋮	⋮

一般地，因为函数 $y=2^{x-2}$ 中 $x=a+2$ 对应的 y 值与函数 $y=2^x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等，所以将指数函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=2^{x-2}$ 的图象.

同样地，因为函数 $y=2^{x+2}$ 中 $x=a-2$ 对应的 y 值与函数 $y=2^x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等，所以将指数函数 $y=2^x$ 的图象向左平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=2^{x+2}$ 的图象.

这些函数的图象如图 6－2－2所示.

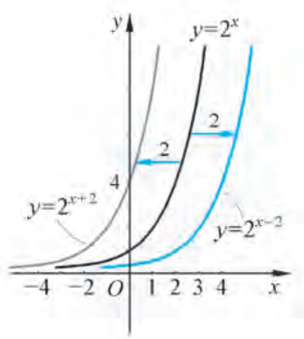


图 6－2－2

思考

函数 $y=a^{x+h}$ 与函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1,\ h\neq0)$ 的图象之间有怎样的关系？

练习

1. 下列各数中，哪些大于 1，哪些小于 1？

$\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{7}{3}}$，$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$，$(0.16)^{0.2}$.

2. 指出下列函数的单调性：

(1) $y=5^x$； (2) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$；

(3) $y=0.5^x$； (4) $y=-2^x$.

3. 设 a 为实数，如果指数函数 $f(x)=(a-1)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，那么 a 的取值范围是(　　).

A. $a<2$ B. $a>2$ C. $1<a<2$ D. $0<a<1$

4. 比较下列各组数中两个值的大小关系：

(1) $3.1^{0.5}$，$3.1^{2.3}$； (2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1.5}$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1.8}$；

(3) 0.6^2，0.6^3； (4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.3}$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.24}$；

(5) $0.5^{3.2}$，$1.3^{2.1}$； (6) $2.3^{-2.5}$，$0.2^{-0.1}$.

5. 分别根据下列条件确定正数 a 与 1 的大小关系：

(1) $a^{\frac{3}{5}}<a^{\frac{4}{5}}$； (2) $a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{1}{3}}$；

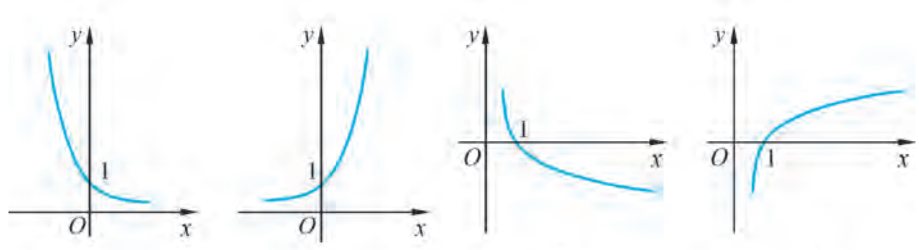
(3) $a^{-\frac{3}{4}}>a^{\frac{5}{4}}$； (4) $a^{-0.5}<a^{-0.6}$.

6. 分别求满足下列条件的实数 x 的取值范围：

(1) $2^x>8$； (2) $3^x<\frac{1}{27}$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{2}$；　　　　(4) $5^x < 0.2$.

7. 函数 $y=2^{-x}$ 的图象为(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

例 4 某种放射性物质不断变化为其他物质，每经过 1 年，这种物质剩留的质量是原来的 84%. 写出这种物质的剩留量关于时间的函数关系式.

解 设该物质最初的质量是 1，经过 x 年剩留量是 y.

经过 1 年，剩留量

$$y=1\times0.84=0.84^1;$$

经过 2 年，剩留量

$$y=0.84\times0.84=0.84^2;$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，经过 x 年，剩留量

$$y=0.84^x\ (x>0,\ x\in\mathbf{N}^*).$$

复利是把前一期的利息和本金加在一起作本金，再计算下一期利息的一种计算利息的方法.

例 5 某种储蓄按复利计算利息，若本金为 a 元，每期利率为 r，设存期是 $x(x\in\mathbf{N}^*)$，本利和(本金加上利息)为 y 元.

(1) 写出本利和 y 随存期 x 变化的函数关系式；

(2) 已知存入本金 1 000 元，每期利率为 2.25%，试计算 5 期后的本利和.

解 (1) 已知本金为 a 元，利率为 r，则 1 期后的本利和为

$$y=a+ar=a(1+r),$$

2 期后的本利和为

$$y=a(1+r)+a(1+r)r=a(1+r)^2,$$

3 期后的本利和为

$$y=a(1+r)^3,$$

$$\cdots\cdots$$

x 期后的本利和为

$$y=a(1+r)^x,\ x\in\mathbf{N}^*,$$

即本利和 y 随存期 x 变化的函数关系式为

$$y=a(1+r)^x,x\in\mathbf{N}^*.$$

(2) 将 $a=1\,000$(元), $r=2.25\%$, $x=5$ 代入上式,得

$$y=1\,000\times(1+2.25\%)^5=1\,000\times1.022\,5^5\approx1\,117.68(\text{元}),$$

即 5 期后的本利和约为 1 117.68 元.

思 考

在例 5 中,请借助计算器解答下列问题:

(1) 第几期后的本利和超过本金的 1.5 倍?

(2) 要使 10 期后的本利和翻一番,利率应为多少?(精确到 0.001)

例 6 2000～2002 年,我国国内生产总值年平均增长7.8%.按照这个增长速度,画出从 2000 年开始我国年国内生产总值随时间变化的图象,并通过图象观察到 2016 年我国年国内生产总值约为 2000 年的多少倍(结果取整数).

解 设 2000 年我国年国内生产总值是 1,x 年后我国年国内生产总值为 y.

因为国内生产总值年平均增长 7.8%,所以从 2001 年开始,每年的国内生产总值是上一年的 1.078 倍,则

经过 1 年,

$$y=1\times1.078=1.078;$$

经过 2 年,

$$y=1.078\times1.078=1.078^2;$$

经过 3 年,

$$y=1.078^2\times1.078=1.078^3;$$

……

一般地,经过 x 年,我国年国内生产总值

$$y=1.078^x,x\in\mathbf{N}^*.$$

画出指数函数 $y=1.078^x$ 的图象,如图 6-2-3 所示.从图象上看出,当 $x=16$ 时,$y\approx3$.

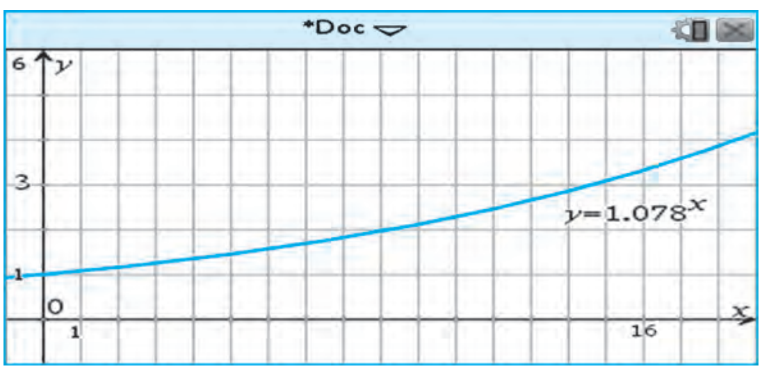


图 6-2-3

答 到 2016 年我国年国内生产总值约为 2000 年的 3 倍.

在日常生活中,还有许多问题可以归结为指数函数问题加以解决.

练 习

1. 已知 2016 年我国国内生产总值为 a,设以后每年的年平均增长率为 b,试写出 x 年后国内生产总值 y 和 x 之间的函数关系式.
2. 某种产品的年销售量为 10 000 件,由于其他新产品的出现,估计该产品的市场需求每年下降 10%. 写出 x 年后,年销售量 y(单位:件)和 x(单位:年)之间的函数关系式.
3. 某人向银行贷款 10 万元做生意,约定按年利率 7% 的复利计算利息,写出 x 年后,需要还款总数 y(单位:万元)和 x(单位:年)之间的函数关系式,并用计算器计算 5 年后的还款总额.

习题 6.2

感受·理解

1. 某种细胞分裂时,由 1 个分裂成 2 个,2 个分裂成 4 个……依此类推,写出这样的一个细胞分裂 x 次后,得到的细胞个数 y 与分裂次数 x 之间的函数关系式.
2. 用清水漂洗衣服,每次能洗去污垢的 $\frac{3}{4}$. 设漂洗前衣服上的污垢量为 1,写出衣服上存留的污垢量 y 与漂洗次数 x 之间的函数关系式. 若要使存留的污垢不超过原有的 1%,至少要漂洗几次?
3. 比较下列各组数中两个数的大小:

   (1) 1.7^m, 1.7^{m+1};　　(2) $0.8^{-0.1}$, $0.8^{-0.2}$;

   (3) 0.9^m, 0.9^{m-1};　　(4) $0.618^{1.9}$, $0.618^{1.8}$.
4. 分别把下列各题中的 3 个数按从小到大的顺序用不等号连接起来:

   (1) $2^{2.1}$, $2^{1.9}$, $0.3^{2.1}$;　　(2) $2^{2.5}$, 2.5^0, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}$;

   (3) $0.8^{0.8}$, $0.8^{0.9}$, $1.2^{0.8}$;　　(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.
5. 设 m, n 为实数,已知下列不等式成立,试比较 m, n 的大小:

   (1) $2^m < 2^n$;　　(2) $0.2^m < 0.2^n$;

   (3) $a^m < a^n$ $(0 < a < 1)$.
6. 设 a 为实数,$a>0$,$a\neq 1$. 已知下列不等式成立,求 a 的取值范围:

   (1) $a^3<a^2$;　　(2) $a^{0.8}<a^{0.5}$;

   (3) $a^{-2}>a^{-3}$;　　(4) $a^m>a^n(m>n)$.
7. 解下列方程:

   (1) $2^x=\sqrt{2}$;　　(2) $4^x=8$;　　(3) $2^x=3^x$.
8. 求满足下列条件的实数 x 的取值范围:

   (1) $3^x<9$;　　(2) $2^x>\frac{1}{8}$;

   (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\sqrt[3]{9}$;　　(4) $3^x>7^x$.
9. 设 $f(x)=3^x$,求证:

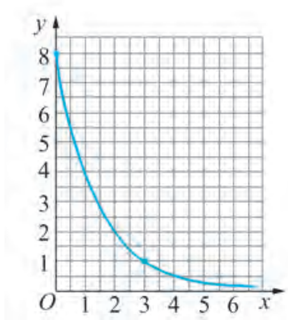
   (1) $f(x)f(y)=f(x+y)$;

   (2) $f(x)\div f(y)=f(x-y)$.

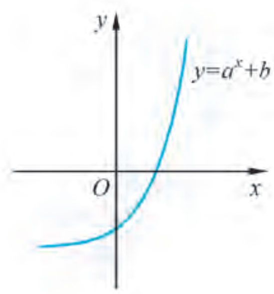
10. (1) 一电子元件厂去年生产某种规格的电子元件 a 个，计划从今年开始的 m 年内，每年生产此种规格电子元件的产量比上一年增长 $p\%$，试写出此种规格电子元件的年产量随年数变化的函数关系式；

(2) 一电子元件厂去年生产某种规格电子元件的成本是 a 元/个，计划从今年开始的 m 年内，每年生产此种规格电子元件的单件成本比上一年下降 $p\%$，试写出此种规格电子元件的单件成本随年数变化的函数关系式.

11. 设 a，k 为实数，$a>0$，$a\neq1$. 试根据如图所示的函数 $y=ka^{-x}$ 的图象，求 k 和 a 的值.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 设 a，b 为实数，$a>0$，$a\neq1$. 已知函数 $y=a^x+b$ 的图象如图所示，求 a，b 的取值范围.

思考·运用

13. 设 a 为实数，已知函数 $f(x)=a+\dfrac{1}{4^x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，求 a 的值.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，试讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

15. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=1+2^x$，你能画出此函数的图象吗？

16. 有些家用电器(如冰箱等)使用了氟化物，氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层，使臭氧含量 Q 呈指数函数型变化，在氟化物排放量维持某种水平时，具有关系式 $Q=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t}$，其中 Q_0 是臭氧的初始量.

(1) 随时间 t 的增加，臭氧的含量是增加还是减少？

(2) 试估计多少年以后将会有一半的臭氧消失.(用计算器计算)

探究·拓展

17. 已知函数 $f(x)=2^x$，对于任意的 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，试比较 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小关系.

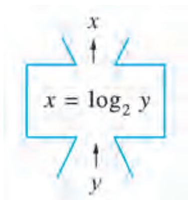
6.3 对数函数

我们知道，在某细胞分裂过程中，细胞个数 y 是分裂次数 x 的指数函数 $y=2^x$. 因此，知道 x 的值（输入值是分裂次数），就能求出 y 的值（输出值是细胞个数）. 现在，我们来研究相反的问题：知道了细胞个数 y，如何确定分裂次数 x？

为了求 $y=2^x$ 中的 x，我们将 $y=2^x$ 改写成对数式为

$$x=\log_2 y.$$

对于每一个给定的 y 值，都有唯一的 x 值与之对应. 把 y 看作自变量，x 就是 y 的函数. 这样就得到了一个新的函数.



前面提到的放射性物质，经过的时间 x（单位：年）与物质剩留量 y 的关系式为

$$y=0.84^x,$$

改写成对数式为

$$x=\log_{0.84} y.$$

类似地，y 是自变量，x 是 y 的函数.

函数 $2^y=x$ 即为函数 $y=\log_2 x$.

习惯上，仍用 x 表示自变量，用 y 表示它的函数. 这样，上面两个函数就分别写成 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{0.84} x$. 类似还可以得到函数 $y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 等.

● 函数 $y=\log_2 x$，$y=\log_{0.84} x$，$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 具有什么共同特征？

这些函数的表达式都是对数的形式，底数是常数，真数是自变量，这样的函数称为对数函数.

一般地，

> 函数
>
> $$y=\log_a x \ (a>0,\ a\neq 1)$$
>
> 叫作**对数函数**（logarithmic function），它的定义域是 $(0,+\infty)$.

在图 6－3－1 中，我们同时画出了对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象.

观察图 6－3－1 中的函数的图象，对照指数函数的性质，你发现对数函数 $y=\log_a x \ (a>0,\ a\neq 1)$ 有哪些性质？

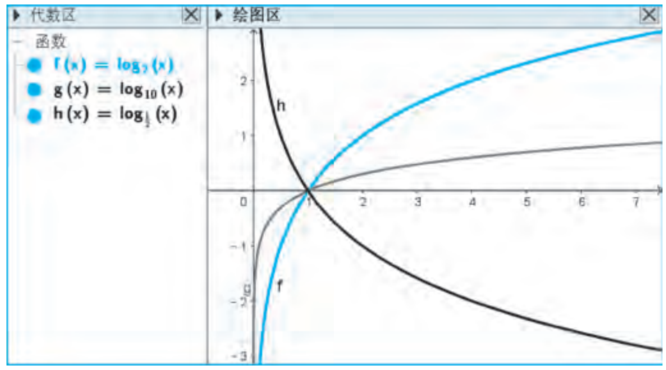
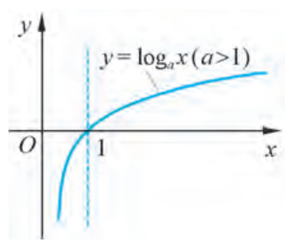
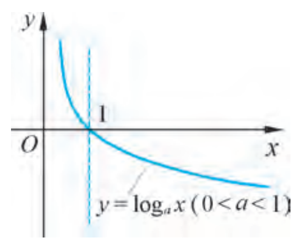


图 6－3－1

由图 6－3－1 可以看出，对数函数的性质如表 6－3－1 所示.

表 6－3－1　对数函数 $y=\log_a x$ 的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) 定义域：$(0,+\infty)$	
	(2) 值域：$\mathbf{R}$	
	(3) 图象过点 $(1, 0)$	
	(4) 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数； 当 $0<x<1$ 时，$y<0$； 当 $x>1$ 时，$y>0$	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数； 当 $0<x<1$ 时，$y>0$； 当 $x>1$ 时，$y<0$

思　考

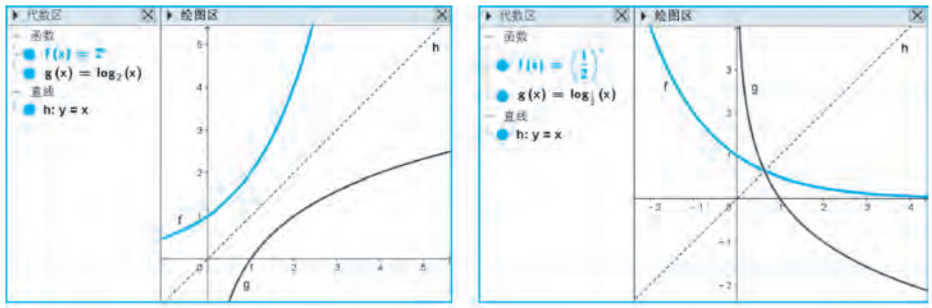
函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域、值域之间有怎样的关系？

画出下列两组函数的图象，并观察各组函数的图象，寻找它们之间的关系：

(1) $y=2^x$，$y=\log_2 x$；　　　　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

由图 6－3－2 可以看出，函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称.

也可以用计算器通过列表描点的方法作出这两组函数的图象.



（1）　　　　　　　　　　（2）

图 6-3-2

思　考

一般地，当 $a>0$，$a\neq1$ 时，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有怎样的关系？

关于反函数的有关内容参见本节的“链接”.

当 $a>0$，$a\neq1$ 时，$y=\log_a x$ 称为 $y=a^x$ 的反函数. 反之，$y=a^x$ 也称为 $y=\log_a x$ 的反函数. 一般地，如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数，那么它的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_{0.2}(4-x)$；

（2）$y=\log_a\sqrt{x-1}$ $(a>0,\ a\neq1)$.

解 （1）当 $4-x>0$，即 $x<4$ 时，$\log_{0.2}(4-x)$ 有意义；当 $x\geqslant4$ 时，$\log_{0.2}(4-x)$ 没有意义.

因此，函数 $y=\log_{0.2}(4-x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ 4)$.

（2）当 $\sqrt{x-1}>0$，即 $x>1$ 时，$\log_a\sqrt{x-1}$ 有意义；

当 $x\leqslant1$ 时，$\log_a\sqrt{x-1}$ 没有意义.

因此，函数 $y=\log_a\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $(1,\ +\infty)$.

例 2 比较下列各组数中两个数的大小：

（1）$\log_2 3.4$，$\log_2 3.8$；

（2）$\log_{0.5}1.8$，$\log_{0.5}2.1$；

（3）$\log_7 5$，$\log_6 7$.

解 （1）考察对数函数 $y=\log_2 x$.

因为 $$2>1,$$

所以 $y=\log_2 x$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上是增函数.

又因为 $$0<3.4<3.8,$$

所以 $$\log_2 3.4<\log_2 3.8.$$

（2）考察对数函数 $y=\log_{0.5}x$.

因为 $$0<0.5<1,$$

所以 $y=\log_{0.5}x$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上是减函数.

又因为 $$0<1.8<2.1,$$

所以 $\log_{0.5}1.8>\log_{0.5}2.1.$

(3) 考察对数函数 $y=\log_7 x$.

因为 $7>1$，

所以 $y=\log_7 x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

又因为 $0<5<7$，

所以 $\log_7 5<\log_7 7=1.$

同理 $\log_6 7>\log_6 6=1$，

所以 $\log_7 5<\log_6 7.$

例 3 说明函数 $y=\log_3(x+2)$ 与函数 $y=\log_3 x$ 的图象的关系.

对照 6.2 节的例 3.

解 比较函数 $y=\log_3(x+2)$ 与 $y=\log_3 x$ 的取值关系，列表如表 6-3-2 所示.

表 6-3-2

x	$y=\log_3 x$	$y=\log_3(x+2)$
⋮	⋮	⋮
-1	/	0
-0.5	/	$\log_3 1.5$
0	/	$\log_3 2$
1	0	1
1.5	$\log_3 1.5$	$\log_3 3.5$
2	$\log_3 2$	$\log_3 4$
3	1	$\log_3 5$
⋮	⋮	⋮

一般地，函数 $y=\log_3(x+2)$ 中 $x=a-2$ 对应的 y 值与函数 $y=\log_3 x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等，则将对数函数 $y=\log_3 x$ 的图象向左平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=\log_3(x+2)$ 的图象.

这两个函数的图象如图 6-3-3 所示.

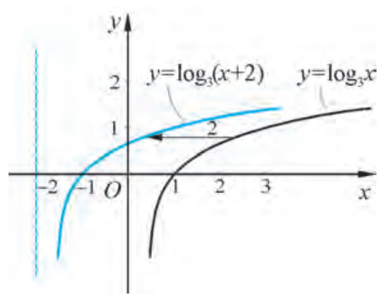


图 6-3-3

思　考

函数 $y=\log_a(x+b)$ 与函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1, b\neq 0)$ 的图象之间有怎样的关系？

例 4　画出函数 $y=\log_2|x|$ 的图象，并根据图象写出函数的单调区间.

解　由于函数 $y=f(x)=\log_2|x|$ 满足对任意的 $x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 都有

$$f(-x)=\log_2|-x|=\log_2|x|=f(x),$$

所以函数 $y=\log_2|x|$ 是偶函数，它的图象关于 y 轴对称.

当 $x>0$ 时，$\log_2|x|=\log_2 x$. 因此，我们先画出函数 $y=\log_2 x$ $(x>0)$ 的图象 C_1，再作出 C_1 关于 y 轴对称的图象 C_2. C_1 和 C_2 构成函数 $y=\log_2|x|$ 的图象，如图 6-3-4.

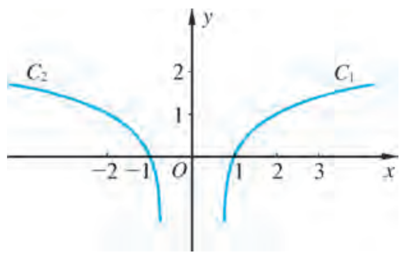


图 6-3-4

由图象可以知道，函数 $y=\log_2|x|$ 的减区间是 $(-\infty, 0)$，增区间是 $(0, +\infty)$.

信息技术

在 GGB 中作出动态函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ 的图象，直观地理解第 145 页“思考”中的问题.

(1) 在输入框中输入“$y=a$^x”，确认“创建滑动条：a”(图 6-3-5)；

(2) 在输入框中输入“$y=\log(a, x)$”，敲回车确认；

(3) 拖动滑块 a，观察两个图象的动态变化趋势(图 6-3-6).

图 6-3-5

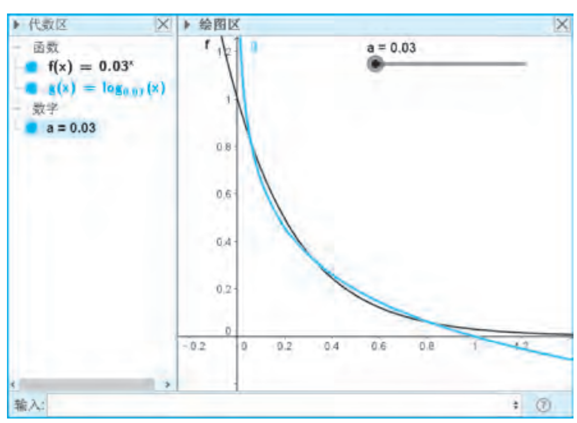


图 6-3-6

右击滑块 a，在“属性”中可设置参数 a 的范围及增量（每次变化的幅度）.

练 习

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，指出这两个函数图象之间的关系.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2(2x+1)$； (2) $y=\log_{0.5}(2x-3)$；

(3) $y=\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$ ； (4) $y=\lg\dfrac{1}{x-1}$.

3. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=\log_2 x$； (2) $y=\log_{\frac{3}{5}} x$；

(3) $y=\log_7(2x+1)$； (4) $y=\lg(3-2x)$.

4. 比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\log_3 5.4$，$\log_3 5.5$； (2) $\log_{\frac{1}{3}}\pi$，$\log_{\frac{1}{3}}\mathrm{e}$；

(3) $\lg 0.02$，$\lg 3.12$； (4) $\ln 0.55$，$\ln 0.56$.

5. 解下列方程：

(1) $\log_2(3x)=\log_2(2x+1)$； (2) $\log_5(2x+1)=\log_5(x^2-2)$；

(3) $\lg\sqrt{x-1}=\lg(x-1)$.

链 接

我们已经知道，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 互为反函数. 一般地，设 A，B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y=f(x)$ 可解得唯一 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数（即对任意一个 $y\in B$，都有唯一的 $x\in A$ 与之对应），那么就称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**（inverse function），记作 $x=f^{-1}(y)$.

在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数. 习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in B,\ y\in A)$ 的形式.

例如，求函数 $y=3x+6$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数. 我们从 $y=3x+6$ 中解得 $x=\dfrac{y}{3}-2$ $(y\in\mathbf{R})$，它也是一个函数. 这样，函数 $y=3x+6$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $y=\dfrac{x}{3}-2$ $(x\in\mathbf{R})$.

函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 恰好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，函数 $y=f(x)$ 的值域 B 恰好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象表明，互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

你能求出函数 $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$ 的反函数吗？

习题 6.3

感受·理解

1. 画出函数 $y=\log_4 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 的图象，指出这两个函数图象之间的关系，并指出这两个函数性质的相同点与不同点.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2(5x+2)$； (2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$；

（3）$y=\ln(3x-1)$；　　（4）$y=\log_4\dfrac{2}{4x-3}$.

3. 比较下列各组数中两个数的大小：

（1）$\log_5 7.8$，$\log_5 7.9$；　　（2）$\log_{0.3}3$，$\log_{0.3}2$；

（3）$\ln 0.32$，$\lg 2$；　　（4）$\log_6 5$，$\log_7 8$.

4. 证明：函数 $y=\log_{0.5}(3x-2)$ 在定义域上是减函数.

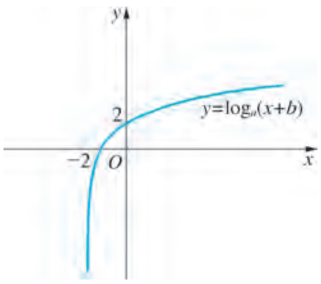
5. 解下列方程：

（1）$3^{3x+5}=27$；　　（2）$2^{2x}=12$；

（3）$3^{1-x}-2=0$.

6. 画出函数 $y=\log_2(x+1)$ 与 $y=\log_2(x-1)$ 的图象，并指出这两个函数图象之间的关系.

7. 比较 $\log_2 5$ 与 $\log_5 8$ 的大小.



（第 8 题）

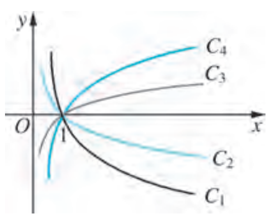
8. 设 a 与 b 为实数，$a>0$，$a\neq1$. 已知函数 $y=\log_a(x+b)$ 的图象如图所示，求 a 与 b 的值.

9. 已知 $f(x)=\log_3 x$，求证：

（1）$f(x)+f(y)=f(xy)$；　　（2）$f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

10. 证明：函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}\ (-1<x<1)$ 是奇函数.

思考·运用



（第 11 题）

11. 设 a，b，c，d 均为不等于 1 的正实数，如图，已知函数 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图象分别是曲线 C_1，C_2，C_3，C_4，试判断 0，1，a，b，c，d 的大小关系，并用“$<$”连接起来.

12. 解下列方程：

（1）$2^{1-x}=5$；　　（2）$2\times5^{x+1}-9=0$.

13. 解下列不等式：

（1）$5^{x+2}>2$；　　（2）$3^{3-x}<6$；

（3）$\log_3(x+2)>3$；　　（4）$\lg(x-1)<1$.

探究·拓展

14. 已知函数 $f(x)=\lg x$，对于任意的 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，试比较 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小.

15.（探究题）对于等式 $a^b=c\ (a>0,\ a\neq1)$，如果将 a 视为自变量 x，b 视为常数，c 为关于 a（即 x）的函数，记为 y，那么 $y=x^b$，是幂函数；如果将 a 视为常数，b 视为自变量 x，c 为关于 b（即 x）的函数，记为 y，那么 $y=a^x$，是指数函数；如果将 a 视为常数，c 视为自变量 x，b 为关于 c（即 x）的函数，记为 y，那么 $y=\log_a x$，是对数函数.

事实上，由这个等式还可以得到更多的函数模型.

例如，如果 c 为常数 e（e 为自然对数的底），将 a 视为自变量 $x\ (x>0,\ x\neq1)$，则 b 为 x 的函数，记为 y，那么 $x^y=\mathrm{e}$.

（1）试将 y 表示成 x 的函数 $f(x)$；

（2）研究函数 $f(x)$ 的性质.

你还能运用这个等式得到什么样的函数？这些函数分别具有哪些性质？

问题与探究

钢琴与指数曲线

钢琴是一种用琴槌击弦而振动发声的键盘乐器，最早的钢琴是意大利佛罗伦萨梅迪奇宫廷的乐师克里斯托弗里（1655—1731）于1711年制造的，钢琴的意大利文为 piano forte，由 piano（弱）和 forte（强）两字组合而成. 钢琴在音量上可以奏出极大的层次变化，它的音域极为宽广，最多可以有7个八度并包括所有的半音. 它可演奏和弦与复调音乐，手法极为丰富. 因此，钢琴有“乐器之王”的称号.

但是，你曾留心过三角钢琴的轮廓有一段奇妙的“曲线”吗？三角钢琴的轮廓上部为什么要制成这样形状的曲线？

为了解释这一现象，我们应学会观察、调查和研究.

首先，从左往右逐个试弹所有琴键（包括所有白键和黑键），我们听到琴声逐渐由低到高，这是因为琴声的高低与琴弦振动的频率有关，而琴弦振动的频率又与琴弦的长度有关. 粗略地说，琴弦长则振动慢，频率小，故发出的声音低；琴弦短，则振动快，频率大，故发出的声音高.

如图1，在88键钢琴中，音域宽度自大字二组的 A_2 至小字五组的 c^5. 根据“十二平均律”的法则，任何两个相邻的键所发出的音相差半音阶（100音分），它们的振动频率之比是一个常数 Q. 设最低的第一个音 A_2 的频率是 a，则第二个音 $^{\#}A_2$ 的频率是 aQ，第三个音 B_2 的频率是 aQ^2……另外，音高每提高八度（如 A_2 到 A_1），频率增大为原来的2倍，而八度音域内包含12个半音（连续的7个白键和5个黑键），所以，第十三个音（A_1）的频率是第一个音（A_2）的频率的2倍. 故

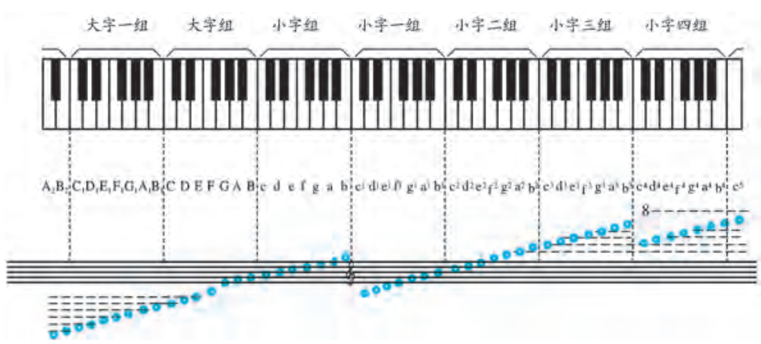


图1

$$aQ^{12}=2a,$$

即

$$Q^{12}=2.$$

另一方面，弦振动的频率与弦长成反比. 所以，从左向右，相邻两弦的长度之比是常数 $q=\dfrac{1}{Q}$，从而有 $q^{12}=\dfrac{1}{2}$.

设左边第一根弦的长度为 l，则第二根弦的长度为 lq，第三根弦

的长度为 lq^2……如图 2，取第一根弦所在直线为 y 轴，各弦靠近键盘的端点所在直线为 x 轴建立坐标系，相邻两弦间的距离为长度单位。这时，将弦的另一端点（上部）连成光滑曲线，那么曲线上任意点的坐标 (x, y) 都满足函数关系 $y = lq^x$.

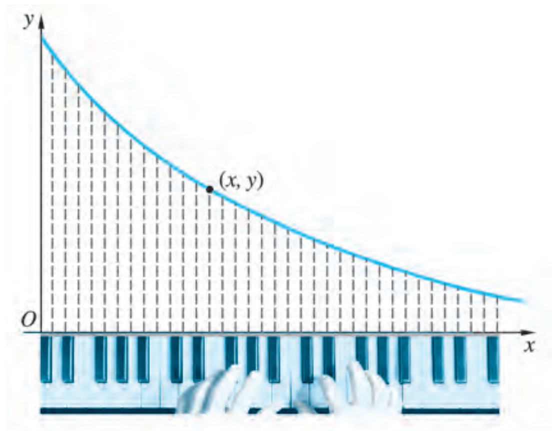


图 2

若令 $c = \log_q l$，则 $y = lq^x$ 可化为 $y = q^{x+c}$.

经过适当平移，就可知道光滑曲线是指数函数 $y = q^x$ 的图象——指数曲线.

我国明代律学家朱载堉是世界上最早从理论上研究十二平均律的学者，他通过计算，使用

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.059\ 463\ 094\ 359\ 295\ 264\ 561\ 825,$$

现在人们通常取 $\sqrt[12]{2} \approx 1.059\ 463$，由此可见他的计算值在当时是比较精确的.

生活中到处都有数学，我们要学会用数学的眼光观察世界，用数学这一强大工具发现自然界的奥秘. 只要我们深入调查研究，就能发现许多问题是可以利用数学知识加以解决的. 例如，中小学学生身高与课桌椅高度的关系.

许多学校的课桌椅高度都是一样的. 无疑，高度一样的课桌椅不仅制作方便，而且摆放起来整齐、美观. 但是，同一高度的课桌椅不能完全适合身高不同的学生，从而给他们的身体发育带来不良影响. 因此，中小学学生的身高与课桌椅高度的关系就值得研究.

通过实地调查，研究你所在学校的学生身高与课桌椅高度的关系.

阅 读

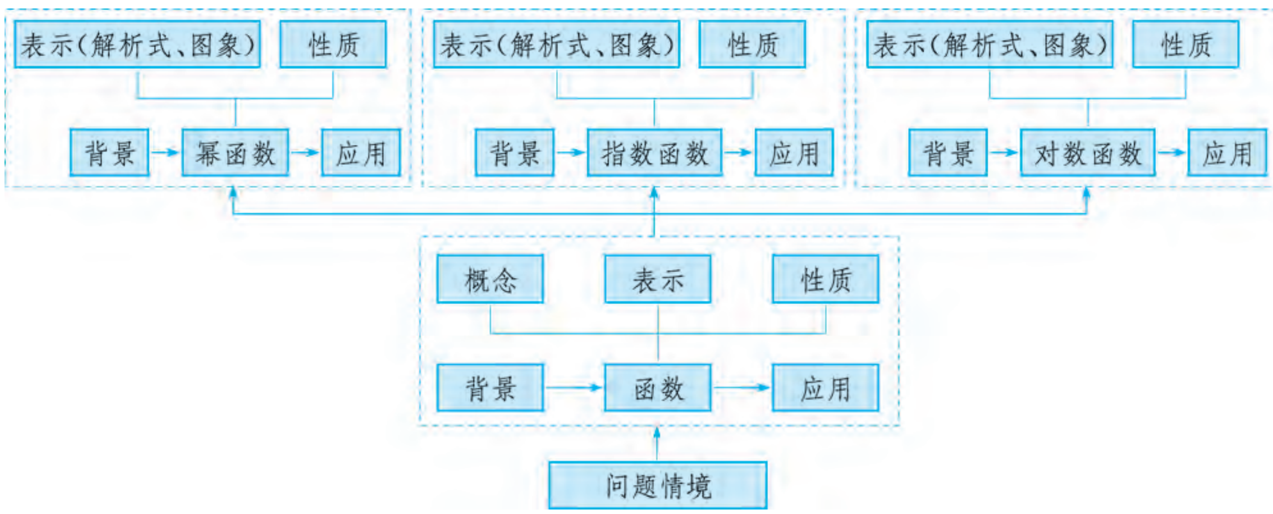
“怎样解题”表

《怎样解题》是由美国数学家和数学教育家G.波利亚所写的一部畅销书，“怎样解题表”是该书的精华.波利亚将解题过程分成了四个步骤，解题时按这四个步骤去尝试，有利于学会解题，提升分析问题与解决问题的能力.

第一， 你必须弄清问题	**弄清问题** ● 未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？ ● 画张图，引入适当的符号. ● 把条件的各个部分分开，你能否把它们写下来？
第二， 找出已知数与未知数之间的联系. 如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题. 你应该最终得出一个求解的计划	**拟订计划** ● 你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？ ● 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？ ● 看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题. ● 这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题. ● 你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？ ● 你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？ ● 回到定义去. ● 如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题.你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类似的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适合于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？ ● 你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？
第三， 实施你的计划	**实现计划** ● 实现你的求解计划，检验每一步骤. ● 你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？
第四， 验算所得到的解	**回顾反思** ● 你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能否一下子看出它来？ ● 你能不能把这个结果或方法用于其他的问题？

本章回顾

本章从实际背景出发，建立了幂函数、指数函数和对数函数的模型，研究了它们的图象和性质. 幂函数、指数函数、对数函数是描述客观世界变化规律的重要模型，在现实生活中有着广泛的应用.



在研究幂函数、指数函数和对数函数的过程中，我们采用了研究函数的一般方法，即通过函数的图象来探索函数的性质，利用函数的性质进一步研究函数的图象.

复 习 题

感受・理解

1. 分别求满足下列条件的实数 x 的取值范围：

（1）$2^x > \frac{1}{8}$；　　（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt[3]{4}$；

（3）$\log_2 x < \frac{1}{2}$；　　（4）$\log_{\frac{1}{3}} x > 2$.

2. 比较下列各组数中两个数的大小（$a>0$）：

（1）$0.31^{\frac{5}{6}}$，$0.35^{\frac{5}{6}}$；　　（2）$(\sqrt{2})^{-\frac{1}{3}}$，$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}$；

（3）$(a+1)^{1.5}$，$a^{1.5}$；　　（4）$(2+a)^{-\frac{2}{3}}$，$2^{-\frac{2}{3}}$.

3. 求下列函数的定义域：

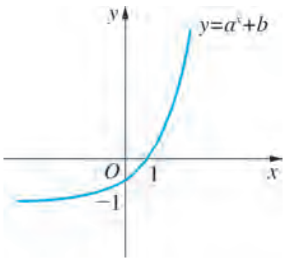
（1）$f(x)=\log_2(4+3x)$；　　（2）$f(x)=\sqrt{4^x-16}$.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

（1）$y=\lg(1+x)+\lg(1-x)$；　　（2）$y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5. 设 $a=0.3^2$，$b=2^{0.3}$，$c=\log_{\sqrt{2}}2$，试比较 a，b，c 的大小关系.

6. 利用计算器，分别计算当 $x=1, 2, 3, \cdots, 10$ 时，函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$ 及 $y=x^2$ 的值，并分析判断：当 x 无限增大时，这 3 个函数中哪个函数的增长更快些.



（第 7 题）

7. 设 a，b 为实数，已知函数 $f(x)=a^x+b$ 的图象如图所示，求 a 与 b 的值.

8. 在不考虑空气阻力的情况下，火箭的最大速度 v（单位：m/s）和燃料的质量 M（单位：kg）、火箭（除燃料外）的质量 m（单位：kg）的函数关系表达式为 $v=2\,000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可以达到 12 km/s?

思考·运用

9. 画出下列各个函数的图象，并说明这些函数的图象与函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象之间的关系.

(1) $y=\sqrt{x-1}$； (2) $y=-\sqrt{x-1}$.

10. 画出下列各个函数的图象，并说明这些函数的图象与对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象之间的关系.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}x+1$； (2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}$.

11. 在同一坐标系中，画出函数 $f(x)=2^x$ 的图象和函数 $g(x)=2x$ 的图象，并写出方程 $f(x)-g(x)=0$ 的解.

12. 分别讨论下列函数的单调性：

(1) $y=\lg(1+x)+\lg(1-x)$； (2) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

13. 设 a，b，c 都是不等于 1 的正数，且 $ab\neq1$，求证：$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$.

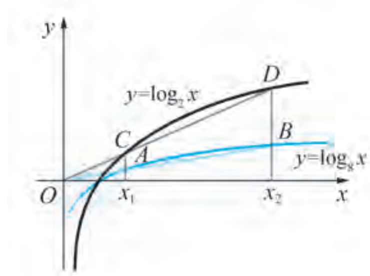
探究·拓展

14. 已知定义在实数集 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，若 $f(1)<f(\lg x)$，求 x 的取值范围.

15. 如图，已知过原点 O 的直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A，B 两点，分别过点 A，B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C，D 两点.

(1) 试利用相似形的知识，证明 O，C，D 三点在同一条直线上；

(2) 当 $BC\parallel x$ 轴时，求 A 点的坐标.



（第 15 题）

本章测试

一、填空题

1. 用不等号连接：$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ ________ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.9}$.

2. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3-4x)$ 的定义域为________.

3. 若函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点(1，2)，则 a 的值为________.

4. 已知某种产品今年产量为 1 000 件，若计划从明年开始每年的产量比上一年增长 5%，则 x 年后的产量为__________件.

5. 若函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 在区间[0，1]上的最大值与最小值之和为 3，则实数 a 的值为________.

6. 画出函数 $f(x)=\log_2(2x-1)$ 的图象：________________.

二、选择题

7. 下列函数中，在区间(0，$+\infty$)上是减函数的是(　　).

A. $y=2^x$　　B. $y=\lg x$

C. $y=x^3$　　D. $y=\frac{1}{x}$

8. 设 $a>0$，$a\neq 1$，如果函数 $f(x)=a^x$ 满足 $f(2)>f(3)$，那么 a 的取值范围是(　　).

A. $0<a<1$　　B. $1<a\leqslant 2$

C. $2<a\leqslant 3$　　D. $a>3$

9. 函数 $y=\log_2(2-x)$ 在区间[0，1]上的最大值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

10. 如果函数 $f(x)$满足 $f(10^x)=x$，那么 $f(5)$ 等于(　　).

A. 10^5　　B. 5^{10}

C. lg 10　　D. lg 5

三、解答题

11. 试结合函数图象比较 $2^{\sqrt{3}}$，$\log_2 3$，$\sqrt{3}$ 的大小.

12. 设 $a>0$，$a\neq 1$，求证：函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数.

13. 已知函数 $f(x)=2^x+x-5$.

(1) 判断此函数的单调性；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值之差.

14. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$.

(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象；

(2) 若存在互不相等的实数 a，b，使 $f(a)=f(b)$，求 ab 的值.

15. 设 m 为实数，已知函数 $f(x)=1-\dfrac{m}{5^x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数.

(1) 求 m 的值；

(2) 求证：$f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

(3) 当 $x\in[-1,2)$ 时，求函数 $f(x)$的取值范围.

第 7 章　三 角 函 数

- 三角函数
  - 角与弧度
    - 任意角
    - 弧度制
  - 三角函数概念
    - 任意角的三角函数
    - 同角三角函数关系
    - 三角函数的诱导公式
  - 三角函数的图象和性质
    - 三角函数的周期性
    - 三角函数的图象与性质
    - 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$
  - 三角函数应用

Trigonometry contains the science of continually undulating magnitude . . . .

— Augustus De Morgan

日出日落，寒来暑往……自然界中有许多“按一定规律周而复始”的现象，这种按一定规律不断重复出现的现象称为周期现象. 周期现象一般与周期运动有关. 一个简单又基本的例子便是“圆周上一点的运动”.

如图 1，P 是半径为 r 的圆 O 上一点，点 P 的运动可以形象地描述为“周而复始”. 那么，点 P 按怎样的规律不断重复出现？用什么样的数学模型来刻画呢？

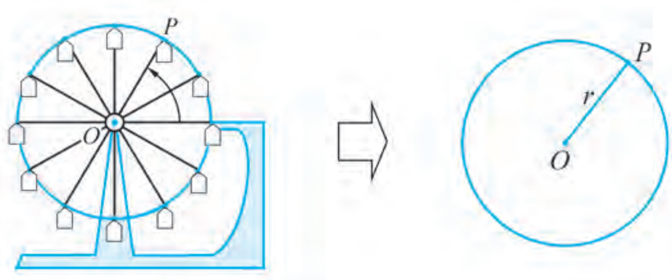


图 1

为了回答上述问题，需要将点 P 表示出来. 我们进行如下思考：

(1) 如图 2 和图 3，以水平方向作参照方向，有序数对 (r, α)，(r, l) 都可以表示点 P；

(2) 如图 4，以水平线为 x 轴，圆心 O 为坐标原点建立直角坐标系，有序数对 (x, y) 也可以表示点 P.

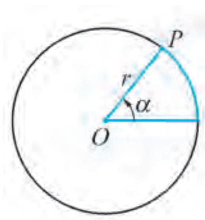


图 2

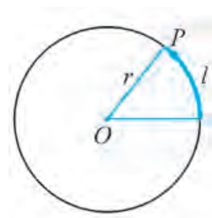


图 3

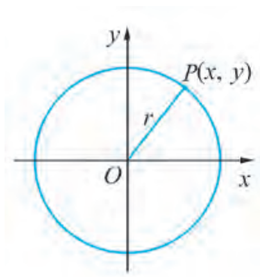


图 4

在表示点 P 的过程中，我们先后选用了角、弧长和直角坐标.

● r，α，l，x，y 之间有着怎样的内在联系呢？

7.1 角与弧度

我们已经学习过一些角，如锐角、直角、钝角、平角、周角. 利用这些角，我们已能表示圆周上某些点 P. 但要表示圆周上周而复始地运动着的点，仅有这些角是不够的. 如点 P 绕圆心旋转一周半，所在位置怎样用角来表示？

在生活中，也有类似情形. 如“游乐园的摩天轮旋转了两周半”，为了精确地刻画旋转程度，我们需要引入一个角，来量化“两周半”.

● 旋转两周半是转了怎样的一个角？

7.1.1 任意角

一个角可以看作平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 射线的端点称为角的顶点，射线旋转的开始位置和终止位置称为角的始边和终边.

约在公元前2 000年，巴比伦人就习惯将圆周划分为360度，每度分为60分，每分再划分为60秒. 这种度量方法一直沿用至今.

如图 7－1－1 所示，射线 OA 绕端点 O，按箭头所示方向旋转到 OB 便形成角 α. 点 O 是角 α 的顶点，射线 OA 和 OB 分别是角 α 的始边和终边. 因此，361°就是旋转一周后紧接着又旋转了 1°所形成的角；720°就是旋转两周所形成的角；旋转两周半，就是旋转了 900°的角.

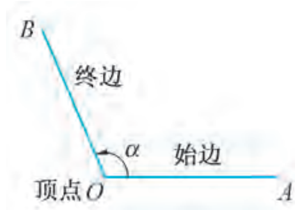


图 7－1－1

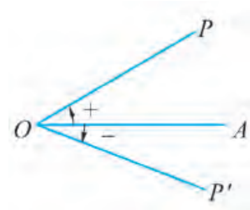


图 7－1－2

为了表示不同旋转方向所形成的角，联想到用正负数可表示具有相反意义的量，我们作如下规定：

按逆时针方向旋转所形成的角叫作**正角**，按顺时针方向旋转所形成的角叫作**负角**. 如果射线没有作任何旋转，那么也把它看成一个角，叫作**零角**(图 7－1－2).

这样就把角的概念推广到了**任意角**，包括正角、负角和零角. 例如图 7－1－3中的 $\alpha=420°$，$\beta=-150°$.

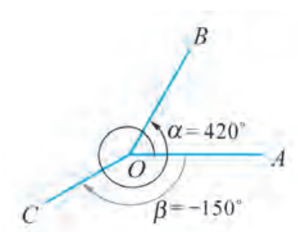


图 7－1－3

对于两个任意角 α，β，将角 α 的终边旋转角 β(当 β 是正角时，按逆时针方向旋转；当 β 是负角时，按顺时针方向旋转；当 β 是零角时，不旋转)，这时终边所对应的角称为 α 与 β 的和，记作 $\alpha+\beta$. 射线 OA

绕端点 O 分别按逆时针方向、顺时针方向旋转相同的量所成的两个角称为互为相反角. 角 α 的相反角记为 $-\alpha$，于是有

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

如果角的终边在坐标轴上，称这个角为轴线角.

为了便于研究，今后我们常以角的顶点为坐标原点，角的始边为 x 轴正半轴，建立平面直角坐标系. 这样，角的终边(除端点外)在第几象限，就说这个角是第几象限角.

思 考

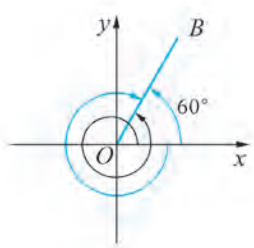


图 7－1－4

(1) $-300°$，$-150°$，$-60°$，$60°$，$210°$，$300°$，$420°$角分别是第几象限角？其中哪些角的终边相同？

(2) 具有相同终边的角彼此之间有什么关系？你能写出与 $60°$角终边相同的角的集合吗？(图 7－1－4)

> 一般地，与角 α 终边相同的角的集合为
>
> $$\{\beta \mid \beta=k\cdot 360°+\alpha,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

例 1 在 $0°$到 $360°$的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别判断它们是第几象限角：

(1) $650°$；　　(2) $-150°$；　　(3) $-990°15'$.

分析 只需将这些角表示成 $k\cdot 360°+\alpha(0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式，然后根据 α 来确定它们所在的象限.

解 (1) 因为 $650°=360°+290°$，

所以 $650°$的角与 $290°$的角终边相同，是第四象限角.

(2) 因为 $-150°=-360°+210°$，

所以 $-150°$ 的角与 $210°$ 的角终边相同，是第三象限角.

(3) 因为 $-990°15'=-3\times 360°+89°45'$，

所以 $-990°15'$ 的角与 $89°45'$ 的角终边相同，是第一象限角.

例 2 已知 α 与 $240°$角的终边相同，判断$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角.

解 由 $\alpha=k\cdot 360°+240°(k\in\mathbf{Z})$，可得

$$\frac{\alpha}{2}=k\cdot 180°+120°(k\in\mathbf{Z}).$$

为什么要对 k 分奇数和偶数进行讨论？

若 k 为偶数，设 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 360°+120°(n\in\mathbf{Z}),$$

从而$\frac{\alpha}{2}$与 $120°$角的终边相同，是第二象限角；

若 k 为奇数，设 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 360^\circ+300^\circ(n\in\mathbf{Z}),$$

已知 α 与 240° 角的终边相同，怎样判断 2α 是第几象限角？

从而 $\frac{\alpha}{2}$ 与 300° 角的终边相同，是第四象限角.

因此，$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角.

思　考

(1) 终边落在 x 轴正半轴上的角的集合如何表示？终边落在 x 轴上的角的集合如何表示？

(2) 终边落在坐标轴上的角的集合如何表示？

(3) 若 α 是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角？

练　习

1. (口答)写出 3 个与 60°角终边相同的角：____________________.

2. (口答)下列角中哪些角与 30°角的终边相同：

(1) 210°；　(2) -330°；　(3) 390°；　(4) 750°.

3. 分别写出满足下面条件的角的集合：

(1) 终边为 y 轴负半轴；　(2) 终边落在坐标轴上.

4. 分别作出下列各角的终边，并指出它们是第几象限角：

(1) 330°；　(2) -200°；　(3) 945°；　(4) -650°.

5. 在 0°到 360°的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角：

(1) -55°；　(2) $395^\circ8'$；　(3) $1\,563^\circ$.

6. 下列命题中正确的是(　　).

A. 第一象限角一定不是负角　B. 小于 90°的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角　D. 第一象限角一定是锐角

7. 求出与下列各角终边相同的最小正角和最大负角：

(1) $1\,140^\circ$；　(2) $1\,680^\circ$；　(3) $-1\,290^\circ$；　(4) $-1\,510^\circ$.

8. 已知 α 是第四象限角，分别确定 $-\alpha$，$180^\circ+\alpha$，$180^\circ-\alpha$ 是第几象限角.

7.1.2　弧度制

在本章引言中，我们曾考虑用有序数对 (r, α) 或 (r, l) 来表示点 P，那么，

● r，l 与 α 之间具有怎样的关系呢？

我们已学习过角的度量，规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角，这种用度作为单位来度量角的单位制叫作**角度制**(degree measure). 除了采用角度制外，在科学研究中还经常采用弧度制.

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫作 **1 弧度**(radian)的角，记作 1 rad(图 7－1－5).

上述规定基于下面的基本事实：

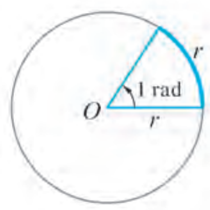


图 7-1-5

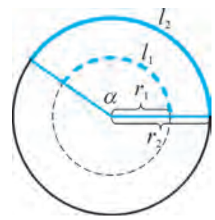


图 7-1-6

假设角 α 作为圆心角所在的圆有两个，其半径分别为 r_1，r_2，所对应的弧长分别为 l_1，l_2(图 7-1-6)，则

$$\frac{l_1}{r_1}=\frac{l_2}{r_2}.$$

上式表明，角 α 的弧度数由角 α 的大小唯一确定，而与其为圆心角所在圆的大小(半径)无关. 这种用弧度作为角的单位来度量角的单位制称为**弧度制**(radian measure).

正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数为 0.

由 1 弧度的意义可知，对任一角 α，其弧度数的绝对值等于 α 所对应的弧长 l 与半径 r 的比，即

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

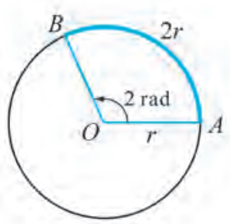


图 7-1-7

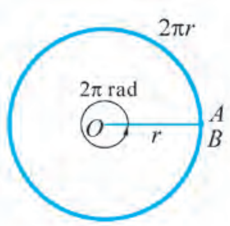


图 7-1-8

上式中，l 与 r 用相同的长度单位.

例如，如果 α 所对应的弧长 $l=2r$，那么 α 的弧度数就是 $\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$ (图 7-1-7)，即 α 的弧度为 2 rad.

再如，如果 α 所对应的弧长 $l=2\pi r$，即 α 为周角，那么 α 的弧度数就是 $\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$ (图 7-1-8). 即

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad}.$$

从而，有

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\,45\ \text{rad},$$

$$1\ \text{rad}=\frac{180}{\pi}\ 度\approx 57.30^\circ.$$

图 7-1-9 给出了一些角的弧度数与角度数之间的关系.

用弧度表示角的大小时，只要不引起误解，可以省略单位. 例如 1 rad，2 rad，π rad，可分别写成 1，2，π.

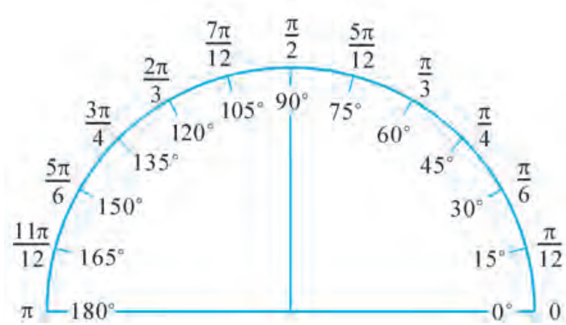


图 7－1－9

例 3 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{3\pi}{5}$；　　(2) 3.5.

解 (1) $\frac{3\pi}{5}\text{ rad}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$.

(2) $3.5\text{ rad}=3.5\times\frac{180^\circ}{\pi}\approx 200.54^\circ$.

例 4 把下列各角从度化为弧度：

(1) 252°；　　(2) $11^\circ15'$.

解 (1) $252^\circ=252\times\frac{\pi}{180}\text{ rad}=\frac{7\pi}{5}\text{ rad}$.

(2) $11^\circ15'=11.25^\circ=11.25\times\frac{\pi}{180}\text{ rad}=\frac{\pi}{16}\text{ rad}$.

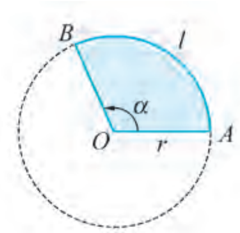


图 7－1－10

如图 7－1－10，设长度为 r 的线段 OA 绕端点 O 旋转形成角 α（α 为任意角，单位为弧度）.

若将此旋转过程中点 A 所经过的路径看成是圆心角 α 所对的弧，设弧长为 l，则有

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

即

$$l=|\alpha|r.$$

特别地，若取 $r=1$，则有

$$l=|\alpha|.$$

若 $|\alpha|\leqslant 2\pi$，则圆心角为 α 的扇形的面积为

$$S=\frac{|\alpha|}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}rl.$$

例 5 已知扇形的周长为 8 cm，圆心角为 2 rad，求该扇形的面积.

解 设扇形的半径为 r，弧长为 l，则有

$$\begin{cases}2r+l=8,\\ l=2r,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}r=2,\\ l=4.\end{cases}$$

故扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}rl=4(\text{cm}^2)$.

引入弧度制后，在 $|\theta|=\frac{l}{r}$ 中，不妨取 $r=1$(这时的圆也称单位圆)，那么当 θ 为正角时，θ 的弧度数即为其所对应的弧长 l 的数量；当 θ 为负角时，θ 的弧度数即为其所对应的弧长 l 的数量的相反数；当 θ 为零角时，θ 的弧度数为 0.（图 7－1－11）

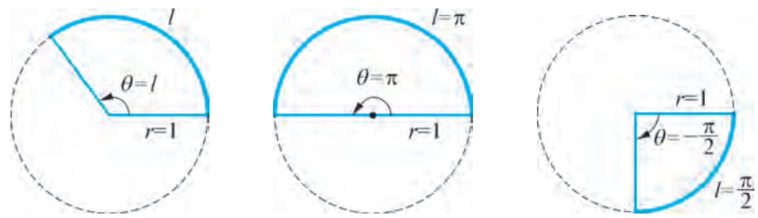


图 7－1－11

角的概念推广以后，在弧度制下，角的集合与弧度数的集合之间建立起一一对应关系，即角的集合与实数集 **R** 之间建立起一一对应关系：每一个角都对应唯一的一个实数；反过来，每一个实数也都对应唯一的一个角.（图 7－1－12）

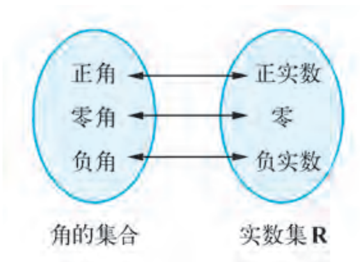


图 7－1－12

练 习

1. (口答)把下列各角从度化为弧度：

(1) $180°$； (2) $90°$； (3) $45°$； (4) $30°$； (5) $120°$； (6) $270°$.

2. (口答)把下列各角从弧度化为度：

(1) 2π； (2) $\frac{\pi}{2}$； (3) $\frac{\pi}{6}$； (4) $\frac{2}{3}\pi$.

3. 把下列各角从度化为弧度：

(1) $75°$； (2) $-210°$； (3) $135°$； (4) $22°30'$.

4. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{\pi}{12}$； (2) $\frac{2}{5}\pi$； (3) $-\frac{4}{3}\pi$； (4) -12π.

5. 写出与下面的角终边相同的角的集合：

(1) $\frac{\pi}{4}$； (2) $\frac{5\pi}{6}$.

6. 分别用弧度制表示下列角的集合：

(1) 终边落在 x 轴上的角；

(2) 终边落在 y 轴上的角.

7. 若 $\alpha=-6$，则角 α 的终边在(　　).
A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

8. 已知半径为 240 mm 的圆上，有一段弧的长是 500 mm，求此弧所对的圆心角的弧度数.

习题 7.1

感受・理解

1. 在 $0°$到 $360°$范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：
(1) $-265°$；　(2) $3\,900°$；　(3) $-840°10'$；　(4) $560°24'$.

2. 分别写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合 $-360°\leqslant\alpha\leqslant360°$ 的元素 α 写出来：
(1) $60°$；　(2) $-75°$；　(3) $90°$；　(4) $-180°$.

3. 分别把下列各角从度化为弧度：
(1) $12°30'$；　(2) $-200°$；　(3) $355°$；　(4) $-186°45'$.

4. 分别把下列各角从弧度化为度：
(1) $-\dfrac{5\pi}{12}$；　(2) $\dfrac{8\pi}{3}$；　(3) $\dfrac{2}{3}$；　(4) 1.4.

5. 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合如何表示？

6. 把下列各角化成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi,\ k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并分别指出它们是第几象限角：
(1) $\dfrac{23\pi}{6}$；　(2) $-1\,500°$；　(3) $-\dfrac{18\pi}{7}$；　(4) $672°$.

7. 如果 α 与 $120°$角终边相同，那么 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

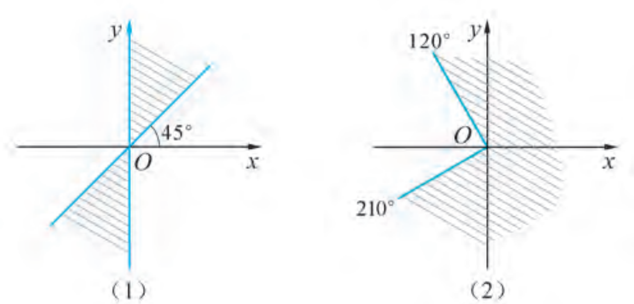
8. 已知扇形的半径为 10 cm，圆心角为 $60°$，求扇形的弧长和面积.

9. 蒸汽机飞轮的直径为 1.2 m，以 300 r/min(转/分)的速度作逆时针旋转，求：
(1) 飞轮 1 s 内转过的弧度数；
(2) 轮周上一点 1 s 内所经过的路程.

思考・运用

10. 已知 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，角 β 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，求角 β 的集合.

11. 如图，写出终边落在阴影部分的角的集合(包括边界).



(第 11 题)

探究・拓展

12. 设 θ 是第一象限角，试探究：
(1) 2θ 一定不是第几象限角？
(2) $\dfrac{\theta}{3}$ 是第几象限角？

7.2 三角函数概念

用(r, α)与用坐标(x, y)均可表示圆周上的点 P，那么，这两种表示有什么内在联系？确切地说，

● 用怎样的数学模型刻画(x, y)与(r, α)之间的关系？

7.2.1 任意角的三角函数

为了建立(x, y)与(r, α)之间的关系，我们从简单的情形出发，先考察 α 为锐角时的情形.

如图 7－2－1，当 α 为锐角时，我们发现 x, y, r, α 之间的关系恰好与初中阶段所学“锐角的正弦、余弦、正切”密切相关，即有

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

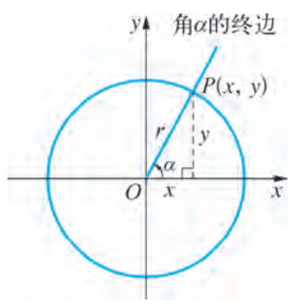


图 7－2－1

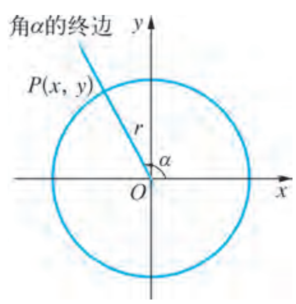
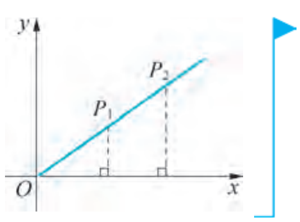


图 7－2－2



一般地，对任意角 α，在平面直角坐标系中，设 α 的终边上异于原点的任意一点 P 的坐标为(x,y)，它与原点的距离是 r，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 此时，点 P 是角 α 的终边与半径为 r 的圆的交点(图 7－2－2). 根据相似三角形知识可知，比值$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$与 α 的终边上的点 P 的位置无关. 我们规定：

(1) 比值$\frac{y}{r}$叫作 α 的**正弦**(sine)，记作 $\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha = \frac{y}{r};$$

(2) 比值$\frac{x}{r}$叫作 α 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos\alpha$，即

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

(3) 比值 $\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ 叫作 α 的**正切**(tangent),记作 $\tan\alpha$,即

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

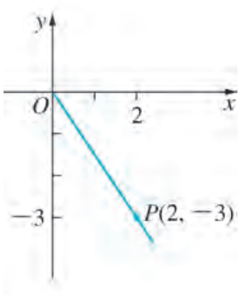


图 7-2-3

例 1 如图 7-2-3,已知角 α 的终边经过点 $P(2,-3)$,求 α 的正弦、余弦、正切值.

解 因为 $x=2$, $y=-3$,

所以 $$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13},$$

从而 $$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}.$$

由于 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值与 α 的终边上的点的位置无关,为了方便,可以选择 α 终边上的特殊点来计算 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值,例如选择 α 的终边与单位圆的交点.

例 2 (1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值;

(2) 当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时,求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值.

解 (1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,设 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为 $(x, y)(x>0, y>0)$.

根据直角三角形中锐角 $\frac{\pi}{6}$ 的对边是斜边的一半,可知 $y=\frac{1}{2}$ (图 7-2-4).

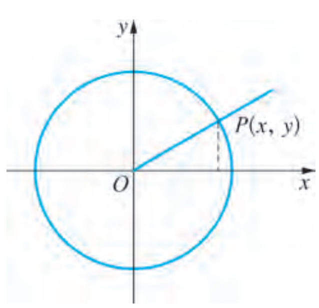


图 7-2-4

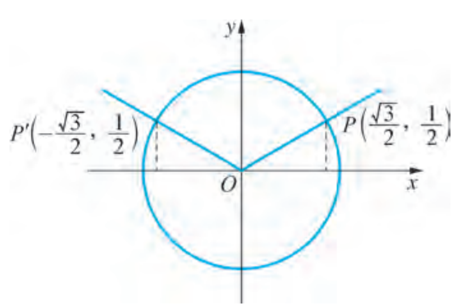


图 7-2-5

又由勾股定理得 $x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$,解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以点 P 的坐标为

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

因此
$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时,设 α 的终边与单位圆的交点为 P',根据点 P' 与 (1) 中点 P 关于 y 轴对称可知,点 P' 的坐标为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$(图 7-2-5).

因此
$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{5\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 3 对于表中的角 α,计算 $\sin\alpha$ 的值,填写下表:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$													

把 α 的值看作横坐标,对应的 $\sin\alpha$ 的值看作纵坐标,在平面直角坐标系中描出点$(\alpha, \sin\alpha)$.

解 仿上计算,可得

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

把 α 的值看作横坐标，对应的 $\sin\alpha$ 的值看作纵坐标，在平面直角坐标系中描出点 $(\alpha,\ \sin\alpha)$，如图 7-2-6 所示.

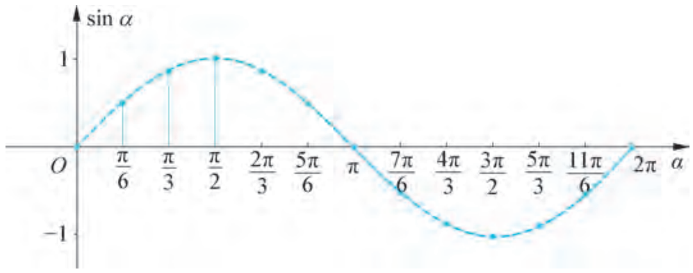


图 7-2-6

思　考

从例 3 的表与所画的图中，你能得到什么结论？

由例 3 可知，对于每一个实数 α，都有唯一实数 $\sin\alpha$ 与 α 对应，故 $\sin\alpha$ 是 α 的函数. 同理，$\cos\alpha$ 也是 α 的函数. 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，角 α 的终边在 y 轴上，故有 $x=0$，这时 $\tan\alpha$ 无意义. 除此之外，对于每一个实数 $\alpha\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right)$，有唯一实数 $\tan\alpha$ 与 α 对应，因此 $\tan\alpha$ 也是 α 的函数. $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 分别叫作角 α 的正弦函数、余弦函数、正切函数. 以上三种函数都称为 α 的**三角函数**（trigonometric function）.

由定义可知，正弦函数、余弦函数、正切函数的值在各个象限的符号如图 7-2-7 所示.

正弦函数值的符号与 y 的符号相同，余弦函数值的符号与 x 的符号相同.

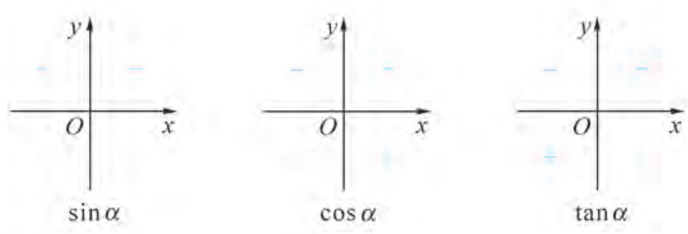


图 7-2-7

例 4　确定下列正弦、余弦、正切值的符号：

(1) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$；　　(2) $\cos(-465^\circ)$；　　(3) $\tan\dfrac{11\pi}{3}$.

解　(1) 因为 $\dfrac{7\pi}{12}$ 是第二象限角，所以 $\sin\dfrac{7\pi}{12}>0$.

(2) 因为 $-465^\circ=-2\times360^\circ+255^\circ$，即 -465° 是第三象限角，所以 $\cos(-465^\circ)<0$.

(3) 因为 $\dfrac{11\pi}{3}=2\pi+\dfrac{5\pi}{3}$，即 $\dfrac{11\pi}{3}$ 是第四象限角，所以 $\tan\dfrac{11\pi}{3}<0$.

练 习

1. 已知角 α 的终边经过点 P，求 α 的正弦、余弦、正切值.

(1) $P(3,\ 4)$； (2) $P(-3,\ 4)$； (3) $P(0,\ 5)$； (4) $P(2,\ 0)$.

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(-x,\ -6)$，且 $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，求 x 的值.

3. 填表：

角 α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数								
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\tan\alpha$								

4. 设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 中，哪些有可能取负值？

5. 确定下列各角的正弦、余弦、正切值的符号：

(1) 885°； (2) -395°； (3) $\dfrac{19\pi}{6}$； (4) $-\dfrac{25\pi}{3}$.

6. 已知 $\cos\alpha<0$，且 $\tan\alpha<0$，确定角 α 是第几象限角.

下面我们来研究正弦函数值、余弦函数值、正切函数值的几何表示.

由于 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ 与点 $P(x,\ y)$ 在角 α 终边上的位置无关，为简单起见，我们取 $r=1$，即选取角 α 终边与单位圆（圆心在原点、半径等于单位长度的圆）的交点为 $P(x,\ y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$（图 7-2-8）.

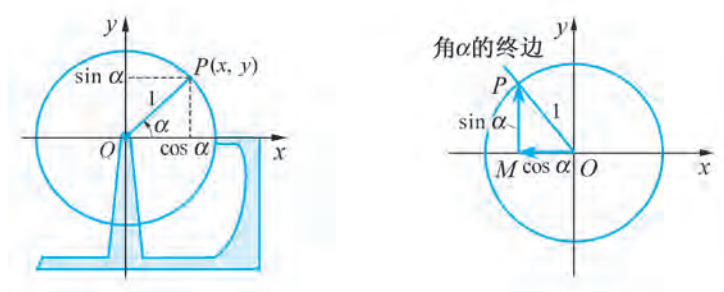


图 7-2-8

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，显然，线段 OM 的长度为 $|x|$.

为了去掉绝对值符号，我们引入有向线段的概念.

规定了方向（即规定了起点和终点）的线段称为**有向线段**. 类似地，可以把规定了正方向的直线称为有向直线. 若有向线段 AB 在有向直线 l 上或与有向直线 l 平行，根据有向线段 AB 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度添上正号或负号，这样所得的数，叫作**有向线段的数量**，记为 AB.

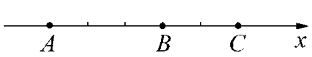


图 7-2-9

如图 7-2-9，x 轴上有三点 A，B，C，则 $AB=3$，$BC=2$，$CB=-2$.

引入有向线段的概念后，如果 $x>0$，有向线段 OM 与 x 轴同向，

其数量为 x；如果 $x<0$，有向线段 OM 与 x 轴反向，其数量也为 x. 故总有 $OM=x$. 同理可知 $MP=y$. 所以，

$$\sin\alpha=MP,\ \cos\alpha=OM.$$

这表明，有向线段 MP，OM 的数量分别等于 α 的正弦、α 的余弦. 因此，我们把有向线段 MP，OM 分别叫作角 α 的**正弦线**、**余弦线**.

阅　读

在锐角三角函数推广至任意角三角函数的过程中，如果我们假设角 α 用弧度表示，且取圆半径 $r=1$（图 7－2－10(1)），

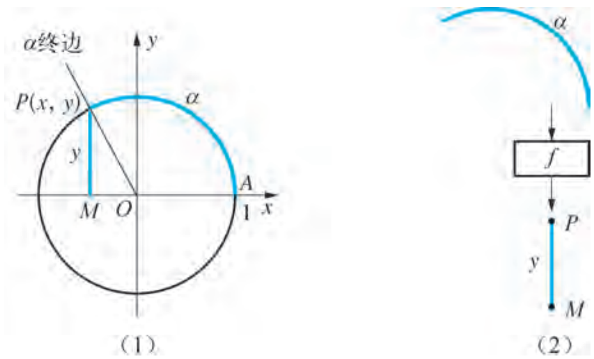


图 7－2－10

那么我们得到 $y=\sin\alpha$.

我们可以这样来理解正弦函数：输入一个实数 α（弧度数），输出唯一的实数 y（点 P 的纵坐标）. 这是一个从实数集 $\mathbf{R}$（所有角的弧度数所成的集合）到闭区间 $[-1,1]$ 上的函数（图 7－2－10(2)）. 也正因为此，今后才可以方便地进行下面的运算：$x+\sin x$，这也表明了引入弧度制的重要性.

探　究

用适当的有向线段来表示第一象限角 α 的正切.

角 α 的终边在 y 轴右侧是指第一象限角或第四象限角，或终边与 x 轴正半轴重合的角.

当角 α 终边在 y 轴的右侧时（图 7－2－11），在角 α 终边上取点 $T(1,y')$，则 $\tan\alpha=\dfrac{y'}{1}=y'=AT$（$A$ 为单位圆与 x 轴正半轴的交点）；当角 α 终边在 y 轴的左侧时（图 7－2－12），在角 α 终边的反向延长线上取点 $T(1,y')$，由于它关于原点的对称点 $Q(-1,-y')$ 在角 α 终边上，所以 $\tan\alpha=\dfrac{-y'}{-1}=y'=AT$.

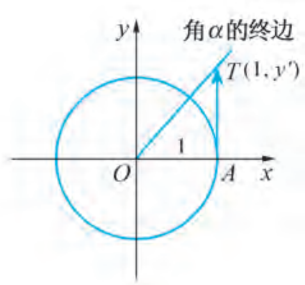


图 7－2－11

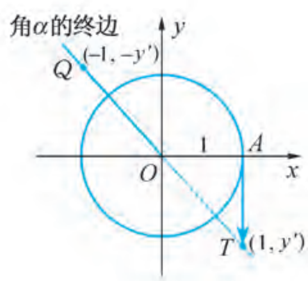


图 7－2－12

即总有

$$\tan\alpha = AT.$$

因此，我们把有向线段 AT 叫作角 α 的正切线.

有向线段 MP，OM，AT 都称为三角函数线.

当角 α 终边在不同象限时，其三角函数线如图 7-2-13 所示：

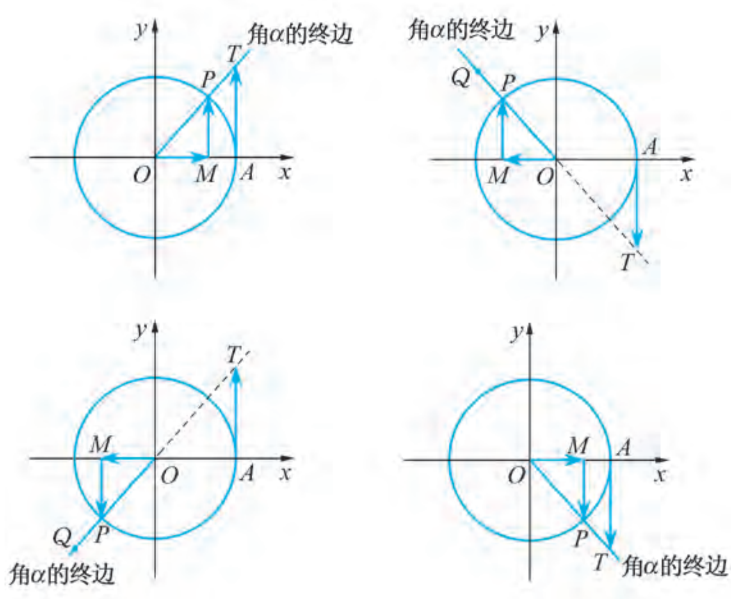
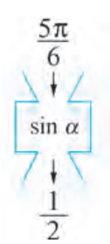


图 7-2-13



当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线分别变成一个点；当角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变成一个点，正切线不存在.

由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应的关系，因此，三角函数可以看成是以实数为自变量的函数. 在弧度制下，正弦函数、余弦函数、正切函数的定义域如下表所示：

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha \middle| \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

思考

根据单位圆中的三角函数线，探究：

（1）正弦函数、余弦函数、正切函数的值域；

（2）正弦函数、余弦函数在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上的单调性；

（3）正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性.

练习

1. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

（1）$\frac{\pi}{3}$；　（2）$\frac{3\pi}{4}$；　（3）$\frac{11\pi}{6}$；　（4）$-\frac{2\pi}{3}$.

2. 根据单位圆中的正弦线，你能发现正弦函数值有怎样的变化规律？

链 接

如果我们分别把表示正切、正弦、余弦的三个比$\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$取倒数，那么又得到三个比，其中：

比值$\dfrac{x}{y}$叫作角 α 的余切，记作 $\cot\alpha$；

比值$\dfrac{r}{y}$叫作角 α 的余割，记作 $\csc\alpha$；

比值$\dfrac{r}{x}$叫作角 α 的正割，记作 $\sec\alpha$.

余切、余割、正割也是以实数为自变量的函数. $\cot\alpha$，$\csc\alpha$，$\sec\alpha$ 分别叫作余切函数、余割函数、正割函数. 它们也都称为三角函数.

7.2.2 同角三角函数关系

$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值都由 α 确定，那么，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 之间有何关系？

设角 α 的终边与单位圆交于 P 点(图 7-2-14)，则点 P 坐标为 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

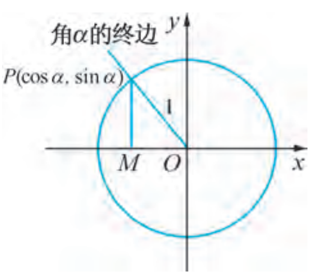


图 7-2-14

由 PO 长为 1，得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

由正切函数的定义知，当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

由此可得，下列同角三角函数之间的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

例 5 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

又 α 是第二象限角，则 $\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$$

例 6 已知 $\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

解 由 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$，得 $\quad\sin\alpha=\dfrac{12}{5}\cos\alpha.$

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\quad\left(\dfrac{12}{5}\right)^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

解得 $\quad\cos^2\alpha=\dfrac{25}{169}.$

又由 $\tan\alpha>0$，知 α 是第一或第三象限角.

若 α 是第一象限角，则

$$\cos\alpha=\frac{5}{13},\ \tan\alpha=\frac{12}{5},\ \sin\alpha=\frac{12}{13};$$

若 α 是第三象限角，则

$$\cos\alpha=-\frac{5}{13},\ \tan\alpha=\frac{12}{5},\ \sin\alpha=-\frac{12}{13}.$$

例 7 化简 $\tan\alpha\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}$，其中 α 是第二象限角.

解 因为 α 是第二象限角，所以

$$\sin\alpha>0,\ \cos\alpha<0.$$

于是 $\tan\alpha\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\tan\alpha\sqrt{\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\tan\alpha\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{|\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1.$$

本书中的三角恒等式，除特殊注明的情况外，都是指等式两边都有意义情况下的恒等式.

例 8 求证：$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

证法 1 因为

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=0,$$

所以 $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

证法 2 因为

$$(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$$

又 $1+\cos\alpha\neq0$，$\sin\alpha\neq0$，所以

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

探 究

你能用图 7-2-15 解释例 8 中求证的等式吗？

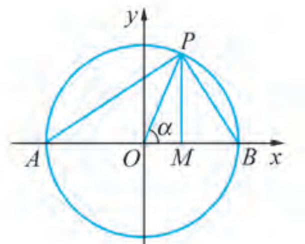


图 7-2-15

练　习

1. 利用三角函数的定义，证明：

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；　　(2) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且 α 为第三象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\theta=2$，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的值.

5. 化简：

(1) $\cos\alpha\tan\alpha$；　　(2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$.

6. 求证：

(1) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

(2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；

(3) $\tan^2\alpha\sin^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$.

7.2.3 三角函数的诱导公式

由三角函数定义可以知道：终边相同的角的同一三角函数值相等. 即有

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}),$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}),\qquad\text{（公式一）}$$
$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

除了“终边相同”这样非常特殊的关系之外还有一些角，它们的终边具有另外的某种特殊关系，如两个角的终边关于坐标轴对称、关于原点对称等. 那么它们的三角函数值有何关系呢？

如果角 α 的终边与角 β 的终边关于 x 轴对称，那么 α 与 β 的三角函数值之间有什么关系？

设角 α，β 的终边分别与单位圆交于点 P，P'，则点 P 和点 P' 关于 x 轴对称(图 7-2-16).

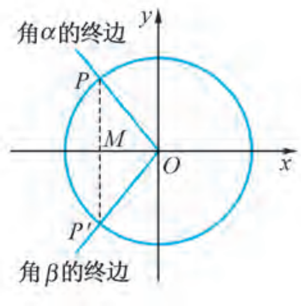


图 7-2-16

又根据三角函数的定义，点 P 的坐标是 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos\beta,\ \sin\beta)$，则有

$$\sin\beta=-\sin\alpha,\ \cos\beta=\cos\alpha.$$

由同角三角函数关系得

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

特别地，角 $-\alpha$ 与角 α 的终边关于 x 轴对称，则有

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\qquad \text{（公式二）}$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

在平面直角坐标系内，点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 与点 $P_2(x_2,\ y_2)$ 关于 x 轴对称的充要条件是 $\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=-y_2.\end{cases}$

由公式二，你可得到三角函数的什么性质？

若角 α 的终边与角 β 的终边关于 y 轴对称（图 7-2-17）.

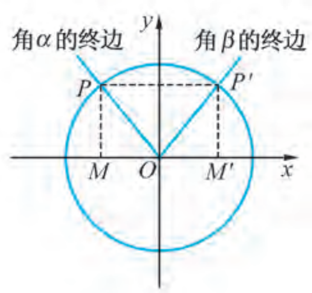


图 7-2-17

同理可得

$$\sin\beta=\sin\alpha,\ \cos\beta=-\cos\alpha,\ \tan\beta=-\tan\alpha.$$

特别地，角 $\pi-\alpha$ 与角 α 的终边关于 y 轴对称，则有

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\qquad \text{（公式三）}$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.$$

在平面直角坐标系内，点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 与点 $P_2(x_2,\ y_2)$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $\begin{cases}x_1=-x_2,\\ y_1=y_2.\end{cases}$

若角 α 的终边与角 β 的终边关于原点 O 对称(图 7-2-18).同理可得

$$\sin\beta=-\sin\alpha,\ \cos\beta=-\cos\alpha,\ \tan\beta=\tan\alpha.$$

在平面直角坐标系内,点 $P_1(x_1,y_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2)$ 关于坐标原点对称的充要条件是 $\begin{cases}x_1=-x_2,\\ y_1=-y_2.\end{cases}$

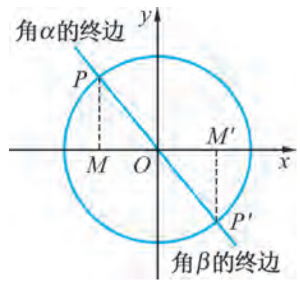


图 7-2-18

特别地,角 $\pi+\alpha$ 与角 α 的终边关于原点 O 对称,则有

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\qquad\text{(公式四)}$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.$$

思 考

由公式二、三,你能推导出公式四吗?根据公式二、三、四中的任意两组公式,你能推导出另外一组公式吗?

例 9 求值:

(1) $\sin\frac{7\pi}{6}$; (2) $\cos\frac{11\pi}{4}$; (3) $\tan(-1\ 560^\circ)$.

解 (1) $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

(2) $\cos\frac{11\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

如何将任意角的三角函数转化为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的角的三角函数?

(3) $\tan(-1\ 560^\circ)=-\tan 1\ 560^\circ=-\tan(4\times360^\circ+120^\circ)$

$=-\tan 120^\circ=-\tan(180^\circ-60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

例 9 表明,利用上面四个公式可将关于任意角的三角函数转化为区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的角的三角函数.

例 10 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=1-\cos x$; (2) $g(x)=x-\sin x$.

解 (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=1-\cos(-x)=1-\cos x=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为函数 $g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,且

$$g(-x)=-x-\sin(-x)=-x-(-\sin x)$$
$$=-(x-\sin x)=-g(x),$$

所以 $g(x)$是奇函数.

练 习

1. 求值:

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; (2) $\cos(-60^\circ)$; (3) $\tan\dfrac{7\pi}{6}$; (4) $\sin 225^\circ$.

2. 求值:

(1) $\sin 150^\circ$; (2) $\tan 1\,020^\circ$; (3) $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$; (4) $\sin(-750^\circ)$.

3. 化简:

(1) $\sin(\pi+\alpha)\cos(-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)$;

(2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\tan(-\pi-\alpha)$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=|\sin x|$; (2) $f(x)=\sin x\cos x$.

若角 α 的终边与角 β 的终边关于直线$y=x$ 对称(图 7-2-19),设角 α,β 的终边分别与单位圆交于点 P, P'.

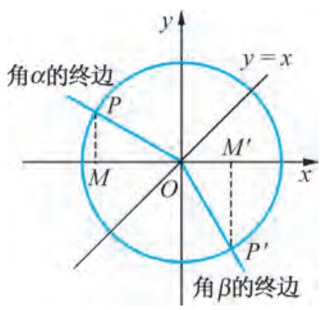


图 7-2-19

根据三角函数的定义,点 P 的坐标是($\cos\alpha$, $\sin\alpha$),点 P' 的坐标是($\cos\beta$, $\sin\beta$). 又点 P 和点 P' 关于直线 $y=x$ 对称,则

$$\cos\alpha=\sin\beta,\quad \sin\alpha=\cos\beta.$$

特别地,角 α 与角$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边关于直线 $y=x$ 对称,因此

在平面直角坐标系内,点 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 关于直线 $y=x$ 对称的充要条件是 $\begin{cases}x_1=y_2,\\ y_1=x_2.\end{cases}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$
(公式五)

利用公式二和公式五,可得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

则有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$
（公式六）

你能利用单位圆中的三角函数线导出公式六吗？

思　考

你能推导出 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$与 $\tan\alpha$ 之间的关系吗？

公式一、二、三、四、五、六都叫作三角函数的**诱导公式**.

诱导公式揭示了终边具有某种对称关系的两个角三角函数之间的关系. 换句话说，诱导公式实质是将终边对称的图形关系“翻译”成三角函数之间的代数关系.

例 11　求证：$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$，$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

证明　$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

例 12　已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$，求 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 的值.

分析　注意到 $(15^\circ-\alpha)+(75^\circ+\alpha)=90^\circ$，因此，可将 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 转化为 $\sin(75^\circ+\alpha)$.

解　由 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$，得

$$-105^\circ<75^\circ+\alpha<-15^\circ,$$

则

$$\sin(75^\circ+\alpha)<0.$$

又

$$\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3},$$

所以 $\cos(15^\circ-\alpha)=\cos[90^\circ-(75^\circ+\alpha)]=\sin(75^\circ+\alpha)$

$$=-\sqrt{1-\cos^2(75^\circ+\alpha)}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

练　习

1. 已知 $\cos\alpha=a$，求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$；　(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(3) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$；　(4) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. 已知 $\sin 53.13^\circ=0.8$，求 $\cos 143.13^\circ$ 和 $\cos 216.87^\circ$.

3. 求证：$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$，$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

4. 化简：

(1) $\frac{\cos(\alpha-\pi)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(2) $\frac{\cos(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(3\pi-\alpha)}$.

5. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{1}{5}$，且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$的值.

6. 已知 $\cos(40^\circ-\alpha)=\frac{3}{5}$，且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，求 $\cos(50^\circ+\alpha)$ 的值.

习题 7.2

感受·理解

1. 已知角 α 的终边经过下列各点，求 α 的正弦、余弦、正切值：

(1) $(-8，-6)$；　(2) $(\sqrt{3}，-1)$；

(3) $(-1，1)$；　(4) $(0，-2)$.

2. 利用三角函数的定义求角$\frac{5\pi}{4}$的正弦、余弦、正切值.

3. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\frac{\pi}{4}$；　(2) $-\frac{\pi}{6}$；

(3) $-\frac{3\pi}{4}$；　(4) $\frac{14\pi}{3}$.

4. 求下列各式的值：

(1) $5\sin 90^\circ+2\sin 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\cos 180^\circ$；

(2) $\sin\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}\cos\pi-\frac{1}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}-\cos\pi+\sin\frac{\pi}{2}$.

5. 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\sin 2$；　(2) $\cos 6$；

(3) $\cos(-3)$；　(4) $\tan(-8)$.

6. 分别根据下列条件求函数

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos 2x+3\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

的值：

(1) $x=\frac{\pi}{4}$；　(2) $x=\frac{3\pi}{4}$.

7. 确定下列各式的符号：

(1) $\cos 310^\circ\tan(-108^\circ)$；　(2) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{5}\tan\frac{11\pi}{6}$.

8. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限角或哪个坐标轴上的角：

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$；　(2) $\sin\theta\cos\theta>0$；

(3) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$；　(4) $|\sin\theta|=\sin\theta$.

9. (1) 已知 $\cos\theta=\frac{12}{13}$,且 θ 为第四象限角,求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值;

(2) 已知 $\sin x=-\frac{1}{3}$,求 $\cos x$ 和 $\tan x$ 的值.

10. 求下列各式的值:

(1) $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$;　　(2) $\sin\frac{26\pi}{3}$;

(3) $\cos 1\,650^\circ$;　　(4) $\sin 1\,740^\circ$.

11. 已知 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, 求证: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

12. 化简:

(1) $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$,其中 θ 为第二象限角;

(2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$,其中 α 为第四象限角.

13. 证明下列恒等式:

(1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

(2) $\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

思考·运用

14. 已知 $\tan\alpha=3$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

15. (1) 设 $\tan\alpha=2$,计算 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

(2) 设 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,计算 $\frac{1}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$.

16. 已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$,求 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$的值.

17. 设角 θ 的终边经过点 $P(4a, -3a)$ $(a\neq 0)$,求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值.

18. 利用单位圆分别写出符合下列条件的角 α 的集合:

(1) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$;　　(2) $\sin\alpha>-\frac{1}{2}$.

19. (1) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$,求 $\sin\alpha\cos\alpha$ 及 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ 的值;

(2) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$,求 $\tan\alpha$ 的值.

探究·拓展

20. 当角 α, β 满足什么条件时,有 $\sin\alpha=\sin\beta$?

21. 设 α 为锐角(单位为弧度),试利用单位圆及三角函数线,比较 α, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ 之间的大小关系.

7.3 三角函数的图象和性质

三角函数是刻画圆周运动的数学模型，那么，“周而复始”的基本特征必定蕴含在三角函数的性质之中.

● 三角函数具有哪些性质?

7.3.1 三角函数的周期性

由单位圆中的三角函数线可知，正弦、余弦函数值的变化呈现出周期现象. 每当角增加(或减少)2π，所得角的终边与原来角的终边相同，故两角的正弦、余弦函数值也分别相同，即有

$$\sin(2\pi+x)=\sin x,\ \cos(2\pi+x)=\cos x.$$

正弦函数和余弦函数所具有的这种性质称为周期性.

● 如何用数学语言刻画函数的周期性?

若记 $f(x)=\sin x$，则对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2\pi)=f(x)$. 一般地，

> 设函数 $y=f(x)$的定义域为 A.
>
> 如果存在一个非零的常数 T，使得对于任意的 $x\in A$，都有 $x+T\in A$，并且
>
> $$f(x+T)=f(x),$$
>
> 那么函数$f(x)$就叫作**周期函数**(periodic function)，非零常数 T 叫作这个函数的**周期**(period).

易知 2π 是正弦函数和余弦函数的周期，且 4π，6π，…以及-2π，-4π，…都是正弦函数和余弦函数的周期，即每一个常数 $2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$都是这两个函数的周期.

思　考

一个周期函数的周期有多少个? 周期函数的图象具有什么特征?

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么，这个最小的正数就叫作 $f(x)$的**最小正周期**(minimum positive period).

例如，2π 是正弦函数的所有周期中的最小正数(同学们可从单位圆中正弦线的变化特征看出这一结论，其证明见本节后“链接”)，所以

2π 是正弦函数的最小正周期；同样地，2π 也是余弦函数的最小正周期.

因此，正弦函数和余弦函数都是周期函数，$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 都是它们的周期，它们的最小正周期都是 2π.

通过观察正切线不难发现，正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，并且最小正周期是 π.

今后本书中所说的周期，如果不加特别说明，一般都是指函数的最小正周期.

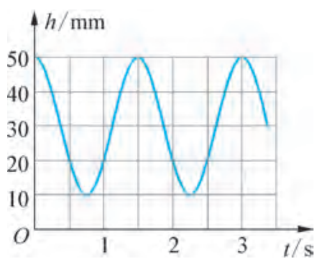


图 7-3-1

例 1　已知作周期性运动的钟摆的高度 h(单位：mm)与时间 t(单位：s)之间的函数关系如图 7-3-1 所示.

(1) 求该函数的周期；

(2) 求 $t=10$ s 时钟摆的高度.

解　(1) 由图象可知，该函数的周期为 1.5 s.

(2) 设 $h=f(t)$，由函数 $f(t)$ 的周期为 1.5 s，可知

$$f(10)=f(1+6\times 1.5)=f(1)=20.$$

所以 $t=10$ s 时钟摆的高度为 20 mm.

例 2　求函数 $f(x)=\cos 2x$ 的周期.

解　设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T)=f(x)$，即 $\cos 2(x+T)=\cos 2x$ 对任意实数 x 都成立. 也就是 $\cos(u+2T)=\cos u$ 对任意实数 u 都成立，其中 $u=2x$.

由 $y=\cos u$ 的周期为 2π，可知使得 $\cos(u+2T)=\cos u$ 对任意实数 u 都成立的 $2T$ 的最小正值为 2π，可知 $2T=2\pi$，即 $T=\pi$.

所以 $f(x)=\cos 2x$ 的周期为 π.

一般地，

> 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$) 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$(其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$)的周期为 $\dfrac{\pi}{\omega}$.

若函数 $y=f(x)$ 的周期为 T，则函数 $y=Af(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|\omega|}$(其中 A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega\neq 0$).

例如，对于函数 $g(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可直接由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 求得 $g(x)$ 的周期为 4π.

练　习

1. 判断下列说法是否正确，并简述理由：

(1) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\neq\sin x$，则 $\dfrac{2\pi}{3}$ 一定不是函数 $y=\sin x$ 的周期；

(2) $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 时，$\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin x$，则 $\dfrac{2\pi}{3}$ 一定是函数 $y=\sin x$ 的周期.

2. 求下列函数的周期：

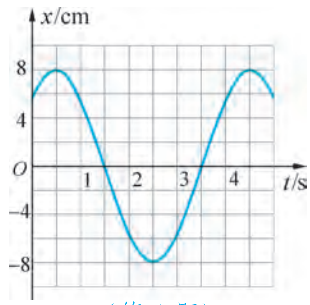
（1）$y=2\cos 3x$；　　　　（2）$y=\sin\dfrac{x}{3}$.

3. 设 k 为正数，若函数 $f(x)=\sin\left(kx+\dfrac{\pi}{5}\right)$的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{3}$，求 k 的值.

4. 已知弹簧振子对平衡位置的位移 x（单位：cm）与时间 t（单位：s）之间的函数关系如图所示.

（1）求该函数的周期；

（2）求 $t=10.5$ s 时弹簧振子对平衡位置的位移.



（第 4 题）

链　接

2π 是正弦函数的最小正周期

由诱导公式易知，2π 是正弦函数的一个周期. 下面用反证法证明 2π 是它的最小正周期.

假设 $0<T<2\pi$，且 T 是正弦函数的周期，则对任意实数 x，都有 $\sin(x+T)=\sin x$ 成立. 令 $x=0$，得 $\sin T=0$，又 $0<T<2\pi$，故 $T=\pi$，从而对任意实数 x，都有 $\sin(x+\pi)=\sin x$ 成立，与 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)\neq\sin\dfrac{\pi}{2}$ 矛盾，故正弦函数没有比 2π 小的正周期.

由此可知，2π 是正弦函数的最小正周期.

7.3.2　三角函数的图象与性质

为了更加直观地研究三角函数的性质，可以先作出它们的图象.

● 怎样作出三角函数的图象？

先画正弦函数的图象. 由于 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，故只要画出在$[0,\ 2\pi]$上的图象，然后由周期性就可以得到整个图象. 下面我们借助正弦线来画出 $y=\sin x$ 在$[0,\ 2\pi]$上的图象.

首先，我们来作坐标为$(x_0,\ \sin x_0)$的点 S（不妨设 $x_0>0$）.

如图 7-3-2 所示，在 x 轴上任取一点 O'，以 O' 为圆心，单位长为半径作圆. 在$\odot O'$中，设$\overset{\frown}{AP}$的长为 x_0（即$\angle AO'P=x_0$），则 $MP=\sin x_0$. 所以点 $S(x_0,\ \sin x_0)$是以$\overset{\frown}{AP}$的长为横坐标，正弦线 MP 的数量为纵坐标的点.

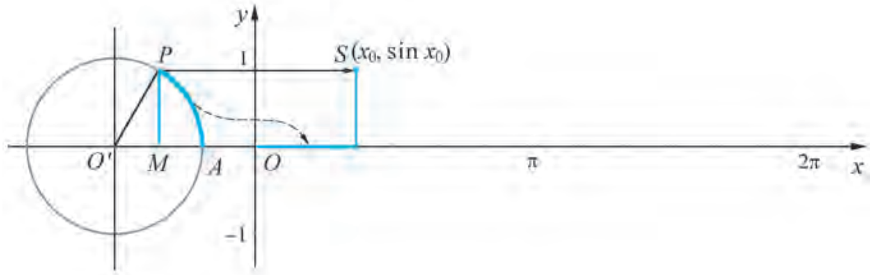


图 7－3－2

知道如何作出函数 $y=\sin x$ 图象上的一个点，就可作出一系列点. 例如，在 $\odot O'$ 中，作出对应于

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{11\pi}{6}$$

的角及相应的正弦线. 相应地，把 x 轴上从 0 到 2π 这一段分成 12 等份. 把角 x 的正弦线向右平移，使它的起点与 x 轴上表示数 x 的点重合，再用光滑曲线把这些正弦线的终点连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图象，如图 7－3－3 所示.

在 GGB 等软件中，可方便地利用正弦线得到正弦函数的图象.

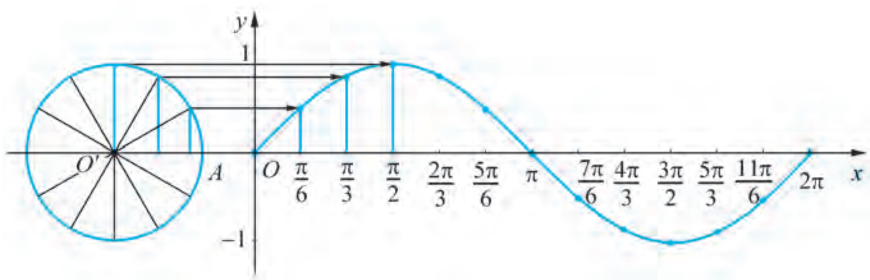


图 7－3－3

最后我们只要将函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象向左、右平移（每次 2π 个单位），就可以得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象（图 7－3－4）. 正弦函数的图象叫作**正弦曲线**（sine curve）.

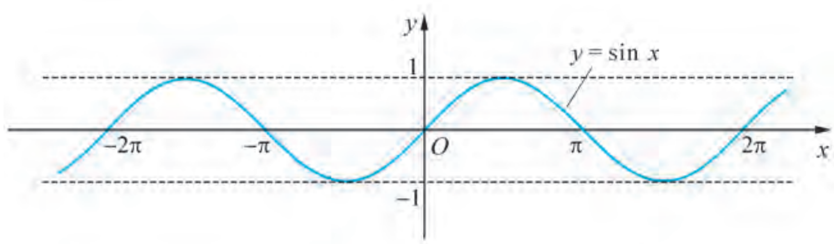


图 7－3－4

以上是借助正弦线描点来作出正弦曲线，也可以通过列表描点来作出正弦曲线，或利用图形计算器、计算机来作出正弦曲线.

信息技术

在 Excel 中可用“描点连线”的方法绘制正弦曲线，步骤如下.

（1）设置角（弧度）：在单元格 A1，A2 内分别输入 0，0.1，选中 A1，A2 后拖拽填充柄至单元格出现 6.3 为止.

在[0, 6.3]上作图，即作出正弦函数在一个周期内的图象.

（2）计算正弦值：在 B1 内输入“$=\sin(\mathrm{A1})$”，双击 B1 的填充柄即得到与第一列相对应的正弦值.

（3）成图：光标置于数据区任一位置，按“插入/图表/散点图”选择“无数据点平滑散点图”，点击“完成”（图 7 - 3 - 5）.

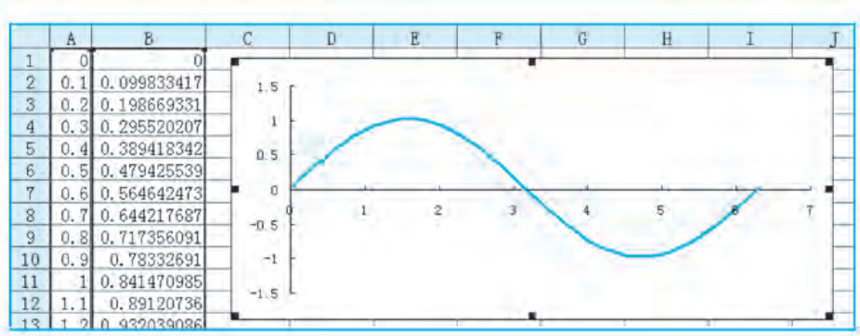


图 7 - 3 - 5

由图 7 - 3 - 5 可以看出，函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象上起着关键作用的点有以下五个：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

事实上，描出五点后，函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象形状就基本确定了. 因此在精确度要求不太高时，我们常常先找出这五个关键点，然后用光滑的曲线将它们连接起来，就得到函数的简图. 这种作图方法称为“五点法”.

由 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，知 $y=\cos x$ 图象可由 $y=\sin x$ 图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位得到. 余弦函数的图象叫作**余弦曲线**(cosine curve).

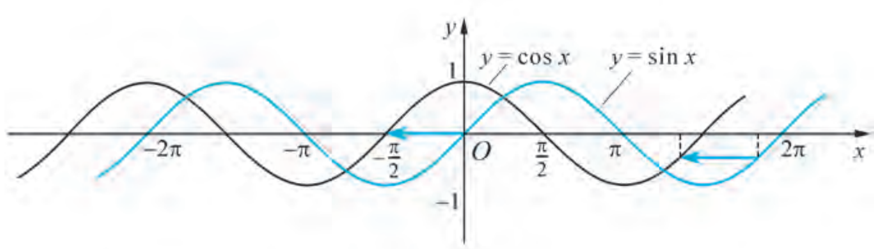


图 7 - 3 - 6

你能用余弦线作出余弦曲线吗?

观察正弦曲线和余弦曲线（图 7 - 3 - 6），我们得到正弦函数、余弦函数有以下主要性质.

（1）定义域

正弦函数、余弦函数的定义域都是实数集 **R**.

（2）值域

由正弦曲线和余弦曲线可以发现，

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1,\ -1\leqslant \cos x\leqslant 1,$$

而且 $\sin x$，$\cos x$ 都可以取 $[-1,\ 1]$ 中的一切值. 这说明正弦函数、余弦函数的值域都是 $[-1,\ 1]$. 其中正弦函数当且仅当

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

时取得最大值 1，当且仅当

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

时取得最小值 -1；而余弦函数当且仅当

$$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

时取得最大值 1，当且仅当

$$x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$$

时取得最小值 -1.

(3) 周期性

正弦函数和余弦函数都是周期函数，并且周期都是 2π.

(4) 奇偶性

正弦函数是奇函数，其图象关于原点对称；余弦函数是偶函数，其图象关于 y 轴对称.

(5) 单调性

由单位圆中的三角函数线，也容易发现这些性质.

由正弦曲线可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1.

这个变化情况如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	0	1	0	-1

由正弦函数的周期性可知：正弦函数在每一个闭区间

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$$

上都单调递增，其值由 -1 增大到 1；在每一个闭区间

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$$

上都单调递减，其值由 1 减小到 -1.

思 考

试讨论余弦函数的单调性.

例 3 用“五点法”画出下列函数的简图：

(1) $y=2\cos x$，$x\in\mathbf{R}$； (2) $y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$.

解 (1) 先用“五点法”画一个周期的图象，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$2\cos x$	2	0	-2	0	2

描点画图，然后由周期性得整个图象(图 7－3－7).

函数 $y=2\cos x$ 与 $y=\cos x$ 的图象之间有何联系？

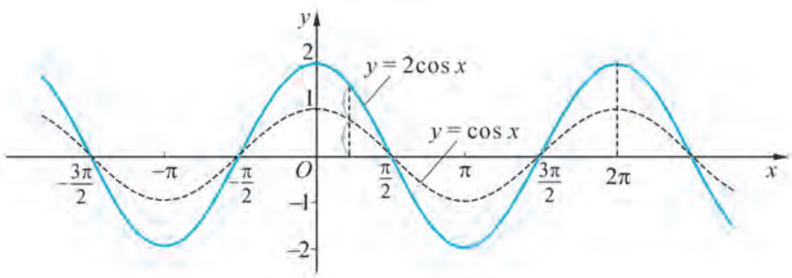


图 7－3－7

(2) 先用“五点法”画一个周期的图象，列表：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

描点画图，然后由周期性得出整个图象(图 7－3－8).

函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin x$ 的图象之间有何联系？

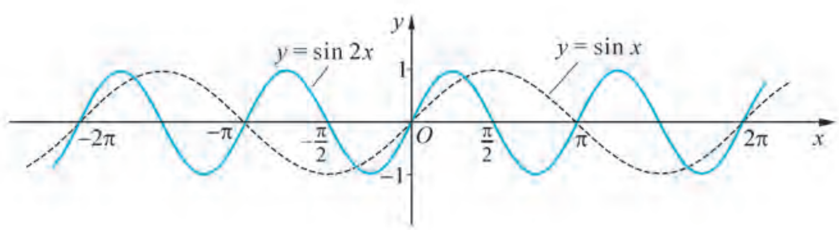


图 7－3－8

例 4 求下列函数的最大值及取得最大值时自变量 x 的集合：

(1) $y=\cos\frac{x}{3}$； (2) $y=2-\sin 2x$.

解 (1) 函数 $y=\cos\frac{x}{3}$ 的最大值为 1.

因为使 $\cos z$ 取得最大值的 z 的集合为

$$\{z \mid z = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

令 $z = \dfrac{x}{3}$，由 $\dfrac{x}{3} = 2k\pi$，得 $x = 6k\pi$.

所以使函数 $y = \cos\dfrac{x}{3}$ 取得最大值的 x 的集合为

$$\{x \mid x = 6k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

（2）函数 $y = 2 - \sin 2x$ 的最大值为 $2-(-1)=3$.

因为使 $\sin z$ 取得最小值的 z 的集合为

$$\left\{z \,\middle|\, z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

令 $z = 2x$，由 $2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$，得 $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

所以使函数 $y = 2 - \sin 2x$ 取得最大值的 x 的集合为

$$\left\{x \,\middle|\, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

例 5 不求值，分别比较下列各组中两个三角函数值的大小：

（1）$\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ 与 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$；　　（2）$\cos\dfrac{4\pi}{7}$ 与 $\cos\dfrac{5\pi}{8}$.

解 （1）因为 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right]$ 上是增函数，且

$$-\frac{\pi}{7} > -\frac{\pi}{5},$$

所以
$$\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right).$$

（2）因为 $y = \cos x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 上是减函数，且

$$\frac{4\pi}{7} < \frac{5\pi}{8},$$

所以
$$\cos\frac{4\pi}{7} > \cos\frac{5\pi}{8}.$$

练　习

1. 下列各等式有可能成立吗？为什么？
   （1）$2\cos x = 3$；　　（2）$\sin^2 x = 0.5$.
2. （1）函数 $y = \sin x$ 的图象是轴对称图形吗？若是，写出它的一条对称轴.
   （2）函数 $y = \sin x$ 的图象是中心对称图形吗？若是，写出它的一个对称中心.
3. 画出下列函数的简图，并说明这些函数的图象与正弦曲线的区别和联系：
   （1）$y = \sin x - 1$；　　（2）$y = 2\sin x$.
4. 画出下列函数的简图，并说明这些函数的图象与余弦曲线的区别和联系：
   （1）$y = 1 + \cos x$；　　（2）$y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

5. 求下列函数的最小值及取得最小值时自变量 x 的集合：

(1) $y=-2\sin x$；　　(2) $y=2-\cos\dfrac{x}{3}$.

6. 函数 $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是(　　).

A. $[-1, 1]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

7. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=3\cos x$.

8. 不求值，分别比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 250^\circ$ 与 $\sin 260^\circ$；　　(2) $\cos\dfrac{15\pi}{8}$ 与 $\cos\dfrac{14\pi}{9}$.

由于正切函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数，故只需先画出一个周期内的图象，然后由周期性，就可得出整个图象.

先利用正切线来画出函数 $y=\tan x\left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$的图象(图 7－3－9).

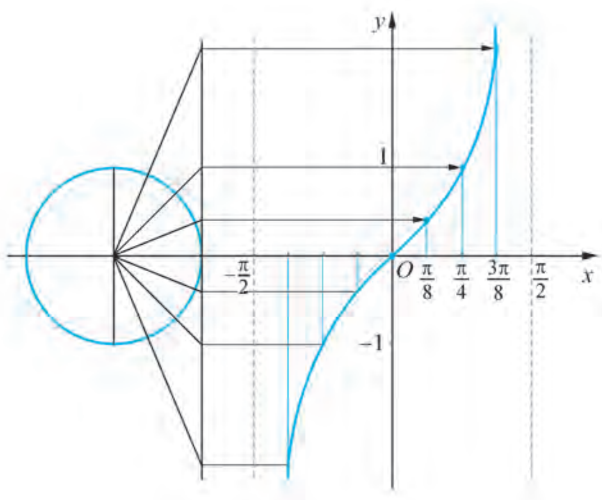


图 7－3－9

把上述图象向左、右平移(每次 π 个单位)，就可得到正切函数的图象(图 7－3－10)，并把它称为**正切曲线**(tangent curve).

正切曲线有哪些主要特征？图中的虚线与它有什么关系？

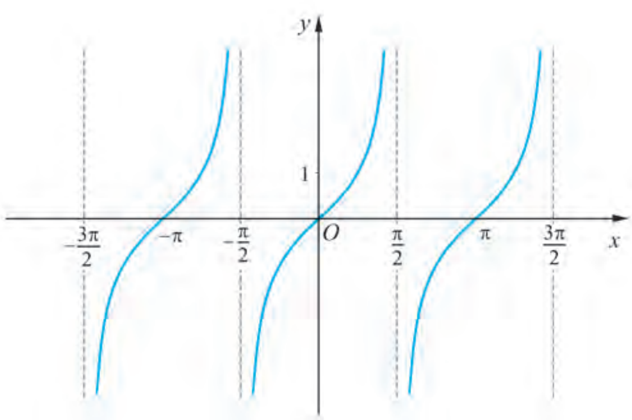


图 7－3－10

由正切函数的图象可以得到正切函数的主要性质如下.

(1) 定义域: $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2) 值域: 实数集 **R**.

(3) 周期性: 正切函数是周期为 π 的周期函数.

(4) 奇偶性: 奇函数. 图象关于原点对称.

(5) 单调性: 每个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$ 都是函数 $y = \tan x$ 的增区间.

例 6 求函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域.

解 因为 $y = \tan z$ 的定义域为

$$\left\{z \middle| z \in \mathbf{R} \text{ 且 } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

令 $z = 2x - \frac{\pi}{4}$, 由 $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, 得 $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

所以 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是

$$\left\{x \middle| x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

练 习

1. 观察正切函数的图象,分别写出满足下列条件的 x 的集合:

   (1) $\tan x = 0$; (2) $\tan x < 0$.

2. 求下列函数的定义域:

   (1) $y = \tan 3x$; (2) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; (3) $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. 不求值,判断下列各式的符号:

   (1) $\tan 138° - \tan 143°$; (2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

阅 读

正切、余切等三角函数的由来

古人立杆测日影以定时间,后来发展成为日晷,在中国有周公测景的记载(约公元前 1100 年). 希腊泰勒斯(Thales,约公元前 625—前 547)利用日影确定金字塔的高. 我国唐代一行(原名张遂,683—727)创制《大衍历》,在实测的基础上利用三次内插法算出每个节气初日 8 尺之表的日影长,实际上相当于一个正切表.

由日影的测量就逐步形成了正切和余切的概念.

阿拉伯天文学家、数学家巴塔尼(al-Battānī,约 858—929)也立杆测日影,把杆子 AB 插在平地上,日影 $l = CB$ 称为"直阴影"(图 7-3-11). 设太阳仰角为 α,则日影长为(用现代符号)

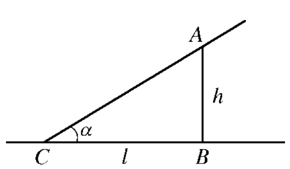


图 7-3-11

$$l = h \cot \alpha.$$

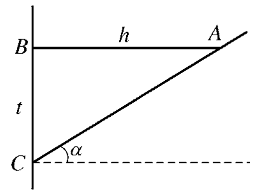


图 7-3-12

又把杆子水平地插在竖直的墙上(图 7-3-12)，日影 $t=CB$ 叫作“反阴影”，它和太阳仰角 α 的关系是

$$t=h\tan\alpha.$$

公元 920 年左右，巴塔尼编制了从 0°到 90°的每隔 1°的余切表. 后来，另一位阿拉伯天文学家、数学家阿布·瓦法(Abū'l-Wafā，940—998)编制了每隔 10′的正弦表和正切表，他还首次引入正割和余割，可惜没有引起同时代人的注意.

正切、余切的现代名称出现得很晚，丹麦数学家芬克(Thomas Fink，1561—1656)在 1583 年著《圆的几何》才用 tangent 代替“反阴影”，一直沿用至今.

16 世纪时，天文观测日益精密，迫切需要更为精确的三角函数表. 天文学家哥白尼的学生雷蒂库斯(G. J. Rheticus，1514—1574)重新给出三角函数的定义，即把它定义为直角三角形的边长之比，并首次编制全部六个三角函数表.

17 世纪时，现在通用的六个三角函数的符号陆续由不同的学者引入. 18 世纪时，由于瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)的使用，这些符号得以推广.

7.3.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

如图 7-3-13，摩天轮的半径 r 为 40 m，圆心 O 距地面的高度为 48 m，摩天轮做逆时针匀速转动，每 30 min 转一圈. 摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处. 如何确定在时刻 t(min)时，点 P 距离地面的高度 H?

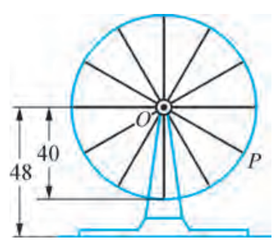


图 7-3-13

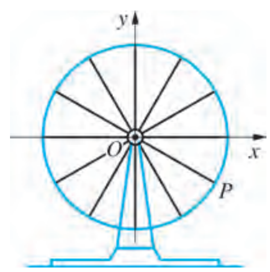


图 7-3-14

取点 O 为坐标原点，水平线为 x 轴，建立如图 7-3-14 所示的直角坐标系.

设 $P(x, y)$，则点 P 距离地面的高度 $H=y+48$.

又 $\dfrac{y}{r}=\sin\alpha$，其中 $r=40$，α 为在时刻 t(min)时点 P 所对应的角，则

$$\alpha=\frac{2\pi}{30}t+\varphi.$$

又 $t=0$ 时，点 P 位于最低点，故取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，从而

$$\alpha=\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}.$$

所以
$$y=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$H=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+48.$$

在物理和工程技术的许多实际问题中，经常会遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A>0$，$\omega>0$）的函数. 在不同现象中，其中的参数 A，ω，φ 有不同的实际含义. 例如，本问题中，A 表示摩天轮的半径，ω 表示摩天轮转动的角速度，φ 表示点 P 的初始位置所对应的角.

对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，我们首先想到，它能否转化为三角函数 $y=\sin x$ 来研究.

● 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图象与 $y=\sin x$ 的图象有什么关系呢？

作函数 $y=\sin(x+1)$ 和 $y=\sin x$ 的图象（图 7-3-15）.

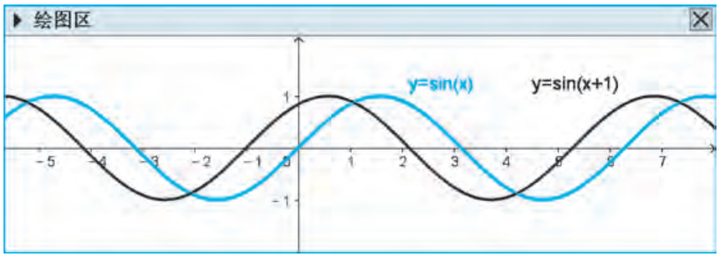


图 7-3-15

从图 7-3-15 中可以看出，函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象上横坐标为 $t-1$ 的点的纵坐标，与函数 $y=\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标相同. 这表明，点 $(t,\ \sin t)$ 在函数 $y=\sin x$ 的图象上，而点 $(t-1,\ \sin t)$ 在函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象上. 因此，函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平移 1 个单位而得到的.

思　考

函数 $y=\sin(x-1)$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左（当 $\varphi>0$ 时）或向右（当 $\varphi<0$ 时）平移 $|\varphi|$ 个单位长度而得到的.

作函数 $y=3\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的图象（图 7-3-16）.

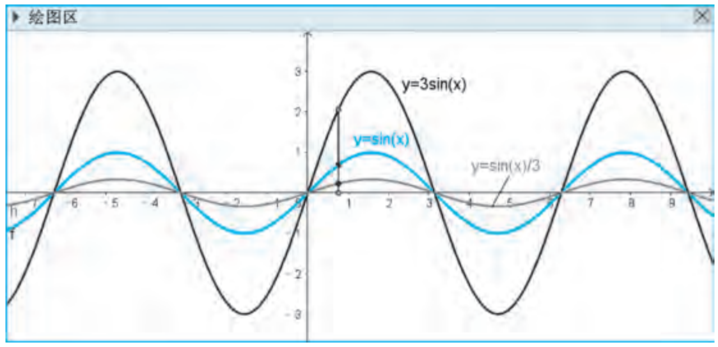


图 7－3－16

从图 7－3－16 中可以看出，函数 $y=3\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标等于函数 $y=\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标的 3 倍. 这表明，点 $(t,\ \sin t)$ 在函数 $y=\sin x$ 的图象上，而点 $(t,\ 3\sin t)$ 在函数 $y=3\sin x$ 的图象上. 因此，函数 $y=3\sin x$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变）而得到的.

思　考

函数 $y=\frac{1}{3}\sin x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

由此，你能得到函数 $y=A\sin x$ 的哪些性质？

一般地，函数 $y=A\sin x(A>0$ 且 $A\neq 1)$ 的图象，可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标变为原来的 A 倍（横坐标不变）而得到的.

作函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的图象（图 7－3－17）.

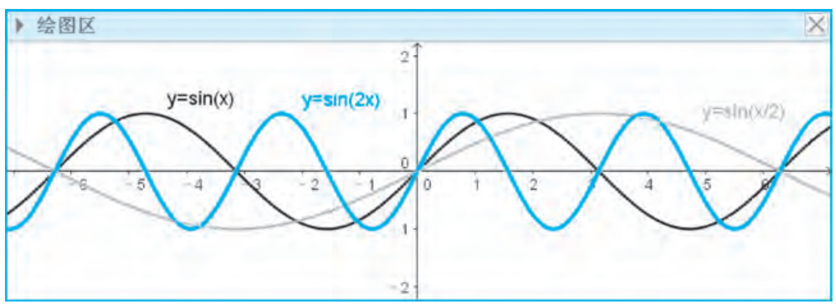


图 7－3－17

从图 7－3－17 中可以看出，函数 $y=\sin 2x$ 图象上横坐标为 $\frac{t}{2}$ 的点的纵坐标，与函数 $y=\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标相同. 这表明，点 $(t,\ \sin t)$ 在函数 $y=\sin x$ 的图象上，而点 $\left(\frac{t}{2},\ \sin t\right)$ 在函数 $y=\sin 2x$ 的图象上. 因此，函数 $y=\sin 2x$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）而得到的.

思　考

函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

由此，你能得到函数 $y=\sin\omega x$ 的哪些性质?

一般地，函数 $y=\sin\omega x(\omega>0$ 且 $\omega\neq1)$ 的图象，可以看作是将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变)而得到的.

最后，我们来研究函数 $y=\sin(2x+1)$ 和 $y=\sin2x$ 的图象之间的关系.

先作出它们的图象(图 7-3-18).

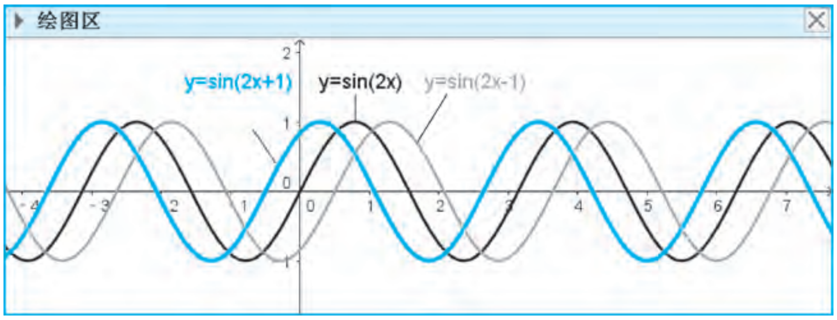


图 7-3-18

若记 $f(x)=\sin2x$，则 $f(x+1)=\sin2(x+1)$，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sin2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

从图 7-3-18 中可以看出，函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象上横坐标为 $t-\frac{1}{2}$ 的点的纵坐标，与函数 $y=\sin2x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标相同. 这表明，点 $(t,\sin2t)$ 在函数 $y=\sin2x$ 的图象上，而点 $\left(t-\frac{1}{2},\sin\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)+1\right)\right)$ 即点 $\left(t-\frac{1}{2},\sin2t\right)$ 在函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象上. 因此，函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin2x$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度而得到的.

类似地，函数 $y=\sin(2x-1)$ 的图象可以看作是将函数 $y=\sin2x$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度而得到的.

一般地，函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\neq0)$ 的图象，可以看作是将函数 $y=\sin\omega x$ 的图象上所有的点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度而得到的.

思　考

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象可以由正弦曲线经过哪些图象变换而得到?画出图象变换的流程图.

例 7　(1) 不用计算机和图形计算器，画出函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的简图；

(2) 根据函数的简图，写出(1)中函数的减区间.

解　(1) 方法 1　先用“五点法”作出一个周期的图象，列表：

先令 $2x-\frac{\pi}{3}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，然后求出 x 和 y.

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
y	0	3	0	-3	0

描点画图，然后由周期性，通过向左、右平移(每次 π 个单位)得出整个图象(图 7-3-19).

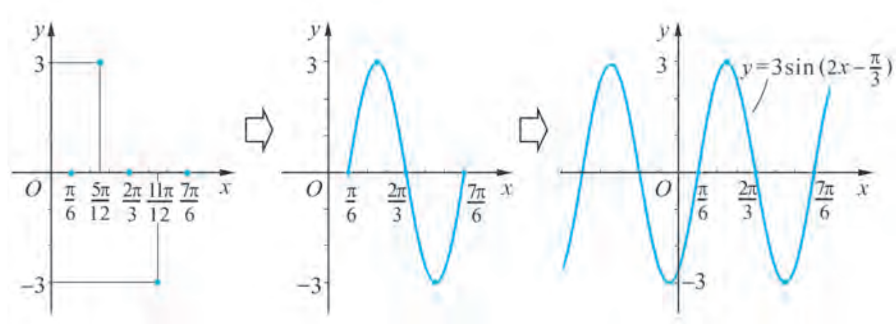


图 7-3-19

$y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后所得图象的表达式为 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

方法 2　作出正弦曲线，并将曲线上每一个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象；再将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上每一个点的纵坐标变为原来的 3 倍(横坐标不变)，即可得函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象(图 7-3-20).

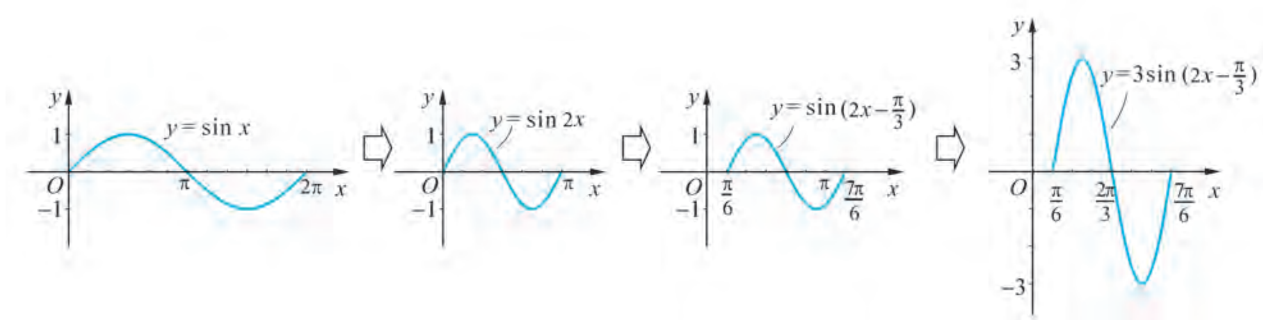


图 7-3-20

上述图象变换的顺序如下：

$$y=\sin x \to y=\sin 2x \to y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \to y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

方法 3　作出正弦曲线，并将其向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的每一

个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象;再将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的每一个点的纵坐标变为原来的 3 倍(横坐标不变),即可得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象(图 7-3-21).

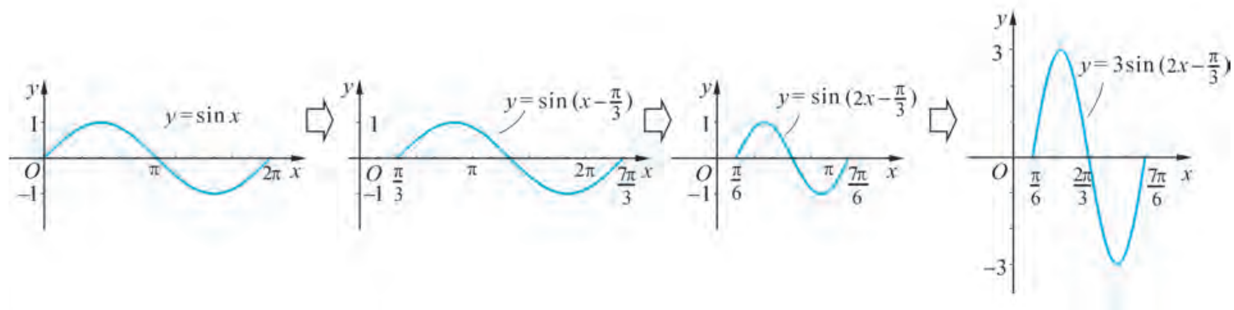


图 7-3-21

上述图象变换的顺序如下:

$$y=\sin x \to y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \to y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \to y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 由函数的图象可知函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间是 $\left[\frac{5}{12}\pi+k\pi,\ \frac{11}{12}\pi+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

信息技术

在 GGB 中绘制 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象:

(1) 建立三个名称分别为 A, ω, φ 的滑动条;

(2) 在输入框中输入"$y=A*\sin(\omega x+\varphi)$"后确认;

(3) 分别拖动三个滑动条,观察图形变化的特点或规律(图 7-3-22).

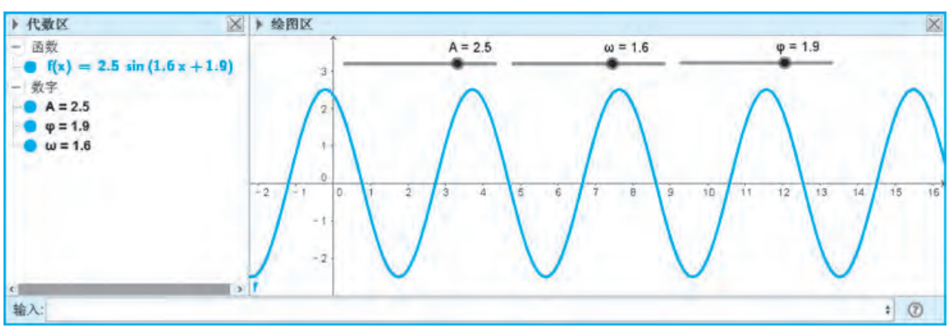


图 7-3-22

思　考

对前面的摩天轮问题,当摩天轮的半径 r 变化时,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中哪个参数会发生变化?怎样变化?当摩天轮的转速发生变化时,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中哪个参数会发生变化?怎样变化?

练 习

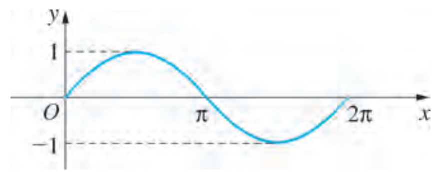
1. 函数 $y=\sin x$ 的图象如图所示，试在这个图上分别画出下列函数的图象，并说明它们是如何由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到的.

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$；

(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$；

(3) $y=2\sin x$；

(4) $y=\sin 2x$.



（第 1 题）

2. 已知函数 $y=3\sin x$ 的图象为 C.

(1) 为了得到函数 $y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象，只需把 C 上的所有点________________；

(2) 为了得到函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象，只需把 C 上的所有点________________；

(3) 为了得到函数 $y=4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象，只需把 C 上的所有点________________.

3. 把函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得到的图象的函数解析式为____________，再将图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），则所得到的图象的函数解析式为____________.

4. 要得到函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象（　　）.

A. 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

5. 已知函数 $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 画出函数的简图；

(2) 指出它可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过哪些变换而得到，并画出图象变换流程图；

(3) 根据函数的简图，写出函数的减区间.

习题 7.3

感受・理解

1. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\dfrac{3}{4}x$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\cos x+2$；　　(2) $y=4\sin x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$；　　(4) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-\cos x}$；　　(2) $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

4. 求下列函数的最大值、最小值以及使函数取得最大值、最小值时的 x 的集合：

(1) $y=1-\frac{1}{2}\cos x$；　　(2) $y=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. 利用函数的性质，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 103^\circ 45'$ 与 $\sin 164^\circ 30'$；　　(2) $\cos\left(-\frac{47\pi}{4}\right)$与 $\cos\left(-\frac{44\pi}{9}\right)$；

(3) $\sin 508^\circ$ 与 $\sin 144^\circ$；　　(4) $\cos 760^\circ$ 与 $\cos(-770^\circ)$；

(5) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$；　　(6) $\tan\frac{7\pi}{8}$ 与 $\tan\frac{\pi}{16}$.

6. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=1+\sin x$；　　(2) $y=-\cos x$.

7. 已知函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 画出函数在长度为一个周期的闭区间上的图象；

(2) 根据函数的简图，写出函数的增区间.

8. 不画图，说明下列函数的图象可由正弦曲线经过怎样的变化得出：

(1) $y=8\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$.

思考・运用

9. 分别写出满足下列条件的 x 的集合：

(1) $\tan x=-1$；　　(2) $\sin x=\frac{1}{2}$.

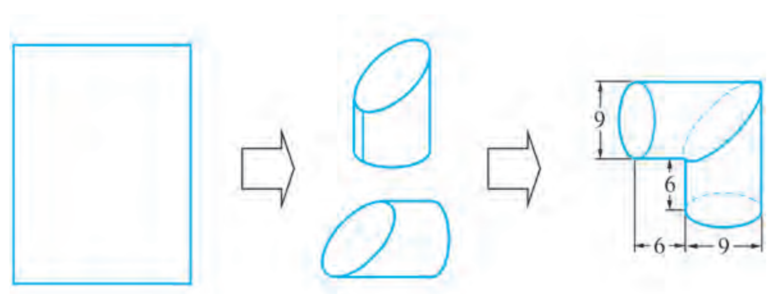
10. 观察正弦曲线和余弦曲线，分别写出满足下列条件的 x 的集合：

(1) $\sin x>0$；　　(2) $\cos x<0$.

探究・拓展

11. 请同学们每三人一组，通过实验、猜想、探索和研讨，共同完成下面的课题，并写出课题研究报告，与其他小组进行交流.

烟筒弯头是由两个圆柱形的烟筒焊在一起做成的，现在要用矩形铁片做成一个直角烟筒弯头(如图，单位：cm)，不考虑焊接处的需要，选用的矩形铁片至少应满足怎样的尺寸？请你设计出一个最合理的裁剪方案.(在矩形铁片上画出的裁剪线应是什么图形？)



(第 11 题)

7.4 三角函数应用

在上一节中，我们研究了 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 等三角函数的图象和性质，利用这些函数可以刻画一些周期现象，建立一些周期性运动的数学模型.

● 怎样用三角函数刻画一些周期性运动呢？

点 P 的横坐标为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$.

我们知道，匀速圆周运动的圆周上点 P 的纵坐标为 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$（其中，$A$ 表示圆的半径，ω 表示圆周转动的角速度，φ 表示点 P 的初始位置所对应的角）.

当物体做简谐运动（单摆、弹簧振子等）时，也是一种周期运动.

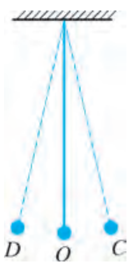


图 7-4-1

图 7-4-1 是单摆的示意图. 点 O 为摆球的平衡位置，如果规定摆球向右偏移的位移为正，那么当摆球到达点 C 时，摆球的位移 y 达到最大值 A；当摆球到达点 O 时，摆球的位移 y 为 0；当摆球到达点 D 时，摆球的位移 y 达到反向最大值 $-A$；当摆球再次到达点 O 时，摆球的位移 y 又为 0；当摆球再次到达点 C 时，摆球的位移 y 又一次达到最大值 A. 这样周而复始，形成周期变化，其运动规律可以用三角函数表达为

$$y=A\sin(\omega x+\varphi).$$

其中，

x 表示时间，y 表示相对于平衡位置的偏离；

A 表示物体运动时离开平衡位置的最大距离，称为振幅；

往复运动一次所需的时间 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 称为这个运动的周期；

单位时间内往复运动的次数 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$ 称为运动的频率；

$\omega x+\varphi$ 称为相位，$x=0$ 时的相位 φ 称为初相位.

图 7-4-2

例 1 在图 7-4-2 中，点 O 为做简谐运动的物体的平衡位置，取向右的方向为物体位移的正方向. 已知振幅为 3 cm，周期为3 s，且物体向右运动到距平衡位置最远处时开始计时. 求：

（1）物体对平衡位置的位移 x（单位：cm）和时间 t（单位：s）之间的函数关系；

（2）该物体在 $t=5$ s 时的位置.

解 （1）设 x 和 t 之间的函数关系为

$$x=3\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi).$$

则由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=3$，可得 $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

当 $t=0$ 时，有 $x=3\sin\varphi=3$，即 $\sin\varphi=1$.

又 $0\leqslant\varphi<2\pi$，可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

因此所求函数关系为 $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $x=3\cos\dfrac{2\pi}{3}t$.

(2) 令 $t=5$，得 $x=3\cos\dfrac{10\pi}{3}=-1.5$，故该物体在 $t=5$ s 时的位置是在 O 点的左侧且距 O 点 1.5 cm 处.

例 2 一半径为 3 m 的水轮如图 7-4-3 所示，水轮圆心 O 距离水面 2 m，已知水轮每分钟逆时针转动 4 圈，且当水轮上点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计算时间.

(1) 将点 P 到水面的距离 z(单位：m. 在水面下，则 z 为负数)表示为时间 t(单位：s)的函数；

(2) 点 P 第一次到达最高点大约要多长时间？

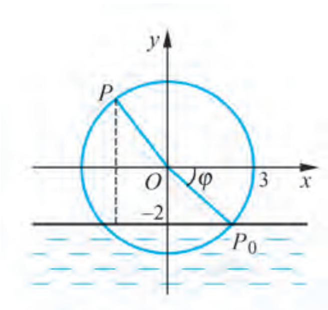


图 7-4-3

解 (1) 如图 7-4-3，建立平面直角坐标系.

设角 $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 是以 Ox 为始边，OP_0 为终边的角.

由 OP 在 t s 内所转过的角为 $\left(\dfrac{4\times2\pi}{60}\right)t=\dfrac{2\pi}{15}t$，可知以 Ox 为始边，OP 为终边的角为 $\dfrac{2\pi}{15}t+\varphi$，故 P 点纵坐标为 $3\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}t+\varphi\right)$，则

$$z=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t+\varphi\right)+2.$$

当 $t=0$ 时，$z=0$，可得 $\sin\varphi=-\dfrac{2}{3}$.

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi\approx-0.73$，故所求函数关系式为

$$z=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-0.73\right)+2.$$

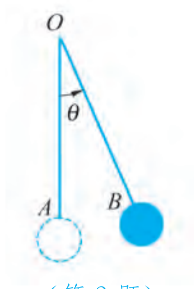
(2) 令 $z=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}t-0.73\right)+2=5$，得 $\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}t-0.73\right)=1$.

取 $\dfrac{2\pi}{15}t-0.73=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $t\approx5.5$.

故点 P 第一次到达最高点大约需要 5.5 s.

练 习

1. 函数 $y=\dfrac{2}{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的振幅、周期、初相位各是多少？
2. 一个单摆如图所示，以 OA 为始边，OB 为终边的角 $\theta(-\pi<\theta<\pi)$ 与时间 t(单位：s) 的函数满足 $\theta=\dfrac{1}{2}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.



（第 2 题）

（1）$t=0$ 时，角 θ 是多少？

（2）单摆频率是多少？

（3）单摆完成 5 次完整摆动共需多长时间？

3. 某一天 6～14 时某地的温度变化曲线近似满足函数 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20\ (x\in[6,14])$，其中，$x$ 表示时间，y 表示温度. 求这一天中 6～14 时的最大温差，并指出何时达到最高气温.

4. 在图 7－4－2 中，点 O 为做简谐运动的物体的平衡位置，取向右的方向为物体位移的正方向. 若已知振幅为5 cm，周期为 4 s，且物体向右运动到平衡位置时开始计时.

（1）求物体对平衡位置的位移 x(单位：cm)和时间 t(单位：s)之间的函数关系；

（2）求该物体在 $t=7.5$ s 时的位置.

习题 7.4

感受・理解

1. 电流 I(单位：A)随时间 t(单位：s)变化的关系式是

$$I=A\sin\omega t,\ t\in[0,+\infty).$$

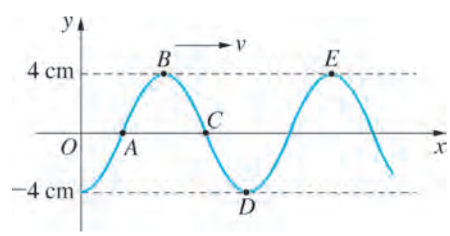
设 $\omega=100\pi$, $A=5$.

（1）求电流 I 变化的周期和频率；

（2）当 $t=0,\ \frac{1}{200},\ \frac{1}{100},\ \frac{3}{200},\ \frac{1}{50}$ 时，求电流 I；

（3）画出电流 I 随时间 t 变化的函数图象.

2. 如图所示的是一向右传播的绳波在某一时刻绳子上各点的位置图，经过 $\frac{1}{2}$ 周期后，B 点的位置将移至何处？



（第 2 题）

3. 某城市一年中 12 个月的月平均气温与月份数之间的关系可以近似地用一个三角函数来描述. 已知 6 月份的月平均气温最高，为 29.45℃，12 月份的月平均气温最低，为 18.3℃. 求出这个三角函数的表达式，并画出该函数的图象.

4. 一根长 l cm 的线，一端固定，另一端悬挂一个小球，小球摆动时，离开平衡位置的位移 s(单位：cm)和时间 t(单位：s)的函数关系式是

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

（1）求小球摆动的周期；

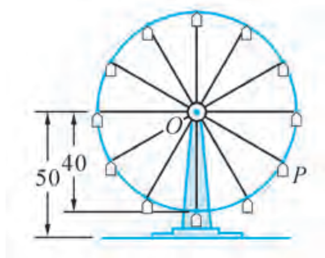
（2）已知 $g=980\ \text{cm/s}^2$，要使小球摆动的周期是 1 s，线的长度应当是多少？（精确到 0.1 cm，π 取 3.14）

思考·运用

5. 如图，摩天轮的半径为 40 m，点 O 距地面的高度为 50 m，摩天轮做匀速转动，每 30 min 转一圈，摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处.

(1) 试确定在时刻 t(单位：min)时点 P 距离地面的高度；

(2) 在摩天轮转动的一圈内，有多长时间点 P 距离地面超过 70 m?



（第 5 题）

6. 心脏跳动时，血压在增加或减小. 血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压，血压计上的读数就是收缩压和舒张压，读数 120/80 mmHg 为标准值.

设某人的血压满足函数式 $p(t)=115+25\sin(160\pi t)$，其中 $p(t)$ 为血压(单位：mmHg)，t 为时间(单位：min)，试回答下列问题：

健康成年人的收缩压和舒张压一般为 120～140 mmHg 和60～90 mmHg.

(1) 求函数 $p(t)$ 的周期；

(2) 此人每分钟心跳的次数；

(3) 画出函数 $p(t)$ 的草图；

(4) 求出此人的血压在血压计上的读数，并与标准值比较.

探究·拓展

7. 下表是某地一年中 10 d(天)的白昼时间.

日 期	1 月 1 日	2 月 28 日	3 月 21 日	4 月 27 日	5 月 6 日
白昼时间/h	5.59	10.23	12.38	16.39	17.26
日 期	6 月 21 日	8 月 14 日	9 月 23 日	10 月 25 日	11 月 21 日
白昼时间/h	19.40	16.34	12.01	8.48	6.13

(1) 以日期在 365 d(天)中的位置序号为横坐标，白昼时间为纵坐标，描出这些数据的散点图；

(2) 选用一个三角函数来近似描述白昼时间与日期序号之间的函数关系；

(3) 用(2)中的函数模型估计该地 7 月 8 日的白昼时间.

应用与建模

港口水深的变化与三角函数

海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐，一般的早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋. 下面给出了某港口在某天几个时刻的水深.

时　　刻	水深/m	时　　刻	水深/m	时　　刻	水深/m
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

（1）选用一个三角函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系，并给出在整点时的水深的近似数值；

（2）一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙（船底与海底的距离），该船何时能进入港口？

（3）若船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 m 的速度减少，那么该船在什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？

分析　（1）考察数据，可选用正弦函数，再利用待定系数法求解；

（2）在涉及三角不等式时，可利用图象求解.

解　（1）设所求函数为 $f(x)=A\sin\omega x+k$，则由已知数据可以求得

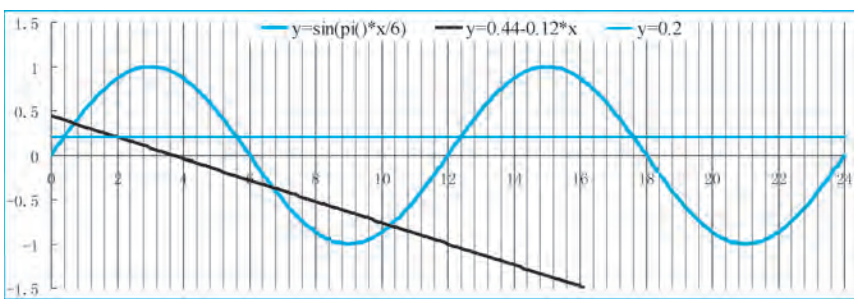
$$A=2.5,k=5,\ T=12,\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6},$$

故
$$f(x)=2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+5.$$

在整点时的水深近似为：1:00，5:00，13:00，17:00 为 6.3 m；2:00，4:00，14:00，16:00 为 7.2 m；7:00，11:00，19:00，23:00 为 3.7 m；8:00，10:00，20:00，22:00 为 2.8 m.

（2）由 $2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+5\geqslant 5.5$，得 $\sin\frac{\pi}{6}x\geqslant 0.2$，画出 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ 的图象（如图），由图象可得

在 Excel 中，计算 π 值时，应使用“pi()”函数. 为便于观察，在“图表”选项中选择“网格线”.



$$0.4 \leqslant x \leqslant 5.6 \text{ 或 } 12.4 \leqslant x \leqslant 17.6.$$

故该船在 0:24 至 5:36 和 12:24 至 17:36 期间可以进港.

(3) 若 $2 \leqslant x \leqslant 24$，$x$ 时刻的吃水深度为 $h(x) = 4 - 0.3(x-2)$，由 $f(x) \geqslant h(x) + 1.5$，得

$$\sin \frac{\pi}{6}x \geqslant 0.44 - 0.12x.$$

画出 $y = \sin \frac{\pi}{6}x$ 和 $y = 0.44 - 0.12x$ 的图象(如图)，由图象可知当 $x = 6.7$ 时，即 6:42 时，该船必须停止卸货，驶向较深的水域.

仿照上述案例，尝试解决以下问题.

某港口相邻两次高潮发生时间间隔12 h20 min，低潮时入口处水的深度为2.8 m，高潮时为 8.4 m，一次高潮发生在 10 月 3 日 2:00.

(1) 若从 10 月 3 日 0:00 开始计算时间，选用一个三角函数来近似描述这个港口的水深 d(单位：m)和时间 t(单位：h)之间的函数关系；

(2) 求 10 月 3 日 4:00 水的深度；

(3) 求 10 月 3 日吃水深度为 5 m 的轮船能进入港口的时间.

阅 读

欧 拉

欧拉(L. Euler,1707—1783)是瑞士数学家、自然科学家.有的数学史家把他与阿基米德、高斯、牛顿并列为历史上最伟大的数学家.

欧拉小时候就特别喜欢数学,不满10岁就开始自学《代数学》.这本书连他的几位老师都没读过,可小欧拉却读得津津有味,遇到不懂的地方,就用笔作个记号,事后再向别人请教.

1720年,13岁的欧拉靠自己的努力考入了巴塞尔大学,小欧拉是这所大学,也是整个瑞士大学校园里年龄最小的学生.他得到当时最有名的数学家约翰·伯努利(J. Bernoulli,1667—1748)的精心指导,这在当时是个奇迹,曾轰动了数学界.欧拉后来回忆说:"如果我遇到什么阻碍或困难,他还允许我每星期六午后自由地去找他并且亲切地为我解答一切难题.这样,使得每当他为我解决了一个困难,其他十个困难也就迎刃而解了,这是我在数学上获得及时成功的最好方法."

他19岁时写了一篇论文,获得巴黎科学院的奖金,26岁时成为彼得堡科学院教授.欧拉是18世纪数学界最杰出的人物之一.他是数学史上最多产的数学家,平均每年写出800多页的论文,还写了大量的力学、分析学、几何学、变分法等课本,他的《无穷小分析引论》《微分学原理》《积分学原理》等都成为数学中的经典著作.他的全集有74卷.

欧拉对数学的研究如此之广泛,在许多数学的分支中都可经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理.例如,

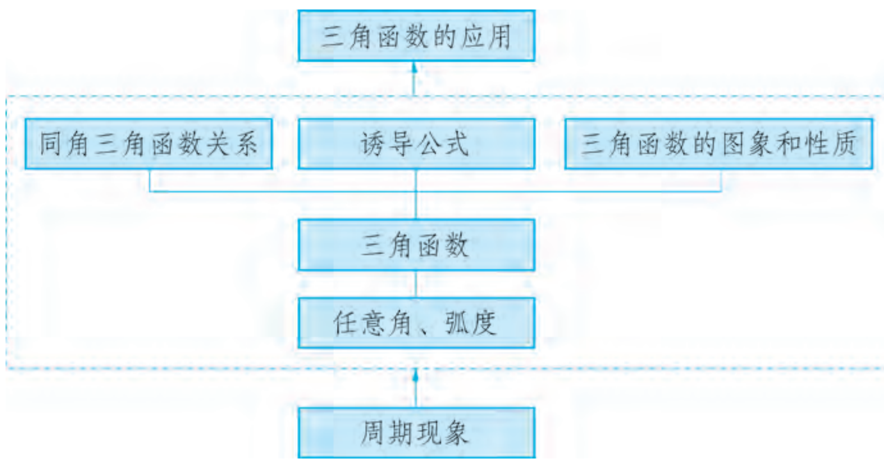
$$e^{i\pi}+1=0,$$
$$V-E+F=2,$$
$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

欧拉还创设了许多数学符号,例如 π(1736年),i(1777年),e(1748年),sin 和 cos(1748年),tg(1753年),Δx(1755年),$\sum$(1755年),$f(x)$(1734年)等.

欧拉的一生,是为数学发展而奋斗的一生,他那杰出的智慧,顽强的毅力,孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德,永远值得我们学习.

本章回顾

在本章中，我们通过旋转将角的概念推广到任意角，探讨了角的另一种度量制度——弧度制，在此基础上，研究了任意角的三角函数、同角三角函数关系、诱导公式、三角函数的图象和性质，最后研究了三角函数的应用.



"依性作图，以图识性"是数形结合思想的重要体现. 在本章中，我们先探讨了三角函数的最重要性质——周期性，然后利用周期性画出了正弦、余弦和正切函数的图象，根据图象得出了这些函数的一些基本性质.

三角函数在本质上是对单位圆圆周上一点运动的"动态描述"，它的种种性质和公式都是和单位圆的几何性质密切关联的，这是研究三角函数的重要思想和方法. 在解决三角函数的有关问题中，应自觉运用单位圆中的三角函数线和三角函数的图象，以形助数，数形结合.

复习题

感受·理解

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并且把 S 中适合不等式 $-2\pi \leqslant \beta < 4\pi$ 的元素写出来：

（1）4；（2）$-\dfrac{2\pi}{3}$；（3）$\dfrac{12\pi}{5}$；（4）0.

2. 在半径等于 15 cm 的圆中，一扇形的弧所对的圆心角为 54°，求这个扇形的弧长与面积.（π 取 3.14，计算结果保留两位小数）

3. 计算：

（1）$\sin\dfrac{25\pi}{6}+\cos\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{25\pi}{4}\right)$；（2）$\sin 2+\cos 3+\tan 4$（使用计算器）.

4. 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\sin 4$； (2) $\cos 2$；

(3) $\tan 3$； (4) $\tan 5$.

5. 已知 $\cos\varphi=\frac{1}{4}$，求 $\tan\varphi$.

6. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，计算：

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$； (2) $\tan(\alpha-7\pi)$.

7. 已知 $\tan\alpha=3$，计算：

(1) $5\cos\alpha+3\sin\alpha$； (2) $\sin\alpha\cos\alpha$.

8. 化简：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$.

9. 求证：

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$.

10. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\tan\frac{x}{2}$； (2) $y=\frac{1}{1-\tan x}$.

11. 求下列函数的最大值、最小值，并求使函数取得最大值、最小值的 x 的集合：

(1) $y=3-2\cos x$； (2) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

12. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(1) $y=x^2+\cos x$； (2) $y=x^2\sin x$.

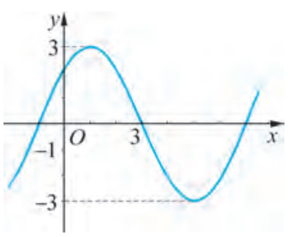
13. 不求值，分别比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin\left(-\frac{9\pi}{17}\right)$与 $\sin\frac{8\pi}{9}$； (2) $\cos\frac{4\pi}{5}$与 $\cos\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$；

(3) $\tan 1\,320^\circ$与 $\tan 70^\circ$； (4) $\sin\frac{23\pi}{13}$与 $\cos\frac{23\pi}{13}$.

14. 求下列函数的单调区间：

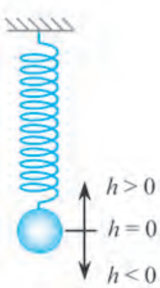
(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$； (2) $y=\cos 2x$.



（第 15 题）

15. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ \varphi\in[0,\ 2\pi))$ 的图象如图所示，试求该函数的振幅、频率和初相位.

思考・运用



（第 16 题）

16. 如图，弹簧挂着的小球做上下振动，它在 t(单位：s)时相对于平衡位置(静止时的位置)的高度 h(单位：cm)由下列关系式决定：

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,\ +\infty).$$

以 t 为横坐标，h 为纵坐标，画出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图，并且回答下列问题：

(1) 小球在开始振动时(即 $t=0$ 时)的位置在哪里？

(2) 小球的最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少？

(3) 经过多少时间小球往复振动一次(周期)？

(4) 每秒钟小球能够振动多少次(频率)？

17. 已知 $x\cos\theta = a$，$y = b\tan\theta(a \neq 0,\ b \neq 0)$，求证：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. 在一次气象调查中，发现某城市的温度 θ(单位：℃)的波动近似地按照规则 $\theta = 25 + 6\sin\frac{\pi}{12}t$，其中 t(单位：h)是从某日 9:00 开始计算的时间，且 $t \leqslant 24$.

(1) 画出温度随时间波动的图象.

(2) 利用函数图象确定最高和最低温度.

(3) 最高和最低温度在什么时候出现？

(4) 在什么时候温度为：① 27℃？ ② 20℃？

探究・拓展

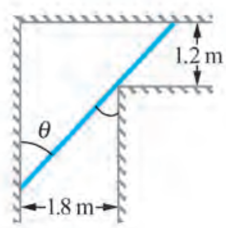
19. 一铁棒欲通过如图所示的直角走廊. 试回答下列问题：

(1) 证明：棒长 $L(\theta) = \frac{9}{5\sin\theta} + \frac{6}{5\cos\theta}$；

(2) 当 $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，作出上述函数的图象(可用计算器或计算机)；

(3) 由(2)中的图象求 $L(\theta)$的最小值(用计算器或计算机)；

(4) 解释(3)中所求得的 L 是能够通过这个直角走廊的铁棒的长度的最大值.



(第 19 题)

20. (阅读题)计算器是如何计算 $\sin x$，$\cos x$，e^x，$\ln x$，$\sqrt{x}$等函数值的？计算器使用的是数值计算法，其中一种方法是用容易计算的多项式近似地表示这些函数，通过计算多项式的值求出原函数的值，如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

其中 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

英国数学家泰勒(B. Taylor，1685—1731)发现了这些公式，可以看出，右边的项用得越多，计算得到的 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值也就越精确. 例如，我们用前三项计算 $\sin 0.9$，就得到

$$\sin 0.9 \approx 0.9 - \frac{(0.9)^3}{3!} + \frac{(0.9)^5}{5!} \approx 0.783\,420\,75.$$

像这些公式已被编入计算器内，计算器利用足够多的项就可确保其显示值是精确的.

试用你的计算器计算 $\sin 0.9$，并与上述结果进行比较.

本章测试

一、填空题

1. 在区间$[0, 2\pi)$内与$-\dfrac{\pi}{6}$的终边相同的角为__________.

2. 函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为__________.

3. 比较下列各组值的大小,用“$<$”或“$>$”填空:

(1) $\cos 250^\circ$____$\cos 260^\circ$;

(2) $\sin\dfrac{15\pi}{8}$______$\sin\dfrac{14\pi}{9}$.

4. 已知 $f(x)=3\sin x-4\tan x$. 若 $f(1)=a$, 则 $f(-1)$ 的值为________.

5. 若 $\tan\theta=2$, 则 $\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{3\sin\theta-2\cos\theta}$ 的值为________.

6. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 若 α 是第二象限角,则 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值为__________.

二、选择题

7. 下列各组函数中,在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上都是增函数的为(　　).

A. $y=\sin x$, $y=\cos x$　　B. $y=\sin x$, $y=\tan x$

C. $y=\cos x$, $y=\tan x$　　D. $y=-\sin x$, $y=-\cos x$

8. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$,若 $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$, 则 $\tan\alpha$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

9. 将函数 $y=\sin x$ 图象上每个点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$倍(纵坐标不变),再将得到的图象向左平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位长度,所得图象的函数解析式为(　　).

A. $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)$

C. $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

10. 化简 $\sqrt{1-2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}$的结果是(　　).

A. $\sin 40^\circ+\cos 40^\circ$　　B. $\sin 40^\circ-\cos 40^\circ$

C. $\cos 40^\circ-\sin 40^\circ$　　D. $-\cos 40^\circ-\sin 40^\circ$

三、解答题

11. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 1)$,求角 α 的正弦、余弦和正切值.

12. 证明:

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$;

(2) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

13. 已知 $f(\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$，当 α 是第三象限角，且 $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$ 时，求 $f(\alpha)$ 的值.

14. 求函数 $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的定义域、周期和单调区间.

15. 设 a，b 为实数，已知定义在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的函数 $f(x)=2a\sin 2x+b$ 的最大值为 1，最小值为 -5，求 a，b 的值.

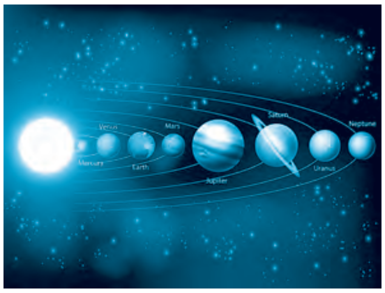
第 8 章　函 数 应 用

- 函数应用
  - 二分法与求方程近似解
    - 函数的零点
    - 用二分法求方程的近似解
  - 函数与数学模型
    - 几个函数模型的比较
    - 函数的实际应用

The principal aim of mathematics was public utility and explanation of natural phenomena.

—— Joseph Fourier

在过去的学习中，我们已经看到，函数是描述客观世界中变量关系和变化规律的最为重要的数学模型.



面对现实世界中的问题，我们对其中的变量关系和规律进行分析，建立函数模型. 通过研究所建立的函数模型，利用函数、方程、不等式等之间的关系，寻找问题的答案，进而解决现实世界中的问题. 例如：经济学中的各项经济总量与生产量的关系、物体在自然环境中的温度变化与时间的关系、潮汐现象、天体运动规律……

- 怎样建立函数模型解决实际问题？

8.1 二分法与求方程近似解

函数是研究事物变化过程的数学模型，而方程刻画的则是相等关系成立的某种状态.我们可以从事物变化过程中考察某个状态，也可以通过对若干状态的考察来认识变化的过程，这样就产生了函数与方程的思想.本节将着重研究函数与方程的关系.

- 函数与方程有什么关系？
- 如何运用函数的知识研究方程的解？

8.1.1 函数的零点

前面我们学习过，使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a, b, c\in\mathbf{R}, a\neq 0)$ 的值为 0 的实数 x 称为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.因此，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点就是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数解，也是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

一般地，我们把使函数 $y=f(x)$ 的值为 0 的实数 x 称为函数 $y=f(x)$ 的**零点**(zero point).

因此，函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数解.从图象上看，函数 $y=f(x)$ 的零点，就是它的图象与 x 轴交点的横坐标.

对于函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 在区间 $(2, 3)$ 上是否存在零点这个问题，可以通过解方程或观察函数图象的方法来解决，我们还可以进行下面的思考：

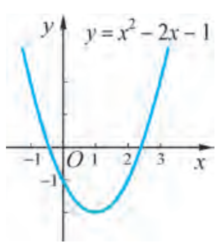


图 8－1－1

如图 8－1－1，因为 $f(2)=-1<0$，$f(3)=2>0$，而二次函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 在区间 $[2, 3]$ 上的图象是不间断的，这表明此函数图象在区间 $(2, 3)$ 上一定穿过 x 轴，即函数在区间 $(2, 3)$ 上存在零点.

一般地，我们有**函数零点存在定理**：

> 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条不间断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有零点.

例 1 证明：函数 $f(x)=x^3+x^2+1$ 在区间 $(-2, -1)$ 上存在零点.

证明 因为

$$f(-2)=(-2)^3+(-2)^2+1=-3<0,$$

$$f(-1)=(-1)^3+(-1)^2+1=1>0,$$

且函数 $f(x)$在区间$[-2, -1]$上的图象是不间断的，所以函数 $f(x)$ 在区间$(-2, -1)$上存在零点.

可通过画出函数 $y=2^x$ 和 $y=3-2x$ 的图象，大致判断零点的位置.

例 2 求证：函数 $f(x)=2^x+2x-3$ 有零点.

证明 因为

$$f(0)=2^0+2\times 0-3=-2<0,$$

$$f(1)=2^1+2\times 1-3=1>0,$$

且函数 $f(x)$在区间$[0, 1]$上的图象是不间断的，所以函数 $f(x)=2^x+2x-3$ 在区间$(0, 1)$上有零点，从而函数 $f(x)=2^x+2x-3$ 有零点.

思考

如果 x_0 是二次函数 $y=f(x)$ 的零点，且 $m<x_0<n$，那么 $f(m)f(n)<0$ 一定成立吗?

练习

1. 画出函数 $y=x^2+x-2$ 的图象，并指出函数 $y=x^2+x-2$ 的零点.
2. 求下列函数的零点：
   (1) $y=2x+3$； (2) $y=x^2+4x$；
   (3) $y=3^x-9$； (4) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.
3. 已知函数 $f(x)=3^x-x^2$，那么方程 $f(x)=0$ 在区间$[-1, 0]$上有实数解吗？为什么？
4. 证明：(1) 函数 $f(x)=x^2+6x+4$ 有两个不同的零点；
   (2) 函数 $f(x)=x^3+3x-1$ 在区间$(0, 1)$上有零点.
5. 函数 $f(x)=4x^3+x-15$ 在区间$[1, 2]$上是否存在零点？为什么？
6. 求证：函数 $f(x)=2^x+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有零点.

8.1.2 用二分法求方程的近似解

对于方程 $\lg x=3-x$，要求出这个方程的解是较为困难的. 我们能否求出这个方程的近似解呢?

让我们先从熟悉的一元二次方程开始研究.

例如，求方程 $x^2-2x-1=0$ 的实数解就是求函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的零点. 根据图 8-1-2，我们发现 $f(2)<0$，$f(3)>0$. 这表明此函数图象在区间$(2, 3)$上有零点，即方程 $f(x)=0$ 在区间$(2, 3)$上有实数解. 又因为在区间$(2, 3)$上函数$f(x)$单调递增，所以方程 $x^2-2x-1=0$ 在区间$(2, 3)$上有唯一实数解 x_1.

计算得 $f\left(\frac{2+3}{2}\right)=\frac{1}{4}>0$，发现 $x_1\in(2, 2.5)$（图 8-1-2），这样可以进一步缩小 x_1 所在的区间.

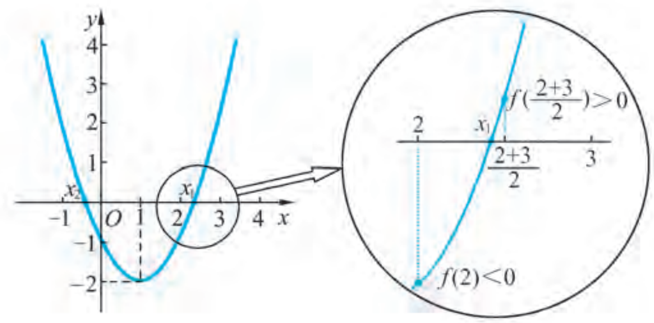


图 8－1－2

思 考

你能把此方程的一个根 x_1 限制在更小的区间内吗？

下面我们利用计算工具来求方程 $x^2-2x-1=0$ 的一个近似解（精确到 0.1）. 设 $f(x)=x^2-2x-1$，先画出函数的图象（图 8－1－2）. 因为

$$f(2)=-1<0,\ f(3)=2>0,$$

所以在区间 $(2,3)$ 上，方程 $x^2-2x-1=0$ 有一解，记为 x_1.

取 2 与 3 的平均数 2.5. 因为 $f(2.5)=0.25>0$，所以 $2<x_1<2.5$.

再取 2 与 2.5 的平均数 2.25. 因为 $f(2.25)=-0.4375<0$，所以 $2.25<x_1<2.5$.

如此继续下去，得

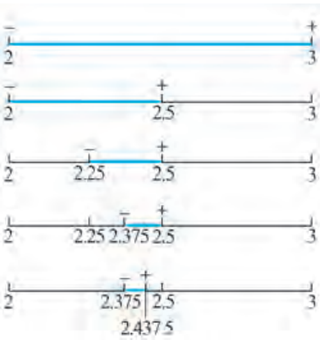
$$f(2)<0,\ f(3)>0\Rightarrow x_1\in(2,3),$$

$$f(2)<0,\ f(2.5)>0\Rightarrow x_1\in(2,2.5),$$

$$f(2.25)<0,\ f(2.5)>0\Rightarrow x_1\in(2.25,2.5),$$

$$f(2.375)<0,\ f(2.5)>0\Rightarrow x_1\in(2.375,2.5),$$

$$f(2.375)<0,\ f(2.4375)>0\Rightarrow x_1\in(2.375,2.4375).$$



▲ 图中负号“－”表示此点所对应的函数值为负，正号“＋”表示此点所对应的函数值为正，下同.

因为 2.375 与 2.4375 精确到 0.1 的近似值都为 2.4，所以此方程的近似解为

$$x_1\approx 2.4.$$

利用同样的方法，还可以求出方程的另一个近似解.

像上面这种求方程近似解的方法称为**二分法**，它是求一元方程近似解的常用方法.

运用二分法的前提是要先判断某解所在的区间.

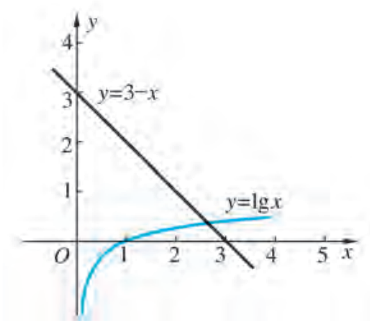
例 3 利用计算器，求方程 $\lg x=3-x$ 的近似解（精确到 0.1）.

分析 求方程 $\lg x=3-x$ 的解，可以转化为求函数 $f(x)=\lg x+x-3$ 的零点，故可以利用二分法求出题中方程的近似解.

解 分别画出函数 $y=\lg x$ 和 $y=3-x$ 的图象，如图 8－1－3 所

先利用函数图象估算出方程的解所在的区间.

示.在两个函数图象的交点处,函数值相等.因此,这个点的横坐标就是方程 $\lg x=3-x$ 的解.由函数 $y=\lg x$ 与 $y=3-x$ 的图象可以发现,方程 $\lg x=3-x$ 有唯一解,记为 x_1,并且这个解在区间$(2, 3)$内.



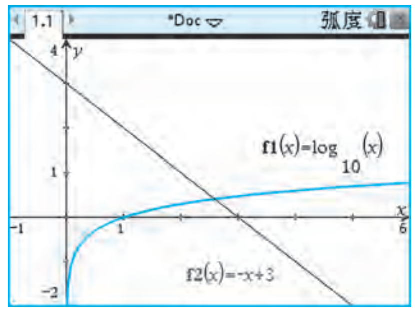
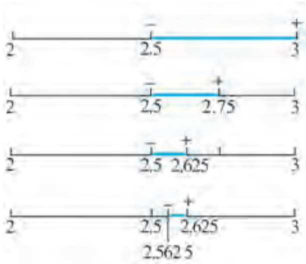


图 8-1-3

设 $f(x)=\lg x+x-3$,用计算器计算,得



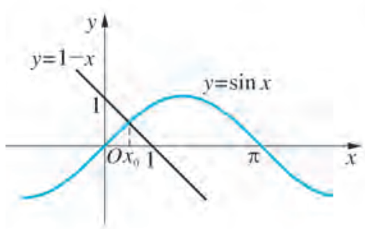
$$f(2)<0,\ f(3)>0 \Rightarrow x_1\in(2,\ 3),$$
$$f(2.5)<0,\ f(3)>0 \Rightarrow x_1\in(2.5,\ 3),$$
$$f(2.5)<0,\ f(2.75)>0 \Rightarrow x_1\in(2.5,\ 2.75),$$
$$f(2.5)<0,\ f(2.625)>0 \Rightarrow x_1\in(2.5,\ 2.625),$$
$$f(2.562\,5)<0,\ f(2.625)>0 \Rightarrow x_1\in(2.562\,5,\ 2.625).$$

因为 2.562 5 与 2.625 精确到 0.1 的近似值都为 2.6,所以原方程的近似解为

$$x_1\approx 2.6.$$

例 4 利用计算器,求方程 $\sin x=1-x$ 的近似解(精确到 0.1).

解 因为方程 $\sin x=1-x$ 可化为 $x+\sin x-1=0$,所以原方程的解即函数 $f(x)=x+\sin x-1$ 的零点.先画出函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=1-x$ 的图象,如图 8-1-4 所示.



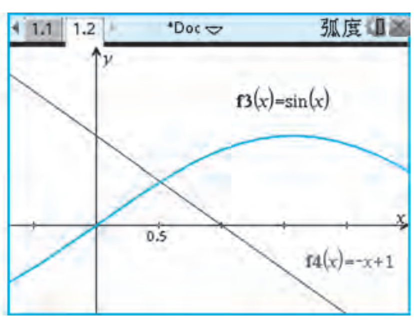


图 8-1-4

观察图象,因为

$$f(0)=-1<0,\ f(1)=\sin 1>0,$$

所以函数 $f(x)$的零点在区间$(0, 1)$内,记为 x_0.

取 0 和 1 的平均数 0.5，因为

$$f(0.5)=\sin 0.5-0.5=-0.02057<0,$$

所以 $x_0\in(0.5,1)$.

取 0.5 和 1 的平均数 0.75，因为

$$f(0.75)=\sin 0.75-0.25=0.43164>0,$$

所以 $x_0\in(0.5,0.75)$.

取 0.5 和 0.75 的平均数 0.625，因为

$$f(0.625)=\sin 0.625-0.375=0.21010>0,$$

所以 $x_0\in(0.5,0.625)$.

取 0.5 和 0.625 的平均数 0.562 5，因为

$$f(0.5625)=\sin 0.5625-0.4375=0.09580>0,$$

所以 $x_0\in(0.5,0.5625)$.

取 0.5 和 0.562 5 的平均数 0.531 25，因为

$$f(0.53125)=\sin 0.53125-0.46875=0.03786>0,$$

所以 $x_0\in(0.5,0.53125)$.

因为 0.5 和 0.531 25 精确到 0.1 的近似数都是 0.5，所以区间 $(0.5,0.53125)$ 内的所有数精确到 0.1 的近似数都是 0.5，从而 $x_0\approx0.5$. 因此，方程 $\sin x=1-x$ 的近似解（精确到 0.1）为 0.5.

用二分法求方程的一个近似解的操作流程是：

步骤 1　方程 $f(x)=0$ 的解

↓ 转化为

步骤 2　函数 $f(x)$ 的零点

↓ $f(a)f(b)<0$

步骤 3　确定 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(a,b)$

↓

步骤 4　取 a，b 的平均数 $c=\dfrac{a+b}{2}$

↓ $f(c)$ 的符号

步骤 5　确定 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(a_1,b_1)$

↓ 连续重复步骤 4，5

步骤 6　a_n，b_n 的近似值都为 m

↓ $x_0\approx m$

步骤 7　方程的一个近似解为 m

在以上操作过程中，如果存在 c，使得 $f(c)=0$，那么 c 就是方程 $f(x)=0$ 的一个精确解.

练　习

1. 利用计算器，求方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 上的近似解(精确到 0.1).
2. 利用计算器，求方程 $\lg x=1-2x$ 的近似解(精确到 0.1).
3. 用自己的语言叙述用二分法求方程近似解的基本步骤.
4. 用两种方法解方程 $2x^2=3x-1$.
5. 利用计算器，求方程 $x^3=2x+1$ 的近似解(精确到 0.1).
6. 利用计算器，求方程 $x-\cos x=0$ 的近似解(精确到 0.1).

习题 8.1

感受・理解

1. 说明下列函数在给定的区间上存在零点：
(1) $f(x)=\lg x+2x-5$，$(1,3)$；
(2) $f(x)=2^x+x^2-7$，$(1,2)$；
(3) $f(x)=x^3+x-1$，$(0,1)$；
(4) $f(x)=2x+\sin x-1$，$(0,\pi)$.
2. 求证：方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根.
3. 设 m 为实数，若函数 $y=mx^2-6x+2$ 的图象与 x 轴只有 1 个公共点，求 m 的值.
4. 设 k 为实数，若方程 $4(x^2-3x)+k-3=0$ 没有实数根，求 k 的取值范围.
5. 求证：方程 $5x^2+7x-1=0$ 的根一个在区间 $(-2,-1)$ 内，另一个在区间 $(0,1)$ 内.
6. 利用计算器，求方程 $x^2-2x-2=0$ 的近似解(精确到 0.1).
7. 用多种方法解方程 $x^2=3x+10$.

思考・运用

8. 设 m 为实数，若方程 $7x^2-(m+13)x-m-2=0$ 的一个根在区间 $(0,1)$ 内，另一个根在区间 $(1,2)$ 内，求 m 的取值范围.
9. 设 k 为实数，若函数 $f(x)=x^2-2^x+k$ 在区间 $[-1,0]$ 上有零点，求 k 的取值范围.
10. 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2-ax-1$，且函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上有唯一的零点，求 a 的取值范围.
11. 利用计算器，求下列方程的近似解(精确到 0.1)：
(1) $\lg(2x)=-x+1$；
(2) $3^x=x+4$；
(3) $2x-\cos x-1=0$.

探究・拓展

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象是一条不间断的曲线，$f(a)\neq f(b)$，其中 $a<b$，设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，求证：函数 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上有零点.

8.2 函数与数学模型

函数可以刻画事物变化过程中有依赖关系的两个变量之间的关系，我们能运用函数的概念与性质有效地解决问题.

例如，要研究气温的变化规律，从气象台温度记录仪上收集到如下信息(图 8-2-1)，怎样来研究气温的变化状况呢？

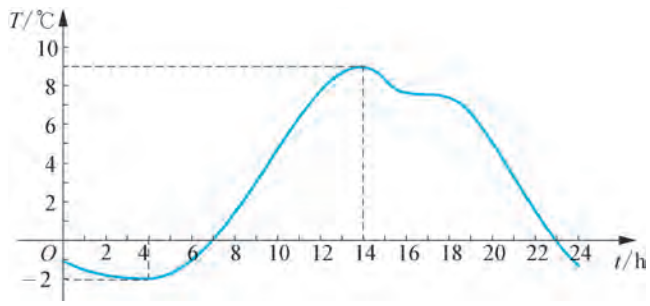


图 8-2-1

我们是这样来研究的：

(1) 分别用数(数量)T(单位：℃)，t(单位：h)来刻画温度和时间的状态，就得到两个数集，例如，t 的范围为$[0, 24]$，T 的范围为$[-2, 9]$.

(2) 将温度与时间之间的关系，抽象为数集之间元素的对应关系，从而建立起刻画事物现象的一种数学模型.

(3) 借助数学方法来研究这个模型的数学性质，进一步认识这一现象的变化过程，从而给出气温的变化规律.

- 不同的数学模型之间有什么区别？
- 怎样建立函数模型去解决实际问题？

8.2.1 几个函数模型的比较

不同的函数模型可以刻画不同的自然现象，不同函数的“变化趋势”也不同. 对不同函数的“变化趋势”的研究和比较，可以加深我们对自然现象的理解.

例 1 (1) 用计算器或计算机计算下列各值：

$$1.01^2,\ 1.01^3,\ 1.01^4,\ 0.99^2,\ 0.99^3,\ 0.99^4.$$

猜测一下，1.01^{365}大概是多少？0.99^{365}大概是多少？

(2) 用计算器或计算机计算下列各值：

$$1.1^2,\ 1.1^3,\ 1.1^4,\ 0.9^2,\ 0.9^3,\ 0.9^4.$$

猜测一下，1.1^{100}大概是多少？1.1^{260}大概是多少？

猜测一下，0.9^{100}大概是多少？$0.9^{1\,000}$大概是多少？

(3) 用计算器或计算机计算一下(1)(2)中的结果，与你的猜测进行比较，谈谈你对“指数爆炸”的理解.

解 (1) $1.01^2=1.020\,1$，$0.99^2=0.980\,1$，

$1.01^3=1.030\,301$，$0.99^3=0.970\,299$，

$1.01^4=1.040\,604\,01$，$0.99^4=0.960\,596\,01$.

(2) $1.1^2=1.21$，$0.9^2=0.81$，

$1.1^3=1.331$，$0.9^3=0.729$，

$1.1^4=1.464\,1$，$0.9^4=0.656\,1$.

(3) 用计算器或计算机计算，得

$1.01^{365}\approx 37.8$，$0.99^{365}\approx 0.03$，

$1.1^{100}\approx 13\,781$，$0.9^{100}\approx 2.656\times 10^{-5}$，

$1.1^{260}\approx 57\,822\,669\,934$，$0.9^{1\,000}\approx 1.748\times 10^{-46}$.

根据(1)(2)，我们可以发现“指数爆炸”的含义是：当$a>1$时，指数函数$y=a^x$随着x的增大而增大，且增大的速度越来越快，呈“爆炸”的趋势；当$0<a<1$时，指数函数$y=a^x$随着x的增大而减小，并逐步趋向于0.

例 2 (1) 在同一个直角坐标系中画出下列4个函数在区间$(0,+\infty)$上的图象：

$$y=2^x,\ y=x^2,\ y=x^{0.5},\ y=\log_2 x.$$

结合这4个函数的图象，比较它们随着x的增大函数值增长的快慢，并指出：当x的值足够大($x>16$)的时候，这4个函数的值的大小关系；

(2) 先想象下列两组函数图象之间的关系，再用数值验算，提出更一般的猜想.

① $y=1.01^x$与$y=x^{10}$；② $y=x^{0.1}$与$y=\lg x$.

(3) 借助图形计算器或计算机，作出下列两组函数的图象，验证你在(2)中的猜想.

① $y=2^x$与$y=x^{100}$；② $y=x^{0.25}$与$y=\log_2 x$.

解 (1) 这4个函数的图象如图8-2-2所示.

由图8-2-2可知：

当$0<x<2$时，$0<x^2<2^x<4$；

当$x=2$时，$2^x=x^2=4$；

当$2<x<4$时，$4<2^x<x^2<16$；

当$x=4$时，$2^x=x^2=16$；

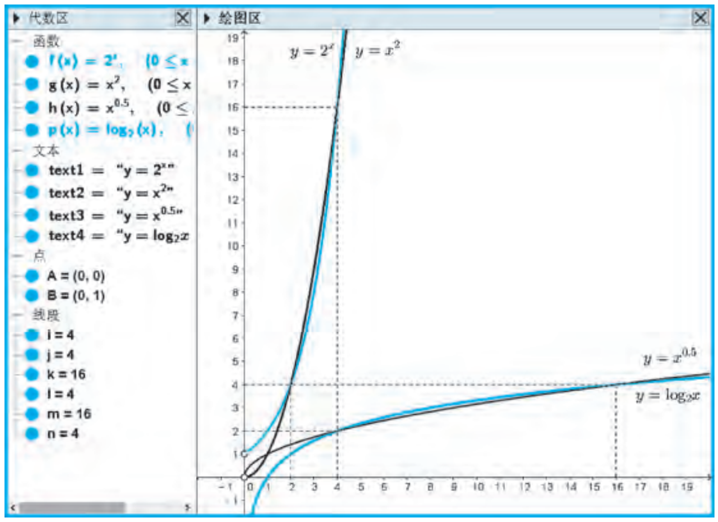


图 8－2－2

当 $x>4$ 时，$16<x^2<2^x$.

对应地，

当 $0<x<4$ 时，$0<\log_2 x<x^{0.5}<2$；

当 $x=4$ 时，$x^{0.5}=\log_2 x=2$；

当 $4<x<16$ 时，$2<x^{0.5}<\log_2 x<4$；

当 $x=16$ 时，$x^{0.5}=\log_2 x=4$；

当 $x>16$ 时，$x^{0.5}>\log_2 x$.

可以发现：当 x 的值足够大($x>16$)时，这 4 个函数值的大小关系是

$$2^x>x^2>x^{0.5}>\log_2 x.$$

(2) ① 可以想象，在区间$(0,+\infty)$上，函数 $y=1.01^x$ 与 $y=x^{10}$ 的图象都是随着 x 的增大而上升的，函数值的大小有如下特征：

当 $0<x<1$ 时，$1.01^x>x^{10}$；

当 $2\leqslant x\leqslant 9\ 000$ 时，$1.01^x<x^{10}$，

例如，当 $x=9\ 000$ 时，$1.01^{9\ 000}\approx 7.8\times 10^{38}$，$9\ 000^{10}\approx 3.5\times 10^{39}$，

显然 $1.01^{9\ 000}<9\ 000^{10}$；

当 $x\geqslant 10\ 000$ 时，$1.01^x>x^{10}$，

例如，当 $x=10\ 000$ 时，$1.01^{10\ 000}\approx 1.6\times 10^{43}$，$10\ 000^{10}=10^{40}$，

显然 $1.01^{10\ 000}>10\ 000^{10}$.

② 可以想象，在区间$(0,+\infty)$上，函数 $y=x^{0.1}$ 与 $y=\lg x$ 的图象都是随着 x 的增大而上升的，函数值的大小有如下特征：

当 $0<x\leqslant 10$ 时，$x^{0.1}>1\geqslant \lg x$；

当 $30\leqslant x<10^{10}$ 时，$x^{0.1}<\lg x$，

例如，当 $x=30$ 时，$30^{0.1}\approx 1.405\ 1$，$\lg 30\approx 1.477\ 1$，

显然 $30^{0.1}<\lg 30$；

当 $x=10^{10}$ 时，$x^{0.1}=\lg x=10$；

当 $x>10^{10}$ 时，$x^{0.1}>\lg x$，

例如，当 $x=10^{11}$ 时，$(10^{11})^{0.1}\approx 12.59$，$\lg 10^{11}=11$，

显然 $(10^{11})^{0.1}>\lg 10^{11}$.

因此，我们可以得到更一般的猜想：

对于指数函数 $y=a^x(a>1)$，幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha>0)$ 和对数函数 $y=\log_a x\ (a>1)$，当 x 足够大时，总有

$$a^x>x^{\alpha}>\log_a x.$$

一般地，在描述现实问题的变化规律时，常用“指数爆炸”“直线上升”“对数增长”等术语表示指数函数、一次函数、对数函数的增长方式.

(3) 借助图形计算器或计算机，观察函数 $y=2^x$，$y=x^{100}$ 的图象(图 8-2-3)，可以发现：当 x 的值从 0 开始增大时，随着 x 的增大，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2^x>x^{100}$；之后很快有 $2^x<x^{100}$，直到 $x>997$ 时，总有 $2^x>x^{100}$.

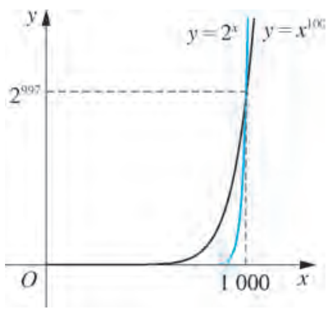


图 8-2-3

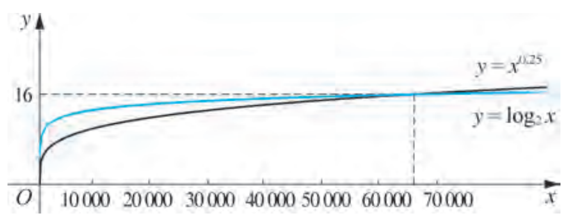


图 8-2-4

同样，借助图形计算器或计算机，观察函数 $y=x^{0.25}$，$y=\log_2 x$ 的图象(图 8-2-4)，可以发现：当 x 从 4 开始增大时，一直有 $x^{0.25}<\log_2 x$，直到 $x>65\ 536$ 时，总有 $x^{0.25}>\log_2 x$.

由此，我们进一步验证了(2)中的猜想：当 x 足够大时，总有

$$a^x>x^{\alpha}>\log_a x.$$

练　习

1. 利用计算器或计算机，计算下表中与 x 的值对应的函数 $y=0.99^x$ 与 $y=1.01^x$ 的值(精确到 0.000 1)：

x	10	20	100	365	730
$y=0.99^x$					
$y=1.01^x$					

2. 利用图形计算器或计算机，在同一个直角坐标系中画出下列各组两个函数在区间 $(0,+\infty)$ 上的图象，并结合函数的图象，比较它们随着 x 的增大函数值增长的快慢，并指出当 x 的值足够大的时候，这两个函数值的大小关系.

(1) $y=10^x$，$y=x^{100}$；　　(2) $y=x^{0.6}$，$y=\log_{1.5}x$；

(3) $y=1.01^x$，$y=x^2$；　　(4) $y=x^{-2}$，$y=2^{-x}$.

8.2.2 函数的实际应用

函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，是研究变量之间依赖关系的有效工具. 利用函数模型可以处理生产、生活中许多实际问题.

- 怎样建立函数模型，解决实际问题？
- 怎样选择合适的数学模型刻画客观世界的变化规律？

例 3 某计算机集团公司生产某种型号计算机的固定成本为 200 万元，生产每台计算机的可变成本为 3 000 元，每台计算机的售价为5 000 元. 分别写出总成本 C(单位：万元)、单位成本 P(单位：万元)、销售收入 R(单位：万元)以及利润 L(单位：万元)关于总产量 x(单位：台)的函数关系式.

解 总成本与总产量的关系为

$$C=200+0.3x, x\in \mathbf{N}^*.$$

单位成本与总产量的关系为

$$P=\frac{200}{x}+0.3, x\in \mathbf{N}^*.$$

销售收入与总产量的关系为

$$R=0.5x, x\in \mathbf{N}^*.$$

利润与总产量的关系为

$$L=R-C=0.2x-200, x\in \mathbf{N}^*.$$

例 4 物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是 T_0，经过一定时间 t 后的温度是 T，则 $T-T_a=(T_0-T_a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$，其中 T_a 表示环境温度，h 称为半衰期. 现有一杯用 88℃热水冲的速溶咖啡，放在 24℃的房间中，如果咖啡降温到 40℃需要 20 min，那么降温到 35℃，需要多长时间(结果精确到0.1)?

解 由题意知

$$40-24=(88-24)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{h}},$$

即

$$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{h}}.$$

解得 $h=10$，故

$$T-24=(88-24)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

当 $T=35$ 时，代入上式，得

$$35-24=(88-24)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}},$$

即

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}=\frac{11}{64}.$$

两边取对数，用计算器求得 $t\approx 25.4$.

因此，约需要 25.4 min 咖啡可降温到 35℃.

边际函数是经济学中一个基本概念，通常记为 $Mf(x)$.

例 5 在经济学中，函数 $f(x)$ 的边际函数 $Mf(x)$ 定义为 $Mf(x)=f(x+1)-f(x)$. 某公司每月最多生产 100 台报警系统装置，生产 x 台 $(x\in\mathbf{N}^*)$ 的收入函数为 $R(x)=3\,000x-20x^2$（单位：元），其成本函数为 $C(x)=500x+4\,000$（单位：元），利润是收入与成本之差.

(1) 求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$；

(2) 利润函数 $P(x)$ 与边际利润函数 $MP(x)$ 是否具有相同的最大值?

解 由题意知，$x\in[1,\ 100]$，且 $x\in\mathbf{N}^*$.

(1)
$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=3\,000x-20x^2-(500x+4\,000)\\&=-20x^2+2\,500x-4\,000,\\MP(x)&=P(x+1)-P(x)\\&=-20(x+1)^2+2\,500(x+1)-4\,000-\\&\quad(-20x^2+2\,500x-4\,000)\\&=2\,480-40x.\end{aligned}$$

(2) $P(x)=-20\left(x-\frac{125}{2}\right)^2+74\,125$，当 $x=62$ 或 $x=63$ 时，$P(x)$ 的最大值为 74 120(元).

因为 $MP(x)=2\,480-40x$ 是减函数，所以，当 $x=1$ 时，$MP(x)$ 的最大值为 2 440(元).

因此，利润函数 $P(x)$ 与边际利润函数 $MP(x)$ 不具有相同的最大值.

例 5 中边际利润函数 $MP(x)$ 当 $x=1$ 时取最大值，说明生产第二台与生产第一台的总利润差最大，即生产第二台报警系统装置利润最大. $MP(x)=2\,480-40x$ 是减函数，说明随着产量的增加，每台利润与前一台利润相比在减少.

通过上述 3 个例子,我们可以看出,解决实际问题通常按

实际问题 → 建立数学模型 → 求解数学模型 → 解决实际问题

的程序进行,其中建立数学模型是关键.

练　习

1. 某地高山上温度从山脚起每升高 100 m 降低 0.6℃. 已知山顶的温度是 14.6℃,山脚的温度是 26℃. 问:此山有多高?

2. 某车站有快、慢两种车,始发站距终点站 7.2 km,慢车到终点站需16 min,快车比慢车晚发车 3 min,且行驶 10 min 后到达终点站. 试分别写出两车所行路程关于慢车行驶时间的函数关系式. 两车在何时相遇? 相遇时距始发站多远?

3. 经市场调查,某商品在过去 100 天内的销售量(单位:件)和价格(单位:元)均为时间 t(单位:天)的函数,且销售量近似地满足 $g(t)=-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}$ $(1\leqslant t\leqslant 100, t\in\mathbf{N})$. 前 40 天价格为 $f(t)=\frac{1}{4}t+22$ $(1\leqslant t\leqslant 40, t\in\mathbf{N})$, 后 60 天价格为 $f(t)=-\frac{t}{2}+52$ $(41\leqslant t\leqslant 100, t\in\mathbf{N})$. 试写出该种商品的日销售额 S 与时间 t 的函数关系.

4. 某店从水果批发市场购得椰子两筐,连同运费总共花了 300 元,回来后发现有 12 个是坏的,不能将它们出售,余下的椰子按每个高出成本价 1 元售出,售完后共赚得 78 元. 问:这两筐椰子原来共有多少个?

5. 已知镭经过 100 年剩留原来的 95.76%,设质量为 1 的镭经过 x 年后的剩留量为 y,则 x,y 的函数关系是怎样的? 试写出.

习题 8.2

感受 · 理解

1. 已知某产品今年年产量是 m 件,计划以后每年的产量比上一年增加 20%,写出 x 年后该产品的年产量 y 与 x 之间的函数关系式.

2. 销售甲、乙两种商品所得利润分别是 P(单位:万元)和Q(单位:万元),它们与投入资金 t(单位:万元)的关系有经验公式 $P=\frac{1}{5}t$, $Q=\frac{3}{5}\sqrt{t}$. 今将 3 万元资金投入经营甲、乙两种商品,其中对甲种商品投资x(单位:万元),试建立总利润 y(单位:万元)关于 x 的函数关系式.

3. 一种放射性元素,最初质量为 1 000 g,按每年 10%衰减.

(1) 写出 x 年后这种放射性元素质量 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 求这种放射性元素的半衰期(放射性物质的质量衰减为原来的一半所需要的时间).(精确到 0.1)

思考 · 运用

4. 某工厂第一季度某产品月生产量分别为 10 000 件、12 000 件、13 000 件. 为了估测以后每个月的产量,以这 3 个月的产量为依据,用一个函数模拟该产品的月产量 y(单位:件)与月份 x 的关系. 模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$(其中 a, b, c 为常数). 已知 4 月份的产量为13 600件,问:

用以上哪个函数作为模拟函数较好？为什么？

5. 甲、乙两家电子商店同时上市一批移动硬盘，原价 800 元/个. 为了促销，甲商店推出如下优惠政策：买 1 个，单价为 780 元；买 2 个，单价为 760 元……依此类推，每多买 1 个，则单价减少 20 元，但价格底线为 440 元/个. 乙商店一律按原价的 75%降价促销. 某单位需购买一批该型号的移动硬盘，问：选择去哪一家商店购买，才能使得花费较少？

6. 某建材实验室在做陶粒混凝土强度实验中，考察每立方米混凝土的水泥用量 x(单位：kg)对 28 天后的混凝土抗压强度 y(单位：kg/m^2)的影响，测得如下数据：

x	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260
y	56.9	58.3	61.6	64.6	68.1	71.3	74.1	77.4	80.2	82.6	86.4	89.7

试建立适当的数学模型回答以下问题：

(1) 每立方米混凝土中增加 1 kg 水泥时，可提高抗压强度多少？

(2) 当 $x=225$(kg)时，y 的预测值是多少？

7. 某公司今年头 6 个月的月利润如下表所示：

月　份	1	2	3	4	5	6
利润/万元	29.9	44.2	54.1	61.7	68.3	73.4

假定短期内利润增长基本符合对数规律，预测一下今年 7，8 两个月的月利润各是多少.

探究・拓展

8. (写作题)到学校附近的农村、工厂、商店、机关作调查，了解函数模型在生产生活中的应用，收集一些生活中的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)实例，并做出分析，写成调查报告.

应用与建模

体重与脉搏

问题 生物学家认为，睡眠中的恒温动物依然会消耗体内能量，主要是为了保持体温. 研究表明，消耗的能量 E 与通过心脏的血流量 Q 成正比. 根据生物学常识知道，动物的体重与体积成正比. 表 1 给出了一些动物体重与脉搏率对应的数据.

表 1 一些动物的体重和脉搏率

动物名	体重/g	脉搏率/(心跳次数 · min^{-1})
鼠	25	670
大鼠	200	420
豚鼠	300	300
兔	2 000	205
小狗	5 000	120
大狗	30 000	85
羊	50 000	70
马	450 000	38

(1) 根据生物学常识，给出血流量与体重之间关系的数学模型；

(2) 建立脉搏率与体重关系的数学模型；

(3) 根据表 1，作出动物的体重和脉搏率的散点图，验证所建立的数学模型.

简化假设 为了建立数学模型，需要了解一些生物学概念，例如，血流量 Q 是单位时间流过的血量，脉博率 f 是单位时间心跳的次数；还需要知道一些生物学假设，例如，心脏每次收缩挤压出来的血量 q 与心脏大小成正比，动物心脏的大小与这个动物体积的大小成正比.

建立模型 (1) 因为动物体温通过身体表面散发热量，表面积越大，散发的热量越多，保持体温需要的能量也就越大，所以动物体内消耗的能量 E 与身体的表面积 S 成正比，即 $E=p_1S$.

又因为动物体内消耗的能量 E 与通过心脏的血流量 Q 成正比，即 $E=p_2Q$. 由此可得 $Q=pS$，其中 p_1，p_2 和 p 均为正的比例系数.

另一方面，体积 V 与体重 W 成正比，即 $V=r_1W$.

又因为表面积 S 大约与体积 V 的 $\frac{2}{3}$ 次方成正比，即 $S=r_2V^{\frac{2}{3}}$. 由此可得 $S=rW^{\frac{2}{3}}$，其中 r_1，r_2，r 为正的比例系数.

因此，血流量与体重关系的数学模型为

$$Q=k_1W^{\frac{2}{3}},$$

其中 k_1 为正的比例系数.

（2）根据脉搏率的定义 $f=\dfrac{Q}{q}$，再根据生物学假设 $q=cW$（c 为正的比例系数），可得 $f=\dfrac{Q}{q}=\dfrac{k_1W^{\frac{2}{3}}}{cW}$. 因此，脉搏率与体重关系的数学模型为

$$f=kW^{-\frac{1}{3}},$$

其中 k 为正的待定系数.

（3）我们用 Excel 作出数据的散点图：在工作表中输入数据，选中数据区，按“插入/图表/散点图”的顺序作出散点图（图 1）.

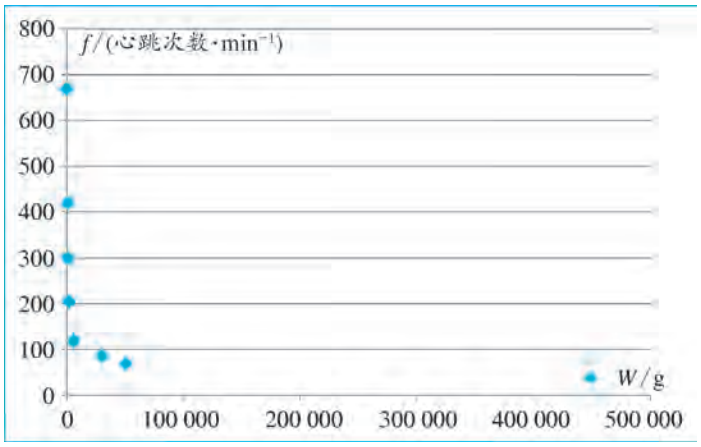


图 1　脉搏率 f 与体重 W 的散点图

“添加趋势线”是 Excel 进行数据拟合的一个有力工具，它提供了“线性、对数、多项式、幂、指数、移动平均”6 种数学模型，可供择优选用. 显示的 R^2 值越接近于 1，其拟合效果越好. R^2 的含义将在选择性必修第二册“统计”一章中介绍.

右击数据点，选择“添加趋势线”，在 6 种类型中分别选择指数、幂、二次多项式等趋势线，根据显示的“R 平方值”，选择最大的一个. 因此，采用幂函数模型，在“选项”中选定“显示公式”和“显示 R 平方值”复选框，得到图 2.

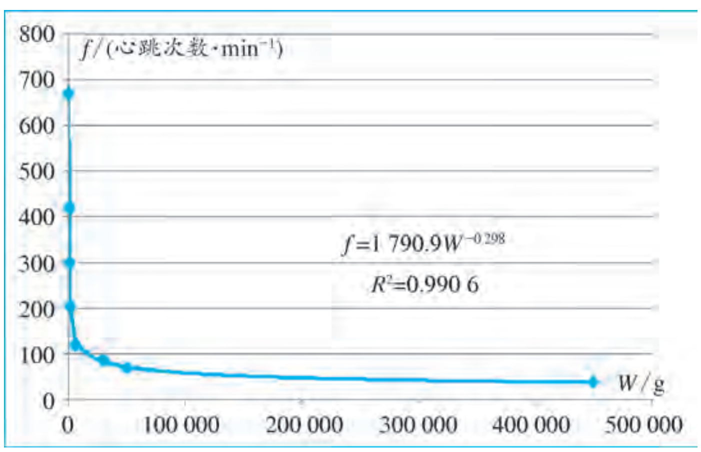


图 2　在脉搏率 f 与体重 W 的散点图中添加趋势线

可以看出，得到的拟合模型 $f=1\ 790.9\ W^{-0.298}$ 与（2）中建立的数学模型接近.

回顾与评价　（1）脉搏率与体重关系的数学模型说明，恒温动物

体重越大，脉搏率越低；脉搏率与体重的$\frac{1}{3}$次方成反比．表 1 中的数据基本上反映了这个关系．

（2）当所给的数据差异较大时，可以对已知数据取对数，从而使变换后的数据变得“均匀”，有利于发现趋势或规律．本例中将体重 W 与脉搏率分别取自然对数后作出的散点图如图 3 所示．直观地看出，变换后的数据点分布均匀，并近似地在一条直线上．

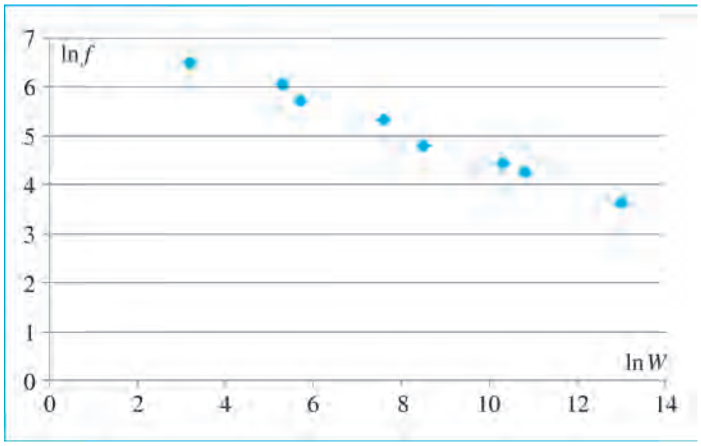


图 3　$\ln f$ 与 $\ln W$ 的散点图

（3）数据拟合是研究变量之间的关系，并给出近似数学表达式的一种方法．根据拟合模型，我们还可以对某变量进行预测或控制．在解决数据拟合问题时，首先应作出数据的散点图，然后通过观察散点的趋势选用相应的模型进行拟合．为使散点图更清晰，可将数据适当简化或变换．

练　习

下表给出了八大行星与冥王星离太阳的距离和它们运行的周期，试建立这两组数据之间的关系．

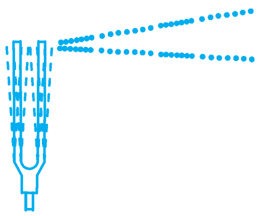
	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
距离/10^6 km	57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1 427	2 870	4 497	5 907
周期/d	88	225	365	687	4 329	10 753	30 660	60 150	90 670

阅 读

G 大调的正弦函数

音乐，是人类精神通过无意识计算而获得的愉悦享受.

—— G. 莱布尼茨



传说毕达哥拉斯很喜欢弹古希腊的七弦琴. 他发现，当弦的粗细不变时，拨弄弦弹出的声音音高取决于各弦的长度，当弦的长度成简单的整数比时，它就发出和谐的声音. 从那时起，音乐的研究与数学连成了一体，数学家和音乐家都试图弄清音乐声音的本质，扩大音乐与数学两者之间的联系.

先考虑由音叉发出的简单的声音.

数学家研究发现，音叉发出的声音(音叉附近空气分子的振动)可以用函数模型 $y=A\sin\omega t$ $(A>0,\ \omega>0)$ 来刻画，这是一个周期函数，最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

有些声音悦耳动听，有些声音则叫人无法忍受. 同一个音符，为什么小提琴和钢琴发出的声音传到耳朵里会有不同的效果呢？观察发现，所有声音的图象都呈现周期性. 我们可以用小提琴和单簧管的声音图象加以证实，也可以用 father 一词中 a 的声音的图象来证实，如图 1 所示.

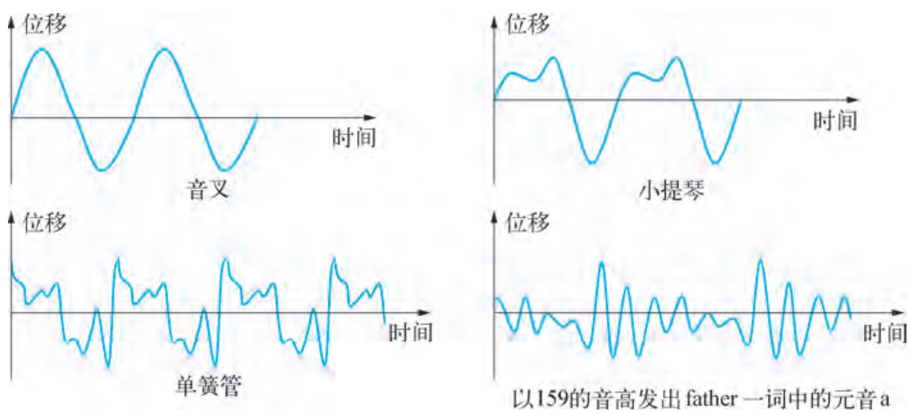


图 1　乐器和人发出的声音的周期性

如图 1 所示的这种具有周期性的声音，在整体上来说是悦耳的，称为音乐声音.

1807 年，法国著名数学家傅里叶(Fourier，1768—1830)用一个纯粹的数学定理表述了这种规则特征：代表任何周期性声音的公式是形如 $A\sin\omega t$ 的简单正弦函数之和，而且这些正弦函数的频率都是其中一个最小频率的整数倍. 比如说图 1 中的小提琴的声音图象公式基本上是

$$y=0.06\sin 1\,000\pi t+0.02\sin 2\,000\pi t+0.01\sin 3\,000\pi t.$$

首先，这个公式是简单的正弦表达式之和；其次，第 1 项的频率是

500,第2项的频率是1 000,第3项的频率是1 500.因此,第2项和第3项的频率是最低频率的整数倍.这些简单三角函数的图象如图2所示.

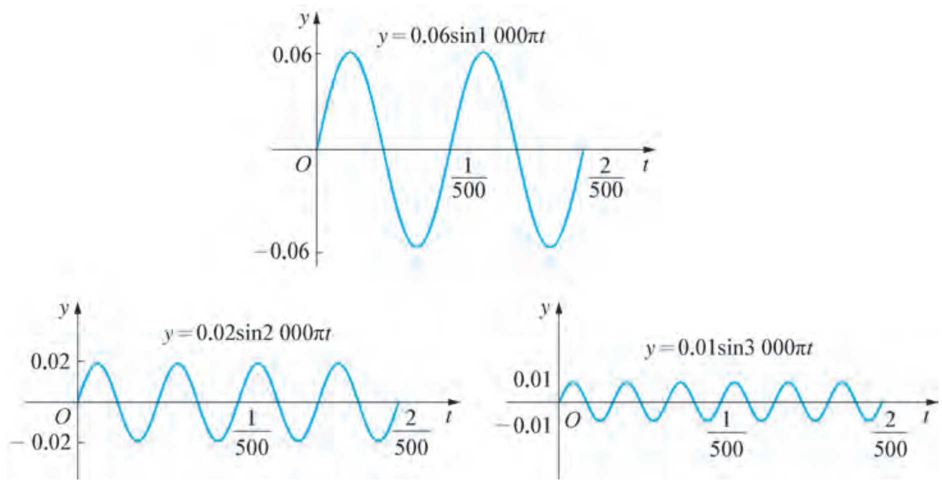


图2 构成小提琴声音的各项三角函数的图象

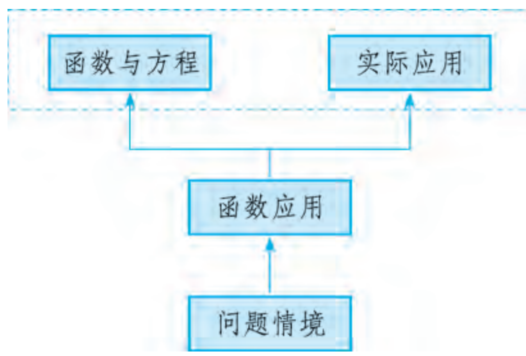
例如,一个音质与上面的小提琴音质完全相同的声音,能够由3个具有适当相关音量的、每个频率分别为500,1 000,1 500的音叉同时发声而产生.因此,从理论上来讲,完全可以由音叉来演奏贝多芬第九交响曲.

通过傅里叶定理,我们明白了一般的音乐声音的数学特征:各种声音都可以归于一些简单声音的基本组合,而这些简单声音在数学上又不会比简单的三角函数更复杂.

上面简单的描述表明,数学已经深深地渗入到音乐领域中了.

本章回顾

本章从函数的零点出发，揭示了函数与方程的关系，指出了用二分法求方程近似解的函数背景；从实际问题出发，展示了函数的实际应用，并通过数据拟合，进一步体现了函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型，对探索自然界的变化规律具有重要的指导意义，在现实生活中有着广泛的应用.



在研究函数与方程的关系时，了解了函数的零点就是使得函数值为 0 的自变量的值，借助函数的性质和图象体会了用二分法求方程近似解的一般步骤，进一步研究了方程有解与函数值的关系.

运用函数知识解决实际问题的关键是建立数学模型，通常的程序是：实际问题→建立数学模型→求解数学模型→解决实际问题.

复 习 题

感受 · 理解

1. 求下列函数 $f(x)$ 的零点：

(1) $f(x)=2^x-16$；　(2) $f(x)=x^2-2x-8$；

(3) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{2}$；　(4) $f(x)=4^x-2^x-2$；

(5) $f(x)=x+\ln x-1$；　(6) $f(x)=2^x+2x-8$.

2. 学校宿舍与办公室相距 a m. 某同学有重要材料要送交给老师，从宿舍出发，先匀速跑步 3 min 来到办公室，停留 2 min，然后匀速步行 10 min 返回宿舍. 在这个过程中，这位同学行进的速度和行走的路程都是时间的函数，画出速度函数和路程函数的示意图.

3. 借助计算工具，求下列方程的近似解(精确到 0.01)：

(1) $x^2-x-3=0$；　(2) $2^x-x-2=0$；

(3) $\log_2 x=2-x$；　(4) $x^2=\cos x$.

4. 设 k 为实数，若函数 $f(x)=x^2-kx+1$ 在区间 $[-1, 1]$ 上无零点，求 k 的取值范围.

思考·运用

5. 设 a 为实数，若关于 x 的方程 $x-\dfrac{a}{x}+1=0$ 在区间 $(-1,\ 1)$ 上有两个解，求 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，且关于 x 的方程 $f(x)=t\ (t\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有唯一解，求 t 的取值范围.

7. 根据市场调查，某种商品在最近的 40 天内的价格 $f(t)$（单位：元/件）、日销售量$g(t)$（单位：件）与时间 t（单位：天）的关系分别是

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t+11,\ 0\leqslant t<20,\\ -t+41,\ 20\leqslant t\leqslant 40\end{cases}(t\in\mathbf{N}),$$

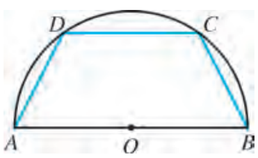
$$g(t)=-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{43}{3}\ (0\leqslant t\leqslant 40,\ t\in\mathbf{N}),$$

求这种商品的日销售额的最大值.（日销售额＝销售量×价格）

8. 如图，有一块半径为 R（单位：cm）的半圆形钢板，计划裁剪成等腰梯形 $ABCD$ 的形状，它的下底 AB 是半圆的直径，上底 CD 的端点在圆周上.

(1) 写出梯形的周长 y（单位：cm）和腰长 x（单位：cm）之间的函数关系式；

(2) 求梯形周长的最大值.



（第 8 题）

9. 一般地，海面上的大气压强是 760 mmHg，高空中因空气稀薄，大气压强就小于 760 mmHg，高度越高，大气压强越低，大气压强 p（单位：mmHg）和高度 h（单位：m）之间的关系为 $p=760\mathrm{e}^{-hk}$，其中 e 是自然对数的底数，k 是常数. 根据实验，已知 500 m 高空处的大气压强是 700 mmHg.

(1) 确定关系式中的常数 k；

(2) 求 1 000 m 高空处的大气压强；

(3) 如果高空某处的大气压强是 560 mmHg，那么该处的高度是多少？

10. 近年来，某企业每年消耗电费 24 万元. 为了节能减排，决定安装一个可使用 15 年的太阳能供电设备，并接入本企业的电网. 安装这种供电设备的费用（单位：万元）与太阳能电池板的面积（单位：m^2）成正比，比例系数约为 0.5. 为了保证正常用电，安装后采用太阳能和电能互补供电的模式. 设在此模式下，安装后该企业每年消耗的电费 C（单位：万元）与安装的这种太阳能电池板的面积 x（单位：m^2）之间的函数关系是 $C(x)=\dfrac{k}{20x+100}\ (x\geqslant 0,$ k 为常数). 记该企业安装这种太阳能供电设备的费用与 15 年所消耗的电费之和为 F（单位：万元）.

(1) 解释 $C(0)$ 的实际意义，并写出 F 关于 x 的函数关系式；

(2) 要使 F 不超过安装太阳能供电设备前消耗电费的 $\dfrac{1}{6}$，求 x 的取值范围.

探究·拓展

11. 设 $a\in\mathbf{R}$,试研究关于 x 的方程 $x^2-(a+2)x+a=0$ 在区间 $(0,2)$ 上的解的个数.

12. 设函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin x+a$,其中 $a\in\mathbf{R}$,讨论函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上零点的个数.

13. 设函数 $f(x)=x^2-mx+m$,其中 $m\in\mathbf{R}$.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上有唯一的零点,求 m 的取值范围;

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点,求 m 的取值范围.

本章测试

一、填空题

1. 函数 $y=\log_2 x-1$ 的零点是________.

2. 设函数 $f(x)=a^x+b$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，$b\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 无零点，则 b 的取值范围是________.

3. 若方程 $2^x=0.2$ 的解在区间 $[k,k+1](k\in\mathbf{Z})$ 内，则 k 的值是________.

4. 函数 $f(x)=\log_2 x-x+1$ 的零点是________.

5. 已知某产品的总成本 y(单位：万元)与产量 x(单位：台)之间的函数关系是 $y=3\,000+20x-0.1x^2(0<x<240, x\in\mathbf{N})$，若每台产品的售价为 25 万元，则能使生产者不亏本(销售收入不小于总成本)的最低产量是________台.

6. 设 a 为实数，若关于 x 的方程 $4^x+2^{x+1}+a=0$ 有实数解，则 a 的取值范围是________.

二、选择题

7. 在一次数学实验中，某同学运用图形计算器采集到如下一组数据：

x	-2.0	-1.0	0	1.00	2.0	3.0
y	0.24	0.51	1	2.02	3.98	8.02

在四个函数模型(a, b 为待定系数)中，最能反映 x, y 函数关系的是(　　).

A. $y=a+bx$　　B. $y=a+b^x$

C. $y=a+\log_b x$　　D. $y=a+\dfrac{b}{x}$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x-6, & x\leqslant 0,\\ \log_2(x+2)-2, & x>0\end{cases}$ 的零点个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 若存在 $x\in(-\infty,0]$ 满足 $x^2-2^x+a<0\ (a\in\mathbf{R})$，则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-1,+\infty)$

10. 设 a 为实数，若方程 $x^2-2ax+a=0$ 在区间 $(-1,1)$ 上有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-1,0)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$

三、解答题

11. 某快捷酒店有 150 个标准客房，经过一段时间的试营业，得到一些每个标准客房的价格和客房的入住率的数据如下：

标准客房的价格/元	160	140	120	100
客房的入住率	55%	65%	75%	85%

根据这些数据，要使该快捷酒店每天的营业额最高，应如何定价？

12. 已知函数 $f(x)=2^x+x-5$.

(1) 讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2) 求证：函数 $f(x)$在区间$(1, 2)$上有零点.

13. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x-3$. 求：

(1) $f(x)$的表达式；

(2) $f(x)$的零点.

14. 一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的75%，大约经过多少年，该物质的剩留量是原来的$\frac{1}{3}$？

(参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$)

15. 设函数 $f(x)=|x-a|$，$g(x)=ax$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，求 a 的值；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个解，求 a 的取值范围.

专题　数学建模与数学探究

随着科技的发展和社会的进步，数学得到了越来越广泛的应用，"数学模型"已成为人们经常谈论的一个词. 气象工作者需要天气预报的数学模型；金融工作者需要了解经济数学模型；城市规划者需要建立包括人口、交通、能源、城市环境信息的数学模型，以提供决策依据……

数学模型(mathematical model)是用数学语言模拟现实世界的一种模型，是解决实际问题时所用的一种数学结构.

数学建模(mathematical modeling)是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建数学模型解决问题的过程. 数学建模的过程可用图 1 来表示.

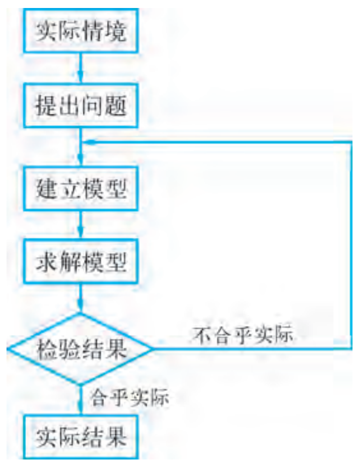


图 1

由图 1 可知，数学建模的过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，求解模型，验证结果并改进模型，最终解决实际问题.

探究是人类认识世界的一种基本方式，科学的发现、发明和创造无一不是科学探究活动的结晶. 数学探究是将科学的探究活动引入数学学习中来，它有助于我们了解数学概念和结论产生的过程，理解直观和严谨的关系，使我们能够尝试数学研究的过程，体验创造的激情，感受数学的魅力.

数学探究(mathematical inquiry)是围绕某个具体的数学问题，开展自主探究、合作研究并最终解决数学问题的过程.

数学探究具体表现为：发现和提出有意义的数学问题，猜测合理的数学结论，提出解决问题的思路和方案，通过自主探索或合作研究论证数学结论.

案例分析

1. 停车距离问题

◆ 提出问题

就一辆具体的车辆，给出急刹车后车辆的停止距离的模型. 根据模型得到的结果，针对行车安全提出建议.

◆ 建立模型

（1）问题简化与假设

影响急刹车停车距离的因素有很多，如道路和天气状况、司机的状况等. 我们考虑影响急刹车停车距离的两个主要因素：汽车行驶的速度和司机的反应时间. 这样，可以把问题简化为

停车距离＝反应距离＋刹车距离.

用 d 表示停车距离，d_1 表示反应距离，d_2 表示刹车距离，上述模型可以用数学符号表示为 $d=d_1+d_2$. 为了得到 d_1 和 d_2 的具体表达式，可以作下面的假设.

反应距离. 假设反应距离是反应时间和汽车速度的函数. 反应时间是指司机意识到应当急刹车到实施刹车所需要的时间，汽车速度是指司机在实施急刹车之前汽车的速度. 在一般情况下，反应距离 d_1 与反应时间 t、汽车速度 v 都成正比，即 $d_1=\alpha tv$，其中 α 为正的待定系数. 在现实生活中，可以知道反应时间 $t>0$，但很难确定具体数值. 因此，只能确认反应距离与汽车速度成正比，将这个关系写成 $d_1=\alpha v$，也可以认为用 α 替代了 αt.

刹车距离. 假设汽车的刹车系统和轮胎完好，那么刹车距离是刹车受力与汽车速度的函数. 对于刹车受力，假定把轮胎抱死，这样刹车受力的大小近似等于汽车轮胎与路面的摩擦力.

用 F 表示刹车受力. 基于上面的假设，汽车急刹车时所做的功为 Fd_2. 根据能量守恒定律，可以得到 $Fd_2=\frac{mv^2}{2}$，其中 m 是汽车的质量. 另一方面，如果急刹车时汽车的加速度是 a，根据牛顿第二定律，可得 $F=ma$. 综合上面的两个式子，得 $mad_2=\frac{mv^2}{2}$，即刹车距离 $d_2=\frac{v^2}{2a}$. 也就是说，刹车距离与汽车速度的平方成正比，即 $d_2=\beta v^2$，其中 β 是未知参数，它蕴含了刹车时的加速度、道路摩擦系数等一些很难确定的数值. 这样，我们就得到

$$d=d_1+d_2=\alpha v+\beta v^2.$$

模型中的参数是至关重要的，因为参数决定了模型的适用范围. 一般来说，现实模型的参数不可能通过理论计算得到，因为在构建模型的过程中有许多因素没有也不可能考虑清楚. 在现实模型中，参数值通常是通过统计方法得到的，即通过现实数据估计出来的. 大体上有三种方法可以得到现实数据：调查、实验和试验.

（2）确定参数

对于急刹车停车距离模型的参数，现实数据需要通过试验的方法得到. 表 1 中的数据是美国公路局的试验数据，是通过对小汽车试验得到的平均结果.

表 1 通过试验观察到的反应距离、刹车距离与停车距离

v/(km/h)	d_1/m	d_2/m	d/m	α	β
32	6.7	6.1	12.8	0.208	0.005 9
40	8.5	8.5	17.0	0.212	0.005 3
48	10.1	12.3	22.4	0.208	0.005 3
56	11.9	16.0	27.9	0.211	0.005 0
64	13.4	21.9	35.3	0.208	0.005 3
72	15.2	28.2	43.4	0.211	0.005 4
80	16.7	36.0	52.7	0.208	0.005 6
89	18.6	45.3	63.9	0.210	0.005 8
97	20.1	55.5	75.6	0.208	0.006 0
105	21.9	67.2	89.1	0.210	0.006 1
113	23.5	81.0	104.5	0.208	0.006 4
121	25.3	96.9	122.2	0.210	0.006 7
128	26.8	114.6	141.4	0.208	0.006 9

表 1 中共有 13 组数据，利用 $d=d_1+d_2=\alpha v+\beta v^2$，通过 $d_1=\alpha v$ 和 $d_2=\beta v^2$，可以计算出相应的 α 和 β 的值. 分别计算 α 和 β 的这 13 个数值的平均数，可以作为对未知参数的一种估计：$\alpha=0.21$，$\beta=0.006$. 这样，就通过试验数据，得到急刹车停车距离模型：

也可用“数据拟合”的方法估计参数.

$$d=0.21v+0.006v^2.$$

◆ 评价与应用

因为模型中的参数来源于实际，在一般情况下，这个模型能够经受实践的检验. 因此，这个模型普遍应用于汽车刹车的设计和路面交通的管理. 为了便于查阅，除了制作表格外，人们也给出直观图形，图 2 直观地给出了急刹车停车距离模型.

从 $d=0.21v+0.006v^2$ 中可以看到，汽车急刹车停车距离模型把加法模型与乘法模型有机地联系起来了. 当然，从表达式来看，也可以认为：急刹车停车距离是汽车速度的二次函数. 这样，从数学应用的角度可以认为，函数是构建模型的有力工具.

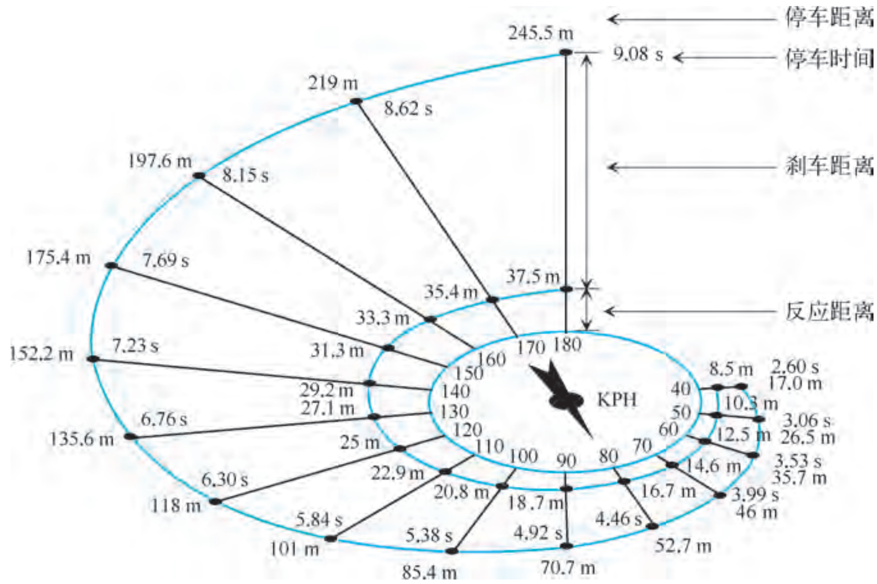


图 2　急刹车停车距离模型

案例分析

2. 函数的不动点与迭代法求方程的近似解

◆ 提出问题

对于定义在 D 上的函数 $f(x)$，如果存在实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，那么称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个不动点.

如果将方程 $g(x)=0$ 改写为 $x=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 的不动点就是方程 $g(x)=0$ 的解.

以第 8 章“函数应用”8.1 节“二分法与求方程近似解”的例 3“求方程 $\lg x=3-x$ 的近似解”为例，从函数的不动点的角度探索该方程的近似解.

◆ 问题解决思路

迭代法是探求函数不动点的一种有趣方法，基本步骤是：

(1) 将方程 $g(x)=0$ 改写成 $x=f(x)$ 的形式；

(2) 估计根的范围，给定一个初值 x_1；

(3) 将 x_1 代入 $f(x)$ 得 x_2，再将 x_2 代入 $f(x)$ 得 x_3…… 即 $x_1\to f(x_1)=x_2\to f(x_2)=x_3\to f(x_3)=x_4$……

如果前后两次得出的 x 值很接近，那么该值便是所求方程 $g(x)=0$ 的近似解. 上述过程可直观地用图 3 来表示.

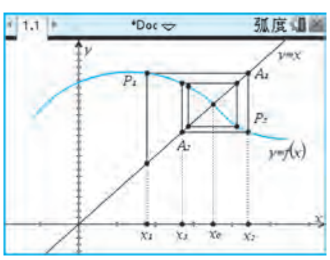


图 3

在平面直角坐标系中作出 $y=x$ 和 $y=f(x)$ 的图象，直线 $x=x_1$ 与 $y=f(x)$ 的图象交于点 P_1，过点 P_1 作 x 轴的平行线交直线 $y=x$ 于点 A_1，其横坐标即为 x_2，直线 $x=x_2$ 交 $y=f(x)$ 的图象于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的平行线交直线 $y=x$ 于点 A_2，其横坐标即为 x_3…… 如果初值选择恰当，就可使 P_n（或 A_n）当 n 增大时趋近于两曲线 $y=x$ 和 $y=f(x)$ 的交点，x_n 便是所求方程 $g(x)=0$（即 $x=f(x)$）的近

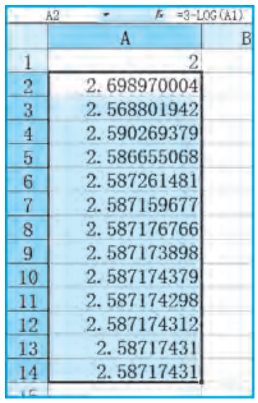
似解 x_0.

◆ 探求

(1) 将方程 $\lg x=3-x$ 改写为 $x=3-\lg x$;

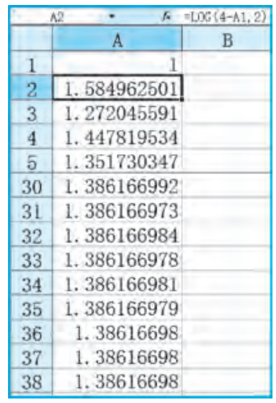
(2) 根据函数草图,原方程在(1, 3)上有唯一解,在 Excel 的单元格 A1 中输入初值 2;

(3) 在单元格 A2 内输入"=3-LOG(A1)",向下拖动 A2 的填充柄,当前后两个值一样时即得到原方程的近似解 $x\approx 2.587\ 174\ 31$(图 4).


A2 =3-LOG(A1)

	A	B
1	2	
2	2.698970004	
3	2.568801942	
4	2.590269379	
5	2.586655068	
6	2.587261481	
7	2.587159677	
8	2.587176766	
9	2.587173898	
10	2.587174379	
11	2.587174298	
12	2.587174312	
13	2.58717431	
14	2.58717431	

图 4


A2 =LOG(4-A1,2)

	A	B
1	1	
2	1.584962501	
3	1.272045591	
4	1.447819534	
5	1.351730347	
30	1.386166992	
31	1.386166973	
32	1.386166984	
33	1.386166978	
34	1.386166981	
35	1.386166979	
36	1.38616698	
37	1.38616698	
38	1.38616698	

图 5

◆ 评价与拓展

用迭代法求方程 $x=f(x)$ 的近似解,既与初值有关,又与函数 $f(x)$ 的性态有关,因而需恰当地选择 $f(x)$ 的形式和初值.

例如求方程 $2^x+x=4$ 的近似解,若将方程改写为 $x=4-2^x$,则无法用迭代法求出方程的解;若将方程改写为 $x=\log_2(4-x)$,用初值 1 进行迭代,即可求得原方程的近似解 $x\approx 1.386\ 166\ 98$(图 5).

试用迭代法求方程 $x^3=3x-1$ 的 3 个近似解.

课题研究

数学建模活动和数学探究活动可以用课题研究的形式展开. 课题研究的过程,一般包括选题、开题、做题和结题四个环节.

◆ 选题

课题可以由老师提供,也可以根据自己的兴趣爱好选择和确定;可以从教材提供的案例和背景材料中发现,也可以在网上寻找. 课题内容可以是学科知识的拓展延伸,也可以是对自然环境、生活领域和社会领域的探究;可以是已经证明的结论,也可以是未知的知识领域.

选定问题后,需要查阅大量文献来了解相关研究的结果——问题有无解决或解决的程度等,以避免出现研究方法或结果与前人一样或类似的情况.

◆ 开题

每位同学(可以组成2～3人小组)自主选择一个数学建模或数学探究课题,形成开题报告.开题报告主要包括选题的背景和意义、文献综述、解决问题的思路、研究计划、预期结果等.

开题旨在明确研究问题的方向、意义、创新点,并初步设计出解决问题的行动方案.根据要解决的问题思考:还需要哪些资料和工具?是否准备到位?制订的计划和步骤是否切实可行?对可能出现的困难和问题,是否有预案或对策?如果是合作研究,分工合作是否清楚?

◆ 做题

做题就是解决问题的过程,数学建模过程主要包括:在实际情境中发现问题、提出问题,分析问题、构建模型,求解模型,验证结果并改进模型.数学探究过程主要包括:发现和提出有意义的数学问题,猜测合理的数学结论,提出解决问题的思路和方案,研究论证数学结论.鼓励在课题研究中使用计算机或其他工具,发挥技术的优势和作用.

选定课题后,课题研究的形式可以是自主探究,也可以是同学之间的合作探究.教师应及时了解和掌握学生的活动情况,并给予必要的指导和帮助.

◆ 结题

结题包括撰写研究报告和报告研究结果,同学们可以在老师的组织下开展结题答辩.根据选题的内容,报告可以采用专题作业、测量报告、算法程序、制作实物或研究论文等多种形式.

通过主题报告的演示与表达,进行生生互评、教师点评,包括研究方案是否科学可行,解决问题的方法或技术路线是否有效新颖,自主探究或小组合作研究情况如何,课题完成质量如何等.评价旨在通过互相启迪以促进共同提高,而不是简单地进行分等评级.

开展数学课题研究,有助于提升同学们的数学建模、数学抽象、数据分析、数学运算、逻辑推理和直观想象素养.

说　明

江苏凤凰教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需求.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设合适的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识,提升他们的数学学科核心素养.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法、核心素养四条主线,通过问题将全书贯通.每个主题围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最优发展.

衷心感谢 2004 年版《普通高中课程标准实验教科书·数学》(苏教版)的主编单墫教授,副主编李善良、陈永高、王巧林,以及所有编写的专家,审读、试教教师.

众多的数学家、心理学家、数学教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写与讨论工作.史宁中、鲍建生、谭顶良等教授对教科书编写提出许多建议,陈光立、仇炳生、张乃达、祁建新等老师参与本书的编写设计与讨论,在此向他们表示衷心感谢!

感谢您使用本书,您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系,电话:025-83658737,电子邮箱:sjgzsx@126.com,lishanliang2019@126.com,466606351@qq.com.

本书编写组

2019 年 5 月