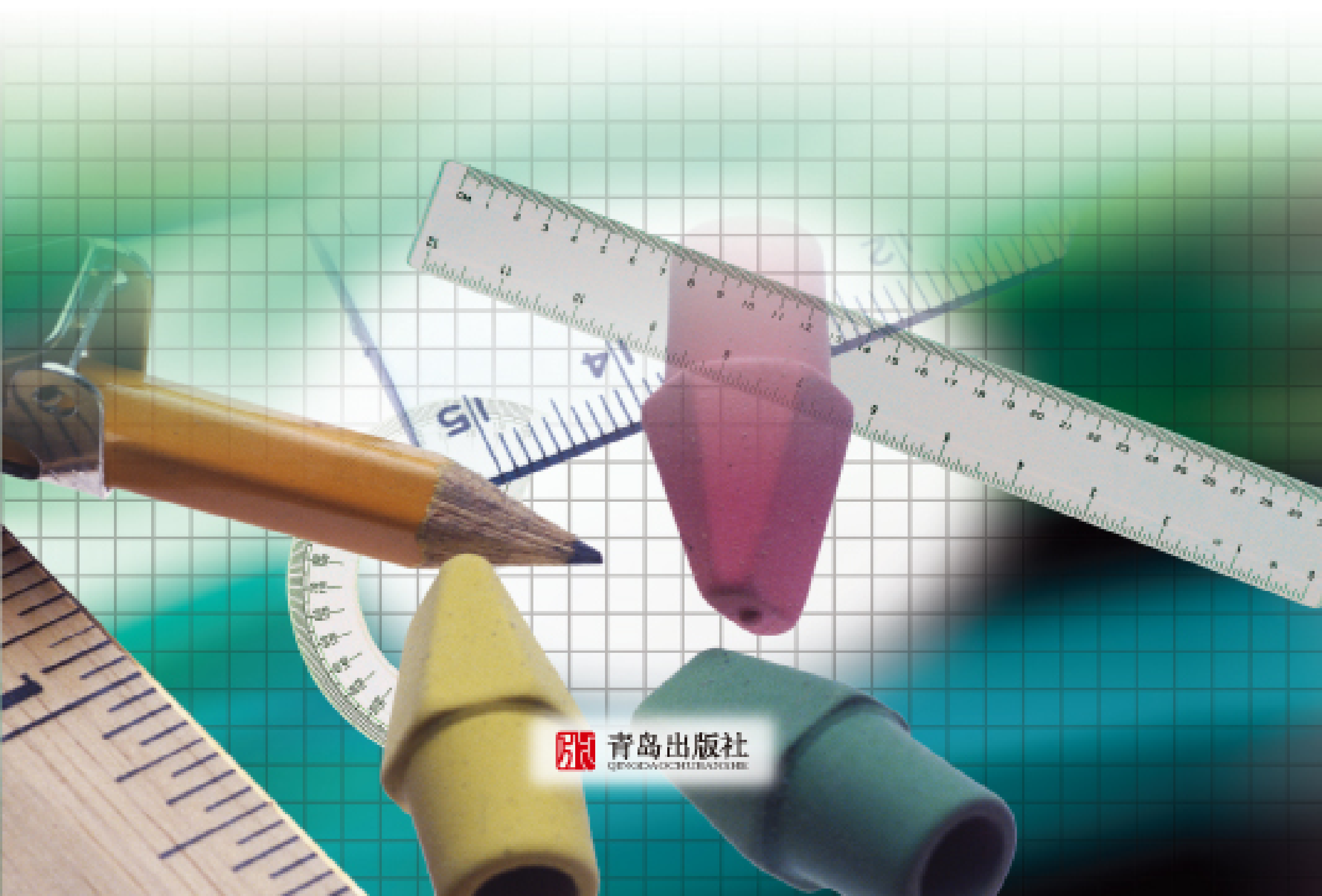
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

九年级　上册

SHUXUE



青岛出版社

义 务 教 育 教 科 书

数　学

九年级　上册

青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

书　　名　义务教育教科书　数学（九年级上册）
主　　编　展　涛
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址　http://www.qdpub.com
责任编辑　刘海波　戴振宇
美术编辑　路渊源
制　　版　济南汇海科技有限公司
印　　刷　昌邑市新华印刷有限公司
出版日期　2014 年 7 月第 2 版　2021 年 6 月第 15 次印刷
开　　本　16 开（787mm × 1092mm）
印　　张　10.5
字　　数　150 千字
书　　号　ISBN 978-7-5436-3785-6
定　　价　9.80 元
编校质量、盗版监督服务电话　4006532017　（0532）68068670
青岛版图书售出后如发现质量问题，请寄回青岛出版社印刷物资处调换。
电话：（0532）68068629

新学期寄语

亲爱的同学：

你们好！祝贺你进入九年级，开始了义务教育阶段最后一学年的学习生活，攀登上一个新的起点。

过去你已经熟悉了全等形。但生活中还有形状相同大小未必相等的图形，怎样判定两个三角形的形状相同呢？形状相同的三角形有什么性质？怎样把一个图形放大或缩小？你将在“图形的相似”中得到解答。

你到过或听说过“东方比萨斜塔”——苏州虎丘塔吗？这座塔四百多年前就开始倾斜，现在它的中心线偏离铅直方向多少度了？它与地面的倾斜角是多少？你会在“解直角三角形”中学到解决这类实际问题的本领。

在七年级，你对圆已经有了初步认识，本书将带你进一步探索圆的性质，掌握圆与角、圆与直线、圆与三角形、圆与正多边形等更为广阔的知识。通过这一章的学习，你的数学视野将会进一步扩大，你的推理能力将会进一步得到提高。

在学习了一元一次方程和分式方程的基础上，你将认识新的朋友——一元二次方程，学会它的解法，并用它解决一些实际问题，你会再次感受方程是刻画现实世界的重要的数学模型。

数学是人们生活、工作和学习必不可少的工具，也是一种文化和思维的方式。数学不仅给我们知识，而且给人以智慧、修养和力量。过去，数学一直是你的亲密伙伴，今后，数学将继续伴你茁壮成长。

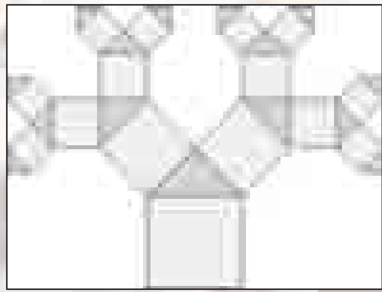
现在，就让我们走进九年级数学的新天地，继续领略数学的美妙，探索数学的奥秘吧！

目　录

第 1 章　图形的相似

内容提要

- 相似多边形
- 怎样判定三角形相似
- 相似三角形的性质
- 图形的位似



情境导航

（1）秦兵马俑坑发现于 1974 年，位于秦始皇帝陵以东 1.5 千米处。它是中国第一个皇帝秦始皇帝陵园中一处大型从葬坑．它的发现被国际上誉为“ 世界第八大奇迹 ”，被联合国教科文组织列入世界文化遗产名录．秦兵马俑以其恢弘的规模，威武的阵容和高超的科技、艺术水平，使参观者惊叹不已．

左图中的 5 张兵马俑照片，哪几个形状相同？哪几个形状相同，但大小不相等？

（2）右上图是由若干个正方形和等腰直角三角形组成的图案．你能说出这幅图案是怎样构成的吗？在这幅图案中，哪些图形的形状相同？哪些图形的形状相同但大小不相等？

1.1　相似多边形

交流与发现

五星红旗是中华人民共和国的国旗. 国旗上的左上角有五颗五角星（图 1-1）. 这五颗五角星的形状相同吗? 大小相等吗?

图 1-1

在现实生活中，你还见过形状相同但大小未必相等的图形吗?

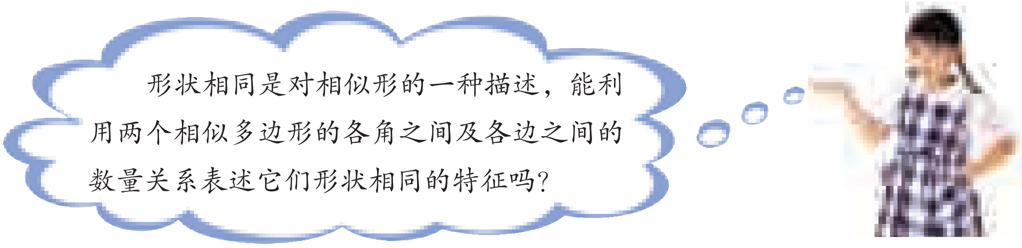
形状相同的平面图形叫做**相似形**（similar figures）.

全等形与相似形有什么关系?

观察与思考

小莹在电脑上任意画出一个四边形 $ABCD$（图 1-2 ①），并将它按原大复制下来，得到四边形 $A'B'C'D'$（图 1-2 ②）. 然后将四边形 $ABCD$ 各角的大小保持不变，将它的各边同时放大 $\frac{5}{4}$ 倍，得到四边形 $A''B''C''D''$（图 1-2 ③）. 再将四边形 $ABCD$ 各角的大小保持不变，将它的各边同时缩小 $\frac{2}{3}$，得到四边形 $A'''B'''C'''D'''$（图1-2 ④），把这四个四边形打印在同一张纸上（图 1-2）.

（1）观察得到的四个四边形，你发现它们的形状和大小有什么特征？它们是相似形吗？



（2）观察图 1–2 ① 和 ③，在四边形 $ABCD$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 中，$\angle A$ 与 $\angle A''$，$\angle B$ 与 $\angle B''$，$\angle C$ 与 $\angle C''$，$\angle D$ 与 $\angle D''$ 之间分别具有怎样的数量关系？相应的各边的比 $\dfrac{AB}{A''B''}$，$\dfrac{BC}{B''C''}$，$\dfrac{CD}{C''D''}$，$\dfrac{DA}{D''A''}$ 之间有怎样的关系？

（3）观察图 1–2 ① 和 ④，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'''B'''C'''D'''$ 相应的各角及相应的各边分别具有怎样的数量关系？图 ③ 和图 ④ 呢？

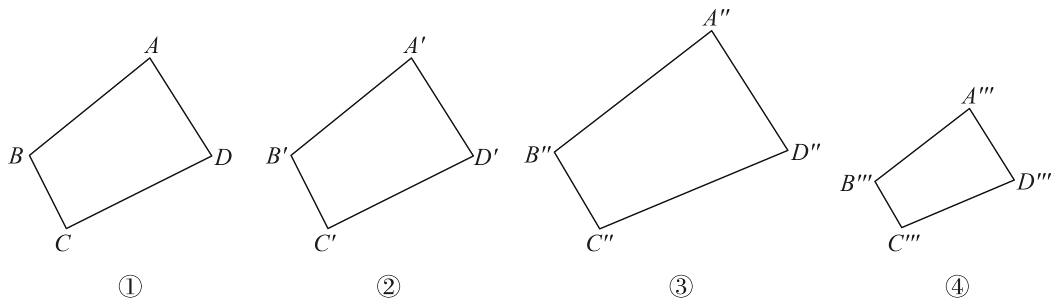


图 1–2

由上面的探究过程，我们发现：把四边形 $ABCD$ 复制、放大或缩小后，所得到的四边形与原来的四边形相似，它们的各个角对应相等，各边对应成比例. 反过来，如果一个四边形与四边形 $ABCD$ 的各角对应相等，并且各边对应成比例，那么这个四边形与四边形 $ABCD$ 形状相同，也就是说，这个四边形与四边形 $ABCD$ 相似. 由此，可以给出相似多边形的定义：

两个边数相同的多边形，如果一个多边形的各个角与另一个多边形的各个角对应相等，各边对应成比例，那么这两个多边形叫做**相似多边形**（similar polygons）.

如图 1–2，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 相似，记作四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A''B''C''D''$. 符号“∽”读作“相似于”. 与三角形全等的表示方法一

样，在记两个多边形相似时，要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

相似多边形对应边的比叫做**相似比**（similarity ratio）. 例如，在图 1−2 中，四边形 $A''B''C''D''$ 与四边形 $ABCD$ 的相似比为 $\frac{5}{4}$，或说成 $5:4$. 四边形 $A'''B'''C'''D'''$ 与四边形 $ABCD$ 的相似比为 $\frac{2}{3}$. 当两个多边形全等时，其相似比为 1；反之，如果两个相似多边形的相似比为 1，那么这两个多边形全等.

例 1　如图 1−3，已知四边形 $AEFD \backsim$ 四边形 $EBCF$.

（1）写出它们相等的角及对应边的比例式；

（2）若 $AD=3$，$EF=4$，求 BC 的长.

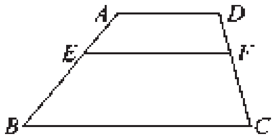


图 1−3

解　（1）在四边形 $AEFD$ 和四边形 $EBCF$ 中，

$\because$ 四边形$AEFD \backsim$ 四边形$EBCF$，

$\therefore \angle A=\angle BEF$，$\angle AEF=\angle B$，$\angle DFE=\angle C$，$\angle D=\angle EFC$.

并且 $\frac{AE}{EB}=\frac{EF}{BC}=\frac{DF}{FC}=\frac{AD}{EF}$.

（2）$\because AD=3$，$EF=4$. 代入 $\frac{EF}{BC}=\frac{AD}{EF}$ 得

$$\frac{4}{BC}=\frac{3}{4}.$$

解得　$BC=\frac{16}{3}$.

挑战自我

由两个多边形的各个角分别相等，能断定它们相似吗？由两个多边形的边对应成比例，能断定它们相似吗？如果不能，请分别举出反例；如果能，说明你的理由.

史海漫游

漫谈相似形

我们知道，形状相同的平面图形叫做相似形，形状相同且大小相等的图形叫做全等形. 因此，全等形是相似形的特殊情况. 两个全等多边形是相似比为 1 的相似多边形.

人类对相似形的研究和应用，有着悠久的历史.

古希腊数学家泰勒斯（Thalcs，约公元前 625 — 公元前 547）是希腊几何学的先驱，早于欧几里得约 300 年，他已开始了对全等三角形和相似三角形的研究. 在他提出的为数不多的几何命题中，就有“两角及其夹边分别相等的两个三角形全等”，并根据相似三角形的原理，利用金字塔的塔高与垂直于地面的木杆的杆高之比等于它们的影长之比，测量出了埃及金字塔的高度.

欧几里得的《原本》中，在系统地建立了与全等形有关的知识体系后，专门有两卷（第Ⅴ卷和第Ⅵ卷）研究了比例论和相似图形.

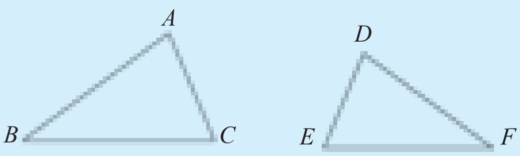
1679年，德国数学家莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）在研究图形的相似问题时，产生了一个奇妙的想法，他把拉丁字母 S 横过来，把相似符号写成“∼”，用“∽”表示全等. 后人在此基础上，创造了全等符号“≌”，其中上面的“∽”表示两个图形相似，下面的“=”表示两个图形的大小相等，这充分反映了两个全等形形状相同、大小相等的本质.

正因为相似符号“∽”和全等符号“≌”具有直观、简便等优点，所以这两个符号被数学界沿用至今.


莱布尼兹

练 习

1. 三角形与四边形能相似吗？等边三角形与直角三角形能相似吗？为什么？
2. 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle DFE$，点 A 与点 D，点 B 与点 F 是对应顶点. 请写出它们的对应角、对应边以及对应边之间的比例式.



（第 2 题）

习题1.1

复习与巩固

1. 如果五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$，且五边形 $ABCDE$ 与 $A'B'C'D'E'$ 的相似比为 k_1，五边形 $A'B'C'D'E'$ 与 $ABCDE$ 的相似比为 k_2，那么 k_1 与 k_2 满足怎样的数量关系？
2. 如图，已知 $\triangle DEA \backsim \triangle BCA$，

（1）$BC /\!/ DE$ 吗？为什么？

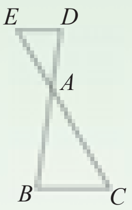
（2）如果 $BC=3.6$，$ED=2.4$，$AE=5$，求 AC 的长.

3. 如图，四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $PQRS$，$BC=8$，$QR=10$，$PS=6$，$\angle B=64°$. 求：

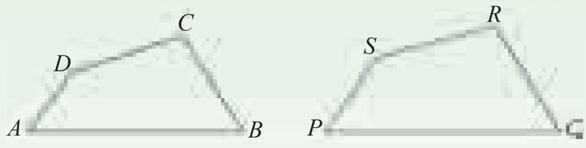
（1）$\angle Q$ 的度数；

（2）AD 的长；

（3）求四边形 $ABCD$ 与四边形 $PQRS$ 的相似比.



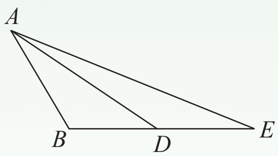
（第 2 题）



（第 3 题）

拓展与延伸

4. 如图，$\triangle BEA$ ∽ $\triangle BAD$，写出图中所有相等的角和成比例线段的比例式.



（第 4 题）

探索与创新

5. 已知 $\triangle ABC$ ∽ $\triangle DEF$，如果 $BC=3$，$CA=4$，$AB=6$，$\triangle DEF$ 的最短边长为 2. 求：

（1）$\triangle DEF$ 各边的长；

（2）$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比.

1.2　怎样判定三角形相似

实验与探究

（1）如图 1–4，直线 l_1，l_2 被平行直线 l_3，l_4 所截，交点分别为 A，B，C，D. 过线段 AB 的中点 E，作直线 $l_5 /\!/ l_4$，交 l_2 于点 F. F 是线段 DC 的中点吗？如果是，证明你的结论.

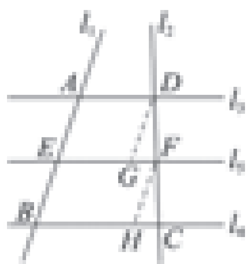
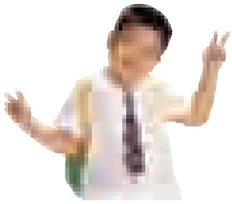


图 1–4



要证明 $DF = FC$，如果能把它们放在两个全等三角形中就好办了.

过 D 作 $DG /\!/ l_1$，交 l_5 于点 G，过 F 作 $FH /\!/ l_1$，交 l_4 于点 H，由已知 $AE = EB$，可推出 $DG = FH$. 再设法证明 $\triangle DGF \cong \triangle FHC$（AAS），便能推出 $DF = FC$.

上面的结论还可以说成：直线 l_1，l_2 被三条平行直线 l_3，l_4，l_5 所截，如果在 l_1 上截得的两条线段的比等于 1∶1，那么在 l_2 上截得的两条线段的比也等于 1∶1，也就是说这时截得的四条线段成比例.

如果 l_1 被 l_3，l_4，l_5 所截得的线段不相等，上面的结论能进一步推广吗？

（2）在图 1-4 中，如果再取 AE 的中点 P，过点 P 作直线 $l_6 /\!/ l_3$ 交 l_2 于点 Q（图 1-5①），此时对应线段 AP，PB，DQ，QC 成比例吗？为什么？如果取 EB 的中点 P_1，过点 P_1 作直线 $l_7 /\!/ l_3$，交 l_2 于点 Q_1（图 1-5②）. 你发现 l_1，l_2 被平行线 l_3，l_7，l_4 截得的对应线段 AP_1，P_1B，DQ_1，Q_1C 成比例吗（图 1-5②）？

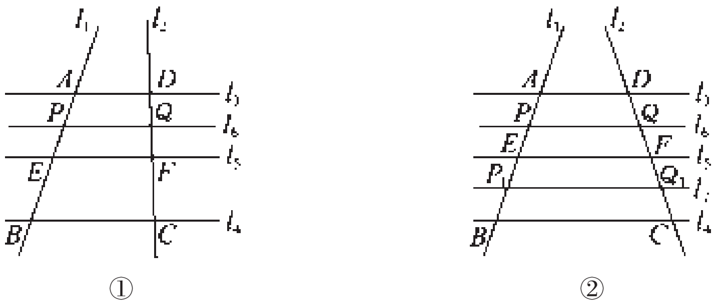


图 1-5

在图 1-5① 中，由 E 是 AB 的中点，P 是 AE 的中点，可得

$$AE = EB = \frac{1}{2}AB,\qquad AP = PE = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}AB,$$

$$PB = PE + EB = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{4}AB.$$

∴ $$\frac{AP}{PB} = \frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{1}{3}.$$

另一方面，由 $l_6 // l_3 // l_5 // l_4$，利用（1）的结论，可知

$$DF = FC，DQ = QF，$$

于是 $$DQ = QF = \frac{1}{4}DC，QC = QF + FC = \frac{3}{4}DC.$$

∴ $$\frac{DQ}{QC} = \frac{1}{3}.$$

∴ $$\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}.$$

在图 1-5②中，类似地可以得到

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{DQ_1}{Q_1C},$$

即 AP_1，P_1B，DQ_1，Q_1C 是成比例线段.

（3）在图 1-5①中，再继续取 AP 的中点 P_2，或 PE 的中点 P_3，或 PB 的中点 P_4，或 AP_4 的中点 P_5，分别过这些点作 l_3 的平行线，重复（2）中的推理过程，还可得到

$$\frac{AP_i}{P_iB} = \frac{DQ_i}{Q_iC}\ (i = 1，2，3，\cdots).$$

（4）一般地，如果任意两条直线 l_1，l_2 被一组平行直线 l_3，l_4，l_5 所截，交点分别是点 A，B，C；D，E，F（图 1-6）. 都有 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

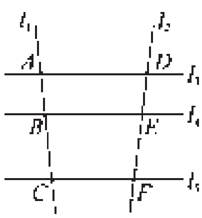


图 1-6

（5）在图 1-6 中，利用比例的基本性质，你能得到 $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$，$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ 吗？你还可以得到哪些比例式？

在本书中，把下面的命题作为第 9 个基本事实：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

（6）特别地，在△ABC中，$DE\parallel BC$．线段AD，AB，AE，AC成比例吗？线段AD，AB，DE，BC呢？

过点A作直线$l\parallel BC$（图1−7），则$l\parallel DE$，于是$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$（基本事实9）．

过D作$DF\parallel AC$，交BC于点F（图1−8），则$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CF}{CB}$（基本事实9）．

$\because DE\parallel BC$，$DF\parallel AC$，

$\therefore$ 四边形$DFCE$是平行四边形．

$\therefore DE=CF$．

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$．

从而$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$．

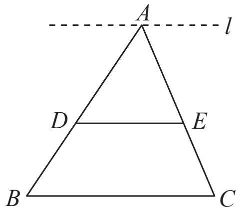


图 1−7

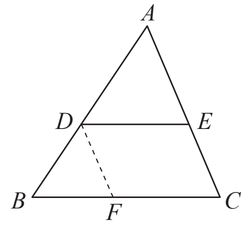


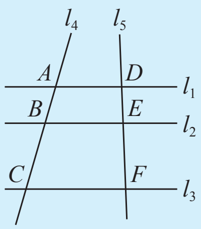
图 1−8

于是，就得到基本事实9的一个推论：

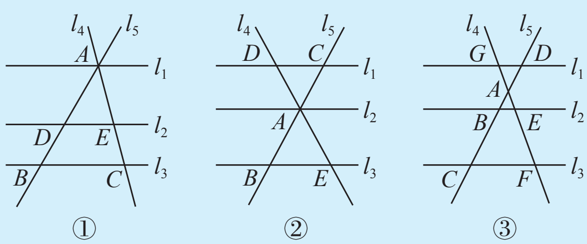
推论　平行于三角形的一边，并且与其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例．

练 习

1. 如图，已知直线$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，$DE=2.4$ cm，求DF的长．
2. 如图，已知直线$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，直线$l_4$，$l_5$分别与$l_1$，$l_2$，$l_3$相交，直线$l_4$与$l_5$相交于点$A$，如图①②③．分别写出图中对应线段的比例式．



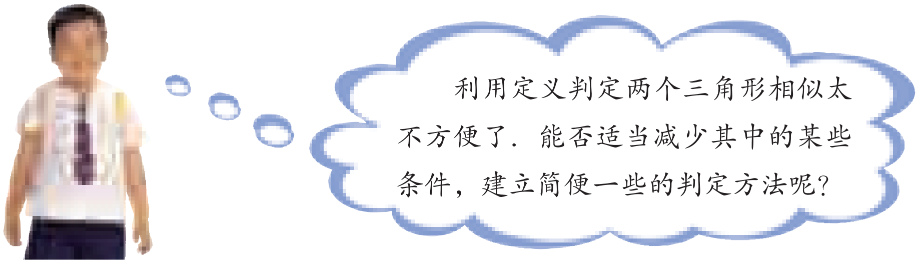
（第 1 题）



（第 2 题）

实验与探究

（1）相似三角形是最简单、最常见的相似多边形. 你能根据相似多边形的定义说出两个怎样的三角形是相似三角形吗？怎样判定两个三角形是相似三角形呢？



（2）我们知道，两个三角形有 6 对元素，只要其中的 3 对元素符合下面的一种情况，就可以判定这两个三角形全等：

①两角及其夹边分别相等；

②两角及其中一组等角的对边分别相等；

③两边及其夹角分别相等；

④三边分别相等.

在①和②两种情况中，都包含三个条件：两角相等及其中某一边分别相等，由于相似三角形对应边的长可以不相等，如果把其中一边相等的条件去掉，仅保留两角分别相等的条件，能判定这两个三角形相似吗？

（3）任意画$\triangle ABC$，然后再作一个$\triangle A'B'C'$，使$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$（图 1–9）. 观察这两个三角形，它们的形状相同吗？怎样判定它们相似呢？

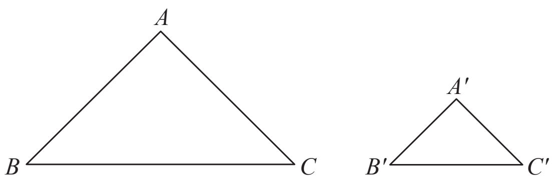
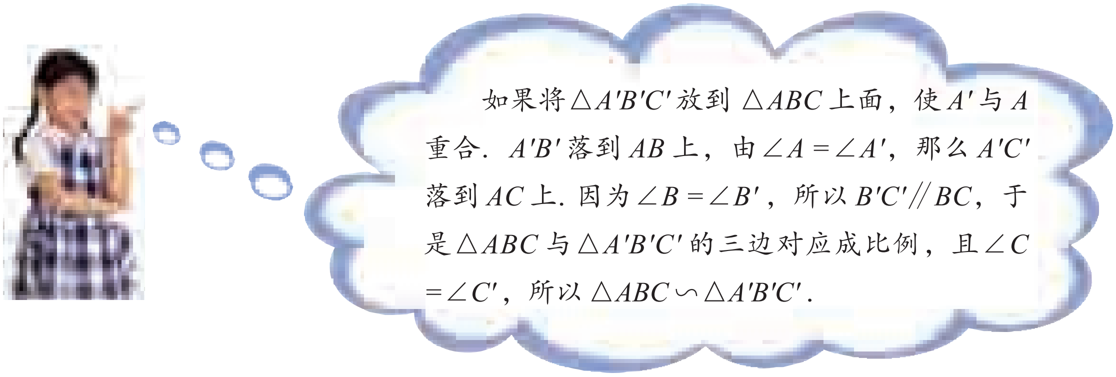


图 1–9



（4）小莹利用实验的方法探索发现了命题“两角分别相等的三角形是相似三角形”．你能在她的思路的基础上，完成这一命题的证明吗？

***证明**[1] 在 AB 边（当 $AB < A'B'$ 时，在其延长线）上截取 $AD = A'B'$，过点 D 作 $DE // BC$，交 AC 于点 E（图 1−10）．则 $\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$．

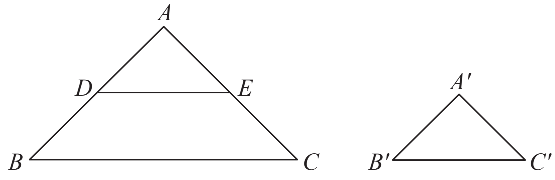


图 1−10

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because$ $AD = A'B'$，$\angle A = \angle A'$，

又 $\because \angle B = \angle B'$，$\therefore \angle ADE = \angle B'$．

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$（ASA）．

$\therefore$ $\angle AED = \angle C'$，$\angle C = \angle C'$．

由基本事实 9 的推论可知：

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

$\because$ $AE = A'C'$，$DE = B'C'$．

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

根据相似三角形的意义，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$．

于是，便得到

相似三角形的判定定理 1　两角分别相等的两个三角形相似．

例 1 如图 1−11，已知点 B，D 分别是 $\angle A$ 的两边 AC，AE 上的点，连接 BE，CD，相交于点 O，如果 $\angle 1 = \angle 2$，图中有哪几对相似三角形？说明理由．

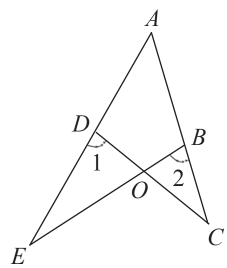


图 1−11

解 $\triangle DOE \backsim \triangle BOC$，$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$．理由是：

因为 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle DOE = \angle BOC$，由判定定理 1，所以 $\triangle DOE \backsim \triangle BOC$．

同理，由 $\angle E = \angle C$，$\angle A = \angle A$，所以 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$．

[1] 相似三角形的判定定理 1 及后面的判定定理 2，3 的证明为选学内容，不作考试要求．

挑战自我

如图（图 1–12）. B，C 分别是 $\angle A$ 两边上的任意一点. 过点 B 作 $BD \perp AC$，垂足为点 D. 过点 C 作 $CE \perp AB$，垂足为点 E. BD，CE 相交于点 F. 图中共有哪几对相似三角形？说明理由.

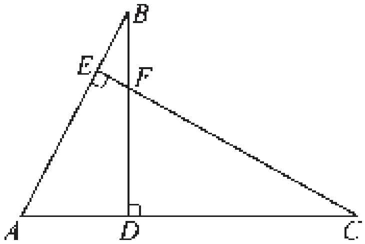
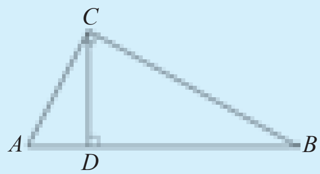


图 1–12

练 习

1. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A = 68°$，$\angle B = 40°$，$\angle A' = 68°$，$\angle C' = 72°$，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是否相似？为什么？
2. 如图，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高.
   （1）$\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 相似吗？为什么？
   （2）图中还有哪几对相似三角形？说明理由.



（第 2 题）

观察与思考

（1）我们知道，两边及其夹角分别相等的两个三角形全等. 如果把其中两边相等的条件改为："两个三角形的两边成比例"，保留 "夹角相等" 的条件，这两个三角形相似吗？

（2）如图 1–13，已知 $\triangle ABC$，作 $\angle A' = \angle A$，然后将 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的两边按一定的比例同时缩小（或放大）得到 $\triangle A'B'C'$，这时 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 的两边的关系满足 $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$. 观察所得到的 $\triangle A'B'C'$，它与 $\triangle ABC$ 相似吗？怎样才能证明你的结论呢？

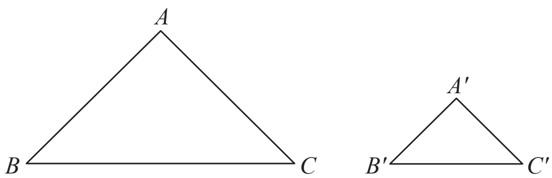


图 1–13

由已知 $\angle A = \angle A'$，能仿照判定定理 1 的证明思路，在 $\triangle ABC$ 上截得一个与 $\triangle A'B'C'$ 全等且与 $\triangle ABC$ 相似的三角形吗？

＊证明 如图 1−14，在 AB（或它的延长线）上截取 $AD=A'B'$，过点 D 作 $DE/\!/BC$，交 AC 于点 E．于是

$$\angle B=\angle ADE \text{ 且 } \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\text{（基本事实9的推论）．} \quad ①$$

$$\because \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}, \quad ②$$

$AD=A'B'$，比较①②两式左边和右边，

$$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{A'C'}{AC}.$$

$\therefore AE=A'C'$．

$\because \angle A=\angle A'$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$（SAS）．

$\therefore \angle ADE=\angle B'$，$\angle B=\angle B'$．

$\therefore \triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$（相似三角形的判定定理1）．

于是，便得到

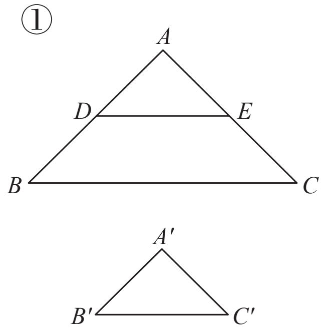


图 1−14

相似三角形的判定定理2　两边成比例，且夹角相等的两个三角形相似．

例2 如图 1−15，$AD=3$，$AE=4$，$BE=5$，$CD=9$．$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？说明理由．

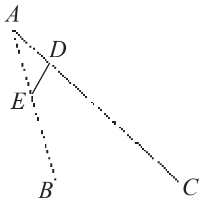


图 1−15

解 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$．理由是：

由 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{4+5}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{4}{3+9}=\dfrac{1}{3}$，可以得到 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$．

$\because \angle EAD=\angle CAB$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$（相似三角形的判定定理2）．

挑战自我

如图 1−16，$ABCD$，$CDEF$，$EFGH$ 是三个相连的正方形，连接 AC，AF，AG．你能证明 $\angle FAC=\angle AGC$ 吗？试一试．

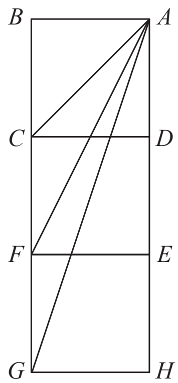
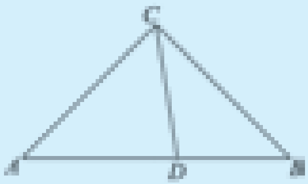


图 1−16

练 习

1. 选择题：如图，$\triangle ACD$与$\triangle ABC$相似的条件是（　　）.



（第 1 题）

（A）$AC : CD = AB : BC$

（B）$CD : AD = AB : AC$

（C）$AC^2 = AD \cdot AB$

（D）$CD^2 = AD \cdot DB$

2. 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中. $\angle B = B'$，AD，$A'D'$分别是$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$的角平分线，且$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{A'B'}{B'D'}$. $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似吗？说明你的理由.

观察与思考

（1）我们知道，三边分别相等的两个三角形全等. 如果把条件“三边相等”改为“三条边成比例”，这两个三角形相似吗？

（2）如图1-17，把$\triangle ABC$的三边按一定的比例缩小（或放大）后得到$\triangle A'B'C'$，这时两个三角形三边之间的关系满足$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$. 观察所得到的$\triangle A'B'C'$，它与$\triangle ABC$相似吗？怎样才能证明你的结论呢？

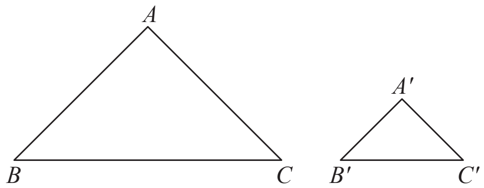


图 1-17

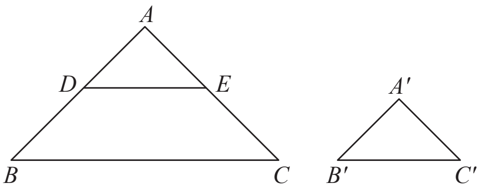


图 1-18

与证明相似三角形的判定定理 1，2 类似，如果能在$\triangle ABC$中用平行于BC边的直线截得一个$\triangle ADE$，使它与$\triangle A'B'C'$全等，并与$\triangle ABC$相似，问题就可以解决.

***证明**　如图1-18，在AB（或它的延长线）上截取$AD = A'B'$. 过点D作$DE /\!/ BC$，交AC于点E. 于是

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}\text{（基本事实9推论）}. \quad ①$$

$\because \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$，　　　　②

$AD=A'B'$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{A'B'}{AB}$.

比较①②可得，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{A'C'}{AC}$，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

$\therefore AE=A'C'$，$DE=B'C'$.

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$（SSS）.

$\therefore \angle A=\angle A'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（相似三角形的判定定理2）.

于是，便得到

相似三角形判定定理3　三边成比例的两个三角形相似.

例3　如图1−19，已知$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$. 不另外添加字母，写出图中相等的角，并说明理由.

要找出图中相等的角，先要根据已知条件$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，找出$AB$，$BC$，$AC$和$AD$，$DE$，$AE$分别所在的三角形，再判定这两个三角形相似就可以找出相等的角了.

解　在$\triangle ABC$与$\triangle ADE$中，

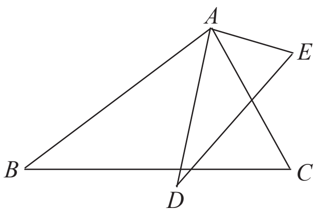


图1−19

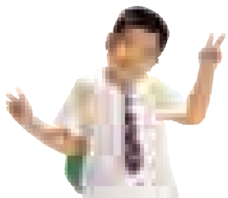
$\because \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（相似三角形的判定定理3）.

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ADE$，$\angle C=\angle E$.

由$\angle BAC=\angle DAE$还可推出$\angle BAD=\angle CAE$.

利用相似三角形可以证明角的相等.



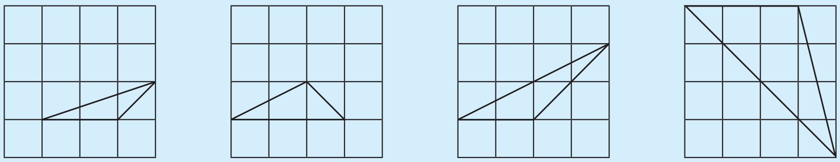
挑战自我

（1）如果两个三角形的三条边的比都是3∶4∶5，这两个三角形相似吗？

（2）在什么条件下两个等腰三角形相似？在什么条件下两个直角三角形相似？

练 习

1. 在如图所示的正方形网格中，各画有一个格点三角形. 找出其中的相似三角形.



（第 1 题）

2. 已知三角形三边的长分别为4，5，6，画出与它相似的另一个三角形，使它的一条边长为2 . 你能画出几种符合要求的三角形？与同学交流.

例4　如图 1–20，为了测量一座水塔的高度，在阳光下，小亮走进水塔的影子里，使自己的影子刚好被水塔的影子遮住. 已知小亮的身高 $BC=1.6$ m，此时，他的影子的长 $AC=1$ m，他距水塔的底部 E 处 11.5 m，水塔的顶部为点 D . 根据以上数据，你能算出水塔的高度 DE 是多少吗？

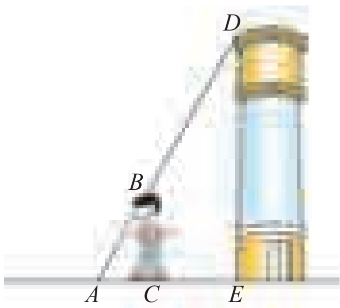


图 1–20

解　如图 1–20，

$\because \angle BAC=\angle DAE$，$\angle BCA=\angle DEA=90°$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（相似三角形的判定定理 1）.

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$.

$\because AC=1$ m，$CE=11.5$ m，$BC=1.6$ m，$AE=AC+CE=1+11.5=12.5$（m），

$\therefore \dfrac{DE}{1.6}=\dfrac{12.5}{1}$.　　　$\therefore DE=20$（m）.

即水塔的高度为20 m .

按照例 4 的方法，你会测量教室附近一根电线杆的高度吗？与同学一起试一试.

挑战自我

小亮在测量一根电线杆的高度时，恰逢阴天，物体没有影子，于是他设计了测量电线杆高度的另一种方案：先在地面的适当位置平放一面小镜子，然后他看着镜子中电线杆的像，沿着电线杆的底部与镜子所在的直线一步步向后退，一直退到在镜子中刚好能看到电线杆的顶端为止（图1−21）. 这时，分别量出他到镜子以及镜子到电线杆底部的距离和他的眼睛到地面的距离，就可算出电线杆的高.

图 1−21

你认为小亮的这个方案是否可行？它的原理是什么？

如果认为可行，请用这种方法测出你们学校某幢建筑物的高度.

史海漫游

陈子测日

太阳给人类和自然界的生存与延续提供了宝贵的能源. 太阳离地球究竟有多远？自古以来，人们就在寻找这一问题的答案.

在我国，约公元前 1 世纪成书的《周髀算经》中有陈子测日的记载[1]. 陈子是公元前 6−7 世纪人，与测量金字塔高度的古希腊人泰勒斯是同一时期的人. 他采用的方法如下：如图 1−22，S 表示太阳，C 是太阳正下方的点，在夏至时，分别

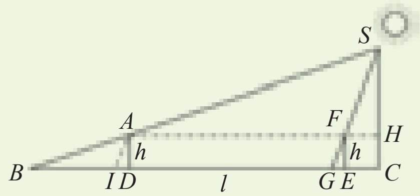


图 1−22

[1] 见《周髀算经》卷上之二，陈子曰：“日中立杆测影，……髀长 8 尺，夏至之日，晷 1 尺 6 寸，髀者，股也. 正晷者，勾也. 正南千里，勾 1 尺 5 寸，正北千里，勾 1 尺 7 寸.”

在 D，E 两处立杆（即“髀”）AD 和 FE，BD 和 GE 分别是杆 AD，FE 在中午时的影子. 记杆高为 h，杆距 DE 为 l，两杆日影差为 d（$d=BD-GE$）. 这里 h，l，d 均可测出，由 h，l，d 可计算出日高 SC.《周髀算经》相当于给出了日高公式：日高 $SC=\dfrac{hl}{d}+h$.

这一测量公式当初是怎样推出的，后人颇多探讨，并无定论. 但我们可以用相似三角形对应边成比例的原理加以解释.

在图 1−22 中，作 $AI\mathbin{/\!/}SG$. 由 $\triangle SHF \backsim \triangle ADI$，$\triangle SFA \backsim \triangle AIB$，得

$$\frac{SF}{AI}=\frac{SH}{AD}=\frac{HF}{DI},\quad \frac{SF}{AI}=\frac{AF}{BI}.$$

所以 $$\frac{SH}{AD}=\frac{AF}{BI},$$

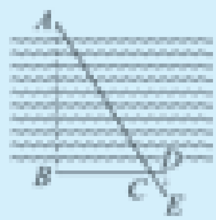
因此 $$SH=\frac{AD\cdot AF}{BI}.$$

$\because AD=HC=h$，$AF=DE=l$，$ID=GE$，$BI=BD-ID=BD-GE=d$，

$\therefore SC=\dfrac{AD\cdot AF}{BI}+HC=\dfrac{hl}{d}+h$.

练习

1. 如图，小亮要测量河流两岸 A，B 两点间的距离. 他先从 B 处出发，沿与 AB 成 90° 角的方向向前走 50 m 到 C 处，立一竹竿，然后继续按这个方向朝前走 10 m 到 D 处转 90°，沿 DE 方向再到 E 处，使 A（目标），C（竹竿）与 E 在同一条直线上，量得 $DE=17$ m，利用以上数据，他是怎样求出 A，B 两点间距离的呢?



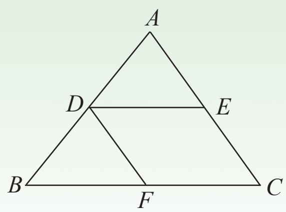
（第 1 题）

2. 在第 1 题中，除了小亮设计的方案外，你还能利用相似三角形的知识，设计出另外的方案吗?

习题1.2

复习与巩固

1. 如图，已知 $DE\mathbin{/\!/}BC$，$DF\mathbin{/\!/}AC$. 指出与 $\triangle ADE$ 相似的三角形，并说明理由.



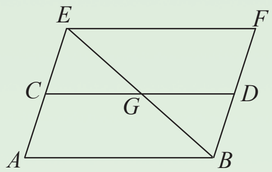
（第 1 题）

2. 已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

（1）如果 $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似吗? 为什么?

（2）如果$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$，那么$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$相似吗？为什么？

3. 如图，已知$EF /\!/ CD /\!/ AB$，$EA /\!/ FB$.



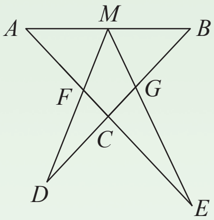
（第 3 题）

（1）写出所有与$\triangle ECG$相似的三角形；

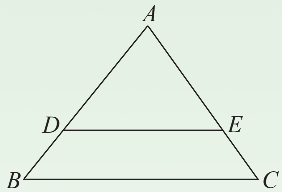
（2）填空：$\dfrac{EC}{EA}=\dfrac{EG}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{AB}$，

$\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BG}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{EF}$.

4. 如图，AE与BD相交于点C，$\angle DME=\angle A=\angle B$，且$DM$交$AC$于点$F$，$ME$交$BC$于点$G$.写出图中三对相似三角形，并选任一对说明其相似的理由.



（第 4 题）

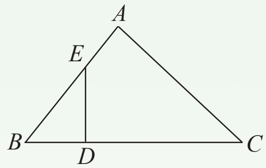


（第 5 题）

5. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E分别是边AB，AC上的点，且$AD=\dfrac{2}{3}AB$，$AE=\dfrac{2}{3}AC$.$DE /\!/ BC$吗？为什么？

6. 在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，已知$\angle B=\angle E$，且$AB \cdot EF = DE \cdot BC$.这两个三角形相似吗？为什么？

7. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$AE=2$，$BE=3$，$DB=AE$，$BC=7.5$.



（第 7 题）

（1）$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$吗？为什么？

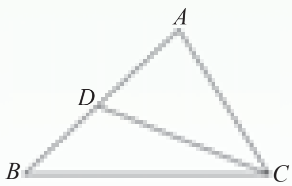
（2）如果$DE=2.5$，那么AC的长是多少？

8. 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，已知$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，$B'C'=a'$，$C'A'=b'$，并且$a:a'=b:b'$.当$A'B'$为多少时（用a，a'，c或b，b'，c表示），$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似？

9. 大刚的身高为 1.7 m，测得他站立在阳光下的影子长为 0.85 m，他把一只手臂竖直向上举起，测得影子长为 1.1 m，大刚举起手臂超过头顶多少米？

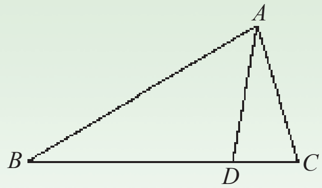
拓展与延伸

10. 如图，在$\triangle ABC$中，已知D是边AB上的一点，连接CD，那么还需要增加一个什么条件，才能使$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$？



（第 10 题）

11. 如图，在$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle BAC=\angle ADC$，$AC=8$，$BC=16$，求CD的长.



（第 11 题）

探索与创新

12. P是Rt$\triangle ABC$的斜边AB上异于A，B的一点，过点P作直线截$\triangle ABC$，使截得的三角形与$\triangle ABC$相似，满足这样条件的直线有几条？画出图形，并说明理由.

1.3　相似三角形的性质

我们知道，全等三角形的对应线段（对应边上的高、对应边上的中线、对应角的平分线）相等、面积相等，那么，相似三角形对应线段具有什么性质呢？相似三角形的面积具有什么性质呢？

交流与发现

如图 1–23，已知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为$k$．$AD$与$A'D'$分别是对应边$BC$与$B'C'$上的高.

（1）除$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$以外，图中还有几对相似三角形？为什么？

（2）AD与$A'D'$的比与相似比k有什么关系？

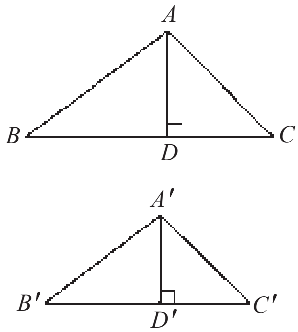


图 1–23

因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，所以$\angle B=\angle B'$，又因为$\angle ADB=\angle A'D'B'=90°$，所以$\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$．同样地，$\triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$．

$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.

（3）在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，分别作出$\angle A$与$\angle A'$的平分线以及BC与$B'C'$上的中线，探索对应的角平分线的比、对应边上中线的比分别与相似比k之间的关系，说明你的理由，与同学交流.

（4）$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的面积的比$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A'B'C'}$与相似比$k$有怎样的关系？

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2.$$

（5）归纳（2）（3）（4）的结论，能得到相似三角形的什么性质？

相似三角形对应线段的比等于相似比；面积的比等于相似比的平方.

例1 如图1–24，在$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，$AD:DB=3:1$，$\triangle ABC$的面积为48．求$\triangle ADE$的面积.

解 在$\triangle ADE$和$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle A$，由$DE\parallel BC$，可知$\angle ADE=\angle B$，根据判定定理1，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$．

于是 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2.$

由$AD:DB=3:1$，得$AD=3DB$，

从而 $AB=AD+DB=4DB$，

所以 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3DB}{4DB}=\dfrac{3}{4}.$

因为$S_{\triangle ABC}=48$，所以$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{48}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2.$

解得

$$S_{\triangle ADE}=\frac{9}{16}\times 48=27.$$

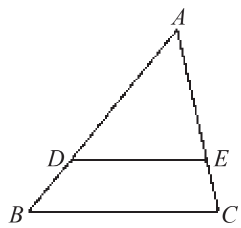


图 1–24

例2 如图1–25，有一块锐角三角形余料ABC，它的边$BC=12$ cm，高$AD=8$ cm．现要用它裁出一个正方形工件，使正方形的一边在BC上，其余的两个顶点分别在AB，AC上，求裁出的正方形工件的边长.

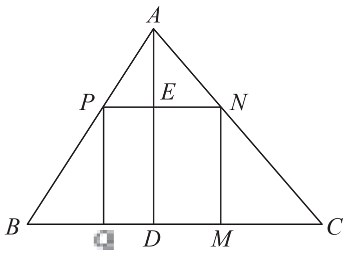


图 1–25

解 在$\triangle ABC$中，设裁出的正方形为$PQMN$.

$\because PN /\!/ BC$，

$\therefore \angle APN = \angle B$.

$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle APN \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{PN}{BC} = \dfrac{AE}{AD}$（相似三角形的性质定理）.

设$PN = x$，则$AE = 8 - x$.

$\because BC = 12$，$AD = 8$，

$\therefore \dfrac{x}{12} = \dfrac{8-x}{8}$.

解得 $x = \dfrac{24}{5}$.

$\therefore$裁出的正方形工件的边长为$\dfrac{24}{5}$ cm.

挑战自我

（1）在例2中，如果并排放置的由2个全等的小正方形组成的矩形内接于$\triangle ABC$（图1–26），那么小正方形的边长为多少？并排放置3个全等的小正方形呢？

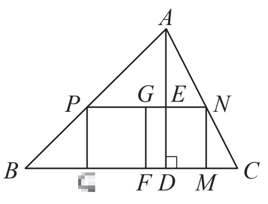


图 1–26

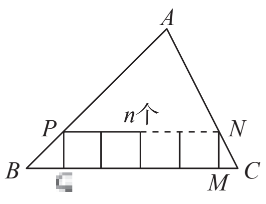


图 1–27

（2）如图1–27，如果在$\triangle ABC$中并排放n个这样的小正方形，你猜测小正方形的边长为多少？说明你的理由.

练 习

1. 两个相似三角形对应角平分线的比是1∶4，它们对应高的比是 ________，面积的比是 ________.

2. 两个相似三角形对应边的比是2∶3，它们面积的和为78 cm²，求较大的三角形的面积.

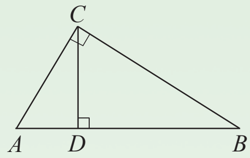
习题1.3

复习与巩固

1. 已知两个相似三角形两条对应边上的中线的长分别是3 cm和5 cm，那么它们的相似比是多少？对应高的比呢？

2. 如图1−23，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle B=\angle B'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{5}{4}$. AD，$A'D'$分别是这两个三角形的高. 如果$AD=1.5$，那么$A'D'$的长是多少？

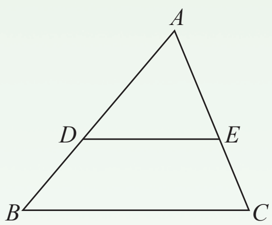
3. 如图，CD是Rt$\triangle ABC$的斜边AB上的高，$AD∶CD=1∶2$，求$S_{\triangle ACD}∶S_{\triangle CBD}$.



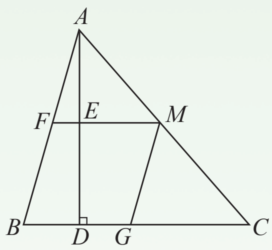
（第3题）

拓展与延伸

4. 如图，D，E分别是$\triangle ABC$的边AB，AC上的点，$DE/\!/BC$，且$\dfrac{AD}{DB}=2$. 求$\triangle ADE$与四边形$DBCE$的面积比.



（第4题）

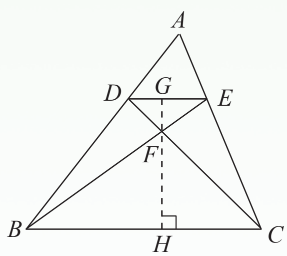


（第5题）

5. 如图，有一块锐角三角形的余料ABC，它的边$BC=150$ mm，$AB=100$ mm，要把它加工成菱形零件，使菱形的一边在BC上，其余的两个顶点分别在AB，AC上，加工成的菱形零件的高$ED=51$ mm，求$\triangle ABC$的高AD.

探索与创新

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$DE/\!/BC$，BE和CD相交于点F，且$S_{\triangle EFC}=3S_{\triangle EFD}$. 求$S_{\triangle ADE}∶S_{\triangle ABC}$的值.



（第6题）

1.4 图形的位似

实验与探究

如图 1–28，任意画一个$\triangle ABC$.

（1）在$\triangle ABC$外任取一点O，分别连接AO，BO，CO；

（2）分别取线段AO，BO，CO的中点A'，B'，C'，连接$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$. $\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的对应边之间有怎样的数量关系和位置关系？

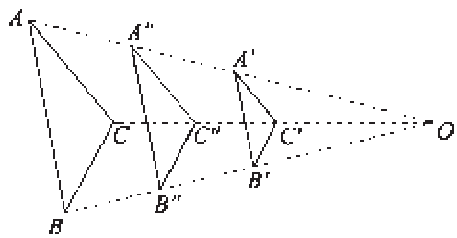


图 1–28

（3）$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$相似吗？为什么？

（4）在图 1–28 中，如果点A''是OA上的任意一点，过A''作$A''B''/\!/AB$交OB于点B''，作$A''C''/\!/AC$交OC于点C''，连接$B''C''$，$\triangle A''B''C''$与$\triangle ABC$相似吗？为什么？

（5）$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，$\triangle A''B''C''$的每对对应点所在的直线有怎样的位置关系？

> 像这样，对应边互相平行（或共线）且每对对应点所在的直线都经过同一点的两个相似多边形叫做**位似图形**（homothetic figures），这个点叫做**位似中心**（homothetic center）.

在图 1–28 中，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，$\triangle A''B''C''$都是位似图形，点O是位似中心.

（6）在图 1–28 中，利用位似，由$\triangle ABC$得到与它相似的$\triangle A'B'C'$，你发现$\triangle ABC$的边长缩小了几分之一？反过来，由$\triangle A'B'C'$也可以利用位似得到与它相似的$\triangle ABC$，这时$\triangle A'B'C'$的边长扩大了多少倍？

一般地，位似可以看作是图形的一种位置和大小的变化，位似不改变图形的形状，利用位似可以将一个图形放大或缩小.

（7）如图 1–29①②③，四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$都是位似图形，你发现它们的位似中心的位置有什么不同？

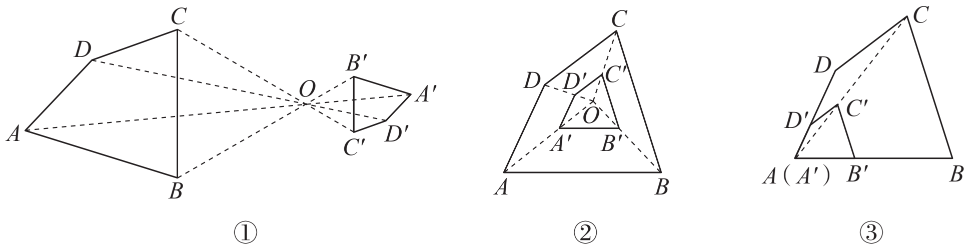


图 1–29

在图 1–29 ① 中，位似中心 O 在两个图形的外部；在图 1–29 ② 中，位似中心 O 在两个图形的内部；在图 1–29 ③ 中，位似中心 A 在两个图形的公共顶点 A（A'）处. 你还能画出四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 位似时，位似中心的其他可能位置吗？与同学交流.

例1　如图 1–30，已知△ABC 与点 O . 以点 O 为位似中心，画出△$A'B'C'$，使它与△ABC 是位似图形，并且相似比为 3 : 2 .

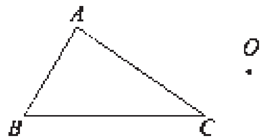


图 1–30

画法 1　（1）作射线 OA，OB，OC；

（2）在射线 OA, OB, OC 上分别取点 A', B', C', 使 $OA'=\frac{3}{2}OA$, $OB'=\frac{3}{2}OB$, $OC'=\frac{3}{2}OC$；

（3）连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$（图 1–31 ①）.

△$A'B'C'$ 就是所要画的图形.

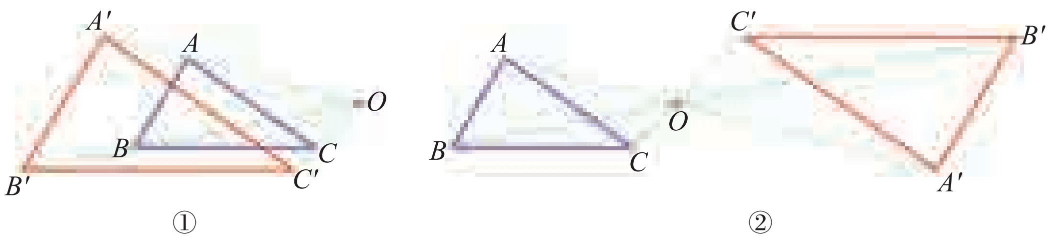


图 1–31

画法 2　（1）作射线 AO，BO，CO；

（2）在射线 AO, BO, CO 上分别取点 A', B', C', 使 $OA'=\frac{3}{2}OA$, $OB'=\frac{3}{2}OB$, $OC'=\frac{3}{2}OC$;

（3）连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$（图 1−31②）.

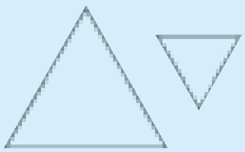
$\triangle A'B'C'$ 就是所要画的图形.

你能说出上面两种画法的道理吗?

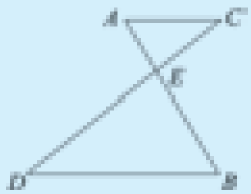
练 习

1. 画一个正五角星形，利用位似将它：（1）放大 3 倍；（2）缩小到原来的 $\frac{1}{2}$.

2. 下图中的两个三角形是位似图形吗？如果是，画出它的位似中心.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，AB 与 CD 相交于点 E，$AC \parallel DB$. $\triangle ACE$ 与 $\triangle BDE$ 是位似图形吗？为什么?

实验与探究

（1）如图 1−32，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点坐标分别为（0，0），（6，0），（6，4），（0，4）. 如果将点 O，A，B，C 的横、纵坐标都缩小一半，得到点 O'，A'，B'，C'，顺次连接点 O'，A'，B'，C'，得到了一个怎样的图形?

（2）四边形 $O'A'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 是位似图形吗？如果是，位似中心是哪个点？它们的相似比是多少?

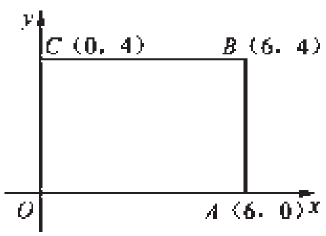


图 1−32

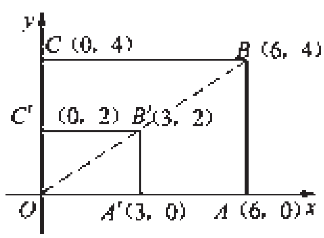


图 1−33

如图 1−33，点 O' 与点 O 重合，点 A'，B'，C' 的坐标分别为（3，0），（3，2），（0，2）. 顺次连接点 O，A'，B'，C'，因为 $\angle xOy$ 是直角，由 A'，B' 的横坐

标相等，可知 $B'A'\perp x$ 轴，从而 $\angle OA'B'$ 是直角. 类似地，$\angle OC'B'$ 也是直角，从而四边形 $OA'B'C'$ 是矩形. 因为 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{C'B'}{CB}=\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{1}{2}$，且对应角都是直角. 所以矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 相似，相似比为 $\dfrac{1}{2}$.

连接 OB，由 O，B 两点的坐标可知，经过点 O，B 的直线为 $y=\dfrac{2}{3}x$. 由于点 B' 的坐标（3，2）适合上式，故点 B' 在直线 OB 上. 又由点 A 与 A' 在 x 轴上，点 C 与 C' 在 y 轴上，因此矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 的对应顶点所在的直线都经过同一点 O，且对应边 $A'B'/\!/AB$，$B'C'/\!/BC$，OA' 与 OA，OC' 与 OC 分别在 x 轴、y 轴上，所以矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 是位似图形，点 O 是它们的位似中心.

（3）如图 1-34，已知 $\triangle OAB$ 的顶点 O 是坐标原点，顶点 A，B 的坐标分别为（−1，2），（−3，0）. 把 $\triangle OAB$ 各个顶点的横、纵坐标都扩大到原来的 3 倍，得到点 O'，A'，B'. 连接 $O'A'$，$O'B'$，$A'B'$，$\triangle O'A'B'$ 与 $\triangle OAB$ 是位似图形吗？如果是，位似中心是哪个点？

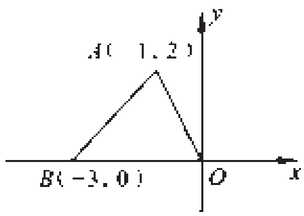


图 1-34

（4）由（1）（2）（3）你能得出什么结论？

如果多边形有一个顶点在坐标原点，有一条边在 x 轴上，那么将这个多边形的顶点坐标分别扩大（或缩小）相同的倍数，所得到的图形与原图形是位似图形，坐标原点是它们的位似中心.

上面得到的结论还能推广吗？如果能，说出你推广后的结论，与同学交流.

例2 如图 1-35，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别为（0，0），（2，0），（4，4），（−2，2）.

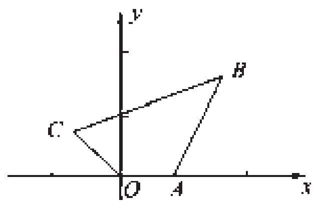


图 1-35

（1）如果四边形 $O'A'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 位似，位似中心是原点，它的面积等于四边形 $OABC$ 面积的 $\dfrac{9}{4}$ 倍，分别写出点 A'，B'，C' 的坐标.

（2）画出四边形 $OA'B'C'$.

解 （1）由四边形 $O'A'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 的面积比为 $\dfrac{9}{4}$，所以它们的

相似比为$\frac{3}{2}$. 将点A，B，C的坐标分别扩大到原来的$\frac{3}{2}$，得到$A'(3，0)$，$B'(6，6)$，$C'(-3，3)$.

（2）顺次连接O，A'，B'，C'，四边形$OA'B'C'$就是所要画的四边形（图1-36）.

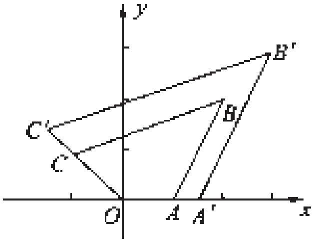
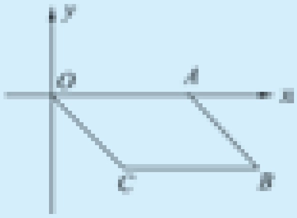


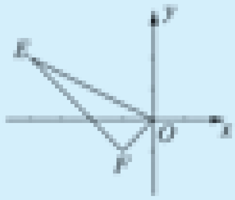
图 1-36

练 习

1. 如图，▱$OABC$ 的一个顶点是坐标原点，点 A 的坐标是（4，0），点 C 的坐标是（2，−2）.
   （1）求点B的坐标；
   （2）画出以点O为位似中心，与▱$OABC$位似的图形，使它与▱$OABC$的相似比为1：2.



（第 1 题）



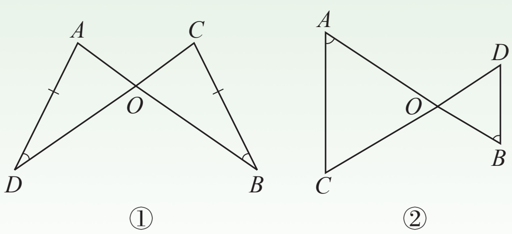
（第 2 题）

2. 在直角坐标系中，已知点$E(-4，2)$，$F(-1，-1)$. 以O为位似中心，把△EFO缩小到原来的$\frac{1}{2}$，求点E，F的对应点E'，F'的坐标.

习题1.4

复习与巩固

1. 判断满足下列条件的两个三角形是不是位似图形，如果是，指出位似中心.
   （1）如图 ① 所示，AB，CD 相交于点O，且$\angle B=\angle D$，$AD=CB$；
   （2）如图 ② 所示，AB，CD 相交于点O，且$\angle B=\angle A$.



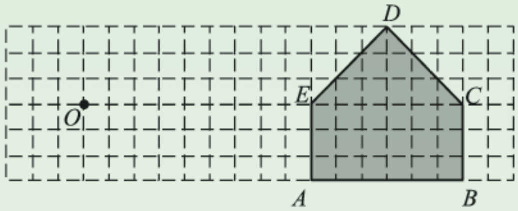
（第 1 题）

2. 如图，在△ABC中，E，F是AB的三等分点，FH∥EG∥AC.

（1）四边形$EFHG$与四边形$FACH$是位似图形吗？为什么？

（2）指出图中所有的位似图形.

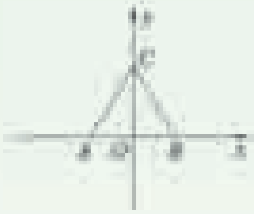
（第2题）



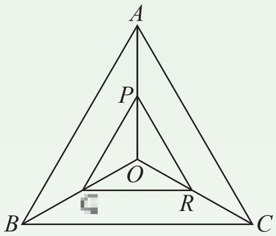
（第3题）

3. 在如图所示的方格纸上，以点O为位似中心，画出与五边形$ABCDE$位似的图形，使它的周长等于五边形$ABCDE$周长的$\frac{1}{3}$.

4. 如图，△ABC为正三角形，点A与B的坐标分别为（−1，0），（1，0）. 以点C为位似中心，在点C下方画出一个与△ABC位似的图形，使它与△ABC的相似比为2∶1.



（第4题）

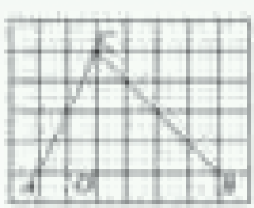


（第5题）

5. 如图，点O是等边三角形ABC的中心，P，Q，R分别是OA，OB，OC的中点. 说明△ABC与△PQR是位似图形，并求出它们的相似比.

拓展与延伸

6. 如图，在6×8的网格图中，每个小正方形的边长均为1. 点O和△ABC的顶点均是格点. 以O为位似中心，在网格中画出与△ABC位似，且相似比为1∶2的顶点均是格点的三角形.



（第6题）

探索与创新

7. 如图，小亮要从三角形木板ABC上锯下一块正方形木板，使正方形的一边在△ABC的边AB上，另外两个顶点分别在边AC，BC上. 他采用了以下的方法：

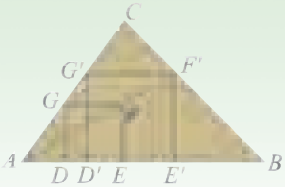
（1）在AC边上取一点G，作GD⊥AB，垂足为D，以GD为一边在△ABC内作正方

形 $GDEF$；

（2）连接 AF 并延长交 AC 于点 F'；

（3）过点 F' 作 AB 的平行线交 AC 于点 G'，分别过 G'，F' 作 AB 的垂线，垂足分别为点 D'，E'. 所得到的四边形 $D'E'F'G'$ 就是满足条件的正方形.

小亮的作法正确吗？为什么？



（第 7 题）

回顾与总结

1. 本章主要学习了哪些内容？总结一下，并与同学交流.
2. 什么叫做相似形？什么叫做相似多边形？全等形与相似形有哪些联系与区别？
3. 什么叫做两个相似多边形的相似比？
4. 基本事实 9 及其推论是什么？
5. 你学过哪几个相似三角形的判定定理？
6. 你学过相似三角形的哪些性质？
7. 全等三角形与相似三角形的性质与判定有哪些相同与不同？
8. 什么叫做位似图形？怎样利用位似将图形放大或缩小？
9. 你能举出现实生活中相似形和位似图形的应用实例吗？
10. 在直角坐标系中，如果将一个多边形的顶点坐标（有一个顶点为原点，有一条边在横轴上）分别扩大或缩小相同的倍数，所得到的图形与原图形有什么关系？

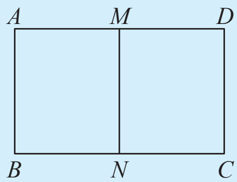
综合练习

复习与巩固

1. 所有正方形都相似吗？为什么？所有矩形都相似吗？为什么？
2. 如图，把矩形 $ABCD$ 对折，折痕为 MN，如果矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，且 $AB = 4$.

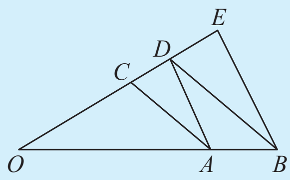
（1）求 AD 的长；

（2）求矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 的相似比.



（第 2 题）

3. 如图，在$\triangle OBE$中，D是OE上的一点，连接BD，作$AD/\!/BE$交OB于点A，过A作$AC/\!/BD$交OE于点C. 等式$OD^2=OC\cdot OE$成立吗？说明理由.

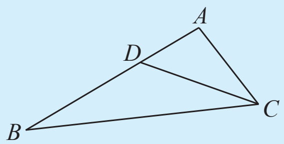


（第 3 题）

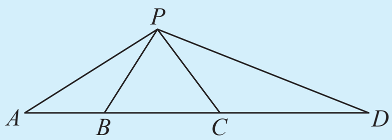
4. 如图，$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

（1）写出图中相等的角；

（2）已知$AD=4$ cm，$AC=6$ cm，求AB的长.



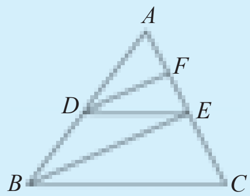
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在$\triangle PAD$中，$\angle APD=120°$，B，C为AD上的点，$\triangle PBC$为等边三角形. 找出图中的相似三角形，并说明理由.

6. 如图，点D在AB上，点E，F在AC上，$AF:AE=AD:AB=AE:AC$. 图中有哪些线段互相平行？请说明你的理由.



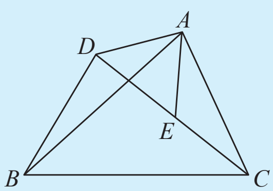
（第 6 题）

7. 选择题：在$\triangle ABC$中，D，E分别是边AB，AC上的点，$DE/\!/BC$，$AD:DB=1:2$，下列结论中正确的是（　　）.

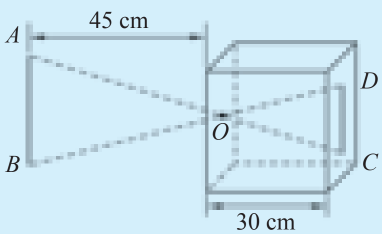
（A）$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$

（C）$\dfrac{\triangle ADE\text{的周长}}{\triangle ABC\text{的周长}}=\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{\triangle ADE\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=\dfrac{1}{3}$

8. 如图，由$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{ED}$能得出哪些角分别相等？说明你的理由.



（第 8 题）



（第 9 题）

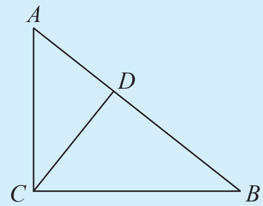
9. 如图是小孔成像原理的示意图，如果物体AB的高度为36 cm，根据图中标注的尺寸，那么它在暗箱所成的像CD的高度是多少厘米？

10. 如果一个三角形的两边和其中一边上的中线，与另一个三角形的两边和其中一边上的中线对应成比例. 这两个三角形相似吗？为什么？

11. 如图，在△ABC中，D为AB边上一点，△CBD∽△ACD.

（1）求∠ADC及∠ACB的度数；

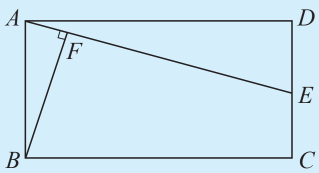
（2）如果$AD=4$，$BD=9$，求CD的长.



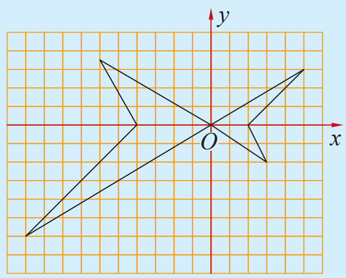
（第 11 题）

拓展与延伸

12. 如图，在矩形$ABCD$中，E是边CD的中点，$BF\perp AE$，垂足为点F. 设$AB=a$，$BC=b$，求BF的长.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 选择题：如图所示的直角坐标系中，y轴右边的小“鱼”与y轴左边的大“鱼”是位似图形. 如果小“鱼”上的一个“顶点”的坐标为（a，b）. 那么大“鱼”上对应“顶点”的坐标是（　　）.

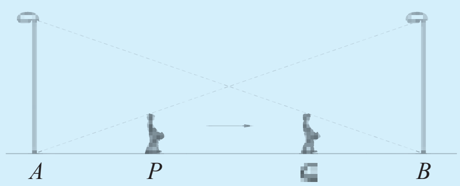
（A）（$-a$，$-2b$）

（B）（$-2a$，$-b$）

（C）（$-2a$，$-2b$）

（D）（$-2b$，$-2a$）

14. 大刚在晚上由灯柱A走向灯柱B. 当他走到P点时，发觉他身后影子的顶部刚好接触到灯柱A的底部. 当他向前再走20 m到达Q点时，发觉他身前影子的顶部刚好接触到灯柱B的底部. 已知大刚的身高是1.7 m，两支灯柱的高度都是9.6 m，设$AP=x$ m. 求两支灯柱之间的距离.



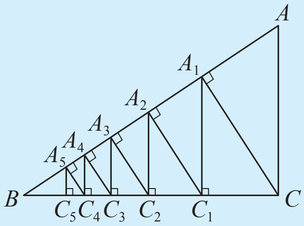
（第 14 题）

探索与创新

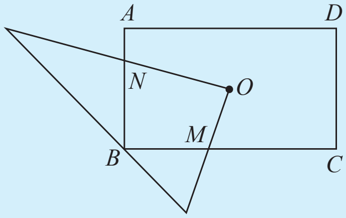
15. 如图，在Rt△BCA中，∠$C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，过点C作$CA_1\perp AB$，垂足为点A_1，再过点A_1作$A_1C_1\perp BC$，垂足为点C_1，……按以上的方法继续作下去，得到Rt△$A_5C_5C_4$.

（1）图中与 $\mathrm{Rt}\triangle A_5C_5C_4$ 相似的三角形共有多少个？

（2）求线段 A_5C_5 的长.



（第 15 题）



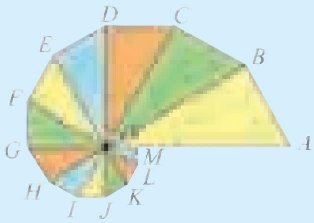
（第 16 题）

16. 如图，O 为矩形 $ABCD$ 的中心，将三角尺的直角顶点与点 O 重合，直角边分别与矩形的两边 AB，BC 分别相交于点 N 和 M，当三角尺绕点 O 旋转时始终与 AB，BC 相交. 如果 $AB=4$，$AD=6$，$OM=x$，$ON=y$，试写出 y 与 x 的表达式.

17. 如图是由 12 个有公共顶点 O 的直角三角形拼成的图形，在这些三角形中，以 O 为顶点的角都等于 $30°$.

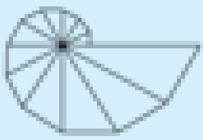
（1）图中与 $\triangle ABO$ 相似的三角形有多少个？

（2）图中有没有与 $\triangle ABO$ 位似的三角形？如果有，指出它是哪一个.

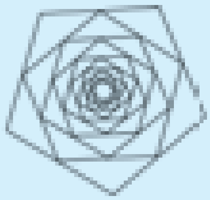


（第 17 题）

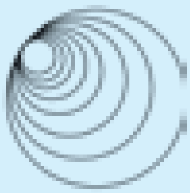
18. 如图，图①是第 17 题图形的缩小图，它是由一些相似的直角三角形组成的“海螺”图案；图②是由一些相似的正五边形组成的“玫瑰花”图案；图③是由一些大小不等的圆（所有的圆也可看作是相似形）组成的“贝壳”图案. 请你也利用一些相似形设计几个美丽的图案，并加以命名；同时搜集几个用相似形构成的图案. 看谁设计得好，搜集得多.



海螺
①



玫瑰花
②



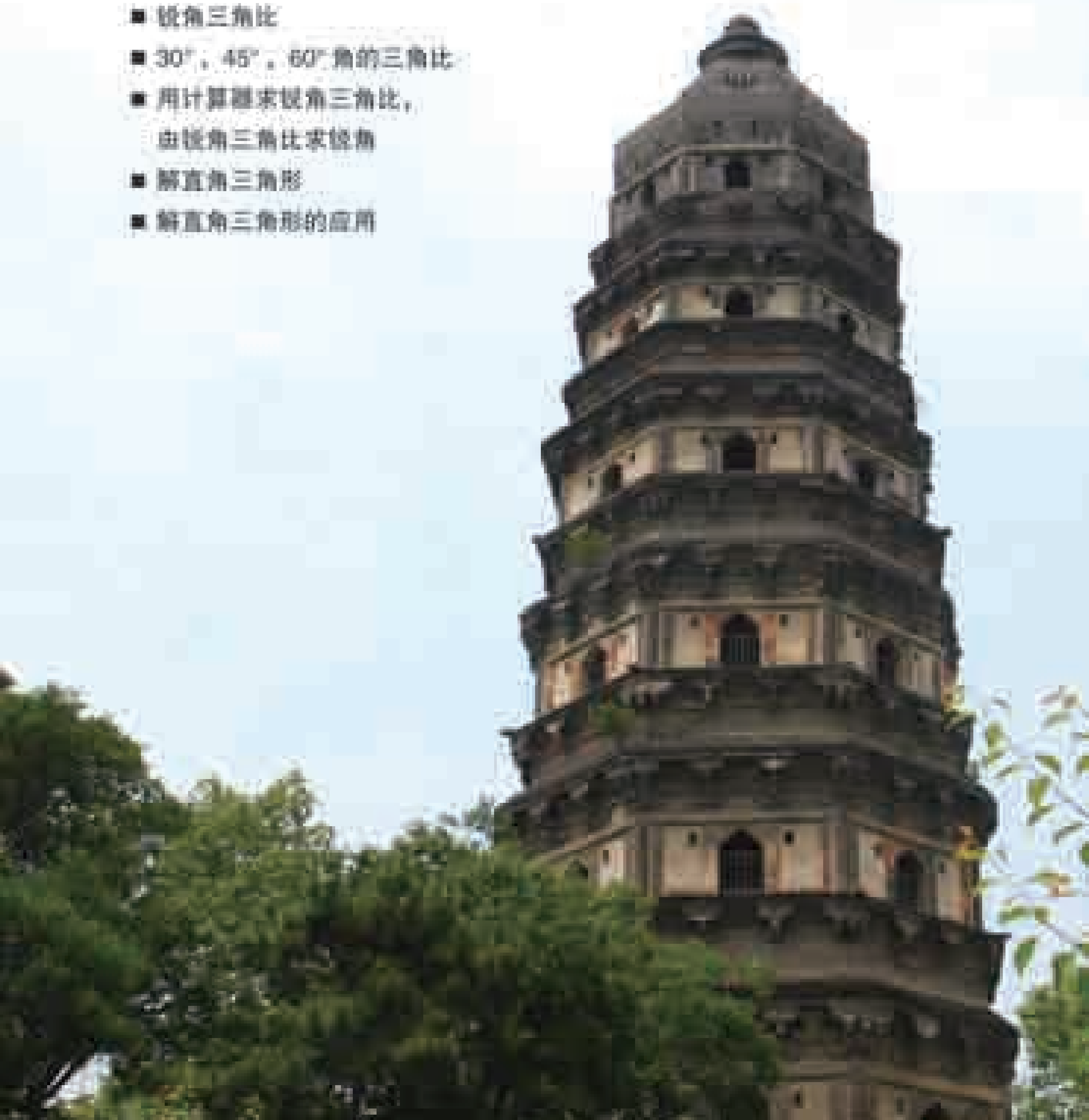
贝壳
③

（第 18 题）

第2章 解直角三角形

内容提要

- 锐角三角比
- 30°，45°，60°角的三角比
- 用计算器求锐角三角比，由锐角三角比求锐角
- 解直角三角形
- 解直角三角形的应用



情境导航

苏州虎丘塔是我国江南著名的园林景点.它始建于宋代（961 年），共 7 层，高 47.5 m. 由于地基的原因，塔身自 400 年前就开始向西北方向倾斜. 据测量，至今塔顶的中心偏离底层中心铅垂线已达 2.3 m，被称为“东方比萨斜塔”.

（1）如今虎丘塔塔顶中心距地面多高?

（2）如今虎丘塔塔中心偏离底层中心铅垂线多少度?

（3）如今虎丘塔与地平面的倾斜角是多少?

2.1　锐角三角比

实验与探究

（1）有一块长 2.00 m 的平滑木板 AB，小亮将它的一端 B 架高 1 m，另一端 A 放在平地上（图 2-1），在木板上分别取点 B_1，B_2，B_3，B_4，分别量得它们到 A 点的距离 AB_1，AB_2，AB_3，AB_4，以及它们距地面的高度 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3，B_4C_4，数据如下表所示：

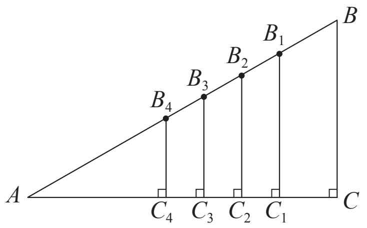


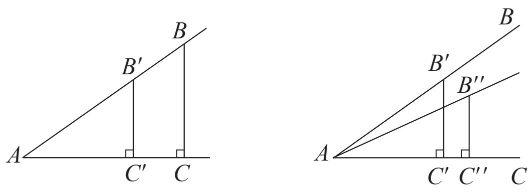
图 2-1

木板上的点	到 A 点的距离 / m	距地面的高度 / m
B_1	1.50	0.75
B_2	1.20	0.60
B_3	1.00	0.50
B_4	0.80	0.40

利用上述数据，分别计算比值 $\frac{BC}{AB}$，$\frac{B_1C_1}{AB_1}$，$\frac{B_2C_2}{AB_2}$，$\frac{B_3C_3}{AB_3}$，$\frac{B_4C_4}{AB_4}$，你有什么发现？

（2）如图 2-2 ①，$\angle A$ 是锐角，在 $\angle A$ 的一边上任意取两个点 B，B'，经过这两个点分别向 $\angle A$ 的另一边作垂线，垂足分别为点 C，C'，由（1）你猜测比值 $\frac{BC}{AB}$ 与 $\frac{B'C'}{AB'}$ 相等吗？能证明你的结论是正确的吗？

因为 $\angle A=\angle A$，$\angle BCA=\angle B'C'A=90^\circ$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle AB'C'$，因此 $\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$.



①　②

图 2-2

（3）如果设比值 $\dfrac{B'C'}{AB'}=k$，由（2）你发现当锐角 A 的大小确定后，k 的大小与点 B' 在 AB 边上的位置有关吗？

（4）如图 2−2②，以 A 为端点，在锐角 A 的内部（或外部）作一条射线，在这条射线上取点 B''，使 $AB''=AB'$，这样又得到了一个锐角 $\angle B''AC$．过 B'' 作 $B''C''\perp AC$，垂足为点 C''．比值 $\dfrac{B''C''}{AB''}$ 与 k 相等吗？为什么？由此你得到怎样的结论？

加油站

$\dfrac{B''C''}{AB''}\neq k$，假设 $\dfrac{B''C''}{AB''}=\dfrac{B'C'}{AB'}$，由 $AB''=AB'$，可得 $B''C''=B'C'$．因为 $\angle AC'B'=\angle AC''B''=90^\circ$，于是 $\mathrm{Rt}\triangle AB'C'\cong\mathrm{Rt}\triangle AB''C''$．则 $\angle B'AC'=\angle B''AC''$．但这与 $\angle B'AC'\neq\angle B''AC''$ 矛盾.

由上面的探索，我们可以利用 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（图 2−3）把比值 k 记作 $\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$，当锐角 A 的大小确定后，不论以 $\angle A$ 为锐角的直角三角形的大小如何，这个比值也就随之确定．我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**正弦**（sine），记作 $\sin A$，即

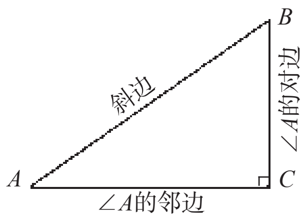


图 2−3

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}.$$

类似地，当锐角 A 的大小确定后，比值 $\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$ ❶ 和比值 $\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$ 也随之确定．我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**余弦**（cosine），记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}.$$

❶ 这里，$\angle A$ 的邻边是指顶点 A 所在的直角边.

把锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的**正切**（tangent），记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}.$$

锐角 A 的正弦、余弦、正切统称锐角 A 的**三角比**（trigonometric ratio）.❶

在图 2−3 中，把 $\angle A$ 的对边记作 a，$\angle B$ 的对边记作 b，$\angle C$ 的对边记作 c，你能分别用 a，b，c 表示 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正弦、余弦和正切吗?

小资料

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，如果用 a，b 分别表示 $\angle A$ 的对边和邻边，c 表示斜边. 那么 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$.

$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 分别是一个完整的记号. 当角只用一个大写字母或小写字母表示时，习惯上在记号中省去角的符号“∠”，不能理解成 $\sin\cdot A$，$\cos\cdot A$，$\tan\cdot A$.

例1　如图2−4，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$a=2$，$b=4$. 求 $\angle A$ 的正弦、余弦、正切的值.

解　如图2−4，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$.

$\because a=2$，$b=4$，所以

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}.$$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

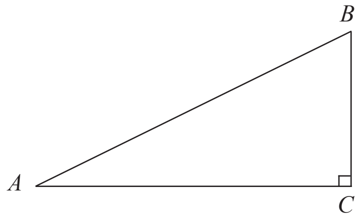
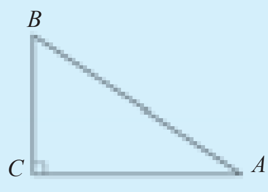


图 2−4

练 习

1. 如果Rt△ABC ∽ Rt△$A'B'C'$，$\angle C=\angle C'=90°$，$\sin A$ 等于 $\sin A'$ 吗？为什么？$\cos A$ 与 $\cos A'$ 呢？
2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$c=3$，$a=2$，求 $\angle A$ 的正弦、余弦、正切的值.



（第 2 题）

❶ 锐角 A 的三角比也叫做锐角 A 的**三角函数**（trigonometric function）.

习题2.1

复习与巩固

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，根据下列条件求出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正弦、余弦的值：

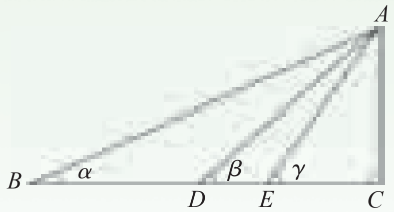
（1）$a=1$，$b=\sqrt{3}$；　　　　（2）$b=\sqrt{7}$，$c=4\sqrt{2}$.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$，求 $\cos B$ 和 $\tan A$ 的值.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=8$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，求 $\cos A$ 和 $\tan B$ 的值.

拓展与延伸

4. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，点 D，E 在 BC 上，$BD=5$，$DE=2$，$EC=3$. 设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle ADC=\beta$，$\angle AEC=\gamma$，求 $\tan\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\gamma$ 的值.



（第 4 题）

5. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，求 $AC:BC:AB$ 的值.

探索与创新

6. 已知等腰三角形中，两边的长分别为 10 cm 和 16 cm，求它的底角的正弦、余弦和正切的值.

2.2　30°，45°，60° 角的三角比

在一副三角尺中，除了直角以外，还含有 30°，45°，60° 的锐角，怎样求出这些锐角的三角比呢？

实验与探究

（1）要想求出 45° 角的正弦、余弦和正切的值，可以考察含 45° 锐角的直角三角形.

含 45° 角的直角三角形是等腰直角三角形，利用已有的知识，如果已知它的一条直角边，另外两边都可求出，进而可求出45° 角的三角比.

作 Rt△ABC，使∠C = 90°，∠A = 45°（图2−5）. 设 a = 1，那么 b = 1. 由勾股定理，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

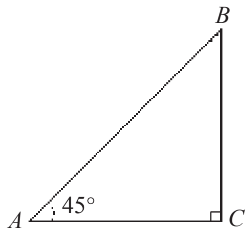


图 2−5

于是

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45^\circ=\frac{a}{b}=\frac{1}{1}=1.$$

（2）怎样才能求出30° 角的各三角比的值呢?

含 30° 角的直角三角形中，目前还不能直接找到三条边之间的关系，能把问题转化为等边三角形吗?

取两个含 30° 角的大小相等的三角尺，按图 2−6 的方式拼在一起，得到的△ABC是怎样的三角形？为什么?

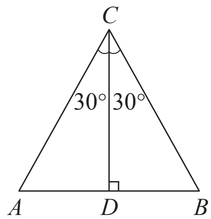


图 2−6

因为∠A =∠B = 60°，所以△ABC是等边三角形，且 CD 是 AB 边上的高，$AD = BD$.

在 Rt△ADC 中，∠ADC = 90°，∠ACD = 30°.

设 AC = 1，那么

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2},\quad CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是

$$\sin 30^\circ=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}\div 1=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\div 1=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30° = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（3）利用图 2–6，你会求出 60° 角的正弦、余弦和正切的值吗？与同学交流.

观察与思考

把 30°，45°，60° 角的正弦、余弦、正切的值填入下表：

三角比 \ 角 α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

从填写的表格中，你发现了哪些规律？与同学交流.

例1　求下列各式的值：

（1）$\sin 30° \cdot \cos 45°$；

（2）$\tan 45° - \cos 60°$.

解　（1）$\sin 30° \cdot \cos 45° = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$；

（2）$\tan 45° - \cos 60° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

例2　在 Rt△ABC 中，已知 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，求锐角 A 的度数.

加油站

当 A，B 都是锐角时，如果 $\sin A = \sin B$ 或 $\cos A = \cos B$ 或 $\tan A = \tan B$，那么 $A = B$. 利用这个结论，知道一个锐角的三角比，可以反过来求这个锐角.

解　因为 A 是锐角，并且 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，由于 $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle A = 60°$.

挑战自我

如图 2–7，作等腰直角三角形 ABC，$\angle C = 90°$. 延长边 CA 到 D，使 $AD = AB$，连接 DB. 你能利用图求出 22.5° 角的正切的值吗？试一试.

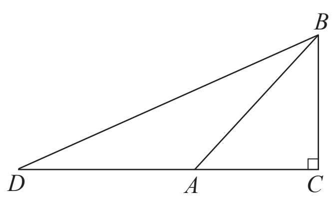


图 2–7

练 习

1. 求下列各式的值：

（1）$\sin 30° + \cos 60°$；（2）$\tan 30° \cdot \tan 60°$；

（3）$2\sin 60° - \tan 30°$；（4）$\sin 45° \cdot \cos 45° + \tan 45°$.

2. 已知α是锐角. 当$\alpha =$ ______时，$\tan\alpha = 1$，这时$\cos\alpha =$ ______.

习题2.2

复习与巩固

1. 求下列各式的值：

（1）$\sin 60° - 3\tan 30° + 2\cos 45°$；

（2）$\tan 60° + 9\tan 30° - \dfrac{1}{2}\tan 45° + \sin 30°$；

（3）$\cos 60° + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 45° + \tan 30° \cdot \cos 30°$；

（4）$\sin 60° \cdot \cos 60° + \sin 45° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \cos 30°$.

2. 求下列各式中锐角A的值：

（1）$\cos A = \dfrac{1}{2}$；（2）$\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；（3）$\tan A = \sqrt{3}$；（4）$\sin A = \dfrac{1}{2}$.

3. 已知α是锐角. 当$\alpha =$ ______时，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，这时$\tan\alpha =$ ______.

拓展与延伸

4. 在Rt△ABC中，$\angle C = 90°$，$a = \sqrt{5}$，$b = \sqrt{15}$，求$\angle A$，$\angle B$的度数.

探索与创新

5. 利用类似于本节“挑战自我”中的方法，构造一个图形，然后利用这个图形求15°及75°角的正切的值.

2.3　用计算器求锐角三角比

实验与探究

根据锐角三角比的定义，可以求出 30°，45°，60° 这些特殊角的正弦、余弦、正切的值. 怎样才能知道任意一个锐角的三角比呢？

打开科学计算器，启动开机键后，使显示器的上方显示 DEG（如果没有显示 DEG，可以按 DR 1 键），表示计算器已经进入以“度”为角的度量单位的运算状态. 这时，按相应的三角比的名称键，再输入锐角的度数，按 = 键后，显示器显示的数字即为该锐角相应的三角比的值（或精确到 10^{-9} 的近似值）. 因计算器的种类不同，键盘上各键的功能符号和按键顺序可能不同. 使用计算器前，应先阅读使用说明书，以免使用中出现计算错误.

例1　用计算器求下列锐角三角比的值（精确到 0.000 1）：[1]

（1）$\sin 47°$；　　（2）$\cos 56.3°$；

（3）$\sin 25°\ 31'48''$；　　（4）$\tan 35°\ 10'22''$.

解　在角的度量单位为“度”的状态下（显示器上方显示 DEG），

（1）按下列顺序依次按键：

sin 47 DMS [2] =，

屏幕上显示 0.731 353 701，按精确到 0.000 1 取近似值，得 $\sin 47° \approx 0.731\ 4$；

（2）按下列顺序依次按键：

cos 56 · 3 DMS [2] =，

[1] 如无特殊说明，本教科书中锐角三角比的近似值都精确到 0.000 1.

[2] 以“°”为单位的单名数，可以不按此键.

屏幕上显示0.554 844 427，按精确到0.000 1取近似值，得$\cos 56.3° \approx 0.554\ 8$；

（3）按下列顺序依次按键：

sin 25 DMS 31 DMS 48 DMS =，

屏幕上显示0.430 983 63，按精确到0.000 1取近似值，得$\sin 25° 31'48'' \approx 0.431\ 0$；

（4）按下列顺序依次按键：

tan 35 DMS 10 DMS 22 DMS =，

屏幕上显示0.704 711 093，按精确到0.000 1取近似值，得$\tan 35° 10'22'' \approx 0.704\ 7$.

例2 用计算器求下列锐角三角比的值（精确到0.000 1）：

（1）$\tan\left(\dfrac{80}{3}\right)°$；　　　　（2）$\sin 9'$

解 在角的度量单位为“度”的状态下，

（1）按下列顺序依次按键：

tan (80 ÷ 3) DMS =，

屏幕上显示0.502 218 876，按精确到0.000 1取近似值，得$\tan\left(\dfrac{80}{3}\right)° \approx 0.502\ 2$；

（2）按下列顺序依次按键：

sin 0 DMS 9 DMS =，

屏幕上显示$2.617\ 990\ 887 \times 10^{-3}$，按精确到0.000 1取近似值，得$\sin 9' \approx 0.002\ 6$.

挑战自我

利用计算器求下列锐角三角比的值，填写下表：

角 α / 三角比	1°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	89°
$\sin\alpha$											
$\cos\alpha$											

观察上表，并回答下列问题：

（1）当锐角α逐渐增大时，它的正弦和余弦的值分别发生怎样的变化？

（2）你能估计出锐角α的正弦值的范围吗？锐角α的余弦值的范围呢？

（3）你还能从表中发现什么规律？

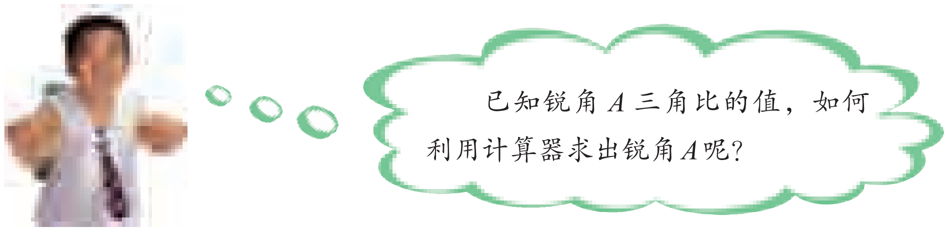
练 习

1. 用计算器求下列锐角三角比的值：

（1）$\sin 75^\circ$；（2）$\cos 35.7^\circ$；（3）$\tan\left(\frac{463}{8}\right)^\circ$；（4）$\sin 75.61^\circ$.

2. 用计算器求下列锐角三角比的值：

（1）$\sin 53^\circ 49'$；（2）$\sin 30^\circ 4'56''$；（3）$\cos 55'$；（4）$\tan 72^\circ 8''$.



启动开机键后，在角的度量单位为“度”的状态下，先按副功能键 2ndF 和相应三角比的名称键，再输入三角比的值，按 = 键后，屏幕上就可以显示以度为单位的锐角.

例3 根据下列三角比的值，用计算器求相应的锐角 A（精确到 $1''$）：

（1）$\sin A = 0.618\,5$；（2）$\tan A = 3.207\,8$.

解 在角的度量单位为“度”的状态下，

（1）按下列顺序依次按键：

2ndF sin 0 · 6185 =，

屏幕上显示 $38.206\,679\,08^\circ$，

即锐角 $A \approx 38.206\,679\,08^\circ$.

再按 DMS 键，将它换算成“度、分、秒”的形式，

屏幕上显示 $38^\circ 12'24.04''$，

所以锐角 $A \approx 38^\circ 12'24''$；

（2）按下列顺序依次按键：

2ndF tan 3 · 2078 =，

屏幕上显示 $72.685\,647\,68^\circ$，

即锐角 $A \approx 72.685\,647\,68^\circ$.

再按 [DMS] 键，将它换算成“度、分、秒”的形式，

屏幕上显示 $72°\,41'8.33''$，

所以锐角 $A \approx 72°\,41'8''$.

例4 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\sin 20° \cdot \tan 35°$；

（2）$\frac{1}{2}\sin 30°26' + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°30'8''$.

解 在角的度量单位为“度”的状态下，

（1）按下列顺序依次按键：

[sin] 20 [DMS] [×] [tan] 35 [DMS] [=]，

屏幕上显示 0.239 485 082，

所以 $\sin 20° \cdot \tan 35° \approx 0.239\,5$；

（2）按下列顺序依次按键：

1 [a b/c] 2 [×] [sin] 30 [DMS] 26 [DMS] + [ ] 2 [÷] 2 [×] [cos] 45 [DMS] 30 [DMS] 8 [DMS] [=]，

屏幕上显示 0.748 865 866，

所以 $\frac{1}{2}\sin 30°\,26' + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°\,30'8'' \approx 0.748\,9$.

练 习

1. 根据下列三角比的值，用计算器求相应的锐角 α，β：

（1）$\sin\alpha = 0.297\,4$；　　（2）$\cos\alpha = 0.785\,7$；　　（3）$\tan\beta = \frac{1}{3}$.

2. 利用计算器求下列各式的值：

（1）$\tan 15° \cdot \cos 28° - \tan 43°$；　　（2）$\cos 32° + \tan 50° + \sin 40°$.

习题2.3

复习与巩固

1. 用计算器求下列锐角三角比的值：

（1）$\sin 45°$，$\cos 35°$，$\tan 52°$，$\sin 13.6°$，$\cos 25.5°$；

（2）$\sin 3°12'$，$\cos 80°25'$，$\tan 75°36'$，$\sin 56°12'10''$，$\tan 31°30'21''$，$\sin 50'23''$.

2. 根据下列三角比的值，用计算器求相应的锐角α：

（1）$\sin\alpha = 0.6$；（2）$\sin\alpha = 0.650\,7$；（3）$\cos\alpha = 0.13$；

（4）$\cos\alpha = 0.265\,9$；（5）$\tan\alpha = 11.82$；（6）$\tan\alpha = 0.370\,5$.

3. 利用计算器，求下列各式的值：

（1）$\frac{1}{2}\cos 68°12' + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 42° - \tan 35°38'$；

（2）$\frac{10\sin 35°36' \cdot \cos 24°52'}{\sin 35°36' - \cos 24°52'}$.

拓展与延伸

4. 用计算器分别求出下列三组三角比的值：

$\sin 13°$，$\cos 77°$；　$\sin 62°18'$，$\cos 27°42'$；　$\sin 83°21'$，$\cos 6°39'$.

由此你发现了什么规律？

探索与创新

5. 利用本节“挑战自我”中的发现，不用计算器，比较下列三个数的大小：

$\sin 62°$，$\cos 62°$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4　解直角三角形

观察与思考

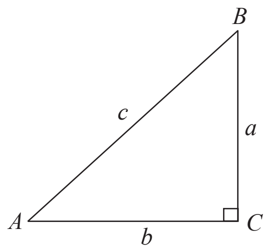


图 2-8

（1）在Rt△ABC中（图2-8），$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别是a，b，c. 除直角C已知外，你会

用含有这些字母的等式把其他5个元素之间的关系表示出来吗？与同学交流.

① 角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$；

② 边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$；

③ 角与边之间的关系：$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$.

（2）观察上面的三组等式，你发现在直角三角形中，除直角以外，至少知道几个元素就可以求出其他的未知元素？

除直角以外，如果再知道直角三角形的两个元素（至少一个是边），就可以求其他的元素了.

由直角三角形中已知的元素求出未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

例1 在Rt△ABC中，已知$\angle C=90°$，$a=17.5$，$c=62.5$. 解这个直角三角形.

这是已知直角三角形的斜边和一条直角边解直角三角形的问题.

解 $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{62.5^2-17.5^2}=60$.

由$\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{17.5}{62.5}=0.28$，得

$\angle A\approx 16°\,15'37''$.

$\therefore \angle B=90°-\angle A=90°-16°\,15'37''=73°\,44'23''$.

想一想，例1还有其他解法吗？如果已知直角三角形的两条直角边，如何解直角三角形呢？与同学交流.

例2 在Rt△ABC中，已知$\angle C=90°$，$c=128$，$\angle B=52°$. 解这个直角三角形（边长精确到0.01）.

解 在Rt△ABC中，由$\angle C=90^\circ$，$\angle B=52^\circ$，得

$\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-52^\circ=38^\circ$.

由$\sin B=\dfrac{b}{c}$，得

$b=c\cdot\sin B=128\cdot\sin 52^\circ\approx 100.87$；

由$\cos B=\dfrac{a}{c}$，得

$a=c\cdot\cos B=128\cdot\cos 52^\circ\approx 78.80$.

这是已知直角三角形的斜边和一锐角解直角三角形的问题.

想一想，如果已知直角三角形的一条直角边和一个锐角，如何解直角三角形呢？

由例1和例2，你能总结一下已知直角三角形的两边或已知直角三角形的一边及一个锐角解直角三角形的思路吗？

练 习

1. 在Rt△ABC中，已知$\angle C=90^\circ$，$a=12$，$b=24$，解这个直角三角形.
2. 在Rt△ABC中，$\angle C=90^\circ$.
   （1）已知$c=15$，$\angle B=60^\circ$，求a；
   （2）已知$\angle A=35^\circ$，$a=24$，求b，c.

例3 如图2-9，在△ABC中，已知$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AC=20$，求AB的长.

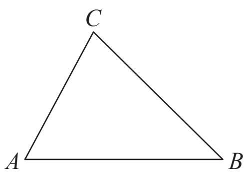
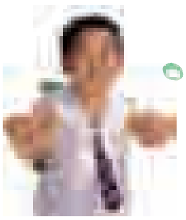


图2-9



△ABC不是直角三角形，怎么办？

作AB边上的高，可把问题转化为解直角三角形的问题.

解 过点C作$CD\perp AB$，垂足为点D（图2-10）.

在Rt△ACD中，$AC=20$，$\angle A=60^\circ$.

由 $\sin A=\dfrac{CD}{AC}$，得

$CD=AC\cdot\sin A=20\cdot\sin 60°=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$

由 $\cos A=\dfrac{AD}{AC}$，得

$AD=AC\cdot\cos A=20\cdot\cos 60°=20\times\dfrac{1}{2}=10.$

在Rt△BCD中，由$\angle B=45°$，$CD=10\sqrt{3}$，得

$BD=CD=10\sqrt{3}$.

所以　$AB=AD+DB=10+10\sqrt{3}$.

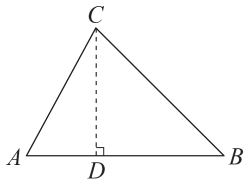


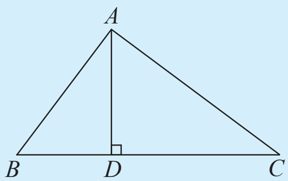
图 2–10

挑战自我

在图2–9中，$\angle B=45°$，$BC=2$，试用含$\angle A$的三角比的式子表示AB的长.

练 习

1. 如图，在 Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，垂足为点D，$\angle B=60°$，$AD=3$，求BC的长.
2. 在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，且一腰长与底边的比是5∶8，求$\sin B$，$\cos B$的值.



（第 1 题）

习题2.4

复习与巩固

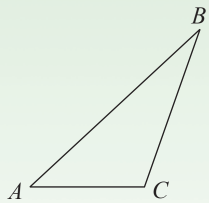
1. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，根据下列条件，解直角三角形：
   （1）$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$；
   （2）$\angle A=22.5°$，$b=12$.
2. 在 Rt△ABC中，$\angle C=90°$.
   （1）已知$c=39$，$b=36$，求a和$\angle B$（精确到$1'$）；
   （2）已知$a=22.5$，$b=12$，求$\angle A$和$\angle B$（精确到$1'$）.
3. 在Rt△ABC中，斜边AB上的高$CD=21$ cm，$AD=18$ cm，求$\angle B$的度数和AB的长（边长精确到1 cm，角度精确到$1'$）.

4. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=7$，$\angle A=2\angle B$，求AB，BC的长.

5. 等腰三角形的顶角为120°，底边上的高为30 cm，求这个三角形的周长.

拓展与延伸

6. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=118°$，$BC=4$. 求AC边上的高.



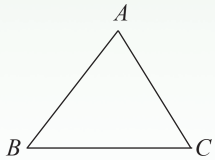
（第6题）

7. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle B$的平分线$BD$交$AC$于点$D$，$BD=16$，求$AB$的长.

探索与创新

8. 如图，在△ABC中，$\angle C$是锐角，$BC=a$，$AC=b$，面积为S.

求证：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$.



（第8题）

2.5　解直角三角形的应用

东方明珠塔是上海市的一个标志性建筑. 为了测量东方明珠塔的高度，小亮和同学们在距离东方明珠塔200 m处的地面上，安放高1.20 m的测角仪支架，测得东方明珠塔顶的仰角为60° 48′. 根据测量的结果，小亮画了一张示意图（图2–11），其中AB表示东方明珠塔，DC为测角仪的支架，$DC=1.20$ m，$CB=200$ m，$\angle ADE=60°\,48'$.

利用上述数据，你能求出AB的长吗？与同学交流.


东方明珠塔

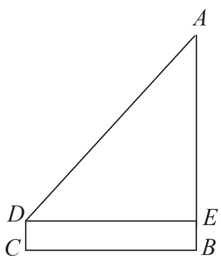


图2–11

小资料

在实际测量中，从低处观测高处的目标时，视线与水平线所成的锐角叫做仰角；从高处观测低处的目标时，视线与水平线所成的锐角叫做俯角（图2-12）.

为了测量仰角和俯角，如果没有专门的仪器，可以自制一个简易测倾器（图2-13）. 简易测倾器由铅锤、度盘、支杆和螺栓组成，度盘可根据需要绕点 O 转动. 使用时，将测倾器度盘的顶线 AB 对准被测目标，铅垂线与度盘上 0° 刻度线之间的夹角便是所要测定的仰角或俯角.

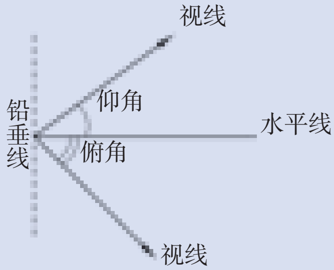


图 2-12

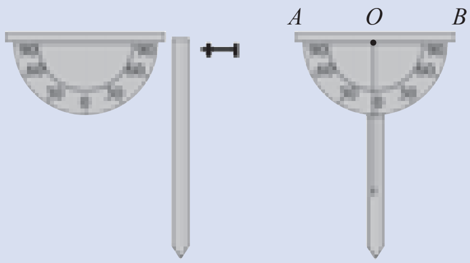


图 2-13

例1　如图2-14，一架直升飞机执行海上搜救任务，在空中 A 处发现海面上有一目标 B，仪器显示这时飞机的高度为1.5 km，飞机距目标4.5 km. 求飞机在 A 处观测目标 B 的俯角（精确到1′）.

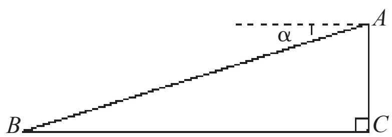


图2-14

解　如图2-14，AC 是飞机的高度，$\angle\alpha$ 是飞机在 A 处观测目标 B 的俯角. 连接 BC，则 $AC \perp BC$，垂足为点 C. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC = 1.5$ km，$AB = 4.5$ km.

由 $\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1.5}{4.5} = \dfrac{1}{3}$，得

$\angle B \approx 19°\,28'$，即 $\angle\alpha = 19°\,28'$.

所以，飞机在 A 处观测目标 B 的俯角为 $19°\,28'$.

例2　武汉长江二桥为斜拉索桥（图2-15），AB 和 AC 分别是直立塔 AD 左右两边的两根最长的钢索. 已知 $AB = AC$，$BC = 100$ m，AB 与 BC 的夹角为30°，求钢索 AB 的长及直立塔 AD 的高（精确到0.1 m）.

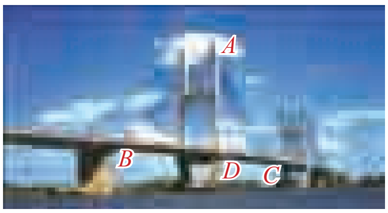


图 2-15

解　由题意可知，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，AD 为底边 BC 上的高.

$BD = DC = \frac{1}{2}BC = 50\ \mathrm{m}$，$\angle ABC = 30°$.

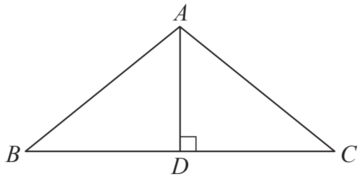


图 2-16

在Rt△ABD中，由 $\cos B = \frac{BD}{AB}$，得

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{50}{\cos 30°} \approx 57.7\ (\mathrm{m}).$$

由 $\tan B = \frac{AD}{BD}$，得

$$AD = BD \cdot \tan B = 50\tan 30° \approx 28.9\ (\mathrm{m}).$$

所以，钢索AB的长约为57.7 m，直立塔AD的高约为28.9 m .

广角镜

用雷达测定目标的高度

雷达是利用发送和接收电磁波探测空间目标的位置、运动速度、运动方向和其他特征的电子设备. 目标与雷达的距离可通过测定电磁波从雷达到目标的往返时间来确定. 利用雷达天线的定向辐射特性，可测定目标的方位和仰角，根据目标的距离和仰角可以计算出目标的高度.


雷　达

假设大地是一个平面，如果目标的仰角为 θ ，根据电磁波的传播速度及其来回所用的时间，可以计算出目标与雷达之间的直线距离 d（图 2-17）. 这时目标的高度为 $h = d\sin\theta$.

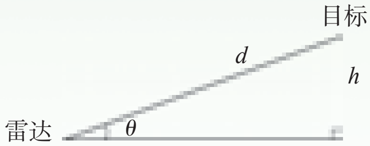


图 2-17

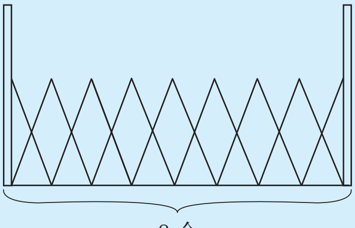
然而，大地并非平面，而是曲面，因此计算目标高度的近似公式是

$$h \approx d\sin\theta + \frac{d^2}{2R},$$

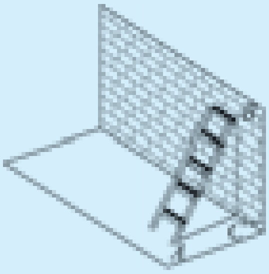
其中，R表示地球的半径（约等于6 370 km）.

练 习

1. 如图是一个电动伸缩门关闭时的示意图. 电动门共由 8 个菱形组成，已知每个菱形的边长都是0.5 m，锐角是50°，这个大门的宽是多少米（精确到0.1 m）?



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一架梯子斜靠在墙上，梯子顶端到地面的距离 $BC = 3.2$ m，底端到墙根的距离 $AC = 2.4$ m .

（1）求梯子的长度和梯子与地面所成角的大小（精确到 $1'$）；

（2）如果把梯子的底端到墙根的距离减少 0.4 m，那么梯子与地面所成的角是多少？

例3　住宅的采光是建楼和购房时人们所关心的问题之一. 如图 2–18，住宅小区南、北两栋楼房的高度均为 16.8 m. 已知当地冬至这天中午 12 时太阳光线与地面所成的角是 35° .

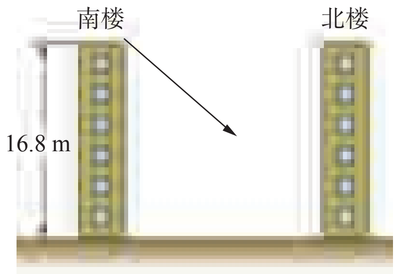


图 2–18

（1）要使这时南楼的影子恰好落在北楼的墙脚，两楼间的距离应为多少米（精确到 0.1 m）？

（2）如果两栋楼房之间的距离为 20 m，那么这时南楼的影子是否会影响北楼一楼的采光?

解　（1）如图 2–19，南楼的高为 AB，北楼的高为 CD，B，D 分别为南、北楼的墙脚，根据题意，AD 为冬至这天中午 12 时的太阳光线，BD 为南楼的影子. 则 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，$\angle ADB = 35°$.

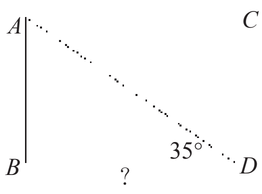


图 2–19

在 Rt△ABD 中，已知 $AB = 16.8$ m .

由 $\tan\angle ADB = \dfrac{AB}{BD}$，得

$$BD = \frac{AB}{\tan 35°} = \frac{16.8}{\tan 35°} \approx 24.0\ (\text{m}).$$

所以，两楼间的距离应为 24.0 m.

（2）如图 2–20，AE 为冬至这天中午 12 时的太阳光线，AE 交 CD 于点 E，

ED 为南楼落在北楼上的影子. 作 $EF \perp AB$，垂足为点 F，则 $\angle AEF = 35°$. 已知 $AB = CD = 16.8$ m，$BD = 20$ m.

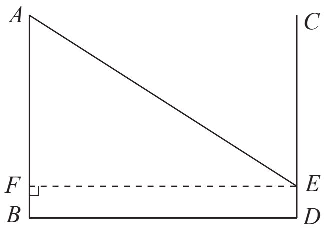


图 2–20

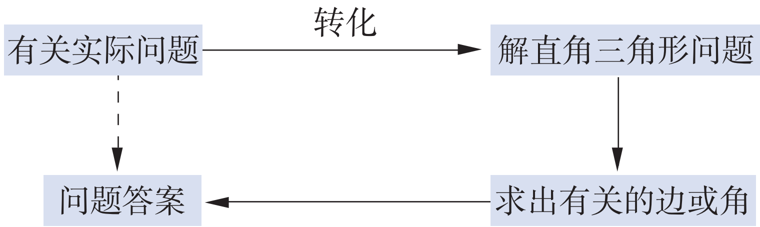
由 $\tan\angle AEF = \dfrac{AF}{EF}$，$EF = BD = 20$ m，$\angle AEF = 35°$，得

$AF = EF \cdot \tan\angle AEF = 20 \cdot \tan 35° \approx 14.0$（m）.

$\therefore ED = FB = AB - AF = 16.8 - 14.0 = 2.8$（m）.

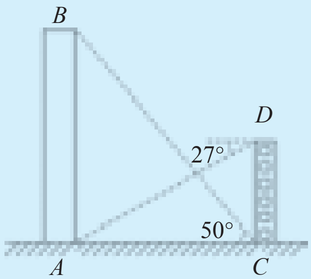
所以，这时南楼的影子落在北楼上的高度约2.8 m，会影响到北楼一楼的采光.

直角三角形边角之间的关系，是解决与直角三角形有关的实际问题的重要工具. 把实际问题转化为解直角三角形问题，关键是找出实际问题中的直角三角形. 这一解答过程的思路是：

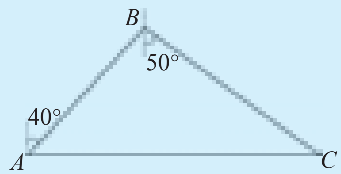


练习

1. 如图，在宿舍楼的 C，D 两点观测对面的建筑物 AB，从点 D 观测建筑物的底部 A 的俯角是 $27°$，从点 C 观测建筑物的顶端 B 的仰角是 $50°$，已知宿舍楼 CD 的高度是 20 m，求建筑物 AB 的高（精确到 1 m）.
2. 如图，一艘游轮从 A 码头出发，沿北偏东 $40°$ 方向航行 12 海里到达 B 岛，然后又沿南偏东 $50°$ 方向航行 16 海里到达 C 岛. 那么从 C 岛再航行多远才能直接返回出发地 A（精确到0.1 海里）？



（第 1 题）



（第 2 题）

在修路、筑坝、开渠和挖河时，都会遇到修筑斜坡的问题. 如图 2−21 是一段斜坡的横断面，建筑学中把斜坡起止点 A，B 的高度差 h 与它们的水平距离 l 的比叫做坡度（或坡比），通常用字母 i 表示，即

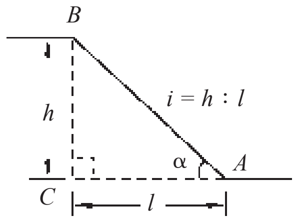


图 2−21

$$i = h : l.$$

表示坡度时，一般把比的前项取作 1，如 $i = 1 : 5$.

如果把图 2−21 中斜坡 AB 与水平线 AC 的夹角记作 α，那么

$$i = \frac{h}{l} = \tan\alpha.$$

这就是说，坡度等于锐角 α 的正切.

例4　某地计划在河流的上游修建一条拦水大坝. 大坝的横断面 $ABCD$ 是梯形（图 2−22），坝顶宽 $BC = 6$ m，坝高 25 m，迎水坡 AB 的坡度 $i = 1 : 3$，背水坡 CD 的坡度 $i = 1 : 2.5$.

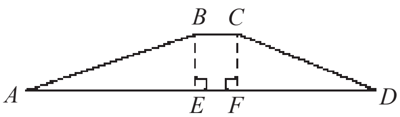


图 2−22

（1）求斜坡 AB 和 CD 的长（精确到 0.01 m）；

（2）求拦水大坝的底面 AD 的宽.

解　（1）作 $BE \perp AD$，$CF \perp AD$，垂足分别为点 E，F. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle AEB = 90°$，$BE = 25$ m .

由 $\tan A = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{1}{3}$，得

$AE = 3BE = 3 \times 25 = 75$（m），

$\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{75^2 + 25^2} \approx 79.06$（m）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，$\angle CFD = 90°$，$CF = 25$（m）.

由 $\tan D = \dfrac{CF}{DF} = \dfrac{1}{2.5}$，得

$DF = 2.5CF = 2.5 \times 25 = 62.5$（m），

$\therefore CD = \sqrt{DF^2 + CF^2} = \sqrt{62.5^2 + 25^2} \approx 67.31$（m）.

（2）$AD = AE + EF + FD = 75 + 6 + 62.5 = 143.5$（m）.

所以，斜坡 AB 的长约为 79.06 m，CD 的长约为 67.31 m；水坝的底面宽 AD 为 143.5 m .

你还有其他解法吗？与同学交流.

例5 如图 2−23，要测量铁塔的高 AB，在地面上选取一点 C，在 A，C 两点间选取一点 D，测得 $CD = 14$ m，在 C，D 两点处分别用测角仪测得铁塔顶端 B 的仰角为 $\alpha = 30°$ 和 $\beta = 45°$. 测角仪支架的高为 1.2 m，求铁塔的高（精确到 0.1 m）.

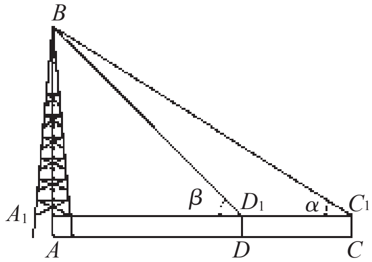
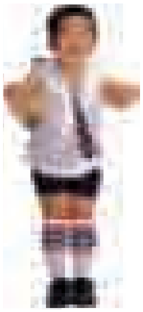
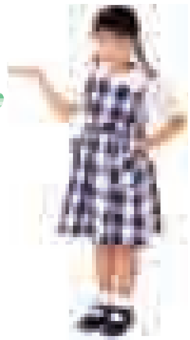


图 2−23



α，β 分别在两个直角三角形中，怎么办？



A_1B 是两个直角三角形公共的直角边，C_1D_1 是直角边 A_1C_1 与 A_1D_1 的差. 可以利用方程解决这个问题吗？

解 由图 2−23 可知，$A_1A = C_1C = D_1D = 1.2$ m，$CD = C_1D_1 = 14$ m，$\angle BC_1A_1 = \angle\alpha = 30°$，$\angle BD_1A_1 = \angle\beta = 45°$.

在 Rt$\triangle A_1C_1B$ 中，$\angle BA_1C_1 = 90°$，设 $A_1B = x$ m，

由 $\tan\alpha = \dfrac{A_1B}{A_1C_1}$，得 $A_1C_1 = \dfrac{A_1B}{\tan\alpha} = \dfrac{x}{\tan 30°}$.

在 Rt$\triangle A_1D_1B$ 中，由 $\tan\beta = \dfrac{A_1B}{A_1D_1}$，得 $A_1D_1 = \dfrac{A_1B}{\tan\beta} = \dfrac{x}{\tan 45°}$.

$\because A_1C_1 - A_1D_1 = C_1D_1$，

$$\therefore \quad \frac{x}{\tan 30°} - \frac{x}{\tan 45°} = 14.$$

解关于 x 的方程，得

$$x = \frac{14 \cdot \tan 30° \cdot \tan 45°}{\tan 45° - \tan 30°}.$$

用计算器计算，得

$x \approx 19.1$. 即 $A_1B \approx 19.1$ m .

$\therefore AB = AA_1 + A_1B \approx 1.2 + 19.1 = 20.3$（m）.

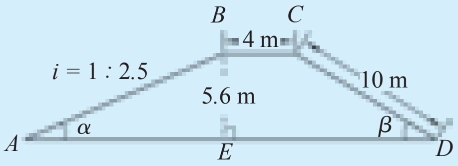
即塔高约为 20.3 m .

练 习

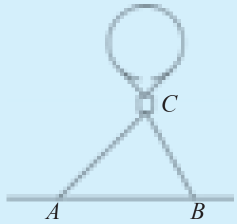
1. 如图，拦水坝的横断面为梯形$ABCD$，根据图中数据，求：

（1）角α和β的大小（精确到$1'$）；

（2）坝底宽AD和斜坡AB的长（精确到0.1 m）.



（第 1 题）



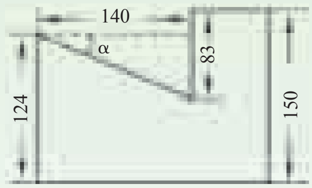
（第 2 题）

2. 如图，从地面上相距 150 m 的A，B两点观察空中在C点处的热气球的吊舱，分别测得仰角是42°和65°，试求C点距离地面的高度（精确到0.1 m）.

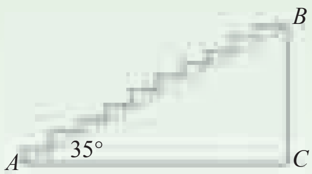
习题2.5

复习与巩固

1. 根据图中所标尺寸（单位：mm）求角α的度数（精确到$1'$）.



（第 1 题）

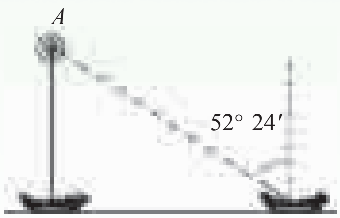


（第 2 题）

2. 如图，某景区要修建一段上坡阶梯AB，每个台阶的高度不能超过 20 cm．已知AB = 15 m，$\angle BAC = 35°$，这段阶梯最少要修建多少个台阶？

3. 如图，为了治理水土流失，计划在山坡上植树. 要求相邻两棵树间的水平距离是4.5 m，测得斜坡的倾斜角是$20°34'$，求斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是多少（精确到0.1 m）.

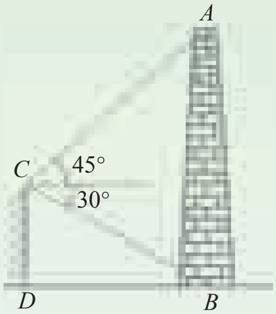
（第 3 题）



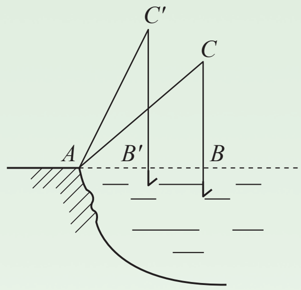
（第 4 题）

4. 如图，一艘船在岛 A 的正南 20 海里处，向东航行 1.5 时后，测得小岛 A 在北偏西 $52°\ 24'$方向，求该船行驶的速度（精确到 0.1 海里/时）.

5. 在旧城改造中，要拆除一座烟囱 AB（如图），在地面上事先划定以 B 为圆心，半径与 AB 等长的圆形为危险区. 从离 B 点 21 m 远的建筑物 CD 的顶端 C 点测得 A 点的仰角为45°，B 点的俯角为 30°. 离 B 点 35 m 远的一处保护文物是否在危险区内?



（第 5 题）



（第 6 题）

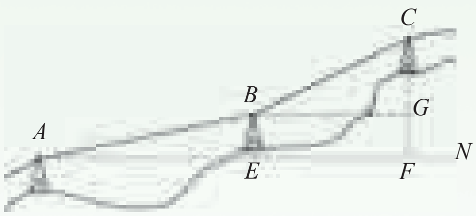
6. 如图，钓鱼竿 AC 长 6 m，露在水面上的鱼线 BC 长 $3\sqrt{2}$ m. 钓鱼者想看看鱼钩上的情况，把鱼竿 AC 转动到 AC' 的位置. 此时露出水面上的鱼线 $B'C'$ 长为 $3\sqrt{3}$. 这时鱼竿转过的角度是多少?

7. 如图是一段泰山索道的示意图. 缆车从 A 点经过 B 点到达 C 点时，高度上升了 50 m，已知缆绳 $AB = 104$ m，AB 的坡度 $i = 1:8$. 求:

（1）缆绳 AB 与水平线所成的角（精确到 $1'$）;

（2）缆车从 B 点到 C 点上升的高度（精确到 0.1 m）.


缆　车

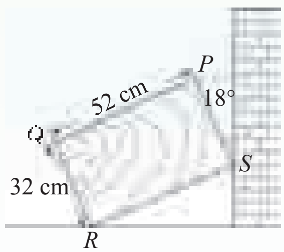


（第 7 题）

8. 解决本章“情境导航”中提出的问题.

拓展与延伸

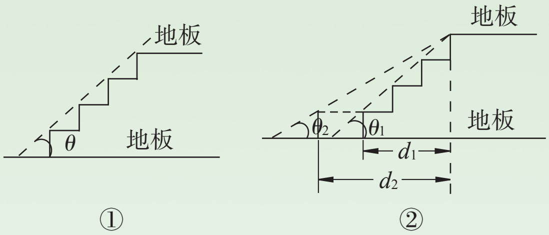
9. 如图所示，一块长 52 cm，宽 32 cm 的长方形木板 $PQRS$ 靠在一面墙上，它的一边 PS 与墙所成的角为 18°. 求 P 点距地面的高度（精确到 1 cm）.



（第 9 题）

10. 在建筑楼梯时，设计者要考虑楼梯的安全程度. 如图 ①，虚线为楼梯的斜度线，斜度线与地面的夹角为倾角 θ，

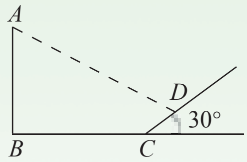
一般情况下，倾角 θ 愈小，楼梯的安全程度愈高. 为了提高楼梯的安全程度，设计者要把倾角由 θ_1 减小至 θ_2，这样楼梯占用地面的长度由 d_1 增加到 d_2，如图②. 已知 $d_1 = 4$ m，$\angle\theta_1 = 40°$，$\angle\theta_2 = 36°$，求楼梯占用地面的长度增加多少（精确到0.1 m）？



（第10题）

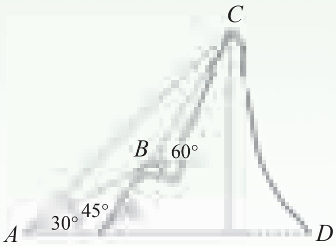
探索与创新

11. 阳光下，电线杆 AB 落在一段斜坡和水平地面上的影子分别是 CD 和 BC，小亮量得 $CD = 8$ m，$BC = 20$ m，CD 与地面所成的角 $30°$. 小亮的身高 1.65 m，此时他在水平地面上的影子长为 3.3 m，求电线杆的长度（精确到 0.1 m）.



（第11题）

12. 如图，电力部门计划修建一条连接 B，C 两座山峰的电缆，测量人员在山脚 A 点测得 B，C 两点的仰角分别为 $30°$，$45°$，在 B 点测得 C 点的仰角为 $60°$. 已知 C 点比 A 点高200 m，电缆 BC 应至少长多少米（精确到1 m）？



（第12题）

回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容？总结一下，与同学交流.
2. 锐角三角比是通过直角三角形各边的比来定义的. 锐角 A 的三角比是：

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}};\qquad \cos A = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\text{斜边}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\underline{\qquad\qquad}}$$

3. 回忆2.2节中的表格，记住30°，45°，60°角的三角比.
4. 一般锐角的三角比的值可以用科学计算器求得. 已知锐角的一个三角比的值，也可以用科学计算器求得这个锐角的大小.
5. 解直角三角形主要依据下列的关系：

（1）角之间的关系：________________；

（2）边之间的关系：________________；

（3）边与角之间的关系：$\sin A=$ ________，$\cos A=$ ________，$\tan A=$ ________.

6. 在 Rt△ABC 中，除 $\angle C=90°$ 已知外，其余的五个元素中，如果已知其中的两个元素（至少有一个元素是边），就可以求出其余三个未知元素. 解直角三角形的问题可归结为两类：已知两边（两直角边或一直角边和斜边）解直角三角形；已知一边一锐角（一直角边和对角，一直角边和邻角，斜边和一锐角）解直角三角形. 求解的方法可以有多种，请按照下列步骤，完成已知锐角 B 和直角边 a 的一种求解过程：

第一步：	由条件：a，$\angle B$	用关系式 →		求出 →	
第二步：	由条件：	用关系式 →		求出 →	
第三步：	由条件：	用关系式 →		求出 →	

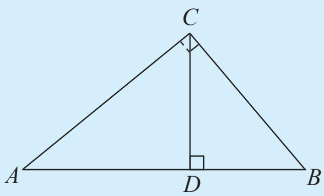
7. 利用解直角三角形解决一类实际问题的关键是抽象出实际问题中的直角三角形，或通过添加辅助线构造直角三角形. 你能概括出解决这类实际问题的思路吗？与同学交流.

综合练习

复习与巩固

1. 填空：

（1）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D，请将 $\angle A$ 的三角比用线段 AB，BC，AC，CD，AD 和 DB 之间的比表示：



（第 1（1）题）

$$\sin A=\frac{\quad}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC};$$

$$\cos A=\frac{\quad}{AB}=\underline{\quad\quad}=\frac{CD}{\quad};\qquad \tan A=\frac{BC}{\quad}=\frac{CD}{\quad}=\underline{\quad\quad};$$

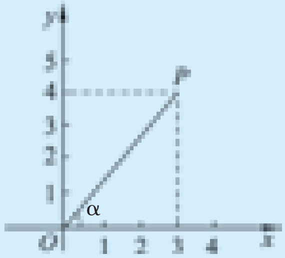
（2）在上图中，如果 $\angle ACD$ 的正弦是 $\frac{2}{3}$，那么 $\frac{AC}{AB}=$ ________；

（3）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，如果 $AC=2$，$BC=\sqrt{5}$，那么 $\sin A=$ ________，$\cos A=$ ________，$\tan A=$ ________；

（4）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，如果 $\cos A=\frac{4}{5}$，$AB=10$，那么 $BC=$ ________，

$\cos B =$ ________ .

2. 如图，在直角坐标系中，点 P 的坐标为（3，4），求 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的正弦和正切的值.



（第 2 题）

3. 求下列各式的值：

（1）$\frac{1}{2}\cos 30° + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45° + \sin 60° \cos 60°$；

（2）$\sqrt{2}\sin 30° + \tan 60° - \cos 45° + \tan 30°$.

4. 利用计算器计算：

（1）$\sin 10° + \cos 10°$；　　（2）$\tan 50° - \tan 40°$.

5. 已知下列锐角三角比，分别求出锐角 A：

（1）$\sin A = 0.082\ 8$；　　（2）$\cos A = 0.372\ 5$；　　（3）$\tan A = 28.38$.

6. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$.

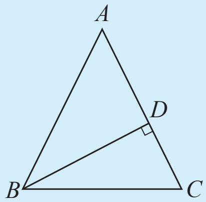
（1）已知 $c = 8\sqrt{3}$，$\angle A = 60°$，求 a，b；

（2）已知 $c = \sqrt{6}$，$a = \sqrt{4}$，求 $\angle A$，b .

7. 如图，在△ABC 中，$AB = AC = 9$，$BC = 6$.

（1）求 $\angle C$ 的正弦；

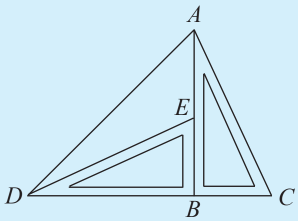
（2）求 AC 边长的高 BD.



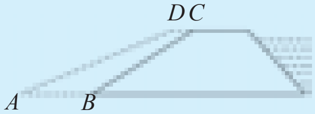
（第 7 题）

8. 把两个大小相同的含30° 角的三角尺如图放置，若 $AD = 6\sqrt{6}$，求三角尺各边的长.

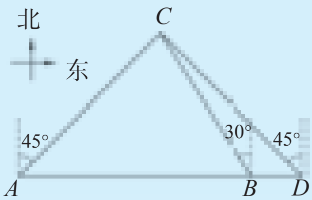
9. 如图，一段河堤的斜坡 BC = 12 m，为了加固河堤，需要将堤坝加厚. 竣工后，斜坡的坡度由原来的1∶2 变成1∶3. 加固后斜坡 AD 的长是多少（精确到 0.1 m）？



（第 8 题）



（第 9 题）

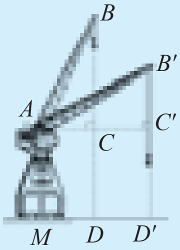


（第 10 题）

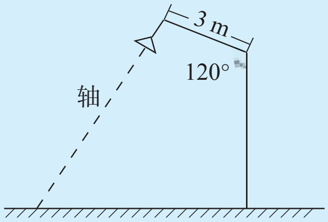
10. 如图，某轮船由西向正东方向航行，在 A 处望见灯塔 C 在东北方向，航行到点 B 处望见灯塔 C 在北偏西 30° 方向，又航行了半小时到达 D 处，望见灯塔 C 恰好在西北方向，若轮船的速度为 40 海里/时，求 A，B 之间的距离（精确到 0.1 海里）.

拓展与延伸

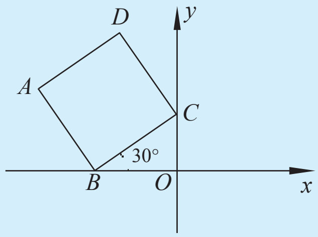
11. 如图是一台起重机的示意图. 它的机身 AM 高为 20.5 m，吊杆 AB 的长是 36.7 m，吊杆与水平方向的倾角可以从 30° 转到 80°，求这台起重机工作时的最大高度和最远水平距离（精确到 0.1 m）.



（第 11 题）



（第 12 题）



（第 13 题）

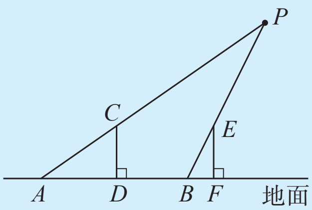
12. 如图，市政部门要在一新修建的马路边安装路灯，路灯的灯臂长为 3 m，且与灯柱所成的角是120°. 路灯的灯罩采用圆锥形的，灯罩的轴线与灯臂垂直，当灯罩的轴线通过马路的路面中心线时，照明效果最佳. 已知路面宽度为 28 m，问设计多高的灯柱，才能取得最佳的照明效果（精确到0.1 m）?

13. 如图，在直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的顶点 B 在 x 轴上，顶点 C 在 y 轴上. 如果 $AB = 2$，$\angle CBO = 30°$，试写出顶点 A，B 的坐标.

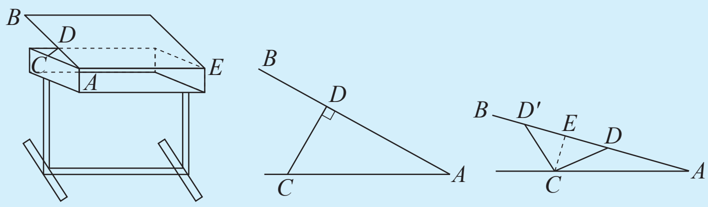
探索与创新

14. 如图，晚上小亮站在路灯 P 下，观察自己的影子，发现当他站在 F 点的位置时，在地面上的影子为 BF. 向后退 2 m 到达 D 点时，在地面上的影子为 AD. 已知 $AB = 4$ m，$\angle PBF = 60°$，$\angle PAB = 30°$. 求小亮的身高.

15. 研究发现，倾斜 12°～24° 的课桌桌面有利于学生保持身体自然姿势. 根据这一要求，课桌生产厂家将课桌的水平桌面设计成可调节角度的桌面，新课桌的设计如图①所示. 课桌面可绕 AE 旋转，在点 C 处安装一根可旋转的支撑臂 CD. $AC = 30$ cm.
（1）如图②，当 $\angle BAC = 24°$ 时，$CD \perp AB$. 求支撑臂 CD 的长；
（2）如图③，当 $\angle BAC = 12°$ 时. 求 AD 的长.



（第 14 题）

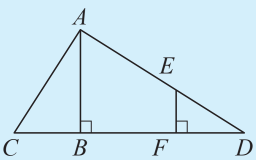


①　②　③

（第 15 题）

16. 蔬菜大棚结构的上半部如图所示，向阳坡 AD 的坡度 $i = 1 : 1.8$，背阳坡 AC 的坡角满足 $\sin C = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，棚宽 $CD = 11.5$ m，AB，EF 为铅直竖立的两根立柱，其中 $AB = BF$. 求 AB，EF 的长.

蔬菜大棚



（第 16 题）

第3章　对圆的进一步认识

内容提要

- 圆的对称性
- 确定圆的条件
- 圆周角
- 直线与圆的位置关系
- 三角形的内切圆
- 弧长及扇形面积的计算
- 正多边形与圆

情境导航

这是北京天坛公园内圜丘坛的照片。

圜丘坛，俗称祭天台，高 5 米，直径 23 米，是一座由汉白玉石雕栏围绕的三层石造圆台。

观察这幅图片，思考下面的问题：

（1）圆是轴对称图形吗？是中心对称图形吗？

（2）如果站在圜丘坛最上一层，你能准确地找出它的圆心吗？

3.1　圆的对称性

交流与发现

你还记得什么是圆吗？你学过哪些有关圆的知识？

思考下面的问题，并与同学交流：

（1）在一张半透明的纸片上画一个圆，标出它的圆心 O，再任意作出一条直径 AB（图 3–1）. 将⊙O 沿直径 AB 折叠，你发现了什么？

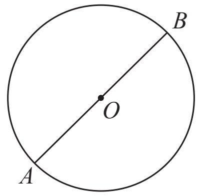


图 3–1

（2）再任意作一条直径，重复（1）中的操作，还有同样的结论吗？

由此得到

圆是轴对称图形，每一条直径所在的直线都是它的对称轴.

（3）如图 3–2，CD 是⊙O 的弦，AB 是与 CD 垂直的直径，垂足为点 E. 将⊙O 沿直径 AB 折叠，你发现线段 CE 与 DE 有什么关系？$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AD}$ 有什么关系？$\overset{\frown}{BC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 有什么关系？为什么？

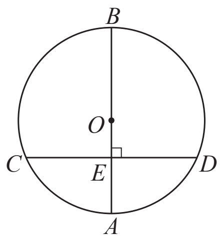


图 3–2

连接 OC，OD（图 3–3）.

因为 $OC = OD$，$OE \perp CD$，所以 $CE = DE$.

从而可知点 C 与点 D 关于直线 AB 对称.

因为⊙O 关于直线 AB 成轴对称，所以当⊙O 沿直线 AB 折叠时，点 C 与点 D 重合，$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AD}$ 重合，$\overset{\frown}{BC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 重合，所以 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

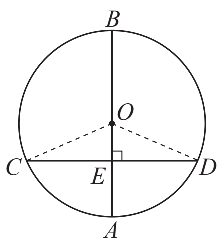


图 3–3

于是，便得到

*** 垂径定理　垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧.**

例1 如图3−4，以△OAB的顶点O为圆心的⊙O交AB于点C，D，且$AC = BD$．求证：$OA = OB$．

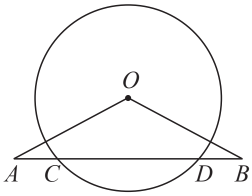


图 3−4

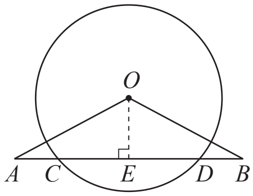


图 3−5

证明 作$OE \perp AB$，垂足为点E（图3−5）．

由垂径定理，得 $CE = DE$．

$\because AC = BD$，

$\therefore AC + CE = BD + DE$，即 $AE = BE$．

$\therefore OE$为线段AB的垂直平分线.

$\therefore OA = OB$．

例2 1 400多年前，我国隋朝时期建造的赵州石拱桥（图3−6）的桥拱近似于圆弧形，它的跨度（弧所对的弦长）为37.02 m，拱高（弧的中点到弦的距离，也叫弓形的高）为7.23 m．求桥拱所在圆的半径（精确到0.1 m）.

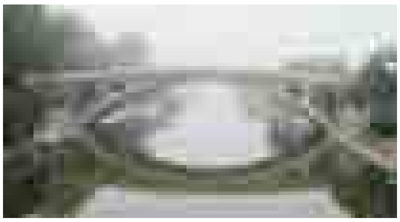


图 3−6　赵州石拱桥

解 设桥拱所在圆的半径为R（m）. 如图3−7，用$\overset{\frown}{AB}$表示桥拱，$\overset{\frown}{AB}$的圆心为O．经过点O作弦AB的垂线，垂足为点D，与$\overset{\frown}{AB}$交于点C．

$\because OC \perp AB$，

$\therefore D$是线段AB的中点，C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD就是拱高.

$\because AB = 37.02$，$CD = 7.23$，

$\therefore AD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 37.02 = 18.51$，

$OD = OC - CD = R - 7.23$．

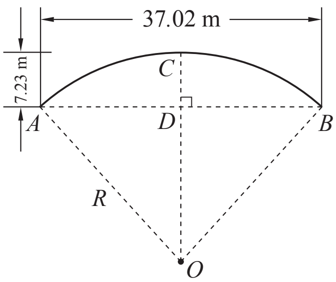


图 3−7

在Rt△ODA中，由勾股定理，得

$$OA^2 = AD^2 + OD^2,$$

即 $$R^2 = 18.51^2 + (R - 7.23)^2.$$

解这个方程，得　　$R \approx 27.3$.

所以，赵州石拱桥桥拱所在圆的半径约为27.3 m .

挑战自我

如图 3-8，P 为⊙O 内一点，你能用尺规作⊙O 的一条弦 AB，使点 P 恰为 AB 的中点吗？说明你的理由.

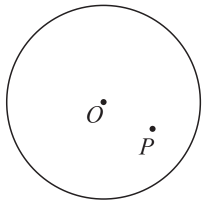
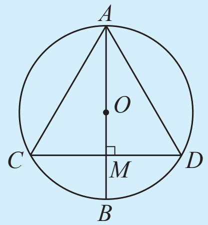


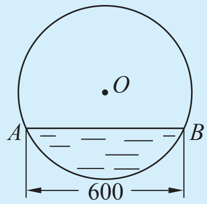
图 3-8

练 习

1. 如图，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD \perp AB$，垂足为点 M，求证：$\angle ACD = \angle ADC$.
2. 如图，⊙O 是水平放置的输油管道的横截面，其直径为 650 mm，油面的宽度 AB = 600 mm . 求油的最大深度.



（第 1 题）



（第 2 题）

观察与思考

任意画一个圆，思考下面的问题：

（1）如图 3-1，以圆心 O 为旋转中心，将这个圆旋转任意一个角度，你有什么发现？特别地，如果将⊙O 绕圆心旋转 180°，直径 AB 的两个端点的位置会发生什么变化？

（2）圆是中心对称图形吗？如果是，哪个点是它的对称中心？

圆绕着它的圆心旋转 180°，能与原来的图形重合. 所以，

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心.

如图 3-9，在⊙O 上任取两点 A 与 B，连接 OA，OB，得到 $\angle AOB$. 像 $\angle AOB$ 这样，顶点在圆心的角叫做**圆心角**（central angle）.

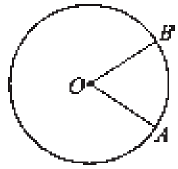


图 3-9

实验与探究

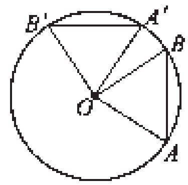


图 3-10

（1）如图 3-10，任意画一个⊙O，在⊙O 内画圆心角 $\angle AOB=\angle A'OB'$．连接 AB，$A'B'$．

（2）以点 O 为旋转中心，将圆心角 $\angle AOB$ 连同 $\overset{\frown}{AB}$ 按逆时针方向旋转，旋转角为 $\angle AOA'$，则半径 OA 与 OA' 重合．这时 OB 与 OB' 重合吗？为什么？

（3）这时，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合吗？弦 AB 与 $A'B'$ 重合吗？由此你能得到什么结论？

事实上，由于 $\angle AOA'=\angle AOB+\angle BOA'$，$\angle BOB'=\angle A'OB'+\angle BOA'$，$\angle AOB=\angle A'OB'$，所以 $\angle AOA'=\angle BOB'$．由于旋转后半径 OA 与 OA' 重合，于是半径 OB 与 OB' 也重合，从而点 A 与 A' 重合，点 B 与 B' 重合．所以 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，弦 AB 与 $A'B'$ 重合，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$．这就是说，在同圆中，如果两个圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦也相等．

利用旋转的基本性质还可以得出：在同圆中，如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，那么 $\angle AOB=\angle A'OB'$，弦 $AB=A'B'$；反之，如果弦 $AB=A'B'$，那么 $\angle AOB=\angle A'OB'$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$．

上面的结论在两个等圆中也成立．

这样，就得到下面的定理：

定理　在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

例3　如图 3-11，AB 与 DE 是⊙O 的两条直径，C 是⊙O 上一点，$AC/\!/DE$．求证：

（1）$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}$；

（2）$BE=EC$．

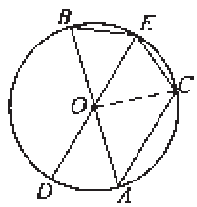


图 3-11

证明　（1）连接 OC．

$\because AC/\!/DE$，

$\therefore \angle AOD = \angle OAC$,

$\angle COE = \angle OCA$.

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$.

$\therefore \angle AOD = \angle COE$.

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE}$.

（2）$\because \angle AOD = \angle BOE$,

$\therefore \angle BOE = \angle COE$.

$\therefore BE = CE$.

挑战自我

如图3-12，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{CD}$，试判断$AB$与$2CD$的大小关系，并说明理由.

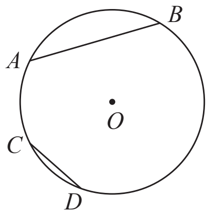


图 3-12

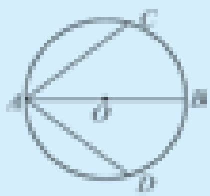
练 习

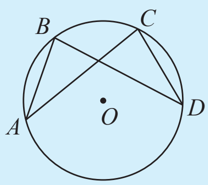
1. 下面的说法正确吗？为什么？

   如图是两个同心圆，大圆的半径OA，OB，分别交小圆于点A'，B'. 因为$\angle AOB = \angle A'OB'$，所以$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.

2. 如图，AB是⊙O的直径，AC与AD是⊙O的弦，$AC = AD$. 求证：$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.


（第 1 题）


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点A，B，C，D在⊙O上，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$. AC与DB相等吗？为什么？

观察与思考

（1）把顶点在圆心的周角等分成360份，每一份圆心角的度数是多少？

（2）把顶点在圆心的周角等分为 360 份时，整个圆被分成了多少份？每一份的弧是否相等？为什么？

整个圆的 $\frac{1}{360}$ 叫做 **1° 的弧**. 因此，1° 的圆心角所对的弧是 1° 的弧；反之，1° 的弧所对的圆心角是 1° 的角. 一般地，$n°$ 的圆心角所对的弧是 $n°$ 的弧；反之，$n°$ 的弧所对的圆心角是 $n°$ 的角（图 3−13）. 由此可见，圆心角与它所对的弧有以下关系：

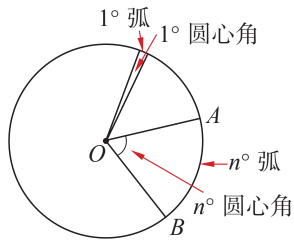


图 3−13

圆心角的度数与它所对弧的度数相等.

例4　如图 3−14，OA，OC 是⊙O 中两条垂直的半径，D 是⊙O 上的一点. 连接 AD 并延长与 OC 的延长线相交于点 B，$\angle B = 25°$. 求 $\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{CD}$ 的度数.

解　连接 OD. 由已知 $\angle AOB = 90°$，$\angle B = 25°$，

则　$\angle A = 65°$.

$\because$　$OA = OD$，

$\therefore$　$\angle ODA = \angle A = 65°$.

于是　$\angle DOA = 180° - (\angle ODA + \angle A)$

$= 180° - (65° + 65°)$

$= 50°$.

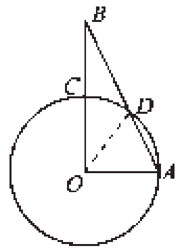


图 3−14

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 $50°$.

$\because$ $\overset{\frown}{AC}$ 的度数为 $90°$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{CD}$ 的度数 $=$ $\overset{\frown}{AC}$ 的度数 $-$ $\overset{\frown}{AD}$ 的度数

$= 90° - 50° = 40°$.

例5　如图 3−15，在⊙O 中，弦 AB 所对的劣弧为圆的 $\frac{1}{3}$，圆的半径为 2 cm，求 AB 的长.

解　连接 OA，OB. 由题意可知，$\overset{\frown}{AB}$ 的度数为

$\frac{1}{3} \times 360° = 120°$，

$\therefore$　$\angle AOB = 120°$.

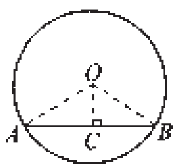


图 3−15

作$OC \perp AB$，垂足为点C，由$OA = OB$，所以$\angle AOC = 60°$，$AC = BC$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOC$中，

$$AC = OA\sin\angle AOC = 2 \cdot \sin 60° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$\therefore AB = 2AC = 2\sqrt{3}$（cm）.

练 习

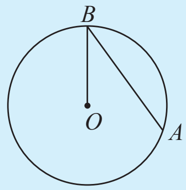
1. 判断下列命题是真命题还是假命题：

（1）度数相等的弧所对的圆心角相等；

（2）相等的圆心角所对弧的度数相等；

（3）如果两条弧的度数相等，那么这两条弧也相等；

（4）长度相等的弧的度数相等.



（第 2 题）

2. 如图，在⊙O中，$\angle B = 37°$，劣弧$\overset{\frown}{AB}$的度数是多少？

3. 在⊙O中，已知$\overset{\frown}{AB}$的度数为$120°$，C为$\overset{\frown}{AB}$的中点. 求证：四边形$OACB$是菱形.

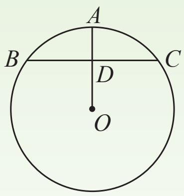
习题3.1

复习与巩固

1. 如图，⊙O的半径OA与弦BC垂直，$AD = 2$ cm，$BC = 8$ cm. 求⊙O的半径.

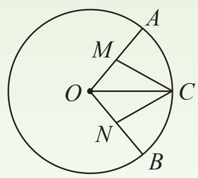
2. 如图，P是⊙O的弦BA延长线上的一点，$BA = AP = 2$，$OP = 5$. 求⊙O的半径.

3. 如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$M$与$N$分别是$OA$与$OB$的中点. 求证：$MC = NC$.



（第 1 题）


（第 2 题）

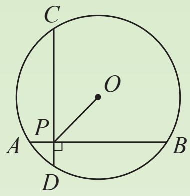


（第 3 题）

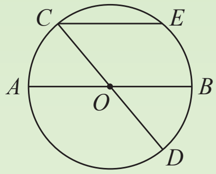
4. 如图，在半径为5的⊙O中，AB，CD是互相垂直的两条弦，垂足为点P. 已知$AB = CD = 8$，求OP的长.

5. ⊙O上的两点A，B将圆分成度数比为$1:3$的两条弧，且点O到AB的距离等于1. 求⊙O的半径.

6. 如图，已知 AB，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE // AB$，$\overset{\frown}{CE}$ 的度数为 $80°$．求 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数.



（第 4 题）

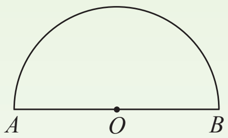


（第 6 题）

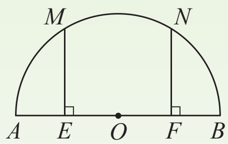
拓展与延伸

7. 如图，有一块半圆形木板，AB 为半圆的直径，点 O 为圆心. 小亮要从这块木板上截出一块三角形木板，使三角形的两个顶点分别为 A，B，另一个顶点在 $\overset{\frown}{AB}$ 上. 怎样截才能使三角形木板的面积最大？说明你的理由.

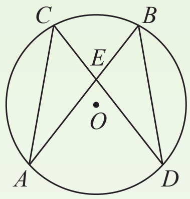
8. 如图，AB 为半圆的直径，点 O 是圆心，E 与 F 分别是 OA，OB 的中点. 过点 E，F 作 $ME \perp AB$，$NF \perp AB$，分别与半圆交于点 M，N，垂足为点 E，F．求证：$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$．



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 与弦 CD 相交于 E 点，$\overset{\frown}{ACB}$ 与 $\overset{\frown}{DBC}$ 的度数相等. 线段 AE 与线段 DE 相等吗？证明你的结论.

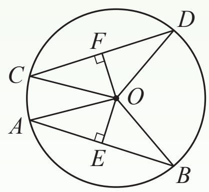
探索与创新

10. 如图，在 $\odot O$ 中，AB 与 CD 是两条弦，$OE \perp AB$，$OF \perp CD$，垂足分别是点 E，F，OE，OF 分别叫做弦 AB，CD 的弦心距.

（1）已知 $\angle AOB = \angle COD$，求证：$OE = OF$；

（2）已知 $OE = OF$，求证：$AB = CD$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，$\angle AOB = \angle COD$；

（3）你能用文字语言把上述结论表述出来吗？



（第 10 题）

3.2　确定圆的条件

实验与探究

（1）已知点 A，经过点 A 作圆．你能作出多少个圆？这些圆的圆心和半径能确定吗？

（2）已知点 A，B，经过这两点作圆．你能作出多少个圆？这些圆的圆心的位置有什么特点？这些圆的半径能确定吗？

经过一点作圆，可作无数个圆（图 3–16）；经过两点作圆，也可作无数个圆，这些圆的圆心都在线段 AB 的垂直平分线上（图 3–17）．在这两种情况下，所作的圆的圆心和半径都不能确定．

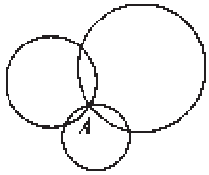


图 3–16

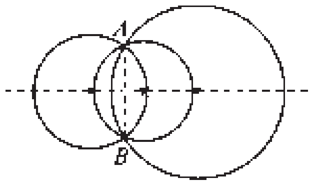


图 3–17

（3）已知 A，B，C 是不在同一条直线上的三个点，经过这三点能作圆吗？如果能，怎样作出过这三点的圆？

到点 A，B，C 距离相等的点既在线段 AB 的垂直平分线上，也在线段 BC 的垂直平分线上，因此这个点是这两条垂直平分线的交点．

已知：如图3–18，A，B，C 是不在同一条直线上的三个点．

求作：$\odot O$，使 A，B，C 三点都在 $\odot O$ 上．

作法　（1）连接 AB，BC；

（2）分别作线段 AB 与 BC 的垂直平分线 l_1，l_2，l_1 与 l_2 相交于点 O；

（3）以点 O 为圆心，以 OA 为半径作 $\odot O$.

$\odot O$ 就是所求作的经过 A，B，C 三点的圆.

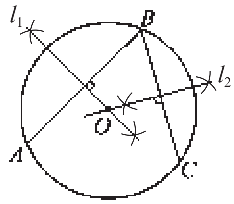


图 3-18

在以上作图的过程中，因为 A，B，C 三点不在同一条直线上，从而直线 l_1 与 l_2 有且只有一个交点 O，所以，圆心 O 的位置唯一确定. 由于点 O 到 A，B，C 三点的距离相等，于是点 B，C 都在以 O 为圆心，OA 为半径的圆上，这就是说，$\odot O$ 的半径也就确定了. 所以过 A，B，C 三个点能作且只能作一个圆. 这样，就得到

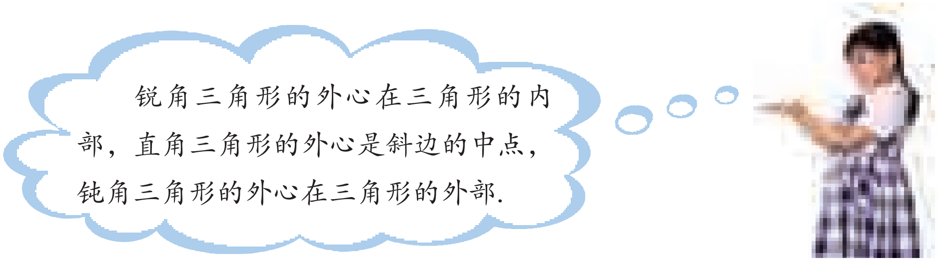
小资料

三角形的外心是三角形三条边的垂直平分线的交点，它到三角形三个顶点的距离相等. 任何一个三角形都有且只有一个外心.

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

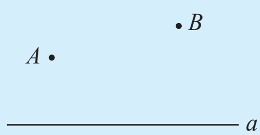
由此可知，三角形三个顶点确定一个圆. 经过三角形三个顶点的圆叫做**三角形的外接圆**（circumcircle of triangle），外接圆的圆心叫做三角形的**外心**（circumcenter），这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**（inscribed triangle）. 在图 3-18 中，如果连接 AC，那么 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，或者说 $\triangle ABC$ 内接于圆 O. O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

（4）分别作一个锐角三角形、直角三角形、钝角三角形，再作出每个三角形的外接圆. 它们外心的位置与所在的三角形分别有怎样的关系？



练 习

1. 如图，已知直线 a 和直线外的两点 A，B（直线 AB 与 a 不平行也不垂直）. 求作经过点 A，B 的圆，并使它的圆心在直线 a 上.
2. 如图，是一块出土的残破的古代铜镜片. 怎样测出它的半径呢？



（第 1 题）

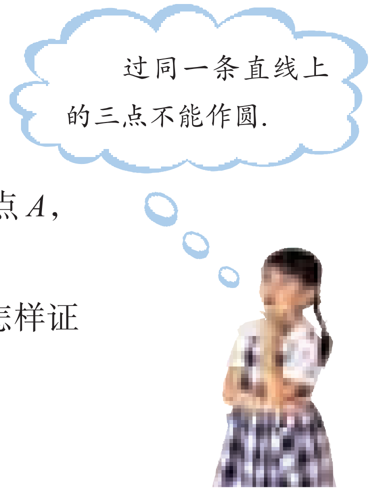
（第 2 题）

实验与探究

我们知道，不在同一条直线上的三点确定一个圆. 思考下面的问题：

（1）如果 A，B，C 三点在同一条直线上，经过点 A，B，C 能作出一个圆吗？试一试.

（2）为什么过同一条直线上的三点不能作圆？怎样证明这个结论呢？与同学交流.



已知：A，B，C 是直线 l 上的三点.

求证：过 A，B，C 三点不能作圆.

证明　假设过 A，B，C 三点可以作圆，设这个圆的圆心为 O.

因为 $OA = OB = OC$，所以点 O 既在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上，也在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上，因此点 O 为 l_1 与 l_2 的交点（图 3-19）. 这与基本事实“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾.

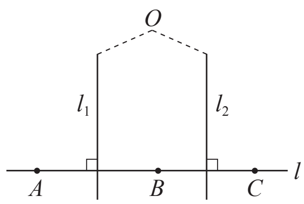
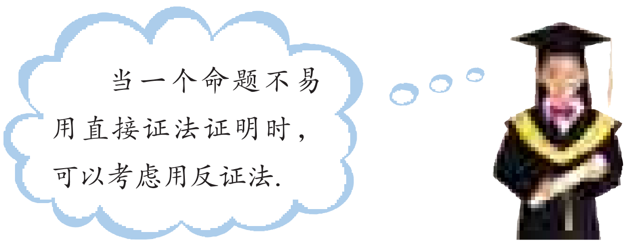


图 3-19

这说明过同一条直线上的三点 A，B，C 可以作圆的假设是不对的，所以过同一条直线上的三点 A，B，C 不能作圆.



这种证明方法与我们以前学过的证明方法不同，它不是由已知条件出发直接证明命题的结论，而是先提出与命题的结论相反的假设，推出矛盾，从而证明命题成立. 这种证明的方法叫做**反证法**.

用反证法证明一个命题，一般有三个步骤：

（1）否定结论——假设命题的结论不成立；

（2）推出矛盾——从假设出发，根据已知条件，经过推理论证，得出一个与命题的条件或已知的定义、基本事实、定理等相矛盾的结果；

（3）肯定结论——由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

例1 证明平行线的性质定理1：**两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.**

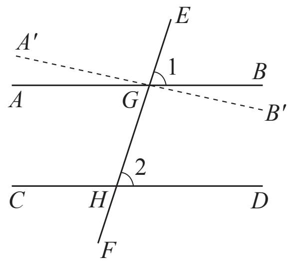


图 3-20

已知：如图3-20，直线 $AB /\!/ CD$，直线 EF 与 AB，CD 分别相交于点 G，H.

求证：$\angle 1 = \angle 2$.

证明 假设 $\angle 1 \neq \angle 2$.

过点 G 作直线 $A'B'$，使 $\angle EGB' = \angle 2$. 根据基本事实“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行”，可得 $A'B' /\!/ CD$. 这样，过点 G 就有两条直线 AB 与 $A'B'$ 与直线 CD 平行. 这与基本事实“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾.

这说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设是不对的，所以 $\angle 1 = \angle 2$.

例2 证明：**平行于同一条直线的两条直线平行.**

图 3-21

已知：如图3-21，直线 $a /\!/ c$，$b /\!/ c$.

求证：$a /\!/ b$.

证明 假设直线 a，b 不平行，那么它们相交，设交点为 P.

由已知 $a /\!/ c$，$b /\!/ c$，这样过点 P 就有两条直线 a，b 与直线 c 平行. 这与基本事实“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾.

这说明 a，b 不平行的假设是不对的，所以 $a /\!/ b$.

史海漫游

一个闪耀着智慧光辉的推理典范

关于不同重量的物体从同一高度下落的速度，古希腊学者亚里士多德（Aristotle，公元前384—公元前322年）曾断言：“快慢与其重量成正比”，这就是说，重的物体要比轻的物体下落得快一些. 长期以来，这个论断一直统治着人们的头脑. 直到1590年，意大利物理学家伽利略（Galileo 1564—1642）才给予推翻. 伽利略认为：在真空中，轻重物体应同时落地. 他除了在比萨斜塔通过著名的实验来验证以外，还给出一个十分简

单的推理证法，使反对者不得不接受事实：设物体A比B重，按照亚里士多德的说法，A应比B先落地. 现在把A与B捆在一起成为物体A+B. 一方面，因A+B比A重，它应比A先落地；另一方面，由于A比B落得快，B应减慢A的下落速度，所以A+B又应比A后落地. 这样便得到了自相矛盾的结论：A+B既应比A先落地，又应比A后落地. 这个矛盾来源于亚里士多德的错误论断. 因此，重的物体应当和轻的物体同时落地.

伽利略

请看，1 800多年的错误论断竟被如此简单的推理所揭露，人们不能不佩服伽利略的思想是何等敏锐，推理的威力是多么强大啊！

练习

用反证法证明下列命题：

1. 一个三角形中不能有两个角是钝角.
2. 在一个三角形中，如果两个角不相等，那么它们所对的边也不相等.

习题3.2

复习与巩固

1. 判断下列命题是真命题还是假命题：

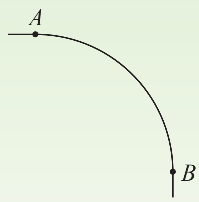
（1）经过任意两点可以作无数个圆；

（2）任意一个三角形都有且只有一个外接圆；

（3）任意一个圆都有且只有一个内接三角形；

（4）三角形任意两边的垂直平分线的交点是三角形的外心；

（5）三角形的外心到三角形各边的距离相等.



（第2题）

2. 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，用尺规确定 $\overset{\frown}{AB}$ 的圆心.
3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$，$BC=5$. 求$\triangle ABC$的外接圆的半径.
4. 用反证法证明：三角形的三个内角中，至少有一个内角不小于60°.

拓展与延伸

5. 已知线段$PQ=5$ cm，以3 cm长的线段为半径画圆，使它经过点P和Q. 这样的圆能画几个？如果$PQ=6$ cm呢？

6. 用反证法证明：在△ABC中，如果D，E分别是边AB，AC上的点，那么BE，CD不能互相平分.

探索与创新

7. 在直角坐标系中，已知点$A(0, 4)$，$B(4, 4)$和$C(6, 2)$.
   (1) 点A，B，C能确定一个圆吗？说明理由；
   (2) 如果能，用尺规作图的方法，作出过这三点的圆的圆心P；
   (3) 写出圆心P的坐标，并求出⊙P的半径.
8. 用反证法证明：圆内不是直径的两条弦相交，不能互相平分.

3.3 圆周角

观察与思考

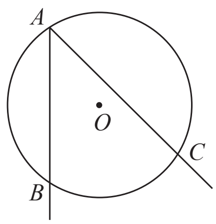


图 3–22

（1）如图3–22，点A，B，C是⊙O上的三个点. 以A为端点作射线AB，AC，得到了一个怎样的角？

（2）（1）中的∠BAC有什么特征？

∠BAC的顶点在圆上，并且它的两边在圆内的部分是圆的两条弦，像这样的角叫做**圆周角**（angle in a circular segment）.

（3）圆周角与圆心角有什么不同？

（4）观察图3–23中的各角，其中哪些是圆周角？哪些是圆心角？

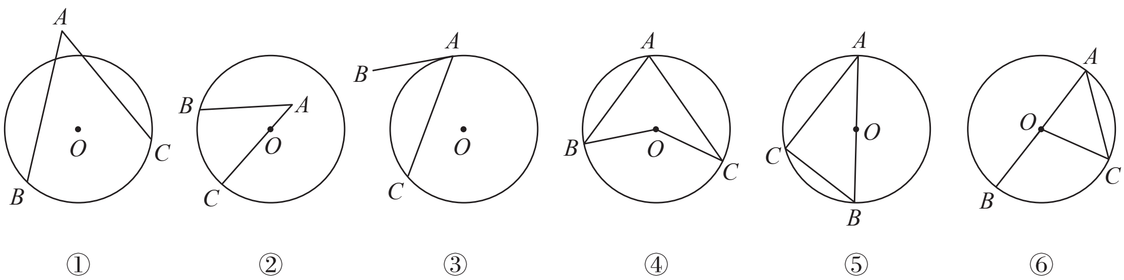


图 3–23

实验与探究

任意画一个⊙O，在圆上任意取三个点A，B，C，连接AB，AC.

（1）圆心O与$\angle BAC$有几种可能的位置关系？与同学交流.

圆心与同圆上的圆周角的位置关系有三种情况：圆心在圆周角的一边上（图 3-24①），圆心在圆周角的内部（图 3-24②），圆心在圆周角的外部（图 3-24③）.

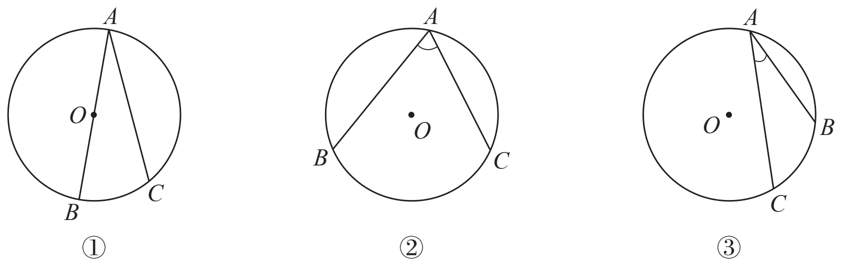


图 3-24

（2）在图 3-24①中，AB是⊙O的直径，连接OC，你发现$\angle BOC$与$\angle BAC$有什么位置关系和数量关系？

在图 3-24①中$\angle BAC$是$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角，$\angle BOC$是$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角，同时$\angle BOC$又是等腰三角形AOC的外角. 因此可以推出，此时$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

（3）能将问题（2）中的结论推广到图 3-24②③吗？由此你猜想圆周角与它所对弧上的圆心角有怎样的数量关系？怎样证明你的结论？

在图3-24②③中作出圆心角$\angle BOC$及过A点的直径，可利用图3-24①中的结论，发现$\angle BAC$与$\angle BOC$之间有同样的关系.

已知：如图3−25，A，B，C是$\odot O$上的任意三点.

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

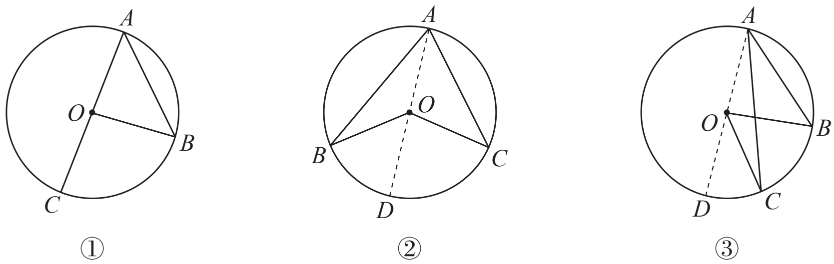


图 3−25

证明 （1）当圆心O在$\angle BAC$的一条边上时（图3−25①）.

在$\triangle OAB$中，

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle BAO=\angle OBA$.

$\because \angle BOC=\angle BAO+\angle OBA$，

$\therefore \angle BOC=2\angle BAO$.

$\therefore \angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

（2）当圆心O在$\angle BAC$的内部时，作直径AD（图3−25②）.

由（1）的结论，得

$\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，$\angle DAC=\dfrac{1}{2}\angle DOC$.

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=\dfrac{1}{2}\angle BOD+\dfrac{1}{2}\angle DOC$.

$\because \angle BAD+\angle DAC=\angle BAC$，

$\dfrac{1}{2}\angle BOD+\dfrac{1}{2}\angle DOC=\dfrac{1}{2}(\angle BOD+\angle DOC)=\dfrac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

加油站

对于②③两种情况，通过作直径AD，原来的圆周角就转化为圆心O在其一边上的两个圆周角的和或差，利用（1）的结论，就能推出（2）和（3）的结论.

（3）当圆心O在$\angle BAC$的外部时（图3−25③），你能给出证明吗？试一试，与同学交流.

归纳以上三种情况的结论，就得到

圆周角定理 圆周角等于它所对弧上的圆心角的一半.

因为圆心角与它所对弧的度数相等，因而由圆周角定理可以直接得到

推论 1　圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

例1　如图 3–26，在⊙O 中，$\angle AOB=110°$，点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上. 求 $\angle ACB$ 的度数.

解　点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 的位置有两种情况：

（1）当点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时（图 3–26①），

$\because \angle AOB=110°$，

$\therefore \overset{\frown}{ACB}$ 的度数 $=110°$.

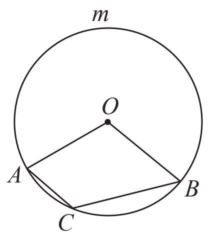
$\therefore \overset{\frown}{AmB}$ 的度数 $=360°-110°=250°$.

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 250°=125°$.

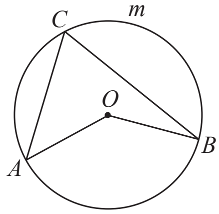
（2）当点 C 在优弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 上时（图 3–26②），

$\because \angle AOB=110°$，

$$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 110°=55°.$$



①

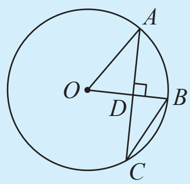


②

图 3–26

练 习

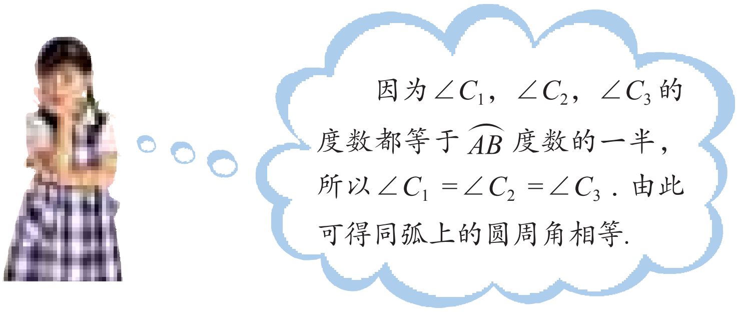
1. 如图，在⊙O 中，$\angle AOB=70°$，$OB\perp AC$，垂足为点 D，求 $\angle OBC$ 的度数.
2. 已知△ABC 内接于⊙O，$AB=AC$，且 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 $130°$，求 $\angle A$ 的度数.



（第 1 题）

观察与思考

（1）如图 3–27①，在⊙O 中，$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$ 都是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，它们的大小有什么关系？由此你能得到什么结论？



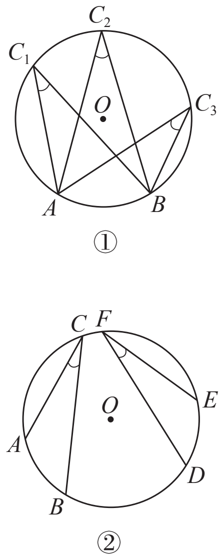


图 3–27

（2）如图 3−27②，在⊙O中，如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE}$，那么它们所对的圆周角$\angle ACB$与$\angle DFE$相等吗？反之，如果$\angle ACB$与$\angle DFE$都是⊙$O$的圆周角，并且$\angle ACB=\angle DFE$，那么$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{DE}$相等吗？由此你能得到什么结论？如果在等圆中呢？

于是，便得到圆周角定理的另一个推论：

推论 2　同弧或等弧上的圆周角相等；在同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等.

（3）如图 3−28，在⊙O中，AB是圆的直径，C是圆上异于A，B的一点．$\angle ACB$的度数是多少？为什么？

反过来，如果$\angle ACB$是⊙O的圆周角，$\angle ACB=90°$，那么它所对的弦经过圆心吗？为什么？

于是，得到圆周角定理的第 3 个推论：

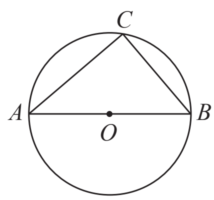


图 3–28

推论 3　直径所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径.

例2　如图 3−29，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，A 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\angle BAC=120°$．过点 B 作$\odot O$的直径 BD，连接 AD．若 $AD=6$，求 AC 的长.

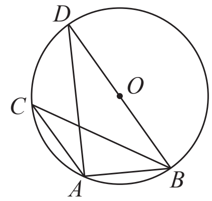


图 3−29

解　$\because$ A 是劣弧 BC 的中点，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

在$\triangle BAC$中，$\angle BAC=120°$.

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}(180°-120°)=30°$.

$\therefore \angle D=30°$.

$\because$ BD 是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle DAB=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DAB$中，$AD=6$，

$\therefore AB=AD\cdot\tan D=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

$\therefore AC=AB=2\sqrt{3}$.

例3　如图 3−30，AD 是$\triangle ABC$的高，AE 是$\triangle ABC$的外接圆直径，点 O 为圆心. $\triangle ADC$ 与$\triangle ABE$相似吗？说明理由.

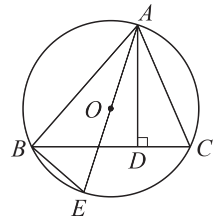


图 3−30

解　$\triangle ADC\backsim\triangle ABE$．理由如下：

$\because$ AE 为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ABE=90°$.

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADC=90°$.　$\angle ADC=\angle ABE$.

$\because \angle ACD=\angle AEB$，

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle ABE$.

挑战自我

如图 3−31，AB 是$\odot O$的直径，E 为$\odot O$上的一点，C 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点. $CD\perp AB$，垂足为点 D．AE 交 CD 于点 F，连接 AC．求证：$AF=CF$.

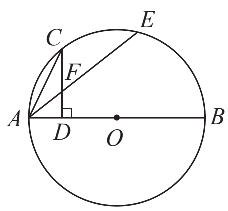
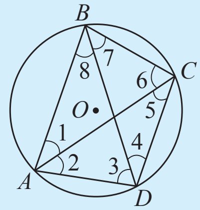


图 3−31

练 习

1. 如图，在⊙O中，弦$AB /\!/ CD$.



（第 1 题）

（1）$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 相等吗？为什么？

（2）你能找出图中所有相等的圆周角吗？

2. 某种工件有一个凹面，凹面的横截面为半圆时为合格品. 利用一个角尺可以检验制作的工件是否合格. 下列四种情况中，合格的工件是 ________，为什么？


（1）　（2）　（3）　（4）

（第 2 题）

观察与思考

（1）如图 3−32，四边形 $ABCD$ 的顶点与⊙O 具有怎样的关系？

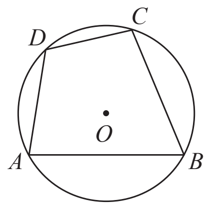


图 3−32

像这样，所有顶点都在同一个圆上的多边形叫做**圆内接多边形**，这个圆叫做这个**多边形的外接圆**. 在图 3−32 中，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，⊙O 是四边形 $ABCD$ 的外接圆.

（2）$\angle A$ 与 $\angle C$ 是四边形 $ABCD$ 的一组对角，也都是⊙O 的圆周角，它们在⊙O 中所对的分别是哪两条弧？这两条弧有什么关系？从而 $\angle A$ 与 $\angle C$ 具有怎样的数量关系？$\angle B$ 与 $\angle D$ 也具有这样的数量关系吗？

因为 $\overset{\frown}{BCD}$ 与 $\overset{\frown}{BAD}$ 的度数之和为$360°$，
由圆周角定理可知，$\angle A+\angle C=180°$.
同理，$\angle B+\angle D=180°$.

于是，得到圆周角定理的第4个推论：

推论4　圆内接四边形的对角互补.

例4　如图3−33，四边形$ABCD$内接于⊙O，已知$\angle BOD = 140°$，求$\angle C$的度数.

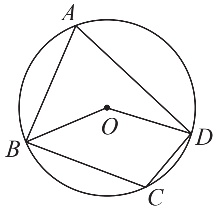


图 3−33

解　∵ 四边形$ABCD$内接于⊙O，

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$，

$\because \angle BOD = 140°$，

$\therefore \angle A = \dfrac{1}{2}\angle BOD$

$= \dfrac{1}{2} \times 140° = 70°$.

$\therefore \angle C = 180° - \angle A$

$= 180° - 70° = 110°$.

例5　如图3−34，$\triangle ABC$内接于⊙O，D，F分别是$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{AB}$上的点，$\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DA}$. 连接$AF$并延长交$CB$的延长线于点$E$，连接$AD$，$CD$.

求证：$\angle CAD = \angle E$.

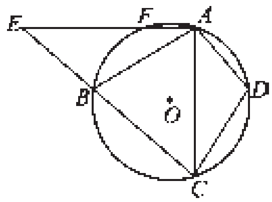


图 3−34

证明　$\because \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DA}$，

$\therefore \angle BAE = \angle ACD$.

∵ 四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，

$\therefore \angle ABC + \angle D = 180°$.

$\because \angle ABC + \angle ABE = 180°$，

$\therefore \angle ABE = \angle D$.

$\therefore \triangle CDA \backsim \triangle ABE$.

$\therefore \angle CAD = \angle E$.


挑战自我

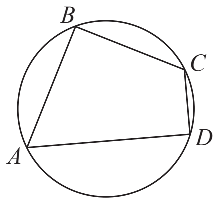
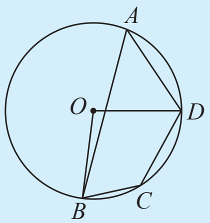


图 3−35

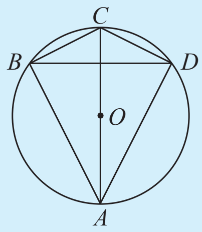
如图3−35，在圆内接四边形$ABCD$中，$\angle A = 60°$，$\angle B = 90°$，$AB = 2$，$CD = 1$，求BC的长.

练 习

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\angle BOD = 98°$. 求 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的度数.



（第 1 题）



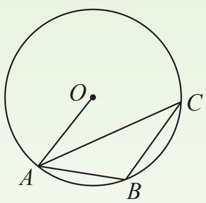
（第 2 题）

2. 如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 BD，并且 $AC \perp BD$，$\angle BAD = 70°$ ，求四边形 $ABCD$ 其余各角的大小.

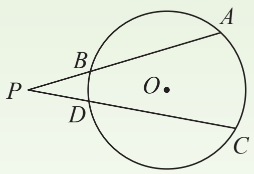
习题3.3

复习与巩固

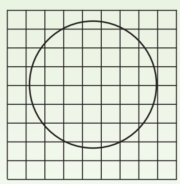
1. 如图，A，B，C 是 $\odot O$ 上的三个点，$\angle ACB = 30°$ ，求 $\angle BAO$ 的度数.
2. 如图，AB，CD 是 $\odot O$ 的弦，延长 AB，CD 相交于点 P. 求证：$\angle P$ 的度数等于 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 度数的差的一半.



（第 1 题）

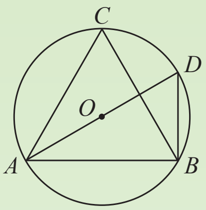


（第 2 题）

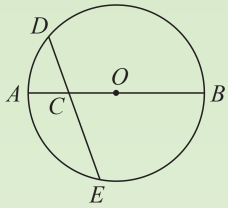


（第 3 题）

3. 如图，在方格纸上有一个圆. 你能用不带刻度的直尺确定它的圆心吗？说明确定圆心的方法和理由.
4. 如图，等边三角形 ABC 内接于 $\odot O$，AD 为 $\odot O$ 的直径. 求 $\angle ADB$ 和 $\angle CBD$ 的度数.
5. 如图，C 是 $\odot O$ 的直径 AB 上一点，过点 C 作弦 DE，使 $CD = CO$. 若 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 $40°$ ，求 $\overset{\frown}{BE}$ 的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

（第 6 题）

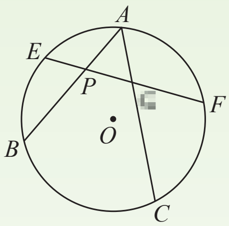
6. 如图，D 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上的一点．AD 平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$，求证：$BD = CD$．

拓展与延伸

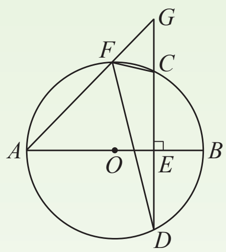
7. 已知⊙O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，且 $BC = \sqrt{2}$，⊙O 的半径为 1，求 $\angle A$ 的度数．

8. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 60°$，$AC = 3$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径．

9. 如图，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点分别为点 E 与 F，弦 EF 与 AB，AC 分别相交于点 P，Q．试判断 $\triangle APQ$ 的形状，并证明你的结论．



（第 9 题）



（第 10 题）

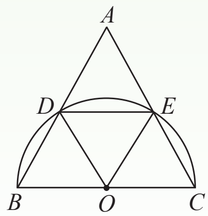
10. 如图，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD \perp AB$，垂足为点 E．点 F 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的任意一点，延长 AF 交 DC 的延长线于点 G，连接 FC，FD．求证：$\angle GFC = \angle AFD$．

探索与创新

11. 如图，BC 是半圆 O 的直径，D，E 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的三等分点．BD，CE 的延长线交于点 A．

（1）判断 $\triangle ADE$ 与 $\triangle DOE$ 的形状；

（2）如果 $\angle A$ 的度数不变，D，E 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上移动，$\triangle ADE$ 与 $\triangle DOE$ 的形状是否也随之改变？说明你的理由．

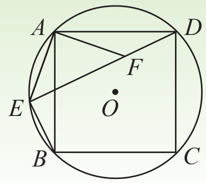


（第 11 题）

12. 正方形 $ABCD$ 内接于⊙O.

（1）如图，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上取一点 E，连接 DE，AE，BE. 在 DE 上截取点 F，使 $DF=BE$. 在图中找出与 $\triangle ADF$ 全等的三角形，并证明你的结论.

（2）在（1）的条件下，小莹还发现 DE，BE，AE 之间满足下列关系：$DE-BE=\sqrt{2}AE$. 请你说明理由.



（第 12 题）

3.4　直线与圆的位置关系

实验与探究

（1）我们过去曾学习过点与圆的位置关系. 回忆一下，在平面内一个点 P 与⊙O 的位置关系有几种？如果已知⊙O 的半径为 r，通过怎样的数量关系可以确定点 P 与⊙O 的位置关系？

（2）在纸上画直线 l 与 m，使 $m\perp l$，垂足为点 P. 取一张圆形的透明纸片，记圆心为 O. 将⊙O 放在纸上，使点 O 落在直线 m 上，沿 m 平移⊙O（图 3–36）. 在平移过程中，观察直线 l 与⊙O 的公共点的个数，你有什么发现？

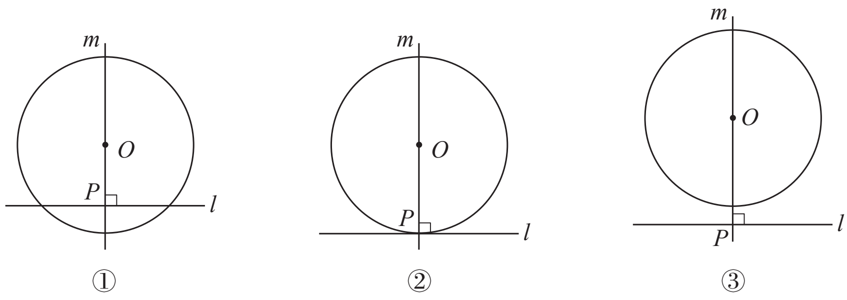
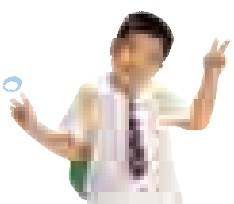


图 3–36

我发现，直线 l 与圆的公共点的个数与⊙O 与直线 l 的位置有关，可以有两个，可以只有一个，也可以没有公共点.



当直线 l 与⊙O 有两个公共点时（图 3−36①），叫做直线 l 与⊙O **相交**. 直线 l 叫做⊙O 的**割线**（secant line），两个公共点叫做交点.

当直线 l 与⊙O 有唯一的公共点时（图 3−36②），叫做直线 l 与⊙O **相切**. 直线 l 叫做⊙O 的**切线**（tangent line），唯一的公共点叫做**切点**（point of tangency）.

当直线 l 与⊙O 没有公共点时（图 3−36③），叫做直线 l 与⊙O **相离**.

（3）如图 3−36，设⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离 OP 为 d，在平移⊙O 的过程中，当直线 l 与⊙O 相交时，d 与 r 有怎样的大小关系？当直线 l 与⊙O 相切或相离时呢？反过来，你能根据 r 与 d 的大小关系，判定⊙O 与 l 的位置关系吗？

当直线 l 与⊙O 相交时，$d < r$；反之，当 $d < r$ 时，直线 l 与⊙O 相交.
当直线 l 与⊙O 相切时，______；反之，当 $d = r$ 时，直线 l 与⊙O ______.
当直线 l 与⊙O 相离时，______；反之，当 $d > r$ 时，直线 l 与⊙O ______.

例1　在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$ cm，$BC = 4$ cm. 以点 C 为圆心，r 为半径画圆. 当 r 分别取下列各值时，斜边 AB 所在的直线与⊙C 具有怎样的位置关系？

（1）$r = 2$ cm；（2）$r = 2.4$ cm；（3）$r = 3$ cm.

解　如图 3−37，经过点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为点 D.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

$$\because \ \text{Rt}\triangle ADC \backsim \text{Rt}\triangle ACB, \quad \therefore \ \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB}.$$

$$\therefore \ CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$$

即圆心 C 到 AB 的距离 $d = 2.4$ cm.

（1）当 $r = 2$ cm 时，$d > r$，直线 AB 与⊙C 相离；

（2）当 $r = 2.4$ cm 时，$d = r$，直线 AB 与⊙C 相切；

（3）当 $r = 3$ cm 时，$d < r$，直线 AB 与⊙C 相交.

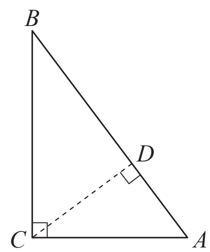


图 3−37

练 习

1. 已知⊙O的半径为5 cm，点P在直线l上，若$OP=5$ cm，则直线l与⊙O有怎样的位置关系？画图说明.
2. 已知等腰直角三角形的直角边长为2 cm，以直角顶点为圆心，以r为半径画圆. 当r在什么范围内取值时，所画的圆与斜边相交？

观察与思考

（1）过⊙O的半径OA的外端点A作与半径OA垂直的直线l（图3-38），你发现直线l与⊙O有怎样的位置关系？为什么？

因为圆心O到直线l的距离等于⊙O的半径，所以直线l与⊙O相切.

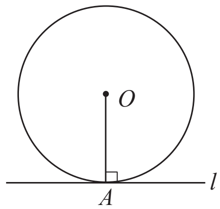


图 3-38

切线的判定定理　过半径的外端并且垂直于半径的直线是圆的切线.

（2）利用上面的定理，过⊙O上任意一点，你会用三角尺画⊙O的切线吗？试一试.

设P是⊙O上的任意一点，将三角尺的直角顶点与P点重合，一条直角边过圆心O，再沿另外一条直角边画直线，该直线便是⊙O的经过点P的切线.

例2　如图3-39，以△ABC的边AB为直径作⊙O，如果⊙O经过AC的中点D，然后过D作$DE\perp BC$，垂足为点E. DE是⊙O的切线吗？说明理由.

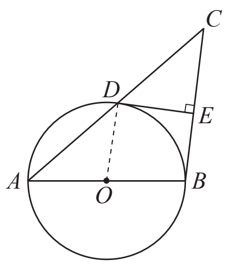


图 3-39

解　DE是⊙O的切线. 理由如下：

连接 OD.

$\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $AO=OB$.

又 $\because$ $AD=DC$，

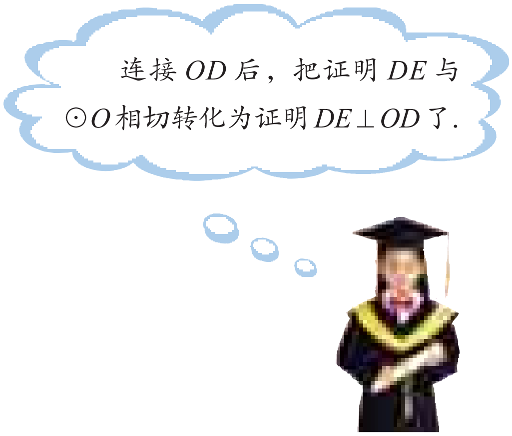
$\therefore$ OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

从而 $OD /\!/ BC$.

$\because$ $DE \perp BC$，

$\therefore$ $DE \perp OD$，

$\therefore$ DE 是 $\odot O$ 的切线.



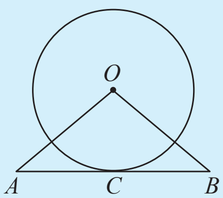
在例2中，你还能由已知探索出哪些结论？说明你的理由，并与同学交流.

挑战自我

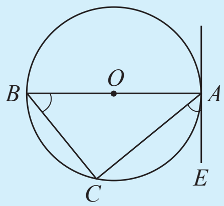
已知 $\odot O$ 和圆上一点 P，你会用尺规过点 P 作 $\odot O$ 的切线吗？说出你的作法和作图的道理.

练 习

1. 如图，直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. AB 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？
2. 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，AB 为 $\odot O$ 的直径，$\angle CAE=\angle B$. AE 与 $\odot O$ 相切吗？为什么？

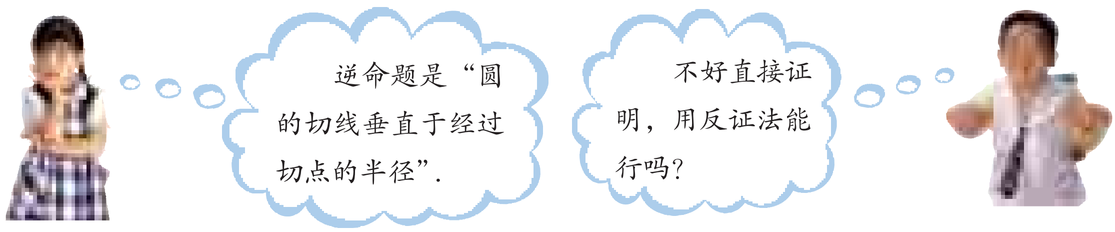


（第 1 题）



（第 2 题）

你能说出切线的判定定理的逆命题吗？这个逆命题是真命题还是假命题？如果是真命题，你能给出证明吗？



已知：如图 3−40，直线l与$\odot O$相切于点A.

求证：$OA\perp l$.

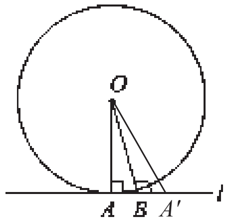


图 3−40

证明　如图 3−40，假设l与半径OA不垂直. 过点O作$OB\perp$直线l，垂足为点B. 在l上取$BA'=BA$，且使B点在A与A'之间，连接OA'. 于是OB垂直平分AA'，$OA=OA'$.

$\because$点A是切点，OA是$\odot O$的半径，

$\therefore OA'$也是$\odot O$的半径.

这就是说，直线l与$\odot O$有两个公共点，即l与$\odot O$相交，这与已知条件“直线l与$\odot O$相切于点A”矛盾，所以$OA\perp l$.

由此得到

切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

例3　A，B，C是$\odot O$上的三点，经过点A，点B分别作$\odot O$的切线，两切线相交于点P，如果$\angle P=42^\circ$，求$\angle ACB$的度数.

解　（1）如图 3−41，当点C在$\overset{\frown}{AmB}$上时，连接OA，OB.

$\because PA$，PB是$\odot O$的切线，A，B是切点，

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90^\circ$.

在四边形$OAPB$中，

$\because \angle P=42^\circ$，

$\therefore \angle AOB=360^\circ-\angle OAP-\angle OBP-\angle P$

$=360^\circ-90^\circ-90^\circ-42^\circ=138^\circ$.

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 138^\circ=69^\circ$.

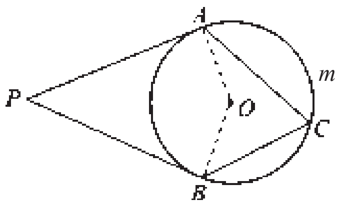
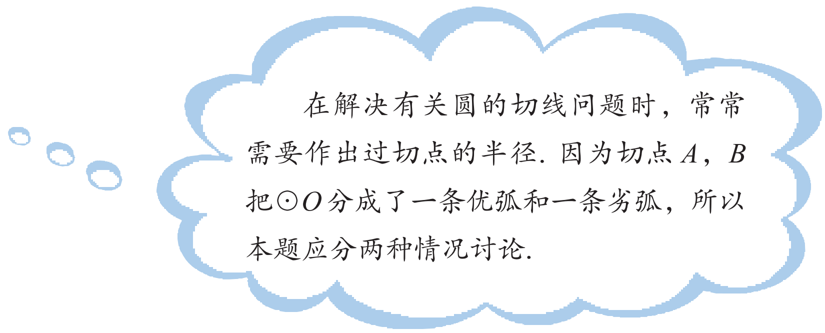


图 3−41



（2）如图 3–42，当点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，在优弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 上任取一点 C'，连接 AC'，BC'.

由（1）知，$\angle AC'B = 69°$，

在圆内接四边形 $ACBC'$ 中，

$\because \angle ACB + \angle AC'B = 180°$，

$\therefore \angle ACB = 180° - \angle AC'B = 180° - 69° = 111°$.

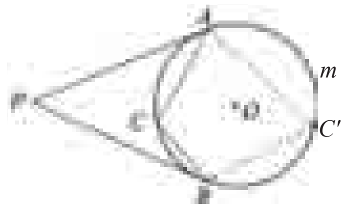
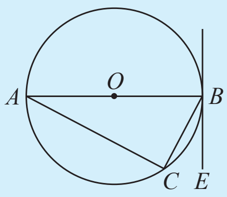


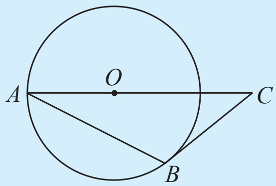
图 3–42

练习

1. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，AB 为直径，直线 BE 切 $\odot O$ 于点 B．求证：$\angle A = \angle CBE$.
2. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，AO 的延长线交过点 B 的 $\odot O$ 的切线于 C，如果 $\angle A = 20°$，求 $\angle C$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

过圆上一点能画且只能画一条圆的切线，过圆外一点能画圆的几条切线？

实验与探究

（1）在透明纸上画出 $\odot O$，在 $\odot O$ 上取一点 A，过点 A 画出 $\odot O$ 的切线，在过点 A 的切线上任取一点 P（图 3–43）.

（2）把你画出的图形沿直线 PO 对折，你发现点 A 关于 PO 的对称点 B 在 $\odot O$ 上吗？由此你能发现哪些结论？与同学交流.

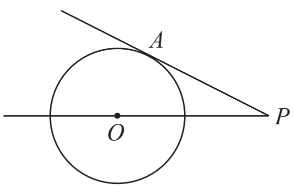


图 3–43

点 A 关于 PO 的对称点 B 在 $\odot O$ 上. 连接 PB，则 PB 与 $\odot O$ 相切，点 B 是切点，由于 PA 与 PB 关于 PO 成轴对称，可以发现经过圆外一点可以画圆的两条切线 PA，PB，并且 $PA = PB$.

（3）能证明你的结论是正确的吗？

如图 3−43，已知 P 是⊙O 外一点，PA 是⊙O 的切线. 过切点 A 作 PO 的垂线，垂足为点 C，交⊙O 于点B，连接 PB，OA，OB（图 3−44）.

$\because OA = OB$，$OP \perp AB$，

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$.

$\because OP = OP$，

$\therefore \triangle OPA \cong \triangle OPB$（SAS）.

$\because \angle OAP = 90°$，

$\therefore \angle OBP = \angle OAP = 90°$.

$\therefore PB$ 是⊙O 的切线，且 $PA = PB$.

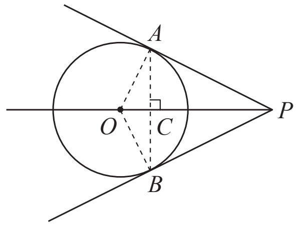


图 3−44

这就是说，经过圆外一点可以画圆的两条切线，这点与其中一个切点之间的线段的长，叫做这点到圆的**切线长**（length of tangent）.

这样，就得到了

> * **切线长定理**　过圆外一点所画的圆的两条切线长相等.

例4　如图 3−45，P 为⊙O 外一点，PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 是切点，BC 是⊙O 的直径.

（1）求证：$AC /\!/ OP$；

（2）如果 $\angle APB = 70°$，求 $\overset{\frown}{AC}$ 的度数.

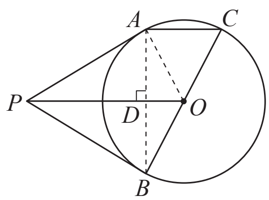


图 3−45

解　（1）证明：连接 OA，AB，AB 交 PO 于点 D.

$\because PA$，PB 分别切⊙O 于 A，B 两点.

$\therefore OA = OB$，$PA = PB$，$OP = OP$，

$\triangle AOP \cong \triangle BOP$.

$\therefore \angle OPA = \angle OPB$，$OP$ 平分 $\angle APB$.

$\therefore PD \perp AB$，$\angle PDA = 90°$.

又 $\because BC$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle CAB = 90°$.

$\therefore AC /\!/ OP$.

（2）$\because PA = PB$，

$\therefore \angle PAB = \angle PBA$.

$\because \angle APB = 70°$,

$\therefore \angle PBA = \dfrac{1}{2}(180° - \angle APB) = \dfrac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$.

$\because$ BC是⊙O的直径，

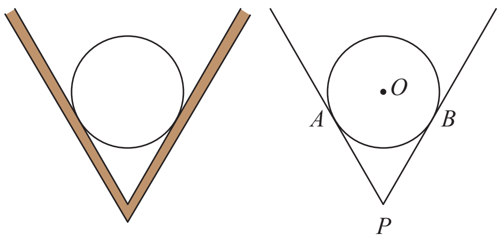
$\therefore \angle CBP = 90°$.

$\therefore \angle ABC = \angle CBP - \angle PBA = 90° - 55° = 35°$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}$ 的度数 $= 2 \times \angle ABC$ 的度数 $= 2 \times 35° = 70°$.

挑战自我

如图 3−46 ①，是一个用来测量球形物体直径的 V 型架，图 3−46 ② 是它抽象出的几何图形，其中 PA 与 PB 是经过圆外一点 P 的⊙O 的两条切线，切点分别是 A，B . $\angle P = 60°$ ，如果一个乒乓球放入 V 型架上，量得 $PA = 4.5$ cm，怎样求出乒乓球的直径（精确到 0.1 cm）？

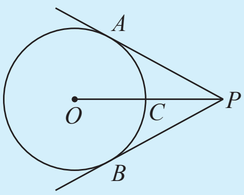


①　　②

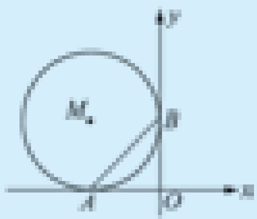
图 3−46

练 习

1. 如图，P 是⊙O 外一点，PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 为切点，OP 交⊙O 于点 C，$PA = 4$ cm，$PC = 2$ cm . 求 $\angle APB$ 的大小.
2. 如图，在直角坐标系中，⊙M 与 x 轴，y 轴分别相切于点 A，B，已知点 B 的坐标为（0，3），求点 M 的坐标及点 M 到弦 AB 的距离.



（第 1 题）



（第 2 题）

习题3.4

复习与巩固

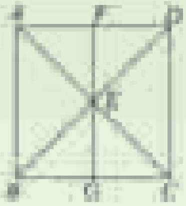
1. 如图，⊙A的半径为2，点A（a，0）在x轴上移动.

（1）当⊙A与y轴相离时，a的取值范围是_______；

（2）当⊙A与y轴相切时，a的取值是_______________；

（3）当⊙A与y轴相交时，a的取值范围是_______.


（第 1 题）


（第 2 题）

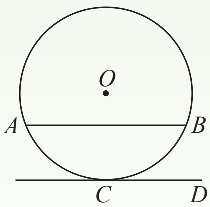

（第 3 题）

2. 如图，正方形$ABCD$的边长为a，AC与BD交于点E，过点E作$FG/\!/AB$，分别交AD，BC于点F，G. 试判断以点B为圆心，以$\frac{\sqrt{2}}{2}a$为半径的圆与直线AC，FG，DC的位置关系.

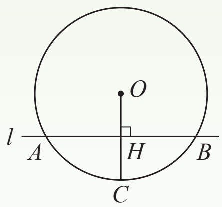
3. 如图，△ABC为等腰三角形，O是底边BC的中点，⊙O与AB相切于点D. ⊙O与AC相切吗？说明理由.

4. 如图，在⊙O中，C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，过点C作直线$CD/\!/AB$. 判定CD与⊙O的位置关系，并说明理由.

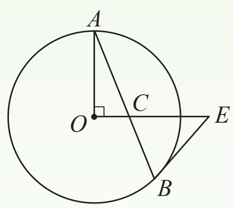
5. 如图，⊙O的半径OC = 5 cm，直线$l \perp OC$，垂足为点H，且l交⊙O于A，B两点，AB = 8 cm. 将直线l向下平移多少时，l能与⊙O相切？



（第 4 题）



（第 5 题）

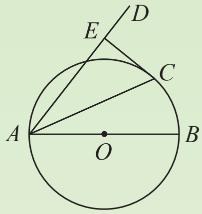


（第 6 题）

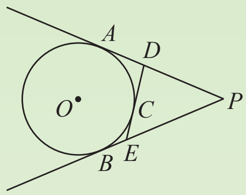
6. 如图，AB是⊙O的弦，$OC \perp OA$交AB于点C，过点B的直线交OC的延长线于点E. 当$CE = BE$时，直线BE与⊙O有怎样的位置关系？并说明你的理由.

7. 如图，AB为⊙O的直径，AD与⊙O相交，∠BAD的平分线交⊙O于点C，经过点C

的切线交 AD 于点 E．CE 与 AD 垂直吗？说明理由.



（第 7 题）



（第 8 题）

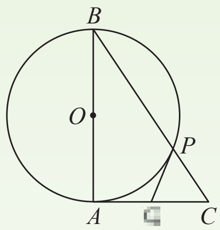
8. 如图，P 是⊙O 外一点，PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B．C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点，过 C 作⊙O 的切线分别交 PA，PB 于点 D，E．若△PDE 的周长为 12，求 PA 的长.

拓展与延伸

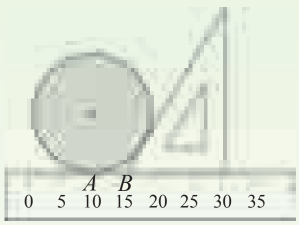
9. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 为⊙O 的切线，BC 交⊙O 于点 P，点 Q 是 AC 的中点．求证：PQ 是⊙O 的切线.

10. 如图，可以用刻度尺和一个锐角为 30° 的三角尺测量计算圆形工件的直径，你能说明其中的道理吗？如果测得 $AB = 5$ cm，那么圆形工件的直径是多少？

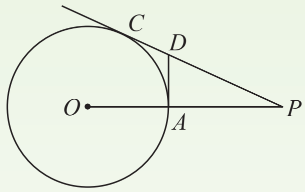
11. 如图，PC 是⊙O 的切线，C 是切点，PO 交⊙O 于点 A，过点 A 的切线交 PC 于点 D，$CD : DP = 1 : 2$，$AD = 2$ cm．求⊙O 的半径.



（第 9 题）

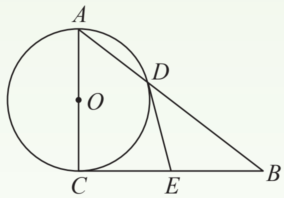


（第 10 题）



（第 11 题）

12. 如图，以 Rt△ABC 的直角边 AC 为直径作⊙O，交斜边 AB 于点 D，DE 切⊙O 于点 D，交 BC 于点 E．已知 $BC = 10$，求 DE 的长.

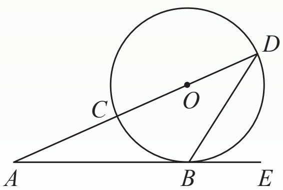


（第 12 题）

探索与创新

13. 如图，CD 是⊙O 的直径，直线 AE 切⊙O 于点 B，DC 的延长线交 AB 于点 A，$\angle A = 20°$．请根据题设，写出两个你认为正确的结论，并加以证明.

14. 如图，有一张紧靠墙角（成直角）放置的圆桌，有一把长度略小于圆的直径的刻度尺，你能用这把刻度尺测量



（第 13 题）

计算这张圆桌的直径吗？请设计两种不同的方案，并说明方案的可行性.

15. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$.

（1）利用尺规按下列要求作图，并在图中标注相应字母（不写作法，保留作图痕迹）：

① 作△ABC的外接圆，圆心为O；

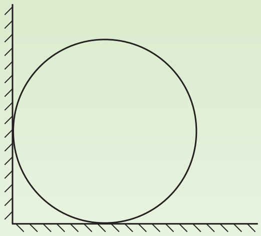
② 以线段AC为一边，在AC的右侧作等边三角形ACD；

③ 连接BD，交⊙O于点E，连接AE.

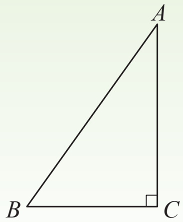
（2）在你作的图中，若$AB=4$，$BC=2$.

① 判断AD与⊙O的位置关系，并证明你的结论；

② 求线段AE的长.



（第 14 题）



（第 15 题）

3.5　三角形的内切圆

实验与探究

（1）任意作一个$\angle AOB$（图 3-47），如果在$\angle AOB$内作圆，使其与两边OA，OB都相切，满足上述条件的圆是否可以作出？如果可以作出，能作多少个？所作出的圆的圆心的位置有什么特征？

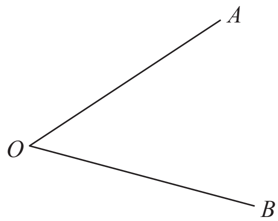
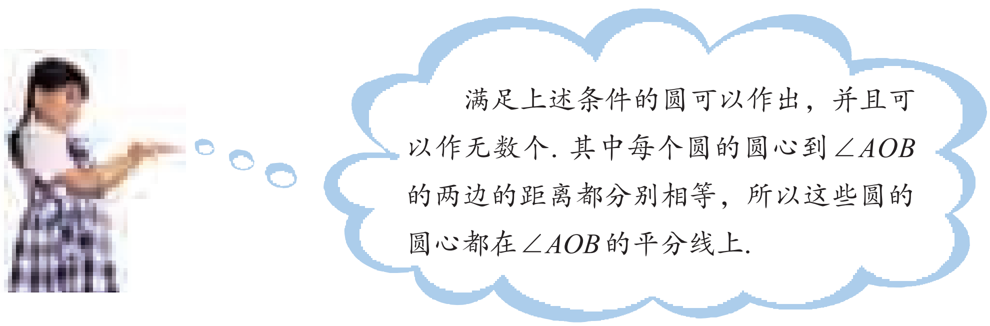


图 3-47



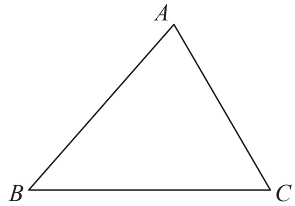
（2）任意作一个△ABC，如果在△ABC内作圆，使其与各边都相切，满足上述条件的圆是否可以作出？如果可以作出，能作多少个？所作出的圆的圆心的位置有什么特征？

只要能在$\triangle ABC$内找出一点，使它到各边的距离都相等，问题就可以解决了.

（3）怎样用尺规作一个圆，使它与$\triangle ABC$的各边都相切呢?

已知：$\triangle ABC$（图3−48①）.

求作：$\odot I$，使它与$\triangle ABC$各边都相切.



①

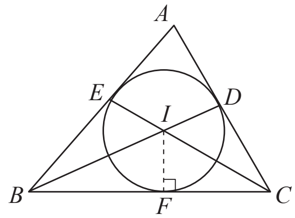
作法

1. 作$\angle B$，$\angle C$的平分线BD，CE，BD与CE相交于点I（图3−48②）；

2. 过点I作$IF\perp BC$，垂足为点F；

3. 以I为圆心，IF为半径作圆.

$\odot I$就是所求作的圆.



②

图 3−48

（4）你能说出上面作图的道理吗？与三角形各边都相切的圆有几个?

由作法可知，与三角形的各边都相切的圆能作并且只能作出一个.

小资料

三角形的内心是三角形的三条角平分线的交点，它到三角形各边的距离相等.

任何一个三角形都有且只有一个内心，三角形的内心在三角形的内部.

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**（inscribed circle of triangle），内切圆的圆心叫做三角形的**内心**（incenter），这个三角形叫做圆的**外切三角形**（circumscribed triangle）.

例1　如图3−49，在$\triangle ABC$中，$\angle A=68°$，点I是内心. 求$\angle BIC$的度数.

解　$\because$ 点I是$\triangle ABC$的内心，

$\therefore \angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle ACB$.

因而
$$\begin{aligned}\angle 1+\angle 2&=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-68^\circ)\\&=56^\circ.\end{aligned}$$

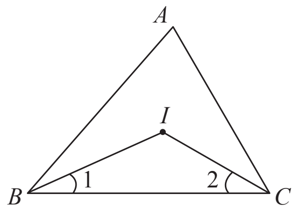


图 3-49

∴
$$\begin{aligned}\angle BIC&=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)\\&=180^\circ-56^\circ\\&=124^\circ.\end{aligned}$$

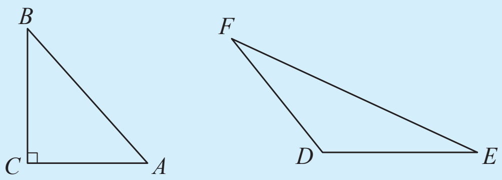
挑战自我

（1）已知△ABC的三边长分别为a，b，c，它的内切圆半径为r．求△ABC的面积.

（2）已知Rt△ABC的两条直角边AC，BC的长分别为b，a．求它的内切圆半径.

练 习

1. 如图，分别作出Rt△ABC与钝角三角形DEF的内切圆.
2. 在△ABC中，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=70^\circ$，点I是△ABC的内心．求$\angle AIB$，$\angle BIC$和$\angle AIC$的度数.



（第 1 题）

习题3.5

复习与巩固

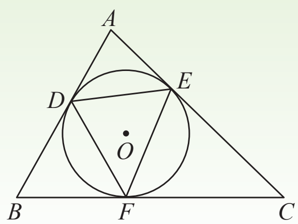
1. 选择题：如图，△ABC的内切圆O与各边分别相切于点D，E，F，则点O是△DEF的（　　）.

（A）三条中线的交点

（B）三条高的交点

（C）三条角平分线的交点

（D）三条边的垂直平分线的交点



（第 1 题）

2. 求边长为 a 的等边三角形的内切圆的半径.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，⊙O 是它的内切圆，⊙O 与边 BC，CA 分别切于 D，E 两点. 求证：四边形 $ODCE$ 是正方形.

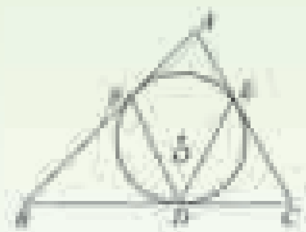
拓展与延伸

4. 如图，在△ABC 中，内切圆 O 与边 BC，CA，AB 分别切于点 D，E，F.

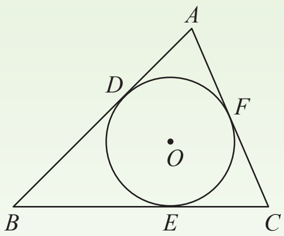
求证：$\frac{1}{2}\angle A+\angle FDE=90°$.

*5. 如图，⊙O 内切于△ABC，切点分别是 D，E，F，$AB=9$，$BC=8$，$CA=7$.

求 AD，BE，CF 的长.



（第 4 题）



（第 5 题）

探索与创新

6. 如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，点 I 是△ABC 的内心，延长 AI 交 BC 于点 E，交⊙O 于点 D，连接 BD，DC，BI.

求证：$DB=DC=DI$.

（第 6 题）

3.6　弧长及扇形面积的计算

在生产和生活实际中，有时需要求一段弧的长度或一个扇形的面积.

我们过去学习过圆的周长公式和面积公式，怎样利用这两个公式分别推导出弧长及扇形的面积的计算公式呢？

交流与发现

已知圆的半径为 r. 思考下面的问题：

（1）圆周上 1° 弧的长度是整个圆周长的多少？怎样用圆的半径 r 表示 1° 弧

的长度呢?

（2）由（1），怎样用圆的半径 r 表示 $n°$ 弧的长度 l 呢？与同学交流.

$$l=\frac{n\pi r}{180}.$$

（3）在⊙O 中，圆心角为 $1°$ 的扇形的面积是整个圆面积的多少？怎样用圆的半径 r 表示圆心角为 $1°$ 的扇形的面积呢?

（4）由（3），怎样用圆的半径 r 表示圆心角为 $n°$ 的扇形面积 $S_{扇形}$ 呢?

$$S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}.$$

（5）如果已知⊙O 的半径 r 和扇形的弧长 l，怎样用 l 与 r 表示这段弧所在的扇形的面积呢?

因为扇形的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$，所以 $\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi r}{180}\right)r$，于是

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr.$$

例1 如图 3-50 所示为一段弯形管道，其中心线是一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$．已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的圆心为 O，半径 $OA=60$ cm，$\angle AOB=108°$，求这段弯管的长度（精确到 0.1 cm）.

解 由图 3-50 可知，$n=108°$，$r=60$ cm，

代入弧长公式，得

$$l=\frac{n\pi r}{180}=\frac{108\times60\pi}{180}\approx113.1\,(\text{cm}).$$

所以，这段弯管的长度约为 113.1 cm.

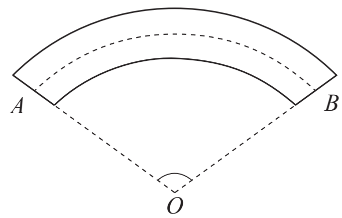


图 3-50

例2 如图 3-51，一把扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB 与 AC 的夹角为 $120°$，AB 的长为 30 cm，竹条 AB 上贴纸部分 BD 的宽为 20 cm．求扇子的一面上贴纸部分的面积（精确到 0.1 cm²）.

解 由图 3-51 可知，扇形的圆心为 A，圆心角 $n=120°$，$AB=30$ cm，$BD=20$ cm，图上

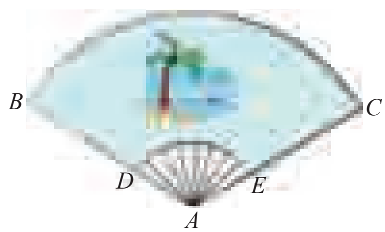


图 3-51

贴纸部分的面积等于两个扇形面积的差. 由扇形的面积公式，贴纸部分的面积为

$$S_{扇形\ BAC}-S_{扇形\ DAE}$$
$$=\frac{n\pi\cdot AB^2}{360}-\frac{n\pi\cdot AD^2}{360}$$
$$=\frac{120\pi\times30^2}{360}-\frac{120\pi\times(30-20)^2}{360}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(30^2-10^2)\approx837.8\ (\text{cm}^2).$$

所以，扇子的一面上贴纸部分的面积约为837.8 cm^2 .

挑战自我

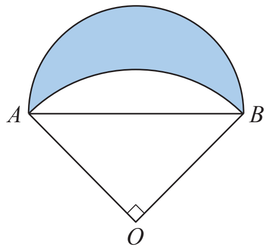


图 3-52

已知扇形 AOB 的半径为 r，$\angle AOB=90°$，以弦 AB 为直径作半圆，得到图 3-52 . 你会求图中“新月形”（阴影部分）的面积吗？试一试.

智趣园

计算花瓶形的面积

4 个半径为 1 cm 的等圆的位置如图 3-53 所示，其中阴影部分酷似一个花瓶的纵断面（不妨称其为花瓶形）. 你会计算这个花瓶形的面积吗？

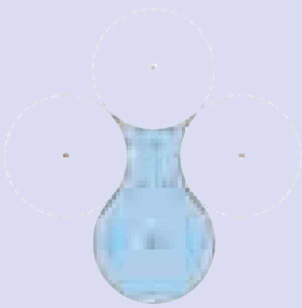


图 3-53

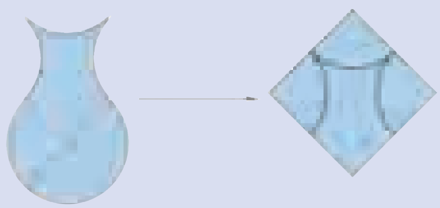


图 3-54

方法一：将图 3-54 左图的花瓶形沿图中的虚线剪成四块，可以拼成右图的正方形.

因此，所求的花瓶形的面积等于所拼成的正方形的面积. 因为正方形的边长等于等圆的半径的 2 倍，即 2 cm，所以这个花瓶形的面积为 $2\times2=4\ (\text{cm}^2)$.

方法二：将图 3-55 左图中的花瓶形沿图中的虚线剪成 4 块，也可以拼成右图的正

方形，你能说出这时正方形的边长2是怎样求出的吗？

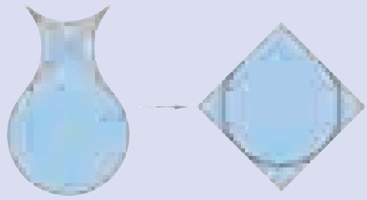


图 3–55

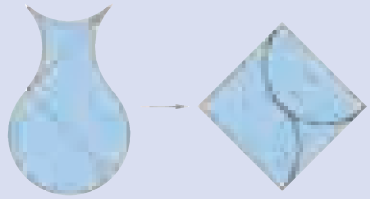


图 3–56

方法三：将图 3–56 左图的花瓶形沿图中的虚线剪成 3 块，也能拼成右图的正方形，想一想，这时正方形的边长是怎样算出的？

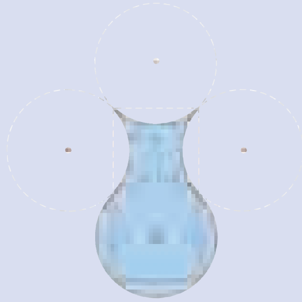


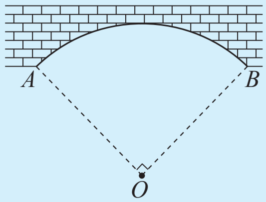
图 3–57

图 3–57 是另外一种计算方法的示意图，请按照图示求出花瓶形的面积.

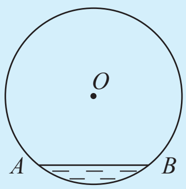
除了上述四种方法外，你还能想出求花瓶形面积的其他方法吗？

练 习

1. 如图，桥拱的形状是一段圆弧，桥拱 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数是 90°，半径 OA 为 30 m．求桥拱 $\overset{\frown}{AB}$ 的长（精确到 0.1 m）.
2. 如图，水平放置的排水管的横截面为圆形，圆的半径为 10 cm，水面宽度 AB 为 10 cm．求截面中有水部分的面积（精确到 0.1 cm²）.



（第 1 题）



（第 2 题）

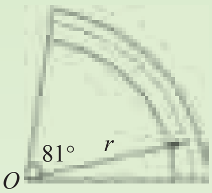
习题3.6

复习与巩固

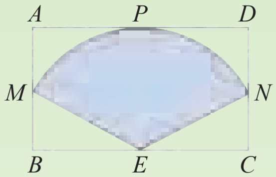
1. 如图，公路的拐弯处有一段弯道是圆弧形，道路长 12 m，弧所对的圆心角是 81°．求

这段弧的半径r（精确到0.1 m）.

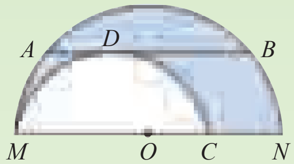
2. 扇形的弧长为3π cm，半径为8 cm . 求该扇形的面积.



（第1题）



（第3题）



（第4题）

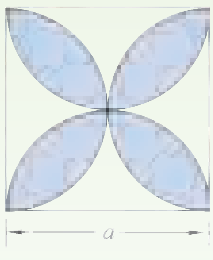
3. 在矩形$ABCD$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$. 以BC的中点E为圆心画弧$\overset{\frown}{MPN}$与AD相切，切点为P，点M，N分别在AB与CD上. 求扇形EMN的面积.

4. 如图，从一张半圆形的铁片上剪下了一个小的半圆形铁片，为了计算剩余部分的面积，小亮在图中作出一条小圆的切线，并使它平行于大圆的直径. 设这条切线交大圆于点A，B，量得AB的长是a，便可求出剩余部分的面积. 请你说出小亮是如何算出来的.

拓展与延伸

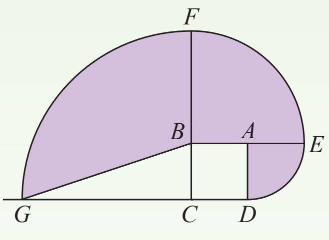
5. 如图，正方形的边长为a，分别以各边为直径在正方形内画半圆. 求阴影部分的面积.

6. 如图，大圆$\odot O$的半径OA是小圆$\odot O_1$的直径，$\odot O$的半径OC交$\odot O_1$于点B .
求证：$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{AB}$的长相等.



（第5题）


（第6题）



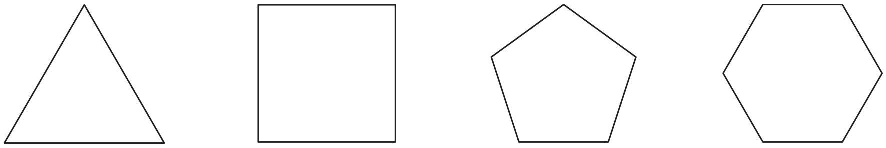
（第7题）

探索与创新

7. 如图，$ABCD$是边长为1的正方形，其中$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{FG}$的圆心依次是A，B，C .
（1）求点D沿三条圆弧运动到点G所经过的路线长；
（2）求图中阴影部分的面积.

3.7　正多边形与圆

你还记得什么叫正多边形吗？说出你常见的几种正多边形.



正三角形　　正方形　　正五边形　　正六边形

图 3–58

观察与思考

观察图 3–58 中的正多边形，思考下面的问题：

（1）它们都是轴对称图形吗？如果是，分别画出每个图形所有的对称轴，并说出这些对称轴是怎样的直线.

（2）正三角形有几条对称轴？正四边形、正五边形、正六边形呢？由此你能猜测正 n 边形有几条对称轴吗？

（3）通过画图，你发现正多边形的各条对称轴有怎样的特征？由此你能推出正多边形的什么性质？

（4）利用尺规作出一个正三角形的外接圆和内切圆，你发现正三角形的外接圆的圆心与内切圆的圆心有什么特征？

（5）画出一个正方形，你能说出它的外接圆和内切圆的位置吗？你发现正方形的外接圆与内切圆有什么特征？

（6）由（4）（5）你猜测正多边形都有外接圆和内切圆吗？如果有，它们的外接圆与内切圆有什么特征（图 3–59）？

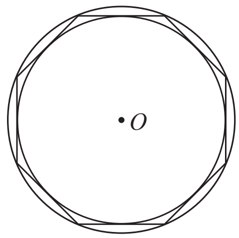


图 3–59

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形有 n 条对称轴.

正多边形的各条对称轴相交于一点，这点到正多边形的各个顶点的距离相等，到各边的距离也相等.

任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆，圆心是各对称轴的交点.

如图 3-60，正多边形的外接圆和内切圆的公共圆心叫做正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，内切圆的半径叫做正多边形的**边心距**（apothem）.

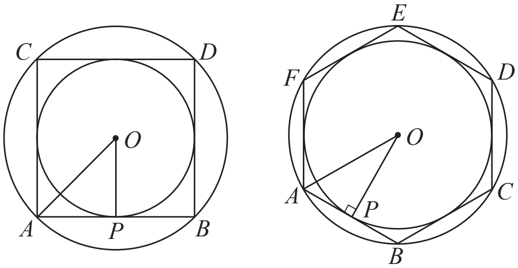


图 3-60

可以看出，正多边形各边所对的外接圆的圆心角都相等. 正多边形每一边所对的外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**，正 n 边形的每个中心角都等于 $\frac{360°}{n}$.

你能分别说出图 3-60 中正方形与正六边形的中心、半径、边心距和中心角的度数吗?

（7）正 n 边形的 n 条半径把正 n 边形分成了 n 个怎样的图形? 相应的边心距把其中每一个图形又分成了两个怎样的图形?

正 n 边形的 n 条半径把正 n 边形分成了 n 个全等的等腰三角形，每个等腰三角形又被相应的边心距分成了两个全等的直角三角形.

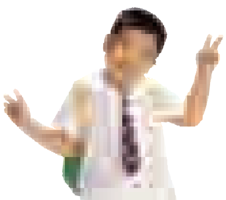
（8）如果正三角形的边长为 a，那么它的外接圆的半径 r 和内切圆的半径 d 分别是多少? 它们之间满足什么关系? 一般地，如果正 n 边形的边长为 a_n，半径为 r_n，边心距为 d_n，这三个量之间有什么关系?

根据勾股定理

$r_n^2 = d_n^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$.

（9）以正 n 边形的中心 O 为旋转中心，将正 n 边形旋转 $\frac{360°}{n}$，你能得到什么结论?

（10）正 n 边形是中心对称图形吗?



当 n 为偶数时，正 n 边形是中心对称图形，它的中心 O 是对称中心. 当 n 为奇数时，正 n 边形不是中心对称图形.

例1 一个正六边形花坛的半径为R，求花坛的边长a，周长p和面积S.

解 如图3-61，$ABCDEF$为正六边形. 连接OA，OB，作$OG \perp AB$，垂足为点G，则$OA = OB = R$，$AB = a$.

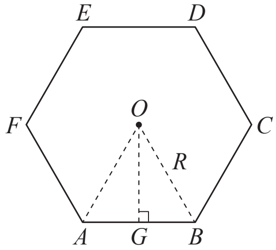


图3-61

在等腰三角形AOB中，

$$\because \angle GOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{6} = 30^\circ,$$

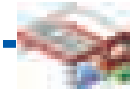
$$\therefore a = 2GB = 2R\sin 30^\circ = R.$$

$$\therefore p = 6R.$$

$$\because OG = R\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

$$\therefore S = 6S_{\triangle AOB} = 6 \times \frac{1}{2}R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$



加油站

通过作出正多边形的半径和边心距，可以把正多边形的有关计算问题转化为解直角三角形的问题.

史海漫游

圆面积的估算

早在几何学的萌芽时期，人类已经知道用正多边形的面积估算圆的面积. 在一部目前发现的世界上最古老的数学著作之一《莱因德纸草书》(公元前1650年左右的埃及人阿默斯所著)中，记载了求圆面积的一个近似方法：将圆的直径减去它的$\frac{1}{9}$后再平方即得.

这种近似算法可以利用图3-62解释：作一个直径为9的圆和圆的外切正方形. 将正方形的各边三等分，连接相应的分点，正方形被分成9个边长为3的小正方形. 分别连接图3-62中四个角上小正方形的一条对角线，得到一个八边形. 注意这个八边形的各内角都是135°，但不是正八边形. 图中直径为9的圆的面积十分接近这个八边形的面积. 利用数方格的方法可知图中八边形的面积等于7个小正方形的面积，即$7 \times 3^2 = 63$.

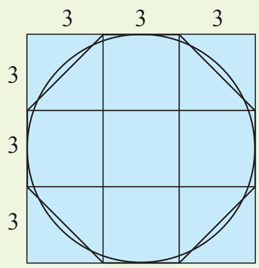


图3-62

而63又接近64，因此，这个圆的面积又很接近于一个边长为8的正方形的面积

（图 3-63）. 从而，古埃及人认为可以用圆的直径 9 减去它的 $\frac{1}{9}$ 的平方即 $(9-1)^2=64$ 近似表示这个圆的面积.

现在，我们会用公式 $S=\pi R^2$ 计算出直径为 9 的圆的面积为 63.62（精确到 0.01）. 它与边长为 8 的正方形的面积仅相差 0.38. 相当于在利用圆面积公式时，π 取 3.160 49.

从中你能感受到古埃及人的聪明才智吗？

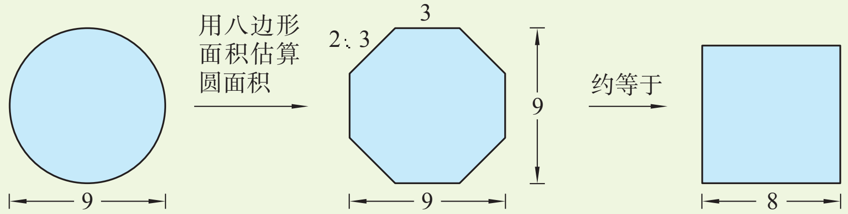


图 3-63

练 习

1. 下面的命题是真命题吗？如果不是，请举出一个反例.

（1）正多边形的对称轴是经过正多边形的顶点和中心的直线；

（2）边数为偶数的正多边形，既是轴对称图形又是中心对称图形；

（3）既是轴对称图形，又是中心对称图形的多边形是正多边形；

（4）有一个外接圆和一个内切圆的多边形是正多边形.

2. 完成下表中正多边形的计算，并把计算结果填入表内：

边数 n	内角 α	中心角 α_n	半径 R_n	边长 a_n	边心距 r_n	周长 P_n	面积 S_n
3				$2\sqrt{3}$			
4			$\sqrt{2}$				
6						12	

交流与发现

如图 3-64，A，B，C，D，E 都是 $\odot O$ 上的点，且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$.

思考下面的问题：

（1）弦 AB，BC，CD，DE 的长相等吗？为什么？

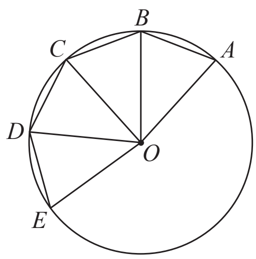


图 3-64

（2）$\angle ABC$，$\angle BCD$，$\angle CDE$是否相等？为什么？

（3）由（1）与（2），你能将圆周n等分吗？你能设计一种画正n边形的方法吗？与同学交流.

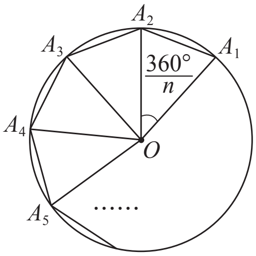


图 3-65

如图 3-65 所示，画一个圆，记为$\odot O$. 用量角器画一个$\frac{360°}{n}$的圆心角$\angle A_1OA_2$，再以点A_2为圆心，以弦A_2A_1为半径在$\odot O$上截得点A_3. 然后以点A_3为圆心，以弦A_2A_1为半径在$\odot O$上截得点A_4，…这样继续下去，就可以把$\odot O$分成n等份. 顺次连接这n个分点，就得到一个正n边形.

你能用上面的方法画一个正五边形吗？试一试.

例2 用直尺和圆规作圆的内接正方形.

已知：$\odot O$（图3-66）.

求作：$\odot O$的内接正方形$ABCD$.

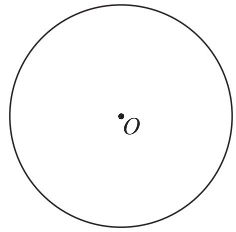
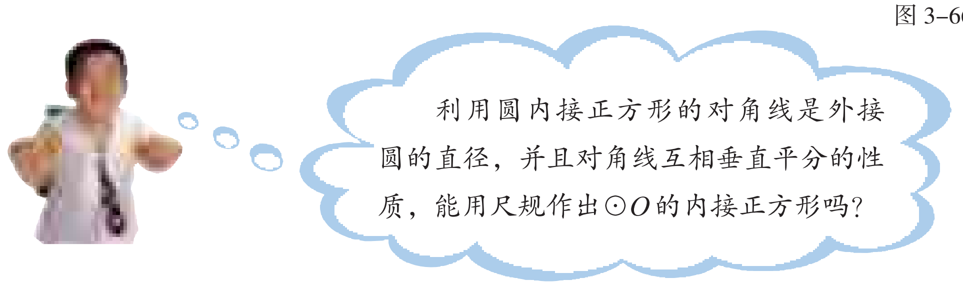


图 3-66



作法 （1）过圆心O作$\odot O$的任意一条直径AC.

（2）过点O作AC的垂线，交$\odot O$于B，D两点.

（3）顺次连接点A，B，C，D，A（图3-67）.

四边形$ABCD$就是所求作的$\odot O$的内接正方形.

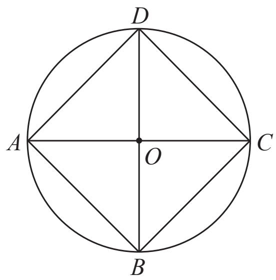
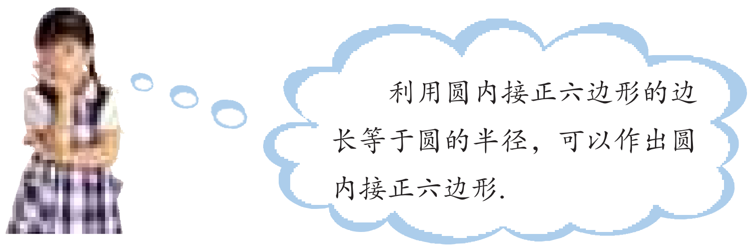


图 3-67

例3 用直尺和圆规作圆的内接正六边形.

已知：$\odot O$（图3-66）.

求作：$\odot O$的内接正六边形.



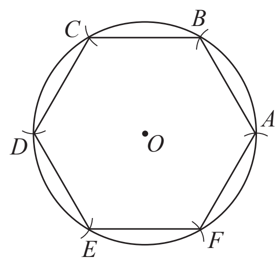


图 3-68

作法　（1）如图 3-68，在⊙O上任取一点A，自点A起依次截取长度等于半径OA的弦，得到点B，C，D，E，F.

（2）顺次连接点A，B，C，D，E，F，A.

六边形$ABCDEF$就是求作的⊙O的内接正六边形.

挑战自我

解决了用尺规作圆内接正四边形、正六边形的问题后，你认为哪些边数的圆内接正多边形的尺规作图问题都随之得到解决?

史海漫游

高斯与正十七边形

高斯

1796 年的一个晚上，德国格丁根大学，一个 19 岁的大学二年级学生照例开始做导师每天单独布置的数学题. 前两题顺利，第三题写在一张小纸条上，要求只用圆规和一把没有刻度的直尺做出正十七边形. 青年没在意，做着做着，却感到越来越吃力. 困难激起了他的斗志，他拿着圆规和直尺，在纸上尝试着一些超常规的思路. 直到窗外露出一丝曙光，青年才长舒一口气，终于找到了作法.

导师看到作业当即惊呆了，他声音颤抖地说:“知道吗，你解开了一道有两千多年历史的数学悬案! 欧几里得没有解出来，阿基米德没有解出来，牛顿也没有解出来，你竟然一个晚上就解出来了! 我最近正研究这道难题，昨天给你布置习题时，不小心把那张小纸条夹在了给你的题目里.”

这个大学生就是高斯（Gauss. 1777-1855）. 多年后他感慨地说:“当初若知道这是两千年未解的难题，我不可能在一个晚上解决它.”

后来高斯成为著名数学家、物理学家、天文学家，他是近代数学的奠基者之一，被誉为“数学王子”.《正十七边形尺规作图之理论与方法》是高斯在青年时期取得的一项重要成果. 高斯生前曾交代去世后将这个图形刻在自己的墓碑上. 但后来他的墓碑上并没有刻上正十七边形，而是一个正十七角星，因为负责刻碑的雕刻家认为，正十七边形和圆太相近了，大家会分辨不出来.

高斯在童年时代就表现出非凡的数学天分：三岁学会算术，八岁因发现等差数列求

和公式而深得老师和同学的钦佩. 1799 年高斯以代数基本定理的第一个实质性证明获得博士学位. 他的数学成就几乎遍及数学的各个领域，其中许多都有着划时代的意义. 同时，高斯还把数学应用于天文学、大地测量学和磁学的研究，也都有杰出的贡献. 高斯一生共发表155篇论文，他对待学问十分严谨，只是把他自己认为是十分成熟的作品发表出来。

高斯纪念碑

正十七边形的尺规作法

步骤一：

作⊙O，作两垂直的半径 OA、OB；

作点 C，使 $OC=\frac{1}{4}OB$；

作点 D，使 $\angle OCD=\frac{1}{4}\angle OCA$；

在 AO 延长线上取点 E，使得 $\angle DCE=45°$.

步骤二：

作 AE 中点 M，并以 M 为圆心，MA 为半径作圆，此圆交 OB 于点 F；

再以 D 为圆心，DF 为半径作圆，此圆交直线 OA 于 G_4 和 G_6 两点.

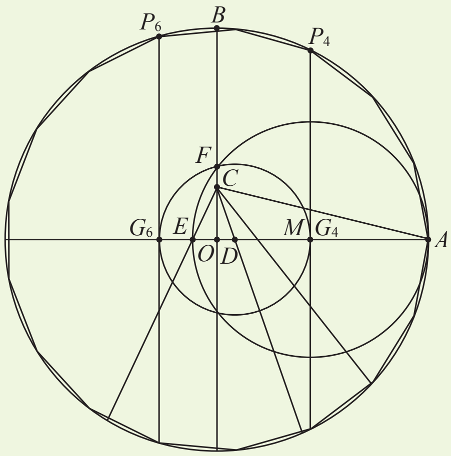


图 3–69

步骤三：

过 G_4 作 OA 的垂线，交⊙O 于 P_4；

过 G_6 作 OA 的垂线，交⊙O 于 P_6；

则以⊙O 为基准圆，A 为正十七边形之第一顶点，P_4 为第四顶点，P_6 为第六顶点.

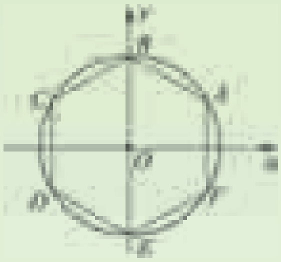
连接 P_4P_6，以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{P_4P_6}$ 为半径，在⊙O 上依次截取，即可在此圆上截出正十七边形的所有顶点（图 3–69）.

练习

1. 用直尺、圆规把一个已知圆三等分.
2. 用量角器画一个正五边形.

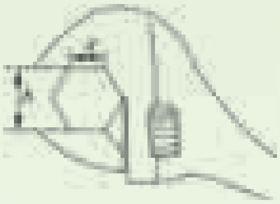
习题3.7

复习与巩固



（第 1 题）

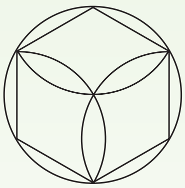
1. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的顶点都在以原点为圆心、以 2 为半径的圆上，点 B 在 y 轴正半轴上. 求正六边形 $ABCDEF$ 各顶点的坐标.
2. 如图，正六边形螺帽的边长 $a = 12$ mm，要使扳手夹紧螺帽，扳手的开口 b 最小应是多少？
3. 在一种联合收割机上，拨禾轮的侧面是正五边形，边长是 48 cm . 求它的半径 R_5 和边心距 r_5（精确到 0.1 cm）.



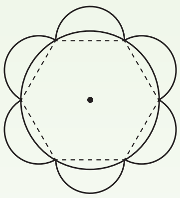
（第 2 题）

（第 3 题）

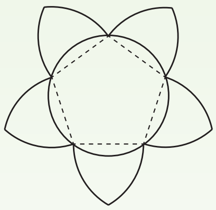
4. 用尺规作圆的内接正八边形.
5. 用等分圆周的方法画出下列图案.



①



②

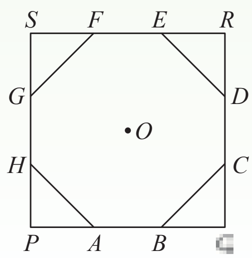


③

（第 5 题）

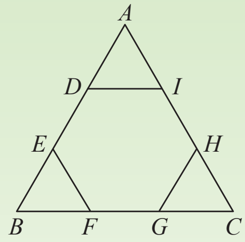
拓展与延伸

6. 如图，将边长为 20 cm 的正方形铁片剪成一个正八边形，求正八边形的边长（精确到 0.1 cm）.



（第 6 题）

7. 如图，$DEFGHI$ 是正六边形，延长边 DE，FG，HI 分别相交于点 A，B，C．设 $\triangle ABC$ 的周长为 P_3，面积为 S_3，六边形 $DEFGHI$ 的周长为 P_6，面积为 S_6．求 $P_6:P_3$ 及 $S_6:S_3$ 的值.



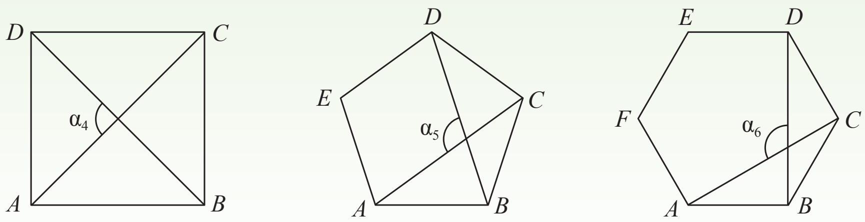
（第 7 题）

探索与创新

8. 如图，分别是正方形、正五边形和正六边形.

（1）分别计算图中画出的这三个正多边形的“相邻”两条对角线的夹角的度数；

（2）探究正 n 边形的“相邻”两条对角线的夹角的度数.



（第 8 题）

回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.
2. 圆是轴对称图形吗？利用圆的轴对称性，你探索并证明了什么定理？说出它的条件和结论.
3. 圆是中心对称图形吗？为什么？
4. 圆心角与它所对的弧有什么关系？在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦、弧之间有什么关系？
5. 确定一个圆的条件是什么？经过任意三点能作一个圆吗？
6. 用反证法证明一个命题的一般步骤是什么？它与直接证明的方法有什么不同？
7. 什么是圆周角？圆周角与它所对弧上的圆心角有什么关系？圆周角定理有哪些推论？
8. 什么是三角形的外心？什么是三角形的内心？它们各有哪些性质？
9. 试述直线与圆的位置关系. 圆的半径 r 与圆心到直线的距离 d 的数量关系与这条直线与圆的位置关系之间有什么联系？
10. 圆的切线有什么性质？怎样判定一条直线是圆的切线？

11. 经过圆上一点可以作圆的几条切线？经过圆外一点呢？从圆外一点所作圆的切线具有什么性质？
12. 写出弧长公式和扇形面积公式，说明公式中各个字母的含义，在 S，n，r，l 这四个量中，已知其中的几个量，就可以求出其余的量？
13. 正 n 边形的边长、半径与边心距之间具有怎样的关系？在研究它们之间的关系时，是怎样转化为等腰三角形或直角三角形进行研究的？
14. 怎样用尺规过不在同一条直线上的三点作圆？怎样用尺规作三角形的外接圆、内切圆？怎样用尺规作圆的内接正方形和正六边形？
15. 在本章中，你认为体现了哪些基本的数学思想？

广角镜

分类思想

分类是自然科学和社会科学中广泛应用的重要思想和方法. 人们先对所研究的对象进行分析，再按照某些特征把它们划分为许多门类，分别加以研究，这就是分类的思想方法.

我国明代著名药学家李时珍在他的巨著《本草纲目》中，把收录的 1 892 种药物划分为 16 部，部以下再分类，总计 60 类，成为国际上一致推崇和引用的药典.

门捷列夫将当时已经发现的化学元素按族进行分类，并编制出元素周期表. 利用元素周期表，不仅可以按照元素的族研究该族元素的共同性质，而且能根据表中的空格预测尚未发现的元素. 锗的发现就是一个著名的实例.

在数学中也经常运用分类的思想. 例如，将实数进行分类，将三角形进行分类等等. 在解决数学问题时，如果面临的数学问题不能以统一的形式进行解决，可以把问题涉及的范围划分为若干种情况，在各种情况下分别研究问题的解，然后把各种情况加以归纳得到原问题的解.

在本章第 3.3 节中，研究了圆周角与它所对弧上的圆心角的关系. 由于圆周角与圆心的相对位置有着不同的情况，各种情况下处理问题的方式并不相同，因而我们按照圆心在圆周角的一边上、在圆周角的内部、在圆周角的外部三种情况（图3−24）分别进行研究，最后归纳出“圆周角等于它所对弧上的圆心角的一半”的结论，这里就运用了分类的方法.

在第3.2节研究“确定圆的条件”、第3.4节研究“直线与圆的位置关系”以及解决一些具体问题的过程中，也都运用了分类思想.

运用分类思想时必须注意两个问题：其一，要用一个统一的标准把研究对象进行划分；其二，划分时要做到既不重复，也不遗漏.

你能举出运用分类思想解决问题的实例吗？

综合练习

复习与巩固

1. 选择题：

（1）边长为6的正三角形的外接圆的周长为（　　）.

（A）$\sqrt{3}\pi$　　（B）$2\sqrt{3}\pi$　　（C）$3\sqrt{3}\pi$　　（D）$4\sqrt{3}\pi$

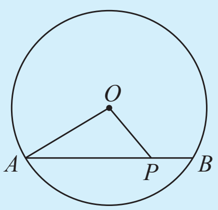
（2）在半径为2 cm的$\odot O$内有长为$2\sqrt{3}$ cm的弦AB，这条弦所对的圆心角$\angle AOB$的度数是（　　）.

（A）60°　　（B）90°　　（C）120°　　（D）150°

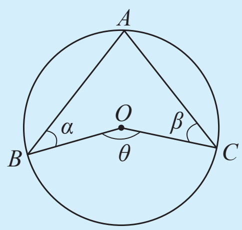
2. 填空题：

（1）如图，$\odot O$的直径为10，弦AB的长为8．如果点P是弦AB上的一个动点，那么线段OP的长度的取值范围是______．

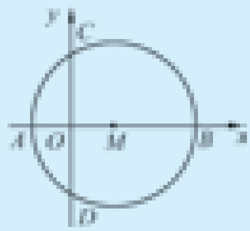
（2）如图，AB，AC是$\odot O$的弦．$\angle ABO=\alpha$，$\angle ACO=\beta$，$\angle BOC=\theta$．α，β，θ三者间的数量关系是______．



（第2（1）题）



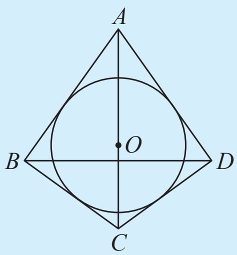
（第2（2）题）



（第3题）

3. 如图，在直角坐标系中，$\odot M$的圆心在x轴上，$\odot M$与x轴的交点为$A(-2,0)$，$B(6,0)$．求$\odot M$与y轴的交点C，D的坐标.

4. 如图，$\odot O$内切于四边形$ABCD$，$AB=AD$，分别连接AC，BD．如果不再标注其他字母，不再添加辅助线，你能推出哪些结论（至少写出5个）？

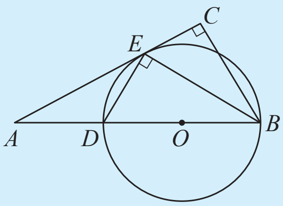


（第4题）

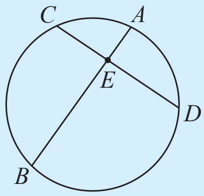
5. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，BE是角平分线，$DE \perp BE$交AB于点D，$\odot O$是$\triangle BDE$的外接圆.

（1）求证：AC是$\odot O$的切线；

（2）$\triangle BCE$与$\triangle BED$相似吗？如果不相似，说明理由；如果相似，写出对应线段的比例式.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\odot O$内两条弦AB，CD相交于点E，已知$AE = 3$ cm，$EB = 8$ cm，$CE = 4$ cm，求CD的长.

7. 证明：圆的外切四边形的两组对边的和相等.

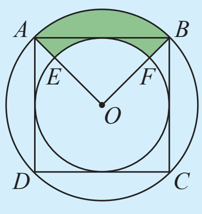
8. 要从一块形状为直角三角形的铁片上剪出面积尽量大的半圆形的铁片，需要先在这块铁皮上作出半圆.

（1）如果半圆的圆心在较长的直角边上，且与另两条边都相切. 用直尺和圆规作出这个半圆；

（2）如果圆心在较短的直角边上，或者在斜边上，你会作出这个半圆吗？

（3）已知直角三角形三边长的比是$3:4:5$. 在上面作出的三个半圆中，哪个半圆的面积最大？

9. 如图，两个同心圆的圆心为O，正方形$ABCD$的顶点都在大圆上，四条边都与小圆相切，大圆的半径OA与OB分别与小圆交于点E与F，正方形的边长为a. 求$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{EF}$的弧长之差，并求阴影部分的面积.

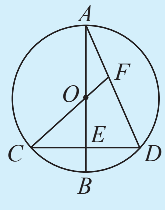


（第 9 题）

10. 两个圆的半径的比为$2:1$，求它们的外切正五边形的边心距的比、周长的比和面积的比.

拓展与延伸

11. 如图，已知$\odot O$的弦CD垂直于直径AB，垂足是点E. 连接CO并延长交AD于点F. 若$AB = 2$，求当$CF \perp AD$时，CD的长.



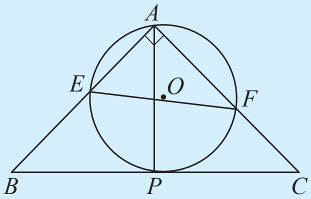
（第 11 题）

12. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=AC$，$AP\perp BC$，垂足为点P. $\odot O$过A，P两点，并分别交AB，AC于点E，F. 分别按以下要求尽可能多地找出图中的有关大小、位置和形状之间的关系，并证明你的结论.

（1）相等的角；（2）相等的线段；

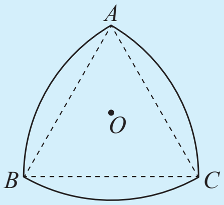
（3）相等的弧；（4）垂直的直线；

（5）全等三角形；（6）相似三角形.

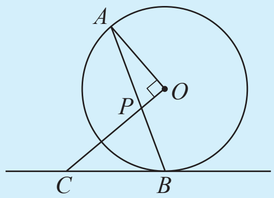


（第 12 题）

13. 如图所示的曲边三角形可以按下面的方法作出：作一个正三角形，分别以正三角形的各个顶点为圆心、以边长为半径作弧，使弧经过另外两个顶点. 然后擦去正三角形，三段圆弧所围成的图形就是一个曲边三角形. 已知正三角形的周长为S，求曲边三角形的周长.



（第 13 题）

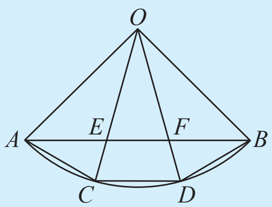


（第 14 题）

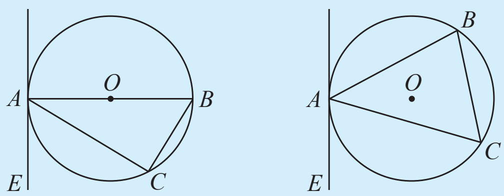
14. 如图，AB是$\odot O$的弦，$OC\perp OA$，OC交AB于点P，$PC=BC$. 求证：BC是$\odot O$的切线.

探索与创新

15. 如图，扇形OAB的圆心角为90°，点C，D是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，半径OC，OD分别与弦AB交于点E，F. 请找出图中除扇形半径以外的所有相等的线段，并加以证明.



（第 15 题）



① ②

（第 16 题）

16. 如图①，AB为$\odot O$的直径，$\triangle ABC$内接于$\odot O$，且$\angle CAE=\angle B$.

（1）求证：AE与$\odot O$相切于点A；

（2）如图②，若AB是$\odot O$的非直径的弦，且$\angle CAE=\angle B$. AE与$\odot O$还相切于点A吗？为什么？

第 4 章 一元二次方程

内容提要

- 一元二次方程
- 用配方法解一元二次方程
- 用公式法解一元二次方程
- 用因式分解法解一元二次方程
- 一元二次方程根的判别式
- *一元二次方程根与系数的关系
- 一元二次方程的应用

情境导航

每年的 6 月 7 日，是“世界防治荒漠化和干旱日”。联合国环境规划署的统计资料表明，目前世界荒漠化土地面积已超过 3600 万平方千米，占地球陆地面积的四分之一，而且正以每年 5～7 万平方千米的速度急剧蔓延。

我国是世界上荒漠化面积大、分布广、受危害最严重的国家之一。进入 21 世纪以来，随着防沙治沙事业的快速发展，我国土地荒漠化的防治工作取得了举世瞩目的成绩，已处于世界领先地位。据国家林业局统计资料介绍，我国 2000 年共有荒漠化、沙化土地 216.5 万平方千米，2002 年增长到 267.4 万平方千米。2004 年，我国荒漠化、沙化土地面积减少到 263.6 万平方千米，以后逐年减少。

（1）从 2000 年到 2002 年的两年间，我国荒漠化、沙化土地面积的年平均增长率是多少？

（2）从 2002 年到 2004 年的两年间，我国荒漠化、沙化土地的面积平均每年降低百分之几？

4.1　一元二次方程

交流与发现

（1）教室的面积为54 m^2，长比宽的2倍少3 m，如果要求出教室的长和宽，怎样根据问题中的数量关系列出方程？

设这个教室的宽为 x m，则它的长为 __________ m .

根据问题中的等量关系

$$长 \times 宽 = 矩形的面积,$$

可以得到方程 __________________________ .

（2）直角三角形斜边的长为11 cm，两条直角边的差为7 cm . 如果要求出两条直角边的长，怎样根据问题中的数量关系列出方程？

设较短直角边的长为 x cm，由两条直角边的差为7 cm可知，较长直角边的长是 __________ cm .

根据问题中的等量关系

$$两条直角边的平方和 = 斜边的平方,$$

可以得到方程 ____________________ .

（3）如图4−1，点 C 是线段 AB 上的一点，且 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{CB}$. 如果要求 $\dfrac{AC}{AB}$ 的值，怎样根据问题中的数量关系列出方程？

设 $AB=1$，$AC=x$，由 $AC+CB=AB$ 可知，CB 的长为 ________ .

根据问题中的等量关系

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}，即\quad AC^2=AB\cdot CB,$$

图 4−1

可以得到方程 __________________________ .

（4）由上面的三个问题，分别得到了下面的方程：

$$x(2x-3)=54, \qquad ①$$

$$x^2+(x+7)^2=11^2, \qquad ②$$

$$x^2=1-x . \qquad ③$$

把它们分别进行整理，得

$$2x^2-3x-54=0,$$
$$x^2+7x-36=0,$$
$$x^2+x-1=0.$$

你发现方程①②③与整理后的三个方程有哪些共同特征？

方程①②③的两边都是整式，它们都只含有一个未知数，并且整理后未知数的最高次数都是2，像这样的方程叫做**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown）.

经过整理，一元二次方程都可以化为

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的形式，称为一元二次方程的一般形式，其中ax^2，bx，c分别叫做这个方程的二次项、一次项和常数项，a，b分别叫做二次项系数和一次项系数.

（5）你能分别说出方程①②③化成一般形式后的二次项、一次项、常数项，以及二次项系数和一次项系数吗？

例1　把方程$(2x+1)(3x-2)=x^2+2$化为一元二次方程的一般形式，写出它的二次项、一次项、常数项及二次项系数、一次项系数.

解　将原方程去括号，得

$$6x^2+3x-4x-2=x^2+2.$$

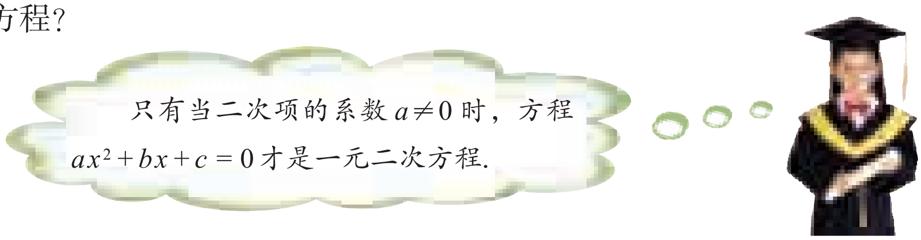
移项，合并同类项，得

$$5x^2-x-4=0.$$

方程的二次项为$5x^2$，一次项为$-x$，常数项为-4；二次项系数为5，一次项系数为-1.

挑战自我

a为何值时，方程$ax^2-x=2x^2-ax-3$是一元二次方程？a为何值时，是一元一次方程？



练 习

1. 下面方程中哪些是一元二次方程？哪些不是？为什么？

(1) $x^2-9=0$；　(2) $(x+3)(x-1)=x^2$；

(3) $(2x+1)(2x-1)=0$；　(4) $\dfrac{1}{3x}-y^2=0$；

(5) $x^2=0$；　(6) $\sqrt{x^2-2x+1}=1$.

2. 将下列一元二次方程化为一般形式，并分别指出它的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $3x(x+1)=4(x-2)$；　(2) $(x+3)^2=(x+2)(4x-1)$；

(3) $2(y+5)(y-1)=y^2-8$；　(4) $2t=(t+1)^2$.

学习无理数时，我们曾利用有理数估计一个无理数的大致范围. 实际上，当时我们已经解决了估计一个最简单的一元二次方程 $x^2=m$（m 是一个大于 0 的有理数）的根的问题. 对于一般的一元二次方程，如何估计它的根呢？

实验与探究

在对本节问题（2）的分析中，我们得到了一元二次方程

$$x^2+(x+7)^2=11^2 . \qquad ②$$

你能估计出这个方程的根吗？

（1）要估计出方程②的根，可以先估计出方程根的一个大致范围. 结合方程②的实际意义，你能说出适合方程②的 x 的一个大致范围吗？

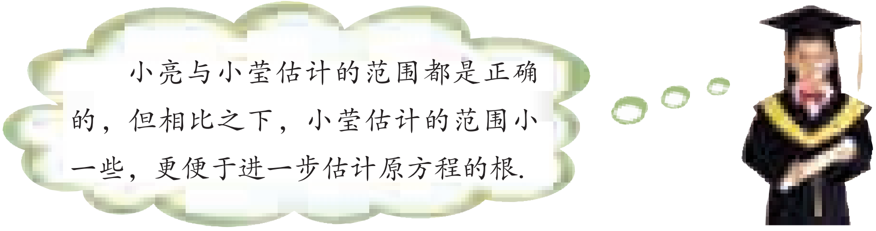
因为 x 是直角三角形中直角边的长，它一定为正值，并且小于斜边的长，所以可以估计 x 的范围是 $0<x<11$.

因为较长直角边 $x+7$ 小于斜边的长，因而 $x+7<11$，解得 $x<4$；

又因为两直角边的和大于斜边，因而 $x+(x+7)>11$，解得 $x>2$.

所以可以估计 x 的范围是 $2<x<4$.

（2）小亮与小莹的估计的范围正确吗？你认为谁估计的范围更合理？



（3）怎样才能进一步缩小估计的范围呢？

将方程②化为

$$x^2 + 7x = 36 . \quad ④$$

利用二分法，取2和4的中间值3，分别计算当$x = 2$，3，4时，方程④左边的代数式$x^2 + 7x$的值，并比较它们的值与方程④右边的36的大小，填写下表：

x	2	3	4
$x^2 + 7x$	18	30	44
与36比较	小于36	小于36	大于36

这说明，在3和4之间有方程④的根. 并由此可知，这个根的整数部分是3.

（4）取3和4的中间值3.5，借助计算器计算当$x = 3.5$时$x^2 + 7x$的值，并比较它的值与36的大小，填写下表：

x	3	3.5	4
$x^2 + 7x$	30	36.75	44
与36比较	小于36	大于36	大于36

这说明，在3和3.5之间有方程④的根.

（5）取3和3.5的中间值3.3，重复以上过程，填写下表：

x	3	3.3	3.5
$x^2 + 7x$	30	33.99	36.75
与36比较	小于36	小于36	大于36

这说明，在3.3和3.5之间有方程④的根.

（6）同样地，再取3.3和3.5的中间值3.4，填写下表：

x	3.3	3.4	3.5
x^2+7x	33.99	35.36	36.75
与36比较	小于36	小于36	大于36

这说明，在3.4和3.5之间有方程④的根. 并由此可知这个根的十分位上的数字是4，即

$$x=3.4\cdots$$

于是，便求出了方程④的根的精确到0.1的近似值为$x\approx3.4$或$x\approx3.5$.

借助计算器继续做下去，可以陆续确定方程④的根的百分位、千分位上的数字，……由于方程④的根就是方程②的根，这样就能用估计的方法求出方程②的根的精确到0.01，0.001，…的近似值.

（7）如果不考虑方程④的根的实际意义，你会估计方程④还有其他的根吗？与同学交流.

小莹是这样想的：

因为当x的值较大时，如$x\geqslant4$时，方程的左边$x^2+7x>36$，所以原方程不可能有大于或等于4的根.

当$0\leqslant x\leqslant3$时，$0\leqslant x^2+7x<36$，所以原方程在0和3范围内也不可能有根. 这就是说，方程④有一个根在3和4之间，这个问题已在上面得到解决，并且不可能有其他的正根.

当$x<0$时，x^2是正数，$7x$是负数. 当x的绝对值较大时，例如当$x=-12$时，$x^2+7x=60>36$. 所以在-12和0的之间还有原方程的根，这个根是负根.

小莹的分析正确吗？你能求出原方程在-12和0之间的负根吗？试一试.

练　习

1. 估计方程$x^2+5x=7$的根.
2. 根据下表中的数据，估计方程$x^2+2x-10=0$在-4.1和-4.6之间的精确到0.1的根的近似值是多少？

x	…	-4.1	-4.2	-4.3	-4.4	-4.5	-4.6	…
$x^2+2x-10$		-1.39	-0.76	-0.11	0.56	1.25	1.96	

习题4.1

复习与巩固

1. 指出下列一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项：

（1）$7x^2+1=0$；　（2）$3x^2+\sqrt{3}x=0$；　（3）$2x^2+7x-9=0$．

2. 判断下列方程是不是一元二次方程．如果是，分别指出它的二次项系数、一次项系数和常数项．

（1）$x(x+2)=0$；　（2）$x(4x+3)=(2x-1)^2$；

（3）$x+\dfrac{1}{x+1}=3$；　（4）$(x-1)^2+2x=2x^2$．

3. 判断方程后面括号里的数是否为该方程的根：

（1）$x^2-6x+5=0$　$(5,\ -3)$；

（2）$2x^2-3x+1=0$　$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$；

（3）$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$　$(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$；

（4）$(2x-1)^2=3$　$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$．

4. 根据问题“甲、乙两数的和为4，积为1，求甲、乙两数”列出方程，并估计方程根的近似值（精确到0.1）．

5. 估计下列方程的根（精确到0.1）：

（1）$x^2+2x=10$；　（2）$2x^2+5x-10=0$．

拓展与延伸

6. 把关于x的一元二次方程$5x^2+a(1-x)=3x+1$化成一般形式．

7. 如果一元二次方程$x^2-3x+k+1=0$有一个根是-1，求k的值．

8. 估计本节中方程③的解（精确到0.01）．

探索与创新

9. 当m为何值时，关于x的方程$x^2+3mx=mx^2-1$是一元一次方程？是一元二次方程？

4.2　用配方法解一元二次方程

观察与思考

观察下面的三个一元二次方程：

$$(x+5)^2=9, \quad ①$$

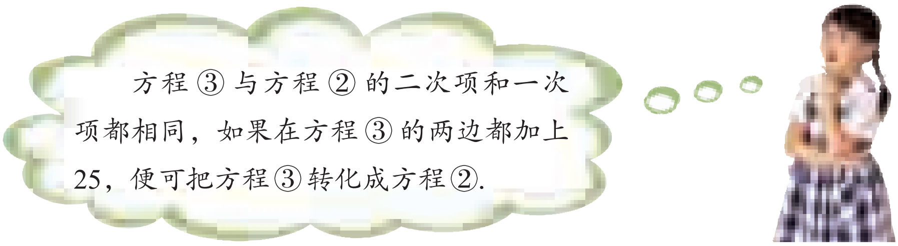
$$x^2+10x+25=9, \quad ②$$

$$x^2+10x=-16. \quad ③$$

（1）根据平方根的意义，你会解方程①吗？方程①有几个根？

（2）比较方程②与方程①，你发现它们有什么联系？根据这种联系，你会解方程②吗？

（3）比较方程②与③，你发现它们有哪些相同和不同？对于解方程③，由此能得到什么启示？



对于方程③，小莹的解法是：

在方程③的两边都加上25，得

$$x^2+10x+25=9.$$

即　$(x+5)^2=9.$

由平方根的意义，得

$$x+5=\pm 3.$$

所以，　$x_1=-5+3=-2,$

$$x_2=-5-3=-8.$$

你同意小莹的解法吗？

加油站

与一元一次方程不同，由于正数开平方时，有两个互为相反数的平方根，所以一元二次方程可以有两个实数根. 通常用 x_1，x_2 分别表示未知数为 x 的一元二次方程的两个根.

在小莹的解法中，有两步非常关键，第一步是利用等式的基本性质两边同加25，使方程的左边成为一个完全平方式. 第二步是通过开平方，将一元二次方程转化为一元一次方程.

（4）想一想，为什么在方程③的两边都加上25之后，方程③的左边就成为一个完全平方式？与同学交流.

因为二次项的系数为1，且25等于一次项系数10的一半的平方.

当二次项的系数为1时，可先把常数项移到方程的右边，然后在方程的两边都加上一次项系数的一半的平方，就把方程的左边配成了一个完全平方式，从而可以由平方根的意义求解方程. 这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**（solving by completing the square）.

例1　解方程：

（1）$x^2+4x=12$；　　（2）$x^2-3x+2=0$.

解　（1）配方，方程两边都加4，得

$$x^2+4x+4=16,$$

即　$(x+2)^2=16$.

由平方根的意义，得

$$x+2=\pm 4,$$

所以　$x_1=2$，$x_2=-6$.

（2）移项，得 $x^2-3x=-2$.

配方，方程两边都加上 $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2$，得

$$x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2,$$

即 $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

由平方根的意义，得

$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}.$$

所以

$$x_1=2,\quad x_2=1.$$

挑战自我

你会用配方法解方程

$$(x+1)^2+2(x+1)=8$$

吗？你能找到几种解法？

练习

1. 在下面的横线上各填上一个数，使各式成为完全平方式：

（1）x^2+14x+____ $=(x+$____$)^2$；　（2）x^2-20x+____ $=(x+$____$)^2$；

（3）$x^2+\frac{3}{2}x+$____ $=(x+$____$)^2$；　（4）$x^2-0.2x+$____ $=(x+$____$)^2$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x=-3$；　（2）$x^2-6x-7=0$；

（3）$y^2=8-2y$；　（4）$t^2+8=6t$.

例2　解4.1节问题（3）中的方程

$$x^2+x-1=0\text{（精确到0.001）}.$$

解　移项，得　$x^2+x=1$.

两边都加上 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$，得

$$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

由平方根的意义，得

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

所以

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618,\quad x_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx -1.618.$$

在4.1节问题（3）中，x为线段AC与AB的比，必须满足$x>0$．所以x_2不合题意，应当舍去，问题（3）的答案是：$\frac{AC}{AB}$的值约为0.618．

例3　解方程

$$2x^2+3x-1=0.$$

解　方程两边同除以2，得

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}.$$

两边都加上$\left(\frac{3}{4}\right)^2$，得

$$x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

即　　$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}.$$

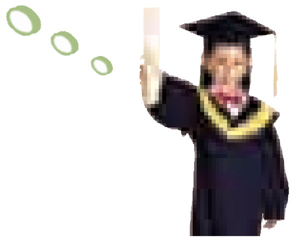
由平方根的意义，得

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

所以

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{4},\quad x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

如果一元二次方程的二次项系数不是1，为了便于配方，可以利用等式的基本性质，先把方程的二次项系数化为1．



挑战自我

如果p与q都是常数，且$p^2\geqslant 4q$，你会用配方法解关于x的一元二次方程$x^2+px+q=0$吗？试一试.

练 习

1. 用配方法解下列方程：

（1）$3x^2-6x=0$；　　（2）$2x^2-4x-3=0$；

（3）$2x^2-7x+3=0$；　　（4）$4x^2-7x-2=0$.

习题4.2

复习与巩固

1. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+8x=9$；　　（2）$x^2-3x=0$；

（3）$x^2+4x=-3$；　　（4）$x^2-18x+31=0$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-6x-3=0$；　　（2）$-x^2+4x=3$；

（3）$2x^2-3x-2=0$；　　（4）$3x^2-6x-1=0$.

3. 解答下列问题：

（1）当x为何值时，代数式$x^2-15x+45$的值等于-5？

（2）当x为何值时，代数式$x^2-13x+40$与$x-5$的值相等？

4.（中国古代数学问题）有一个矩形，面积为864平方步，它的宽比长少12步. 求这个矩形的长和宽.❶

小资料

步是我国古代的长度单位，1步约等于1.67米. 亩、分、平方步都是面积单位，它们的关系是：

1亩 = 10分；

1分 = 24平方步.

拓展与延伸

5. 用配方法证明，无论x取何实数，代数式$2x^2-8x+18$的值不小于10.

6. 用配方法解方程$x^2+(x+7)^2=11^2$，然后借助计算器求解的近似值（精确到0.1），并将得出的近似值与4.1节“实验与探究”中的估计值进行比较.

❶ 本题出自南宋数学家杨辉1275年所著《田亩比类乘除算法》一书. 原题是：直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二步. 问阔及长各几步？

7. 右图是一张月历表. 在此月历表上可以用一个矩形任意圈出 2×2 个位置上相邻的数（如 2，3，9，10）. 如果圈出的 4 个数中最大数与最小数的积为 128，求这 4 个数中最小的数.

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

（第 7 题）

探索与创新

8. 关于 x 的二次方程 $4x^2+4kx+k^2=1$ 的一个根是 -2，求 k 的值和另一个根.

4.3　用公式法解一元二次方程

实验与探究

运用配方法，我们已经会解

$$x^2+x-1=0,$$

$$2x^2+3x-1=0$$

等一元二次方程. 你会运用配方法解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

吗？试一试.

因为 $a\neq0$，方程两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

两边都加上 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，得

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于 $4a^2>0$，所以当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，由平方根的意义，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

移项，得

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

一般地，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它的根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这个式子叫做一元二次方程的**求根公式**. 用求根公式解一元二次方程的方法叫做**公式法**（solving by formula）.

用公式法解一元二次方程，应将方程化为一般形式，确定 a，b，c 的值（注意符号），在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的条件下，将 a，b，c 的值代入求根公式求解.

例1　用公式法解方程：

（1）$2x^2+5x-3=0$；　　（2）$4x^2=9x$.

解　（1）这里 $a=2$，$b=5$，$c=-3$.

$\because$　$b^2-4ac=5^2-4\times2\times(-3)=49>0$，

$\therefore$　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{-5\pm7}{4}$.

即　$x_1=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$，　$x_2=\dfrac{-5-7}{4}=-3$.

（2）将方程化为一般形式，得

$4x^2-9x=0$.

这里　$a=4$，$b=-9$，$c=0$.

$\because$　$b^2-4ac=(-9)^2-4\times4\times0=81>0$，

∴　$x=\dfrac{9\pm\sqrt{81}}{2\times4}=\dfrac{9\pm9}{8}$.

即　$x_1=\dfrac{9+9}{8}=\dfrac{9}{4}$，　$x_2=\dfrac{9-9}{8}=0$.

练 习

1. 用公式法解下列一元二次方程：

（1）$x^2+6x+5=0$；

（2）$6y^2-13y-5=0$；

（3）$2y^2-1=4y$；

（4）$\dfrac{3}{4}x^2=2x+\dfrac{1}{2}$.

例2　用公式法解方程

$$x^2+3=2\sqrt{3}x.$$

解　将方程化为一般形式，得

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0,$$

这里　$a=1$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=3$.

∵　$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$，

∴　$x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm0}{2}$，

即　$x_1=x_2=\sqrt{3}$.

例3　用公式法解方程，并求根的近似值（精确到0.01）：

$$(x+1)(3x-1)=1.$$

解　将方程化为一般形式，得

$$3x^2+2x-2=0,$$

这里　$a=3$，$b=2$，$c=-2$.

∵　$b^2-4ac=2^2-4\times3\times(-2)=28>0$，

∴　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{2\times3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$.

即　$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\approx\dfrac{-1+2.646}{3}\approx0.55$，

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\approx\dfrac{-1-2.646}{3}\approx-1.22$.

练习

1. 用公式法解下列方程：

（1）$x^2-12x+20=0$；（2）$2x^2+11x+5=0$；

（3）$5x^2-2\sqrt{15}x+3=0$；（4）$5x^2+10x-6=0$.

2. 用公式法解方程$2x^2-6x+3=0$，并求根的近似值（精确到0.01）.

习题4.3

复习与巩固

1. 用公式法解下列方程：

（1）$x^2-3x-10=0$；（2）$3x^2+4x-7=0$；

（3）$6x^2+2=7x$；（4）$4x^2-12x=1$.

2. 用公式法解习题4.1第5题中的方程，并把求得的解与原来估计的解进行比较.

3. 用公式法解下列方程：

（1）$(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$；（2）$2x^2+2\sqrt{5}x+1=0$.

4. 用公式法解下列方程，并求根的近似值（精确到0.1）：

（1）$x^2-3x+\frac{3}{2}=0$；（2）$3x^2+5(2x+1)=0$.

拓展与延伸

5. 已知方程$x^2+kx-6=0$的一个根是2，求它的另一个根及k的值.

6. 你会解方程$(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8=0$吗？小莹通过设$y=x^2+2x$，把原方程化为$y^2-7y-8=0$，求出y值，再求x. 你来试一试.

探索与创新

7. 菱形$ABCD$的一条对角线长为6. AB边的长是方程$x^2-7x+12=0$的一个根，菱形$ABCD$的周长是多少？

8. 三角形的两边长分别为2和6，第三边的长是方程

$$x^2-10x+21=0$$

的解，第三边的长是多少？

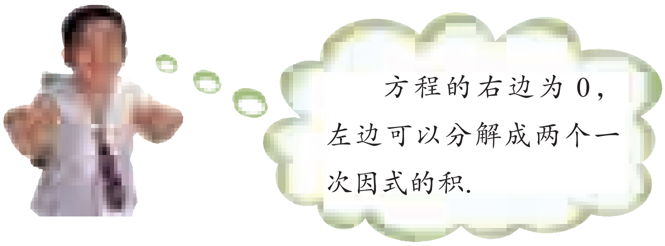
4.4　用因式分解法解一元二次方程

观察与思考

对于一元二次方程 $x^2+7x=0$，用配方法和公式法都可以求出它的解. 还有更简便的求解方法吗？

思考下面的问题：

（1）这个方程的两边有什么特征？



（2）小莹的解法是：

把方程左边的多项式进行因式分解，得

$$x(x+7)=0.$$

从而　　$x=0$，或 $x+7=0$.

所以　　$x_1=0$，　$x_2=-7$.

加油站

当一元二次方程的一边是 0，另一边可以分解为两个一次因式的积时，可分别令两个一次因式为 0，得到两个一元一次方程. 这两个一元一次方程的根都是原一元二次方程的根.

你同意小莹的解法吗？这种解法的根据是什么？分别用配方法和公式法解原方程，验证用三种方法求得的根都是一致的.

这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**（solving by factorization）.

例1　用因式分解法解方程：

（1）$15x^2+6x=0$；　　　　（2）$4x^2-9=0$.

解　（1）把方程的左边进行因式分解，得

$$3x(5x+2)=0.$$

从而　　$x=0$，或　$5x+2=0$.

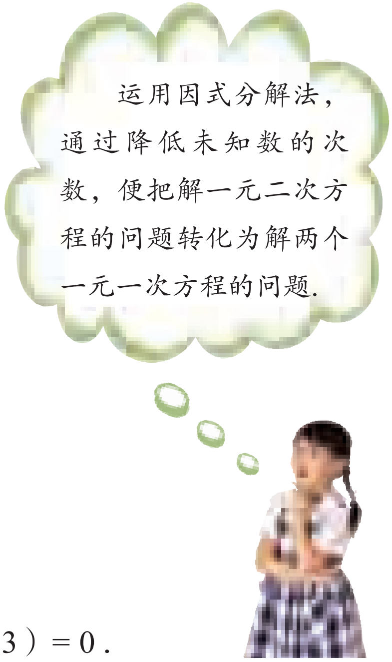
所以 $\qquad x_1=0,\quad x_2=-\frac{2}{5}.$

（2）把方程的左边进行因式分解，得

$$(2x+3)(2x-3)=0,$$

从而 $\qquad 2x+3=0$，或 $\quad 2x-3=0.$

所以 $\qquad x_1=-\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{3}{2}.$



例2　用因式分解法解方程：

$$(2x+1)^2=(x-3)^2.$$

解　移项，得

$$(2x+1)^2-(x-3)^2=0.$$

把方程的左边进行因式分解，得

$$(2x+1+x-3)(2x+1-x+3)=0.$$

即 $\qquad (3x-2)(x+4)=0.$

从而

$$3x-2=0，或\quad x+4=0.$$

所以 $\qquad x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-4.$

对于例2，你还有其他的求解方法吗？

挑战自我

（1）对于本节开始给出的方程$x^2+7x=0$，小亮是这样解的：

把方程两边同除以x，得

$$x+7=0.$$

所以 $\qquad x=-7.$

怎么少了一个根？你知道小亮的解法错在什么地方吗？

（2）对于例2，大刚想到的解法是：

把原方程两边开平方，得

$$2x+1=x-3.$$

所以 $\quad x=-4.$

怎么也少了一个根？你知道大刚的解法错在什么地方吗？

练 习

1. 用因式分解法解下列方程：

（1）$3x^2+x=0$；　　（2）$\sqrt{3}y^2+2\sqrt{3}y=0$；

（3）$4x^2-81=0$；　　（4）$9(x+5)^2=1$.

2. 当 x 为何值时，分式 $\dfrac{2x}{x-x^2}$ 没有意义？

习题4.4

复习与巩固

1. 用因式分解法解下列方程：

（1）$9x^2-25=0$；　　（2）$16x^2+10x=0$；

（3）$2y^2-4\sqrt{2}y=0$；　　（4）$(x-1)x=2(x-1)$.

2. 用因式分解法解下列方程：

（1）$(2x+1)^2-x^2=0$；　　（2）$16(3x+1)^2=9(x+2)^2$；

（3）$2(x+2)^2=3(x+2)$；　　（4）$(x-2)(2x+1)=1+2x$.

3. 当 x 取何值时，代数式 $(3x-2)^2$ 与 $2(2-3x)$ 的值相等？

拓展与延伸

4. 用因式分解法解下列方程：

（1）$5x(x-2)-x+2=0$；　　（2）$x^2-(x-3)=9$.

5. 填空：

关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 $x_1=1$，$x_2=2$，则二次三项式 ax^2+bx+c 可分解因式为____________________.

探索与创新

6. x 为何值时，分式 $\dfrac{x-1}{2(x-1)^2-x+1}$ 有意义？

7. 对于一元二次方程 $(2x-5)^2=(x-2)^2$，你有几种不同的解法？你认为哪种方法最简便？

4.5　一元二次方程根的判别式

实验与探究

（1）你会解方程$x^2+2x+5=0$吗？试一试.

因为$2^2-4\times1\times5<0$，所以无法用公式法解这个方程.

配方，得$(x+1)^2=-4$.

因为任何实数的平方都不可能是负数，所以任何实数都不会是原方程的根.

（2）由4.3节我们知道，当$b^2-4ac\geqslant0$时，一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad ①$$

可以利用求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求出它的根.

你发现当$b^2-4ac>0$与$b^2-4ac=0$时，方程的两个根分别具有什么特征？

当$b^2-4ac>0$时，由于$\sqrt{b^2-4ac}$是正数，$-\sqrt{b^2-4ac}$是负数，所以$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$是两个不相等的实数. 因此，方程①有两个不相等的实根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果$b^2-4ac=0$，那么$\sqrt{b^2-4ac}=0$，这时方程①有两个相等的实根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

如果$b^2-4ac<0$，将方程①配方后，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

方程的右边由于分母$4a^2>0$，所以$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，而$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$不可能是负数，这时方程①没有实根.

由此可见，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$是否有实根，有实根时两个实根是否相等，均取决于一个含有该方程各项系数的代数式b^2-4ac的值的符号，因而把b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根的**判别式**（discriminant），通常用Δ表示，即$\Delta=b^2-4ac$.

小资料

符号“Δ”是希腊字母，读作“delta”.

把上面讨论所得到的结论加以归纳，就得到

一元二次方程

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

当$\Delta>0$时有两个不相等的实根；当$\Delta=0$时有两个相等的实根；当$\Delta<0$时没有实根.

上面结论的逆命题也是正确的. 你能说出它的逆命题吗？

例1 不解方程，判断下列方程根的情况：

（1）$2x^2+x-4=0$；

（2）$4y^2+9=12y$；

（3）$5(t^2+1)-6t=0$.

如果一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实根，那么$\Delta>0$；如果有两个相等的实根，那么$\Delta=0$；如果没有实根，那么$\Delta<0$.

解 （1）这里$a=2$，$b=1$，$c=-4$.

$\because \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-4)=33>0$，

$\therefore$ 方程有两个不相等的实根.

（2）把原方程化为一般形式，得

$$4y^2-12y+9=0.$$

这里　$a=4$，$b=-12$，$c=9$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=0$，

$\therefore$ 原方程有两个相等的实根.

（3）把原方程化为一般形式，得

$$5t^2-6t+5=0.$$

这里　$a=5$，$b=-6$，$c=5$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times5\times5=-64<0$，

$\therefore$ 原方程没有实根.

例2　已知关于x的一元二次方程

$$kx^2-3x+1=0$$

有两个不相等的实根.

（1）求k的取值范围；

（2）选择一个k的正整数值，并求出方程的根.

解　（1）$\because$ 关于x的一元二次方程

$$kx^2-3x+1=0$$

有两个不相等的实根，

$\therefore$　$\Delta=(-3)^2-4k>0$，

即　$9-4k>0$.

解不等式，得

$$k<\frac{9}{4}.$$

$\because kx^2-3x+1=0$是一元二次方程，

$\therefore k\neq0$.

故k的取值范围是$k<\frac{9}{4}$且$k\neq0$.

（2）取不等式$k<\frac{9}{4}$的一个正整数解$k=2$，则方程为

$$2x^2-3x+1=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=1，x_2=\frac{1}{2}.$$

挑战自我

有一边长为3的等腰三角形，它的另两边长分别是关于x的方程

$$x^2-12x+k=0$$

的两根. 求k的值.

练习

1. 不解方程，判断下列方程根的情况：

（1）$3y^2-5y-2=0$；　（2）$2x^2-9x+6=0$；

（3）$5x^2+10x+6=0$；　（4）$5t^2-2\sqrt{15}t+3=0$.

2. k为何值时，关于x的一元二次方程

$$3x^2-4x+(k+1)=0$$

有两个相等的实根？

习题4.5

复习与巩固

1. 不解方程，判断下列方程根的情况：

（1）$2x^2+x+\frac{1}{4}=0$；　（2）$4t(t-1)=3$；

（3）$x^2+2=2\sqrt{2}x$；　（4）$3z^2-2\sqrt{6}z=-2$.

2. 关于x的方程$x^2+ax-1=0$有没有实根？如果有，两个实根是否相等？

3. 已知关于x的方程$mx^2+mx+5=m$有两个相等的实根，求m的值.

拓展与延伸

4. 当k为何值时，关于y的方程$(k-1)y^2-2ky+k=3$，

（1）有两个不相等的实根；

（2）有两个相等的实根；

（3）没有实根.

5. 已知关于x的方程$kx^2-4kx+k-5=0$有两个相等的实根，解这个方程.

探索与创新

6. 已知a，b，c是$\triangle ABC$的三条边的长. 求证：关于x的方程

$$cx^2-(a+b)x+\frac{c}{4}=0$$

有两个不相等的实根.

*[1] 4.6　一元二次方程根与系数的关系

实验与探究

（1）解下面的一元二次方程：

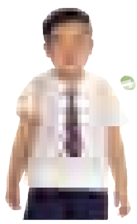
① $x^2+3x+2=0$，　　　② $x^2-5x+6=0$，

③ $3x^2+x-2=0$，　　　④ $2x^2-4x+1=0$.

（2）根据（1）中所求出的每个方程的根，分别计算两根之和与两根之积，并把结果填入下表：

一元二次方程	x_1	x_2	x_1+x_2	x_1x_2
① $x^2+3x+2=0$				
② $x^2-5x+6=0$				
③ $3x^2+x-2=0$				
④ $2x^2-4x+1=0$				

（3）观察上表，你发现在上面的四个方程中，两根之和与两根之积的值分别与相应的方程的系数之间有怎样的关系？



我发现方程①②的二次项系数为1时，一元二次方程的两根之和等于一次项系数的相反数，两根之积等于常数项.

方程③④的二次项系数不是1时，化成二次项系数是1的情况后，可把小亮的发现进一步推广.

（4）由此你猜想一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1，x_2 与方程的系数 a，b，c 之间有什么关系？能证明你的猜想是正确的吗？与同学交流.

❶ 本节的内容与习题为选学内容，不作考试要求.

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

于是，两个根的和为

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=-\frac{b}{a};\end{aligned}$$

两个根的积为

$$\begin{aligned}x_1x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

所以，一元二次方程的根与系数有以下的关系：

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

例1　关于 x 的方程 $3x^2+mx-4=0$ 有一个根是2，求另一个根及 m 的值.

解　设方程的另一个根为 x_1，则由一元二次方程根与系数的关系，得

$$\begin{cases}x_1+2=-\dfrac{m}{3}, & ①\\[2mm] 2x_1=-\dfrac{4}{3}. & ②\end{cases}$$

由②，得　$x_1=-\dfrac{2}{3}$.

代入①，得　$-\dfrac{2}{3}+2=-\dfrac{m}{3}$,

解得　$m=-4$.

所以，方程的另一个根是 $-\dfrac{2}{3}$，m 的值是 -4.

对于例1，你还有其他的解法吗？

例2　设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+5x+1=0$ 的两个根，求下列各式的值：

（1）$(x_1+1)(x_2+1)$；　　　　（2）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

解　由一元二次方程根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=-\frac{5}{2},\quad x_1x_2=\frac{1}{2}.$$

（1）$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}+1=-1$；

（2）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\left(-\dfrac{5}{2}\right)\div\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$.

史海漫游

一元二次方程与韦达定理

人类对一元二次方程的认识和研究的历史可以追溯到四千年以前，早在公元前18世纪，巴比伦人就在泥板上记载了这样的问题："已知正方形的面积与边长的差为870，求正方形的边长". 这相当于求方程 $x^2-px=q$（此时 $p=1$，$q=870$）的正根. 巴比伦人是通过计算 $\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+q}+\dfrac{p}{2}$ 求得该方程的解为30. 可以看出，该计算方法正是一元二次方程求根公式的特殊情况.

到了公元820年左右，阿拉伯数学家花拉子米在他的名著《代数学》中，系统地讲述了解一次、二次方程的一般原理，给出了一元二次方程的一般解法，强调了判别式非负才有解. 该书在欧洲作为标准数学课本使用了几个世纪，至今被认为是近代意义下代数学的真正创始之作.

法国数学家韦达致力于代数学的研究，写过许多代数学著作. 他在1615年出版的著作《论方程的识别与订正》中改进了三次、四次方程的解法，建立了一元二次、三次方程的根与系数的关系. 后人就把方程的根与系数的关系称之为韦达定理.

练 习

1. 不解方程，说出下列一元二次方程两个根的和与积：

（1）$x^2-3x+1=0$；　　　　（2）$2x^2+3x=0$.

2. 已知方程 $5y^2+ky-6=0$ 的一个根是2，求它的另一个根和 k 的值.

3. 设 y_1 与 y_2 是方程 $2y^2-4y+1=0$ 的两个实数根. 不解方程，求下列各式的值：

（1）$y_1^2+y_1y_2+y_2^2$；　　　　（2）$\dfrac{y_2}{y_1}+\dfrac{y_1}{y_2}$.

习题4.6

复习与巩固

1. 选择题：下列方程中两个实根的和等于2的方程是（　　）.

（A）$2y^2-4y+3=0$　　（B）$2y^2-2y-3=0$

（C）$2x^2+4x-3=0$　　（D）$2t^2-4t-3=0$

2. 利用一元二次方程根与系数的关系，判断下列方程后面括号内的两个数是否同为该方程的根：

（1）$2x^2+3x-2=0$，$\left(-4,\ \frac{5}{2}\right)$；

（2）$x^2-6x+2=0$，$(3+\sqrt{7},\ 3-\sqrt{7})$.

3. 已知方程$2x^2+(m+1)x+m+2=0$的一个根是$-\frac{1}{2}$，求它的另一个根.

4. 已知关于x的方程$x^2-3x+a=0$的一个实根是另一个实根的2倍，求a的值.

拓展与延伸

5. 已知关于x的方程$2x^2-(4m-3)x+m^2-2=0$，根据下列条件分别求出m的值：

（1）方程的两根互为相反数；

（2）方程的两根互为倒数.

6. 求一个一元二次方程，使它的两根是4，-7.

7. 方程$ax^2+bx+10=0\ (a\neq0)$的两根之和与两根之积都等于10，求a，b的值.

探索与创新

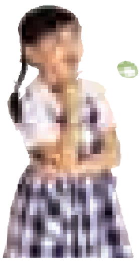
8. 已知方程$x^2-2mx+(m^2+m)=0$的两根的平方和为4，求m的值.

4.7　一元二次方程的应用

交流与发现

与我们学过的一元一次方程、二元一次方程组和分式方程一样，一元二次方程也是刻画现实生活与生产中数量关系的有效模型.

例1　将一根长为 64 cm 的铁丝剪成两段，再将每段分别围成正方形（图 4-2），如果两个正方形的面积的和等于 160 cm²，求两个正方形的边长.



首先要找出问题中的已知量、未知量和等量关系，把其中的一个未知量用 x 表示，根据等量关系，列出方程.

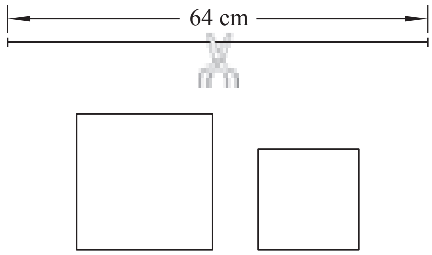


图 4-2

解　设其中一个正方形的边长为 x cm，那么该正方形的周长为 $4x$ cm，另一个正方形的边长为 $\frac{64-4x}{4}$ 即 $(16-x)$ cm .

根据题意，得

$$x^2+(16-x)^2=160 .$$

整理，得

$$x^2-16x+48=0 .$$

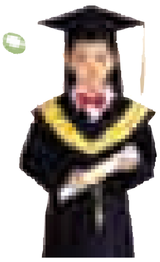
解这个方程，得

$$x_1=12,\ x_2=4 .$$

当 $x=12$ 时，$16-x=4$；

当 $x=4$ 时，$16-x=12$.

列一元二次方程解应用题时，必须检验方程的根是否符合题意，以决定取舍.



经检验，当两个正方形的边长分别是 12 cm 和 4 cm 时，两个正方形的周长之和为 64 cm，面积之和为 160 cm². 这就是说，$x=12$ cm 或 $x=4$ cm 均符合题意.

所以，两个正方形的边长分别为 4 cm 和 12 cm .

例2　某花圃用花盆培育某种花卉，经市场调查发现，出售一盆花的盈利与该盆中花的棵数有关. 当每盆栽种 3 棵时，平均每棵盈利 3 元. 以同样的栽培条件，每盆增加 1 棵，平均每棵盈利将减少 0.5 元. 要使每盆的盈利达到 10 元，每盆应当种植该种花卉多少棵?

解 设每盆增加种植 x 棵，则每盆种花 $(3+x)$ 棵，平均每棵盈利为 $(3-0.5x)$ 元.

根据题意，得

$$(3-0.5x)(3+x)=10.$$

整理，得

$$x^2-3x+2=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=1,\quad x_2=2.$$

经检验，$x=1$ 或 $x=2$ 均符合题意.

所以，每盆应种植该种花卉4棵或5棵.

智趣园

圆中正方形

我国古代数学家经常用诗歌的形式编写数学题，称为诗题. 清代数学家梅瑴（jué）成（1681–1763）对明代数学家程大位的《算法统宗》进行修改补充，编著了《增删算法统宗》一书. 在该书第11卷的众多诗题中，有一首“圆中正方形”：

今有圆田一块，中间有个方池.
量田特待耕犁，恰好三分在记.
池面至周有数，每边三步无疑.
内方圆径若有知，堪作算中第一.

大意是：有一块圆形的田地，中间有一个正方形水池. 量得水池外圆内田地的面积，恰好是3分. 从水池的每条边到圆周，最远都是3步（图4–3）. 如果你能求出正方形的边长和圆的直径，那么你的运算能力就数第一了.

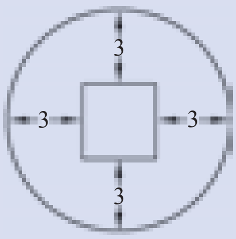


图 4–3

本题可以通过列一元二次方程解决. 设正方形的边长为 x 步，则圆的半径为 $\left(\frac{x}{2}+3\right)$ 步. 在古代，一般取 $\pi\approx3$. 于是，水池外圆内田地的面积为

$$3\left(\frac{x}{2}+3\right)^2-x^2=3\times24.$$

整理，得

$$x^2-36x+180=0.$$

解得　　　　$x_1 = 6$，　$x_2 = 30$．

经检验，$x_1 = 6$，$x_2 = 30$ 都符合题意．

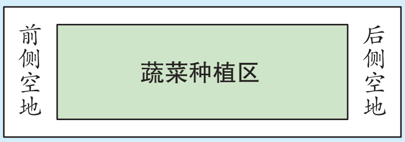
当 $x = 6$ 步时，圆的直径为 $2\left(\frac{x}{2}+3\right)=12$（步）；

当 $x = 30$ 步时，圆的直径为 $2\left(\frac{x}{2}+3\right)=36$（步）．

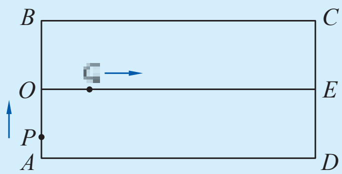
所以正方形的边长为 6 步，圆的直径为 12 步；或者正方形的边长为 30 步，圆的直径为 36 步．

练习

1. 天泉村计划建造如图所示的矩形蔬菜温室．要求长宽的比为 3∶1．在温室内，沿前后两侧内墙各留 3 m 宽的空地放置工具，其他两侧内墙各留 1 m 宽的通道．当矩形温室的长与宽多少时，蔬菜种植区的面积是 300 m^2？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，矩形 $ABCD$ 的边 $AB = 200$ cm，O 为 AB 的中点．$OE \perp AB$ 交 CD 于点 E．质点 P 从点 A 出发，以 2 cm/s 的速度沿 AB 向点 B 运动；另一质点 Q 同时从点 O 出发，以 3 cm/s 的速度沿 OE 向点 E 运动．经过多少秒时，$\triangle POQ$ 的面积为 1 800 cm^2？

例3　某养殖场 2010 年的产值为 500 万元，2012 年的产值为 605 万元．求 2010～2012 年该养殖场产值的年平均增长率．

解　设该场 2010～2012 年产值的年平均增长率为 x，那么 2011 年的产值为 $500+500x=500(1+x)$，2012 年的产值为

$$500(1+x)+500(1+x)\cdot x=500(1+x)^2.$$

根据题意，得

$$500(1+x)^2=605.$$

解这个方程，得

$$x_1 = 0.1, \quad x_2 = -2.1.$$

根据题意，605 万元 > 500 万元，故年增长率 $x > 0$，而 $x_2 = -2.1 < 0$，因此 $x_2 = -2.1$ 不符合题意，应当舍去，$x_1 = 0.1$ 符合题意.

所以，该养殖场 2010 ~ 2012 年产值的年平均增长率为 0.1，即 10%.

例4　某种药品经过两次降价后，每盒售价为原售价的 64%，求该药品平均每次的降价率.

解　设该药品平均每次的降价率为 x，那么第 1 次降价后该药品每盒的售价为原售价的 $(1-x)$，第 2 次降价后该药品每盒的售价为原售价的 $(1-x)^2$.

根据问题中的等量关系，得

$$(1-x)^2 = 64\%.$$

解这个方程，得

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 1.8.$$

根据题意，降价率应满足 $0 < x < 1$，因而 $x_2 = 1.8$ 不符合题意，应当舍去，而 $x = 0.2$ 符合题意.

所以，该药品平均每次的降价率为 0.2，即 20%.

挑战自我

例 3 与例 4 都是增长率（包括负增长）问题，你能把这类问题中的基本数量关系用公式表示出来吗？

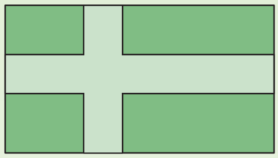
练　习

1. 某农机厂 1 月份生产联合收割机 300 台，为了满足夏收季节市场的需求，3 月份比 1 月份多生产 132 台. 求 2 月、3 月两个月的平均月增长率.
2. 某玩具厂今年每个月的产量都比上个月环比增长同样的百分数，已知该厂今年 4 月份的玩具产量为 5 万件，6 月份比 5 月份多生产了 12 000 件. 求今年产量的月增长率.

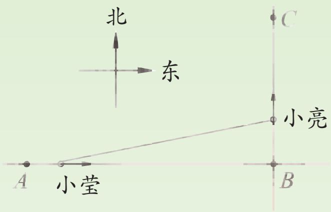
习题4.7

复习与巩固

1. 两个实数的和是10，积是-75. 求这两个数.
2. 如图，在宽为20 m、长为36 m的矩形草地上修建两条同样宽且互相垂直的道路，剩余草地的面积是540 m². 求道路的宽（精确到0.1 m）.

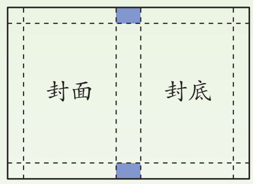


（第2题）



（第3题）

3. 如图，AB与BC分别是东西方向和南北方向的道路，$AB=1\ 000$ m. 晨练时，小莹从点A出发，以每分钟150 m的速度向东跑；小亮同时从点B出发，以每分钟200 m的速度向北跑. 经过几分钟时，他们之间的直线距离仍然是1 000 m?
4. 一本书的长为26 cm，宽为18.5 cm，厚为1 cm. 小莹准备用一张面积为1 260 cm²的矩形纸包这本书的书皮（如图）. 若书皮四周折进的宽度一样，折叠进去的宽度应为多少?



（第4题）

5. 某种品牌汽车的售价为每辆10万元，使用两年后其价值为7.225万元. 求该汽车这两年的年平均折旧率.
6. 解决本章“情境导航”中的问题（精确到0.1%）.
7. 山青农场去年种了10亩地的南瓜，平均亩产量为2 000 kg. 根据市场需要，今年该农场扩大了种植面积，并且全部种了高产的新品种南瓜. 已知南瓜种植面积的增长率是亩产量的增长率的2倍，今年南瓜的总产量为60 000 kg. 求南瓜亩产量的增长率.

拓展与延伸

8. 一个两位数，十位数字与个位数字的和为5，把十位数字与个位数字互换后得到的两位数与原数的积为736. 求原两位数.
9. 某化肥厂4月份生产某种化肥500吨，5月份因部分设备检修，产量比4月份减少了10%. 从6月份起产量逐月上升，7月份达到648吨. 该厂6，7两个月产量的平均月增长率是多少?

探索与创新

10. 一个容积为 1 000 ml 的容器里盛满浓度为 80% 的酒精. 第一次倒出若干毫升后，用水加满；第二次又倒出同样毫升数的溶液，再用水加满. 这时容器内的酒精的浓度为 20%. 求每次倒出溶液多少毫升.

回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.
2. 什么是一元二次方程？你能说出它与一元一次方程、分式方程和二元一次方程的区别吗？一元二次方程的一般形式是什么？
3. 举例说明如何估计一元二次方程的解.
4. 解一元二次方程的基本思路是什么？有哪些常用的方法？对于方程 $4x^2=(x+1)^2$，你有哪几种求解的方法？
5. 用配方法解一元二次方程的要点是什么？
6. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式是什么？你能用公式法写出方程 $x^2+px+q=0$（$p^2\geqslant 4q$）的解吗？
7. 具备哪种形式的一元二次方程用因式分解法求解比较简便？
8. 一元二次方程的解有几种情况？怎样根据方程的系数判别解的情况？
9. 一元二次方程的根与系数有怎样的关系？
10. 列一元二次方程解应用问题的主要步骤是什么？应当注意什么问题？

综合练习

复习与巩固

1. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-3x-10=0$；　　（2）$4x^2-12x=1$；

（3）$3x^2-6x+1=0$；　　（4）$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$.

2. 用公式法解方程：

（1）$x^2+8x-20=0$；　　（2）$4x^2-4x+1=0$；

（3）$x^2-3x-28=0$；　　（4）$6x^2+2=7x$.

3. 用适当的方法解方程：

（1）$(2y-1)(y+3)=4$；　　（2）$2(x+2)^2=3(x+2)$；

（3）$25(x-7)^2=16(x+4)^2$；　　（4）$16(x+5)^2-8(x+5)+1=0$.

4. 已知方程$2x^2+x+m=0$的一个根是1，求m的值和方程的另一个根.

5. 当x取何值时，分式$\dfrac{x-4}{x^2+2x}$没有意义？当x取何值时，分式的值为0？

6. 已知一元二次方程$x^2-2x+m-1=0$.

（1）当m取何值时，这个方程有两个不相等的实根？

（2）设x_1，x_2是这个方程的两个实根，且$x_1^2+x_1x_2=1$，求m的值.

7. 已知关于x的方程$x^2-2(m+1)x+m^2=0$.

（1）当m取何值时，这个方程没有实根？

（2）选取m的一个非零整数值，使这个方程有两个实根，并求这两个根.

8. 小亮手中有长分别为22 cm和24 cm的两段铁丝，打算用其中的一段铁丝折成一个面积为32 cm^{2}的矩形. 他应当选择用哪段铁丝？为什么？

9. 三个连续整数两两相乘后再求和得362，求各数.

10. 机动车尾气污染是导致城市空气质量恶化的重要原因. 为解决这个问题，某市试验将现有公共汽车改装成天然气燃料汽车（称为“环保汽车”）. 按照计划，该市今后两年内将使全市的这种环保汽车由目前的325辆增加到637辆，求这种环保汽车平均每年增加的百分率.

11. 已知关于x的方程$x^2-3x+c=0$的一个根的相反数是方程$x^2+3x-c=0$的一个根，求方程$x^2+3x-c=0$的根及c的值.

拓展与延伸

12. 小亮、小莹与大刚一起讨论方程$0.25x^2-2.76x+0.23=0$的根的情况.

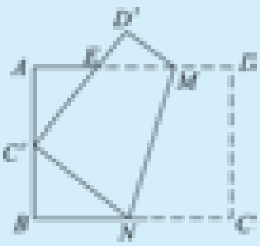
小亮说：“这个方程有两个不相等的实根.”

小莹说：“这个方程的两个根都是正数.”

大刚说：“这个方程有一个根大于10，另一个根小于1.”

他们的判断都正确吗？为什么？

13. 如图，把矩形纸片$ABCD$折叠，使点C落在AB边上的点C'处（与点A，B不重合），点D落在D'处，$C'D'$交AD于点E，折痕为MN.



（第13题）

（1）已知$AB=7$，$BC=9$，当点C'在什么位置时，可以使$\triangle NBC'\cong\triangle C'AE$？

（2）如果$AB=BC=1$，那么使$\triangle NBC'\cong\triangle C'AE$的点$C'$是否存在？如果存在，求出点$C'$的位置；如果不存在，请说明理由.

14. 某养鱼户经营池塘养鱼已3年，第一年春季放养鱼苗20 000尾，成活率约为70%，秋季捕捞前随意捞出10尾鱼，称得质量如下（单位：kg）：

0.8　0.9　1.2　1.3　0.8　0.9　1.1　1.0　1.2　0.8

（1）根据样本平均数估计这池塘中鱼的第一年总产量是多少kg；

（2）第一年秋季把这池塘中的鱼全部捞出卖掉，售价为4元/kg，除去当年投资成本16 000元，求第一年的纯收入；

（3）该养鱼户每年春季放养鱼苗，秋季捕捞后全部卖出. 已知这3年的纯收入为132 400元，求第二年与第三年纯收入的平均年增长率.

探索与创新

15. 一艘轮船以20海里/时的速度由西向东航行. 途中接到台风警报，台风中心正以40海里/时的速度由南向北移动，距台风中心$20\sqrt{10}$海里的圆形区域（包括边界）都属于台风区. 测得台风中心此时位于轮船正南方向100海里处，如果这艘轮船继续航行，会不会遇到台风？如果会，求轮船最初遇到台风的时间；如果不会，请说明理由.

16. 已知关于x的一元二次方程

$$(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}\,x-1=0$$

有两个不相等的实根.

（1）求实数k的取值范围；

（2）如果方程两根的倒数的和比两根倒数的积小1，求k的值.

综合与实践

黄金分割与五角星

在本册第4章4.1与4.2节中，我们曾经探究过这样一个问题：点 C 是线段 AB 上的一点，它把线段 AB 分割为两部分，使 AC 是 AB 与 CB 的比例中项，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$（图1），求比 $\frac{AC}{AB}$ 的值.

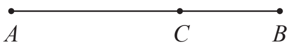


图1

这个问题通过列一元二次方程，解得 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

这里 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是个无理数，它精确到0.001的近似值是0.618．我们把点 C 叫做线段 AB 的**黄金分割点**. 该点所形成的分割称为**黄金分割**（golden section）. 0.618被称为黄金比或黄金数.

为什么把线段 AB 上的点 C 称作黄金分割点？它具有哪些美妙的性质？让我们走进黄金分割的世界，探索它的性质吧！

交流与发现

（1）如果把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 记作 φ，请计算代数式 $\frac{1}{\varphi}$ 与 $\frac{1}{\varphi}-1$ 的值，你有什么发现？如果把 φ 取近似值0.618，你还有什么发现？

（2）你能结合图1解释 $\frac{1}{\varphi}$ 与 $\frac{1}{\varphi}-1$ 的几何意义吗？

（3）如果已知线段 AB（图2），如何用尺规作出它的黄金分割点呢？

图2

如果设 $AB=1$，根据 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$，可考虑先作一条长度为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的线段. 怎样才能作出一条长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的线段呢？

因为 $\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{4+1}}{2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$，根据勾股定理，长为$\frac{\sqrt{5}}{2}$的线段是直角边分别为 1 和 $\frac{1}{2}$ 的直角三角形的斜边，可以用尺规作出来.

作法如下：

① 过点 B 作 $l\perp AB$；

② 在直线 l 上截取 $BD=\frac{1}{2}AB$，连接 AD；

③ 在 DA 上截取 $DE=DB$；

④ 在 AB 上截取 $AC=AE$（图 3）.

点 C 就是所求作的线段 AB 的黄金分割点.

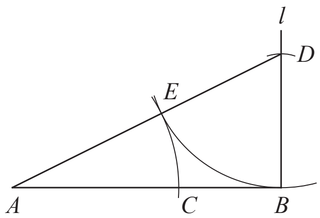


图 3

（4）小亮受上面尺规作图的启发，提出了一个利用正方形纸片折出一条线段的黄金分割点的设想. 折纸的步骤是：

① 取一张正方形的纸片 $ABCD$，设它的边长为 1（图 4）. 将纸片对折，得折痕 EF. 将纸片打开后，再折出矩形 $BCFE$ 的对角线 BF（图 5）；

② 将 AB 边折到 BF 上，因为 $AB<BF$，所以点 A 与 BF 上的点 A' 重合，得折痕 BG（图 6）.

点 G 就是线段 AD 的黄金分割点.

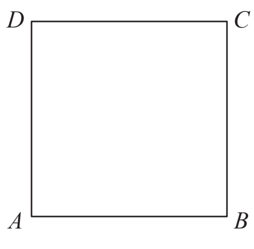


图 4

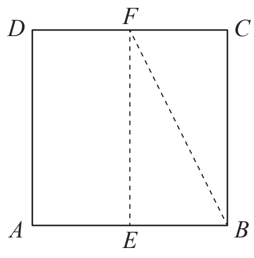


图 5

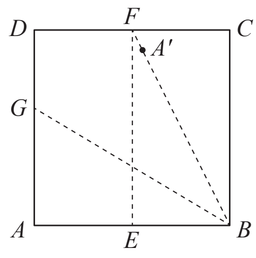


图 6

请你按小亮设想的步骤做一做，你能证明点 G 是 AD 的黄金分割点吗？与同学交流.

（5）过图 6 中点 G 作平行于 AB 的直线 GH，将正方形 $ABCD$ 沿 GH 剪开，得到矩形 $ABHG$（图 7）. 矩形 $ABHG$ 的宽 AG 与 AB 的比是多少？

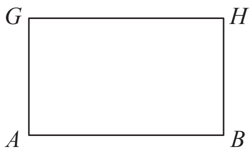


图 7

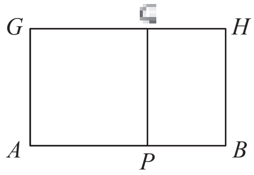
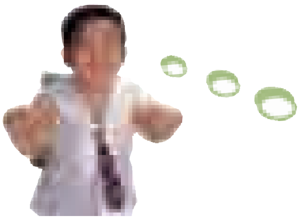


图 8

当一个矩形的宽与长的比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，古希腊人认为这样的矩形看起来最匀称、最美观，所以后人称它为**黄金矩形**.

黄金矩形具有一个非常奇妙的性质：如图 8，在黄金矩形 $ABHG$ 的较长一边 AB 上取点 P，使 $AP=AG$，然后作经过 P 点且平行于 AG 的直线，交 GH 于点 Q，得到矩形 $PBHQ$. 矩形 $PBHQ$ 与矩形 $ABHG$ 相似吗？如果相似，相似比是多少？矩形 $PBHQ$ 较短边与较长边的比是多少？由此你能得到什么结论？



在黄金矩形中，去掉一个正方形后，余下的小矩形还是黄金矩形.

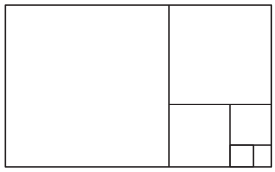


图 9

继续这样作下去，可以得到无数多个越来越小的黄金矩形，它们都是相似形，且相邻两个黄金矩形的相似比等于黄金数 0.618（图 9）.

（6）如图 10 是一个顶角是 36° 的等腰三角形 ABC，$\angle B$ 的平分线 BD 交 AC 于点 D. $\triangle BCD$ 与 $\triangle DAB$ 是什么形状的三角形？$\triangle BCD$ 与 $\triangle ACB$ 相似吗？为什么？如果相似，它们的相似比是多少？由此你能得到哪些结论？

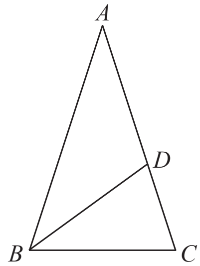


图 10

$\triangle BCD$ 也是一个顶角是 36° 的等腰三角形；$\triangle BCD \backsim \triangle ACB$，其相似比是黄金数 0.618；$D$ 是 AC 的黄金分割点，比 $\frac{BC}{AB}$，$\frac{CD}{BC}$ 都等于黄金数；如果再作 $\angle C$ 的平分线与 BD 相交于点 E，则 $\triangle CDE$ 是与 $\triangle BDC$ 相似的三角形，相似比为 0.618. 继续这样作下去，可以得到无数多个相似的顶角为 36° 的等腰三角形，且相邻两个等腰三角形的相似比为黄金数 0.618.

顶角为 $36°$ 的等腰三角形叫做**黄金三角形**. 由此可知，圆内接正十边形的一边与过该边两个端点的半径围成一个黄金三角形，这就是说，圆内接正十边形边长与半径的比等于0.618（图11）.

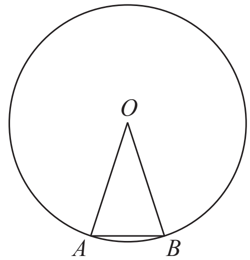


图 11

你能试一试，借助作一条线段的黄金分割点的方法，用尺规作一个圆内接正十边形吗?

实验与探究

（1）如图12，$\triangle ACD$ 是一个黄金三角形，$\angle CAD = 36°$. 作 $\triangle ACD$ 的外接圆 O. 作 $\angle C$ 的平分线交 AD 于点 F，延长交 $\odot O$ 于点 E；作 $\angle D$ 的平分线分别交 AC，CE 于点 G，H，延长交 $\odot O$ 于点 B；连接 BE，分别交 AC，AD 于点 I，J. 依次连接 AB，BC，DE，EA. 五边形 $ABCDE$ 是正五边形吗？说明理由，并与同学交流.

（2）在图12中，$\triangle ABI$ 是什么形状的三角形？哪些三角形与 $\triangle ABI$ 全等？哪些三角形与 $\triangle ABI$ 相似？为什么？

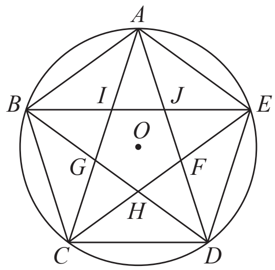


图 12

（3）在图12中，有几个黄金三角形？G，H，F，J，I 分别是哪条线段的黄金分割点？分别写出它们的比例式.

（4）在图12中，五边形 $IGHFJ$ 是正五边形吗？为什么？

（5）在图12中，多边形 $AIBGCHDFEJ$ 是正五角星形吗？说明理由，并与同学交流.

（6）阅读下方的小资料，利用小资料中给出的作图方法，作一个圆内接正五边形，再在这个正五边形内，作一个正五角星.

（7）根据图12，提出一个你认为值得探索的问题，并说出你的探索过程和结论，与同学交流.

小资料

圆内接正五边形的作法

在欧几里得的几何原本中，给出了作圆内接正五边形的方法如下：

① 作⊙O的任一条直径AB，再过圆心O作AB的垂线交⊙O于点C，D；

② 作OA的垂直平分线，交OA于点E；

③ 以点E为圆心，EC为半径作弧，交OB于点F；

④ 以点C为圆心，CF为半径作弧，交⊙O于点P，M；

⑤ 分别以点P，M为圆心，CF为半径作弧，交⊙O于点H，N（图 13）；

⑥ 顺次连接CM，MN，NH，HP，PC. 所得到的五边形$CMNHP$即为正五边形.

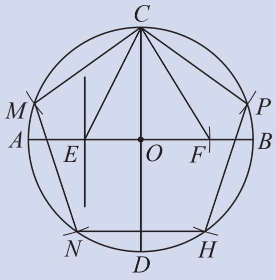


图 13

广角镜

黄金分割的由来和应用

人类对黄金分割的认识已有 2 500 多年的历史. 早在公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派就研究过正五边形和正十边形的作图. 公元前 4 世纪，古希腊数学家欧多克索斯（Eudoxus，约前 400 — 约前 347）第一个系统地研究了这一个问题，并建立起比例理论. 公元前 300 年前后，欧几里得撰写《原本》时，吸收了欧多克索斯的工作，系统地论述了黄金分割，成为最早的有关论著. 中世纪后，黄金分割被披上神秘的外衣，德国天文学家开普勒称黄金分割为神圣分割，直到 19 世纪，黄金分割这一名称才逐渐通行.

黄金分割在建筑、艺术、美学和生产实际中有广泛地应用.

建筑师们发现，按黄金分割的比例来设计殿堂，殿堂更加雄伟、气派，去设计别墅，别墅将更加舒适、漂亮. 连一扇门窗若设计为黄金矩形都会显得更加协调和美观. 例如，古希腊巴特农神庙是举世闻名的人类文化遗产（图 14）. 它的高与宽的比是 0.618. 古埃及人建造的金字塔现存 70 多座，这些金字塔的大小虽有不同，但其高与底面边长的比也都接近 0.618. 著名的法国巴黎埃菲尔铁塔（图 15），其第二层顶部到地面的距离和它到塔顶的距离之比也约为 0.618. 在现代建筑中，加拿大多伦多电视塔（图 16），塔高 553.33 米，其观景楼以上和以下部分的长度之比也约为 0.618.

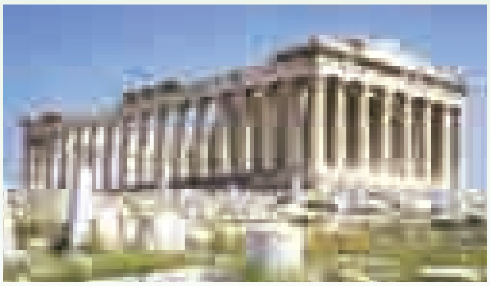


图 14

图 15

图 16

古希腊人认为，当人的眼眉到咽喉的距离与头顶到咽喉的距离之比接近 0.618 时，人的头部最美. 因此，当时创作的人体绘画、雕塑等艺术品（如图 17 中的女神维纳斯的塑像）多是按这个比例创作的. 对人体解剖很有研究的意大利画家达·芬奇发现，人的肚脐位于身长的 0.618 处；咽喉位于肚脐与头顶长度的 0.618 处；肘关节位于肩关节与指头长度的 0.618 处；人体存在着肚脐、咽喉、膝盖、肘关节四个黄金分割点，它们也是人赖以生存的四处要害. 达·芬奇创作的名画《蒙娜丽莎》（图 18）也是按黄金分割构图的.

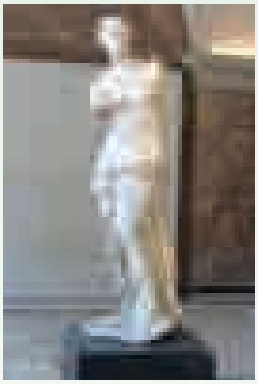


图 17

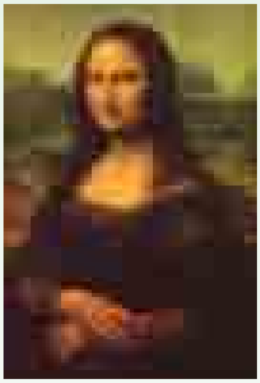


图 18

舞台上的报幕员并不是站在舞台的正中央，而是站在舞台的一侧，这是因为站在舞台长度的黄金分割点的位置观众的视觉和听觉效果最好.

人们的生活起居也与 0.618 有着密切的联系，用它可以解释为什么在环境温度 22℃ 至 24℃ 时人的感觉最舒适. 这是因为人的体温为 37℃，它与 0.618 的乘积为 22.9℃，在这个温度下，人的肌体的新陈代谢、生理节奏和生理功能均处于最佳状态.

在科学实验、生产实践中，选用方案时常采用 0.618 法，即优选法，用这种方法可以合理地安排用较少的试验次数找到合理的方案和合适的工艺条件.

即使在自然界，植物的生长中也充满了神奇的 0.618.

练习

1. 上网查询有关黄金分割的资料，并向同学介绍.
2. 写一篇五角星中蕴含的数学知识的小论文，在班级内交流.

后　记

这套义务教育七～九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书　数学（七～九年级）》（青岛出版社　2005年1月第一版）的基础上，依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的．经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过，准许使用．

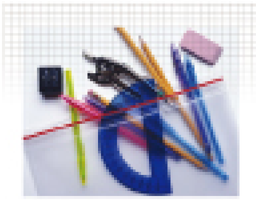
本套教科书由展涛担任主编，殷建中担任执行主编，参加本册教材编写的有（按姓氏笔画为序）：牟光明、李师正、吴传统、张汉玉、苗学良、曾美露、殷建中、谢廷桢等同志，由谢廷桢担任本册主编．在本套教科书的编写工作中，我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助．在此，我们一并致谢．

欢迎教师和同学们在使用本书过程中，向我们提出改进的意见和建议．

编　者

数 学

SHUXUE



绿色印刷产品

价格批准文号：鲁发改价格核〔2021〕629014
举报电话：12345

ISBN 978-7-5436-3785-6

定价：9.80 元