义务教育教科书（五·四学制）

责任编辑：孙金栋

封面设计：武　斌

王　琦

丽　子

绿色印刷产品

义务教育教科书（五·四学制）　数学　七年级　下册

价格批准文号：鲁发改价格核（2022）008005

举报电话：12345

ISBN 978-7-5328-8182-6

定价：10.03元

义务教育教科书（五·四学制）

数学

七年级　下册

山东教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级　下册

山东教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级 下册

山东教育出版社

YIWU JIAOYU JIAOKESHU（WU-SI XUEZHI）
SHUXUE
QI NIANJI　XIA CE
义务教育教科书（五·四学制）
数学
七年级　下册
*
山东出版传媒股份有限公司
山东教育出版社出版
（济南市市中区二环南路 2066 号 4 区 1 号）
山东新华书店集团有限公司发行
山东新华印刷厂潍坊厂印装
*
开本：787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印张：10.75　字数：215 千
定价：10.03 元（上光）
ISBN 978-7-5328-8182-6
2014 年 1 月第 1 版　2021 年 12 月第 9 次印刷

走进数学新天地

亲爱的同学：

很高兴与你再次相会。在数学的世界里，你将迎接一些新的挑战，继续体验、感受和品味数学的美妙，享受数学带给你的乐趣，相信你会一路探索、一路收获。

上学期，你认识了实数，体会到一次函数模型的作用，知道了直角坐标系中的简单轴对称与坐标之间的关系，还有三角形、勾股定理等。

打开这本教科书，一些新的数学内容会呈现在你的面前——

你知道“鸡兔同笼”这一问题吗？二元一次方程组在其中将一试身手，三元一次方程组更让你淋漓尽致地体会到“消元”的思想。

为什么要证明？怎样证明一个命题是正确的？相信你一定能学会合乎逻辑地思考。

全等三角形、等腰三角形、直角三角形有哪些基本性质？我们采用什么方法发现并证明这些性质？

与“相等”关系相比，生活中我们见到的更多是“不等”关系。在数学里，不等式（组）是刻画不等关系的最常见模型，其中一元一次不等式（组）是最基本的。许多有趣的问题等待着你去探索。

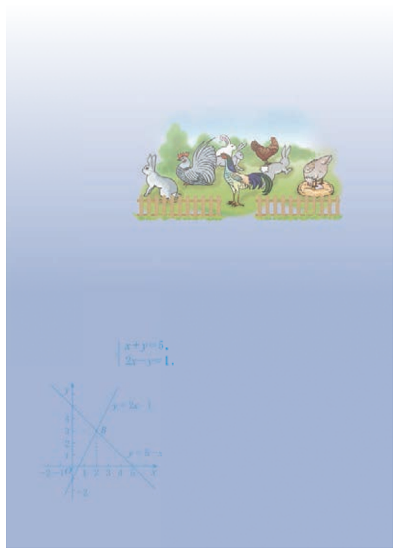
随机地经过一个路口，遇到红灯的可能性大还是遇到绿灯的可能性大？你想知道其中的奥秘吗？

在学习数学的征程上会有曲折和坎坷，只要有决心和毅力，坚守好的学习习惯，如：自己想一想、做一做，与同伴们议一议，读一读教科书，听一听老师的讲解，并在日常生活中尝试使用数学。如此一来，我们有充分的理由相信，你一定能学好数学！

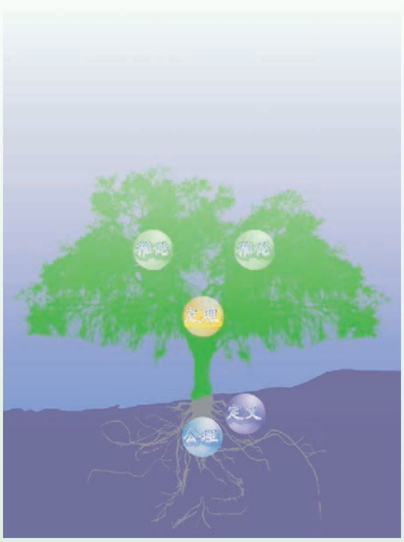
让数学伴随着你一同成长！

目 录 MULU

第七章 二元一次方程组



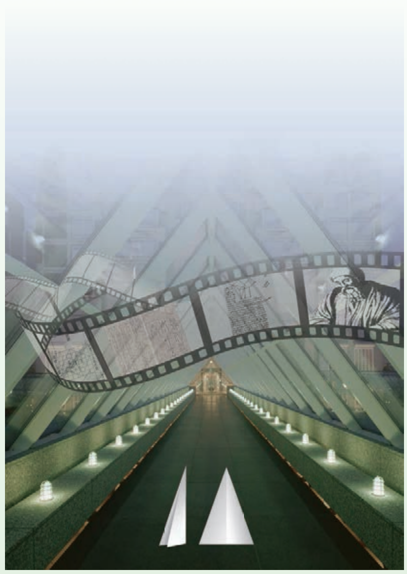
综合与实践



第八章 平行线的有关证明

第九章　概率初步

第十章　三角形的有关证明



第十一章　一元一次不等式与一元一次不等式组

综合与实践

第七章　二元一次方程组

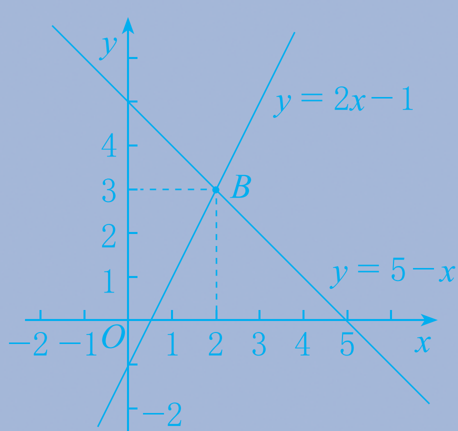
今有鸡兔同笼，
上有三十五头，
下有九十四足.
问鸡兔各几何？

你能解决上面的“鸡兔同笼”问题吗？

事实上，利用方程（组）可以很简单地解决这一问题. 方程（组）是刻画现实世界中的等量关系的有效模型，许多现实问题都可归结为方程问题.

本章将学习二元一次方程组及其解法，并利用二元一次方程组解决一些有趣的现实问题.

$$\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1. \end{cases}$$



学习目标

- 体会二元一次方程组是刻画现实世界中的等量关系的有效模型
- 会解二元一次方程组，体会“消元”思想
- 能应用二元一次方程组解决现实生活中的实际问题
- 体会二元一次方程和一次函数的关系

1 二元一次方程组

设老牛驮了 x 个包裹，小马驮了 y 个包裹.

老牛驮的包裹数比小马驮的多 2 个，由此你能得到怎样的方程？

若老牛从小马背上拿来 1 个包裹，这时它们各有几个包裹？由此你又能得到怎样的方程？

设他们中有 x 个成人，y 个儿童. 由此你能得到怎样的方程?

想一想

上面两个问题中，我们分别得到方程 $x-y=2$，$x+1=2(y-1)$ 和 $x+y=8$，$5x+3y=34$. 这些方程各含有几个未知数? 含未知数的项的次数是多少?

含有两个未知数，并且所含未知数的项的次数都是 1 的方程叫做**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）.

议一议

在上面的方程 $x+y=8$ 和 $5x+3y=34$ 中，x 所代表的对象相同吗? y 呢?

方程 $x+y=8$ 和 $5x+3y=34$ 中，x，y 所代表的对象分别相同，因而 x，y 必须同时满足方程 $x+y=8$ 和 $5x+3y=34$. 把它们联立起来，得

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 5x+3y=34. \end{cases}$$

像这样共含有两个未知数的两个一次方程所组成的一组方程，叫做**二元一次方程组**（system of linear equations with two unknowns）.

如$\begin{cases} x-y=2, \\ x+1=2(y-1) \end{cases}$和$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3y+1=2 \end{cases}$等都是二元一次方程组.

做一做

（1）$x=6$，$y=2$ 适合方程 $x+y=8$ 吗？$x=5$，$y=3$ 呢？$x=4$，$y=4$ 呢？你还能找到其他 x，y 值适合方程 $x+y=8$ 吗？

（2）$x=5$，$y=3$ 适合方程 $5x+3y=34$ 吗？$x=2$，$y=8$ 呢？

（3）你能找到一组 x，y 值，同时适合方程 $x+y=8$ 和 $5x+3y=34$ 吗？

适合一个二元一次方程的一组未知数的值，叫做这个**二元一次方程的一个解**.

如 $x=6$，$y=2$ 是方程 $x+y=8$ 的一个解，记作$\begin{cases} x=6, \\ y=2. \end{cases}$同样，$\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$也是方程 $x+y=8$ 的一个解.

二元一次方程组中各个方程的公共解，叫做这个**二元一次方程组的解**.

例如$\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$就是二元一次方程组$\begin{cases} x+y=8, \\ 5x+3y=34 \end{cases}$的解.

随堂练习

1. 根据题意，列方程组：

小明从邮局买了面值 50 分和 80 分的邮票共 9 枚，花了 6.3 元．小明买了两种邮票各多少枚？

2. 下面 4 组数值中，哪些是二元一次方程 $2x+y=10$ 的解？

（1）$\begin{cases} x=-2, \\ y=6; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=3, \\ y=4; \end{cases}$ （3）$\begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x=6, \\ y=-2. \end{cases}$

3. 二元一次方程组$\begin{cases} x+2y=10, \\ y=2x \end{cases}$的解是________.

（1）$\begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=3, \\ y=6; \end{cases}$ （3）$\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

习题 7.1

知识技能

1. 甲种物品每个 4 kg，乙种物品每个 7 kg．现有甲种物品 x 个，乙种物品 y 个，共 76 kg.

（1）列出关于 x，y 的二元一次方程____________；

（2）若 $x=12$，则 $y=$______；

（3）若有乙种物品 8 个，则甲种物品有______个.

2. 下面 4 组数值中，哪一组是二元一次方程组 $\begin{cases} 7x-3y=2, \\ 2x+y=8 \end{cases}$ 的解？

（1）$\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$　（3）$\begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases}$　（4）$\begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$

3. 根据题意列方程组：

（1）某班共有学生 45 人，其中男生比女生的 2 倍少 9 人．该班的男生、女生各有多少人？

（2）将一摞笔记本分给若干同学．若每个同学 5 本，则剩下 8 本；若每个同学 8 本，又差了 7 本．共有多少本笔记本、多少个同学？

数学理解

4.（1）找到几组适合方程 $x+y=0$ 的 x，y 值；

（2）找到几组适合方程 $x-y=2$ 的 x，y 值；

（3）找出一组 x，y 值，使它们同时适合方程 $x+y=0$ 和 $x-y=2$；

（4）根据上面的结论，你能直接写出二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解吗？

5. 小明和小丽两人同时到一家水果店买水果．小明买了 1 kg 苹果和 2 kg 梨，共花了 13 元；小丽买了 2 kg 苹果和 1 kg 梨，共花了 14 元．苹果和梨的价格各为多少？根据题意，小明列出方程组：

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ 2x+y=14. \end{cases}$$

而小丽列出的是：

$$\begin{cases} 2x+y=13, \\ x+2y=14. \end{cases}$$

交流后，他们发现两个方程组不同，于是展开了争论，都说自己是正确的，而对方是错误的. 他们列的方程组正确吗？你认为他们产生分歧的原因是什么？

2 解二元一次方程组

老牛和小马到底各驮了几个包裹呢？这就需要解方程组

$$\begin{cases} x-y=2, & ① \\ x+1=2(y-1). & ② \end{cases}$$

一元一次方程我会解！二元一次方程组……

由 ①，得 $y=x-2$. ③

由于方程组中相同的字母代表同一对象，所以方程 ② 中的 y 也等于 $x-2$，可以用 $x-2$ 代替方程 ② 中的 y. 这样有

$$x+1=2(x-2-1). \quad ④$$

啊哈，二元化为一元了！

解所得的一元一次方程 ④，得 $x=7$.

再把 $x=7$ 代入 ③，得 $y=5$.

经检验，$x=7$，$y=5$ 适合原方程组.

检验可以口算或在草稿纸上演算，以后可以不必写出.

这样，我们得到二元一次方程组

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x+1=2(y-1) \end{cases} \text{的解} \begin{cases} x=7, \\ y=5. \end{cases}$$

因此，老牛驮了 7 个包裹，小马驮了 5 个包裹.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=14, & ① \\ x=y+3. & ② \end{cases}$$

解：将 ② 代入 ①，得 $3(y+3)+2y=14$，

$$3y+9+2y=14,$$

$$5y=5,$$

$$y=1.$$

将 $y=1$ 代入 ②，得 $x=4$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=16, & ① \\ x+4y=13. & ② \end{cases}$$

解：由 ②，得 $x=13-4y$. ③

将 ③ 代入 ①，得 $2(13-4y)+3y=16$，

$$26-8y+3y=16,$$

$$-5y=-10,$$

$$y=2.$$

将 $y=2$ 代入 ③，得 $x=5$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

议一议

(1) 上面解方程组的基本思路是什么？

(2) 主要步骤有哪些？

上面解方程组的基本思路是“消元”——把“二元”变为“一元”.

主要步骤是：将其中一个方程中的某个未知数用含有另一个未知数的代数

式表示出来，并代入另一个方程中，从而消去一个未知数，化二元一次方程组为一元一次方程. 这种解方程组的方法称为**代入消元法**，简称**代入法**.

随堂练习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x, \\ x+y=12; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{y-5}{2}, \\ 4x+3y=65; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=11, \\ x-y=7; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x-2y=9, \\ x+2y=3. \end{cases}$

习题 7.2

知识技能

1. 用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-3y=2, \\ y=x; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x+y=8; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ x-2y=4; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} m-\dfrac{n}{2}=2, \\ 2m+3n=12. \end{cases}$

数学理解

2. 还记得上一节课我们是用什么方法找到二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=8, \\ 5x+3y=34 \end{cases}$ 的解吗？用代入消元法解这个方程组，并比较一下这两种方法，说说你的体会.

怎样解下面的二元一次方程组呢？

$$\begin{cases} 3x+5y=21, & ① \\ 2x-5y=-11. & ② \end{cases}$$

小彬

小明

小丽

按小丽的思路，你能消去一个未知数吗？

两个方程相加，可以得到 $5x=10$，

$$x=2.$$

将 $x=2$ 代入 ①，得 $6+5y=21$，

$$y=3.$$

经检验，$x=2$，$y=3$ 适合原方程组.

检验可以口算或在草稿纸上演算，以后可以不必写出.

所以方程组 $\begin{cases}3x+5y=21,\\2x-5y=-11\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

例 3 解方程组

$$\begin{cases}2x-5y=7, & ①\\2x+3y=-1. & ②\end{cases}$$

解： ②－①，得 $8y=-8$，

$$y=-1.$$

将 $y=-1$ 代入 ①，得 $2x+5=7$，

$$x=1.$$

所以原方程组的解是$\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

能否使两个方程中 x（或 y）的系数相等（或相反）呢？

例 4 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=12, & ① \\ 3x+4y=17. & ② \end{cases}$$

解：①×3，得 $6x+9y=36.$ ③

②×2，得 $6x+8y=34.$ ④

③−④，得 $y=2.$

将 $y=2$ 代入①，得 $x=3.$

所以原方程组的解是$\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

议一议

上面解方程组的基本思路是什么？主要步骤有哪些？

上面解方程组的基本思路仍然是“消元”，主要步骤是通过两式相加（减）消去其中一个未知数．这种解二元一次方程组的方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**.

随堂练习

用加减消元法解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 7x-2y=3, \\ 9x+2y=-19; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 6x-5y=3, \\ 6x+y=-15; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 4s+3t=5, \\ 2s-t=-5; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 5x-6y=9, \\ 7x-4y=-5. \end{cases}$

读一读

计算机是如何解方程组的

计算机的迅速发展大大提高了运算的速度和解数学问题的能力. 先进的计算机能快速准确地求出含有成千上万个未知数的一次方程组的解. 这是个程序化的过程，它的数学原理其实与我们所学的消元法一致. 下面就以二元一次方程组为例，介绍计算机的求解原理和步骤.

基本原理：对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, & ① \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2. & ② \end{cases}$$

若$a_{11}\neq 0$，则 $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)\times$①+②，得

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, & ③ \\ \qquad a'_{22}y=b'_2. & ④ \end{cases}$$

其中 $$a'_{22}=a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12},\ b'_2=b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1.$$

若④中 $a'_{22}\neq 0$，则

$$\begin{cases} y=\dfrac{b'_2}{a'_{22}}, \\ x=\dfrac{b_1-a_{12}y}{a_{11}}. \end{cases}$$

计算步骤如下表：

一般计算步骤	以方程组 $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ 为例， 其中 $a_{11}=4$，$a_{12}=3$，$b_1=5$， $a_{21}=2$，$a_{22}=-1$，$b_2=-5$.
（1）计算 $m=\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$； （2）计算 $a'_{22}=a_{22}-ma_{12}$， $b'_2=b_2-mb_1$； （3）计算 $y=\dfrac{b'_2}{a'_{22}}$， $x=\dfrac{b_1-a_{12}y}{a_{11}}$.	（1）$m=\dfrac{2}{4}=0.5$； （2）$a'_{22}=-1-0.5\times 3=-2.5$， $b'_2=-5-0.5\times 5=-7.5$； （3）$y=\dfrac{-7.5}{-2.5}=3$， $x=\dfrac{5-3\times 3}{4}=-1$. 所以方程组的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$

以上这一过程称为顺序消元法．对于三元一次方程组、四元一次方程组等多元方程组，其求解原理一样．

习题 7.3

知识技能

1. 用加减消元法解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ 5x+3y=31; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x-5y=-21, \\ 4x+3y=23; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 4x+7y=-19, \\ 4x-5y=17; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 3(x-1)=y+5, \\ 5(y-1)=3(x+5). \end{cases}$

数学理解

2. 分别用代入消元法和加减消元法解方程组 $\begin{cases} x+y=7, \\ 5x+3y=31, \end{cases}$ 并说明两种方法的共同点．

3.（1）解二元一次方程组 $\begin{cases} 5x-3y=16, \\ 3x-5y=0; \end{cases}$

（2）现在你可以用哪些方法得到方程组

$$\begin{cases} 5(x+y)-3(x-y)=16, \\ 3(x+y)-5(x-y)=0 \end{cases}$$

的解？对这些方法进行比较．

联系拓广

4. 如果知道了两个数的和与差，你一定能求出这两个数吗？说说你的理由．

3 二元一次方程组的应用

《孙子算经》是我国古代一部较为普及的算书，许多问题浅显有趣. 其中下卷第 31 题"雉兔同笼"流传尤为广泛，漂洋过海流传到了日本等国.

"雉兔同笼"题为："今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问雉兔各几何？"

（1）"上有三十五头"的意思是什么？"下有九十四足"呢？

（2）你能根据（1）中的数量关系列出方程组吗？

（3）你能解决这个有趣的问题吗？与同伴进行交流.

例 1 以绳测井. 若将绳三折测之，绳多五尺；若将绳四折测之，绳多一尺. 绳长、井深各几何？

题目大意是：用绳子测量水井的深度. 如果将绳子折成三等份，一份绳长比井深多 5 尺；如果将绳子折成四等份，一份绳长比井深多 1 尺. 绳长、井深各是多少尺？

解： 设绳长 x 尺，井深 y 尺，则

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-y=5, & ① \\ \dfrac{x}{4}-y=1. & ② \end{cases}$$

①－②，得 $$\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=4,$$

$$\frac{x}{12}=4,$$

$$x=48.$$

将 $x=48$ 代入 ①，得 $y=11$.

所以绳长 48 尺，井深 11 尺.

随堂练习

列方程组解古算题：

“今有牛五、羊二，直金十两. 牛二、羊五，直金八两. 牛、羊各直金几何？”

题目大意是：5 头牛、2 只羊共价值 10 两“金”. 2 头牛、5 只羊共价值 8 两“金”. 每头牛、每只羊各价值多少“金”？

习题 7.4

数学理解

1. 我们知道，一些通过列二元一次方程组解决的应用题，往往也可以通过列一元一次方程甚至用小学的算术方法获得解决，如本节的“鸡兔同笼”问题. 试用这些方法解决本节的“鸡兔同笼”问题和随堂练习中的问题，看看这些方法之间有什么异同之处，并与同伴进行交流.

问题解决

2. 用一根绳子环绕一棵大树. 若环绕大树 3 周，则绳子还多 4 尺；若环绕大树 4 周，则绳子又少了 3 尺. 这根绳子有多长？环绕大树一周需要多少尺？

3.《九章算术》中有一个问题：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四. 问人数、物价各几何？”

题目大意是：有几个人一起去买一件物品，每人出 8 元，多 3 元；每人出 7 元，少 4 元. 问有多少人？该物品价值多少元？

某工厂去年的利润（总产值－总支出）为 200 万元. 今年总产值比去年增加了 20%，总支出比去年减少了 10%，今年的利润为 780 万元. 去年的总产值、总支出各是多少万元?

设去年的总产值为 x 万元，总支出为 y 万元，则有

	总产值/万元	总支出/万元	利润/万元
去年	x	y	200
今年			

根据上表，你能通过列方程组解决这个问题吗？

例 2 医院用甲、乙两种原料为手术后的病人配制营养品. 每克甲原料含 0.5 单位蛋白质和 1 单位铁质，每克乙原料含 0.7 单位蛋白质和 0.4 单位铁质. 若病人每餐需要 35 单位蛋白质和 40 单位铁质，那么每餐甲、乙两种原料各多少克恰好满足病人的需要？

分析： 设每餐需甲、乙两种原料各 x g，y g，则有

	甲原料 x g	乙原料 y g	所配制的营养品
其中所含蛋白质			
其中所含铁质			

解： 设每餐需甲、乙两种原料各 x g，y g，则根据题意，得方程组

$$\begin{cases} 0.5x+0.7y=35, \\ x+0.4y=40. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} 5x+7y=350, & ① \\ 5x+2y=200. & ② \end{cases}$$

①−②，得 $5y=150$，

$y=30$.

将 $y=30$ 代入 ①，得 $x=28$.

所以每餐需甲原料 28 g、乙原料 30 g.

随堂练习

1. 一班和二班共有 100 名学生，他们的体育达标率（达到标准的百分率）为 81%. 如果一班学生的体育达标率为 87.5%，二班的达标率为 75%，那么一班、二班的学生数各是多少？

设一班、二班学生数分别为 x 名、y 名，填写下表并求出 x，y 的值.

	一班	二班	两班总和
学生数			
达标学生数			

2. 甲、乙两人从相距 36 km 的两地相向而行. 如果甲比乙先走 2 h，那么他们在乙出发 2.5 h 后相遇；如果乙比甲先走 2 h，那么他们在甲出发 3 h 后相遇. 甲、乙两人每小时各走多少千米？

设甲、乙两人每小时分别行走 x km，y km，填写下表并求 x，y 的值.

	甲行走的路程	乙行走的路程	甲、乙两人行走的路程之和
第一种情况（甲先走 2 h）			
第二种情况（乙先走 2 h）			

习题 7.5

数学理解

1. 编一道应用题，使得其中的未知数满足方程组

$$\begin{cases} x+y=200, \\ 5\%x+45\%y=35\%\times 200. \end{cases}$$

当然，在编拟应用题时，你可以根据实际背景适当改变上面方程中的数据，但不要改变方程的形式.

问题解决

2. 某旅馆的客房有三人间和两人间两种，三人间每人每天 90 元，两人间每人每天 120 元. 一个 50 人的旅游团到该旅馆住宿，租住了若干客房，且每个客房正好住满，一天共花去住宿费 5 280 元. 两种客房各租住了多少间？

3. 某体育场的环行跑道长 400 m，甲、乙分别以一定的速度练习长跑和自行车. 如果反向而行，那么他们每隔 30 s 相遇一次. 如果同向而行，那么每隔 80 s 乙就追上甲一次. 甲、乙的速度分别是多少？

小明的爸爸骑着摩托车带着小明在公路上匀速行驶，下图是小明每隔 1 h 看到的里程情况. 你能确定小明在 12:00 看到的里程碑上的数吗?

12:00　　13:00　　14:00

如果设小明在 12:00 看到的数的十位数字是 x，个位数字是 y，那么

(1) 小明在 12:00 看到的数可表示为 ______，根据两个数字和是 7，可列出方程 ______；

(2) 小明在 13:00 看到的数可表示为 ______，12:00~13:00 间摩托车行驶的路程是 ______；

(3) 小明在 14:00 看到的数可表示为 ______，13:00~14:00 间摩托车行驶的路程是 ______；

(4) 12:00~13:00 与 13:00~14:00 两段时间内摩托车行驶的路程有什么关系? 你能列出相应的方程吗?

根据以上分析，得方程组

$$\begin{cases} x+y=7, \\ (100x+y)-(10y+x)=(10y+x)-(10x+y). \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$$

因此，小明在 12:00 看到的里程碑上的数是 16.

例 3 两个两位数的和是 68，在较大的两位数的右边接着写较小的两位数，得到一个四位数；在较大的两位数的左边写上较小的两位数，也得到一个四位数. 已知前一个四位数比后一个四位数大 2 178，求这两个两位数.

分析：设较大的两位数为 x，较小的两位数为 y.

在较大数的右边接着写较小的数，所写的数可表示为 ________________；

在较大数的左边写上较小的数，所写的数可表示为 ________________.

解：设较大的两位数为 x，较小的两位数为 y，则

$$\begin{cases} x+y=68, \\ (100x+y)-(100y+x)=2\,178. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} x+y=68, \\ 99x-99y=2\,178. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+y=68, \\ x-y=22. \end{cases}$$

解该方程组，得 $\begin{cases} x=45, \\ y=23. \end{cases}$

所以这两个两位数分别是 45 和 23.

议一议

列二元一次方程组解决实际问题的一般步骤是怎样的？与同伴进行交流.

随堂练习

一个两位数，减去它的各位数字之和的 3 倍，结果是 23；这个两位数除以它的各位数字之和，商是 5，余数是 1. 这个两位数是多少？

习题 7.6

数学理解

1. 现实生活和数学学习中，有许多问题可以借助二元一次方程组解决．试编制一个可以用二元一次方程组解决的问题．

问题解决

2. 小明和小亮做加法游戏．小明在一个加数后面多写了一个 0，得到的和为 242；而小亮在另一个加数后面多写了一个 0，得到的和为 341．原来两个加数分别是多少？

3. 小颖家离学校 1 880 m，其中有一段为上坡路，另一段为下坡路．她跑步去学校共用了 16 min，已知小颖在上坡路上的平均速度是 4.8 km/h，而她在下坡路上的平均速度是 12 km/h．小颖上坡、下坡各用了多长时间？

4. 某商店准备用两种价格分别为 18 元/千克和 10元/千克的糖果混合成杂拌糖果出售，混合后糖果的价格是 15 元/千克．现在要配制这种杂拌糖果 100 千克，需要两种糖果各多少千克？

4 二元一次方程与一次函数

（1）方程 $x+y=5$ 的解有多少个？写出其中的几个．

（2）在直角坐标系中分别描出以这些解为坐标的点，它们在一次函数 $y=5-x$ 的图象上吗？

（3）在一次函数 $y=5-x$ 的图象上任取一点，它的坐标适合方程 $x+y=5$ 吗？

（4）以方程 $x+y=5$ 的解为坐标的所有点组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象相同吗？

方程 $x+y=5$ 的解有无数个. 事实上，以方程 $x+y=5$ 的解为坐标的点组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象相同，是同一条直线.

$x+y=5$ 与 $y=5-x$ 表示的关系相同.

一般地，以一个二元一次方程的解为坐标的点组成的图象与相应的一次函数的图象相同，是一条直线.

做一做

在同一直角坐标系内分别画出一次函数 $y=5-x$ 和 $y=2x-1$ 的图象（如图 7-1），这两个图象有交点吗？交点的坐标与方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 的解有什么关系？

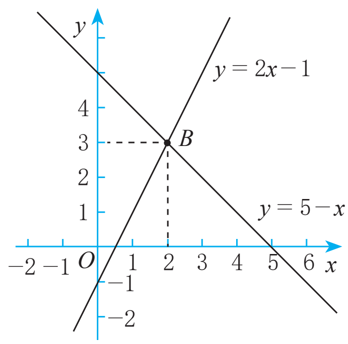


图 7-1

一次函数 $y=5-x$ 与 $y=2x-1$ 的图象的交点为（2，3），而 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 就是方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 的解.

一般地，从图形的角度看，确定两条直线交点的坐标，相当于求相应的二元一次方程组的解；解一个二元一次方程组，就相当于确定相应两条直线交点的坐标.

想一想

在同一直角坐标系内，一次函数 $y=x+1$ 和 $y=x-2$ 的图象（如图 7-2）有怎样的位置关系？方程组 $\begin{cases} x-y=-1, \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解的情况如何？你发现了什么？

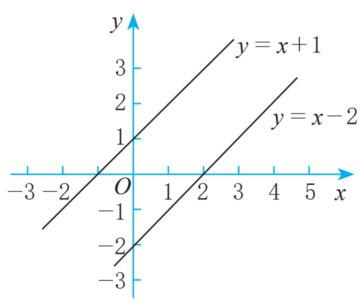


图 7-2

随堂练习

1. 已知一次函数 $y=3x-1$ 与 $y=2x$ 的图象的交点是（1，2），求方程组 $\begin{cases} 3x-y=1, \\ y=2x \end{cases}$ 的解.

2. 有一组数同时适合方程 $x+y=2$ 和 $x+y=5$ 吗？一次函数 $y=2-x$ 与 $y=5-x$ 的图象之间有什么关系？

习题 7.7

知识技能

1. 已知方程组 $\begin{cases} -3x+y+3=0, \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}, \\ y=1, \end{cases}$ 试求函数 $y=3x-3$ 与 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ 的图象的交点坐标.

2. 一次函数 $y=3x-5$ 与 $y=2x+b$ 的图象的交点为 $P(1,-2)$，试确定方程组 $\begin{cases} y=3x-5, \\ y=2x+b \end{cases}$ 的解和 b 的值.

3. 已知一次函数 $y=2x$ 与 $y=-x+b$ 的交点为（1，a），试确定方程组 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+y-b=0 \end{cases}$ 的解和 a，b 的值.

数学理解

※4. （1）请写出一组二元一次方程组，使该方程组无解；

（2）你还能写出其他无解的二元一次方程组吗？如果能，请观察这些方程组中两个方程有什么共同特征.

议一议

A，B 两地相距 100 km，甲、乙两人骑车同时分别从 A，B 两地相向而行. 假设他们都保持匀速行驶，则他们各自到 A 地的距离 s（km）都是骑车时间 t（h）的一次函数. 1 h 后乙距离 A 地 80 km；2 h 后甲距离 A 地 30 km. 经过多长时间两人将相遇？

你是怎样做的？与同伴进行交流.

小明

可以分别画出两人 s 与 t 之间关系的图象（如图 7-3），找出交点的横坐标就行了！

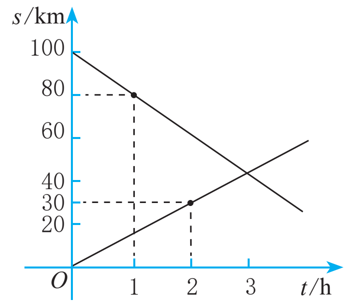


图 7-3

小颖

对于乙，s 是 t 的一次函数，可以设 $s=kt+b$. 当 $t=0$ 时，$s=100$；当 $t=1$ 时，$s=80$. 将它们分别代入 $s=kt+b$ 中，可以求出 k，b 的值，即可以求出乙的 s 与 t 之间的函数表达式. 同样可以求出甲的 s 与 t 之间的函数表达式，再联立这两个表达式，求解方程组就行了！

小彬

1 h 后乙距离 A 地 80 km，即乙的速度是 20 km/h；2 h 后甲距离 A 地 30 km，即甲的速度是 15 km/h. 由此可以求出甲、乙两人的速度和……

（1）你明白他们的想法吗？用他们的方法做一做，看看和你的结果一致吗？

（2）小明的方法求出的结果准确吗？

在上面的问题中，用画图象的方法可以直观地获得问题的结果，但有时却难以准确. 为了获得准确的结果，我们一般用代数方法.

例 某长途汽车客运站规定，乘客可以免费携带一定质量的行李，但超过该质量则需购买行李票，且行李费 y（元）是行李质量 x（kg）的一次函数. 已知李明带了 60 kg 的行李，交了行李费 5 元；张华带了 90 kg 的行李，交了行李费 10 元.

（1）写出 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）乘客最多可免费携带多少千克的行李？

解：（1）设 $y=kx+b$，根据题意，可得方程组

$$\begin{cases} 5=60k+b, & ① \\ 10=90k+b. & ② \end{cases}$$

②−①，得 $30k=5$，

$$k=\frac{1}{6}.$$

将 $k=\frac{1}{6}$ 代入 ①，得 $b=-5$.

所以 $y=\frac{1}{6}x-5$.

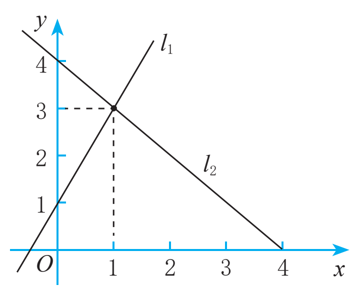
（2）当 $x=30$ 时，$y=0$.

所以乘客最多可免费携带 30 kg 的行李.

这种先设出含有未知系数的函数表达式，再根据所给条件确定表达式中的未知系数的方法是**待定系数法**.

随堂练习

1. 如图，两直线 l_1，l_2 的交点坐标可以看做方程组 ________ 的解.



（第 1 题）

2. 在弹性限度内，弹簧的长度 y（cm）是所挂物体质量 x（kg）的一次函数. 当所挂物体的质量为 1 kg 时，弹簧长 15 cm；当所挂物体的质量为 3 kg 时，弹簧长 16 cm. 写出 y 与 x 之间的关系式，并求当所挂物体的质量为 4 kg 时弹簧的长度.

习题 7.8

问题解决

1. 生物学研究表明，某种蛇的长度 y（cm）是其尾长 x（cm）的一次函数. 当蛇的尾长为 6 cm 时，蛇长为 45.5 cm；当尾长为 14 cm 时，蛇长为 105.5 cm.

（1）写出 y 与 x 之间的关系式；

（2）当一条蛇的尾长为 10 cm 时，这条蛇的长度是多少？

2. 为了倡导节约用水，某城市规定：每户居民每月的用水标准为 8 m^3，超过标准部分加价收费. 已知某户居民某两个月的用水量和水费分别是 11 m^3、28 元和 15 m^3、44 元. 用水标准内的水价和超过标准部分的水价分别是多少？你是怎么做的？与同伴进行交流.

*5 三元一次方程组[1]

已知甲、乙、丙三个数的和是 23，甲数比乙数大 1，甲数的 2 倍与乙数的和比丙数大 20，求这三个数.

在上述问题中，设甲数为 x，乙数为 y，丙数为 z，由题意可得到方程组

$$\begin{cases} x+y+z=23, \\ x-y=1, \\ 2x+y-z=20. \end{cases}$$

这个方程组和前面学过的二元一次方程组有什么区别和联系？

在这个方程组中，$x+y+z=23$ 和 $2x+y-z=20$ 都含有三个未知数，并且所含未知数的项的次数都是 1，这样的方程叫做**三元一次方程**（linear equation with three unknowns）.

像这样共含有三个未知数的三个一次方程所组成的一组方程，叫做**三元一次方程组**（system of linear equations with three unknowns）.

三元一次方程组中各个方程的公共解，叫做这个**三元一次方程组的解**.

怎样解三元一次方程组呢？

$$\begin{cases} x+y+z=23, & ① \\ x-y=1, & ② \\ 2x+y-z=20. & ③ \end{cases}$$

用代入消元法试一试！

我们会解二元一次方程组，能不能像以前一样“消元”，把“三元”化成“二元”呢？

[1] 标有*的内容为选学内容，不作考试要求.

由方程 ② 得

$$x=y+1. \qquad ④$$

把 ④ 分别代入 ①③，得

$$2y+z=22, \qquad ⑤$$

$$3y-z=18. \qquad ⑥$$

解方程组 $\begin{cases}2y+z=22,\\3y-z=18,\end{cases}$

啊哈，消去了未知数 x，变成二元一次方程组了，我会解！

得 $\begin{cases}y=8,\\z=6.\end{cases}$

把 $y=8$ 代入 ④，得 $x=9$.

检验可以口算或在草稿纸上演算，以后可以不必写出.

经检验，$x=9$，$y=8$，$z=6$ 适合原方程组.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=9,\\y=8,\\z=6.\end{cases}$

做一做

（1）解上面的方程组时，你能用代入消元法先消去未知数 y（或 z），从而得到方程组的解吗?

（2）你还有其他方法吗? 与同伴进行交流.

议一议

上述不同的解法有什么共同之处? 与二元一次方程组的解法有什么联系? 解三元一次方程组的思路是什么?

解三元一次方程组的基本思路仍然是“消元”——把“三元”化为“二元”，再化为“一元”.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

随堂练习

1. 一个三位数，个位数字与百位数字的和等于十位数字，百位数字的 7 倍比个位数字与十位数字的和大 2，个位数字、十位数字与百位数字的和是 14. 求这个三位数.

2. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=26, \\ x-y=1, \\ 2x-y+z=18. \end{cases}$$

习题 7.9

知识技能

1. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x+2z=3, \\ 2y+z=7, \\ 2x-y-z=-5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x-y+2z=8, \\ y+2z=-2, \\ 3x+y-4z=1. \end{cases}$

2. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 2x+3y+z=17, \\ 3x+2y-z=8. \end{cases}$$

问题解决

3. 某校七、八、九年级共有 651 人，八年级的学生比九年级的学生人数多 10%，七年级的学生比八年级的学生人数多 5%. 求三个年级各有多少学生.

4. 一个三位数，十位数字比个位数字大 2，百位数字是十位数字的 2 倍. 如果把百位数字与个位数字对调，那么得到的三位数比原来的三位数小 495. 求原来的三位数.

做一做

用不同的方法解下面的方程组：

$$\begin{cases} x+y=15, \\ y+z=5, \\ x+z=20. \end{cases}$$

再对这些方法进行比较.

例 已知等式 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=-3$ 时，$y=28$.

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 求当 $x=-1$ 时 y 的值.

解：(1) 根据题意，可得方程组

$$\begin{cases} a+b+c=0, & ① \\ 4a+2b+c=3, & ② \\ 9a-3b+c=28. & ③ \end{cases}$$

②−①，得 $3a+b=3.$ ④

③−①，得 $8a-4b=28.$ ⑤

解方程组 $\begin{cases} 3a+b=3, \\ 8a-4b=28, \end{cases}$

得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-3. \end{cases}$

把 $a=2$，$b=-3$ 代入 ①，得 $c=1$.

因此 a，b，c 的值分别为 $a=2$，$b=-3$，$c=1$.

(2) 当 $a=2$，$b=-3$，$c=1$ 时，等式为 $y=2x^2-3x+1$.

当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1)^2-3\times(-1)+1=6$.

随堂练习

1. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+3y+z=11, \\ -3x+y+z=2. \end{cases}$$

2. 已知等式 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=1$. 求 a，b，c 的值.

习题 7.10

知识技能

1. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+3y+z=6, \\ 3x+y+2z=6; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x+y-z=1, \\ -x+y+z=2, \\ x-y+z=3. \end{cases}$

数学理解

2. 当 $x=0$ 时，代数式 ax^2+bx+c 的值为 1；当 x 分别取 1，2 时，代数式 ax^2+bx+c 的值都是 0. 当 x 取 -1 时，代数式 ax^2+bx+c 的值是多少？

回顾与思考

1. 举出生活中运用二元一次方程组解决问题的两个例子.
2. 在列二元一次方程组解决实际问题的过程中，你认为最关键的是什么？
3. 解二元一次方程组的基本思路是什么？有哪些方法？举例说明解二元一次方程组的过程. 解三元一次方程组呢？
4. 举例说明二元一次方程与一次函数有什么关系.
5. 用适当的方法梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-2y=3, \\ x+2y=5 \end{cases}$ 的解是________.

（1）$\begin{cases} x=1, \\ y=0; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}, \\ y=2; \end{cases}$　（3）$\begin{cases} x=2, \\ y=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$　（4）$\begin{cases} x=7, \\ y=-1. \end{cases}$

2. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 2x-y=5, \\ 7x-3y=20; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 4x-y=1, \\ y=2x+3; \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} 5x+y=2, \\ x-3y=4; \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 2x+3y=-7; \end{cases}$　　※（5）$\begin{cases} z=x+y, \\ 2x-3y+2z=5, \\ x+2y-z=3. \end{cases}$

3. 若 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=0, \\ y=-2 \end{cases}$ 都是方程 $ax-y=b$ 的解，求 a 与 b 的值.

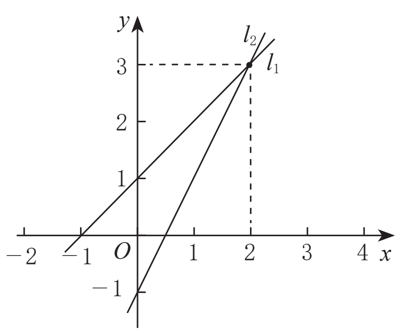
※**4.** 在代数式 ax^2+bx+c 中，当 $x=-1$，1，2 时，代数式的值依次是 0，-8，-9.

（1）求 a，b，c 的值；

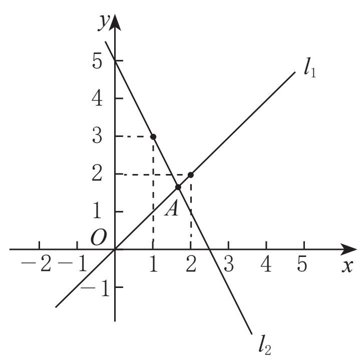
（2）当 $x=0$ 时，求这个代数式的值.

数学理解

5. 如图，直线 l_1，l_2 的交点坐标可以看做方程组 ________ 的解.



（第 5 题）



（第 6 题）

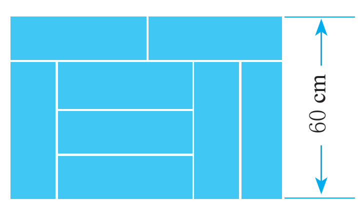
6. 如图，直线 l_1，l_2 相交于点 A. 试求出点 A 的坐标.

7. 编一个二元一次方程组，使它的解是 $\begin{cases} x=-2, \\ y=4. \end{cases}$

问题解决

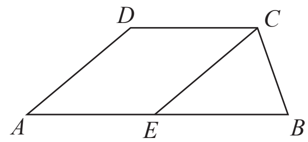
8. 某长方形的周长是 44 cm，若宽的 3 倍比长多 6 cm，则该长方形的长和宽各是多少？

9. 如图，8 块相同的长方形地砖拼成一个大长方形，每块长方形地砖的长和宽分别是多少？



（第 9 题）

10. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，E 在 AB 上，$CE/\!/AD$，且 $BE=CE$，$\angle B-\angle A=30^\circ$，求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数.



（第 10 题）

11. 某厂的甲、乙两个小组共同生产某种产品. 若甲组先生产 1 天，然后两组又一起生产了 5 天，则两组产量一样多. 若甲组先生产了 300 个产品，然后两组同时生产 4 天，则乙组比甲组多生产 100 个产品. 两组一天各生产多少个产品?

12. A，B 两地相距 80 km. 一艘船从 A 出发，顺水航行 4 h 到 B，而从 B 出发逆水航行 5 h 到 A. 已知船顺水航行、逆水航行的速度分别是船在静水中的速度与水流速度的和与差，求船在静水中的速度和水流速度.

13. 某粮食生产专业户去年计划生产水稻和小麦共 15 t，实际生产了 17 t，其中水稻超产 15%，小麦超产 10%. 该专业户去年实际生产水稻、小麦各多少吨?

14. 某商场按定价销售某种商品时，每件可获利 45 元；按定价的八五折销售该商品 8 件与将定价降低 35 元销售该商品 12 件所获利润相等. 该商品进价、定价分别是多少?

15. 某商场购进商品后，加价 40% 作为销售价. 商场搞优惠促销，决定由顾客抽奖确定折扣. 某顾客购买甲、乙两种商品，分别抽到七折和九折，共付款 399 元，两种商品原销售价之和为 490 元. 甲、乙两种商品进价分别为多少元?

16. 列方程组解古算题：

“今有甲、乙二人持钱不知其数. 甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十. 甲、乙持钱各几何?”

题目大意是：甲、乙两人各带了若干钱. 如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 50. 如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$，那么乙也共有钱 50. 甲、乙两人各带了多少钱?

17. 某景点的门票价格规定如下表：

购票人数	1~50	51~100	100 以上
每人门票价（元）	12	10	8

某校七年级一班和二班共 102 人去该景点游览，其中一班人数较少，不到 50 人，二班人数较多，有 50 多人. 如果两个班都以班级为单位分别购票，则一共应付 1 118 元；如果两班联合起来作为一个团体购票，则可以节省不少钱. 两班各有多少名学生? 联合起来购票能省多少钱?

联系拓广

※**18.** 方程组 $\begin{cases} -2x+y=3, \\ 4x-2y=-6 \end{cases}$ 的解是什么? 两个方程对应的两个一次函数的图象有怎样的位置关系? 你能从中悟出些什么?

综合与实践

哪一款“套餐”更合适

手机是人与人沟通的重要工具，它给人们的生活带来了许多方便. 你了解哪些与手机资费相关的专业术语？你知道有哪些手机资费套餐？它们的收费标准是怎样的？

假如你家刚刚添置了一部手机，下表是家长获得的一份手机资费宣传单，选择其中哪一款手机资费的“套餐”更合适？你能给你的家长出出主意吗？

套餐名称	资费内容					备注
	月租	本地主叫	长途主叫	本地以及长途被叫	基础定制	
A	0 月租	0.2 元 / 分	0.28 元 / 分	免费	2 元来话宝+3 元来电显示+5元炫铃	市话最低消费 40 元；套餐最低月消费 50 元
B	0 月租	0.18 元 /分	0.3 元 / 分	免费		市话最低消费 60 元；套餐最低月消费 70 元
C	0 月租	0.15 元 / 分	0.3 元 / 分	免费	3 元来电显示+3 元来话宝或新闻早晚报	市话、国内长途月最低消费 66 元；套餐最低月消费 72 元

做一做

以小组为单位合作完成下列任务.

（1）分析资费宣传单，思考每月的资费受哪些因素影响，影响资费的通话

时间有哪些.

（2）了解你家某部手机若干月的各项通话时间，思考影响该手机资费变化的主要因素是哪项通话时间.

（3）固定其他通话时间，分别确定三种套餐下相应的资费和通话时间之间的函数表达式，并解释所得的函数表达式中一次项系数“k”和常数项“b”的实际意义.

（4）根据你家的实际情况，选择哪种套餐较合算？说明理由.

议一议

（1）所得的函数表达式中的“k”“b”分别对每月资费有怎样的影响？

（2）一般地，什么情况下选择 A 套餐？说说你的理由. 什么情况下选择 B 套餐呢？C 套餐呢？

做一做

在手机资费问题中，通话时间直接影响着资费的多少，而且在其他时间固定的情况下，在一定时段内手机资费与通话时间成一次函数关系.

（1）与上述“手机资费”问题类似的，你还能找出哪些变量之间的关系，可以用一次函数来近似地表述？为什么？

（2）一次函数由两个系数“k”“b”确定. 在你所举的具体背景中，“k”“b”的具体意义是什么？具体背景中哪些因素可以导致“k”“b”的变化？

以小组为单位，探究上述问题，写出有关实践活动的报告，并进行班级交流.

习题

以小组为单位，调查“手机资费”的套餐种类，探索选择哪种套餐较为合算，把你的分析过程和最终结论总结成一份课题报告，并进行班级交流.

第八章　平行线的有关证明

通过观察、度量、猜测得到的结论都是正确的吗？如果不是，那么用什么方法说明一个结论的正确性呢？

根据“同位角相等，两直线平行”“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”，你还能得到哪些熟悉的结论？你能肯定它们都是正确的吗？

本章我们将一起学习如何根据一些基本事实推出其他结论的过程，并将对三角形的内角和进行研究. 同时，我们还将探讨三角形的内角与外角的关系.

学习目标

- 知道通过探索得到的结论不一定正确
- 知道证明要有出发点，要步步有据
- 会证明平行线和三角形的有关结论

1 定义与命题

图 8-1 中给出了五个三角形，你能指出哪个是等腰三角形吗？你的根据是什么？与同伴进行交流.

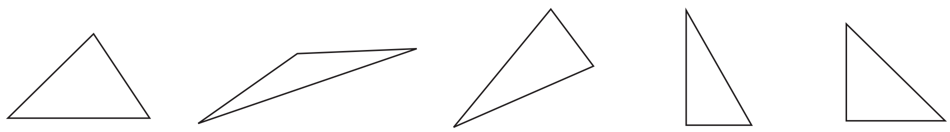


图 8-1

“有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.”这一简短的语句既说明了等腰三角形是三角形的一类，又指出了等腰三角形区别于其他三角形的本质特征. 我们把它叫做等腰三角形的定义.

一般地，用来说明一个名词或者一个术语的意义的语句叫做**定义**（definition）.

议一议

你在数学课上学过哪些定义？你能说明定义有哪些作用吗？与同伴进行交流.

定义实际上就是一种规定. 例如，“大于直角而小于平角的角叫做钝角.”这个定义规定了凡是大于直角而小于平角的角都是钝角，反过来，凡是钝角都大于直角而小于平角. 这个定义既可以作为钝角的一种判定方法——凡是大于直角而小于平角的角都可“判定”为钝角，又可以作为钝角的性质——钝角都大于直角而小于平角.

过去我们还学习过数、式和图形的一些性质. 例如，

（1）如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$；

（2）对顶角相等；

（3）如果 a，b，c 是三角形的三条边的长，并且 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形；

（4）如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

上面给出的语句都是对某件事情进行判断的句子. 判断一件事情的句子，叫做**命题**（statement）.

反之，如果一个句子没有对某一件事情作出任何判断，那么它就不是命题. 例如，下列句子都不是命题：

（1）平行用符号“//”表示；

（2）作线段 $AB=CD$；

（3）$\angle A=90°$ 吗？

随堂练习

1. 说出它们的定义：

（1）角；　（2）角的平分线；　（3）数轴；　（4）一元一次方程.

2. 分别说出两个语句，其中一个是命题，另一个不是命题.

习题 8.1

数学理解

1. 根据线段的垂直平分线的定义，说一说：

（1）线段的垂直平分线的一种判定方法；

（2）线段的垂直平分线的两个性质.

2. 下列语句中，哪些是命题？

（1）三个角分别相等的两个三角形一定全等；

（2）锐角都小于直角；

（3）你的作业做完了吗？

（4）所有的质数都是奇数；

（5）过直线 l 外一点 P 作 l 的平行线；

（6）如果明天是星期五，那么后天是星期六.

议一议

观察下列命题：

（A）如果两个三角形的三条边分别相等，那么这两个三角形全等；

（B）如果 $a=b$，那么 $a^2=b^2$；

（C）如果一个三角形是等腰三角形，那么这个三角形的两个底角相等；

（D）如果两个三角形中有两边和一个角分别相等，那么这两个三角形全等；

（E）如果两个角是内错角，那么它们相等.

（1）你发现这些命题的结构有什么共同特征？与同伴进行交流.

（2）这些命题中，哪些命题是正确的？哪些命题是不正确的？

命题通常由**条件**（condition）和**结论**（conclusion）两部分组成. 条件是已知的事项，结论是由已知事项推断出的事项. 一般地，命题都可以写成“如果……那么……”的形式，其中“如果”引出的部分是条件，“那么”引出的部分是结论.

在上面的命题中，（A），（B），（C）都是正确的. 正确的命题叫做**真命题**（true statement）. 对于真命题来说，当条件成立时，结论一定成立. 命题（D）和（E）都是不正确的. 不正确的命题叫做**假命题**（false statement）. 对于假命题来说，当条件成立时，不能保证结论一定成立.

要判断一个命题是假命题，只要能够举出一个例子，使之具备命题的条件，而不具有命题的结论，就可以说明这一命题是假命题，这种例子通常称为**反例**（counter example）.

想一想

你能举出一个反例，说明“相等的角是对顶角”是假命题吗？试试看.

例 说出下列命题的条件和结论，指出它是真命题还是假命题：

（1）面积相等的两个三角形全等；

（2）同角的补角相等；

（3）两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.

解：（1）先把这个命题写成“如果……那么……”的形式：如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等.

条件：两个三角形的面积相等；

结论：这两个三角形全等.

它是假命题.

（2）原命题可以写成：如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等.

条件：两个角是同一个角的补角；

结论：这两个角相等.

它是真命题.

（3）原命题可以写成：如果两个三角形有两角分别相等且其中一组等角的对边相等，那么这两个三角形全等.

条件：两个三角形有两角分别相等且其中一组等角的对边相等；

结论：这两个三角形全等.

它是真命题.

随堂练习

1. 将下列命题写成“如果……那么……”的形式，分别说出它的条件和结论，并指出它是真命题还是假命题：

（1）在同一平面内，垂直于同一直线的两条直线平行；

（2）两个锐角的和是钝角；

（3）同旁内角互补，两直线平行；

（4）负数小于0.

2. 下列命题中哪些是假命题？为什么？

（1）如果 $\frac{x-5}{2}=\frac{3-x}{3}$，那么 $x=4$；

（2）各边分别相等的两个多边形一定全等；

（3）如果 $a\neq0$，$b\neq0$，那么 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2$.

习题 8.2

数学理解

1. 分别指出下列命题的条件和结论，并指出它是真命题还是假命题：

（1）如果两个三角形的两边及其夹角分别相等，那么这两个三角形全等；

（2）直角三角形的两个锐角互余；

（3）两直线平行，同位角相等.

2. 指出下列命题是真命题还是假命题. 如果是假命题，举出一个反例.

（1）如果 a 为实数，那么 $|a|>0$；

（2）一个三角形中至少有两个锐角；

（3）如果 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余，$\angle\beta$ 与 $\angle\gamma$ 互余，那么 $\angle\alpha$ 与 $\angle\gamma$ 也互余.

2 证明的必要性

小明任意画了几个三角形，用量角器分别测量各三角形内角的度数，然后把三个角度加起来，发现每个三角形的内角的和都是 180°. 于是他就得出了一个一般性的结论：三角形三个内角的和等于 180°.

小颖对小明的做法提出了异议：你怎么知道你的结论一定可靠呢？三角形有无数多个，你才测量了几个三角形？即使测量几千个、几万个，也只是很小的一部分，怎么能从这很小一部分的性质推出所有三角形的性质呢？再说，你的测量不可能没有误差，你怎么能确定三角形的内角和正好是 180°，而不是 181° 或 179° 呢？

在数学学习中，我们可以通过实验、归纳、观察、猜测等方法，得到数学命题. 你是否想过，通过这些方法得到的命题一定是真命题吗？

做一做

（1）当 $n=0$，1，2，3，4 时，代数式 n^2-n+11 的值是质数还是合数？小明由此得出一个命题：对于所有自然数 n，n^2-n+11 的值都是质数. 你认为小明得出的命题是真命题吗？为什么？与同伴进行交流.

（2）小刚发现 $2>\frac{1}{2}$，$3>\frac{1}{3}$，$4>\frac{1}{4}$，…，由此得出一个命题：任何一个整数都大于它的倒数. 你认为小刚得出的命题正确吗？为什么？与同伴进行交流.

（3）小颖在一张纸上画出一条直线，这条直线把纸面分为 2 部分；她在纸上又画出一条直线，发现这两条直线最多可以把纸面分为 4 部分. 于是她猜想：“三条直线最多可以把一个平面分为 6 部分.”小明则认为：“三条直线最多可以把一个平面分为 7 部分.”你认为谁的说法是正确的？为什么？与同伴进行交流.

要判断一个命题是不是真命题，仅仅依靠经验、观察、实验和猜想是不够的，必须一步一步、有根有据地进行推理. 推理的过程就是**证明**（p oof）.

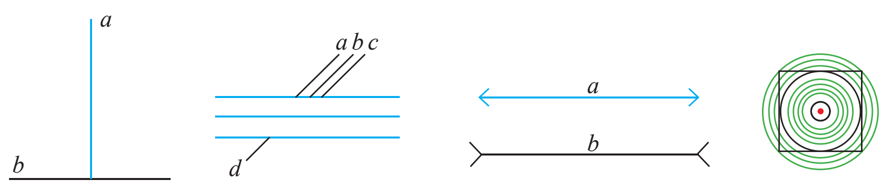
议一议

（1）在数学学习中，你用到过推理吗？举例说明.

（2）在日常生活中，你用到过推理吗？举例说明.

随堂练习

1.（1）图（1）中两条线段 a 与 b 的长度相等吗？请你先观察，再度量一下.



（1）　（2）　（3）　（4）

（第 1 题）

（2）图（2）中三条线段 a，b，c，哪一条和线段 d 在同一条直线上？请你先观察，再用直尺验证一下.

（3）图（3）中两条线段 a 与 b 的长度相等吗？

（4）图（4）中的四边形是正方形吗？

2. 小明在计算 $(a+b)^2$ 时，以为 $(a+b)^2=a^2+b^2$，发现不对，后来学习了 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 后，他又猜想：$(a+b)^3=a^3+3ab+b^3$. 小明的猜想正确吗？

3. 当 n 为正整数时，n^2+3n+1 的值一定是质数吗？

读一读

费马的失误


费马

历史上，很多数学家都想找到求质数的公式. 1640 年，数学家费马（Pierre de Fermat，1601—1665）验证了当 $n=0$，1，2，3，4 时，式子

$$2^{2^n}+1$$

的值 3，5，17，257，65 537 都是质数，于是他高兴地断言：“对于所有的自然数 n，$2^{2^n}+1$ 的值都是质数.”由于费马在数学界的崇高威望，以及验证这类数字是否为质数的艰巨性，因此在很长一段时间里没有人怀疑这一结论的正确性，并且把这类数称为费马数.

1732 年，数学家欧拉（Euler，1707—1783）指出，当 $n=5$ 时，$2^{2^n}+1=4\,294\,967\,297=641\times6\,700\,417$，从而否定了费马的结论. 更有意思的是，从第 6 个费马数开始，数学家们在费马数中再也没有发现一个新的质数，全都是合数. 有人甚至给出一个新的猜想：当 $n\geqslant5$ 时，费马数全都是合数！

习题 8.3

数学理解

1. 七（1）班有 39 位同学，他们每人将自己的学号作为 n 的取值（$n=1$，2，3，…，39）代入式子 n^2+n+41，结果发现式子 n^2+n+41 的值都是质数，于是他

们猜想：“对于所有的自然数，式子 n^2+n+41 的值都是质数.”

你认为这个猜想正确吗？验证一下 $n=40$ 的情形.

2. 观察下列各式：

$1=1^2-0^2$,

$3=2^2-1^2$,

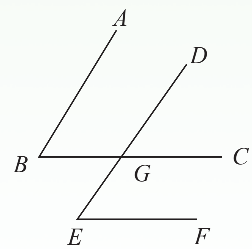
$5=3^2-2^2$,

$7=4^2-3^2$,

…

你能否得到结论：对于所有奇数，都可以表示为两个自然数的平方差？对于偶数，也能表示为两个自然数的平方差吗？与同伴进行交流.

3. 如图，$AB /\!/ DE$，$BC /\!/ EF$，那么你能判断 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 的大小关系吗？小颖据此得出结论：如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等. 你认为她的想法正确吗？与同伴进行交流.



（第 3 题）

3 基本事实与定理

如何通过推理的方法证实一个命题是真命题呢？

在数学发展史上，数学家们也遇到过类似的问题. 公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得（Euclid，约前 330—约前 275）编写了《原本》(Elements）一书，将前人积累下来的丰富的几何学成果整理在系统的逻辑体系之中. 他挑选了一部分数学名词和一部分公认的真命题作为证实其他命题的出发点和依据，定义出其他有关的概念，并运用推理的方法，证实了数百个有关的命题，使几何学成为一门具有公理化体系的科学.


欧几里得

通过长期实践总结出来，并且被人们公认的真命题叫做**公理**[1]（axiom）. 除了公理外，其他真命题的正确性都通过推理的方法证实. 经过证明的真命题叫做**定理**（theorem）.

本教科书选用九条基本事实作为证明的出发点和依据，我们已经认识了其中的八条，它们是：

1. 两点确定一条直线.

2. 两点之间线段最短.

3. 同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

4. 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

5. 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

6. 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

7. 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.

8. 三边分别相等的两个三角形全等.

另外一条基本事实我们将在后面的学习中认识它.

在证明命题时，等式的有关性质和后面将要学习的不等式的有关性质都可以作为推理的依据. 例如，“在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来代替”，简称为**“等量代换”**.

利用上面这些证明的出发点，我们就可以证明已经探索过的结论了.

例 已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1+\angle 3=180^\circ$，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$.

求证：$\angle 3=\angle 4$.

证明：$\because$[2] $\angle 1+\angle 3=180^\circ$，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$（已知），

$\therefore \angle 3=180^\circ-\angle 1$，$\angle 4=180^\circ-\angle 2$（等式的基本性质）.

$\because \angle 1=\angle 2$（已知），

$\therefore \angle 3=\angle 4$（等式的基本性质）.

---

❶ 公认的真命题称为公理. 《原本》中有“公理”与“公设”之分，近代数学对此不再区分，都称“公理”.

❷ 符号“$\because$”读作“因为”，“$\therefore$”读作“所以”.

通过例题，我们得到了定理：

定理 同角（等角）的补角相等.

证明一个命题的正确性，要按“已知”“求证”“证明”的顺序和格式写出. 其中“已知”是命题的条件，“求证”是命题的结论，而“证明”则是由条件（已知）出发，根据已给出的定义、基本事实和已经证明的定理，经过一步一步的推理，最后证实结论（求证）的过程.

随堂练习

1. 你认为基本事实和定理有哪些相同点和不同点？
2. 证明：**同角（等角）的余角相等.**[1]

读一读

《原本》与《几何原本》

几何学（Geometry）是数学中最古老的分支之一. 公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得在前人积累的大量成果的基础上，搜集了当时所知道的几何事实，选择出他认为学生应该学习的内容，然后按照逻辑要求（逻辑要求，就是指一方面要有“定义、公理、定理”的形式，另一方面定理要写出“证明”，而“证明”所需的定义、公理和其他定理，都必须编写在这个定理的前面，也就是通常所说的“前因后果”的次序），整理成一部具有公理化体系的数学巨著《原本》.《原本》是用逻辑推理建立起演绎体系的最早典范.

1582 年，意大利人利玛窦到我国传教，带来了 15 卷本的《原本》. 1600 年，明代数学家徐光启（1562—1633）与利玛窦相识后，便经常来往. 1607 年，他们把该书的前 6 卷平面几何部分合译成中文，并定名为《几何原本》. 后 9 卷是 1857 年由我国清代数学家李善兰（1811—1882）和英国人伟烈亚历译完的.

《原本》是至今流传最广、影响最大的一部世界数学名著，它对数学及其他科

[1] 本教科书在随堂练习、习题中用黑体字给出的结论也可以作为今后证明的依据.

学乃至人类的思想所产生的巨大推动作用是其他著作无法取代的. 1687 年牛顿在撰写《自然哲学的数学原理》时就曾受到过《原本》的启迪. 有人说，进化论乃至美国的独立宣言，都深受欧几里得方法的影响. 甚至于，几百年前有的哲学家在自己的著作中也曾设法引用从定义、公理导出定理的形式进行论证.

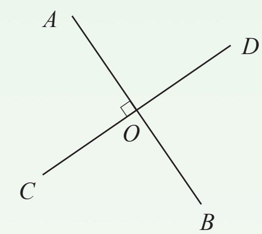
欧几里得的《原本》为人们提供了一种研究问题的方法（称为公理化方法），标志着人类思维的一场革命，是科学思想史上的一个里程碑.

习题 8.4

知识技能

1. 已知：如图，直线 AB 和 CD 相交于点 O，且 $\angle AOC$ 是直角.

求证：$\angle COB$，$\angle BOD$，$\angle DOA$ 都是直角.



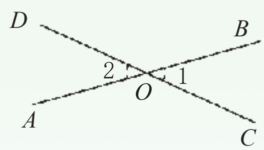
（第 1 题）

数学理解

2. 证明：对顶角相等.

已知：如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角.

求证：$\angle 1=\angle 2$.



（第 2 题）

联系拓广

3. A，B，C，D，E 五名学生猜测自己的数学成绩.

A 说：“如果我得优，那么 B 也得优.”

B 说：“如果我得优，那么 C 也得优.”

C 说：“如果我得优，那么 D 也得优.”

D 说：“如果我得优，那么 E 也得优.”

大家都没有说错. 如果 A 得优，那么他们之中有几人得优？如果 C 得优，那么他们之中至少有几人得优？

4 平行线的判定定理

前面我们探索过哪些两条直线平行的判别条件？利用“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行”（简述为“同位角相等，两直线平行”）这个基本事实，你能证明它们吗？

定理 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

这一定理可以简述为：**同旁内角互补，两直线平行**.

已知：如图 8-2，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a，b 被直线 c 截出的同旁内角，且 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补.

求证：$a/\!/b$.

证明： $\because \angle 3+\angle 2=180^{\circ}$（平角的定义），

$\therefore \angle 3$ 是 $\angle 2$ 的补角（互补的定义）.

$\because \angle 1$ 是 $\angle 2$ 的补角（已知），

$\therefore \angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）.

$\therefore a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.

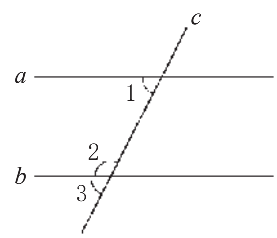


图 8-2

议一议

小明利用两块同样的三角板，按下面的方法作出了平行线. 你认为他的作法对吗？为什么？

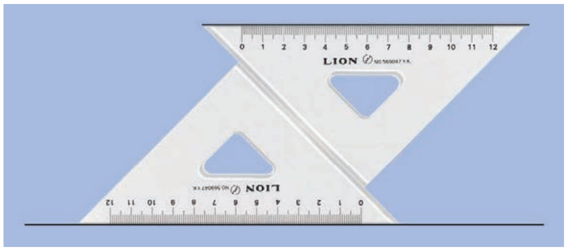


图 8-3

定理 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

这一定理可以简述为：**内错角相等，两直线平行**.

已知：如图 8-4，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a，b 被直线 c 截出的内错角，且 $\angle 1=\angle 2$.

求证：$a /\!/ b$.

证明： $\because \angle 1=\angle 2$（已知），

$\angle 1+\angle 3=180^\circ$（平角的定义），

$\therefore \angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）.

$\therefore \angle 2$ 与 $\angle 3$ 互补（互补的定义）.

$\therefore a /\!/ b$（同旁内角互补，两直线平行）.

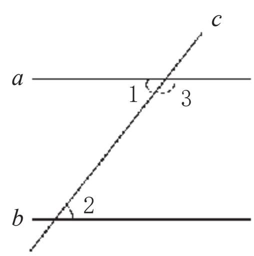


图 8-4

想一想

借助“同位角相等，两直线平行”这一基本事实，你能证明上面的定理吗？

随堂练习

1. 如图，下列推理是否正确？为什么？

（1）$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore l_1 /\!/ l_2$；

（2）$\because \angle 4+\angle 5=180^\circ$，

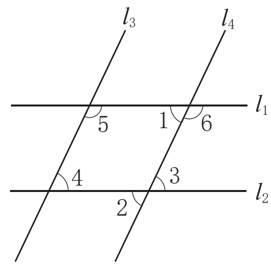
$\therefore l_3 /\!/ l_4$；

（3）$\because \angle 2=\angle 4$，

$\therefore l_3 /\!/ l_4$；

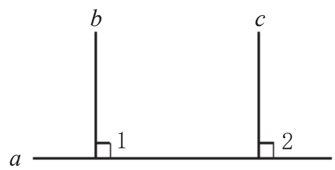
（4）$\because \angle 3+\angle 6=180^\circ$，

$\therefore l_1 /\!/ l_2$.



（第 1 题）

2. 如图，已知直线 $b \perp a$，$c \perp a$，那么直线 b 与 c 平行吗？如果平行，请给出证明；如果不平行，请举出反例.



（第 2 题）

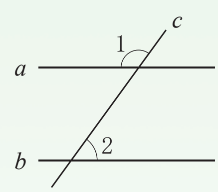
习题 8.5

知识技能

1. 已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，且 $\angle 1+\angle 2=180^\circ$.

求证：$a /\!/ b$.

你有几种证明方法？

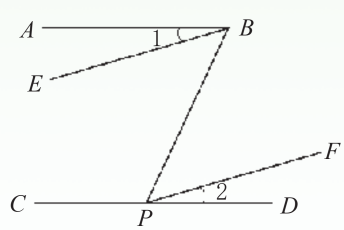


（第 1 题）

数学理解

2. 已知：如图，BP 交 CD 于点 P，$\angle ABP+\angle BPC=180^\circ$，$\angle 1=\angle 2$.

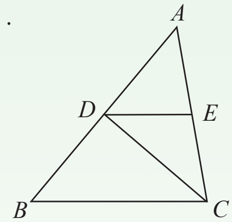
求证：$EB /\!/ PF$.



（第 2 题）

3. 已知：如图，CD 平分 $\angle ACB$，$\angle DCB=40^\circ$，$\angle AED=80^\circ$.

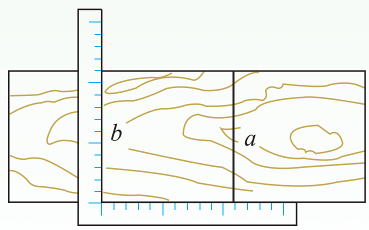
求证：$DE /\!/ BC$.



（第 3 题）

问题解决

4. 如图，木工师傅经常用一把直角尺画出两条平行的直线 a 和 b. 你知道这样做的道理吗？



（第 4 题）

5 平行线的性质定理

我们已经探索过平行线的性质，下面证明它们.

定理 两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

已知：如图 8-5，直线 $AB /\!/ CD$，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB，CD 被直线 EF 截出的同位角.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

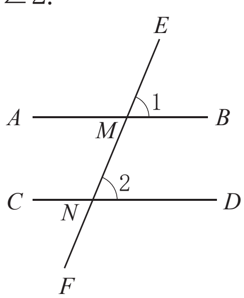
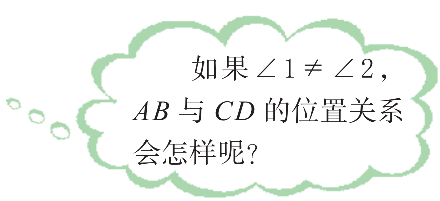


图 8-5



*证明：如果 $\angle 1 \neq \angle 2$，那么我们可以过点M作直线GH，使$\angle EMH=\angle 2$，如图 8–6 所示.

根据同位角相等，两直线平行，可得到 $GH /\!/ CD$.

又因为 $AB /\!/ CD$，这样经过点 M 存在两条直线 AB 和 GH 都与直线 CD 平行.

这与“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”这个基本事实相矛盾.

这说明假设$\angle 1 \neq \angle 2$是不成立的，所以$\angle 1=\angle 2$.

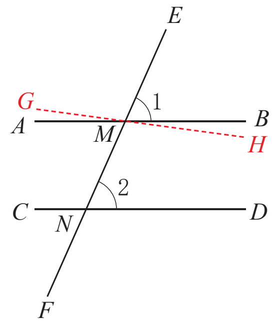


图 8–6

这一定理可以简述为：**两直线平行，同位角相等.**

利用上面的定理，我们可以证明如下结论：

定理　两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

这一定理可以简述为：**两直线平行，内错角相等.**

想一想

（1）根据上述定理的文字叙述，你能作出相关图形吗？

（2）你能根据所作的图形写出已知、求证吗？

（3）你能说说证明的思路吗？

已知：如图 8–7，直线 $a /\!/ b$，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a，b 被直线 c 截出的内错角.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明：$\because a /\!/ b$（已知），

$\therefore \angle 3=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

$\because \angle 1=\angle 3$（对顶角相等），

$\therefore \angle 1=\angle 2$（等量代换）.

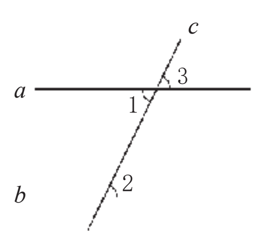


图 8–7

类似地，还可以证明：

定理　两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补.

这一定理可以简述为：**两直线平行，同旁内角互补**.

做一做

已知：如图 8−8，直线 $a /\!/ b$，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a，b 被直线 c 截出的同旁内角.

求证：$\angle 1+\angle 2=180^{\circ}$.

请你写出证明过程.

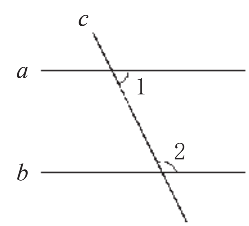


图 8−8

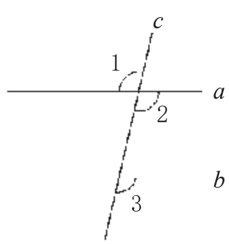
议一议

你能说说命题证明的一般步骤吗？

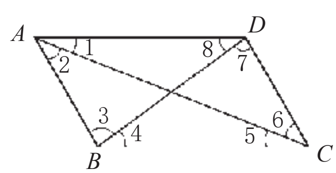
随堂练习

1. 已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，且 $a /\!/ b$.

求证：$\angle 1=\angle 3$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，按照题目中给出的条件，补全结论，并给出证明：

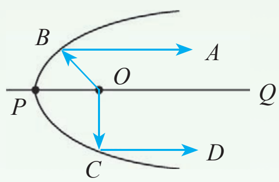
（1）已知 $AD /\!/ BC$，可以推出哪些角相等？

（2）已知 $AB /\!/ DC$，可以推出哪些角的和是 180°？

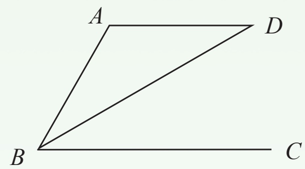
习题 8.6

知识技能

1. 探照灯以及其他很多灯具都与抛物线有关. 如图，从点O照射到抛物线上的光线OB，OC等反射以后沿着与POQ平行的方向射出. 图中如果$\angle BOP=45^\circ$，$\angle QOC=88^\circ$，那么$\angle ABO$和$\angle DCO$各是多少度?



（第 1 题）



（第 2 题）

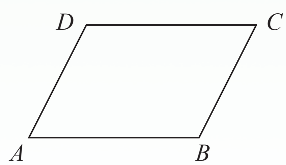
2. 已知：如图，$AD /\!/ BC$，$\angle ABD=\angle D$.

求证：BD平分$\angle ABC$.

数学理解

3. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$AD /\!/ BC$.

求证：$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.



（第 3 题）

6 三角形内角和定理

我们知道，三角形三个内角的和等于 180°. 你还记得这个结论的探索过程吗?

（1）如图 8-9，当时，我们是把$\angle A$撕下后移到了$\angle 1$的位置，推

出 b 与 a 平行，通过以 C 为顶点的三个角的和是 180° 探索出这个结论的. 如果不撕下 $\angle A$，那么你能通过作图的方法达到移动 $\angle A$ 的效果吗？

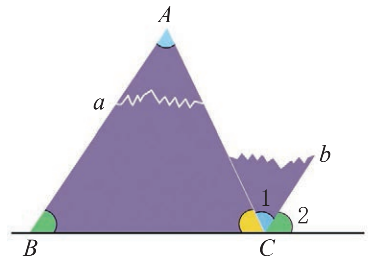


图 8-9

（2）根据前面给出的基本事实和定理，你能用自己的语言说说这一结论的证明思路吗？你能用比较简洁的语言写出这一证明过程吗？与同伴进行交流.

已知：如图 8-10，$\triangle ABC$ 是任意一个三角形.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

分析： 受图 8-9 的启发，我们可以以点 C 为顶点，以 CA 为一边在三角形外部作 $\angle 1=\angle A$，再作 BC 的延长线，得到平角 $\angle BCD$（如图 8-11）. 可以证明 $\angle ECD=\angle B$. 由此说明上述猜想是正确的.

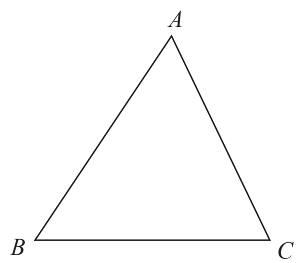


图 8-10

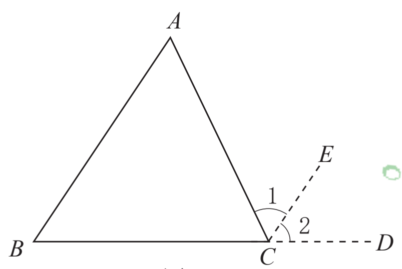


图 8-11

证明： 作 BC 的延长线 CD，在 $\triangle ABC$ 的外部，以 CA 为一边，作 $\angle ACE=\angle A$（如图 8-11）. 于是，$CE /\!/ BA$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 2=\angle B$（两直线平行，同位角相等）.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle ACB=180^\circ$（平角的定义），

$\therefore \angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$（等量代换）.

三角形内角和定理 三角形三个内角的和等于 180°.

议一议

（1）在证明三角形内角和定理时，小明的想法是把三个角“凑”到顶点 A 处，他过点 A 作直线 $PQ/\!/BC$（如图 8-12）. 他的想法可行吗？如果可行，你能写出证明过程吗？

（2）你还能用其他方法证明三角形内角和是 $180°$ 吗？与同伴进行交流.

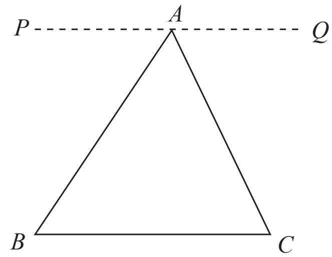


图 8-12

例 1 如图 8-13，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ABC=38°$，$\angle ACB=62°$，AD 平分 $\angle BAC$. 求 $\angle ADB$ 的度数.

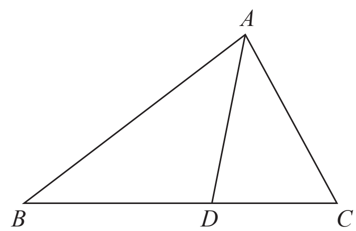


图 8-13

解： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B+\angle C+\angle BAC=180°$.

$\because \angle B=38°$，$\angle C=62°$，

$\therefore \angle BAC=80°$.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=40°$.

在 $\triangle ADB$ 中，$\angle B+\angle BAD+\angle ADB=180°$.

$\because \angle B=38°$，$\angle BAD=40°$，

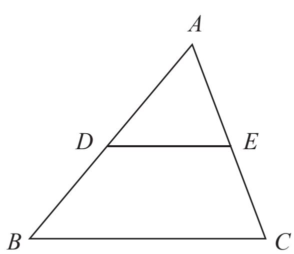
$\therefore \angle ADB=102°$.

随堂练习

1. 证明：**直角三角形的两个锐角互余.**

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE/\!/BC$，$\angle A=60°$，$\angle C=70°$.

求证：$\angle ADE=50°$.



（第 2 题）

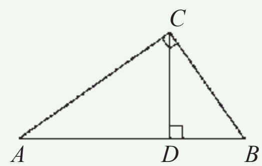
习题 8.7

知识技能

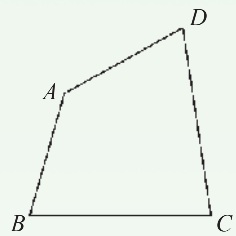
1. 证明：**有两个角互余的三角形是直角三角形.**

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为点 D.

求证：$\angle A=\angle DCB$.



（第 2 题）



（第 3 题）

数学理解

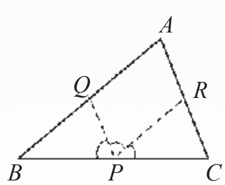
※**3.** 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是任意一个四边形.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$.

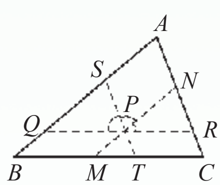
本题实际上证明了如下结论：**四边形的内角和等于 360°.**

联系拓广

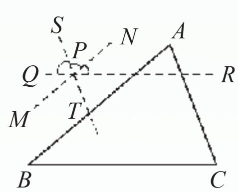
※**4.** 在证明三角形内角和定理时，是否可以把三角形的三个角“凑”到 BC 边上的一点 P 处（如图（1））？如果把三个角“凑”到三角形内的一点 P 处呢（如图（2））？如果“凑”到三角形外的一点 P 处呢（如图（3））？你还能想出其他证法吗？



（1）



（2）



（3）

（第 4 题）

$\triangle ABC$ 内角的一条边与另一条边的反向延长线组成的角，称为$\triangle ABC$ 的**外角**. 如图 8－14，$\angle 1$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角. 你能在图中画出$\triangle ABC$ 的其他外角吗?

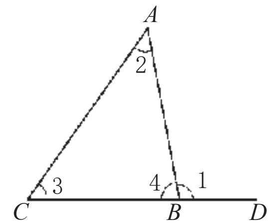


图 8－14

议一议

$\angle 1$ 与图中的其他角有什么关系? 能证明你的结论吗? 与同伴进行交流.

定理 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

定理 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.

上面这两个定理是由三角形内角和定理直接推导出来的. 像这样，由一个基本事实或定理直接推出的真命题，叫做这个基本事实或定理的**推论**（corollary）. 推论可以当作定理使用.

例2 已知：如图 8－15，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，AD 平分外角$\angle EAC$.

求证：$AD /\!/ BC$.

分析： 要证明 $AD /\!/ BC$，只需证明“同位角相等”，或“内错角相等”，或“同旁内角互补”.

证明： $\because \angle EAC=\angle B+\angle C$（三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和），

$\angle B=\angle C$（已知），

$\therefore \angle C=\frac{1}{2}\angle EAC$（等式的基本性质）.

$\because AD$ 平分$\angle EAC$（已知），

$\therefore \angle DAC=\frac{1}{2}\angle EAC$（角平分线的定义）.

$\therefore \angle DAC=\angle C$（等量代换）.

$\therefore AD /\!/ BC$（内错角相等，两直线平行）.

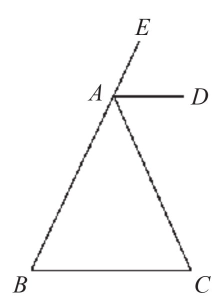


图 8－15

想一想

对于例 2，你还有其他证明方法吗?

例 3 已知：如图 8−16，$\angle BAF$，$\angle CBD$，$\angle ACE$ 是$\triangle ABC$ 的三个外角.

求证：$\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$.

证明： $\because \angle BAF$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角（已知），

$\therefore \angle BAF=\angle 2+\angle 3$（三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和）.

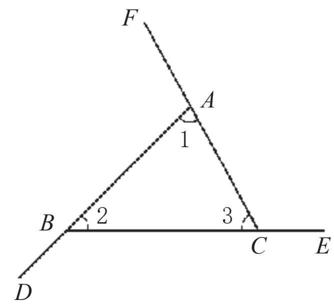


图 8−16

同理，$\angle CBD=\angle 1+\angle 3$，$\angle ACE=\angle 1+\angle 2$.

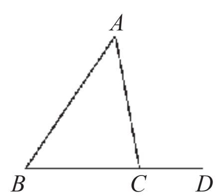
$\therefore \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$（等式的基本性质）.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（三角形内角和定理），

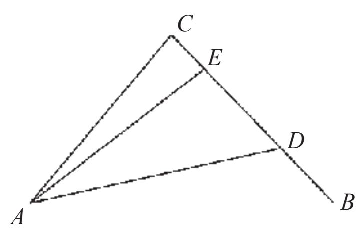
$\therefore \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=2\times 180^\circ=360^\circ$（等量代换）.

随堂练习

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45^\circ$，外角$\angle ACD=100^\circ$. 求$\angle B$ 和$\angle ACB$ 的大小.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，填空：

（1）$\angle ADE=\angle B+\angle$______；$\angle ADB=\angle C+\angle$______$=\angle AED+\angle$______.

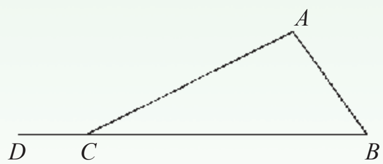
（2）用 “>” 或 “<” 填空：

$\angle AEC$______$\angle ADE$；$\angle AEC$______$\angle B$.

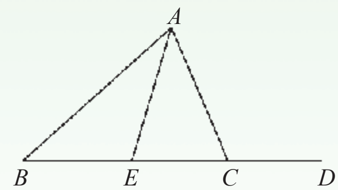
习题 8.8

知识技能

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=2\angle B$，外角$\angle ACD=150^\circ$，求$\angle B$的度数.



（第 1 题）

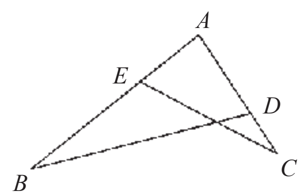


（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=40^\circ$，AE是$\angle BAC$的平分线，外角$\angle ACD=110^\circ$. 求$\angle AEC$的度数.

数学理解

3. 如图，已知点D，E分别在AC，AB上，如果$\angle B=\angle C$，那么除对顶角外，图中还有哪些角分别相等？证明你的结论.



（第 3 题）

已知：如图 8−17，五角星形的顶角分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ$.

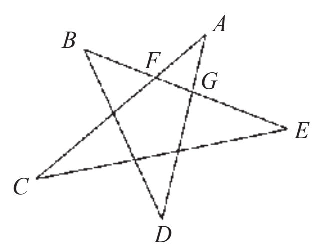


图 8−17

证明： $\because \angle AFG$是$\triangle FCE$的一个外角（外角的定义），

$\therefore \angle AFG=\angle C+\angle E$（三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和）.

同理，$\angle AGF=\angle B+\angle D$.

$\because$在$\triangle AFG$中，$\angle A+\angle AFG+\angle AGF=180^\circ$（三角形内角和定理），

$\therefore \angle A+\angle C+\angle E+\angle B+\angle D=180^\circ$（等量代换）.

由此可知，五角星形五个顶角的和等于180°.

议一议

在证明五角星形五个顶角的和等于180°时，小明想通过连接 CD，把五个角“凑”到$\triangle ACD$内. 他的想法可行吗？与同伴进行交流.

例 4 已知：如图 8-18，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$ 是它的一个外角，E 为边 AC 上的一点，延长 BC 到点 D，连接 DE.

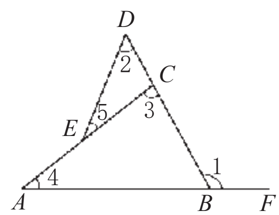


图 8-18

求证：$\angle 1>\angle 2$.

证明： $\because \angle 1$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角（已知），

$\therefore \angle 1>\angle 3$（三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角）.

$\because \angle 3$ 是 $\triangle CDE$ 的一个外角（外角的定义），

$\therefore \angle 3>\angle 2$（三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角）.

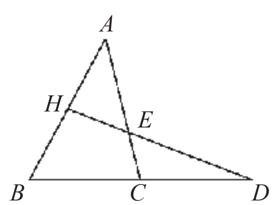
$\therefore \angle 1>\angle 2$.

随堂练习

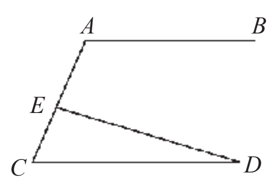
1. 如图，下列哪几种说法一定正确？

（1）$\angle B>\angle ACD$；（2）$\angle B+\angle ACB=180^\circ-\angle A$；

（3）$\angle B+\angle ACB<180^\circ$；（4）$\angle HEC>\angle B$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB /\!/ CD$.

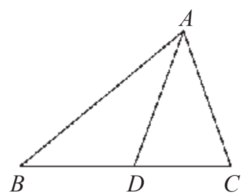
求证：$\angle CAB=\angle CED+\angle CDE$.

习题 8.9

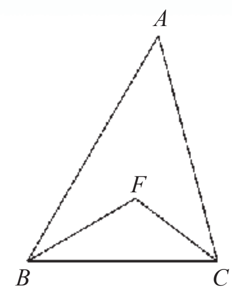
数学理解

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle DAC=\angle B$.

求证：$\angle ADC=\angle BAC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

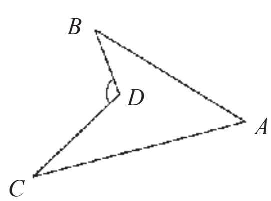
2. 如图，在$\triangle ABC$中，BF平分$\angle ABC$，CF平分$\angle ACB$，$\angle A=50^\circ$，求$\angle BFC$的大小.

联系拓广

3. 如图，求证：（1）$\angle BDC>\angle A$；

（2）$\angle BDC=\angle B+\angle C+\angle A$.

※如果点D在线段BC的另一侧，结论会怎样?



（第 3 题）

回顾与思考

1. 直观是重要的，但它有时也会欺骗人. 你能找到这样的例子吗？
2. 请用自己的语言说说什么是定义、命题，并举例说明.
3. 什么是真命题？什么是假命题？怎样判断一个命题是真命题还是假命题？
4. 请你用自己的语言说一说什么是基本实事、定理和推论. 本书中作为证明出发点的基本事实有哪些？
5. 为什么需要证明？请你用自己的语言说一说证明的基本步骤.
6. 什么条件下两条直线平行？两条直线平行又会怎样？这两类命题的条件和结论有什么关系？你会证明它们吗？
7. 三角形内角和定理怎么证明？三角形的外角与内角有什么关系？
8. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

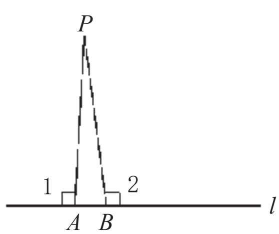
复习题

知识技能

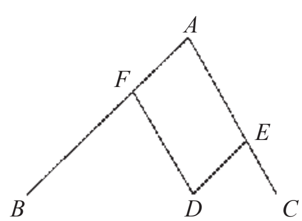
1. 小明画了一个图（如图），你能分别根据下面的基本事实或定理，说明他画的图是错误的吗？

（1）平行线的有关基本事实和定理；

（2）三角形内角和定理.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 请将下面证明中每一步的理由填在相应的括号内：

已知：如图，D，E，F 分别是 BC，CA，AB 上的点，$DE/\!/BA$，$DF/\!/CA$.

求证：$\angle FDE=\angle A$.

证明： $\because DE /\!/ BA$（　　　　　　　　），

$\therefore \angle FDE=\angle BFD$（　　　　　　　　）.

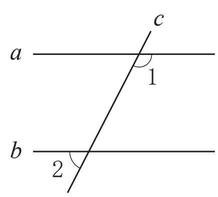
$\because DF /\!/ CA$　　　（　　　　　　　　），

$\therefore \angle BFD=\angle A$　　（　　　　　　　　）.

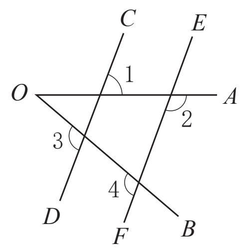
$\therefore \angle FDE=\angle A$　　（　　　　　　　　）.

3. 已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，且 $a /\!/ b$.

求证：$\angle 1+\angle 2=180^\circ$.



（第 3 题）

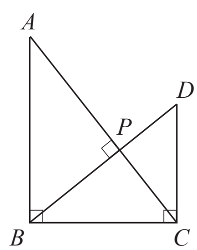


（第 4 题）

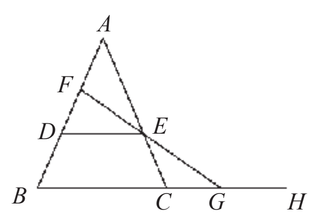
4. 已知：如图，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$.

求证：$\angle 3=\angle 4$.

5. 如图，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$AC\perp BD$. 如果 $\angle A=\alpha$，那么 $\angle ABP$ 和 $\angle PCD$ 分别等于多少？



（第 5 题）



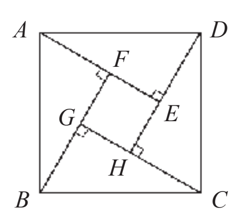
（第 6 题）

6. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，F 是 AB 上的一点，FE 的延长线交 BC 的延长线于点 G.

求证：$\angle EGH>\angle ADE$.

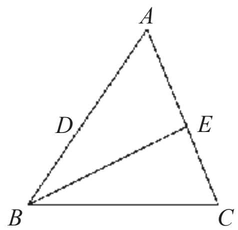
7. 如图是我国古代数学书中的一个重要图形，称为“弦图”，借助它可以证明勾股定理. 在弦图中，$AE\perp BF$，$BF\perp CG$，$CG\perp DH$，$DH\perp AE$.

求证：$AE /\!/ CG$，$BF /\!/ DH$. 你能想出几种证明方法？

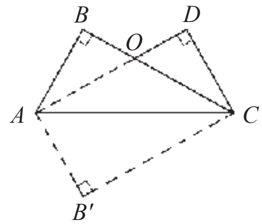


（第 7 题）

8. 如图，在△ABC 中，$DE/\!/BC$，$\angle DBE=30^\circ$，$\angle EBC=25^\circ$，求$\angle BDE$ 的度数.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 把长方形 $AB'CD$ 沿对角线 AC 折叠，得到如图所示的图形. 已知$\angle BAO=30^\circ$，求$\angle AOC$ 和$\angle BAC$ 的度数.

数学理解

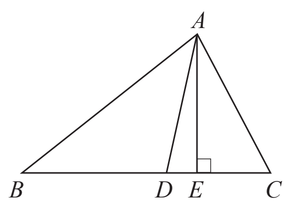
10. 回答下列问题：

（1）三角形的一个内角一定小于 180° 吗？一定小于 90° 吗？

（2）一个三角形中最多有几个直角？最多有几个钝角？

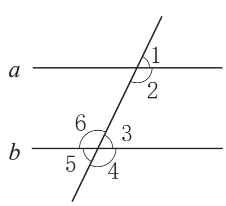
（3）一个三角形的最大角不会小于 60°，为什么？最小角不会大于多少度？

11. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC=40^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，AD 平分$\angle BAC$，$AE\perp BC$. 求$\angle DAE$ 的度数.



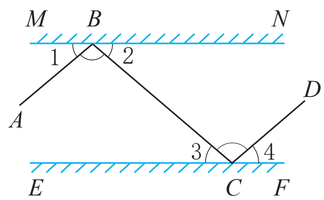
（第 11 题）

12. 如图，请利用$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$ 这 6 个角，写出能够证明 $a/\!/b$ 的条件（能写出几个就写几个）.



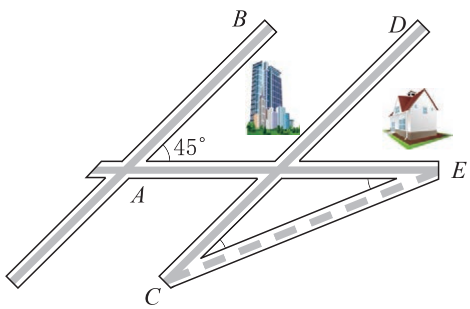
（第 12 题）

13. 如图，MN，EF 分别表示两面互相平行的镜面，一束光线 AB 照射到镜面 MN 上，反射光线为 BC，此时，$\angle 1=\angle 2$；光线 BC 经镜面 EF 反射后的反射光线为 CD，此时 $\angle 3=\angle 4$. 试判断 AB 与 CD 的位置关系，你是如何思考的？



（第 13 题）

14. 某城市几条道路的位置关系如图所示，道路 AB 与道路 CD 平行，道路 AB 与道路 AE 的夹角为 $45°$. 城市规划部门想新修一条道路 CE，要求 $\angle C=\angle E$，求 $\angle C$ 的度数.



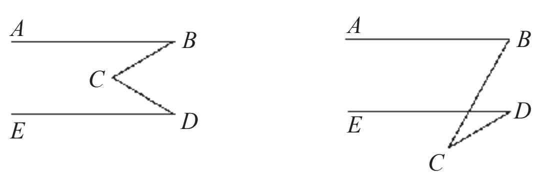
（第 14 题）

联系拓广

15.（1）已知：如图（1），直线 $AB/\!/ED$.

求证：$\angle ABC+\angle CDE=\angle BCD$；

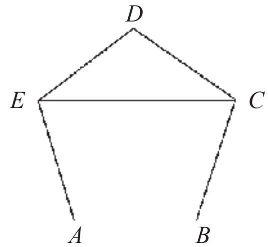
（2）如图（2），如果点 C 在 AB 与 ED 之外，其他条件不变，那么会有什么结果？你还能就本题作出什么新的猜想？



（1）　　（2）

（第 15 题）

16. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=\angle B$，$\angle BCD=\angle DEA$，并且$\angle CED=\angle ECD$. 你能判定 AB 与 EC 平行吗？为什么？



（第 16 题）

17. 证明：

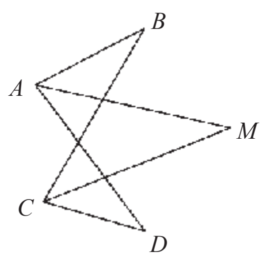
（1）五边形的内角和等于 540°；

（2）n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$.

18. 已知：如图，AM，CM 分别平分$\angle BAD$ 和$\angle BCD$.

（1）如果$\angle B=32^\circ$，$\angle D=38^\circ$，求$\angle M$ 的度数；

（2）求证：$\angle M=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.



（第 18 题）

第九章　概率初步

随机地经过一个路口，遇到红灯的可能性大还是遇到绿灯的可能性大？

你会用试验的方法估计一个事件发生的可能性大小吗？

在本章中，我们将进一步学习不确定事件及其发生可能性的大小，即随机事件及其概率. 掌握概率的知识和方法能帮助我们更好地作出决策.

学习目标

- 感受生活中的随机现象，并体会随机事件发生的可能性大小
- 通过试验感受随机事件发生的频率的稳定性，理解概率的意义
- 能求一些简单随机事件发生的概率，并能设计符合要求的简单概率试验
- 体会概率是描述随机现象的数学模型，发展数据分析观念

1 感受可能性

（1）随意投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数会是 10 吗？

（2）随意投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数一定不超过 6 吗？

（3）随意投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数一定是 1 吗？

在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定发生，这些事情称为**必然事件**. 例如，在掷骰子的试验中，“投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数不超过 6”就是一个必然事件. 有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这些事情称为**不可能事件**. 例如，“投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是 10”就是一个不可能事件. 必然事件与不可能事件统称为**确定事件**.

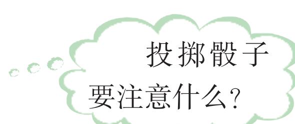
但是，也有许多事情我们事先无法肯定它会不会发生，这些事情称为**不确定事件**，也称为**随机事件**. 例如，“投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是 1”就是一个不确定事件.

议一议

举出生活中的几个确定事件和不确定事件.

做一做

利用均匀的骰子和同桌做游戏，规则如下：



（1）两人同时做游戏，各自投掷一枚骰子，每人可以只投掷一次骰子，也可以连续地投掷几次骰子；

（2）当掷出的点数和不超过 10 时，如果决定停止投掷，那么你的得分就

是所掷出的点数和；当掷出的点数和超过 10 时，必须停止投掷，并且你的得分为 0；

（3）比较两人的得分，谁的大谁就获胜.

多做几次上面的游戏，并将最终结果填入下表：

		第 1 次点数	第 2 次点数	第 3 次点数	…	得分
第一次游戏	甲				…	
	乙				…	
第二次游戏	甲				…	
	乙				…	
第三次游戏	甲				…	
	乙				…	
…	…	…	…	…	…	…

在做游戏的过程中，你是如何决定是继续投掷骰子还是停止投掷骰子的？与同伴进行交流.

议一议

在做游戏的过程中，如果前面掷出的点数和已经是 5，你是决定继续投掷还是决定停止投掷？如果掷出的点数和已经是 9 呢？

掷出的点数和已经是 5，根据游戏规则，再掷一次，如果掷出的点数不是 6，那么我的得分就会增加，而掷出的点数不是 6 的可能性要比是 6 的可能性大，所以我决定继续投掷.

掷出的点数和已经是 9，再掷一次，如果掷出的点数不是 1，那么我的得分就会变成 0，而掷出的点数是 1 的可能性要比不是 1 的可能性小，所以我决定停止投掷.

你认为小明和小颖的说法有道理吗？

一般地，不确定事件发生的可能性是有大有小的.

想一想

生活中有许多不确定事件，它们发生的可能性有大有小，你能举出几个例子吗？

随堂练习

1. 下列事件中，哪些是确定事件？哪些是不确定事件？

（1）将油滴入水中，油会浮在水面上；

（2）任意投掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是奇数.

2. 小明任意买一张电影票，座位号是 2 的倍数与座位号是 5 的倍数的可能性哪个大？

习题 9.1

知识技能

1. 下列事件中，哪些是确定事件？哪些是不确定事件？

（1）抛出的篮球会下落；

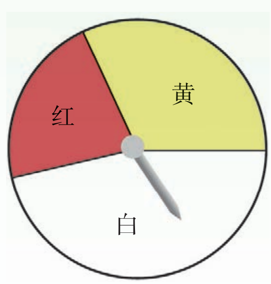
（2）打开电视机，正在播动画片；

（3）任意买一张电影票，座位号是 2 的倍数；

（4）早上的太阳从西方升起.

2. 一个袋中装有 8 个红球，2 个白球，每个球除颜色外都相同. 任意摸出一个球，摸到哪种颜色球的可能性大？说说你的理由.

3. 下图是一个可以自由转动的转盘，转动转盘，当转盘停止时，指针落在哪个区域的可能性大？先猜一猜，再试一试.



（第 3 题）

数学理解

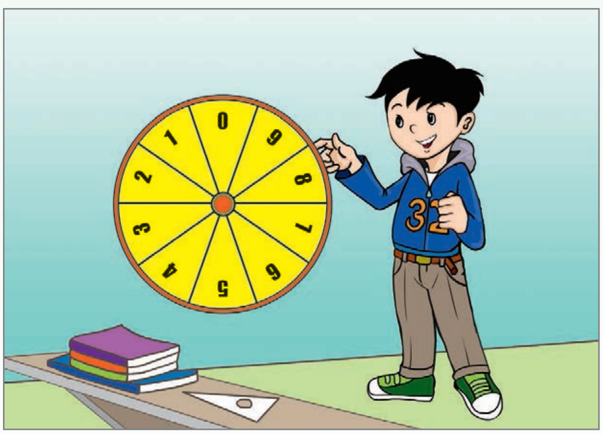
4. 下图表示各袋中球的情况，每个球除颜色外都相同．任意摸出一个球，请你按照摸到红球的可能性由大到小进行排列．

① ② ③ ④ ⑤

（第 4 题）

问题解决

5. 如图是一个可以自由转动的转盘，利用这个转盘与同桌做下面的游戏：



（第 5 题）

（1）自由转动转盘，每人分别将转出的数填入四个方格□□□□中的任意一个；

（2）继续转动转盘，每人再将转出的数填入各自剩下的任意一个方格中；

（3）各转动四次转盘后，每人得到一个“四位数”；

（4）比较两人得到的“四位数”，谁的大谁就获胜．

多做几次上面的游戏．在做游戏的过程中，你有哪些经验？

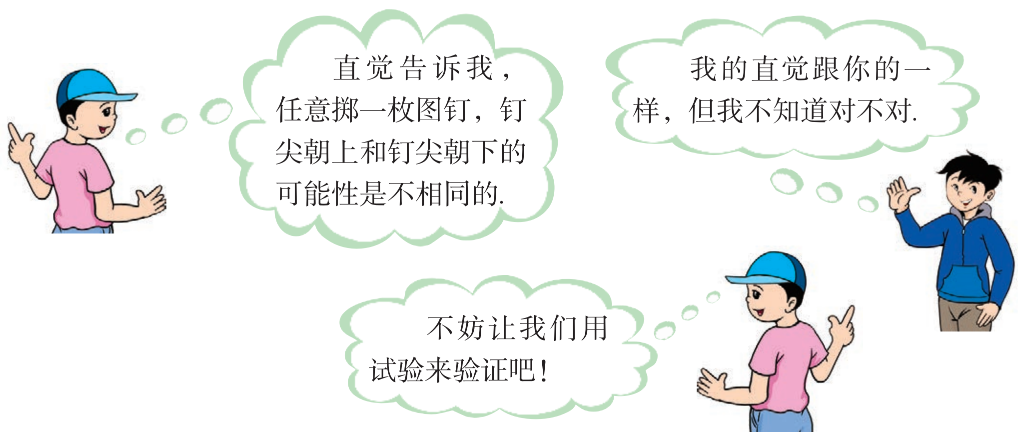
2 频率的稳定性

在地上抛掷一枚图钉，会出现两种情况：


钉尖朝上


钉尖朝下

你认为钉尖朝上和钉尖朝下的可能性一样大吗？



（1）两人一组做 20 次掷图钉的游戏，并将数据记录在下表中：

试验总次数	
钉尖朝上的次数	
钉尖朝下的次数	
钉尖朝上的频率（$\dfrac{\text{钉尖朝上的次数}}{\text{试验总次数}}$）	
钉尖朝下的频率（$\dfrac{\text{钉尖朝下的次数}}{\text{试验总次数}}$）	

在 n 次重复试验中，不确定事件 A 发生了 m 次，则比值 $\dfrac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率.

（2）累计全班同学的试验结果，并将试验数据汇总填入下表：

试验总次数 n	20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
钉尖朝上的次数 m											
钉尖朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

（3）根据上表，完成下面的折线统计图：

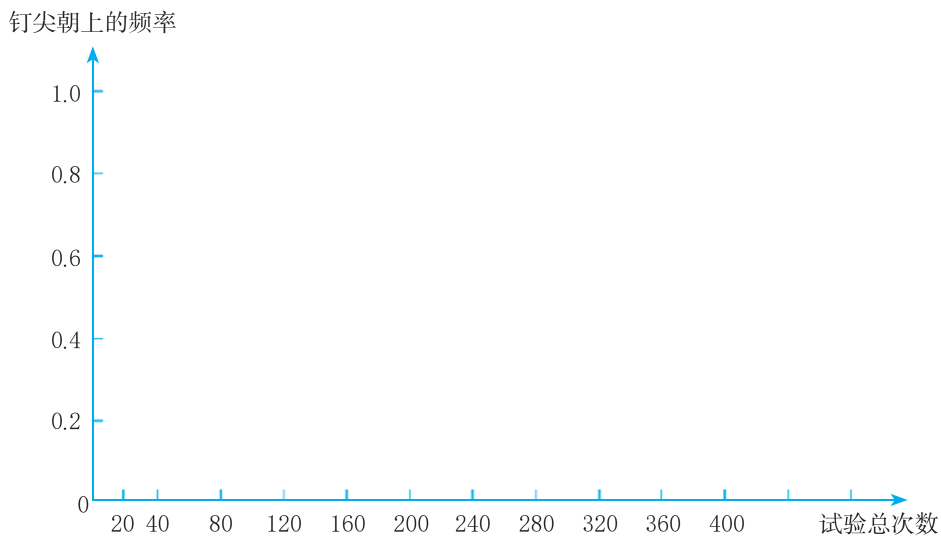


图 9-1

（4）观察上面的折线统计图，钉尖朝上的频率的变化有什么规律？

在试验次数很大时，钉尖朝上的频率会在一个常数附近摆动，即钉尖朝上的频率具有稳定性.

议一议

（1）通过上面的试验，你认为钉尖朝上和钉尖朝下的可能性一样大吗？你是怎么想的？

（2）小军与小凡一起做了 1 000 次掷图钉的试验，其中有 640 次钉尖朝上，据此，他们认为钉尖朝上的可能性比钉尖朝下的可能性大. 你同意他们的观点吗？

随堂练习

某射击运动员在同一条件下进行射击，结果如下表所示：

射击总次数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
击中靶心的次数 m	9	16	41	88	168	429	861
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$							

（1）完成上表；

（2）根据上表，画出该运动员击中靶心的频率的折线统计图；

（3）观察画出的折线统计图，该运动员击中靶心的频率的变化有什么规律？

习题 9.2

知识技能

1. 对某批产品的质量进行随机抽查，结果如下表所示：

随机抽取的产品数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
合格的产品数 m	9	19	47	93	187	467	935
合格率 $\frac{m}{n}$							

（1）完成上表；

（2）根据上表，画出产品合格率变化的折线统计图；

（3）观察上面的折线统计图，产品合格率的变化有什么规律？

数学理解

2. 抛掷一个如图所示的瓶盖，盖面朝上和盖面朝下的可能性是否一样大？怎样才能验证自己结论的正确性？

盖面朝上　　盖面朝下

抛掷一枚均匀的硬币，硬币落下后，会出现两种情况：

正面朝上

正面朝下

你认为正面朝上和正面朝下的可能性相同吗？

做一做

（1）同桌两人做 20 次掷硬币的游戏，并将数据记录在下表中：

试验总次数	
正面朝上的次数	
正面朝下的次数	
正面朝上的频率	
正面朝下的频率	

（2）累计全班同学的试验结果，并将试验数据汇总填入下表：

试验总次数	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
正面朝上的次数										
正面朝下的次数										
正面朝上的频率										
正面朝下的频率										

（3）根据上表，完成下面的折线统计图：

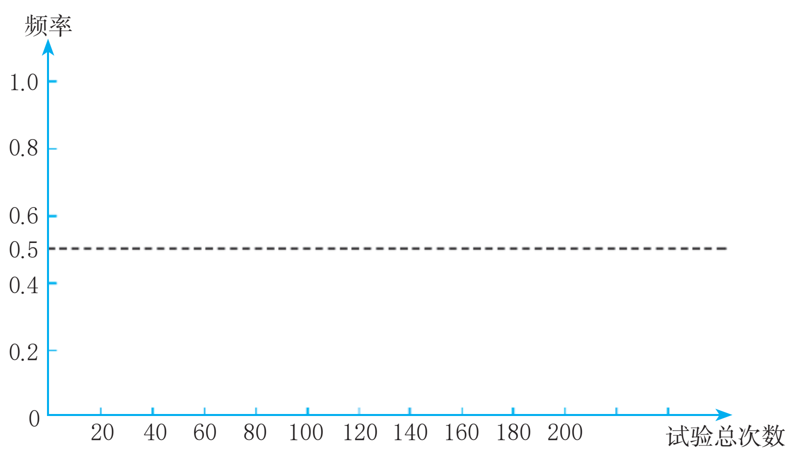


图 9-2

（4）观察上面的折线统计图，你发现了什么规律？

（5）下表列出了一些历史上的数学家所做的掷硬币试验的数据：

试验者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

表中的数据支持你发现的规律吗？

无论是抛掷均匀的硬币还是抛掷图钉，在试验次数很大时，正面朝上（钉尖朝上）的频率都会在一个常数附近摆动，这个性质称为**频率的稳定性**.

由于事件 A 发生的频率表示该事件发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生越频繁，这就意味着事件 A 发生的可能性也越大.

我们把刻画事件 A 发生的可能性大小的数值，叫做事件 A 发生的**概率**（p ob b lity），记为 $P(A)$.

一般地，大量重复的试验中，我们常用不确定事件 A 发生的频率来估计事件 A 发生的概率.

想一想

事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的取值范围是什么？必然事件发生的概率是多少？不可能事件发生的概率是多少？

必然事件发生的概率为 1；不可能事件发生的概率为 0；不确定事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是 0 与 1 之间的一个常数.

议一议

由上面的试验，请你估计抛掷一枚均匀的硬币，正面朝上和正面朝下的概率分别是多少．它们相等吗？

随堂练习

1. 小凡做了 5 次抛掷均匀硬币的试验，其中有 3 次正面朝上，2 次正面朝下，他认为正面朝上的概率约为 $\frac{3}{5}$，正面朝下的概率约为 $\frac{2}{5}$．你同意他的观点吗？你认为他再多做一些试验，结果还是这样吗？

2. 抛掷一枚均匀的硬币，正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$，那么，抛掷 100 次硬币，你能保证恰好 50 次正面朝上吗？与同伴交流．

读一读

概率的由来

概率主要研究不确定现象，它起源于博弈问题，15~16世纪，意大利数学家们曾讨论过“如果两人赌博提前结束，该如何分配赌金”等问题．比如，两个人做掷硬币游戏，掷出正面甲得 1 分，掷出反面乙得 1 分，先得到 10 分的人赢得一个大蛋糕．如果游戏因故中途结束，此时甲得了 8 分，乙得了 7 分，那么他们该如何分配这个蛋糕？

为了回答类似上述问题，人们对不确定现象进行了大量的研究．前面已经列举了历史上一些数学家所做的掷硬币试验的数据．

对不确定现象的研究，最终导致了概率论与数理统计这门学科的出现．它自产生之日起，就与人们的实际生活有着紧密的联系，并且解决了许多科技发展中的问题．正因为如此，这门学科有着很强的生命力和广阔的发展前景．

习题 9.3

知识技能

1. 某种麦粒在相同条件下的发芽试验，结果如下表所示：

试验的麦粒数 n	100	200	500	1 000	2 000	5 000
发芽的粒数 m	94	191	473	954	1 906	4 748
发芽的频率 $\frac{m}{n}$						

（1）完成上表；

（2）画出麦粒发芽频率的折线统计图；

（3）任取一粒麦粒，估计它能发芽的概率.

2. 对某批乒乓球的质量进行随机抽查，结果如下表所示：

随机抽取的乒乓球数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
优等品数 m	7	16	43	81	164	414	825
优等品率 $\frac{m}{n}$							

（1）完成上表；

（2）根据上表，在这批乒乓球中任取一个，它为优等品的概率大约是多少？

（3）如果重新再抽取 1 000 个乒乓球进行质量检查，对比上表记录下数据，两表的结果会一样吗？为什么？

数学理解

3. 掷一枚均匀的骰子.

（1）会出现哪些可能的结果？

（2）掷出的点数为 1 与掷出的点数为 2 的可能性相同吗？掷出的点数为 1 与掷出的点数为 3 的可能性相同吗？

（3）每个结果出现的可能性相同吗？你是怎样做的？

3 等可能事件的概率

前面我们用事件发生的频率来估计该事件发生的概率，但得到的往往只是概率的估计值. 那么，还有没有其他求概率的方法呢?

议一议

1. 一个袋中装有 5 个球，分别标有 1，2，3，4，5 这五个号码，这些球除号码外都相同，搅匀后任意摸出一个球.

（1）会出现哪些可能的结果?

（2）每个结果出现的可能性相同吗? 猜一猜它们的概率分别是多少.

2. 前面我们提到的抛硬币、掷骰子和摸球的游戏有什么共同的特点?

设一个试验的所有可能的结果有 n 个，每次试验有且只有其中的一个结果出现. 如果每个结果出现的可能性相同，那么我们就称这个试验的结果是等可能的.

想一想

你能找一些结果是等可能的试验吗?

一般地，如果一个试验有 n 个等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 个结果，那么事件 A 发生的概率为：$P(A)=\frac{m}{n}$.

例 1 任意掷一枚均匀的骰子.

（1）掷出的点数大于 4 的概率是多少?

（2）掷出的点数是偶数的概率是多少?

解： 任意掷一枚均匀的骰子，所有可能的结果有 6 种：掷出的点数分别是

1，2，3，4，5，6. 因为骰子是均匀的，所以每种结果出现的可能性相等.

（1）掷出的点数大于 4 的结果只有 2 种：掷出的点数分别是 5，6，所以

P（掷出的点数大于 4）$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

（2）掷出的点数是偶数的结果有 3 种：掷出的点数分别是 2，4，6，所以

P（掷出的点数是偶数）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

你还能求哪些事件的概率？

随堂练习

1. 一副扑克牌，任意抽取其中的一张，抽到大王的概率是多少？抽到 3 的概率是多少？抽到方块的概率是多少？

请你解释一下：打牌的时候，你摸到大王的机会比摸到 3 的机会小.

2. 一道单项选择题有 A，B，C，D 四个备选答案，当你不会做的时候，从中随机地选一个答案，你答对的概率为多少？

习题 9.4

知识技能

1. 将 A，B，C，D，E 这五个字母分别写在 5 张同样的纸条上，并将这些纸条放在一个盒子中. 搅匀后从中任意摸出一张，会出现哪些可能的结果？它们是等可能的吗？

2. 任意掷一枚均匀的骰子.

（1）掷出的点数小于 4 的概率是多少？

（2）掷出的点数是奇数的概率是多少？

（3）掷出的点数是 7 的概率是多少？

（4）掷出的点数小于 7 的概率是多少？

3. 有 7 张纸签，分别标有数字 1，1，2，2，3，4，5，从中随机地抽出一张，求：

（1）抽出标有数字 3 的纸签的概率；

（2）抽出标有数字 1 的纸签的概率；

（3）抽出标有数字为奇数的纸签的概率.

问题解决

4. 小明所在的班有 40 名同学，从中选出一名同学为家长会做准备工作. 请你设计一种方案，使每一名同学被选中的概率都相同.

议一议

1. 一个袋中装有 2 个红球和 3 个白球，每个球除颜色外都相同，任意摸出一个球，摸到红球的概率是多少？

摸出的球不是红球就是白球，所以摸到红球和摸到白球的可能性相同，也就是，P（摸到红球）$=\frac{1}{2}$.

红球有 2 个，而白球有 3 个，如果将每一个球都编上号码，1 号球（红色）、2 号球（红色）、3 号球（白色）、4 号球（白色）、5 号球（白色），摸出每一个球的可能性相同，共有 5 种等可能的结果．摸到红球可能出现的结果有：摸出 1 号球或 2 号球，共有 2 种等可能的结果．所以，P（摸到红球）$=\frac{2}{5}$.

你认为谁说的有道理？

2. 小明和小凡一起做游戏．在一个装有 2 个红球和 3 个白球（每个球除颜色外都相同）的袋中任意摸出一个球，摸到红球小明获胜，摸到白球小凡获胜．这个游戏对双方公平吗？在一个双人游戏中，你是怎样理解游戏对双方公平的？

做一做

选取 4 个除颜色外完全相同的球设计一个摸球游戏.

（1）使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$，摸到白球的概率也是 $\frac{1}{2}$；

（2）使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$，摸到白球和黄球的概率都是 $\frac{1}{4}$.

想一想

（1）选取 8 个除颜色外完全相同的球，你能分别设计满足如上条件的游戏吗？

（2）选取 7 个除颜色外完全相同的球，你能分别设计满足如上条件的游戏吗？

随堂练习

1. 一个袋中装有 3 个红球、2 个白球和 4 个黄球，每个球除颜色外都相同．从中任意摸出一个球，则：

P（摸到红球）=______________;

P（摸到白球）=______________;

P（摸到黄球）=______________.

2. 请你设计一个双人游戏，使游戏对双方是公平的．

习题 9.5

知识技能

1. 一个袋中装有 3 个红球和 5 个白球，每个球除颜色外都相同．从中任意摸出一个球，摸到红球和摸到白球的概率相等吗？如果不等，能否通过改变袋中红球或白球的数量，使摸到红球和摸到白球的概率相等？

2. 一个袋中装有 5 个红球、4 个白球和 3 个黄球，每个球除颜色外都相同．从中任意摸出一个球，则：

P（摸到红球）= ______________;

P（摸到白球）= ______________;

P（摸到黄球）= ______________.

数学理解

3. 请举出一些事件，它们发生的概率都是 $\frac{3}{4}$.

4. 用 10 个除颜色外完全相同的球设计一个摸球游戏.

(1) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$，摸到白球的概率也是 $\frac{1}{2}$；

(2) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{5}$，摸到白球和黄球的概率都是 $\frac{2}{5}$.

5. 小明和小颖做摸牌游戏，他们先后从一副去掉大、小王的扑克牌中任意抽取一张牌（不放回），谁摸到的牌面大，谁就获胜.（规定牌面从小到大的顺序为：2，3，4，5，6，7，8，9，10，J，Q，K，A，且牌面的大小与花色无关）

(1) 刚洗好牌第一次玩，现小明已经摸到的牌面为 4，然后小颖摸牌. 问：小明获胜的概率是多少？小颖获胜的概率又是多少？

(2) 若小明已经摸到的牌面为 2，情况又如何？小明已经摸到的牌面为 A 呢？

图 9-3 是卧室与书房地板的示意图，图中每一块方砖除颜色外完全相同. 将一个小球分别在卧室和书房的地板上自由地滚动，小球随机地停在某块方砖上.

(1) 在哪个房间里，小球停在黑砖上的概率大？为什么？

(2) 你觉得小球停在黑砖上的概率大小与什么有关？

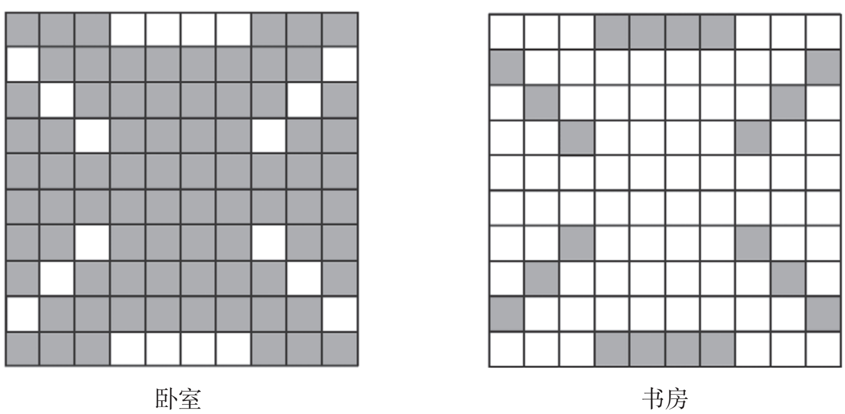


图 9-3

议一议

如果将小球在如图 9-4 所示的地板上自由地滚动，小球随机地停在某块方砖上，则小球停在黑砖上的概率是多少？

图 9-4 的地板由 20 块方砖组成，每一块方砖除颜色外完全相同，其中黑色方砖有 5 块. 因为小球随机地停在某块方砖上，它停在任何一块方砖上的概率都相等，所以

$$P(\text{小球停在黑砖上})=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}.$$

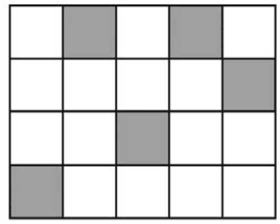


图 9-4

想一想

在上述“议一议”中：

（1）小球停在白砖上的概率是多少？

（2）小明认为（1）的概率与下面事件发生的概率相等：

一个袋中装有 20 个球，其中有 5 个黑球和 15 个白球，每个球除颜色外都相同，从中任意摸出一个球是白球.

你同意他的想法吗？

例2 某商场为了吸引顾客，设立了一个如图 9-5 所示可以自由转动的转盘（转盘被等分成 20 个扇形），并规定：顾客每购买 100 元的商品，就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后，指针正好对准红、黄或绿色区域，顾客就可以分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券.

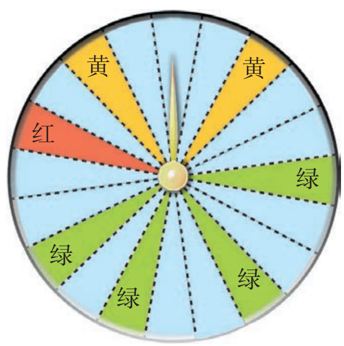


图 9-5

甲顾客购物 120 元，他获得购物券的概率是多少？他得到 100 元、50 元、20 元购物券的概率分别是多少？

解：甲顾客的消费额在 100 元到 200 元之间，因此可以获得一次转动转盘的机会.

转盘被等分成 20 个扇形，其中 1 个是红色，2 个是黄色，4 个是绿色，因此，对于甲顾客来说，

$$P(\text{获得购物券})=\frac{1+2+4}{20}=\frac{7}{20};$$

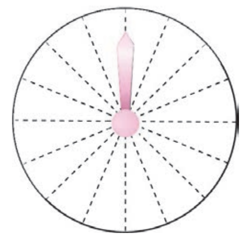
$$P(\text{获得 100 元购物券})=\frac{1}{20};$$

P(获得 50 元购物券)$=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$;

P(获得 20 元购物券)$=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

随堂练习

1. 如图所示，转盘被等分成 16 个扇形. 请在适当的地方涂上颜色，使得自由转动这个转盘，当它停止转动时，指针落在黑色区域的概率为 $\frac{3}{8}$.



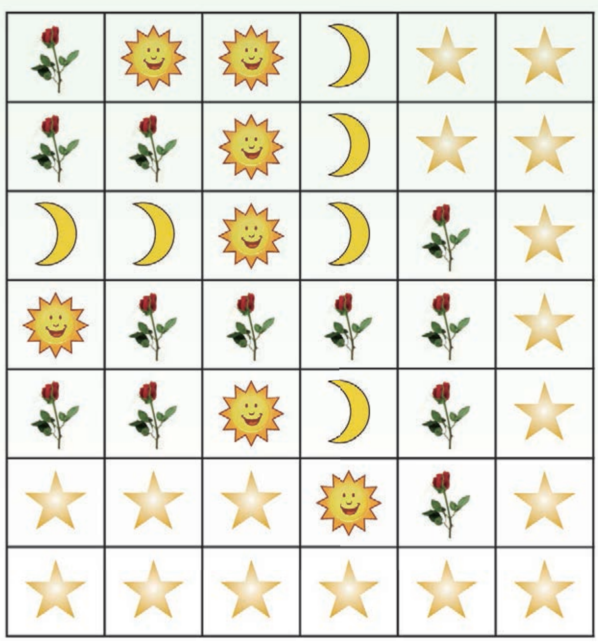
(第 1 题)

2. 你还能举出一些不确定事件，它发生的概率也是 $\frac{3}{8}$ 吗?

习题 9.6

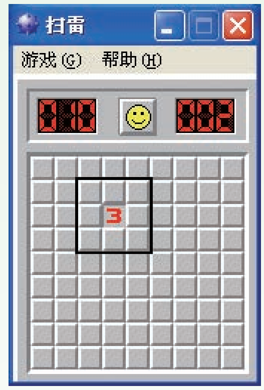
知识技能

1. 下图是一个寻宝游戏的藏宝图，图中每个方块除了图案外都相同，宝藏随机地藏在某一方块内，那么宝藏藏在各种图案下的概率分别是多少?



(第 1 题)

2. 同学们玩过计算机“扫雷”游戏吗？右图为计算机“扫雷”游戏的画面，在 9×9 个小方格的雷区中，随机地埋藏着 10 颗地雷，每个小方格最多能埋藏 1 颗地雷. 小明游戏时先踩中一个小方格，显示数字 3（如图所示），它表示与这个方格相邻的 8 个小方格（图中黑框所围区域，设为 A 区域）中埋藏着 3 颗地雷. 为了尽可能不踩中地雷，小明的第二步应踩在 A 区域内的小方格上还是应踩在 A 区域外的小方格上？

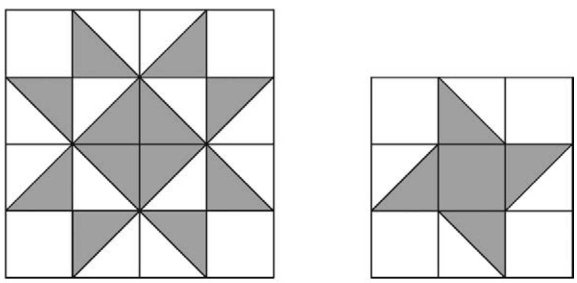


（第 2 题）

数学理解

3. （1）如果将一个小球在如图（1）所示的地板上自由地滚动，小球随机地停在某块方砖上，那么它停在黑色区域的概率是多少？如果将小球在如图（2）所示的地板上自由地滚动呢？

（2）请你设计几种地砖图案，使得将一个小球在上面自由滚动时，小球停在黑色区域的概率是 $\frac{1}{3}$.



（1）　　（2）

（第 3 题）

图 9−6 是一个可以自由转动的转盘，转动转盘，当转盘停止时，指针落在红色区域和白色区域的概率分别是多少？

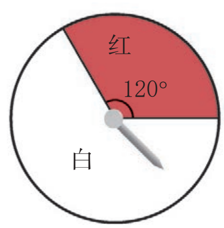


图 9−6

指针不是落在红色区域就是落在白色区域，落在红色区域和白色区域的概率相等，所以 P（落在红色区域）$=P$（落在白色区域）$=\frac{1}{2}$.

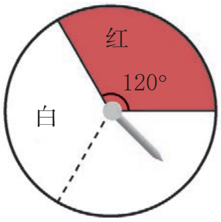


图 9-7

先把白色区域等分成 2 份（如图 9-7），这样转盘被等分成 3 个扇形区域，其中 1 个是红色，2 个是白色，所以 P（落在红色区域）$=\frac{1}{3}$，P（落在白色区域）$=\frac{2}{3}$.

你认为谁做得对？说说你的理由，你是怎样做的？

想一想

转动如图 9-8 所示的转盘，当转盘停止时，指针落在红色区域和白色区域的概率分别是多少？你有什么方法？与同伴进行交流.

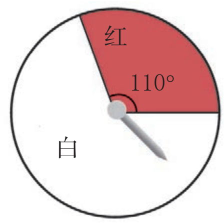


图 9-8

例3 某路口南北方向红绿灯的设置时间为：红灯 40 s、绿灯 60 s、黄灯 3 s. 小明的爸爸随机地由南往北开车经过该路口，问：

（1）他遇到红灯的概率大还是遇到绿灯的概率大？

（2）他遇到红灯的概率是多少？

解：（1）小明的爸爸随机地经过该路口，他每一时刻经过的可能性都相同，因为该路口南北方向红绿灯的设置时间为：红灯 40 s、绿灯 60 s、黄灯 3 s. 绿灯时间比红灯时间长，所以他遇到绿灯的概率大.

（2）他遇到红灯的概率为：

$$\frac{40}{40+60+3}=\frac{40}{103}.$$

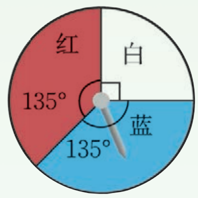
随堂练习

请你设计一个转盘，使得自由转动这个转盘，当它停止转动时，指针落在红色区域的概率为 $\frac{3}{8}$，落在白色区域的概率为 $\frac{3}{8}$，落在黄色区域的概率为 $\frac{1}{4}$.

习题 9.7

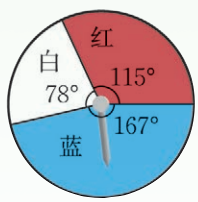
知识技能

1. 下面是两个可以自由转动的转盘，转动转盘，分别计算转盘停止后，指针落在红色区域的概率.



（第 1 题）

2. 下面是一个可以自由转动的转盘，转动转盘，转盘停止后，指针落在红色区域的概率是多少？



（第 2 题）

3. 某电视频道播放正片与广告的时间之比为 7∶1，广告随机地穿插在正片之间. 小明随机地打开电视机，收看该频道，他开机时恰好播放正片的概率是多少？

数学理解

4. 请你设计一个转盘，使得自由转动这个转盘，当它停止转动时，指针落在红色区域的概率为 $\frac{4}{9}$，落在白色区域的概率为 $\frac{1}{3}$，落在黄色区域的概率为 $\frac{2}{9}$.

回顾与思考

1. 举例说明什么是随机事件.
2. 事件发生的概率与频率有什么区别和联系?
3. 你能设计一些对双方都公平的游戏吗?
4. 举例说明如何求随机事件的概率. 在什么条件下适合用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 来求随机事件的概率?
5. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 下列事件中，哪些是确定的? 哪些是不确定的? 请说明理由.

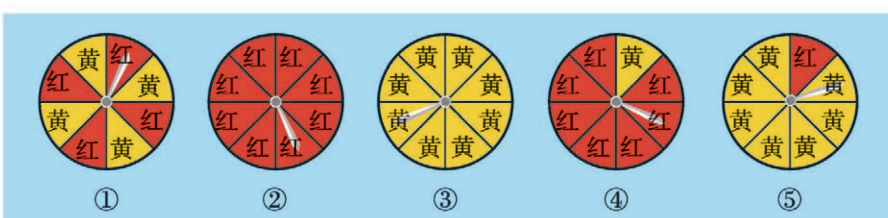
(1) 车辆随机经过一个路口，遇到红灯;

(2) 两条线段可以组成一个三角形;

(3) 400 人中至少有两人的生日在同一天;

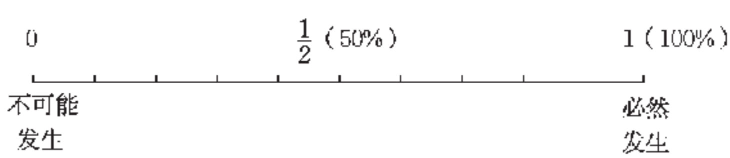
(4) 掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是质数.

2. 下面是一些可以自由转动的转盘，请你按照转盘停止后指针落在黄色区域的可能性由大到小进行排列.



(第 2 题)

3. 请将下列事件发生的概率标在图中:

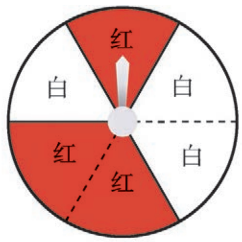


(第 3 题)

（1）将 3 个人分成两组，一定有 2 个人分在一组；

（2）随意掷两枚均匀的骰子，朝上面的点数之和为 1；

（3）自由转动如图所示的转盘（转盘被等分成 6 个扇形），指针停在红色的区域中.



（第 3（3）题）

4. 如图所示有 9 张卡片，分别写有 1 至 9 这九个数字. 将它们背面朝上洗匀后，任意抽出一张.

（1）P（抽到数字 9）= ________；

（2）P（抽到两位数）= ________；

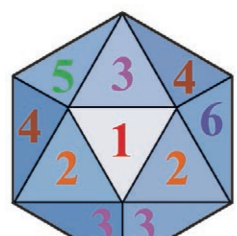
（3）P（抽到的数大于 6）= ________，P（抽到的数小于 6）= ________；

（4）P（抽到奇数）= ________，P（抽到偶数）= ________.

5. 如图，有一枚均匀的正二十面体形状的骰子，其中的 1 个面标有“1”，2 个面标有“2”，3 个面标有“3”，4 个面标有“4”，5 个面标有“5”，其余的面标有“6”. 将这个骰子掷出后：

（1）“6”朝上的概率是多少？

（2）数字几朝上的概率最大？



（第 5 题）

数学理解

6. 如图是一个转盘，小颖认为转盘上共有三种不同的颜色，所以自由转动这个转盘，指针停在红色、黄色或蓝色区域的概率都是 $\frac{1}{3}$. 你认为呢？

（第 6 题）

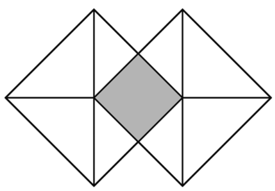
7. 一只小鸟自由自在地在空中飞行，然后随意落在如图（1）所示的某个方格中（每个方格除颜色外完全相同），则小鸟停在白色方格中的概率是多少？如果小鸟随意落在图（2）所示的某个方格中，它停在白色方格中的概率又是多少？


（1）


（2）

（第 7 题）

8. 如图，假设可以随意在图中取点，那么这个点取在阴影部分的概率是多少？请你重新设计图案，使得这个点取在阴影部分的概率为 $\frac{3}{7}$.


（第 8 题）

（第 9 题）

9. 如图，一个均匀的转盘被等分成 10 份，分别标有 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 这 10 个数字. 转动转盘，当转盘停止后，指针指向的数字即为转出的数字. 两人参与游戏：一人转动转盘，另一人猜数，若所猜数字与转出的数字相符，则猜数的人获胜，否则转动转盘的人获胜. 猜数的方法从下面三种中选一种：

（1）猜“是奇数”或“是偶数”；

（2）猜“是 3 的倍数”或“不是 3 的倍数”；

（3）猜“是大于 6 的数”或“不是大于 6 的数”.

如果轮到你猜数，那么为了尽可能获胜，你将选择哪一种猜数方法？怎样猜？

10. 小明做了 5 次抛掷均匀硬币的试验，其中有 2 次正面朝上、3 次正面朝下. 他认为再抛一次，一定正面朝上. 你同意他的观点吗？与同伴进行交流.

问题解决

11. 自由转动转盘，按指针所指区域的指示行动.

（1）转动若干次，最后是在出发点前的可能性大还是在出发点后的可能性大？

（2）连续转动 20 次，试一试，看情况怎么样.

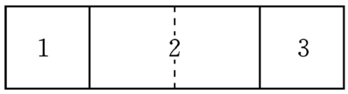
（第 11 题）

12. 如图（甲），有一批宝藏被随意埋在长方形区域内（图中每个方格完全相同）.

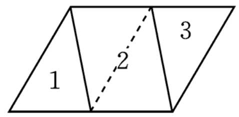
（1）假如你去寻找宝藏，你会选择哪个区域？为什么？在这个区域一定能找到宝藏吗？

（2）宝藏埋在哪两个区域的可能性相同？

（3）如果埋宝藏的区域如图（乙）所示（图中每个三角形完全相同），（1）（2）的结果又会怎样？



（甲）



（乙）

（第 12 题）

13. 请你设计一个游戏，并说明在你的设计中游戏者获胜的概率是多少.

联系拓广

14. 现有足够多除颜色外均相同的球，请你从中选 12 个球设计摸球游戏.

（1）使摸到红球的概率和摸到白球的概率相等；

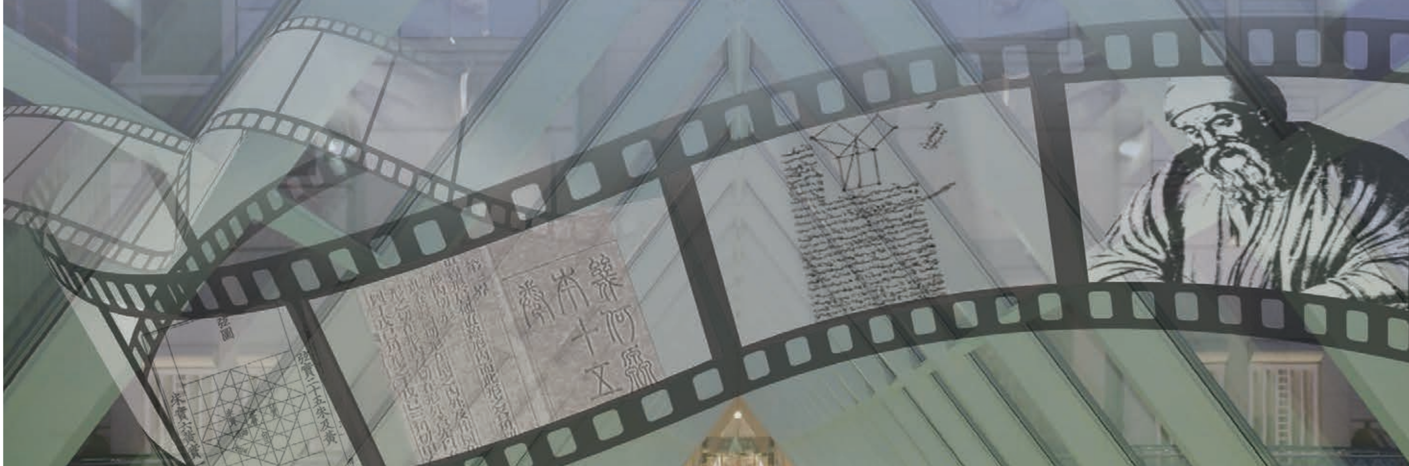
（2）使摸到红球、白球、黑球的概率都相等；

（3）使摸到红球的概率和摸到白球的概率相等，且都小于摸到黑球的概率.

第十章　三角形的有关证明

我们曾经探索过等腰三角形和直角三角形的一些性质，如等腰三角形“三线合一”的性质、勾股定理等．你还记得获得这些结论的过程吗？你能根据已有基本事实和定理证明这些结论吗？

本章将研究两个三角形全等，证明与等腰三角形和直角三角形的性质及判别条件有关的一些结论，证明线段垂直平分线和角平分线的有关性质，还将研究直角三角形全等的判别条件，进一步体会证明的必要性．



学习目标

- 能利用相关的基本事实和定理证明两个三角形全等
- 经历探索、证明等腰三角形和直角三角形等图形性质与判别条件的过程，进一步发展推理能力
- 能证明等腰三角形的性质定理和判定定理
- 掌握勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题
- 探索并掌握直角三角形全等的“斜边、直角边”定理
- 能证明线段垂直平分线、角平分线的性质定理及其逆定理

1 全等三角形

在《平行线的有关证明》一章中，我们给出了八条基本事实，并从其中的几条基本事实出发证明了有关平行线的一些结论. 运用这些基本事实和已经学习过的定理，我们还可以证明有关三角形的一些结论.

想一想

有关全等三角形的基本事实有哪些?

基本事实：____________________________的两个三角形全等.（SAS）

基本事实：____________________________的两个三角形全等.（ASA）

基本事实：____________________________的两个三角形全等.（SSS）

由上面的基本事实，可以证明许多几何结论.

做一做

我们已经探索过“两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等”这个结论，你能用有关的基本事实和已经证明过的定理证明它吗?

已知：如图 10−1，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AB=A'B'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明：$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180^\circ$，

$\therefore \angle A=180^\circ-\angle B-\angle C$，

$\angle A'=180^\circ-\angle B'-\angle C'$.

$\because \angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，

$\therefore \angle A=\angle A'$.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$\because \angle A=\angle A'$，$AB=A'B'$，$\angle B=\angle B'$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（ASA）.

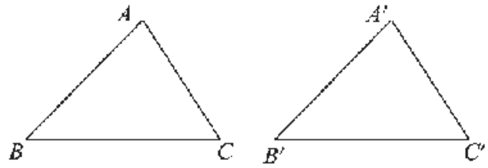


图 10−1

由此可以得到下面的定理：

定理　两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.（AAS）

例 1　已知：如图 10−2，线段 AB 和 CD 相交于点 O，线段 $OA=OD$，$OC=OB$.

求证：$AC=BD$，$\angle A=\angle D$.

证明：在$\triangle OAC$和$\triangle ODB$中，

$\because OA=OD$，

$\angle AOC=\angle DOB$，

$OC=OB$，

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle ODB$（SAS）.

$\therefore AC=BD$，$\angle A=\angle D$（全等三角形的定义）.

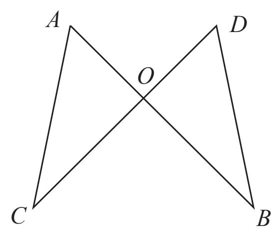
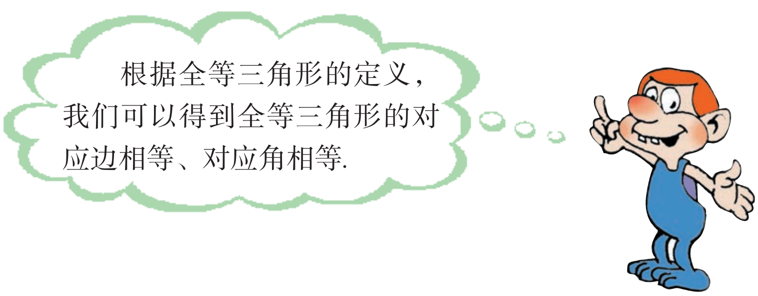
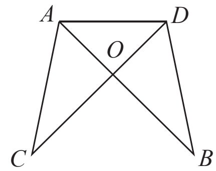


图 10−2



随堂练习


（第 1 题）

1. 完成下面的证明过程.

已知：如图，AB 与 CD 相交于点 O，$\triangle AOC\cong\triangle DOB$.

求证：$\triangle ABD\cong\triangle DCA$.

证明： $\because\triangle AOC\cong\triangle DOB$，

$\therefore AO=DO$，$CO=BO$，$AC=DB$（　　　　　　　）.

$\therefore$ _____ + _____ = _____ + _____，

即 $AB=DC$.

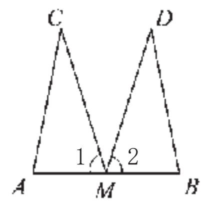
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCA$ 中，

$\because DB=AC$，

_____ = _____，

_____ = _____，

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle DCA$（　　　　　　　）.

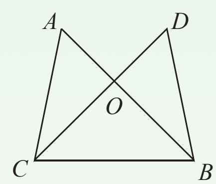

（第 2 题）

2. 已知：如图，M 是线段 AB 的中点，$\angle C=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$\triangle AMC\cong\triangle BMD$.

习题 10.1

知识技能

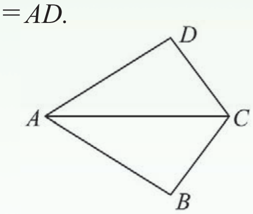

（第 1 题）

1. 已知：如图，$\angle ACB=\angle DBC$，$AC=DB$.

求证：$\angle A=\angle D$，$AB=DC$.

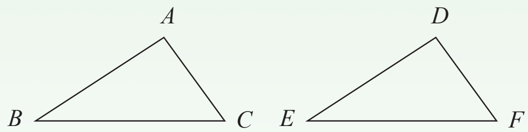
2. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，$AB=AD$.

求证：AC 平分 $\angle BCD$.

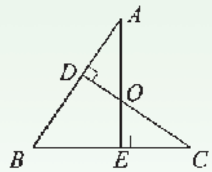

（第 2 题）

数学理解

3.（1）已知：如图，$AB=DE$，$AC=DF$. 要证明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，只需再增添一个条件：_______ = _______，或 _______ = _______；



（第 3（1）题）



（第 3（2）题）

（2）已知：如图，AE 和 CD 相交于点 O，$\angle ADO=\angle CEO=90^\circ$．要证明 $\triangle AOD \cong \triangle COE$，只需再增添一个条件：______ = ______，或 ______ = ______，或 ______ = ______．

例 2　已知：如图 10−3，点 B 在 $\angle EAF$ 的内部，C，D 两点分别在 $\angle EAF$ 的两边上，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

求证：$AC=AD$.

证明： $\because \angle 5=\angle 3-\angle 1$，$\angle 6=\angle 4-\angle 2$，

$\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 5=\angle 6$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$\because \angle 5=\angle 6$，$AB=AB$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$（ASA）.

$\therefore AC=AD$（全等三角形的对应边相等）.

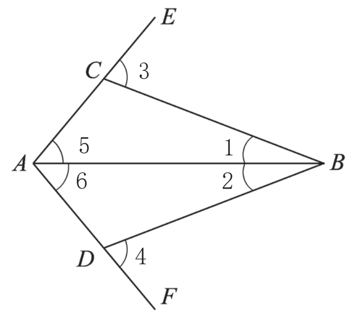


图 10−3

想一想

如何用上节课中的定理（AAS）证明例 2？

例 3　已知：如图 10−4，$AB=CD$，$AB /\!/ CD$，$CE=AF$.

求证：$\angle E=\angle F$.

证明： $\because CE=AF$，

$\therefore AC+CE=AC+AF$，

即 $AE=CF$.

$\because AB /\!/ CD$，

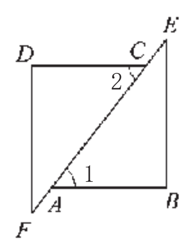


图 10−4

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

$\because AE=CF$，$\angle 1=\angle 2$，$AB=CD$，

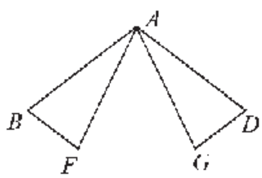
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$（SAS）.

$\therefore \angle E=\angle F$（全等三角形的对应角相等）.

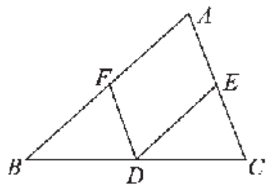
随堂练习

1. 已知：如图，$AB=AD$，$AF=AG$，$BF=DG$.

求证：$\angle BAG=\angle DAF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$BF=DE$，$DE/\!/AB$，$DF/\!/AC$.

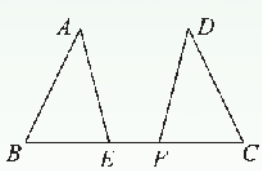
求证：D为BC的中点.

习题 10.2

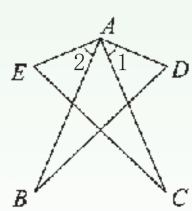
知识技能

1. 已知：如图，点E，F在线段BC上，$BF=CE$，$\angle AEB=\angle DFC$，$\angle B=\angle C$.

求证：$\triangle ABE \cong \triangle DCF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

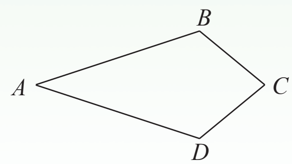
2. 已知：如图，$AB=AC$，$\angle D=\angle E$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

数学理解

3. 已知：如图，$AB=AD$，$BC=DC$.

求证：$\angle B=\angle D$.



（第 3 题）

例 4 已知：如图 10−5，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的高.

求证：$AD=A'D'$.

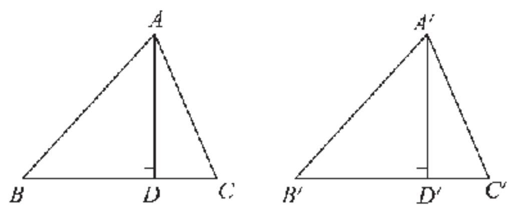


图 10−5

证明： $\because \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，

$\therefore AB=A'B'$（全等三角形的对应边相等），

$\angle B=\angle B'$（全等三角形的对应角相等）.

$\because \angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$（AAS）.

$\therefore AD=A'D'$（全等三角形的对应边相等）.

想一想

（1）如果两个全等三角形对应边上的高在三角形的外部，你还能得到上面的结论吗？

（2）如果两个全等三角形对应边上的高就是该三角形的一条边呢？

（3）通过例 4 和上面的两个问题，你能得到什么结论？与同伴进行交流.

例5 已知：如图 10−6，$AB=CD$，$BE=DF$，$\angle B=\angle D$.

求证：（1）$AE=CF$；

（2）$AE /\!/ CF$；

（3）$\angle AFE=\angle CEF$.

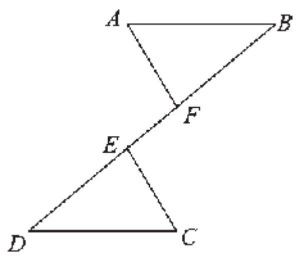


图 10−6

证明：（1）在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

$\because AB=CD$，$\angle B=\angle D$，$BE=DF$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$（SAS）.

$\therefore AE=CF$（全等三角形的对应边相等）.

（2）$\because \triangle ABE \cong \triangle CDF$，

$\therefore \angle AEB=\angle CFD$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore AE /\!/ CF$.

（3）在$\triangle AEF$和$\triangle CFE$中，

$\because AE=CF$，$\angle AEF=\angle CFE$，$EF=FE$，

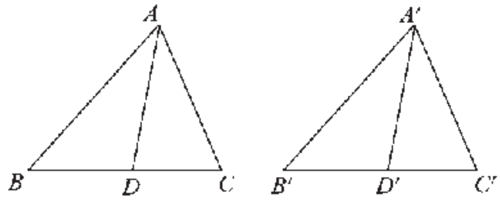
$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CFE$（SAS）.

$\therefore \angle AFE=\angle CEF$（全等三角形的对应角相等）.

随堂练习

1. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 的角平分线.

求证：$AD = A'D'$.



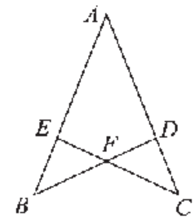
（第 1 题）

2. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，BD 和 CE 相交于点 F.

求证：（1）$\angle B=\angle C$；

（2）$\triangle BEF\cong\triangle CDF$；

（3）$BF=CF$.



（第 2 题）

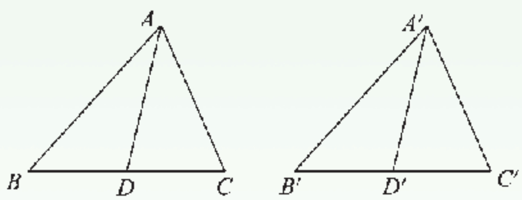
习题 10.3

知识技能

1. 求证：全等三角形对应边上的中线相等.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，AD，$A'D'$ 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 的中线，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AD=A'D'$.

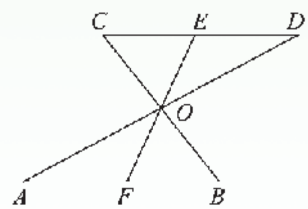
求证：（1）$\angle B=\angle B'$；（2）$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



（第 2 题）

3. 已知：如图，$AB/\!/CD$，AD 和 BC 相交于点 O，EF 过点 O，分别与 AB，CD 相交于点 F，E，$AB=CD$.

求证：（1）$OC=OB$；（2）$OE=OF$.



（第 3 题）

2 等腰三角形

还记得我们探索过的等腰三角形的性质吗？

试利用已有的基本事实和定理证明这些结论.

已知：如图 10–7，在△ABC 中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

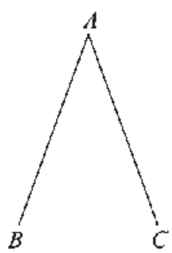


图 10–7

图 10–8

我们曾经利用折叠的方法说明了等腰三角形的两个底角相等（如图 10–8）.

折痕将等腰三角形分成了两个全等三角形. 因此通过作底边上的中线，可以得到两个全等的三角形，从而证明这两个底角相等.

证明：取底边 BC 的中点 D，连接 AD（如图 10−9）.

$\because AB=AC$，$BD=CD$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（SSS）.

$\therefore \angle B=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.

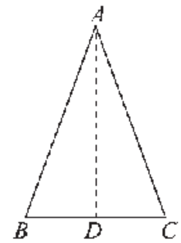


图 10−9

你还有其他证明方法吗？与同伴进行交流.

定理　等腰三角形的两个底角相等.

这一定理可以简述为：**等边对等角**.

实际上，在图 10−9 中，由 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，可以得到 $\angle BAD=\angle CAD$，$AD \perp BC$，因此线段 AD 同时还是顶角的平分线和底边上的高，由此可以得到结论：

定理　等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.

议一议

前面已经证明了等腰三角形的两个底角相等．反过来，有两个角相等的三角形是等腰三角形吗？

如图 10−10，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，要想证明 $AB=AC$，只要能构造两个全等的三角形，使 AB 与 AC 成为对应边就可以了．你是怎样构造的？

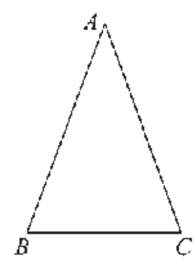


图 10−10

定理　有两个角相等的三角形是等腰三角形.

这一定理可以简述为：**等角对等边**.

随堂练习

1. 利用作等腰三角形顶角的平分线的方法，证明等腰三角形的两个底角相等.

2. 根据等腰三角形性质定理填空：

已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$.

（1）$\because AD\perp BC$，

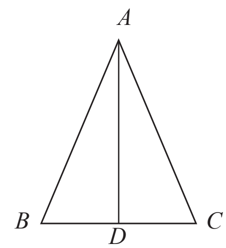
$\therefore \angle$______$=\angle$______，______$=$______；

（2）$\because AD$是底边上的中线，

$\therefore$______$\perp$______，$\angle$______$=\angle$______；

（3）$\because AD$是顶角的平分线，

$\therefore$______$\perp$______，______$=$______.



（第2题）

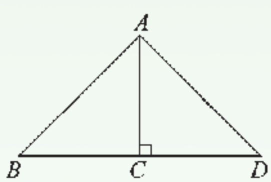
习题 10.4

知识技能

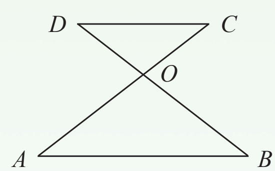
1. 如图，在$\triangle ABD$中，C是边BD上的一点，且$AC\perp BD$，$AC=BC=CD$.

（1）求证：$\triangle ABD$是等腰三角形；

（2）求$\angle BAD$的度数.



（第1题）



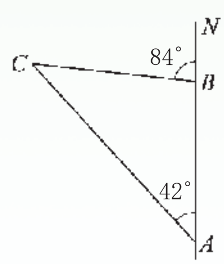
（第2题）

2. 如图，AC和BD相交于点O，且$AB\parallel DC$，$OA=OB$.

求证：$OC=OD$.

问题解决

3. 如图，一艘船从A处出发，以20 km/h的速度向正北方向航行，经过1.5 h到达B处. 分别从A，B处望灯塔C，测得$\angle NAC=42^\circ$，$\angle NBC=84^\circ$. 求从B处到灯塔C的距离.



（第3题）

想一想

在等腰三角形中作出两底角的平分线，这两个底角的平分线相等吗？你能证明你的结论吗？

例1 证明：等腰三角形两底角的平分线相等.

已知：如图10−11，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD，CE是$\triangle ABC$的角平分线.

求证：$BD=CE$.

证明：$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

$\because \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

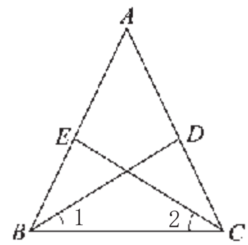


图10−11

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中，

$\because \angle ACB=\angle ABC$，$BC=CB$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle BDC\cong\triangle CEB$（ASA）.

$\therefore BD=CE$（全等三角形的对应边相等）.

议一议

等腰三角形两条腰上的中线相等吗？两条腰上的高呢？请证明你的结论，并与同伴进行交流.

例2 已知：如图10−12，点D，E在$\triangle ABC$的边BC上，$AB=AC$，$AD=AE$.

求证：$BD=CE$.

分析：因为$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是有公共顶点，并且底边在同一直线上的等腰三角形，所以作$\triangle ABC$（或$\triangle ADE$）的高AF，可同时平分BC，DE.

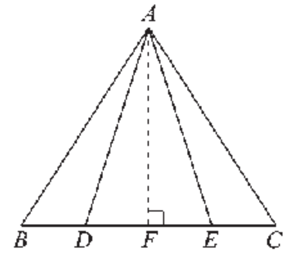


图10−12

证明：作$AF\perp BC$，垂足为点F，则$AF\perp DE$.

$\because AB=AC$，

$\therefore BF=CF$（等腰三角形底边上的中线、底边上的高互相重合）.

同理，$\because AD=AE$，

$\therefore DF=EF$.

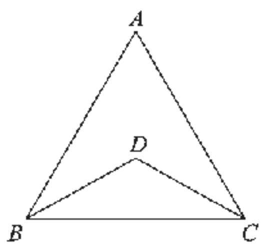
$\therefore BF-DF=CF-EF$，

即 $BD=CE$.

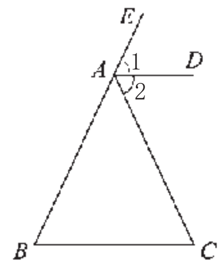
随堂练习

1. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 内的一点，BD 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACB$，且 $BD=CD$.

求证：$AB=AC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\angle CAE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，$AD/\!/BC$，且 $\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC$.

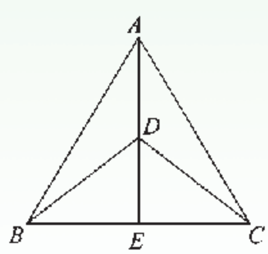
习题 10.5

知识技能

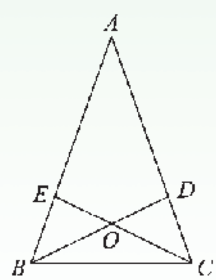
1. 求证：等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等.

2. 已知：如图，$AB=AC$，$DB=DC$，AD 的延长线交 BC 于点 E.

求证：$BE=CE$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，$AB=AC$，$\angle ABD=\angle ACE$.

求证：（1）$OB=OC$；（2）$BE=CD$.

议一议

（1）一个等腰三角形满足什么条件时便成为等边三角形？

（2）你认为有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形吗？你能证明你的结论吗？把你的证明思路与同伴进行交流.

定理　有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

做一做

你还记得用两个含 30° 角的三角尺拼出一个等边三角形吗？我们曾用拼出的图形得到直角三角形中 30° 角所对的直角边与斜边的大小关系，你能证明你的结论吗？

已知：如图 10−13（1），在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$.

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$.

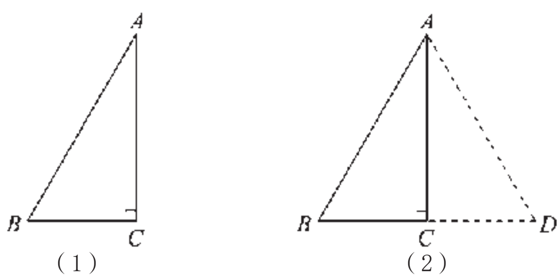


图 10−13

证明：延长 BC 至点 D，使 $CD=BC$，连接 AD（如图 10−13（2））.

$\because \angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle ACD=90^\circ$.

$\because AC=AC$，$\angle ACB=\angle ACD$，$BC=DC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$（SAS）.

$\therefore AB=AD$（全等三角形的对应边相等），

$\angle BAC=\angle DAC=30^\circ$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore \angle BAD=60^\circ$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形（有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形）.

$\therefore BC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB$.

由此可以得出下面的定理：

定理　在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

例3　等腰三角形的底角为 15°，腰长为 $2a$，求腰上的高.

如图 10–14，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=2a$，$\angle ABC=15^\circ$，CD 是腰 AB 上的高. 求 CD 的长.

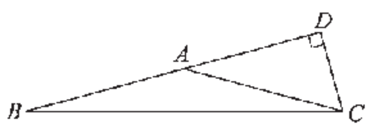


图 10–14

解： $\because AB=AC$,

$\therefore \angle ACB=\angle ABC=15^\circ$.

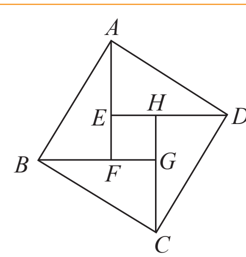
$\therefore \angle DAC=\angle ABC+\angle ACB$

$=15^\circ+15^\circ=30^\circ$.

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2a=a$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

随堂练习

1. 直角三角形的一个角等于 30°，斜边长为 4，用四个这样的直角三角形拼成如图所示的正方形，求正方形 $EFGH$ 的边长.



（第 1 题）

2. 证明：等边三角形的三个角都相等，并且每个角都等于60°.

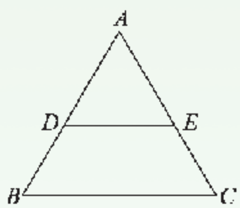
3. 证明：三个角都相等的三角形是等边三角形.

习题 10.6

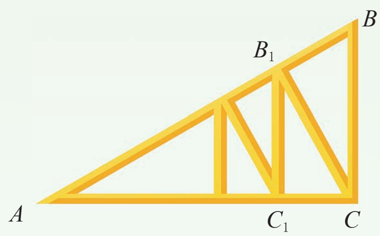
知识技能

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE/\!/BC$，分别交 AB，AC 于点 D，E.

求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.



（第 1 题）



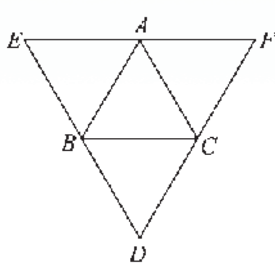
（第 2 题）

问题解决

2. 一架直角三角形房梁如图所示，其中 $BC\perp AC$，$\angle A=30°$，$AB=10$ m，$CB_1\perp AB$，$B_1C_1\perp AC$，垂足分别为 B_1，C_1，那么 BC 的长是多少？B_1C_1 呢？

联系拓广

3. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，过它的三个顶点分别作对边的平行线，得到一个新的三角形 DEF，$\triangle DEF$ 是等边三角形吗？你还能找到其他的等边三角形吗？请证明你的结论.



（第 3 题）

例 4 已知：如图 10–15，$AB=DC$，$BD=CA$.

求证：$\triangle AED$ 是等腰三角形.

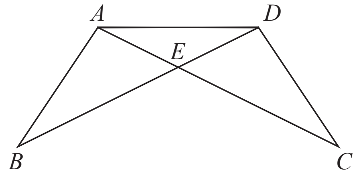


图 10–15

证明： $\because$ $AB=DC$，$BD=CA$，$AD=DA$，

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle DCA$（SSS）.

$\therefore$ $\angle ADB=\angle DAC$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore$ $AE=DE$（等角对等边）.

$\therefore$ $\triangle AED$ 是等腰三角形.

想一想

小明说：“在一个三角形中，如果两个角不相等，那么这两个角所对的边也不相等.” 你认为这个结论成立吗？如果成立，你能证明它吗？

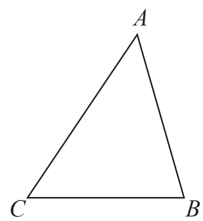


图 10–16

小明是这样想的：

> 如图 10–16，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B \neq \angle C$，此时 AB 与 AC 要么相等，要么不相等.
>
> 假设 $AB=AC$，那么根据“等边对等角”定理可得 $\angle C=\angle B$，但已知条件是 $\angle B \neq \angle C$. “$\angle C=\angle B$”与已知条件“$\angle B \neq \angle C$”相矛盾，因此 $AB \neq AC$.

你能理解他的推理过程吗？

小明在证明时，先假设命题的结论不成立，然后推导出与定义、基本事实、已有定理或已知条件相矛盾的结果，从而证明命题的结论一定成立. 这种证明方法称为**反证法**（reduction to absurdity）.

反证法是一种重要的数学证明方法. 在解决某些问题时，它常常会有出人意料的作用.

议一议

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5都是正数，且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$，那么这五个数中至少有一个大于或等于 $\frac{1}{5}$.

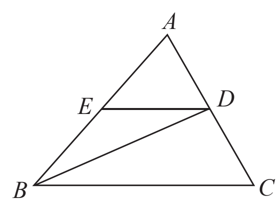
如何证明这一结论呢?

假设这五个数中没有一个大于或等于 $\frac{1}{5}$，即都小于 $\frac{1}{5}$，那么你能推出什么结果? 这一结果与已知条件是否矛盾?

随堂练习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$，交 AC 于点 D，过点 D 作 $DE/\!/BC$，交 AB 于点 E. 请判断 $\triangle BDE$ 的形状，并说明理由.

2. 一个三角形中最多有几个钝角? 为什么?



（第 1 题）

读一读

反证法

反证法是一种独特的证明方法，它的独特之处有两点：一是否定命题的结论，并且可以将这个否定的结论作为证明的条件；二是从这个新条件出发，结合命题原有的条件一起推出矛盾，从而使问题获证. 与运用其他方法证明一样，运用反证法证明时，推理的过程必须有理有据.

反证法在日常生活和数学证明中应用非常广泛. 例如，在本册《平行线的有关证明》中曾经用反证法证明了平行线的性质“两直线平行，同位角相等”，在七年级上册读一读“无理数的发现”中曾经用它说明边长为 1 的正方形的对角线长（即 $\sqrt{2}$）不是有理数.

我们再看一个用反证法证明的例子.

证明：一个三角形中至多有一个直角.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中至多有一个直角.

证明： 假设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中有两个或三个直角，不妨设 $\angle A=\angle B=90^\circ$，则

$\angle A+\angle B+\angle C=90^\circ+90^\circ+\angle C>180^\circ$.

这与三角形内角和定理矛盾. 故 $\angle A=\angle B=90^\circ$ 不成立.

所以一个三角形中至多有一个直角.

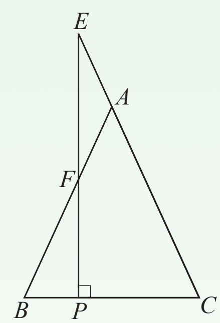
试一试，你能用反证法证明“两条直线相交只有一个交点”吗？

习题 10.7

知识技能

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 在 CA 的延长线上，$EP\perp BC$，垂足为 P，EP 交 AB 于点 F.

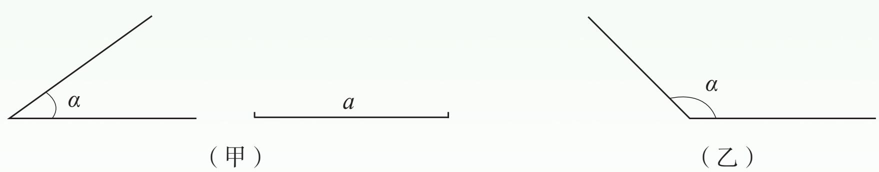
求证：$\triangle AEF$ 是等腰三角形.



（第 1 题）

数学理解

2.（1）已知：如图（甲），等腰三角形的一个内角为锐角 α，腰长为 a，求作这个等腰三角形；



（第 2 题）

（2）在（1）中，把锐角 α 变成钝角 α（如图（乙）），其他条件不变，求作这个等腰三角形.

联系拓广

※**3.** 仿照小明的想法，用反证法证明：在一个三角形中，如果两条边不相等，那么这两条边所对的角也不相等.

3 直角三角形

我们曾经利用数方格和割补图形的方法得到了勾股定理．实际上，我们能够证明勾股定理（有关证明过程参见本节“读一读”）．

勾股定理　直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方．

反过来，在一个三角形中，当两边的平方和等于第三边的平方时，我们曾用度量的办法得出“这个三角形是直角三角形”的结论．你能证明这个结论吗？

已知：如图 10−17（1），在△ABC 中，$AB^2+AC^2=BC^2$．

求证：△ABC 是直角三角形．

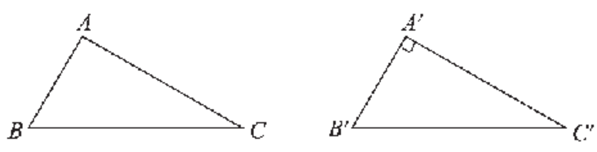


图 10−17

证明：作 Rt△$A'B'C'$，使∠$A'=90°$，$A'B'=AB$，$A'C'=AC$（如图10−17（2）），则

$A'B'^2+A'C'^2=B'C'^2$（勾股定理）．

$\because AB^2+AC^2=BC^2$，$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，

$\therefore BC^2=B'C'^2$．

$\therefore BC=B'C'$．

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SSS）．

$\therefore \angle A=\angle A'=90°$（全等三角形的对应角相等）．

因此，△ABC 是直角三角形．

定理 如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.

议一议

观察上面两个定理，它们的条件和结论之间有怎样的关系？与同伴进行交流.

再观察下面三组命题：

$\begin{cases}\text{如果两个角是对顶角，那么它们相等；}\\ \text{如果两个角相等，那么它们是对顶角.}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{如果小明患了肺炎，那么他一定会发烧；}\\ \text{如果小明发烧，那么他一定患了肺炎.}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{一个三角形中相等的边所对的角相等；}\\ \text{一个三角形中相等的角所对的边相等.}\end{cases}$

上面每组中两个命题的条件和结论也有类似的关系吗？与同伴进行交流.

在两个命题中，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么这两个命题称为**互逆命题**，其中一个命题称为另一个命题的**逆命题**.

想一想

你能写出命题“如果两个有理数相等，那么它们的平方相等”的逆命题吗？它们都是真命题吗？

一个命题是真命题，它的逆命题不一定是真命题. 如果一个定理的逆命题经过证明是真命题，那么它也是一个定理，其中一个定理称为另一个定理的**逆定理**.

例如，上面的定理即为勾股定理逆定理，“两直线平行，内错角相等”是“内错角相等，两直线平行”的逆定理. 你还能举出一些例子吗？

随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=\angle B=45^\circ$，$BC=3$，求 AB 的长.

2. 说出下列命题的逆命题，并判断每对命题的真假：

（1）四边形是多边形；

（2）两直线平行，同旁内角互补；

（3）如果 $ab=0$，那么 $a=0$，$b=0$.

3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为边 AC 上的任意一点.

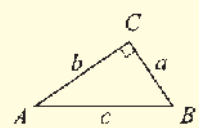
求证：$BD^2+AC^2=CD^2+AB^2$.

读一读

勾股定理的证明

利用教科书给出的基本事实和已有定理，我们可以证明勾股定理.

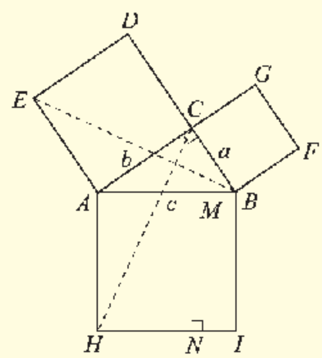
如图 10–18（1），在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.



（1）

分别以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边为边长向外作正方形 $ACDE$，$CBFG$，$ABIH$（如图 10–18（2））.

连接 EB，CH. 作 $CM\perp AB$，并延长 CM 与 HI 交于点 N（如图 10–18（2））. 可以证明：



（2）

图 10–18

在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle CAH$ 中，

$\because EA=CA$（四边形 $ACDE$ 是正方形），

$AB=AH$（四边形 $ABIH$ 是正方形），

$\angle EAB=90^\circ+\angle CAB=\angle CAH$，

$\therefore \triangle EAB\cong\triangle CAH$，

$S_{\text{正方形}ACDE}=2S_{\triangle EAB}$，$S_{\text{长方形}AHNM}=2S_{\triangle CAH}$，

$\therefore b^2=S_{\text{长方形}AHNM}$.

同理 $a^2=S_{\text{长方形}MNIB}$.

$\therefore c^2=a^2+b^2$.

以上是欧几里得在《原本》中证明勾股定理的大致过程.

勾股定理是数学史上非常重要的定理之一. 两千多年来，人们对它进行了大量的研

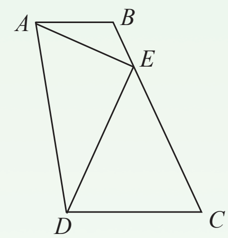
究，给出了多达数百种的证明方法. 如果你有兴趣，可查阅有关资料，了解勾股定理的其他证明方法.

习题 10.8

知识技能

1. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB=13$ cm，$BC=10$ cm，BC边上的中线$AD=12$ cm.
求证：$AB=AC$.

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB/\!/CD$，E为BC上的一点，且$\angle BAE=25°$，$\angle CDE=65°$，$AE=2$，$DE=3$，求AD的长.

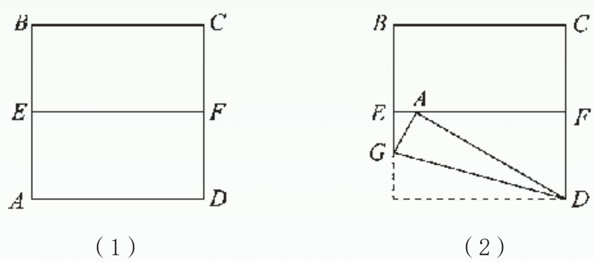


（第 2 题）

联系拓广

※**3.** 命题"在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的锐角等于30°"是真命题吗？如果是，请你证明它.

※**4.** 如图（1），$ABCD$是一张正方形纸片，E，F分别为AB，CD的中点，沿过点D的折痕将A角翻折，使得点A落在EF上（如图（2）），折痕交AE于点G，那么$\angle ADG$等于多少度？你能证明你的结论吗？（提示：利用第3题的结论.）



（第 4 题）

两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形全等吗？如果其中一组等边所对的角是直角呢？

做一做

已知一条直角边和斜边，求作一个直角三角形.

已知：如图 10−19，线段 a，c（$a<c$），直角 α.

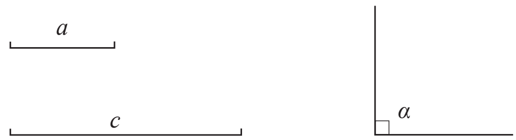
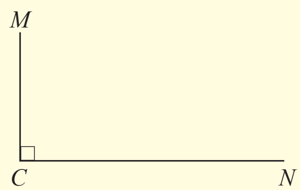
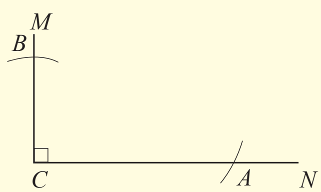
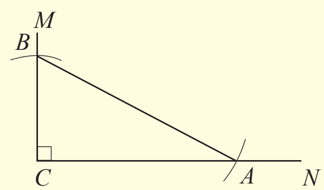


图 10−19

求作：Rt△ABC，使 $\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$，$AB=c$.

小明的作法如下：

（1）作 $\angle MCN=\angle\alpha=90^\circ$. 	（2）在射线 CM 上截取 $CB=a$. 
（3）以点 B 为圆心，线段 c 的长为半径作弧，交射线 CN 于点 A. 	（4）连接 AB，得到 Rt△ABC. 

你作的直角三角形与小明作的全等吗？

定理 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.

这一定理可以简单地用“**斜边、直角边**”或“HL”表示.

已知：如图 10−20，在 △ABC 与 △$A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：△$ABC\cong$△$A'B'C'$.

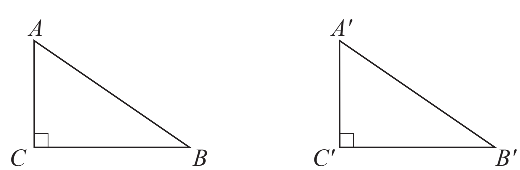


图 10−20

证明：在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore BC^2=AB^2-AC^2$（勾股定理）.

同理，$B'C'^2=A'B'^2-A'C'^2$.

$\because AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

$\therefore BC=B'C'$.

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SSS）.

例　如图 10−21，有两个长度相等的滑梯，左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的长度 DF 相等，两个滑梯的倾斜角 $\angle B$ 和 $\angle F$ 的大小有什么关系？

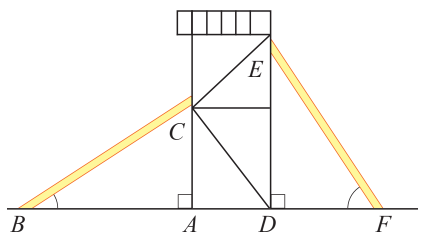


图 10−21

解：根据题意，可知

$\angle BAC=\angle EDF=90^\circ$，

$BC=EF$，$AC=DF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BAC\cong\mathrm{Rt}\triangle EDF$（HL）.

$\therefore \angle B=\angle DEF$（全等三角形的对应角相等）.

$\because \angle DEF+\angle F=90^\circ$，

$\therefore \angle B+\angle F=90^\circ$.

随堂练习

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

（1）两个锐角分别相等的两个直角三角形全等；

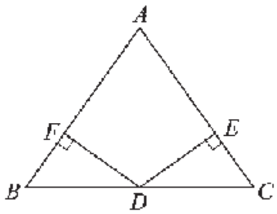
（2）斜边及一锐角分别相等的两个直角三角形全等；

（3）两条直角边分别相等的两个直角三角形全等；

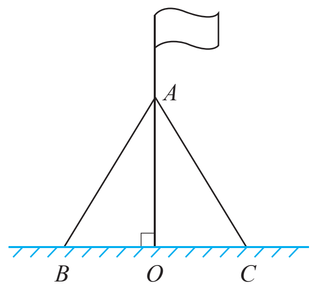
（4）一条直角边相等且另一条直角边上的中线相等的两个直角三角形全等.

2. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$，垂足分别为点 E，F，且 $DE=DF$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，两根长度为 12 m 的绳子，一端系在旗杆上，另一端分别固定在地面的两个木桩上，两个木桩离旗杆底部的距离相等吗？请说明你的理由.

习题 10.9

知识技能

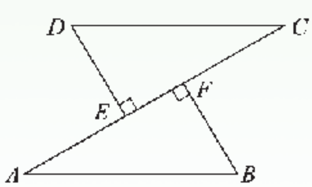
1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

（1）两边分别相等的两个直角三角形全等；

（2）一个锐角和一条边分别相等的两个直角三角形全等.

2. 已知：如图，$AB=CD$，$DE \perp AC$，$BF \perp AC$，垂足分别为点 E，F，$DE=BF$.

求证：（1）$AE=CF$；（2）$AB \parallel CD$.

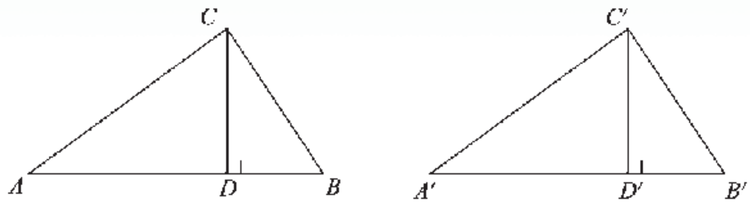


（第 2 题）

数学理解

3. 已知：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90^\circ$，$CD\perp AB$，$C'D'\perp A'B'$，垂足分别是点$D$，$D'$，并且$CD=C'D'$，$AC=A'C'$.

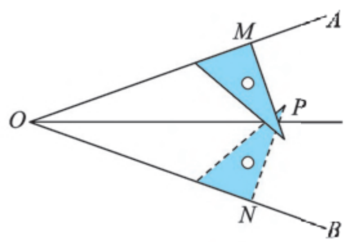
求证：（1）$\angle A=\angle A'$；（2）$AB=A'B'$.



（第 3 题）

问题解决

4. 用三角尺可以画角平分线：如图所示，在已知$\angle AOB$的两边上分别取点M，N，使$OM=ON$，再过点M画OA的垂线，过点N画OB的垂线，两垂线交于点P，那么射线OP就是$\angle AOB$的平分线. 请你证明OP平分$\angle AOB$.



（第 4 题）

4 线段的垂直平分线

我们曾经利用折纸的办法得到：线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等. 你能证明这一结论吗？试一试.

已知：如图 10−22，直线$MN\perp AB$，垂足是点C，且$AC=BC$，P是MN上的任意一点.

求证：$PA=PB$.

分析：要想证明 $PA=PB$，只需证明 $\triangle PCA\cong\triangle PCB$.

如果点 P 与点 C 重合，那么结论显然成立.

证明：$\because MN\perp AB$，

$\therefore \angle PCA=\angle PCB=90^\circ$.

$\because AC=BC$，$PC=PC$，

$\therefore \triangle PCA\cong\triangle PCB$（SAS）.

$\therefore PA=PB$（全等三角形的对应边相等）.

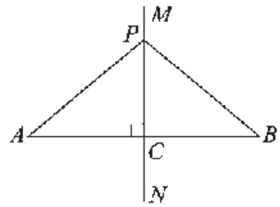


图 10-22

定理 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

想一想

你能写出上面这个定理的逆命题吗？它是真命题吗？如果是，请你证明它.

定理 到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

例 1 已知：如图 10-23，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $OB=OC$.

求证：直线 AO 垂直平分线段 BC.

证明：$\because AB=AC$，

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上（到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上）.

同理，点 O 在线段 BC 的垂直平分线上.

$\therefore$ 直线 AO 是线段 BC 的垂直平分线（两点确定一条直线）.

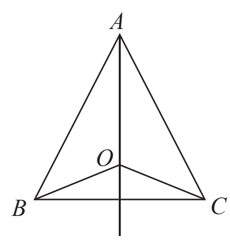


图 10-23

你还有其他证明方法吗？

做一做

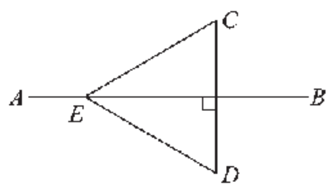
（1）用尺规作出线段 AB（图 10-24）的垂直平分线.

（2）请你就尺规作线段 AB 的垂直平分线方法的正确性给出证明，并与同伴进行交流.

图 10-24

随堂练习

1. 如图，已知 AB 是线段 CD 的垂直平分线，E 是 AB 上的一点. 如果 $EC=7$ cm，那么 $ED=$ ________cm；如果 $\angle ECD=60°$，那么 $\angle EDC=$ ________°.



（第 1 题）

2. 已知：MN 是线段 AB 的垂直平分线，C，D 是 MN 上的两点.

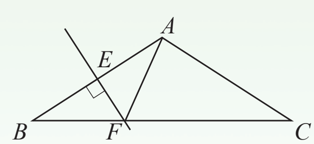
求证：（1）$\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 是等腰三角形；

（2）$\angle CAD=\angle CBD$.

习题 10.10

知识技能

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 E，交 BC 于点 F，连接 AF，求 $\angle AFC$ 的度数.



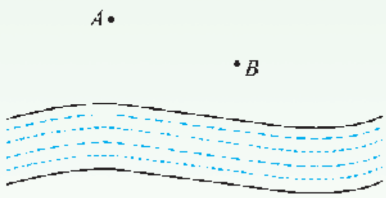
（第 1 题）

数学理解

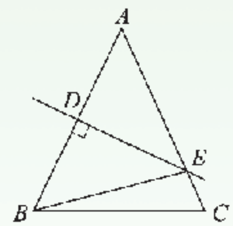
2. 在以线段 AB 为底边的所有等腰三角形中，它们另一个顶点的位置有什么共同特征？

问题解决

3. 如图，A，B 表示两个仓库，要在 A，B 一侧的河岸边建造一个码头，使它到两个仓库的距离相等，码头应建造在什么位置？



（第 3 题）



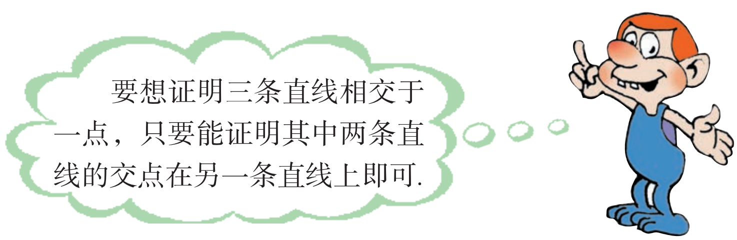
（第 4 题）

4. 如图，在△ABC 中，已知 $AC=27$，$BC=23$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，求△BCE 的周长.

联系拓广

5. 已知直线 l 和 l 上一点 P，利用尺规作直线 l 的垂线，使它经过点 P.

例2 求证：三角形三条边的垂直平分线相交于一点，并且这一点到三个顶点的距离相等.



已知：如图 10−25，在△ABC 中，边 AB，BC 的垂直平分线相交于点 P.

求证：点 P 在边 AC 的垂直平分线上，且 $PA=PB=PC$.

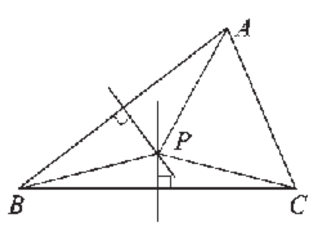


图 10−25

证明： ∵ 点 P 在边 AB 的垂直平分线上，

∴ $PA=PB$（线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等）.

同理，$PB=PC$.

∴ $PA=PB=PC$.

∴ 点 P 在边 AC 的垂直平分线上（到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上）.

议一议

（1）已知三角形的一条边及这条边上的高，你能作出三角形吗？如果能，能作几个？所作出的三角形都全等吗？

（2）已知等腰三角形的底边及底边上的高，你能用尺规作出等腰三角形吗？能作几个？

做一做

已知底边及底边上的高，求作等腰三角形.

已知：线段a，h（如图 10−26（1））.

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

作法：

（1）作线段 $BC=a$（如图10−26（2））.

（2）作线段 BC 的垂直平分线 l，交 BC 于点 D.

（3）在 l 上截取 $DA=h$.

（4）连接 AB，AC.

$\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形.

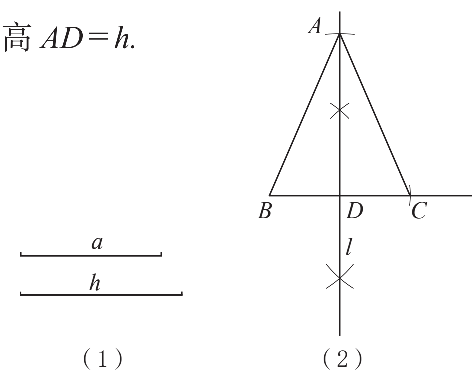


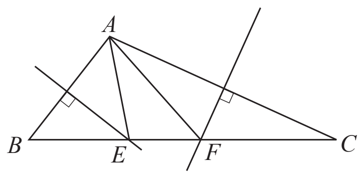
图 10−26

议一议

已知点 P 是直线 l 外一点，那么怎样用尺规作 l 的垂线，使它经过点 P 呢？说说你的作法，并与同伴进行交流.

随堂练习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$\angle BAC>90^\circ$，AB 的垂直平分线交 BC 于点 E，AC 的垂直平分线交 BC 于点 F. 请找出图中相等的线段，并求 $\triangle AEF$ 的周长.

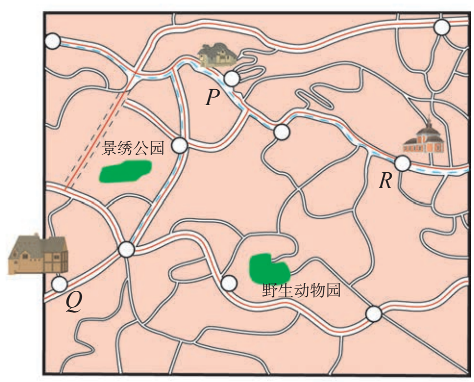


（第 1 题）

2. 为筹办一个大型运动会，某市政府打算修建一个大型体育中心. 在选址过程中，有人建议该体育中心所在位置应与该市三个城镇中心（图中以 P，Q，R 表示）的距离相等.

（1）根据上述建议，试在图（1）中画出体育中心 G 的位置；

（1）



（2）

（第 2 题）

（2）如果这三个城镇的位置如图（2）所示，$\angle RPQ$ 是一个钝角，那么根据上述建议，体育中心 G 应在什么位置？

（3）你对上述建议有何评论？你对选址有什么建议？

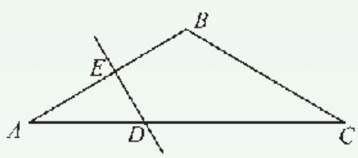
习题 10.11

知识技能

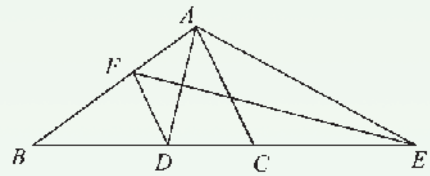
1. 已知线段 a，求作以 a 为底、以 $\frac{1}{2}a$ 为高的等腰三角形. 这个等腰三角形有什么特征?

2. 已知：如图，在△ABC 中，$AB=BC$，$\angle B=120^\circ$，AB 的垂直平分线交 AC 于点 D.

求证：$AD=\frac{1}{2}DC$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，在△ABC 中，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，AD 的垂直平分线交 AB 于点 F，交 BC 的延长线于点 E，连接 AE，DF.

求证：（1）$\angle EAD=\angle EDA$；

（2）$DF /\!/ AC$；

（3）$\angle EAC=\angle B$.

问题解决

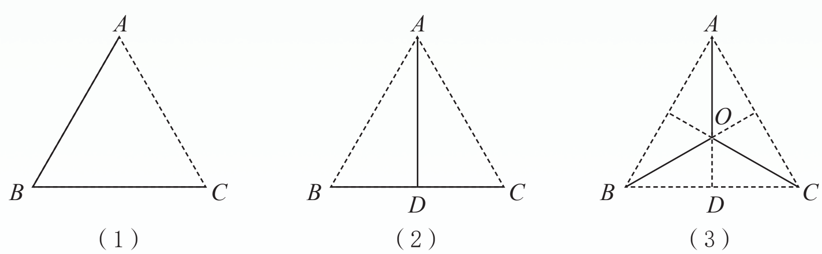
4. 如图，某市三个城镇中心 A，B，C 恰好分别位于一个等边三角形的三个顶点处，在三个城镇中心之间铺设通信光缆，以城镇 A 为出发点设计了三种连接方案：

（1）$AB+BC$；

（2）$AD+BC$（D 为 BC 的中点）；

（3）$OA+OB+OC$（O 为△ABC 三边的垂直平分线的交点）.

要使铺设的光缆长度最短，应选哪种方案?



（第 4 题）

5 角平分线

还记得角平分线上的点有什么性质吗？你是怎样得到的？你能证明它吗？

已知：如图 10−27，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E.

求证：$PD=PE$.

证明： $\because \angle 1=\angle 2$，$OP=OP$，

$\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$，

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO$（AAS）.

$\therefore PD=PE$（全等三角形的对应边相等）.

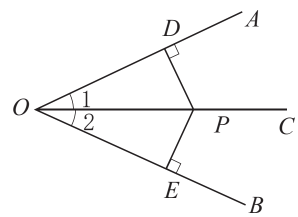


图 10−27

定理　角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

议一议

你能写出这个定理的逆命题吗？它是真命题吗？如果是，请你证明它.

定理　在一个角的内部，并且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

已知：如图 10−28，点 P 为 $\angle AOB$ 内一点，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为 D，E，且 $PD=PE$.

求证：OP 平分 $\angle AOB$.

证明： $\because PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E，

$\therefore \angle ODP=\angle OEP=90^\circ$.

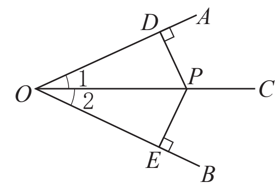


图 10−28

$\because PD=PE$，$OP=OP$，

$\therefore \text{Rt}\triangle DOP \cong \text{Rt}\triangle EOP$（HL）.

$\therefore \angle 1=\angle 2$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$.

例 1 如图 10−29，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，点 D 在 BC 上，$AD=10$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F，且 $DE=DF$，求 DE 的长.

解： $\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F，且 $DE=DF$，

$\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上（在一个角的内部，并且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上），

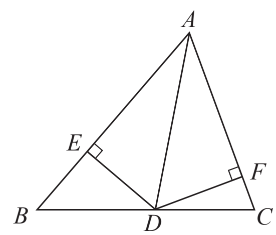


图 10−29

即 AD 平分 $\angle BAC$.

$\because \angle BAC=60^\circ$，

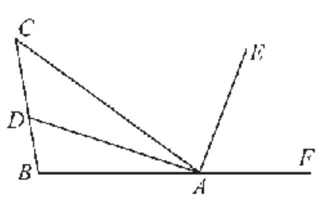
$\therefore \angle BAD=30^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，$\angle AED=90^\circ$，$AD=10$，

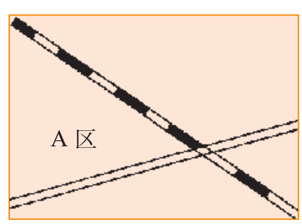
$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=5$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

随堂练习

1. 如图，AD，AE 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的内角平分线和外角平分线，它们有什么位置关系？



（第 1 题）



（第 2 题）

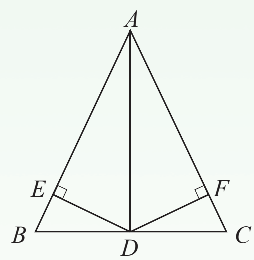
2. 如图，一目标在 A 区，到公路、铁路距离相等，距离公路与铁路交叉处 500 m. 在图上标出它的位置（比例尺 1 : 20 000）.

习题 10.12

知识技能

1. 画一个等腰直角三角形，在它的斜边上求作一点，使它到两条直角边的距离相等（不写画法）. 这一点到直角边的距离与直角边长有什么关系？这一点到三个顶点的距离之间有什么关系？证明你的结论.

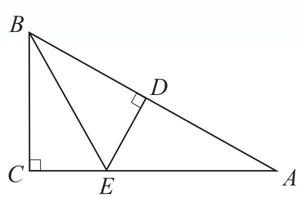
2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$BD=CD$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F. 求证：$EB=FC$.



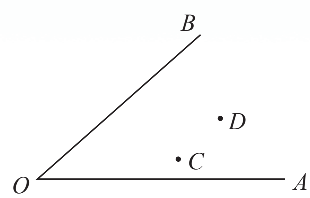
（第 2 题）

联系拓广

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，作 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，连接 BE，则 BE 平分 $\angle ABC$. 请证明这一结论. 你有几种证明方法？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，求作一点 P，使 $PC=PD$，并且点 P 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等.

例 2 求证：三角形的三条角平分线相交于一点，并且这一点到三条边的距离相等.

已知：如图 10−30，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM，CN 相交于点 P，过点 P 分别作 AB，BC，AC 的垂线，垂足分别为点 D，E，F.

求证：点 P 在 $\angle A$ 的平分线上，且 $PD=PE=PF$.

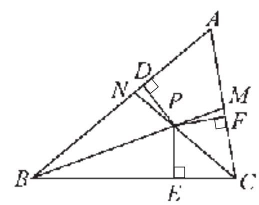


图 10−30

证明：$\because BM$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

$\therefore PD=PE$（角平分线上的点到这个角的两边的距离相等）.

同理，$PE=PF$.

$\therefore PD=PE=PF$.

$\therefore$ 点 P 在 $\angle A$ 的平分线上（在一个角的内部，并且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上）.

例 3 如图 10−31，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle C=90^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，垂足为点 E.

（1）已知 $CD=\sqrt{2}$，求 AC 的长；

（2）求证：$AB=AC+CD$.

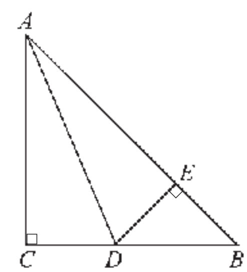


图 10−31

（1）**解：**$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore DE=CD=\sqrt{2}$（角平分线上的点到这个角的两边的距离相等）.

$\because AC=BC$，

$\therefore \angle B=\angle BAC$（等边对等角）.

$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle B=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$.

$\therefore \angle BDE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

$\therefore BE=DE$（等角对等边）.

在等腰直角三角形 BDE 中，

$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$（勾股定理），

$\therefore AC=BC=CD+BD=\sqrt{2}+2$.

（2）**证明**：在 Rt△ACD 和 Rt△AED 中，

∵ $CD=DE$，$AD=AD$，

∴ Rt△ACD ≌ Rt△AED（HL）.

∴ $AC=AE$.

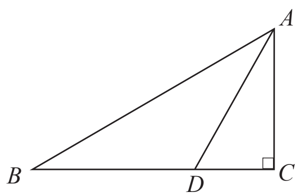
∵ $BE=DE=CD$，

∴ $AB=AE+BE=AC+CD$.

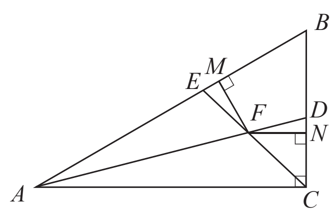
随堂练习

1. 已知：如图，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，AD 是 Rt△ABC 的角平分线.

求证：$BD=2CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=60°$，AD，CE 分别是 $\angle BAC$，$\angle BCA$ 的平分线，AD 与 CE 相交于点 F，$FM\perp AB$，$FN\perp BC$，垂足分别为点 M，N.

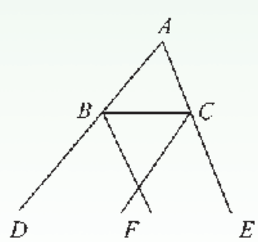
求证：$FE=FD$.

习题 10.13

知识技能

1. 已知：如图，△ABC 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线相交于点 F.

求证：点 F 在 $\angle DAE$ 的平分线上.

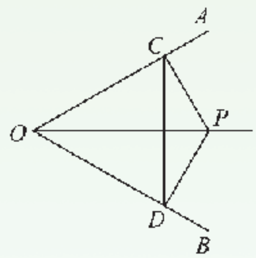


（第 1 题）

2. 已知：如图，P 是 $\angle AOB$ 的平分线上的一点，$PC \perp OA$，$PD \perp OB$，垂足分别为点 C，D.

求证：（1）$OC=OD$；

（2）OP 是 CD 的垂直平分线.



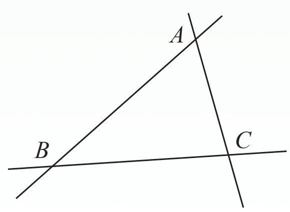
（第 2 题）

问题解决

3. 如图，三条公路分别相交于 A，B，C 三点，现计划修建一个油库.

（1）如果要求油库到两条公路 AB，AC 的距离都相等，那么如何选择油库的位置？

（2）如果要求油库到这三条公路的距离都相等，那么如何选择油库的位置？



（第 3 题）

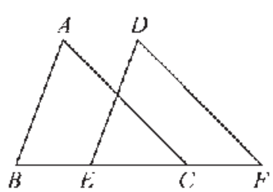
回顾与思考

1. 说说作为证明基础的几条基本事实.
2. 什么是互逆命题？如果原命题是真命题，那么它的逆命题也是真命题吗？举例说明.
3. 判定两个三角形全等，常用的思路有哪些？与同伴进行交流.
4. 等腰三角形和直角三角形都是特殊的三角形，它们除具有一般三角形的性质外，还有一些特殊的性质. 你掌握了它们的哪些特殊性质？与同伴进行交流.
5. 判定两个等腰三角形或两个直角三角形全等，除用判定一般三角形全等的基本事实、定理外，还有哪些判定方法？
6. 线段的垂直平分线的性质定理及逆定理的内容是什么？角平分线的性质定理及逆定理呢？
7. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

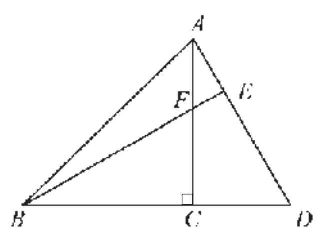
复习题

知识技能

1. 已知：如图，点 B，E，C，F 在同一条直线上，$AB // DE$，$AC // DF$，$BE = CF$.
求证：$AC = DF$.



（第 1 题）



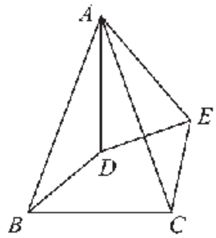
（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABD$ 中，$AC \perp BD$，垂足为点 C，BE 与 AC 相交于点 F，$AC = BC$，$CD = CF$.
求证：（1）$\angle DBF = \angle CAD$；（2）$BE \perp AD$.

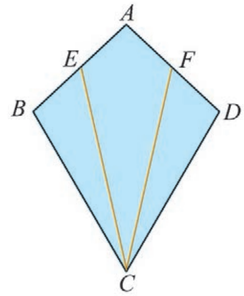
3. 如图，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，$BD=CE$.

（1）由题设可推出图中哪两个角相等？试给出证明；

（2）如果 AD 把 $\angle BAC$ 平分，那么 AC 与 DE 的位置关系怎样？证明你的结论.



（第 3 题）



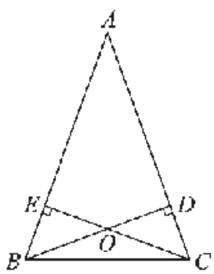
（第 4 题）

4. 已知：如图，在一个风筝 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$BC=DC$，分别在 AB，AD 的中点 E，F 处拉两根彩线 EC，FC.

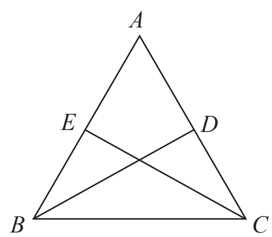
求证：$EC=FC$.

5. 已知：如图，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的高，且 $BD=CE$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$.

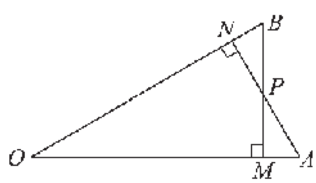
（1）如果 $\angle ABD=\angle ACE$，那么 $BD=CE$ 吗？

（2）如果 $AD=AE$，那么 $BD=CE$ 吗？

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数之比是 $1:2:3$，$AB=\sqrt{3}$，求 AC 的长.

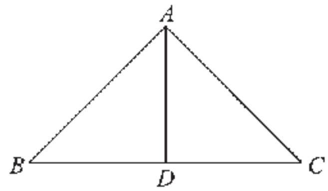
8. 已知：如图，$AN\perp OB$，$BM\perp OA$，垂足分别为 N，M，$OM=ON$，AN，BM 相交于点 P.

求证：$PM=PN$.



（第 8 题）

9. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=a$，AD是$\triangle ABC$的高，求AD的长.



（第 9 题）

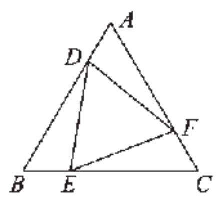
10. 任意作一个钝角，求作它的角平分线.

11. 已知线段a，求作以a为底、以$2a$为高的等腰三角形.

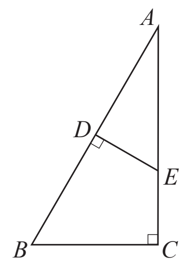
数学理解

12. 已知：如图，$\triangle ABC$是等边三角形，D，E，F分别是AB，BC，CA上的点，且$AD=BE=CF$.

求证：$\triangle DEF$为等边三角形 .



（第 12 题）



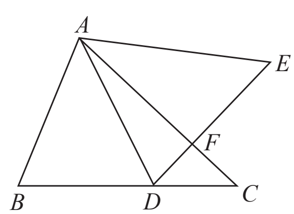
（第 13 题）

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，AB的垂直平分线分别交AB，AC于点D，E.

求证：$AE=2CE$.

14. 求证：等腰三角形的底角必为锐角.

15. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=64°$，$\angle BAC=72°$，D为BC上一点，DE交AC于点F，且$AB=AD=DE$，连接AE，$\angle E=55°$. 请判断$\triangle AFD$的形状，并说明理由.

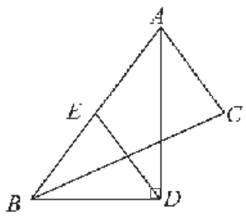


（第 15 题）

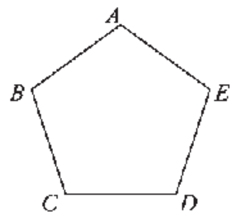
联系拓广

16. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，过点B作$\angle BAC$的平分线的垂线，垂足为点D，$DE /\!/ AC$，交AB于点E.

求证：$AE=BE$.



（第16题）

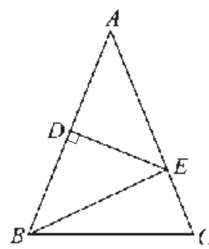


（第17题）

17. 已知：如图，$AB=AE$，$BC=ED$，$\angle B=\angle E$.

求证：$\angle C=\angle D$.

18. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AB的垂直平分线交AB于点D，交AC于点E. 已知$\triangle BCE$的周长为8，$AC-BC=2$，求AB与BC的长.



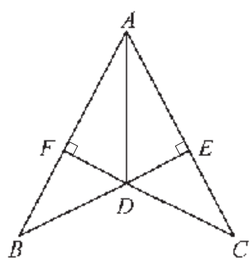
（第18题）

19. 用尺规作出一个45°的角.

20. 求作等腰直角三角形，使其斜边等于已知线段.（保留作图痕迹，不必写作法）

21. 已知：如图，$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，垂足分别是点E，F. BE，CF相交于点D，且$BD=CD$.

求证：AD平分$\angle BAC$.



（第21题）

第十一章　一元一次不等式与一元一次不等式组

烟花给节日增添了喜庆的气氛，你是否想过，烟花引火线的安全长度会与某种“不等关系”有关吗？也许，你对手机通话费以及打折购物等消费方案的选择并不陌生，但你知道它们同样会涉及一些“不等关系”吗？其实，与相等关系相比，不等关系更为普遍.

与一元一次方程的学习类似，本章将研究不等式的性质、一元一次不等式（组）的解法，并通过解决一些简单的实际问题，体会不等式的模型思想及一元一次不等式、一次函数、一元一次方程之间的内在联系.

学习目标

- 经历探索、发现不等关系的过程，进一步体会模型思想
- 探索并掌握不等式的基本性质，体会类比的思想方法
- 会解一元一次不等式（组）并直观表示其解集，发展几何直观
- 能够用一元一次不等式解决一些简单的实际问题
- 体会不等式、函数、方程之间的联系

1 不等关系

如图 11-1，用两根长度均为 l cm 的绳子分别围成一个正方形和一个圆.

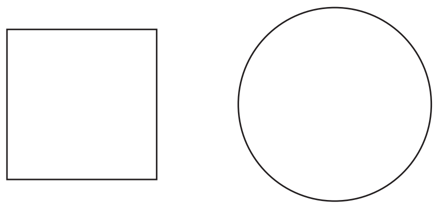


图 11-1

（1）如果要使正方形的面积不大于❶ 25 cm^2，那么绳长 l 应满足怎样的关系式？

（2）如果要使圆的面积不小于 100 cm^2，那么绳长 l 应满足怎样的关系式？

（3）当 $l=8$ 时，正方形和圆的面积哪个大？$l=12$ 时呢？改变 l 的取值再试一试，由此你能得到什么猜想？

做一做

（1）铁路部门对旅客随身携带的行李有如下规定：每件行李的长、宽、高三边之和不得超过 160 cm. 设行李的长、宽、高分别为 a cm，b cm，c cm，请你列出行李的长、宽、高满足的关系式.

（2）通过测量一棵树的树围（树干的周长）可以估计出它的树龄. 通常规定以树干离地面 1.5 m 的地方为测量部位. 某棵树栽种时的树围为 6 cm，以后 10 年内每年增加约 3 cm，设经过 x 年后这棵树的树围超过 30 cm，请你列出 x 满足的关系式.

❶ “不大于”指的是“小于或等于”，通常用符号“≤”表示. 例如，x 不大于 10 可以表示为 $x\leqslant 10$（读作“x 小于或等于 10”）. 类似地，“不小于”指的是“大于或等于”，通常用符号“≥”表示（读作“大于或等于”）.

议一议

观察由上述问题得到的关系式：$\frac{l^2}{4\pi}>\frac{l^2}{16}$，$a+b+c\leqslant160$，$6+3x>30$，它们有什么共同特点？

一般地，用不等号“<”（或“≤”），“>”（或“≥”）连接的式子叫做**不等式**（inequality）.

例　用适当的不等号表示下列关系：

（1）a 是正数；

（2）x 的 2 倍与 3 的和小于 4；

（3）x 的一半与 6 的和大于 x 的 4 倍；

（4）x 的 3 倍不大于 x 与 3 的差.

解：（1）$a>0$；

（2）$2x+3<4$；

（3）$\frac{1}{2}x+6>4x$；

（4）$3x\leqslant x-3$.

随堂练习

1. 试举几个用不等式表示的例子.

2. 用适当的不等号表示下列关系：

（1）a 是非负数；

（2）直角三角形的一条直角边 a 比斜边 c 短；

（3）x 与 17 的和比它的 5 倍小；

（4）两数的平方和不小于这两数积的 2 倍.

习题 11.1

知识技能

1. 用适当的不等号表示下列关系：

（1）x 的 3 倍与 8 的和比 x 的 5 倍大；

（2）x^2 是非负数；

（3）地球上的海洋面积大于陆地面积；

（4）老师的年龄比小明年龄的 2 倍还大；

（5）铅球的质量比篮球的质量大.

数学理解

2. 请设计不同的实际背景来表示下列不等式：

（1）$x+y\leqslant 5$；　　（2）$2x+1\geqslant 3$.

问题解决

3. 用甲、乙两种原料配制成某种饮料，已知这两种原料的维生素 C 含量及购买这两种原料的价格如下表：

原料 维生素含量及价格	甲种原料	乙种原料
维生素 C 含量/（单位/千克）	600	100
原料价格/（元/千克）	8	4

现配制这种饮料 10 千克，要求至少含有 4 200 单位的维生素 C，试写出所需甲种原料的质量 x（千克）应满足的不等式.

4. 在第 3 题的条件下，如果还要求购买甲、乙两种原料的费用不超过 72 元，那么你能写出 x（千克）应满足的另一个不等式吗？

联系拓广

5.（1）在通过桥洞时，我们往往会看到如图（1）所示的标志，这是限制车高的标志. 你知道通过该桥洞的车高 x（m）的范围吗？

（2）在通过桥面时，我们往往会看到如图（2）所示的标志，这是限制车重的标志. 你知道通过该桥面的车重 y（t）的范围吗？

（1）

（2）

（第 5 题）

2 不等式的基本性质

还记得等式的基本性质吗?

如果在不等式的两边都加上或都减去同一个整式，那么结果会怎样?请举几例试一试，并与同伴交流.

不等式的基本性质1[1] 不等式的两边都加(或减)同一个整式，不等号的方向不变.

做一做

完成下列填空:

$$2<3;$$

$$2\times5\ \underline{\qquad\qquad}\ 3\times5;$$

$$2\times\frac{1}{2}\ \underline{\qquad\qquad}\ 3\times\frac{1}{2};$$

$$2\times(-1)\ \underline{\qquad\qquad}\ 3\times(-1);$$

$$2\times(-5)\ \underline{\qquad\qquad}\ 3\times(-5);$$

$$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\ \underline{\qquad\qquad}\ 3\times\left(-\frac{1}{2}\right).$$

你发现了什么?请再举几例试一试，还有类似的结论吗?与同伴交流.

不等式的基本性质 2 不等式的两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向________.

不等式的基本性质 3 不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向________.

[1] 数学上可以证明，本节所述不等式的三个基本性质都是正确的.

在上一节课中，我们猜想，无论绳长 l 取何值，圆的面积总大于正方形的面积，即 $\frac{l^2}{4\pi}>\frac{l^2}{16}$.

你相信这个结论吗？你能利用不等式的基本性质解释这一结论吗？

例　将下列不等式化成“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

（1）$x-5>-1$；　　（2）$-2x>3$.

解：（1）根据不等式的基本性质 1，两边都加 5，得

$$x>-1+5,$$

即

$$x>4;$$

（2）根据不等式的基本性质 3，两边都除以 -2，得

$$x<-\frac{3}{2}.$$

随堂练习

1. 将下列不等式化成“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

（1）$x-1>2$；　（2）$-x<\frac{5}{6}$；　（3）$\frac{1}{2}x\leqslant 3$.

2. 已知 $x>y$，下列不等式中哪些一定成立？

（1）$x-6<y-6$；　（2）$3x<3y$；

（3）$-2x<-2y$；　（4）$2x+1>2y+1$.

习题 11.2

知识技能

1. 已知 $a<b$，用“<”或“>”填空：

（1）$a-3$ ________ $b-3$；　（2）$6a$ ________ $6b$；

（3）$-a$ ________ $-b$；　（4）$a-b$ ________ 0.

2. 将下列不等式化成“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

（1）$x+3<-1$；　（2）$3x>27$；

（3）$-\frac{x}{3}>5$；　（4）$5x<4x-6$.

数学理解

3. (1) 比较 a 与 $a+2$ 的大小； (2) 比较 2 与 $2+a$ 的大小.

4. 举例说明不等式的基本性质与等式的基本性质的区别.

3 不等式的解集

燃放某种烟花时，为了确保安全，燃放者在点燃引火线后要在燃放前转移到 10 m 以外的安全区域. 已知引火线的燃烧速度为 0.02 m/s，燃放者离开的速度为 4 m/s，那么引火线的长度至少是多少厘米?

设引火线的长度应为 x cm，根据题意，得

$$\frac{x}{0.02\times 100}>\frac{10}{4}.$$

根据不等式的基本性质，得

$$x>5.$$

所以，引火线的长度应大于 5 cm.

想一想

(1) $x=4$，5，6，7.2 能使不等式 $x>5$ 成立吗?

(2) 你还能找出一些使不等式 $x>5$ 成立的 x 的值吗?

能使不等式成立的未知数的值，叫做**不等式的解**. 一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的**解集**(solution set). 例如，5 是不等式 $x+1>5$ 的一个解，4.2，6，7，8，…也是它的解，不等式 $x+1>5$ 的解集是 $x>4$；不等式 $x^2>0$ 的解集是所有非零实数.

求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.

议一议

请你用自己的方式将不等式 $x>5$ 的解集和不等式 $x-5\leqslant-1$ 的解集分别表示在数轴上，并与同伴进行交流.

不等式 $x>5$ 的解集可以用数轴上表示 5 的点的右边部分来表示（如图 11−2），在数轴上表示 5 的点的位置上画空心圆圈，表示 5 不在这个解集内.

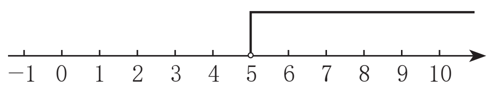


图 11−2

不等式 $x-5\leqslant-1$ 的解集 $x\leqslant4$ 可以用数轴上表示 4 的点及其左边部分来表示（如图 11−3），在数轴上表示 4 的点的位置上画实心圆点，表示 4 在这个解集内.

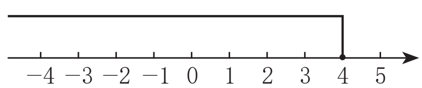


图 11−3

随堂练习

1. 判断正误：

（1）不等式 $x-1>0$ 有无数个解；（　　）

（2）不等式 $2x-3\leqslant0$ 的解集为 $x\geqslant\frac{2}{3}$.（　　）

2. 将下列不等式的解集分别表示在数轴上：

（1）$x>4$；　（2）$x<-1$；

（3）$x\geqslant-2$；　（4）$x\leqslant6$.

习题 11.3

知识技能

1. 在 0，-4，3，-3，$\frac{1}{5}$，-5，4，-10 中，_______是方程 $x+4=0$ 的解；_______是不等式 $x+4\geqslant 0$ 的解；_______是不等式 $x+4<0$ 的解.

2. 将下列不等式的解集分别表示在数轴上：

（1）$x\leqslant 0$；（2）$x>-2.5$；

（3）$x<\frac{2}{3}$；（4）$x\geqslant 4$.

数学理解

3.（1）不等式 $x<\frac{10}{3}$ 有多少个解？请找出几个；

（2）不等式 $x<\frac{10}{3}$ 有多少个正整数解？请一一写出来.

问题解决

4. 某弹簧秤的称量范围是 0~50 N，小明未注意弹簧秤的称量范围，用它称量了一个物体，取下物体后，发现弹簧没有恢复原状. 你知道这个物体的重力在什么范围吗？

4 一元一次不等式

观察下列不等式：

$$6+3x>30,\quad x+17\leqslant 5x,\quad x>5,\quad \frac{x}{0.02\times 100}>\frac{10}{4}.$$

这些不等式有哪些共同特点？

这些不等式的左右两边都是整式，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，像这样的不等式，叫做**一元一次不等式**（linear inequality with one unknown）.

想一想

在前面几节课中，你列出了哪些一元一次不等式？试举两例，并与同伴交流.

例 1 解不等式 $3-x<2x+6$，并把它的解集表示在数轴上.

解： 两边都加 $-2x$，得

$$3-x-2x<2x+6-2x.$$

合并同类项，得

$$3-3x<6.$$

两边都加 -3，得

$$3-3x-3<6-3.$$

合并同类项，得

$$-3x<3.$$

两边都除以 -3，得

$$x>-1.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 11−4 所示：

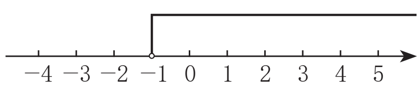


图 11−4

例 2 解不等式 $\frac{x-2}{2}\geqslant\frac{7-x}{3}$，并把它的解集表示在数轴上.

解： 去分母，得

$$3(x-2)\geqslant 2(7-x).$$

去括号，得

$$3x-6\geqslant 14-2x.$$

移项、合并同类项，得

$$5x\geqslant 20.$$

两边都除以 5，得

$$x \geqslant 4.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 11–5 所示：

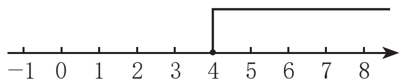


图 11–5

随堂练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集分别表示在数轴上：

（1）$5x<200$；　　（2）$-\dfrac{x+1}{2}<3$；

（3）$x-4\geqslant 2(x+2)$；　　（4）$\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{4x-5}{3}$.

2. 求不等式 $4(x+1)\leqslant 24$ 的正整数解.

习题 11.4

知识技能

1. 解下列不等式，并把它们的解集分别表示在数轴上：

（1）$-x+1>7x-3$；　　（2）$\dfrac{1-2x}{3}\geqslant\dfrac{4-3x}{6}$；

（3）$\dfrac{x}{5}+1<x$；　　（4）$\dfrac{x+3}{7}>x-5$；

（5）$\dfrac{x}{2}+2\leqslant\dfrac{x}{3}-1$；　　（6）$6(x-1)\geqslant 3+4x$.

2. 三个连续正偶数的和小于 19，这样的正偶数组共有多少组？把它们都写出来.

数学理解

3. 下面是小明同学解不等式 $\dfrac{x+5}{2}-1<\dfrac{3x+2}{2}$ 的过程：

去分母，得 $x+5-1<3x+2$.

移项、合并同类项，得 $-2x<-2$.

两边都除以 -2，得 $x<1$.

他的解法有错误吗？如果有错误，请你指出错在哪里.

做一做

某种商品进价为 200 元，标价 300 元出售，商场规定可以打折销售，但其利润率不能少于 5%. 请你帮助售货员计算一下，此种商品可以按几折销售？

例 3 一次环保知识竞赛共有 25 道题，规定答对一道题得 4 分，答错或不答一道题扣 1 分. 在这次竞赛中，小明的得分为优秀（85 分或 85 分以上），小明至少答对了几道题？

解：设小明答对了 x 道题，则他答错和不答的共有（$25-x$）道题. 根据题意，得

$$4x-1\times(25-x)\geqslant 85.$$

解这个不等式，得

$$x\geqslant 22.$$

所以，小明至少答对了 22 道题.

例 4 一辆客车从甲地开往乙地，出发 10 min 后，一辆轿车也从甲地开往乙地，轿车的速度是 120 km/h，轿车出发 30 min 内就超过了客车，则客车的速度小于多少？

解：设客车的速度是 x km/h，根据题意，得

$$\frac{10+30}{60}\cdot x<120\times\frac{30}{60}.$$

解这个不等式，得

$$x<90.$$

所以，客车的速度小于 90 km/h.

随堂练习

1. 某种商品的进价为 400 元，出售时标价为 500 元，后来由于该商品积压，商店准备打折出售，但要保持利润率不低于 10%，则最低可打几折？

2. 小明准备用 26 元买火腿肠和方便面，已知一根火腿肠 2 元，一盒方便面 3 元，他买了 5 盒方便面，他最多还能买多少根火腿肠？

习题 11.5

知识技能

1. 解下列不等式：

（1）$\frac{x-5}{2}+1>x-3$；　　（2）$-\frac{x}{5}+\frac{x}{15}\leqslant-1$；

（3）$\frac{1}{3}x-2<1-\frac{1}{5}x$；　　（4）$x-(3x-1)\leqslant x+2$.

问题解决

2. 小颖准备用 21 元买笔和笔记本. 已知每支笔 3 元，每个笔记本 2.2 元，她买了 2 个笔记本. 请你帮她算一算，她还可能买几支笔？

3. 某校学生会组织七、八年级共 60 名同学参加环保活动，七年级学生平均每人收集 15 个废弃塑料瓶，八年级学生平均每人收集 20 个废弃塑料瓶. 若所收集的塑料瓶总数不少于 1 000 个，至少有多少名八年级学生参加活动？

4. 某个广告公司规定：设计一份广告 200 元，每印一份 0.4 元. 客户老王在这个广告公司设计了一份广告，并印了若干份，平均每份的成本不高于 0.5 元. 老王至少印了多少份？

5 一元一次不等式与一次函数

函数 $y=2x-5$ 的图象如图 11-6 所示，观察图象回答下列问题：

（1）x 取何值时，$y=0$？

（2）x 取哪些值时，$y>0$？

（3）x 取哪些值时，$y<0$？

（4）x 取哪些值时，$y>1$？

你是怎样思考的？与同伴进行交流.

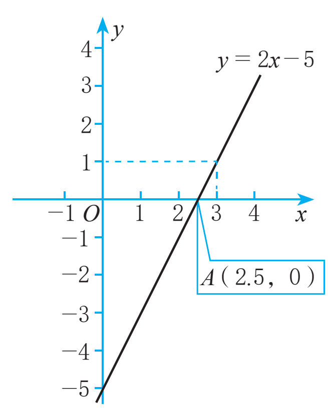


图 11-6

做一做

函数 $y_1=2x-5$ 和 $y_2=x-2$ 的图象如图 11−7 所示，观察图象回答下列问题：

（1）x 取何值时，$y_1=y_2$？

（2）x 取何值时，$y_1>y_2$？

（3）x 取何值时，$y_1<y_2$？

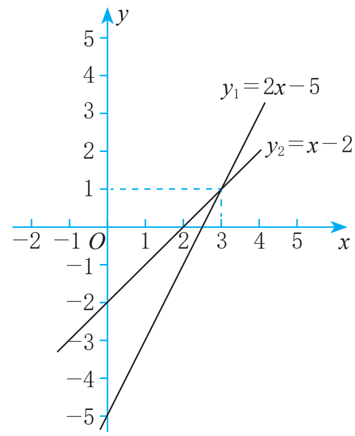


图 11−7

从图象上看，$y_1=y_2$ 时，两个一次函数的图象交于一点，此点的横坐标就是方程 $2x-5=x-2$ 的解；一次函数 $y_1=2x-5$ 的图象在 $y_2=x-2$ 的图象上方的部分对应点的横坐标就是不等式 $2x-5>x-2$ 的解；一次函数 $y_1=2x-5$ 的图象在 $y_2=x-2$ 的图象下方的部分对应点的横坐标就是不等式 $2x-5<x-2$ 的解.

随堂练习

已知 $y_1=-x+3$，$y_2=3x-4$，当 x 取何值时，$y_1>y_2$？你是怎样做的？与同伴交流.

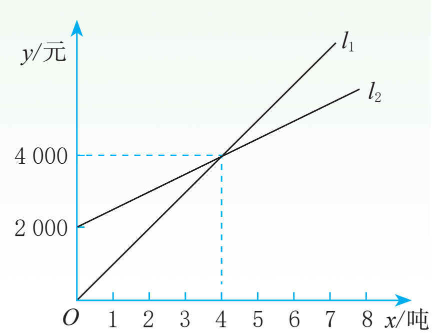
习题 11.6

知识技能

1. 若 $y_1=2x+3$，$y_2=3x-1$，当 x 取何值时，$y_1<y_2$？

问题解决

2. 如图，l_1 反映了某产品的销售收入与销售量之间的关系，l_2 反映了该产品的销售成本与销售量之间的关系，当销售收入大于销售成本时，该产品才开始赢利. 该产品的销售量达到多少吨时，生产该产品才能赢利？



（第 2 题）

3. 小明和姐姐在同一学校上学，从家到学校的距离是 2 km，他们走路的速度为 4 km/h，跑步的速度为 10 km/h. 请你根据以上信息，设计一个可以用一元一次不等式解决的问题，并给出解决方案.

做一做

兄弟俩赛跑，哥哥先让弟弟跑 9 m，然后自己开始跑. 已知弟弟每秒跑 3 m，哥哥每秒跑 4 m，何时弟弟跑在前面？何时哥哥跑在前面？

（1）设哥哥跑的时间为 x，你能分别列出哥哥、弟弟跑的路程 y（m）与时间 x（s）之间的函数关系式吗？

（2）试画出这两个函数的图象，根据图象判断何时哥哥跑在前面，何时弟弟跑在前面.

议一议

在上面问题中，列出函数关系式后，不画图象，你能判断何时哥哥跑在前面吗？

小明是这样想的：

哥哥、弟弟所跑的路程 y（m）与时间 x（s）的函数关系式分别是 $y=4x$ 和 $y=9+3x$. 当他俩并列时，$4x=9+3x$，此时 $x=9$，那么当 $x>9$ 时，$4x>9+3x$，哥哥跑在前面；当 $x<9$ 时，$4x<9+3x$，弟弟跑在前面.

你同意他的想法吗？

例 某单位计划在新年期间组织员工到某地旅游，参加旅游的人数估计为 10 至 25 人，甲、乙两家旅行社的服务质量相同，且报价都是每人 200 元. 经过协商，甲旅行社表示可给予每位游客七五折优惠；乙旅行社表示可先免去一位游客的旅游费用，其余游客八折优惠. 该单位选择哪一家旅行社支付的旅游费用较少？

解： 设该单位参加这次旅游的人数是 x 人，选择甲旅行社时，所需的费用为 y_1 元，选择乙旅行社时，所需的费用为 y_2 元，则

$y_1=200\times0.75x$，即 $y_1=150x$；

$y_2=200\times0.8(x-1)$，即 $y_2=160x-160$.

由 $y_1=y_2$，得 $150x=160x-160$，解得 $x=16$.

当 $x<16$时，$150x>160x-160$；

当 $x>16$时，$150x<160x-160$.

因为参加旅游的人数为 10 至 25 人，所以，当 $x=16$ 时，甲、乙两家旅行社的收费相同；当 $17\leqslant x\leqslant25$ 时，选择甲旅行社费用较少；当 $10\leqslant x\leqslant15$ 时，选择乙旅行社费用较少.

随堂练习

某公司 40 名员工到一景点集体参观，该景点规定满 40 人可以购买团体票，票价打八折. 这天恰逢妇女节，该景点做活动，女士票价打五折，但不能同时享受两种优惠. 请你帮助他们选择购票方案.

习题 11.7

问题解决

1. 某单位要制作一批宣传材料. 甲公司提出：每份材料收费 20 元，另收 3 000 元设计费；乙公司提出：每份材料收费 30 元，不收设计费.

(1) 什么情况下选择甲公司比较合算?

(2) 什么情况下选择乙公司比较合算?

(3) 什么情况下两公司的收费相同?

2. 某学校计划购买若干台电脑，现从两家商场了解到同一型号电脑每台报价均为 4 000 元，并且多买都有一定的优惠. 甲商场的优惠条件是：第一台按原报价收费，其余每台优惠 25%；乙商场的优惠条件是：每台优惠 20%.

(1) 什么情况下到甲商场购买更优惠?

(2) 什么情况下到乙商场购买更优惠?

(3) 什么情况下两家商场的收费相同?

3. 某电信公司有甲、乙两种手机收费业务. 甲种业务规定月租费 10 元，每通话 1 min 收费 0.3 元；乙种业务不收月租费，但每通话 1 min 收费 0.4 元. 你认为何时选择甲种业务更合算? 何时选择乙种业务更合算?

6 一元一次不等式组

某校今年冬季烧煤取暖时间为 4 个月. 如果每月比计划多烧 5 吨煤，那么取暖用煤总量将超过 100 吨；如果每月比计划少烧 5 吨煤，那么取暖用煤总量不足 68 吨. 该校计划每月烧煤多少吨?

设该校计划每月烧煤 x 吨，根据题意，得

$$4(x+5)>100, \quad ①$$

且

$$4(x-5)<68. \quad ②$$

未知数 x 同时满足 ① ② 两个条件. 把 ① ② 两个不等式合在一起，就组成一个一元一次不等式组，记作

$$\begin{cases} 4(x+5)>100, \\ 4(x-5)<68. \end{cases} \quad (*)$$

一般地，关于同一未知数的几个一元一次不等式合在一起，就组成一个**一元一次不等式组**（system of linear inequalities with one unknown）.

想一想

你能尝试找出符合上面一元一次不等式组（*）的未知数的值吗？与同伴进行交流.

一元一次不等式组中各个不等式的解集的公共部分，叫做这个**一元一次不等式组的解集**. 求不等式组的解集的过程，叫做**解不等式组**.

例 1 解不等式组：

$$\begin{cases} 2x-1>-x, & ① \\ \frac{1}{2}x<3. & ② \end{cases}$$

解： 解不等式①，得

$$x>\frac{1}{3}.$$

解不等式②，得

$$x<6.$$

在同一条数轴上表示不等式①②的解集，如图 11−8.

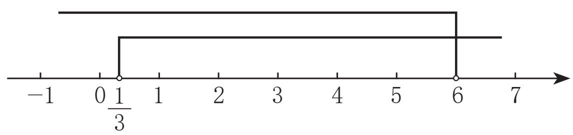


图 11−8

因此，原不等式组的解集为

$$\frac{1}{3}<x<6.$$

随堂练习

1. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 2x>1, \\ x-3<0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x-2>-1, \\ 3x+1<8. \end{cases}$

2. 解答本节课一开始提出的“烧煤取暖”问题.

习题 11.8

知识技能

1. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x-5<1, \\ 2x>3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x-5>0, \\ 3-x>-1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 3x-1>5, \\ 2x<6; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} \frac{1}{2}x>\frac{1}{3}x, \\ 4x-3\leqslant 1; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} -2x\geqslant 0, \\ 3x+5\geqslant 0; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} \frac{x+1}{2}<1; \\ 7x-8<9x. \end{cases}$

数学理解

2. 不等式 $3x-7<x$ 的解集、不等式 $2-5x<2x$ 的解集与不等式组 $\begin{cases} 3x-7<x, \\ 2-5x<2x \end{cases}$ 的解集之间有什么关系？

※**3.** 如果方程组 $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=a \end{cases}$ 的解 x，y 都是正数，那么你能求出 a 的取值范围吗？

问题解决

4. 一台装载机每小时可装载石料 50 t. 一堆石料的质量在 1 800 t 到 2 200 t 之间，那么这台装载机大约要用多长时间才能将这堆石料装完？

做一做

在什么条件下，长度为 3 cm，7 cm，x cm 的三条线段可以围成一个三角形？

你和同伴所列的不等式组一样吗？解集呢？与同伴进行交流.

例 2　解不等式组：

$$\begin{cases} 3x-2<x+1, & ① \\ x+5>4x+1. & ② \end{cases}$$

解： 解不等式 ①，得

$$x<\frac{3}{2}.$$

解不等式 ②，得

$$x<\frac{4}{3}.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集，如图 11−9.

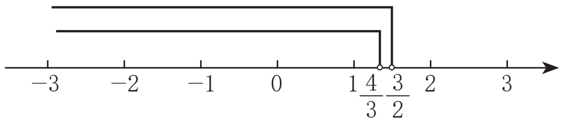


图 11-9

所以，原不等式组的解集是

$$x<\frac{4}{3}.$$

例 3 解不等式组：

$$\begin{cases}5x-2>3(x+1), & ①\\ \frac{1}{2}x-1\geqslant 7-\frac{3}{2}x. & ②\end{cases}$$

解：解不等式 ①，得

$$x>\frac{5}{2}.$$

解不等式 ②，得

$$x\geqslant 4.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集，如图 11-10.

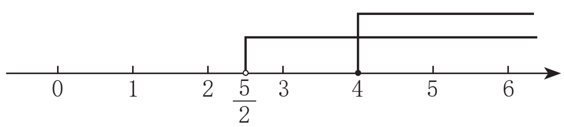


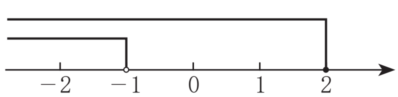
图 11-10

所以，原不等式组的解集是

$$x\geqslant 4.$$

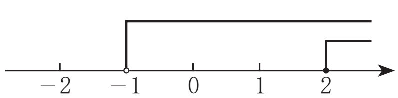
随堂练习

1. 根据下列图形，分别在图后的横线上写出相应不等式组的解集.

(1) 

（第 1（1）题）

解集是 ________；

(2) 

（第 1（2）题）

解集是 ________.

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x+3<5, \\ 3x-1<8; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1<2(x-1), \\ \dfrac{x}{3}>\dfrac{x+2}{5}. \end{cases}$

习题 11.9

知识技能

1. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x-1>2x, \\ \dfrac{x}{2}+3<-2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x+5\leqslant 3(x+2), \\ \dfrac{x-1}{2}>\dfrac{x}{3}; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 0.2x>0.3x+1, \\ 0.5x-1<0.2; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{2}\geqslant -1. \end{cases}$

数学理解

2. 三个数 3，$1-a$，$1-2a$ 在数轴上从左到右依次排列，你能确定 a 的取值范围吗？

※**3.** 小明、小华、小刚三人在一起讨论一个一元一次不等式组.

小明：它的所有解为非负数；

小华：其中一个不等式的解集为 $x\leqslant 8$；

小刚：其中有一个不等式在求解的过程中需要改变不等号的方向.

请你试着写出符合上述条件的不等式组，并解这个不等式组.

联系拓广

※**4.** 已知不等式组

$$\begin{cases} 2x-a<1, \\ x-2b>3 \end{cases}$$

的解集为 $-1<x<1$，则 $(a+1)(b-1)$ 的值等于多少？

做一做

解不等式组

$$\begin{cases} x+3<5, & ① \\ 2x-1>11. & ② \end{cases}$$

解不等式①，得

$$x<2.$$

解不等式②，得

$$x>6.$$

在同一条数轴上表示不等式①②的解集，如图 11-11.

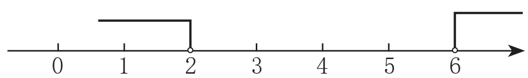


图 11-11

不等式①②的解集没有公共部分，这时我们说原不等式组无解.

例 4 求不等式 $2\leqslant\frac{3x-1}{4}<5$ 的整数解.

解： 原不等式可化为不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4}\geqslant 2, & ① \\ \dfrac{3x-1}{4}<5. & ② \end{cases}$$

解不等式①，得

$$x\geqslant 3.$$

解不等式②，得

$$x<7,$$

所以不等式组的解集为

$$3\leqslant x<7.$$

原不等式的整数解为 3，4，5，6.

随堂练习

1. 如果不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$ 无解，那么 a，b 的大小关系是______.

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x-3<-6, \\ -3x<6; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2}>2, \\ \dfrac{x+2}{2}<\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

3. 求不等式 $-2 \leqslant \dfrac{2-3x}{2} < 5$ 的整数解.

习题 11.10

知识巩固

1. 填表：

不等式组	$\begin{cases} x-2<0, \\ x+1>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2<0, \\ x+1<0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2>0, \\ x+1>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2>0, \\ x+1<0 \end{cases}$
解集				

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 3(x-1)-1 \leqslant x, \\ 2(4.5-x) \leqslant 3-x; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 5x-2<3(x+1), \\ \dfrac{1}{2}x-1 \geqslant 7-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

3. 解下列不等式：

（1）$-1<\dfrac{3}{2}x-13<2$；

（2）$\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1-0.6x}{-3} \leqslant \dfrac{2}{3}$.

联系拓广

4. 一个三角形三边的长度为三个连续的自然数，若周长大于 24 cm 而小于 30 cm，求这个三角形最长边的长.

※5. 如果一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x-3 \geqslant x, \\ x \leqslant m \end{cases}$ 无解，求 m 的取值范围.

回顾与思考

1. 不等式有哪些基本性质？它与等式的基本性质有什么异同？
2. 解一元一次不等式和解一元一次方程有什么异同？
3. 举例说明在数轴上如何表示一元一次不等式（组）的解集.
4. 说一说运用一元一次不等式解决实际问题的基本过程以及你的心得体会.
5. 举例说明一元一次不等式、一次函数、一元一次方程的联系.
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 列不等式（组）：

（1）$x+1$ 是负数；（2）x^2 是非负数；

（3）x 的 2 倍与 3 的差小于零；（4）a 的 5 倍与 3 的差不小于 10，且不大于 20.

2. 在不等式 $ax+b>0$ 中，a，b 是常数，且 $a\neq 0$. 当 ________ 时，不等式的解集是 $x>-\frac{b}{a}$；当 ________ 时，不等式的解集是 $x<-\frac{b}{a}$.

3. 解下列不等式，并把它们的解集分别表示在数轴上：

（1）$2x+3<-1$；（2）$-2x+1<x+4$；

（3）$2(-3+x)>3(x+2)$；（4）$\frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}\geqslant 1$；

（5）$\frac{2x+1}{3}\leqslant -\frac{x+4}{2}$；（6）$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}>11$；

（7）$\frac{3x+6}{5}-2>2(x+1)$；（8）$\frac{1+2x}{4}-\frac{1-3x}{10}>-\frac{1}{5}$.

4. 解下列不等式组，并把它们的解集分别表示在数轴上：

（1）$-5<2x+1<6$；（2）$-2<1-\frac{1}{5}x<\frac{3}{5}$；

（3）$\begin{cases} 8x+5>9x+6, \\ 2x-1<7; \end{cases}$（4）$\begin{cases} 2x+3\leqslant 5, \\ 3x-2\geqslant 4. \end{cases}$

5. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} \frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\leqslant 1, \\ 5x-1<3(x+1); \end{cases}$（2）$\begin{cases} 2x-7<3(x-1), \\ \frac{4}{3}x+3\geqslant 1-\frac{2}{3}x. \end{cases}$

6. 已知函数 $y=3x+5$.

（1）当 x 取何值时，$y>0$？　（2）当 x 取何值时，$y=0$？

（3）当 x 取何值时，$y<0$？

7. 求不等式 $5(x-2)\leqslant 28+2x$ 的正整数解.

数学理解

8. 判断正误：

（1）由 $2a>3$，得 $a>\frac{3}{2}$；（　　）

（2）由 $2-a<0$，得 $2<a$；（　　）

（3）由 $a<b$，得 $2a<2b$；（　　）

（4）由 $a>b$，得 $a+m>b+m$；（　　）

（5）由 $a>b$，得 $-3a>-3b$；（　　）

（6）由 $-\frac{1}{2}>-1$，得 $-\frac{a}{2}>-a$.（　　）

9. a，b 两个实数在数轴上的对应点如图所示：

（第 9 题）

用“<”或“>”填空：

（1）a ______ b；　（2）$|a|$ ______ $|b|$；

（3）$a+b$ ______ 0；　（4）$a-b$ ______ 0；

（5）$a+b$ ______ $a-b$；　（6）ab ______ a.

※**10.** 如果不等式组 $\begin{cases} x+8<4x-1, \\ x>m \end{cases}$ 的解集是 $x>3$，那么 m 的取值范围是（　　）.

（A）$m\geqslant 3$　（B）$m\leqslant 3$　（C）$m=3$　（D）$m<3$

问题解决

11. 暑假期间，两名家长计划带领若干名学生去旅游，他们联系了报价均为每人 500 元的两家旅行社. 经协商，甲旅行社的优惠条件是：两名家长全额收费，学生都按七折收费；乙旅行社的优惠条件是：家长、学生都按八折收费. 假设这两位家长带领 x 名学生去旅游，他们选择哪家旅行社更优惠？

12. 某大型超市从生产基地购进一批水果，运输过程中质量损失 5%，假设不计超市其他费用.

（1）如果超市在进价的基础上提高 5% 作为售价，那么请你通过计算说明超市是否亏本；

（2）如果超市至少要获得 20% 的利润，那么这种水果的售价最低应提高百分之几？（结果精确到 0.1%）

13. 已知关于 x 的方程 $3x+a=x-7$ 的根是正数，求实数 a 的取值范围.

14. 某工厂要招聘 A，B 两个工种的工人 150 人，A，B 两个工种的工人的月工资分别为 1 500 元和 3 000 元. 现要求 B 工种的人数不少于 A 工种人数的 2 倍，那么招聘 A 工种工人多少人时，可使每月所付的工资最少？

联系拓广

15.（1）用“>”“<”或“=”填空：

5^2+3^2 ________ $2\times5\times3$；

3^2+3^2 ________ $2\times3\times3$；

$(-3)^2+2^2$ ________ $2\times(-3)\times2$；

$(-4)^2+(-4)^2$ ________ $2\times(-4)\times(-4)$.

（2）观察以上各式，你发现它们有什么规律吗？你能用一个含有字母 a，b 的式子表示上述规律吗？再换几个数试一试.

※（3）运用你所学的知识说明你发现的规律的正确性.

综合与实践

生活中的“一次模型”

你了解一元一次不等式、一元一次方程和一次函数在现实情境中的应用吗？选择你感兴趣的话题，小组合作展开调查，利用得到的数据构造一个可以综合运用这些知识解决的问题，并尝试解决它.

议一议

你们准备研究的主题是什么？研究的具体问题是什么？研究的方案是什么？

包括：小组成员的分工，收集数据的方式，以及可能遇到的困难等.

做一做

（1）根据小组研究的问题和所得到的数据，构造相应的一元一次方程、一元一次不等式或一次函数尝试解决这些问题.

（2）撰写研究报告. 其中至少要包括：所选择的问题情境、获得数据的过程、建立的数学模型、求解过程、解释与应用等.

议一议

交流各组的研究报告，分享彼此的研究经验，并提出希望进一步研究的问题.

习题

1. 根据小组之间的交流活动，进一步开展研究，完善小组的研究报告.

2. 写一篇短文，谈谈你在本次活动中的感受和体会.

总复习题

- 整理本学期学过的知识和方法，你能用一张图把它们表示出来吗？与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程，以及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

知识技能

1. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 6x-3y=-3, \\ 5x-9y=-35; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x-5y=-3, \\ 5x-2y=-18; \end{cases}$

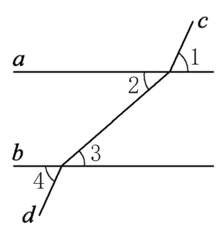
（3）$\begin{cases} 2x-y=-4, \\ 4x-5y=-23; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 3m-2n=7, \\ 3m-n=5; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} 4x-y=30, \\ x-2y=-10; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} 0.3x-y=1, \\ 0.2x-0.5y=19; \end{cases}$

（7）$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1, \\ 3x-4y=2; \end{cases}$　　（8）$\begin{cases} 4x-15y+17=20, \\ 6x-25y-23=-16; \end{cases}$

※（9）$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x-y+z=3, \\ 3x-2y-3z=-5; \end{cases}$　　※（10）$\begin{cases} 2x-3y+4z=11, \\ 3x+y-2z=3, \\ z=x+y. \end{cases}$

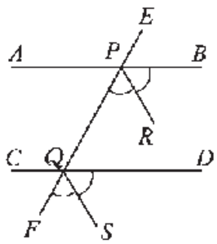
2. 我们知道，光线从空气射入水中会发生折射现象. 光线从水射入空气中，同样也会发生折射现象. 如图，已知 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$. 求证：直线 $c /\!/ d$.



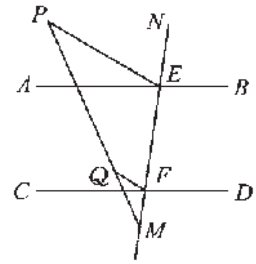
（第 2 题）

3. 已知：如图，直线 $AB//CD$，并且被直线 EF 所截，EF 分别交 AB 和 CD 于点 P 和 Q，射线 PR 和 QS 分别平分 $\angle BPF$ 和 $\angle DQF$.

求证：$\angle BPR=\angle DQS$.



（第 3 题）

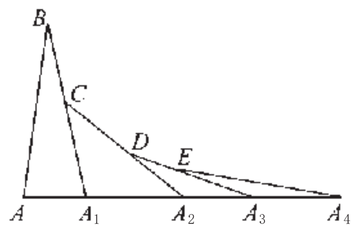


（第 4 题）

4. 已知：如图，直线 $AB//CD$，$\angle AEP=\angle CFQ$.

求证：$\angle EPM=\angle FQM$.

5. 如图，已知 $AB=A_1B$，$A_1C=A_1A_2$，$A_2D=A_2A_3$，$A_3E=A_3A_4$，$\angle B=20^\circ$，求 $\angle A_4$ 的度数.

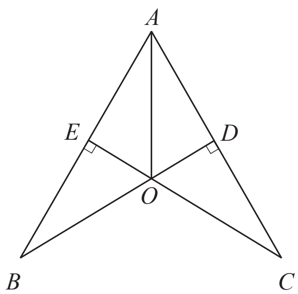


（第 5 题）

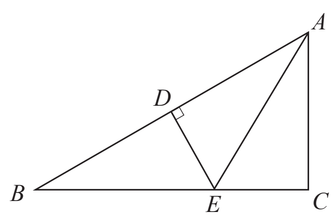
6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数之比是 $1:2:3$，AB 边上的中线长为 4，求 AB 的长.

7. 已知：如图，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，垂足分别为点 D，E，BD 与 CE 相交于点 O，AO 平分 $\angle BAC$.

求证：$OB=OC$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，DE 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的垂直平分线，分别交 AB 和 BC 于点 D，E，AE 平分 $\angle BAC$. 已知 $\angle B=30^\circ$，求 $\angle C$ 的度数.

9. 解下列不等式，并把它们的解集分别表示在数轴上：

（1）$3x-2x<5$；（2）$x-6>2x$；

（3）$\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{3}$；（4）$2x-7>5-2x$；

（5）$\dfrac{1-3x}{2}>1-2x$；（6）$x-\dfrac{1}{2}(4x-1)\leqslant 2$；

（7）$\dfrac{x-1}{2}+1\geqslant\dfrac{x}{4}$；（8）$0.01x-1\leqslant 0.02x$.

10. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}1+2x>3+x,\\5x\leqslant 4x-1;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}2-x\leqslant -1,\\3<x-1;\end{cases}$

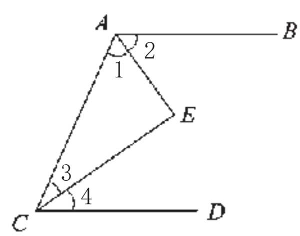
（3）$\begin{cases}3(x-1)<4x-2,\\\dfrac{-x}{5}>\dfrac{x+1}{2};\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{2x}{3}\leqslant\dfrac{-x}{2}+\dfrac{5}{3},\\3(x-1)<x-5;\end{cases}$

（5）$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+3)<2,\\\dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3};\end{cases}$　　（6）$\begin{cases}x-3(x-2)\geqslant 4,\\\dfrac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

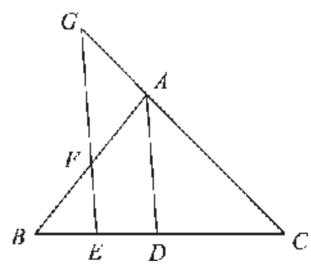
数学理解

11. 在同一直角坐标系内画出一次函数 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ 和 $y=\dfrac{3}{2}x$ 的图象. 直线 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ 与直线 $y=\dfrac{3}{2}x$ 的交点是______. 你能据此求出方程组 $\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}x+3,\\y=\dfrac{3}{2}x\end{cases}$ 的解吗？

12. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle E=90^\circ$.
求证：$AB/\!/CD$.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 已知：如图，$GE/\!/AD$，$\angle BFE=\angle G$.
求证：AD 平分 $\angle BAC$.

14. 设计一个转盘，使得自由转动这个转盘，指针停在红色区域中的概率为 $\dfrac{2}{5}$.

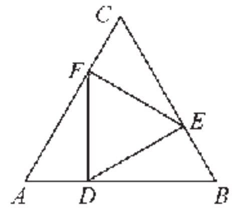
15. 请你制作一个均匀的正方体骰子，使得任意掷一次骰子，掷出“6”的概率是 $\dfrac{1}{3}$.

16. 如图，A，B 是平面上的两定点，在平面上找一点 C，使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 C 为直角顶点，这样的点 C 有几个？

（第 16 题）

17. 已知：如图，等边三角形 DEF 的顶点分别在等边三角形 ABC 的边上.

求证：$AD=BE=CF$.



（第 17 题）

问题解决

18. 某校有两种类型的学生宿舍 30 间，大的宿舍每间可住 8 人，小的每间可住 5 人. 该校 198 个住宿生恰好住满这 30 间宿舍. 大小宿舍各有多少间？

19. 甲、乙两种商品原来的单价和为 100 元. 因市场变化，甲商品降价 10%，乙商品提价 40%，调价后，两种商品的单价和比原来的单价和提高了 20%. 甲、乙两种商品原来的单价各是多少元？

20. 10 年前，小明妈妈的年龄是小明的 6 倍；10 年后，小明妈妈的年龄是小明的 2 倍. 小明和他妈妈现在的年龄分别是多少？

21. 三个连续自然数的和小于 15，这样的自然数组共有多少？把它们分别写出来.

22. 甲、乙两家旅行社为了吸引更多的顾客，分别推出了赴某地旅游的团体优惠办法. 甲旅行社的优惠办法是：买 4 张全票，其余人按半价优惠；乙旅行社的优惠办法是：一律按原价的 $\frac{3}{4}$ 优惠. 已知这两家旅行社的原价均为每人 100 元，那么随着团体人数的变化，哪家旅行社的收费更优惠？

23. 某地为促进淡水养殖业的发展，决定对淡水鱼的养殖提供政府补贴，以使淡水鱼的价格控制在 6～12 元/千克之间. 据市场调查，如果淡水鱼的市场价格为 a 元/千克，政府补贴为 t 元/千克，那么要使每日市场的淡水鱼供应量与需求量正好相等，t 与 a 应满足关系式 $100(a+t-8)=270-3a$. 为使市场价格不高于 10 元/千克，政府补贴至少应为多少？

24. 某校组织师生春游，若单独租用 45 座客车若干辆，则刚好坐满；若单独租用 60 座客车，则可以少租 1 辆，且余 30 个空座位.

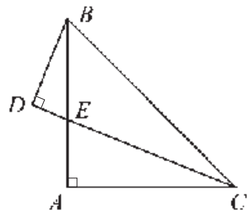
（1）求该校参加春游的人数；

（2）该校决定这次春游同时租用这两种车，其中 60 座客车比 45 座客车多租 1辆，这样要比单独租用一种车辆节省租金. 已知 45 座客车的租金为每辆 250 元，60 座客车的租金为每辆 300 元，请你帮助计算本次春游所需车辆的租金.

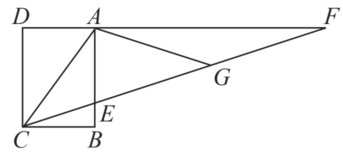
联系拓广

25. 已知：如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=90^\circ$，$\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 E，$\angle BDC=90^\circ$.

求证：$CE=2BD$.



（第 25 题）



（第 26 题）

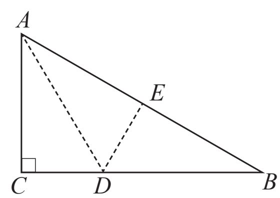
※**26.** “三等分一个任意角”是数学史上一个著名问题. 今天人们已经知道，仅用圆规和直尺是不可能作出的. 在探索中，有人曾利用过如图所示的图形，其中，$ABCD$ 是长方形，F 是 DA 延长线上一点，G 是 CF 上一点，并且 $\angle ACG=\angle AGC$，$\angle GAF=\angle GFA$. 你能证明 $\angle ECB=\frac{1}{3}\angle ACB$ 吗？

27. 在如图所示的三角形纸片 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$. 按如下步骤可以把这张直角三角形纸片分成三个全等的小直角三角形（图中虚线表示折痕）：① 先将点 B 对折到点 A；② 将对折后的纸片再沿 AD 对折.

（1）由步骤 ① 可以得到哪些等量关系？

（2）请证明 $\triangle ACD\cong\triangle AED$；

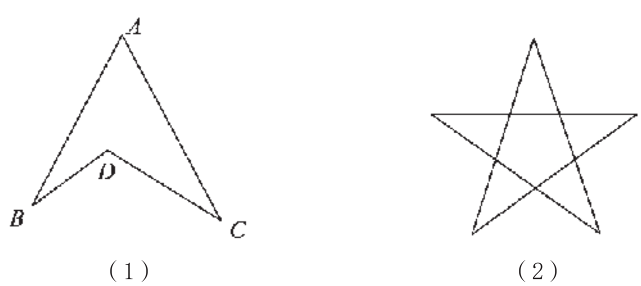
（3）按照这种方法能否将任意一个直角三角形分成三个全等的小三角形？



（第 27 题）

※**28.** 习题 8.9 第 3 题有结论：图（1）中，$\angle BDC=\angle B+\angle C+\angle A$.

利用上述结论求图（2）中五角星五个“角”的和.



（第 28 题）