盲校义务教育实验教科书

数 学

九年级上册

（盲文版）

盲校义务教育实验教科书

数学

九年级

上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：薛　彬　李海东
本册主编：宋莉莉
主要编写人员：张艳娇　薛　彬　刘长明　张唯一
李海东　陈保水　张瑞坤　王鲁春
责任编辑：张艳娇　王翠巧
美术编辑：王俊宏

盲校义务教育实验教科书　数学　九年级　上册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址
经　　销　全国新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　×× 年 × 月第 × 版
印　　次　　年　月第　次印刷
开　　本　　毫米 ×　　毫米　1/16
印　　张　21.625
字　　数　　千字
书　　号　33833-5
定　　价　　元
价格依据文件号：京发改规［2016］13 号

编者的话

同学们，欢迎大家使用这套数学教科书，它是我们根据《盲校义务教育数学课程标准（2016年版）》编写的，希望它能成为你们学习数学的好帮手.

为什么要学习数学呢？主要的理由有两个方面：

数学应用很广泛. 数学是重要的基础科学. 华罗庚说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在.”随着与计算机科学的结合，数学在我们的生活、学习、工作乃至娱乐中的作用与日俱增.

数学使人更聪明. 数学是锻炼思维的体操. 学习数学能使我们更合乎逻辑、更有条理、更精确、更深入地思考和解决问题，增强我们的想象力和创造性，有助于提高学习能力. 懂得并能运用数学，就意味着你有更多的机会和选择.

这套教科书有什么特点呢？主要有以下三个方面：

整体设计，加强联系，突出数学核心内容. 教科书围绕课程标准的核心内容整体设计，构建符合数学逻辑和学习心理的教科书体系. 循序渐进地安排核心的数学概念和重要的数学思想方法，以便同学们更好地掌握它们.

反映背景，加强应用，体现数学基本思想. 教科书精选现实生活和数学发展的典型问题为背景，让同学们感受知识的自然发展过程，感受数学的抽象思想. 通过解决具有真实背景的问题，让同学们感受数学与生活的联系，体现数学的

模型思想.

体现过程，加强探究，积累数学活动经验. 教科书在内容的呈现上努力体现数学思维规律，以问题引导学习，给同学们自主探索的机会，经历数学概念的概括过程、数学结论的形成过程，从中体会数学的研究方法，积累数学活动经验.

如何使用这套教科书学好数学呢？下面提出一些想法：

勤于思考，勇于探究，善于归纳. 我们所学的数学基础知识，大多是从丰富的实际背景中抽象概括而成的，这是一个由表及里、逐步深入的过程. 教科书安排了“思考”“探究”“归纳”等栏目，引导同学们经历上述过程，通过观察、实验、猜想、推理、反思、交流等活动积累学习经验，逐步学会发现、提出、分析和解决问题.

巩固基础，注重运用，提高能力. 学数学首先要充分重视概念、公式和定理等，并且要通过解题等实践活动，深化认识和提高能力. 同学们在学习教科书“巩固运用”“复习题”“数学活动”等内容时，应加强独立思考，认真地分析问题、探寻解题思路、落实解题步骤，并要反思解题过程，使自己学数学、用数学的能力不断提高.

开阔视野，自主学习，立足发展. 数学源远流长、博大精深、奥妙无穷. 教科书提供了“阅读与思考”等选学内容，还提供了标有“*”的内容供学生选学. 希望同学们通过生动活泼、积极主动的学习，在更广阔的数学天地中提升学习能力和增强探究能力.

让我们开始九年级上册的学习吧！

你已经掌握了用一元一次方程解决实际问题的方法. 在

解决某些实际问题时还会遇到一种新方程——一元二次方程. 怎样解这种方程，并运用这种方程解决一些实际问题呢？学了**“一元二次方程”**一章，你就会获得答案.

函数是描述变化的一种数学工具，前面你已经学习了一次函数. 在**“二次函数”**一章，你将认识函数家庭的另一个重要成员——二次函数，学习它的图象和性质，利用它来表示某些问题中的数量关系，解决一些实际问题，进一步提高对函数的认识和应用能力.

你已经认识了平移、轴对称等图形的变化，探索了它们的性质. 本书中图形的变化又增添了一名新成员——旋转. 在**“旋转”**一章，你将了解图形旋转的概念，探索它的基本性质，还将认识一种特殊的旋转——中心对称.

圆是一种常见的图形. 在**“圆（一）”“圆（二）”**这两章，你将进一步认识圆，探索它的性质，了解点和圆、直线和圆、正多边形和圆之间的关系，学习与圆有关的一些计算，并用圆的有关知识解决一些实际问题. 通过这两章的学习，你解决图形问题的能力将会进一步提高.

将一枚硬币抛掷一次，可能出现正面也可能出现反面，出现正面的可能性大还是出现反面的可能性大呢？学了**“概率初步”**一章，你就能更好地认识这个问题了. 掌握了概率的初步知识，你还会解决更多的实际问题.

数学伴着我们成长，数学伴着我们进步，数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

编者

2018 年 10 月

目　　录

第二十七章　旋转

第二十八章　圆（一）

第二十九章　圆（二）

第三十章　概率初步

第二十五章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感. 按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

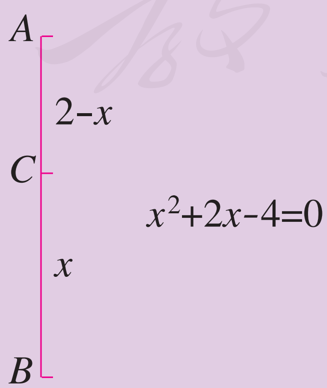
如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$AC:BC=BC:2$，即 $BC^2=2AC$.

设雕像下部的高度为 x m，可得方程 $x^2=2(2-x)$，整理得

$$x^2+2x-4=0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2. 如何解这类方程？如何用这类方程解决一些实际问题？这就是本章要学习的主要内容.



25.1 一元二次方程

引言中的方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

中有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 很多实际问题中的数量关系都可以用这样的方程表示，请看下面的问题.

问题 1 如图 25.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm^2，那么铁皮各角应切去多大的正方形？

图 25.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$cm，宽为 $(50-2x)$cm. 根据方盒的底面积为 3 600 cm^2，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\ 600.$$

整理，得

$$4x^2-300x+1\ 400=0.$$

化简，得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸. 方程②中未

知数的个数和最高次数各是多少？

问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场．根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛的场数为 $4\times7=28$．

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场．

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-28=0.$$

化简，得

$$x^2-x-56=0. \qquad ③$$

由方程③可以得出参赛队数．方程③中未知数的个数和最高次数各是多少？

思考

方程①②③有什么共同点？

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一

个未知数，未知数的最高次数是 2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程.

像这样，等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown）.

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

其中，ax^2是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项. 想一想，为什么规定$a\neq 0$?

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解： 去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.

巩固运用25.1

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：

   (1) $3x^2+1=6x$；　　(2) $4x^2+5x=81$；

   (3) $x(x+5)=0$；　　(4) $(2x-2)(x-1)=0$；

   (5) $x(x+5)=5x-10$；

   (6) $(3x+2)(x+1)=x(2x-1)$.

2. 根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：

   (1) 一个圆的面积是 2π m²，求半径.

   (2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm，面积是 9 cm²，求较长的直角边的长.

   (3) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25 cm²，求正方形的边长.

   (4) 一个矩形的长比宽多 2 cm，面积是 100 cm²，求矩形的长.

   (5) 把长为 1 m 的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长.

   (6) 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m²的矩形？

   *(7) 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次，有多少人参加聚会？

3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

*4. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是多少？求出这个方程的其他根.

25.2 解一元二次方程

25.2.1 配方法

问题 1 一桶油漆可刷的面积为 1 500 dm²，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗?

设其中一个盒子的棱长为 x dm，则这个盒子的表面积为 $6x^2$ dm². 根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10\times 6x^2=1\ 500. \qquad ①$$

整理，得

$$x^2=25.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 5,$$

即

$$x_1=5，x_2=-5.$$

可以验证，5 和 -5 是方程①的两个根，因为棱长不能是负值，所以盒子的棱长为 5 dm. 用方程解决实际问题时，要考虑所得结果是否符合实际意义.

一般地，对于方程

$$x^2=p, \qquad \text{I}$$

(1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程 Ⅰ 有两个不

等的实数根

$$x_1=-\sqrt{p},\quad x_2=\sqrt{p};$$

（2）当 $p=0$ 时，方程Ⅰ有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$；

（3）当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $x^2\geqslant 0$，所以方程Ⅰ无实数根.

探究

对照上面解方程Ⅰ的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$？

在解方程Ⅰ时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm 5$. 由此想到：由方程

$$(x+3)^2=5, \tag{②}$$

得

$$x+3=\pm\sqrt{5},$$

即

$$x+3=\sqrt{5}, \text{ 或 } x+3=-\sqrt{5}. \tag{③}$$

于是，方程 $(x+3)^2=5$ 的两个根为

$$x_1=-3+\sqrt{5},\quad x_2=-3-\sqrt{5}.$$

在上面的解法中，由方程②得到③，实质上是把一个一元二次方程“**降次**”，转化为两个一元一次方程，这样就把方程②转化为我们会解的方程了.

巩固运用25.2

1. 解下列方程：

(1) $36x^2-1=0$；　　(2) $4x^2=81$；

(3) $2x^2-8=0$；　　(4) $9x^2-5=3$；

(5) $3x^2+4=31$；　　(6) $7x^2-12=23$.

2. 解下列方程：

(1) $(x+6)^2-9=0$；　　(2) $(x+5)^2=25$；

(3) $4(x+3)^2=9$；　　(4) $3(x-1)^2-6=0$；

(5) $x^2-4x+4=5$；　　(6) $x^2+2x+1=4$.

探究

怎样解方程 $x^2+6x+4=0$？

我们已经会解方程 $(x+3)^2=5$. 因为它的左边是含有 x 的完全平方式，右边是非负数，所以可以直接降次解方程. 那么，能否将方程 $x^2+6x+4=0$ 转化为可以直接降次的形式再求解呢？

解方程 $x^2+6x+4=0$ 的过程可以用下面的框图表示：

$$\boxed{x^2+6x+4=0}$$

$\downarrow$ 移项

$$\boxed{x^2+6x=-4}$$

$\downarrow$ 两边加 9$\left(即\left(\dfrac{6}{2}\right)^2,想一想为什么，加其他数行吗?\right)$
使左边配成 $x^2+2bx+b^2$ 的形式

$$\boxed{x^2+6x+9=-4+9}$$

$\downarrow$ 左边写成完全平方形式

$$\boxed{(x+3)^2=5}$$

$\downarrow$ 降次

$$\boxed{x+3=\pm\sqrt{5}}$$

$\downarrow$

$$\boxed{x+3=\sqrt{5}，或\ x+3=-\sqrt{5}}$$

$\downarrow$ 解一元一次方程

$$\boxed{x_1=-3+\sqrt{5}，x_2=-3-\sqrt{5}}$$

可以验证，$-3\pm\sqrt{5}$是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根.

像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**. 可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

例 1 解下列方程：

（1）$x^2-8x+1=0$；　　（2）$x^2-\dfrac{2}{3}x-1=0$.

分析： 方程（1）和（2）的二次项系数都为 1，可直接运用配方法.

解：（1）移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

配方，得

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$

$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15},\quad x_2=4-\sqrt{15}.$$

（2）移项，得

$$x^2-\frac{2}{3}x=1.$$

配方，得

$$x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}.$$

由此可得

$$x-\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{10}}{3},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{10}}{3}.$$

巩固运用25.3

1. 填空：

(1) $x^2+10x+\_\_\_\_=(x+\_\_\_\_)^2$；

(2) $x^2-12x+\_\_\_\_=(x-\_\_\_\_)^2$；

(3) $x^2+5x+\_\_\_\_=(x+\_\_\_\_)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+\_\_\_\_=(x-\_\_\_\_)^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$；　(2) $x^2-x-\frac{7}{4}=0$；

(3) $x^2-6x-1=0$；　(4) $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=0$；

(5) $x^2+4x-9=x-11$；　(6) $x(x+3)=8x+14$.

例 2　解下列方程：

(1) $2x^2+1=3x$；　(2) $3x^2-6x+4=0$.

分析：(1) 先把方程化成 $2x^2-3x+1=0$. 它的二次项系数为 2，为了便于配方，需将二次项系数化为 1，为此方程的两边都除以 2.

(2) 与 (1) 类似，方程的两边都除以 3 后再配方.

解：(1) 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

由此可得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

$$x_1=1，x_2=\frac{1}{2}.$$

（2）移项，得

$$3x^2-6x=-4.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-2x=-\frac{4}{3}.$$

配方，得

$$x^2-2x+1^2=-\frac{4}{3}+1^2,$$

$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数，所以 x 取任何实数时，$(x-1)^2$ 都是非负数，上式都不成立，即原方程无实数根.

一般地，如果一个一元二次方程通过配方转化成

$$(x+n)^2=p \qquad \text{Ⅱ}$$

的形式，那么就有：

（1）当 $p>0$ 时，方程Ⅱ有两个不等的实数根

$$x_1=-n-\sqrt{p}, \quad x_2=-n+\sqrt{p};$$

（2）当 $p=0$ 时，方程Ⅱ有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-n;$$

（3）当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $(x+n)^2\geqslant 0$，所以方程Ⅱ无实数根.

巩固运用25.4

1. 填空：

（1）$-x^2-x+$______$=-(x-$______$)^2$；

（2）$4x^2+4x+$______$=4(x+$______$)^2$；

（3）$2x^2-\frac{2}{3}x+$______$=2(x-$______$)^2$；

（4）$\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{5}x+$______$=\frac{1}{5}(x-$______$)^2$.

2. 解下列方程：

（1）$3x^2+6x-4=0$；　　（2）$2x^2-6x-3=0$；

（3）$-2x^2+7x+\frac{7}{4}=0$；　　（4）$\frac{1}{4}x^2-5x-\frac{7}{4}=0$；

（5）$-\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{4}{3}=0$；　　（6）$5x^2-6x+4=0$.

25.2.2 公式法

探究

任何一个一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0). \qquad Ⅲ$$

能否也用配方法得出Ⅲ的解呢？

我们可以根据用配方法解一元二次方程的经验来解决这个问题.

移项，得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为1，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ①$$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$. 式子 b^2-4ac 的值有以下三种情况：

（1）$b^2-4ac>0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，由①得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（2）$b^2-4ac=0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，由①可知，方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

（3）$b^2-4ac<0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，由①可知$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，而 x 取任何实数都不能使$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，因此方程无实数根.

一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的**判别式**，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

归纳

由上可知，当 $\Delta>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实数根.

当 $\Delta \geqslant 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根可写为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**. 求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果. 解一个具体的一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式，可以直接得出根，这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**.

例 3 判断下列方程是否有实数根，如果有实数根，用公式法求方程的根：

（1）$x^2-4x-7=0$；（2）$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

解：（1）$a=1$，$b=-4$，$c=-7$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times(-7)=44>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{44}}{2\times 1}=2\pm\sqrt{11},$$

即

$$x_1=2+\sqrt{11},\quad x_2=2-\sqrt{11}.$$

（2）$a=2$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1=0$.

方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在例 3 中，确定系数 a，b，c 的值时，要注意它们的正负.

巩固运用25.5

1. 利用判别式判断下列方程的根的情况：

（1）$x^2-8x+10=0$；（2）$16x^2-24x+9=0$；

（3）$x^2-4\sqrt{2}x+9=0$；（4）$2x^2-3x-\frac{3}{2}=0$.

2. 判断下列方程是否有实数根，如果有实数根，用公式法求方程的根：

（1）$x^2+x-6=0$；（2）$x^2-\sqrt{3}x-\frac{1}{4}=0$；

（3）$3x^2-6x+2=0$；（4）$4x^2-6x=0$；

（5）$-x^2+x+12=0$；（6）$-x^2-\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$.

例 4 判断下列方程是否有实数根，如果有实数根，用公式法求方程的根：

（1）$5x^2-3x=x+1$；（2）$3x^2+4(x+1)=\frac{8}{3}$；

（3）$x^2+17=8x$.

解：（1）方程化为 $5x^2-4x-1=0$.

$a=5$，$b=-4$，$c=-1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times5\times(-1)=36>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\times5}=\frac{4\pm6}{10},$$

即

$$x_1=1,\quad x_2=-\frac{1}{5}.$$

（2）方程化为 $3x^2+4x+\frac{4}{3}=0$.

$a=3$，$b=4$，$c=\frac{4}{3}$.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times3\times\frac{4}{3}=0$.

方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times3}=-\frac{2}{3}.$$

（3）方程化为 $x^2-8x+17=0$.

$a=1$，$b=-8$，$c=17$.

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times17=-4<0$.

方程无实数根.

巩固运用25.6

1. 利用判别式判断下列方程的根的情况：

（1）$x^2+8x+21=0$；（2）$x^2-x-1=0$；

（3）$3x^2+2x=-9$；（4）$3y^2-2y=1+4y$.

2. 判断下列方程是否有实数根，如果有实数根，用公式法求方程的根：

(1) $x^2+4x+8=2x+11$； (2) $x(x-4)=2-8x$；

(3) $2x^2+7x=3x-5$； (4) $3x^2+10=2x^2+8x$；

(5) $0.2x^2-\frac{3}{10}=\frac{1}{2}x$； (6) $2x^2-2\sqrt{3}x=-\frac{3}{2}$；

(7) $x^2-x=0.5(x+5)$； (8) $x^2+7x+10=3x+5$.

25.2.3 因式分解法

问题 2 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛，那么物体经过 x s 离地面的高度（单位：m）为

$$10x-4.9x^2.$$

根据上述规律，物体经过多少秒落回地面（结果保留小数点后两位）？

设物体经过 x s 落回地面，这时它离地面的高度为 0 m，即

$$10x-4.9x^2=0. \qquad ①$$

思考

除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①？

方程①的右边为 0，左边可以进行因式分解，得

$$x(10-4.9x)=0.$$

这个方程的左边是两个一次因式的乘积，右边是 0. 我们知道，如果两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0，即如果 $a \cdot b=0$，那么 $a=0$，或 $b=0$；反之，如果两个因式中任何一个为 0，那么它们的积也等于 0，即如果 $a=0$，或 $b=0$，那么 $a \cdot b=0$. 所以

$$x=0，\text{或 } 10-4.9x=0. \qquad ②$$

所以，方程①的两个根是

$$x_1=0，\ x_2=\frac{100}{49}\approx 2.04.$$

在这两个根中，$x_2 \approx 2.04$ 表示物体约在 2.04 s 时落回地面，而 $x_1=0$ 表示物体被上抛离开地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m.

思考

解方程①时，二次方程是如何降为一次的？

可以发现，在上述解法中，由①到②的过程，不是用开平方降次，而是先分解因式，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现降次. 这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

例 5 解下列方程：

（1）$10x^2+6x=0$；　　（2）$(3x+1)^2-9=0$.

解：（1）分解因式，得

$$2x(5x+3)=0.$$

由此可得

$$2x=0,\ 或\ 5x+3=0,$$

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{3}{5}.$$

（2）分解因式，得

$$(3x+1+3)(3x+1-3)=0,$$

即

$$(3x+4)(3x-2)=0.$$

由此可得

$$3x+4=0,\ 或\ 3x-2=0,$$

$$x_1=-\frac{4}{3},\ x_2=\frac{2}{3}.$$

巩固运用25.7

解下列方程：

（1）$-x^2+x=0$；（2）$35x^2+14x=0$；

（3）$\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x=0$；（4）$x^2+2x+1=0$；

（5）$(7x+5)^2-49=0$；（6）$9x^2-(x-4)^2=0$；

（7）$(2x-3)^2-16=0$；（8）$18x^2-12x+2=0$.

例 6 解下列方程：

（1）$(x+2)^2=-x(x+2)$；

(2) $5x^2-2x+\frac{1}{4}=x^2+2x-\frac{3}{4}$.

解: (1) 移项，得

$$(x+2)^2+x(x+2)=0.$$

分解因式，得

$$(x+2)(x+2+x)=0,$$

即

$$(x+2)(2x+2)=0.$$

由此可得

$$x+2=0, \text{ 或 } 2x+2=0,$$

$$x_1=-2, \quad x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-4x+1=0.$$

分解因式，得

$$(2x-1)^2=0.$$

由此可得

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}.$$

可以试用多种方法解本例中的方程.

归纳

配方法要先配方，再降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式解方程；因式分解法要先将方程一边化为两个一次因式相乘，另一边为 0，

再分别使每个一次因式等于0. 配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法在解某些一元二次方程时比较简便. 总之，解一元二次方程的基本思路是：将二次方程化为一次方程，即降次.

巩固运用25.8

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(2x+3)^2=4(2x+3)$；

(2) $x(x-5)=-(x-5)^2$；

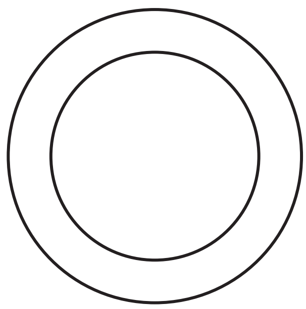
(3) $4x^2+7x-5=2x^2+19x-23$；

(4) $5x^2+9x+5=x^2-3x-4$；

(5) $-\sqrt{5}x^2+10x-5\sqrt{5}=0$；

(6) $(2x+1)^2+2\sqrt{3}(2x+1)=-3$.

2. 如图，把小圆形场地的半径增加5 m得到大圆形场地，场地面积扩大了一倍. 求小圆形场地的半径.



（第2题）

前面我们学习了一元二次方程的各种解法. 在解一元二次方程时，可以根据一元二次方程的特点，选择适当的方法求解.

例7 解下列方程：

(1) $x^2+11=8x$；　　(2) $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

分析：（1）方程化为 $x^2-8x+11=0$，可以发现，用公式法解方程比较方便；（2）观察方程可知，移项后，利用平方差公式对方程的一边进行因式分解来解方程较简便.

解：（1）方程化为

$$x^2-8x+11=0.$$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times11=20>0.$

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{8\pm\sqrt{20}}{2}=4\pm\sqrt{5},$$

即

$$x_1=4+\sqrt{5},\quad x_2=4-\sqrt{5}.$$

（2）移项，得

$$(2x-1)^2-(3-x)^2=0.$$

分解因式，得

$$(2x-1+3-x)(2x-1-3+x)=0,$$

即

$$(x+2)(3x-4)=0.$$

由此可得

$$x+2=0，或\ 3x-4=0.$$

$$x_1=-2,\quad x_2=\frac{4}{3}.$$

你还能用其他方法解本例中的方程吗？

回到本章引言中的问题，雕像下部的高度 x（单位：m）满足方程

$$x^2+2x-4=0.$$

下面用公式法解这个方程.

$$\Delta=2^2-4\times1\times(-4)=20>0.$$

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2\times1}=-1\pm\sqrt{5},$$

即

$$x_1=-1+\sqrt{5},\ x_2=-1-\sqrt{5}.$$

如果结果保留小数点后两位，那么，$x_1\approx1.24$，$x_2\approx-3.24$.

在这两个根中，只有 $x_1\approx1.24$ 符合问题的实际意义，因此雕像下部的高度应设计为约 1.24 m.

巩固运用25.9

1. 解下列方程：

 (1) $x^2+2x=0$； (2) $x^2+4x+8=4x+11$；

 (3) $x(2x-4)=5-8x$； (4) $x^2+2\sqrt{5}x+10=0$；

 (5) $3x(2x+1)=4x+2$； (6) $(x-4)^2=(5-2x)^2$.

2. 分别用公式法和因式分解法解方程

$$x^2-6x+9=(5-2x)^2.$$

3. 25.1 节问题 1 和问题 2 给出了下列两个方程，请用适当的方法求解：

 (1) $x^2-75x+350=0$； (2) $x^2-x-56=0$.

阅读与思考

黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕塑的问题．要使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，这个高度比应是多少？

把上面的问题一般化．如图 1，在线段 AB 上找一个点 C，C 把 AB 分为 AC 和 CB 两段，其中 AC 是较小的一段，且 $AC:CB=CB:AB$．为简单起见，设 $AB=1$，$CB=x$，则 $AC=1-x$．代入 $AC:CB=CB:AB$，得 $(1-x):x=x:1$，即 $x^2+x-1=0$．解方程，得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．

图 1

根据问题的实际意义，取 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，这个值就是上面问题中所求的高度比．

人们把 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数叫做黄金分割数．如果把一条线段分为两部分，使其中较长一段与整个线段的比是黄金分割数，那么较短一段与较长一段的比也是黄金分割数．

五角星是常见的图案．如图 2，在正五角星中存在黄金分割数，可以证明其中 $\frac{MN}{NB}=\frac{BN}{BM}=\frac{BM}{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．

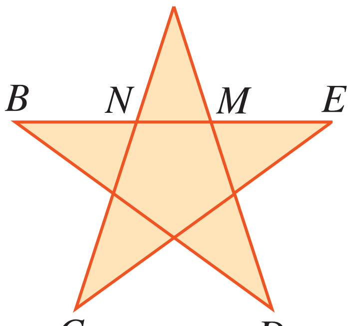


图 2

长期以来，很多人认为黄金分割数是一个很特别的数．一些美术家认为：如果人的上、下身长之比接近黄金分割数，那么可以增加美感．据说，一些名画和雕塑中的人体大都符合这个比．一位科学家曾提出：在一棵树的生长过程中，$\frac{n\text{ 年后的树枝数目}}{(n+1)\text{年后的树枝数目}}$约是黄金分割数．

优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法，著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献．华罗庚在日本去世前几小时还在做学术报告，讲解优选法．华先生说过，他要工作到人生的最后一刻．他实践了自己的诺言．

优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数．同学们可以查阅资料，了解 0.618 法的应用．

25.3 实际问题与一元二次方程

同一元一次方程、二元一次方程（组）等一样，一元二次方程也可以作为反映某些实际问题中数量关系的数学模型. 本节讨论如何利用一元二次方程解决实际问题.

例 1 有一个人患了流感，经过两轮传染后共有 121 个人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人？

分析： 设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人. 开始有一个人患了流感，第一轮的传染源就是这个人，他传染了 x 个人，用代数式表示，第一轮后共有 $(1+x)$ 个人患了流感；在第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了 x 个人，用代数式表示，第二轮后共有 $(1+x)+x(1+x)$ 个人患了流感. 由此就可以列方程求出 x 的值.

解： 设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人，则第二轮后被感染的人数共为 $1+x+x(1+x)$. 根据题意有

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$$x_1=10,\ x_2=-12\ (\text{不合题意，舍去}).$$

答： 每轮传染中平均一个人传染了 10 个人.

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新的认识吗？

思考

如果按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少人患流感？

巩固运用25.10

1. 两个相邻偶数的积是 168，求这两个偶数.
2. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 91，每个支干长出多少小分支？
3. 一个同学经过培训后会做某项实验. 回校后第一节课他教会了若干个同学，第二节课会做的同学每人又教会了同样多的同学，这样全班共有 36 人会做这项实验. 求每节课每人教会多少人做实验.

例 2 两年前生产 1 t 甲种药品的成本是 5 000 元，生产 1 t 乙种药品的成本是 6 000 元. 随着生产技术的进步，现在生产 1 t 甲种药品的成本是 3 000 元，生产 1 t 乙种药品的成本是 3 600 元. 哪种药品成本的年平均下降率较大？

分析： 容易求出，甲种药品成本的年平均下降额为 $(5\ 000-3\ 000)\div 2=1\ 000$(元)，乙种药品成本的年平均下降额为 $(6\ 000-3\ 600)\div 2=1\ 200$(元). 显然，乙种药品成本的年平均下降额较大. 但是，年平均下降额(元)不等同于年平均下降率(百分数).

设甲种药品成本的年平均下降率为 x，则一年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)$ 元，两年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)^2$ 元，由此可列方程求出 x 的值. 同理可求出乙种药品成本的年平均下降率.

解：设甲种药品成本的年平均下降率为 x，则有

$$5\ 000(1-x)^2=3\ 000.$$

解方程，得

$$x_1\approx 0.225,\quad x_2\approx 1.775.$$

根据问题的实际意义，甲种药品成本的年平均下降率约为 22.5%.

设乙种药品成本的年平均下降率是 y，则

$$6\ 000(1-y)^2=3\ 600.$$

解方程，得

$$y_1\approx 0.225,\quad y_2\approx 1.775.$$

同理，乙种药品成本的年平均下降率也约为 22.5%.

答：两种药品成本的年平均下降率相同，大约都是 22.5%.

想一想，在例 2 中为什么选择 22.5%作为答案？

巩固运用25.11

1. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14 cm，面积是 24 cm^2. 求两条直角边的长.
2. 小敏开了一个网店，1 月份的利润是 3 500 元. 她工作勤奋，经营有方，实现了利润的连续增长，到 3 月

份获得利润 4 000 元．这两个月利润的月平均增长率是多少（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位）？

3．某银行经过两次降息，使一年期存款的年利率由 2.25%降至 1.98%，平均每次降息的百分率是多少（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后两位）？

4．为进一步促进义务教育的均衡发展，某县加大了基础教育经费的投入．已知 2015 年该县投入基础教育经费 4 000 万元，2017 年投入基础教育经费 5 760 万元．求该县这两年投入基础教育经费的年平均增长率．

例 3　如图 25.3-1，要设计一本书的封面，封面长 27 cm，宽 21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形．如果要使四周的边衬所占面积是封面面积的四分之一，上、下边衬等宽，左、右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（结果保留小数点后一位）？

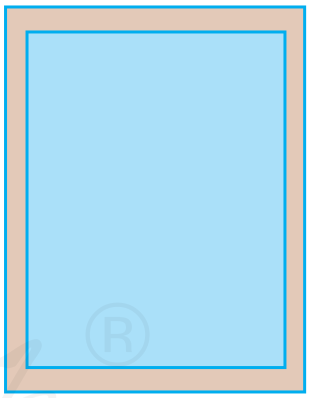


图 25.3-1

解： 封面的长宽之比是 $27:21=9:7$，中央的矩形的长宽之比也应是 $9:7$．设中央的矩形的长和宽分别是 $9a$ cm 和 $7a$ cm，由此得上、下边衬与左、右边衬的宽度之比是

$$\frac{1}{2}(27-9a):\frac{1}{2}(21-7a)$$

$$=9(3-a):7(3-a)$$
$$=9:7.$$

设上、下边衬的宽均为 $9x$ cm，左、右边衬的宽均为 $7x$ cm，则中央的矩形的长为 $(27-18x)$cm，宽为 $(21-14x)$cm.

要使四周的边衬所占面积是封面面积的四分之一，则中央的矩形的面积是封面面积的四分之三. 于是可列出方程

$$(27-18x)(21-14x)=\frac{3}{4}\times 27\times 21.$$

整理，得

$$16x^2-48x+9=0.$$

解方程，得

$$x=\frac{6\pm 3\sqrt{3}}{4}.$$

根据题意，应取 $x=\frac{6-3\sqrt{3}}{4}\approx 0.20$. 所以，上、下边衬的宽均为 1.8 cm，左、右边衬的宽均为 1.4 cm.

答：上、下边衬的宽均为 1.8 cm，左、右边衬的宽均为 1.4 cm.

思考

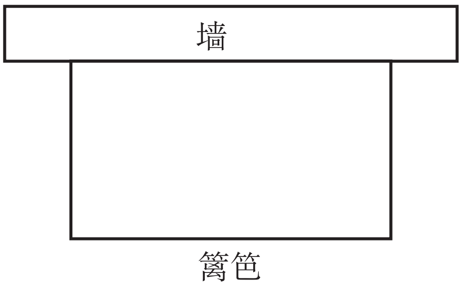
如果换一种设未知数的方法，是否可以更简单地解决上面的问题？请你试一试.

巩固运用25.12

1. 参加足球联赛的每两队之间都进行两场比赛，共要比赛 90 场，问共有多少个队参加比赛.

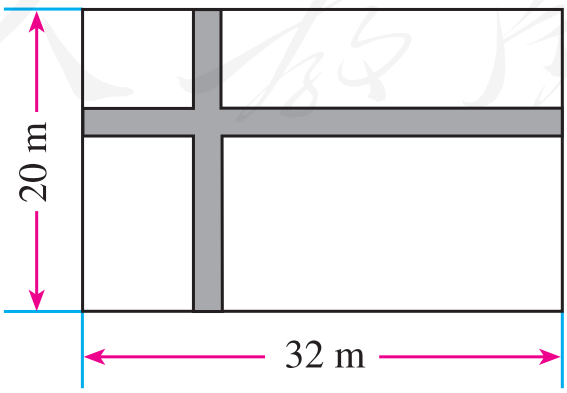
2. 要为一幅长 29 cm，宽 22 cm 的照片配一个相框，要求相框的四条边宽度相等，且相框所占面积为照片面积的四分之一，相框边的宽度应是多少厘米（结果保留小数点后一位）？

3. 如图，利用一面墙（墙的长度不限），用 20 m 长的篱笆，怎样围成一个面积为 50 m^2的矩形场地？



（第 3 题）

4. 如图，在宽为 20 m，长为 32 m 的矩形地面上，修筑同样宽的两条互相垂直的道路，余下的部分作为耕地. 要使耕地的面积为 540 m^2，道路的宽应为多少？



（第 4 题）

数学活动

三角点阵中前 n 行的点数和

图 1 是一个三角点阵，从上向下数有无数多行，其中第一行有 1 个点，第二行有 2 个点……第 n 行有 n 个点……

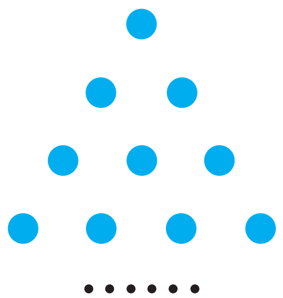


图 1

容易发现，10 是三角点阵中前 4 行的点数和. 你能发现 300 是前多少行的点数的和吗？

用试验的方法，由上而下地逐行相加其点数，可以得到答案. 但是这样寻找答案需要花费较多时间. 你能用一元二次方程解决这个问题吗？

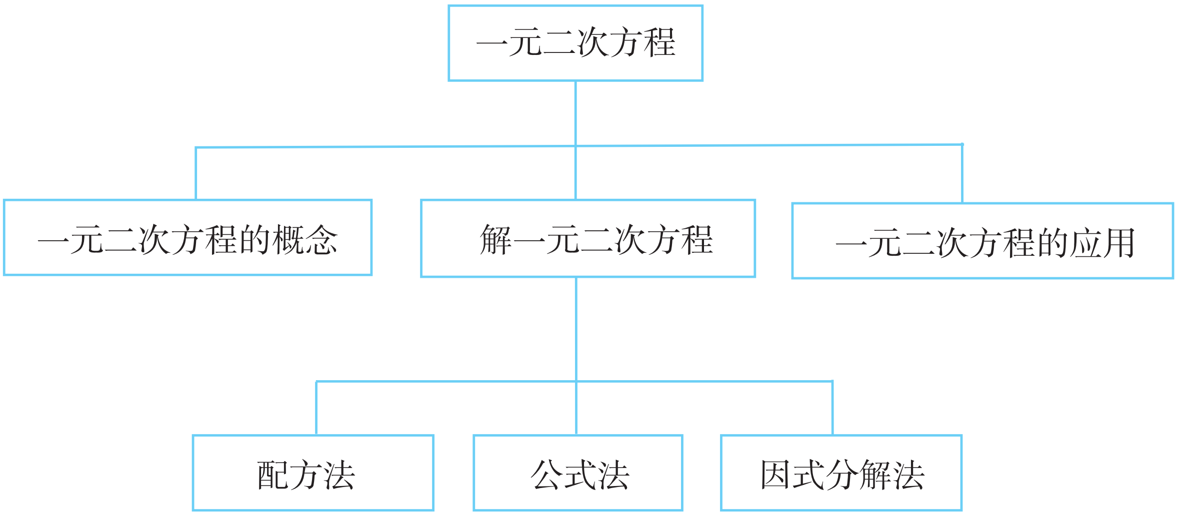
（提示：$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.）

三角点阵中前 n 行的点数和能是 600 吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理.

如果把图 1 的三角点阵中各行的点数依次换为 2，4，6，…，$2n$，…，你能探究出前 n 行的点数和满足什么规律吗？这个三角点阵中前 n 行的点数和能是 600 吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们学习了一元二次方程的解法及其应用．一元二次方程是含有一个未知数的整式方程，未知数的最高次数是 2．

2. 解一元二次方程的基本思想是“降次”，即通过配方、因式分解等方法，把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解．具体地，根据平方根的意义，可得出方程 $x^2=p$ 和 $(x+n)^2=p$ 的解；通过配方，可将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式再解；一元二次方程的求根公式，就是对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 配方后得出的．若能将 ax^2+bx+c 分解为两个一次因式的乘积，则可令每个因式为 0 来解．你能说说“降次”在解一元二次方程中的作用吗？

3. 本章学习了一元二次方程的三种解法——配方法、公式法和因式分解法．一般地，配方法是推导一元二次方程

求根公式的工具，也是一种重要的、应用广泛的数学方法，如后面研究二次函数时就要用到它．掌握了公式法，就可以直接用求根公式求一元二次方程的根．当然，也要根据方程的具体特点选择适当的解法．各种解法在什么情况下比较适用？

4．一元二次方程是刻画现实世界中某些数量关系的有效数学模型．在运用一元二次方程分析、表达和解决实际问题的过程中，要注意体会建立数学模型解决实际问题的思想和方法．你能举例说明用一元二次方程解决实际问题的过程吗？

复习题 25

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $49x^2-1=0$；

(2) $3(2y+1)^2=27$；

(3) $x^2-2x+1=25$；

(4) $x^2-7x-1=0$；

(5) $3x(x+1)=5x+5$；

(6) $2x^2+3x=3$；

(7) $x(2x-5)=4x-10$；

(8) $x^2+5x+7=3x+11$.

2. 解下列方程：

(1) $4x^2+12x+9=81$；

(2) $3x^2+6x-4=0$；

(3) $3x^2+5(2x+1)=0$；

(4) $x^2-4x-1=0$；

(5) $3x^2-x-2=0$；

(6) $4x^2-4x+1=x^2+6x+9$；

(7) $1-8x+16x^2=2-8x$；

(8) $7x^2-\sqrt{6}x-5=0$.

3. 两个数的和为 8，积为 9.75. 求这两个数.

4. 一个矩形的长和宽相差 3 cm，面积是 4 cm^2. 求这个矩形的长和宽.

5. 一个直角梯形的下底比上底长 2 cm，高比上底短 1 cm，面积是 8 cm^2. 求这个梯形的上底、下底和高.

综合运用

6. 要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排 15 场比赛，应邀请多少个球队参加比赛？

7. 某市为打造“绿色城市”，积极投入资金进行河道治污与园林绿化两项工程. 已知去年投资 1 500 万元，预计明年投资 1 800 万元. 求这两年投资的年平均增长率（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位）.

8. 一种药品经两次降价，由每盒 60 元调至 52 元，平均每次降价的百分率是多少（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位）？

9. 用一条长 40 cm 的绳子怎样围成一个面积为 75 cm^2 的矩形？能围成一个面积为 101 cm^2 的矩形吗？如果能，说明围法；如果不能，说明理由.

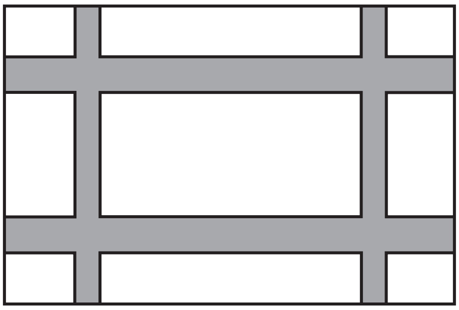
拓广探索

10. 无论 p 取何值，方程

$$(x-3)(x-2)-p^2=0$$

总有两个不等的实数根吗？给出答案并说明理由.

11. 如图，要设计一幅宽 20 cm，长 30 cm 的图案，其中有两横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为 3∶2. 要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（结果保留小数点后一位）？



（第 11 题）

第二十六章　二次函数

函数是描述现实世界中变化规律的数学模型，用一次函数可以表示某些问题中变量之间的关系．我们再来看另一些问题中变量之间的关系．

如果改变正方体的棱长 x，那么正方体的表面积 y 会随之改变，y 与 x 之间有什么关系？

从喷头喷出的水珠，在空中走过一条曲线．在这条曲线的各个位置上，水珠的竖直高度 y 与它距离喷头的水平距离 x 之间有什么关系？

回答上述问题就要用到二次函数．像学习一次函数一样，本章我们首先讨论什么样的函数是二次函数，然后讨论二次函数的图象和性质，并由此加深对一元二次方程的认识，最后运用二次函数分析和解决某些实际问题．通过上述过程，我们对函数在反映现实世界的运动变化中的作用会有进一步的体会．

26.1 二次函数

我们看引言中正方体的表面积的问题.

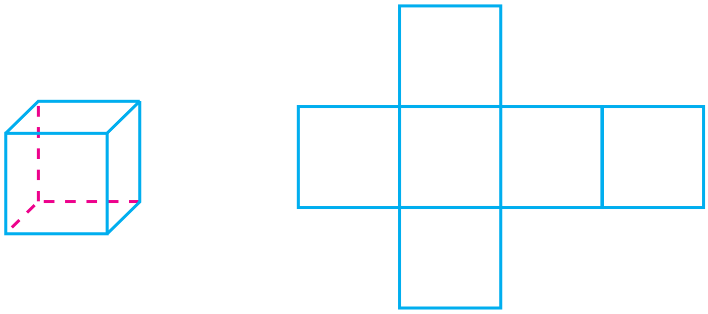


图 26.1-1

正方体的六个面是全等的正方形（图 26.1-1），设正方体的棱长为 x，表面积为 y. 对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，即 y 是 x 的函数. 它们的具体关系可以表示为

$$y=6x^2. \qquad ①$$

我们再来看几个问题.

问题 1 n 个球队参加比赛，每两队之间进行一场比赛. 比赛的场次数 m 与球队数 n 有什么关系？

每个队要与其他 $(n-1)$ 个球队各比赛一场，甲队对乙队的比赛与乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以比赛的场次数

$$m=\frac{1}{2}n(n-1),$$

即

$$m=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n. \qquad ②$$

②式表示比赛的场次数 m 与球队数 n 的关系，对于 n 的每一个确定的值，m 都有唯一确定的值与其对应，即 m 是 n 的函数.

问题 2 某种产品现在的年产量是 20 t，计划今后两年增加产量. 如果每年都比上一年的产量增加 x 倍，那么两年后这种产品的产量 y（单位：t）将由计划所定的 x 的值确定，y 与 x 之间的关系应怎样表示？

这种产品的原产量是 20 t，一年后的产量是 $20(1+x)$ t，再经过一年后的产量是 $20(1+x)(1+x)$ t，即两年后的产量

$$y=20(1+x)^2,$$

即

$$y=20x^2+40x+20. \qquad ③$$

③式表示了两年后的产量 y 与计划增产的倍数 x 之间的关系，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，即 y 是 x 的函数.

思考

函数①②③有什么共同点？

在上面的问题中，函数都是用自变量的二次式表示的.

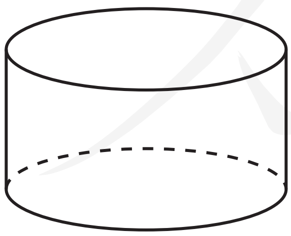
一般地，形如

$$y=ax^2+bx+c\ （a，b，c\ 是常数，a\neq 0）$$

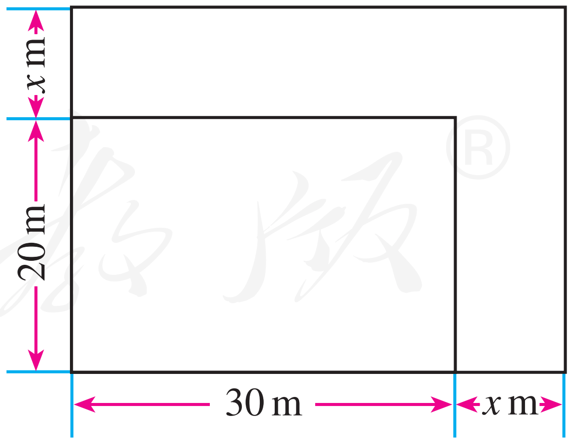
的函数，叫做**二次函数**（quadratic function）．其中，x 是自变量，a，b，c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项．

巩固运用26.1

1. 一个矩形的长是宽的 2 倍，写出这个矩形的面积关于宽的函数解析式．
2. 某种商品的价格是 20 元，商场准备进行两次降价．如果每次降价的百分率都是 x，经过两次降价后的价格 y（单位：元）随每次降价的百分率 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示?
3. 如图，一个圆柱的高等于底面半径，写出它的表面积 S 关于半径 r 的函数解析式．



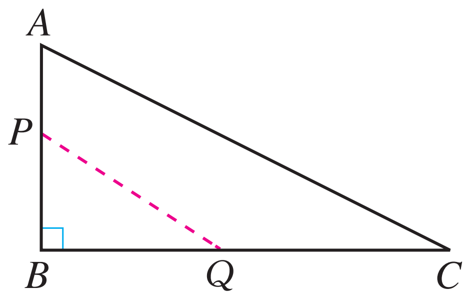
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，矩形绿地的长、宽各增加 x m，写出扩充后的绿地的面积 y（单位：m^2）关于 x 的函数解析式．

*5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=12$ mm，$BC=24$ mm，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向点 B 以 2 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向点 C 以 4 mm/s 的速度移动．如果 P，Q 两点分别从 A，B 两点同时出发，那么 $\triangle PBQ$ 的面积 S（单位：mm^2）随出发时间 t（单位：s）如何变化？写出 S 关于 t 的函数解析式及 t 的取值范围．



（第 5 题）

26.2 二次函数的图象和性质

在八年级下册，我们学习了一次函数的概念，研究了它的图象和性质. 像研究一次函数一样，现在我们来研究二次函数的图象和性质. 结合图象讨论性质是数形结合地研究函数的重要方法. 我们将从最简单的二次函数 $y=x^2$ 开始，逐步深入地讨论一般二次函数的图象和性质.

26.2.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

我们首先讨论二次函数 $y=x^2$ 的图象和性质. 还记得如何用描点法画一个函数的图象吗？

先画二次函数 $y=x^2$的图象.

在 $y=x^2$中，自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

根据表中 x，y 的数值在坐标平面中描点（x，y）（图 26.2-1），再用光滑曲线顺次连接各点，就得到 $y=x^2$的图象（图 26.2-2）.

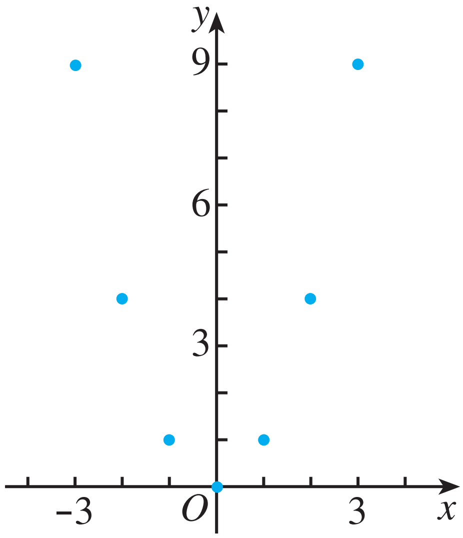


图 26.2-1

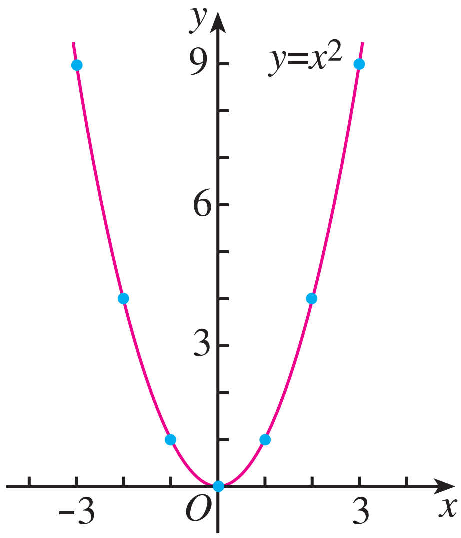


图 26.2-2

可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮时或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是这条曲线开口向上．这条曲线叫做抛物线 $y=x^2$．实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下．一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫做**抛物线** $y=ax^2+bx+c$．

还可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴．利用关于 y 轴对称的点的坐标的关系可以说明上述结论成立：在抛物线 $y=x^2$ 上任取一点 (m, m^2)，因为它关于 y 轴的对称点 $(-m, m^2)$ 也在抛物线 $y=x^2$ 上，所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称．抛物线 $y=x^2$ 与它的对称轴的交点 $(0, 0)$ 叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点．实际上，每条抛物线都有对称轴，抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**．顶点是抛物线的最低点或最高点．

从二次函数 $y=x^2$ 的图象可以看出：在对称轴的左侧，抛物线从左到右下降；在对称轴的右侧，抛物线从左到右上

升．也就是说，当$x<0$时，y随x的增大而减小；当$x>0$时，y随x的增大而增大．

例 1 在同一直角坐标系中，画出函数$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$的图象．

解： 分别列表，再画出它们的图象（图 26.2-3）．

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

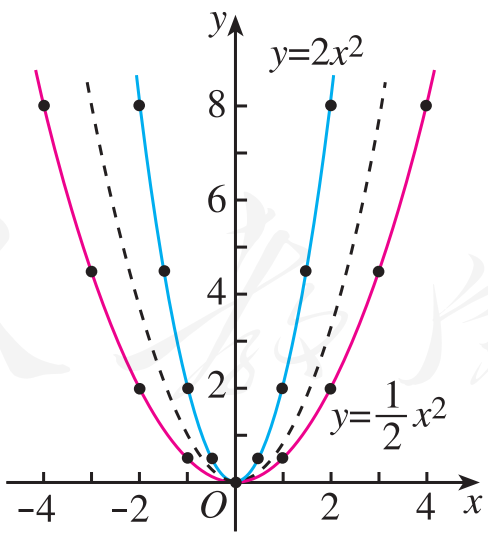


图 26.2-3

思考

（1）函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$ 的图象（图 26.2-3 中的虚线图形）相比，有什么共同点和不同点？

（2）当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么特点？

一般地，当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的开口向上，对称轴是 y 轴，顶点是原点，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小.

巩固运用26.2

1. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

（1）$y=3x^2$；　　　　（2）$y=\frac{1}{3}x^2$.

2. 在同一直角坐标系中，画出下列函数的图象：

$$y=4x^2,\ y=\frac{1}{4}x^2.$$

3. 分别写出抛物线 $y=4.9x^2$ 与 $y=\frac{1}{5}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点.

类似地，我们可以研究当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象.

探究

（1）在同一直角坐标系中，画出函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，并考虑这些抛物线有什么共同点和不同点.

（2）当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么特点？

你画出的图象与图 26.2-4 中的图象相同吗？

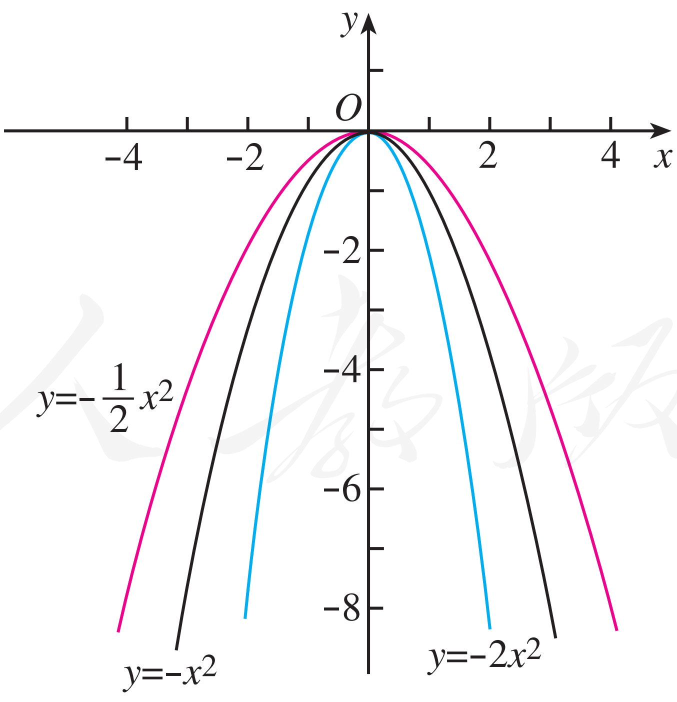


图 26.2-4

一般地，当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的开口向下，对称轴是 y 轴，顶点是原点，顶点是抛物线的最高点，a 越小，抛物线的开口越小．

归纳

一般地，抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点．当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点．对于抛物线 $y=ax^2$，$|a|$ 越大，抛物线的开口越小．

从二次函数 $y=ax^2$ 的图象可以看出：如果 $a>0$，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；如果 $a<0$，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

巩固运用26.3

1．说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

（1）$y=-3x^2$；　　（2）$y=-\frac{1}{3}x^2$．

2．在同一直角坐标系中，画出下列函数的图象：

$$y=-4x^2，\quad y=-\frac{1}{4}x^2.$$

3. 分别写出抛物线 $y=5x^2$ 与 $y=-\frac{1}{5}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点.

4. 填空：

(1) 已知函数 $y=1.5x^2$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而增大；

(2) 已知函数 $y=-1.5x^2$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而减小.

26.2.2 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

例 2 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图象.

解： 先列表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	…	10	6.5	4	2.5	2	2.5	4	6.5	10	…

然后描点画图，得 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图象（图 26.2-5）.

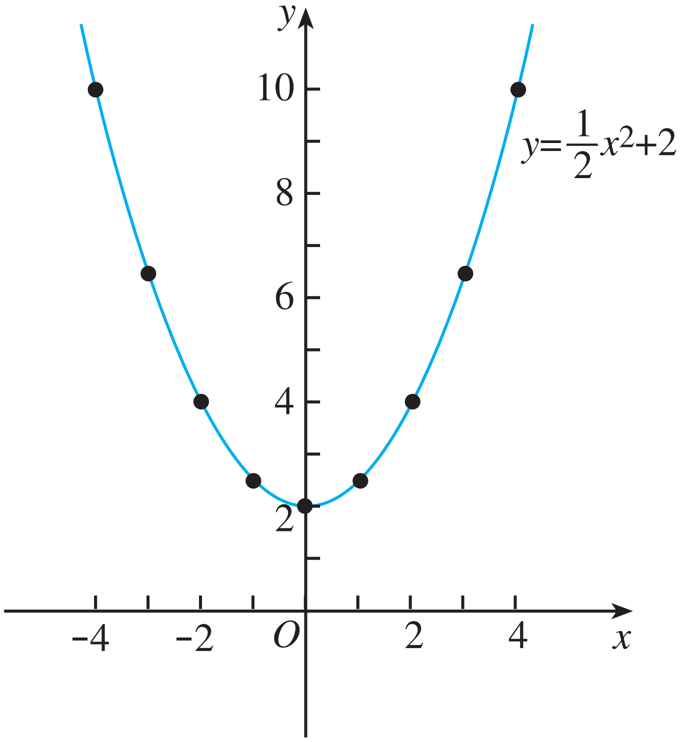


图 26.2-5

思考

（1）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的开口方向、对称轴和顶点各是什么？

（2）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26.2-6 所示.

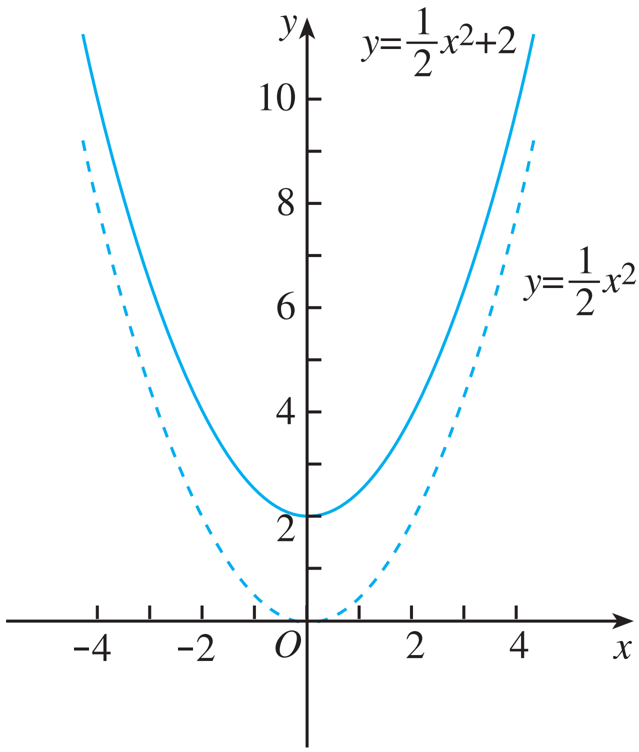


图 26.2-6

可以发现，把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，就得到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$.

探究

（1）画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图象. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的开口方向、对称轴和顶点各是什么？

（2）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26.2-7 所示.

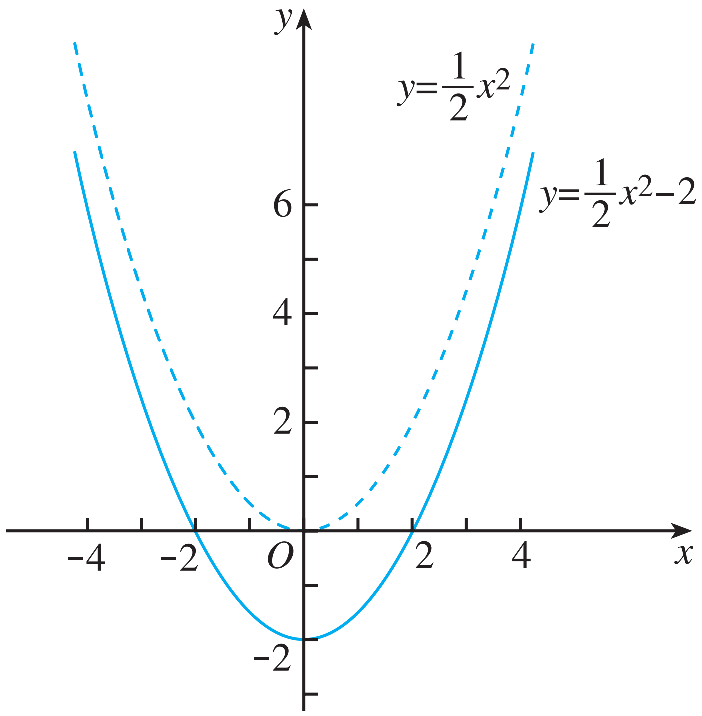


图 26.2-7

可以发现，把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位长度，就得到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$.

思考

抛物线 $y=ax^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 有什么关系？

巩固运用26.4

1. 在同一直角坐标系中，画出下列二次函数的图象，并分别写出对称轴和顶点：

$$y=x^2+3,\quad y=x^2-2.$$

2. （1）在同一直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y=-\frac{1}{2}x^2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2+2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-2.$$

观察三条抛物线的位置关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点.

（2）你能写出抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ 的开口方向、对称轴和顶点吗？它与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

例 3 画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的图象.

解： 先列表：

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$	…	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	…

然后描点画图，得 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的图象（图 26.2-8）.

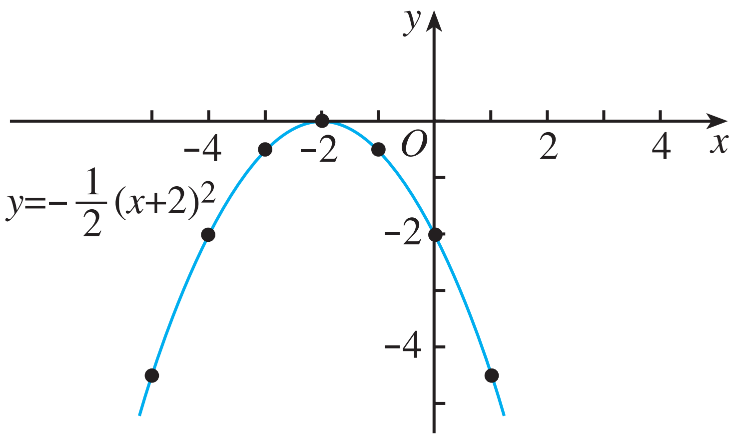


图 26.2-8

思考

(1) 抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的开口方向、对称轴和顶点各是什么？

(2) 抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

函数 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26.2-9 所示.

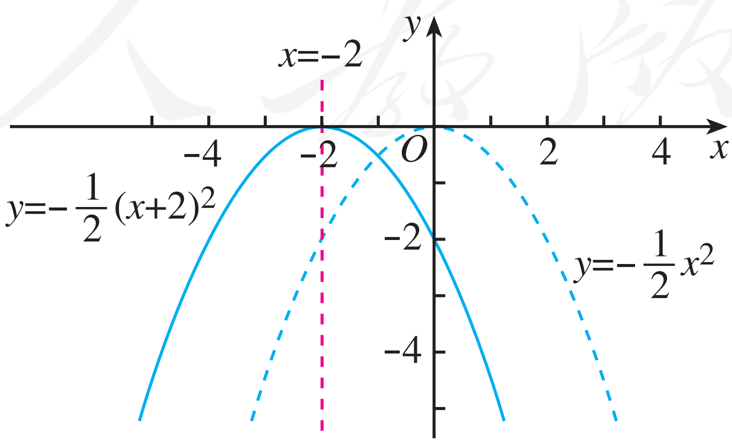


图 26.2-9

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的开口向下，对称轴是经过点（-2，0）且与 x 轴垂直的直线，把它记作 $x=-2$，顶点是（-2，0）.

可以发现，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 2 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

探究

（1）画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象，并指出它的开口方向、对称轴和顶点.

（2）抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26.2-10 所示.

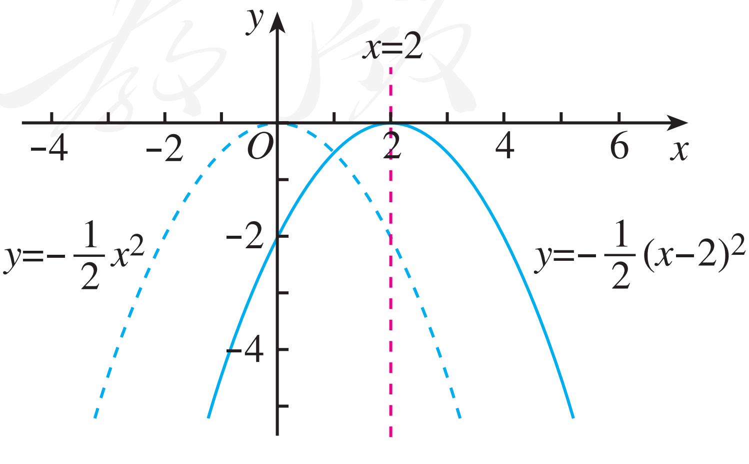


图 26.2-10

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的开口向下，对称轴是 $x=2$，

顶点是（2，0）.

可以发现，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 2 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$.

思考

抛物线 $y=a(x-h)^2$ 与抛物线 $y=ax^2$ 有什么关系？

巩固运用26.5

1. 在同一直角坐标系中，描点画出下列二次函数的图象，并分别写出对称轴和顶点：

$$y=-\frac{1}{4}(x+2)^2，\quad y=-\frac{1}{4}(x-1)^2.$$

2. （1）在同一直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y=\frac{1}{2}x^2，\quad y=\frac{1}{2}(x+1)^2，\quad y=\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

观察三条抛物线的位置关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点.

（2）你能写出抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-h)^2$ 的开口方向、对称轴和顶点吗？它与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

例 4　画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$ 的图象，并指出它的开口方向、对称轴和顶点．怎样移动抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 可以得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$？

解： 函数 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$ 的图象如图 26.2-11 所示.

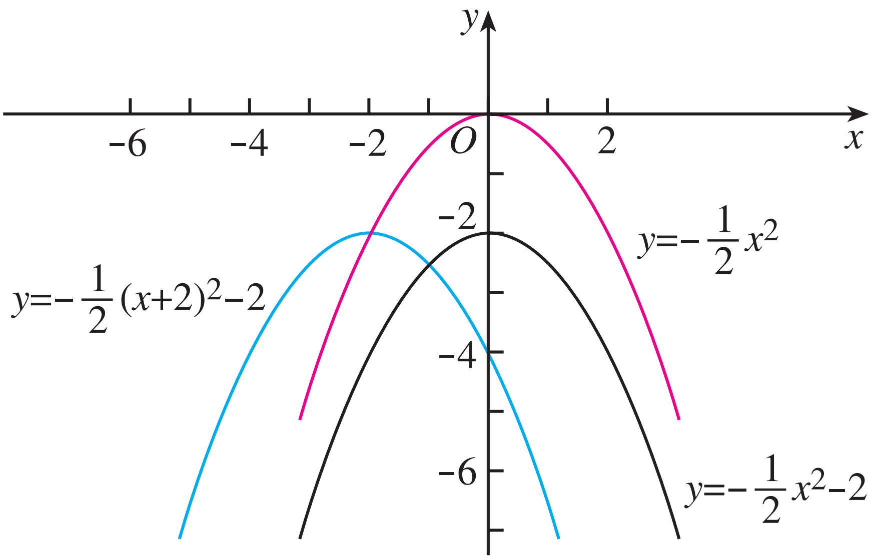


图 26.2-11

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$ 的开口向下，对称轴是 $x=-2$，顶点是 $(-2, -2)$.

如图 26.2-11，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位长度，再向左平移 2 个单位长度，得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$.

在例 4 中，还有其他平移方法吗？

归纳

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同．把抛物线 $y=ax^2$ 向上（下）向左（右）平移，可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$．平移的方向、距离要根据 h，k 的值来决定．

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 有如下特点：

（1）当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下．

（2）对称轴是 $x=h$．

（3）顶点是 $(h，k)$．

从二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以看出：如果 $a>0$，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；如果 $a<0$，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小．

我们来看一个与章前图有关的问题．

例 5 要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管．在水管的顶端安一个喷水头，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，高度为 3 m，水柱落地处离池中心 3 m．水管应多长？

解： 如图 26.2-12，以水管与地面交点为原点，原点与水柱落地处所在直线为 x 轴，水管所在直线为 y 轴，建立直角坐标系．

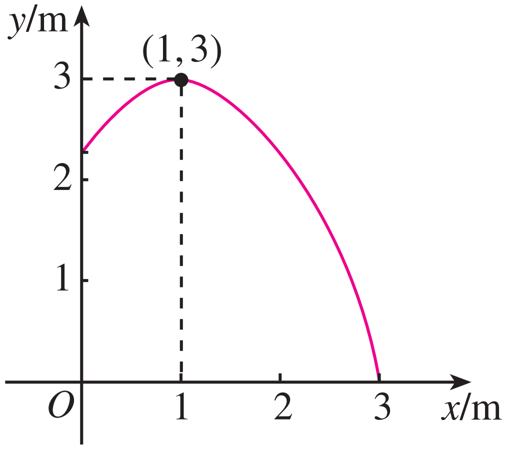


图 26.2-12

点（1，3）是图中这段抛物线的顶点，因此可设这段抛物线对应的函数解析式是

$$y=a(x-1)^2+3\ (0\leqslant x\leqslant 3).$$

由这段抛物线经过点（3，0），可得

$$0=a(3-1)^2+3,$$

解得

$$a=-\frac{3}{4}.$$

因此

$$y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3\ (0\leqslant x\leqslant 3).$$

当 $x=0$ 时，$y=2.25$，也就是说，水管应长 2.25 m.

巩固运用26.6

1. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

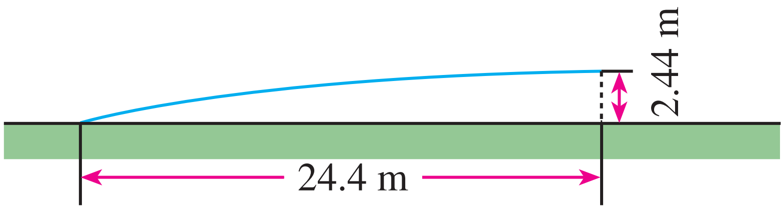
（1）$y=2(x+3)^2+5$；　（2）$y=-3(x-1)^2-2$；

（3）$y=4(x-3)^2+7$；　（4）$y=-5(x+2)^2-6$.

2. 在同一直角坐标系中，描点画出下列二次函数的图象，并分别写出对称轴和顶点：

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2,\quad y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2.$$

3. 一名足球运动员在距球门 24.4 m 处踢出任意球，球的飞行路线是一条抛物线. 如果球飞行到最高点时击中 2.44 m 高的球门横梁，求球的竖直高度 y（单位：m）与它距离罚球点的水平距离 x（单位：m）之间的关系式.



（第 3 题）

26.2.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

先研究一个具体的二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象和性质.

思考

我们已经知道二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质，能否利用这些知识来讨论二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象和性质？

配方可得：

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2}x^2-6x+21\\
&=\frac{1}{2}(x-6)^2+3.
\end{aligned}
$$

根据前面的知识，我们可以先画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，然后把这个图象向右平移 6 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，得到二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象. 还有其他平移方法吗？

如果直接画二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象，可按如下步骤进行.

由配方的结果可知，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的对称轴是 $x=6$，顶点是（6，3）.

先利用图象的对称性列表：

x	…	3	4	5	6	7	8	9	…
$y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$	…	7.5	5	3.5	3	3.5	5	7.5	…

然后描点画图，得到 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象（图 26.2-13）.

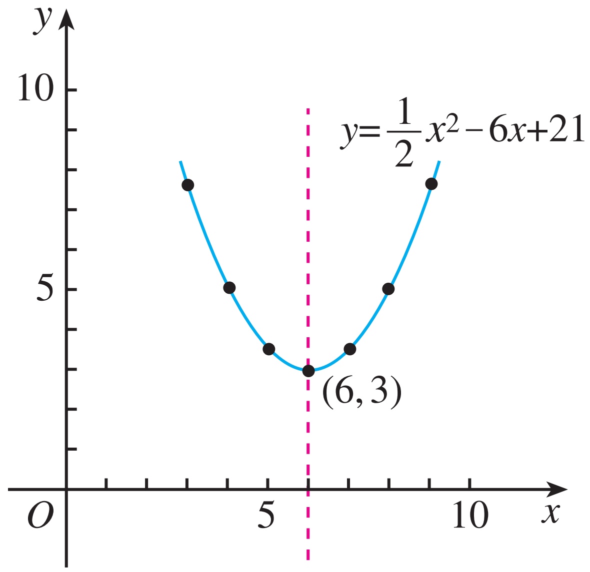


图 26.2-13

从图 26.2-13 中二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象可以看出：在对称轴的左侧，抛物线从左到右下降；在对称轴的右侧，抛物线从左到右上升. 也就是说，当 $x<6$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>6$ 时，y 随 x 的增大而增大.

探究

你能用上面的方法讨论二次函数 $y=-2x^2-4x+1$ 的图象和性质吗？

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以通过配方化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，即

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

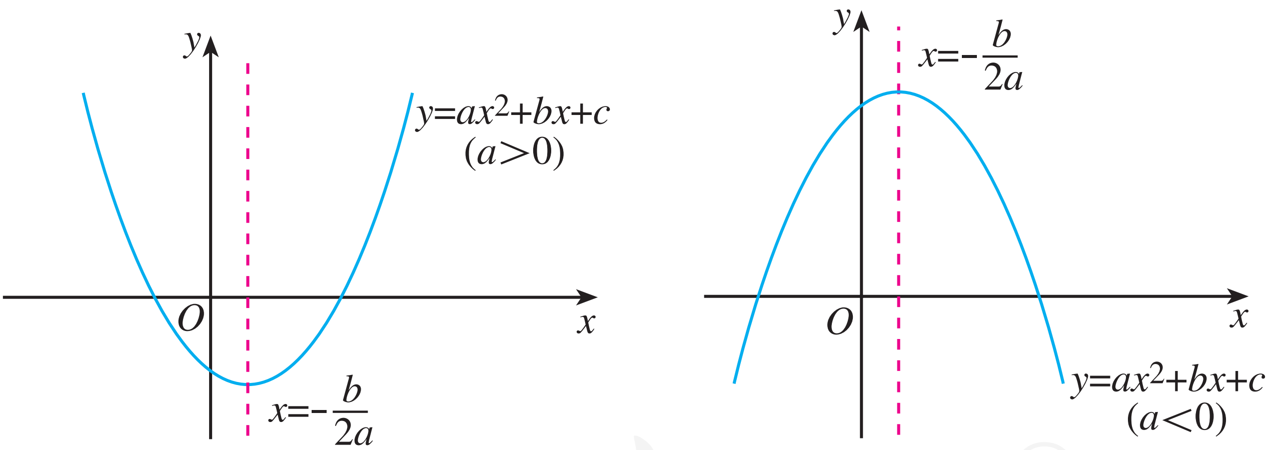
因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点

是$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

如图 26.2-14，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可以看出：

如果 $a>0$，当 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；

如果 $a<0$，当 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小.



（1）　　　　（2）

图 26.2-14

巩固运用26.7

1. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

（1）$y=3x^2+2x$；　　（2）$y=-x^2-2x$；

（3）$y=-2x^2+8x-8$；　　（4）$y=\dfrac{1}{2}x^2-4x+3$.

2. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点，再描点画图：

（1）$y=-3x^2+12x-3$；（2）$y=4x^2-24x+26$；

（3）$y=2x^2+8x-6$；　　（4）$y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$.

3. 填空：

（1）已知函数 $y=2x^2+4x+3$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而增大；

（2）已知函数 $y=-2x^2+x-4$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而减小.

阅读与思考

推测滑行距离与滑行时间的关系

一个滑雪者从山坡滑下，为了得出滑行距离 l（单位：m）与滑行时间 t（单位：s）之间的关系式，测得一些数据（如下表）.

滑行时间 t/s	0	1	2	3	4
滑行距离 l/m	0	4.5	14	28.5	48

为观察 l 与 t 之间的关系，建立直角坐标系，以 t 为横坐标，l 为纵坐标，描出表中数据对应的 5 个点，并用光滑曲线连接它们（图 1）。可以看出，这条曲线像是抛物线的一部分。于是，我们用二次函数来近似地表示 l 与 t 的关系。

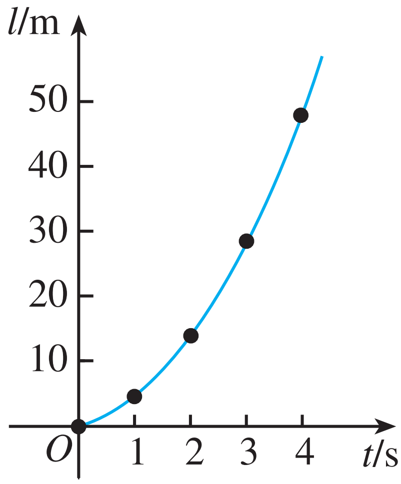


图 1

设 $l=at^2+bt+c$。因为当 $t=0$ 时，$l=0$，所以 $a\times 0+b\times 0+c=0$，得 $c=0$。

又当 $t=1$ 时，$l=4.5$，当 $t=2$ 时，$l=14$，即

$$\begin{cases} a+b=4.5, \\ 2^2a+2b=14. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=2.5, \\ b=2. \end{cases}$$

这样我们得到二次函数 $l=2.5t^2+2t$，可以用它近似描述 l 与 t 之间的关系。

26.3 二次函数与一元二次方程

以前我们从一次函数的角度看一元一次方程，认识了一次函数与一元一次方程的联系．本节我们从二次函数的角度看一元二次方程，认识二次函数与一元二次方程的联系．先来看下面的问题．

问题 如图 26.3-1，以 40 m/s 的速度将小球沿与地面成 30°角的方向击出时，小球的飞行路线将是一条抛物线．如果不考虑空气阻力，小球的飞行高度 h（单位：m）与飞行时间 t（单位：s）之间具有函数关系

$$h=20t-5t^2.$$

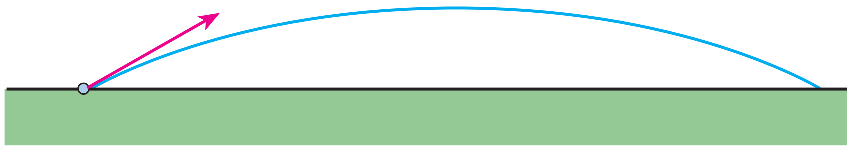


图 26.3-1

考虑以下问题：

（1）小球的飞行高度能否达到 15 m？如果能，需要多少飞行时间？

（2）小球的飞行高度能否达到 20 m？如果能，需要多少飞行时间？

（3）小球的飞行高度能否达到 20.5 m？为什么？

（4）小球从飞出到落地要用多少时间？

分析： 由于小球的飞行高度 h 与飞行时间 t 有函数关系 $h=20t-5t^2$，所以可以将问题中 h 的值代入函数解析式，得到关于 t 的一元二次方程. 如果方程有符合实际的解，则说明小球的飞行高度可以达到问题中 h 的值；否则，说明小球的飞行高度不能达到问题中 h 的值.

解：（1）解方程

$$15=20t-5t^2,$$

$$t^2-4t+3=0,$$

$$t_1=1,\ t_2=3.$$

当小球飞行 1 s 和 3 s 时，它的飞行高度为 15 m.

（2）解方程

$$20=20t-5t^2,$$

$$t^2-4t+4=0,$$

$$t_1=t_2=2.$$

当小球飞行 2 s 时，它的飞行高度为 20 m.

（3）解方程

$$20.5=20t-5t^2,$$

$$t^2-4t+4.1=0.$$

因为 $(-4)^2-4\times4.1<0$，所以方程无实数根. 这就是说，小球的飞行高度达不到 20.5 m.

（4）小球飞出时和落地时的高度都为 0 m，解方程

$$0=20t-5t^2,$$

$$t^2-4t=0,$$

$$t_1=0,\ t_2=4.$$

当小球飞行 0 s 和 4 s 时，它的高度为 0 m. 这表明小球

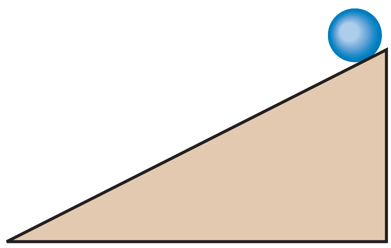
从飞出到落地要用 4 s. 从图 26.3-1 来看，0 s 时小球从地面飞出，4 s 时小球落回地面.

结合图 26.3-1，你能指出为什么在两个时间小球的高度均为 15 m 吗？为什么只在一个时间小球的高度为 20 m？

从上面可以看出，二次函数与一元二次方程联系密切. 例如，已知二次函数 $y=-x^2+4x$ 的值为 3，求自变量 x 的值，可以看作解一元二次方程 $-x^2+4x=3$（即 $x^2-4x+3=0$）. 反过来，解方程 $x^2-4x+3=0$ 又可以看作已知二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的值为 0，求自变量 x 的值.

巩固运用26.8

1. 如图，钢球从斜面顶端由静止开始沿斜面滚下，滚动的距离 l（单位：m）关于滚动的时间 t（单位：s）的函数解析式是 $l=0.75t^2$. 如果斜面的长是 3 m，那么钢球从斜面顶端滚到底端用多长时间？



（第 1 题）

2. 一辆汽车的行驶距离 l（单位：m）关于行驶时间 t（单位：s）的函数解析式是 $l=9t+\frac{1}{2}t^2$，行驶 380 m 需要多少时间？
3. 以 40 m/s 的速度将小球沿与地面成 45°角的方向击出时，小球的飞行路线将是一条抛物线. 如果不考虑

空气阻力，小球的飞行高度 h（单位：m）与距离击出点的水平距离 x（单位：m）之间具有函数关系 $h=x-\frac{x^2}{160}$. 当小球的飞行高度 h 为 40 m 时，小球距离击出点的水平距离 x 是多少米？

一般地，我们可以利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 深入讨论一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

思考

下列二次函数的图象与 x 轴有公共点吗？如果有，公共点的横坐标是多少？当 x 取公共点的横坐标时，函数值是多少？由此，你能得出相应的一元二次方程的根吗？

（1）$y=x^2+x-2$；　　（2）$y=x^2-6x+9$；

（3）$y=x^2-x+1$.

这些函数的图象如图 26.3-2 所示.

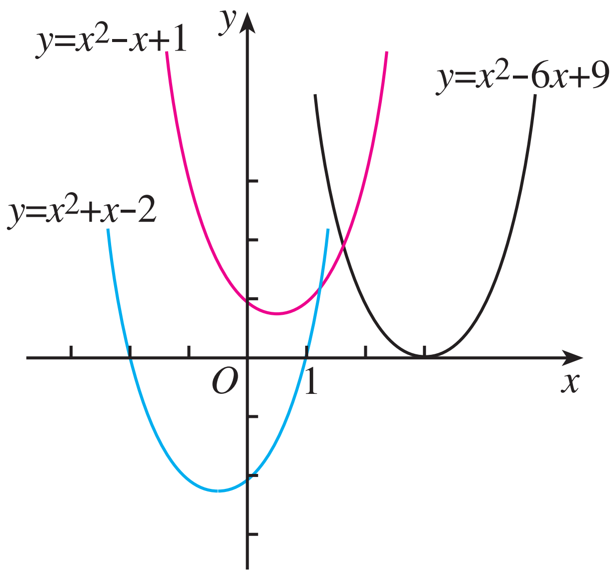


图 26.3-2

可以看出：

(1) 抛物线 $y=x^2+x-2$ 与 x 轴有两个公共点，它们的横坐标是 -2，1. 当 x 取公共点的横坐标时，函数值是 0. 由此得出方程 $x^2+x-2=0$ 的根是 $x_1=-2$，$x_2=1$.

(2) 抛物线 $y=x^2-6x+9$ 与 x 轴有一个公共点，这点的横坐标是 3. 当 $x=3$ 时，函数值是 0. 由此得出方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=3$.

(3) 抛物线 $y=x^2-x+1$ 与 x 轴没有公共点. 由此可知，方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根.

反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应的二次函数的图象与 x 轴的位置关系.

归纳

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可得如下结论.

(1) 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点. 这对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的三种情况：没有实数根，有两个相等的实数根，有两个不等的实数根.

由上面的结论，我们可以利用二次函数的图象求一元二次方程的根. 由于作图或观察可能存在误差，由图象求得的根，一般是近似的.

例 利用函数图象求方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根（结果保留小数点后一位）.

解： 画出函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象（图 26.3-3），它与 x 轴的公共点的横坐标大约是 -0.7，2.7.

所以方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根为

$$x_1\approx-0.7,\ x_2\approx2.7.$$

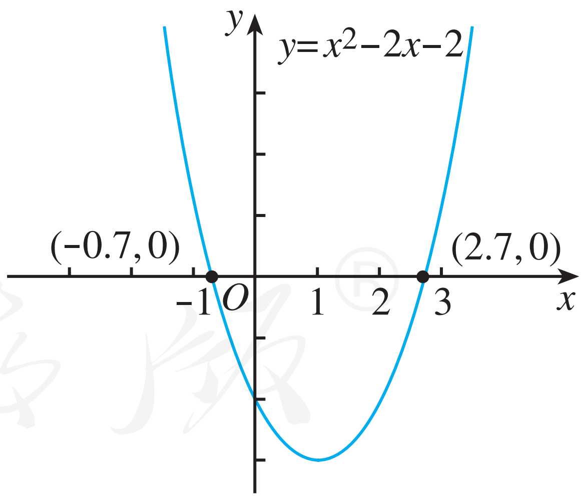


图 26.3-3

巩固运用26.9

1. 已知函数 $y=x^2-4x+3$.

（1）画出这个函数的图象；

（2）观察图象，当 x 取哪些值时，函数值为 0?

2. 用函数的图象求下列方程的根：

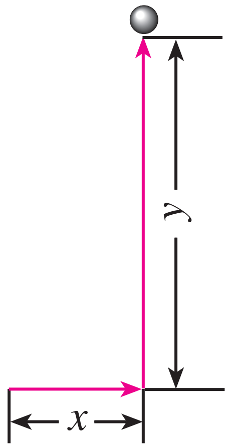
（1）$x^2-3x+2=0$；（2）$-x^2-6x-9=0$.

3. 一名男生推铅球，铅球行进高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）（如图）之间的关系是

$$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

（1）画出上述函数的图象；

（2）观察图象，指出铅球推出的距离.



（第 3 题）

*4. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，利用图象回答：

（1）方程 $x^2-2x-3=0$ 的根是什么？

（2）x 取什么值时，函数值大于 0?

（3）x 取什么值时，函数值小于 0?

26.4 实际问题与二次函数

对于某些实际问题，如果其中变量之间的关系可以用二次函数模型来刻画，那么我们就可以利用二次函数的图象和性质来研究.

问题 从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h（单位：m）与小球的运动时间 t（单位：s）之间的关系式是 $h=30t-5t^2$（$0\leqslant t\leqslant 6$）. 小球运动的时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？

可以借助函数图象解决这个问题. 画出函数 $h=30t-5t^2$（$0\leqslant t\leqslant 6$）的图象（图 26.4-1）.

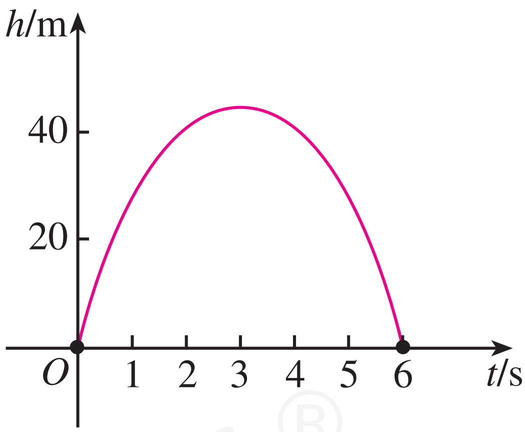


图 26.4-1

可以看出，这个函数的图象是一条抛物线的一部分，这条抛物线的顶点是这个函数的图象的最高点. 也就是说，当 t 取顶点的横坐标时，这个函数有最大值.

因此，当 $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{30}{2\times(-5)}=3$ 时，h 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{-30^2}{4\times(-5)}=45$. 也就是说，小球运动的时间是 3 s 时，小球最高. 小球运动中的最大高度是 45 m.

一般地，当 $a>0$（$a<0$）时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是最低（高）点，也就是说，当 $x=-\frac{b}{2a}$时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有最小（大）值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

我们再来解决一些实际问题.

例 1 一名自行车运动员骑车登上斜坡后均匀减速，在斜坡上通过的距离 l（单位：m）与所用时间 t（单位：s）之间的关系式是 $l=5t-0.2t^2$，他在斜坡上通过的最长距离是多少？

解： 当 $t=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2\times(-0.2)}=12.5$ 时，l 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-5^2}{4\times(-0.2)}=31.25$. 即这名运动员在斜坡上通过的最长距离是 31.25 m.

巩固运用26.10

1. 求下列函数的最大值或最小值：

   （1）$y=x^2-2x+4$；　（2）$y=-x^2+3x$；

   （3）$y=2x^2+4x-5$；　（4）$y=-3x^2-4x+1$.

2. 下列抛物线有最高点或最低点吗？如果有，写出这些点的坐标：

   （1）$y=-4x^2+3x$；　（2）$y=3x^2+x+6$.

3. 在图 26.3-1 中，小球的飞行高度 h（单位：m）与飞

行时间 t（单位：s）之间具有函数关系 $h=20t-5t^2$. 运用本节课所学的知识解答下列问题.

(1) 小球运动的时间是多少时，小球最高？

(2) 小球运动中的最大高度是多少？

(3) 你能由 (2) 解释为什么小球的飞行高度不能达到20.5 m吗？

4. 飞机着陆后滑行的距离 l（单位：m）关于滑行的时间 t（单位：s）的函数解析式是 $l=60t-1.5t^2$. 飞机着陆后滑行多远才能停下来？

例 2 用总长为 60 m 的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S（单位：m^2）随矩形一边长 l（单位：m）的变化而变化. 当这边长是多少米时，场地的面积最大？

分析： 先写出 S 关于 l 的函数解析式，再求出使 S 最大的 l 的值.

解： 矩形场地的周长是 60 m，一边长为 l m，所以另一边长为 $\left(\frac{60}{2}-l\right)$m. 场地的面积

$$S=l(30-l),$$

即

$$S=-l^2+30l\ (0<l<30).$$

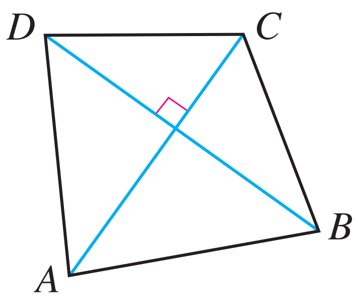
因此，当 $l=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{2\times(-1)}=15$ 时，S 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-30^2}{4\times(-1)}=225$. 也就是说，当这边长是 15 m 时，

场地的面积最大.

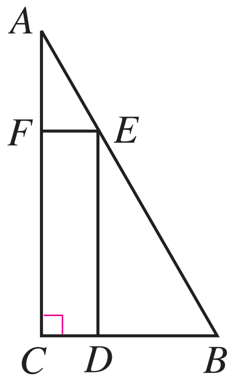
巩固运用26.11

1. 已知直角三角形两条直角边的和等于 8，两条直角边各为多少时，这个直角三角形的面积最大？最大值是多少？

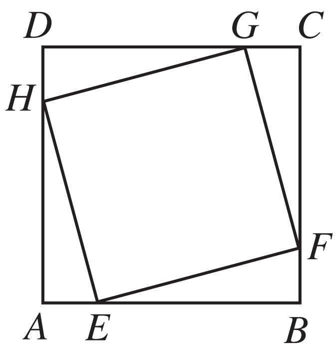
2. 如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 互相垂直，$AC+BD=10$. 当 AC，BD 的长是多少时，四边形 $ABCD$ 的面积最大？



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 一块三角形材料如图所示，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$AB=12$. 用这块材料剪出一个矩形 $CDEF$，其中，点 D，E，F 分别在 BC，AB，AC 上. 要使剪出的矩形 $CDEF$ 的面积最大，点 E 应选在何处？

4. 如图，点 E，F，G，H 分别位于正方形 $ABCD$ 的四条边上，四边形 $EFGH$ 也是正方形. 当点 E 位于何处时，正方形 $EFGH$ 的面积最小？

*5. 分别用定长为 L 的线段围成矩形和圆，哪种图形的面积大？为什么？

例 3 某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件. 市场调查反映：如调整价格，每涨价 1 元，每星期要少卖出 10 件；每降价 1 元，每星期可多卖出 20 件. 已知商品的进价为每件 40 元，如何定价才能使利润最大？

解： 调整价格包括涨价和降价两种情况.

（1）我们先来看涨价的情况. 设每件涨价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 随之变化. 我们先来确定 y 随 x 变化的函数解析式. 涨价 x 元时，每星期少卖 $10x$ 件，实际卖出 $(300-10x)$ 件，销售额为 $(60+x)(300-10x)$ 元，买进商品需付 $40(300-10x)$ 元. 因此，所得利润

$$y=(60+x)(300-10x)-40(300-10x),$$

即

$$y=-10x^2+100x+6\ 000,$$

其中，$0\leqslant x\leqslant 30$.（想一想，x 的取值范围是怎样确定的？）

因此，当 $x=5$ 时，y 最大，也就是说，在涨价的情况下，涨价 5 元，即定价 65 元时，利润最大，最大利润是 6 250 元.

（2）我们再来看降价的情况. 设每件降价 x 元，则每星期可多卖 $20x$ 件，实际卖出 $(300+20x)$ 件，销售额为 $(60-x)(300+20x)$ 元，买进商品需付 $40(300+20x)$ 元. 因此，所得利润

$$y=(60-x)(300+20x)-40(300+20x),$$

即

$$y=-20x^2+100x+6\ 000,$$

由降价后的定价 $(60-x)$ 元不高于现价 60 元，不低于进

价 40 元可得

$$0\leqslant x\leqslant 20.$$

因此，当 $x=2.5$ 时，y 最大，也就是说，在降价的情况下，降价 2.5 元，即定价 57.5 元时，利润最大，最大利润是 6 125 元.

由（1）（2）的讨论及现在的销售状况可知，定价 65 元，利润最大.

巩固运用26.12

1. 某种商品每件的进价为 30 元，在某段时间内若以每件 x 元出售，可卖出 $(100-x)$ 件，应如何定价才能使利润最大？
2. 生产某种商品需要 100 元的固定花费，然后每生产一件商品花费 4 元，预定单价为 25 元，实际单价随产量的增加而下调，下调幅度为产量数的八分之一. 当产量为何值时，利润最大？
3. 某宾馆有 50 个房间供游客居住. 当每个房间每天的定价为 180 元时，房间会全部住满；当每个房间每天的定价每增加 10 元时，就会有一个房间空闲. 如果游客居住房间，宾馆需对每个房间每天支出 20 元的各种费用. 房价定为多少时，宾馆利润最大？

数学活动

活动 1

（1）观察下列两个两位数的积（两个乘数的十位上的数都是 9，个位上的数的和等于 10），猜想其中哪个积最大.

91×99，92×98，…，98×92，99×91.

（2）观察下列两个三位数的积（两个乘数的百位上的数都是 9，十位上的数与个位上的数组成的数的和等于 100），猜想其中哪个积最大.

901×999，902×998，…，998×902，999×901.

对于（1）（2），你能用二次函数的知识说明你的猜想正确吗？

活动 2

下表是某运动员在 10 m 跳台跳水过程中空中高度 h（单位：m）与时间 t（单位：s）的数据.

t/s	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
h/m	10	10.4	10.4	10	9.2	8	6.4	4.4	2

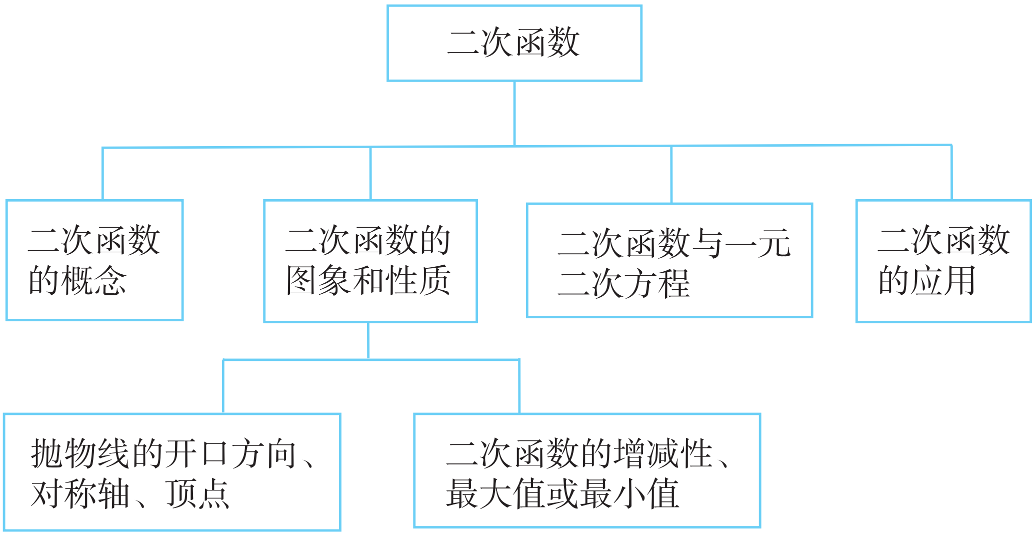
（1）根据表中数据，在直角坐标系中描点，画出高度变化曲线；

（2）试写出高度 h 关于时间 t 的函数关系式；

（3）根据（2）中求出的函数关系式求运动员达到的最大高度.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们首先认识了二次函数，研究了它的图象与性质，然后从函数的角度对一元二次方程又进行了讨论，最后运用二次函数分析和解决了一些实际问题.

2. 举例说明，一些实际问题中变量之间的关系可以用二次函数表示，列出函数解析式并画出图象.

3. 结合二次函数的图象回顾二次函数的性质，例如根据抛物线的开口方向、顶点，说明二次函数在什么情况下取得最大值或最小值.

4. 结合抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系，说明方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的各种情况.

5. 在日常生活、生产和科研中，常常会遇到求什么条件下可以使材料最省、时间最少、效率最高等问题，其中一

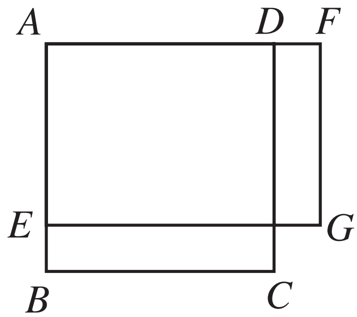
些问题可以归结为求二次函数的最大值或最小值. 请举例说明如何分析、解决这样的问题.

6. 回顾一次函数和二次函数，体会函数这种数学模型在反映现实世界的运动变化中的作用.

复习题 26

复习巩固

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4，E 是 AB 上一点，F 是 AD 延长线上的一点，$BE=DF$. 四边形 $AEGF$ 是矩形，矩形 $AEGF$ 的面积 y 随 BE 的长 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示？



（第 1 题）

2. 某商场第 1 年销售计算机 5 000 台，如果每年的销售量比上一年增加相同的百分率 x，写出第 3 年的销售量 y（单位：台）关于每年增加的百分率 x 的函数解析式.

3. 选择题.

在抛物线 $y=x^2-4x-4$ 上的一个点是（　　）.

(A) $(4,\ 4)$　　(B) $(3,\ -1)$

(C) $(-2,\ -8)$　　(D) $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{4}\right)$

4. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点，再描点画图：

(1) $y=x^2+2x-3$；　　(2) $y=1+6x-x^2$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$；　　(4) $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x-4$.

5. 一个滑雪运动员从 85 m 长的山坡滑下，滑行的距离 l（单位：m）与滑行时间 t（单位：s）的函数关

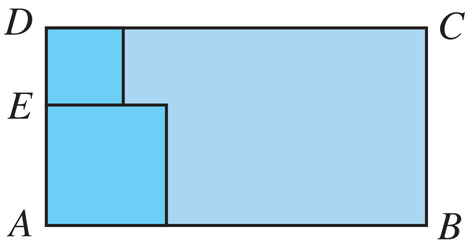
系式是 $l=1.8t+0.064t^2$. 他通过这段山坡需要多长时间?

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点是 $(-1, 0)$, $(3, 0)$, 求这条抛物线的对称轴.

综合运用

7. 汽车刹车后行驶的距离 l (单位: m) 关于行驶的时间 t (单位: s) 的函数解析式是 $l=15t-6t^2$. 汽车刹车后到停下来前进了多远?

8. 如图, 从一张纸较短的边上找一个点 E, 剪下两个正方形, 边长分别是 AE, DE. 要使剪下的纸最少, 点 E 应选在何处?

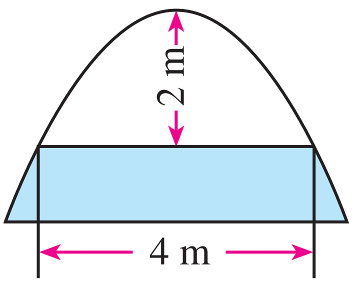


(第 8 题)

(第 9 题)

9. 如图, 用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园, 墙长为 18 m. 这个矩形的长、宽各为多少时, 菜园的面积最大?

10. 图中是抛物线形拱桥, 当拱顶离水面 2 m 时, 水面宽 4 m. 若水面下降 1 m, 水面宽度增加多少?



(第 10 题)

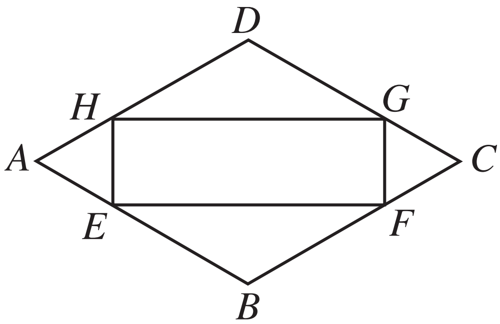
11. 已知矩形的周长为 36 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 矩形的长、宽各为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大?

拓广探索

12. 如图，点 E，F，G，H 分别在菱形 $ABCD$ 的四条边上，$BE=BF=DG=DH$，连接 EF，FG，GH，HE，得到四边形 $EFGH$.

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

(2) 设 $AB=a$，$\angle A=60^\circ$，当 BE 为何值时，矩形 $EFGH$ 的面积最大?



(第 12 题)

13. 对某条路线的长度进行 n 次测量，得到 n 个结果 x_1，x_2，…，x_n. 如果用 x 作为这条路线长度的近似值，当 x 取什么值时，

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$$

最小? x 所取的这个值是哪个常用的统计量?

第二十七章　旋转

同学们都知道风车吧？它能在风的吹动下不停地转动．在我们周围，还能看到许多转动着的物体，如车轮、水车、风力发电机、飞机的螺旋桨、时钟的指针、游乐园的大转盘……我们就生活在一个处处能见到旋转现象的世界中．

在数学中，旋转是图形变化的方法之一，应该怎样描述它呢？它又有什么性质呢？本章将解答这些问题．另外，本章还要学习与旋转密切相关的中心对称知识，并应用平移、轴对称和旋转等方法进行图案设计，由此可以加深对图形变化的综合认识．

让我们一起来探索旋转的奥秘吧！

27.1 图形的旋转

思考

如图 27.1-1，钟表的指针在不停地转动，从 3 时到 5 时，时针转动了多少度？

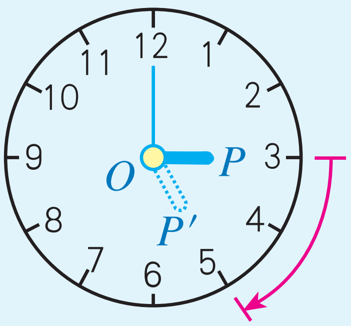


图 27.1-1

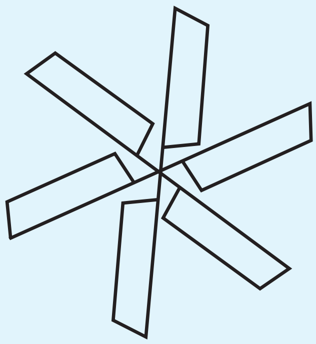


图 27.1-2

如图 27.1-2，风车风轮的每个叶片在风的吹动下转动到新的位置.

以上这些现象有什么共同特点呢？

我们可以把上面问题中的指针、叶片等看作平面图形. 像这样，把一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度，叫做图形的**旋转**（rotation），点 O 叫做**旋转中心**，转动的角叫做**旋转角**. 如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P'，那么这两个点叫做这个旋转的**对应点**. 例如，图 27.1-1 中，时针在旋转，表盘的中心是旋转中心，旋转角是 60°，时针的端点在 3 时的位置 P 与在 5 时的位置 P'是对应点.

思考

如图 27.1-3，在硬纸板上，挖一个三角形洞，再另挖一个小洞 O 作为旋转中心．硬纸板下面放一张白纸，先在纸上描出这个挖掉的三角形图案（$\triangle ABC$），然后围绕旋转中心转动硬纸板，再描出这个挖掉的三角形（$\triangle A'B'C'$），移开硬纸板．

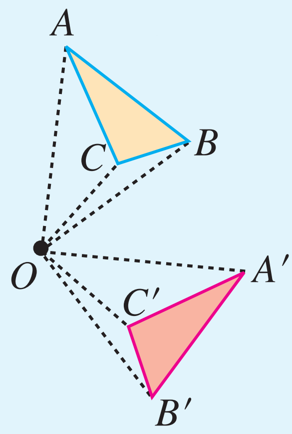


图 27.1-3

$\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转得到的．线段 OA 与 OA' 有什么关系？$\angle AOA'$ 与 $\angle BOB'$ 有什么关系？$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的形状和大小有什么关系？

归纳

旋转的性质：

对应点到旋转中心的距离相等．

对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角．

旋转前、后的图形全等．

由于旋转前、后的两个图形是全等图形，所以，线段经过旋转后一定是等长的线段，三角形经过旋转后一定是与原三角形全等的三角形，圆经过旋转后一定是半径相等的圆．

例 如图 27.1-4，E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 边上任意一点，以点 A 为中心，把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 $90°$，则旋转后的图形的位置是怎样的？

分析： 关键是确定 $\triangle ADE$ 三个顶点的对应点的位置.

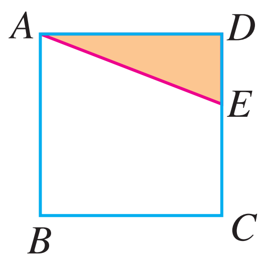


图 27.1-4

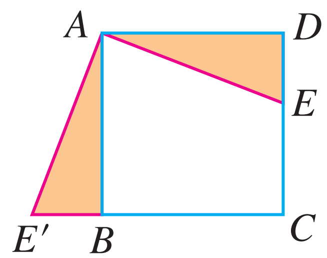


图 27.1-5

解： 因为点 A 是旋转中心，所以它的对应点是它本身.

在正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB$，$\angle DAB=90°$，所以旋转后点 D 与点 B 重合.

设点 E 的对应点为点 E'. 因为旋转后的图形与旋转前的图形全等，所以

$$\angle ABE'=\angle ADE=90°,\ BE'=DE.$$

因此，点 E' 在 CB 的延长线上，且 $BE'=DE$.

$\triangle ADE$ 顺时针旋转 $90°$ 后得到 $\triangle ABE'$，如图 27.1-5 所示.

你还有其他方法吗？

如图 27.1-6，用一个等腰三角形，绕着等腰三角形正下方的一点，经过每次 $72°$ 连续 4 次旋转，就可以得到一个漂亮的五角星图案.

选择不同旋转中心、不同旋转角旋转同一个图案（图 27.1-7），得到不同的效果.

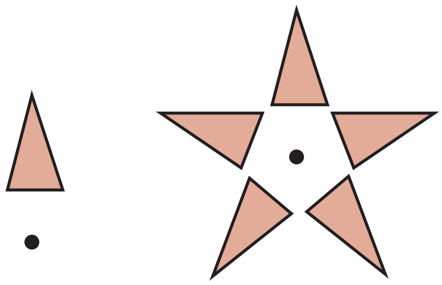


图 27.1-6

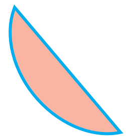


图 27.1-7

图 27.1-8 的两个旋转中，旋转中心不变，旋转角改变了，产生了不同的旋转效果.

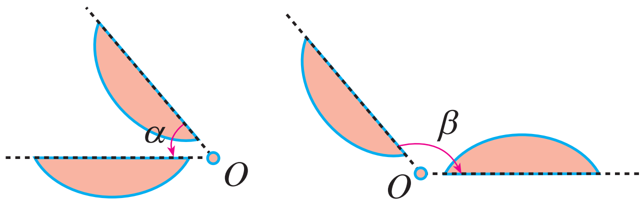


图 27.1-8

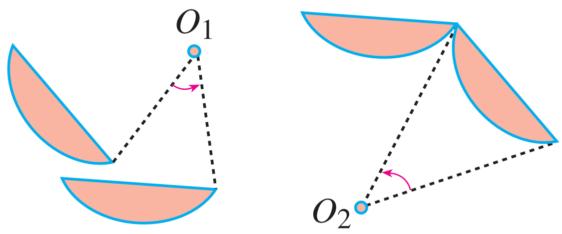
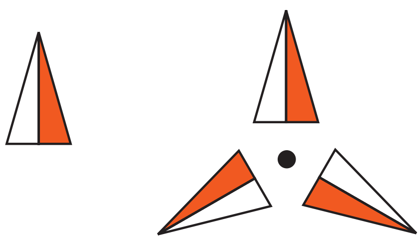


图 27.1-9

图 27.1-9 的两个旋转中，旋转角不变，旋转中心改变了，产生了不同的旋转效果.

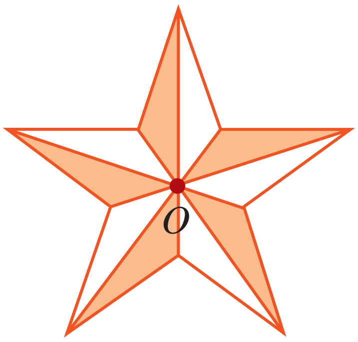
巩固运用27.1

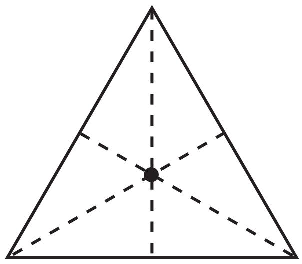
1. 请你举出一些现实生活、生产中旋转的实例，并指出旋转中心和旋转角.
2. 如图，左面的三角形经过怎样的旋转，可以得到右面的图形？



（第 2 题）

3. 把图中的五角星图案，绕着它的中心 O 旋转. 旋转角至少为多少度时，旋转后的五角星能与自身重合? 对等边三角形进行类似的讨论.





（第 3 题）

27.2 中心对称

27.2.1 中心对称

前面我们研究了旋转及其性质，现在研究一类特殊的旋转——中心对称及其性质.

思考

(1) 如图 27.2-1，把其中一个图案绕点 O 旋转 $180°$，你有什么发现？

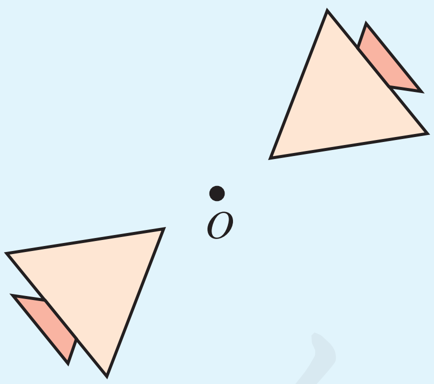


图 27.2-1

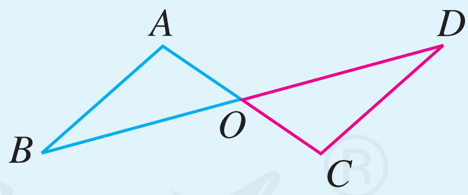


图 27.2-2

(2) 如图 27.2-2，线段 AC，BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 把 $\triangle OCD$ 绕点 O 旋转 $180°$，你有什么发现？

可以发现，图 27.2-1 中的一个图案旋转后两个图案互相重合；在图 27.2-2 中，旋转后 $\triangle OCD$ 也与 $\triangle OAB$ 重合.

像这样，把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这个点对称**或**中心对称**（central symmetry），这个点叫做**对称中心**（简称**中心**）。这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的**对称点**。例如，图 27.2-2 中 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OAB$ 关于点 O 对称，点 C 与点 A 是关于点 O 的对称点。你还能指出其他对称点吗？

如图 27.2-3，三角尺的一个顶点是 O，以点 O 为中心旋转三角尺，可以画出关于点 O 中心对称的两个三角形：

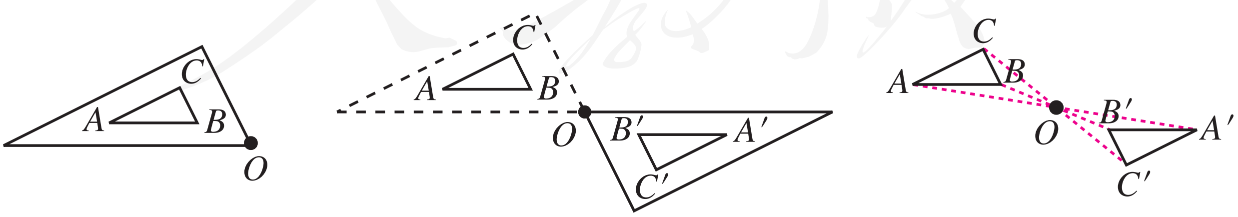
第一步，画出 $\triangle ABC$；

第二步，以三角尺的一个顶点 O 为中心，把三角尺旋转 180°，画出 $\triangle A'B'C'$；

第三步，移开三角尺。

因为中心对称的两个三角形可以互相重合，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是全等三角形。

因为点 A' 是点 A 绕点 O 旋转 180° 后得到的，线段 OA 绕点 O 旋转 180° 得到线段 OA'，所以点 O 在线段 AA' 上，且 $OA=OA'$，即点 O 是线段 AA' 的中点。同样地，点 O 也是线段 BB' 和 CC' 的中点。



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 27.2-3

归纳

中心对称的性质：

中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分.

中心对称的两个图形是全等图形.

由于中心对称的两个图形是全等图形，所以，线段关于某点中心对称的图形一定是线段，三角形关于某点中心对称的图形一定是三角形，圆关于某点中心对称的图形一定是圆.

例 1 （1）如图 27.2-4，选择点 O 为对称中心，写出画点 A 关于点 O 的对称点 A' 的步骤；

（2）如图 27.2-5，选择点 O 为对称中心，写出画与 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$ 的步骤.

图 27.2-4

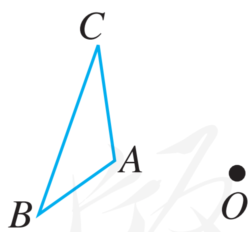


图 27.2-5

解：（1）连接 AO，在 AO 的延长线上截取 $OA'=OA$，就可得到点 A 关于点 O 的对称点 A'（图 27.2-6）.

（2）先画出 A，B，C 三点关于点 O 的对称点 A'，B'，C'，依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就可得到与 $\triangle ABC$ 关

于点 O 对称的$\triangle A'B'C'$（图 27.2-7）.

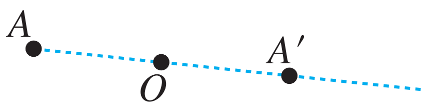


图 27.2-6

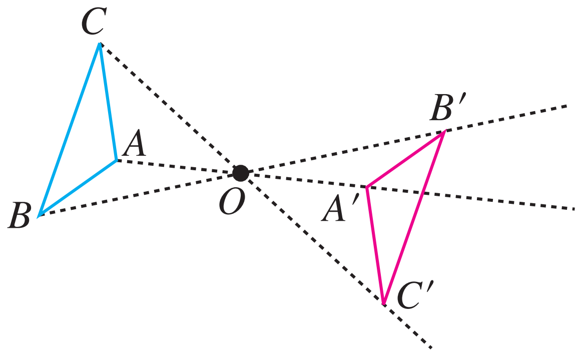
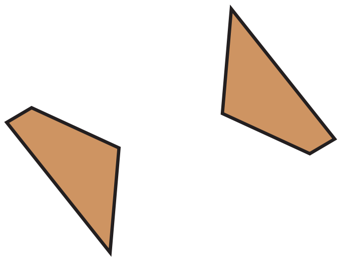


图 27.2-7

巩固运用27.2

1. 图中的两个四边形关于某点对称，写出确定它们的对称中心的步骤.



（第 1 题）

2. 判断下列说法是否正确：

（1）平行四边形的对角顶点关于对角线的交点对称；

（2）平行四边形的对边关于对角线的交点对称.

27.2.2　中心对称图形

思考

（1）如图 27.2-8，将线段 AB 绕它的中点旋转 180°，你有什么发现？

图 27.2-8

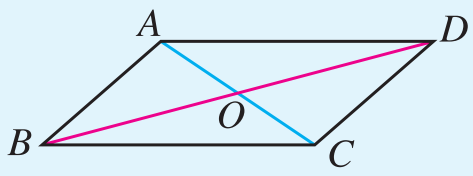


图 27.2-9

（2）如图 27.2-9，将▱$ABCD$ 绕它的两条对角线的交点 O 旋转 180°，你有什么发现？

可以发现，线段 AB 绕它的中点旋转 180°后与它本身重合. ▱$ABCD$ 绕它的两条对角线的交点 O 旋转 180°后与它本身重合. 像这样，把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**（central symmetry figure），这个点就是它的对称中心.

由上可知，线段、平行四边形是中心对称图形，圆也是中心对称图形. 线段、平行四边形、圆的对称中心分别是什么？

中心对称图形的形状通常匀称美观，我们在自然界中可以看到许多美丽的中心对称图形，在很多建筑物和工艺品中也常采用中心对称图形作装饰图案. 另外，由于具有中心对

称图形形状的物体，能够在所在的平面内绕对称中心平稳地旋转，所以在各种机器中要旋转的零部件的形状常设计成中心对称图形，如水泵叶轮等（图 27.2-10）.

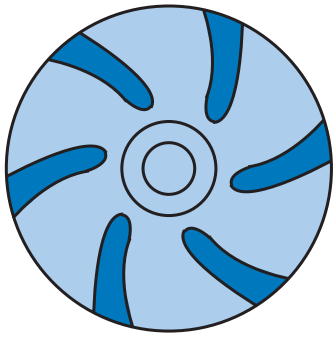
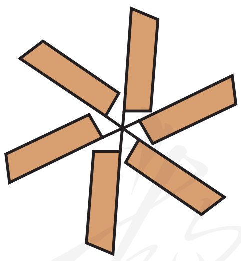


图 27.2-10

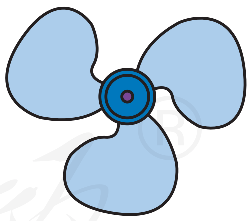
巩固运用27.3

1. 在我们学过的图形中，你能说出一些中心对称图形吗？
2. 下列图形是中心对称图形吗？如果是中心对称图形，指出其对称中心.

禁止标志

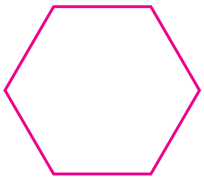


风轮叶片

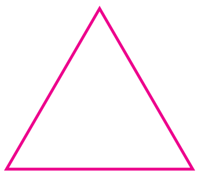


三叶风扇

正方形



正六边形



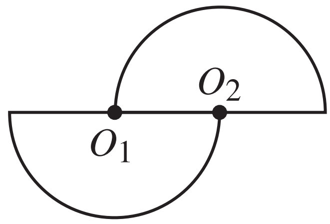
正三角形

（第 2 题）

3. 在以下的图案中，哪些是中心对称图形？再举出几个自然界以及生活、生产中中心对称图形的实例.

（第 3 题）

4. 如图，O_1，O_2 分别是两个半圆的圆心，这个图形是中心对称图形吗？如果不是，请说明理由；如果是，请指出对称中心.



（第 4 题）

27.2.3 关于原点对称的点的坐标

探究

如图 27.2-11，在平面直角坐标系中，画出下列已知点关于原点 O 的对称点，并写出它们的坐标. 这些坐标与已知点的坐标有什么关系？

$A(4,\ 0)$，$B(0,\ -3)$，$C(2,\ 1)$，$D(-1,\ 2)$，$E(-3,-4)$.

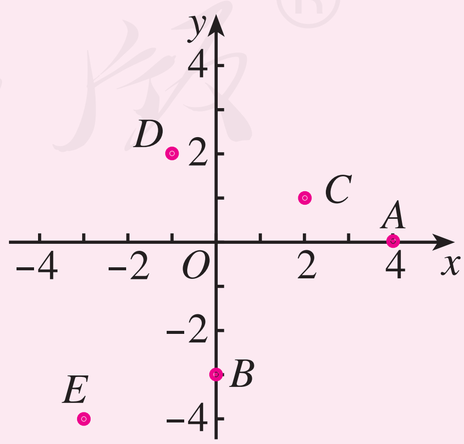


图 27.2-11

归纳

两个点关于原点对称时，它们的坐标正负相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$.

例 2 如图 27.2-12 所示，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-4, 1)$，$B(-1, -1)$，$C(-3, 2)$，利用关于原点对称的点的坐标的关系，画出与 $\triangle ABC$ 关于原点对称的图形.

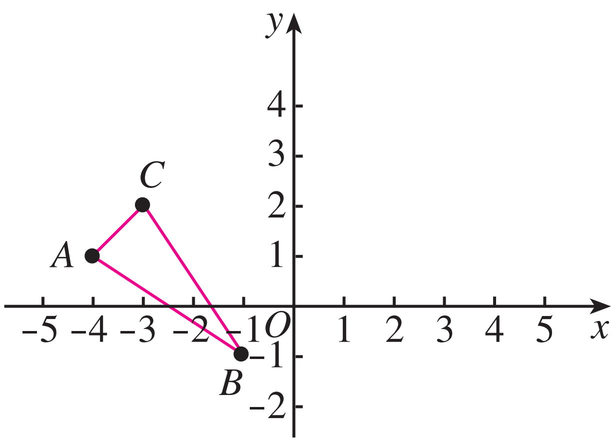


图 27.2-12

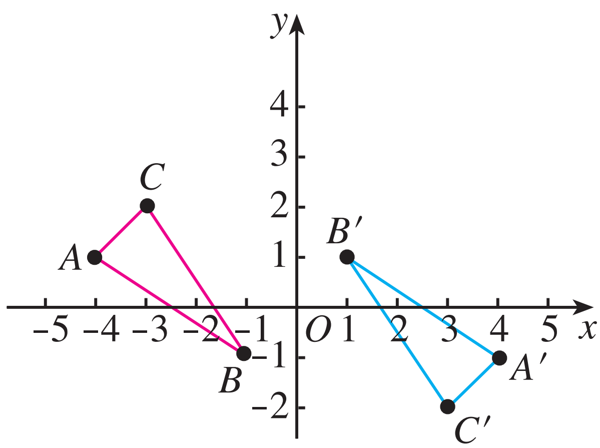


图 27.2-13

解： 点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$，因此 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(-4, 1)$，$B(-1, -1)$，$C(-3, 2)$ 关于原点的对称点分别为 $A'(4, -1)$，$B'(1, 1)$，$C'(3, -2)$，依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就可得到与 $\triangle ABC$ 关于原点对称的 $\triangle A'B'C'$（图 27.2-13）.

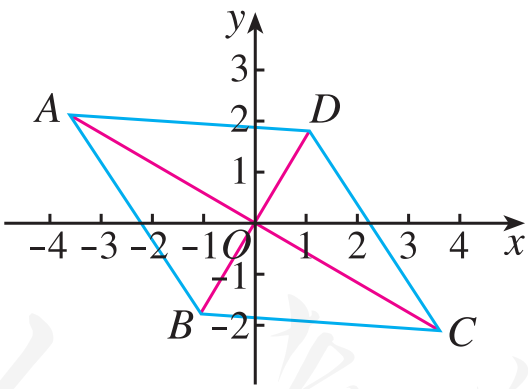
巩固运用27.4

1. 已知点 $A(a，1)$ 与点 $A'(5，b)$ 关于原点对称，求 $a，b$ 的值.

2. 下列各点中哪两个点关于原点 O 对称？
$A(-5，0)$，$B(0，2)$，$C(2，-1)$，$D(2，0)$，$E(0，5)$，$F(-2，1)$，$G(-2，-1)$.

3. 写出下列各点关于原点的对称点 A'，B'，C'，D'的坐标：
$A(3，1)$，$B(-2，3)$，$C(-1，-2)$，$D(2，-3)$.

4. 如图，已知点 A 的坐标为 $(-2\sqrt{3}，2)$，点 B 的坐标为 $(-1，-\sqrt{3})$，菱形 $ABCD$ 的对角线交于坐标原点 O. 求 C，D 两点的坐标.



（第 4 题）

阅读与思考

旋转对称

为什么螺母、扳手、罐头等物体的某些部分的形状呈正多边形？这是因为，正多边形具有一种重要的性质——旋转对称.

把正 n 边形绕着它的中心旋转 $\dfrac{360^\circ}{n}$ 的整数倍后所得的正 n 边形与原正 n 边形重合. 我们说，正 n 边形关于其中心有 $\dfrac{360^\circ}{n}$ 的旋转对称. 一般地，如果一个图形绕着某点 O 旋转角 α 后所得到的图形与原图形重合，则称此图形关于点 O 有角 α 的旋转对称. 图 1 是具有旋转对称性质的一些图形.

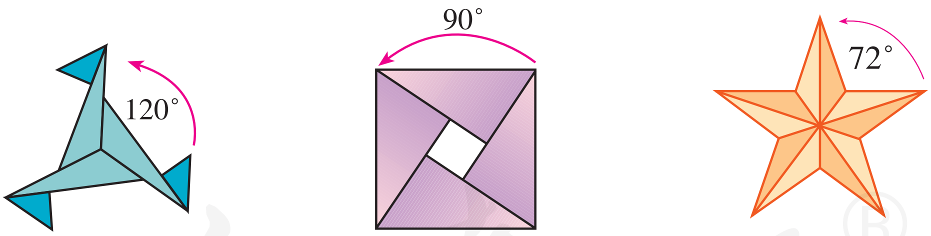


图 1

如果一个图形是中心对称图形，则把它绕对称中心旋转 180°后所得图形与原来图形重合，所以，中心对称图形关于其对称中心有 180°的旋转对称.

圆关于圆心有任意角的旋转对称，许多物体呈圆形就是应用了圆的这种性质. 当我们用一个扳手扳转一个正六边形螺母时，要应用正六边形关于其中心有 60°的整数倍的旋转对称，也

要应用圆关于圆心有任意角的旋转对称．我们观察一下，许多旋转着的物体都应用了圆的旋转对称性质．圆的这个性质给我们的生活和生产带来了很多的方便．以后学习了圆的更多知识后，你对圆的这个性质会有更加深刻的认识．

数学活动

如图 1，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是（—3，2），画点 A 关于 x 轴的对称点，得到点 B，再画点 B 关于 y 轴的对称点，得到点 C．点 A 与点 C 有什么关系？如果点 A 的坐标是（x，y），点 A 与点 C 也有同样的关系吗？你能用本章知识解释吗？

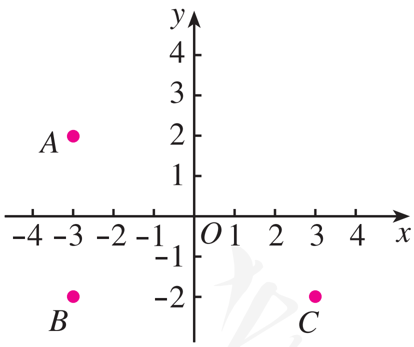
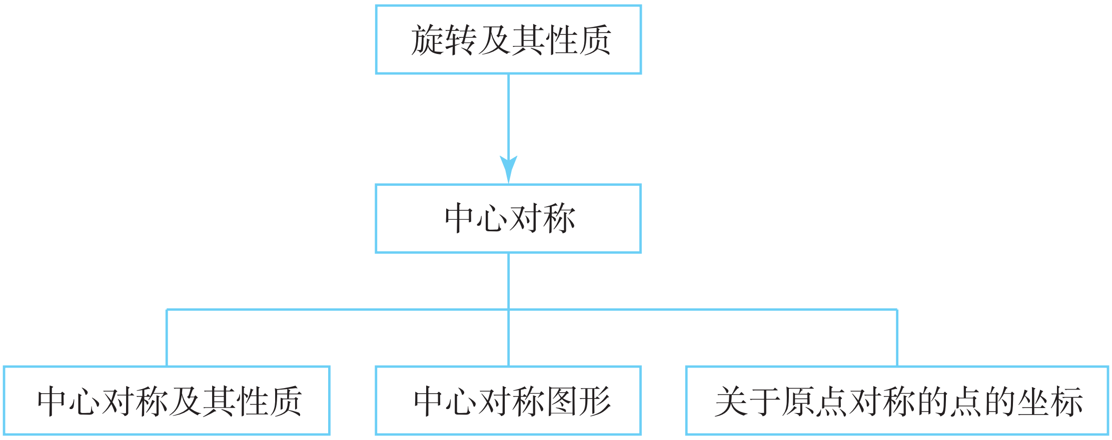


图 1

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 旋转与平移、轴对称一样，都是保持全等关系的图形变化. 本章所说的平面图形的旋转必须在同一个平面内进行吗？你能举出一些平面图形旋转的实例吗？平面图形的旋转有哪些性质？

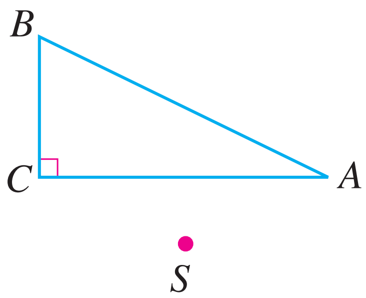
2. 中心对称是旋转的特殊情形吗？中心对称图形有什么特点？中心对称图形与中心对称是同一个概念吗？你能举出一些中心对称图形的例子吗？中心对称图形有哪些应用价值？

3. 我们可以从数量角度刻画中心对称. 在平面直角坐标系中，关于原点对称的点的坐标有什么关系？

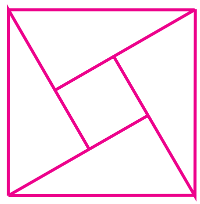
复习题 27

复习巩固

1. 如图，写出把 Rt$\triangle ABC$ 以点 S 为中心顺时针旋转 $90°$得到 Rt$\triangle A'B'C'$的步骤.



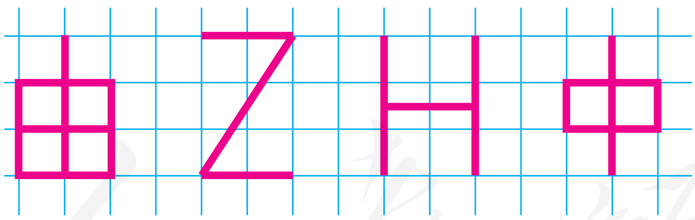
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，上面的图案是由什么基本图形经怎样的旋转得到的？

3. 在美术字中，有些汉字或字母是中心对称图形．下面的汉字或字母是中心对称图形吗？如果是，请标出它们的对称中心.



（第 3 题）

4. 如何画一个以下列点为对称中心，与已知四边形 $ABCD$ 成中心对称的图形？

（1）顶点 A；

（2）BC 边的中点 O.

综合运用

*5. 如图，已知线段 AB，用平移、轴对称或旋转完成以下各题：

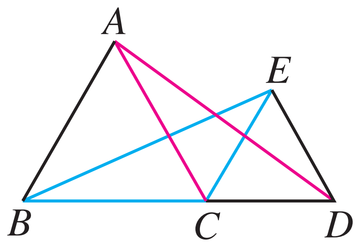
（第 5 题）

（1）写出画一个以这条线段为一边的正方形的步骤；

（2）写出画一个以这条线段为一边的等边三角形的步骤；

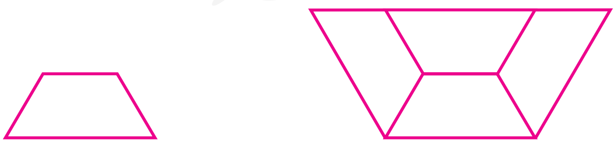
（3）写出画一个以这条线段为一边，一个内角是 30° 的菱形的步骤.

6. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形，$\triangle EBC$ 可以看作是 $\triangle DAC$ 经过平移、轴对称或旋转得到. 说明得到 $\triangle EBC$ 的过程.



（第 6 题）

7. 如图，（1）中的梯形符合什么条件时，可以经过旋转和轴对称形成（2）中的图案？

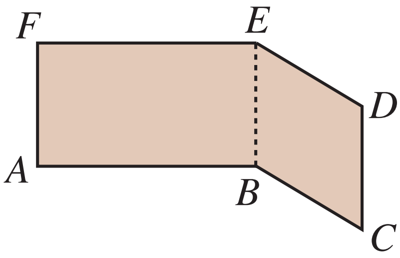


（1）　　（2）

（第 7 题）

拓广探索

*8. 如图，有一张纸片，若连接 EB，则纸片被分为矩形 $FABE$ 和菱形 $EBCD$. 请你画一条直线把这张纸片分成面积相等的两部分，并说明理由.



（第 8 题）

第二十八章　圆（一）

圆是常见的几何图形，圆形物体在生活中随处可见. 圆也是一种美丽的图形，具有独特的对称性，无论从哪个角度看，它都具有同一形状. 十五的满月、圆圆的月饼象征着圆满、团圆、和谐. 古希腊数学家毕达哥拉斯认为：“一切立体图形中最美的是球，一切平面图形中最美的是圆.” 本章我们将在前面学习的基础上，进一步认识圆，学习与圆有关的线段和角的性质.

28.1 圆的有关概念

圆是常见的图形，生活中的许多物体都给我们以圆的形象.

我们在小学已经对圆有了初步认识. 如图 28.1-1，观察画圆的过程，你能说出圆是如何画出来的吗？

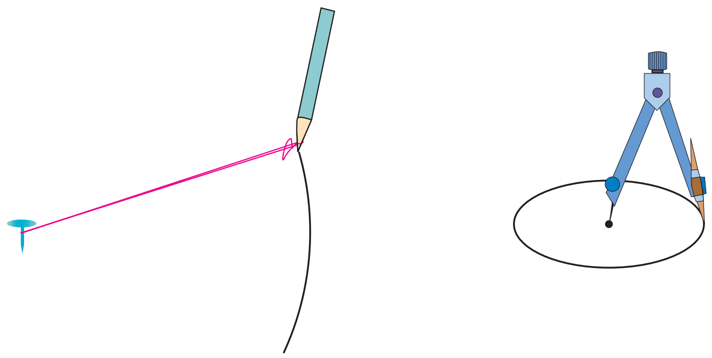


图 28.1-1

如图 28.1-2，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做**圆**（circle）. 其固定的端点 O 叫做**圆心**（center of a circle），线段 OA 叫做**半径**（radius）.

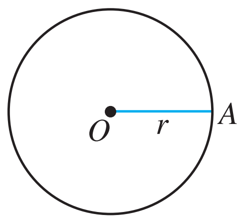


图 28.1-2

以点 O 为圆心的圆，记作⊙O，读作“圆 O”.

从图 28.1-1 画圆的过程可以看出：

（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r）；

（2）到定点的距离等于定长的点都在同一个圆上.

因此，圆心为 O、半径为 r 的圆可以看成是所有到定点

O 的距离等于定长 r 的点的集合.

战国时的《墨经》就有“圆，一中同长也”的记载. 它的意思是圆上各点到圆心的距离都等于半径.

例 如图 28.1-3，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 求证：A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.

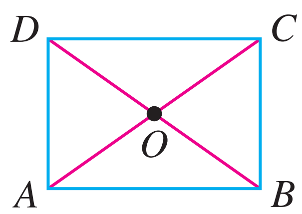


图 28.1-3

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore$ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

$\therefore$ $OA=OC=OB=OD$.

$\therefore$ A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心，OA 为半径的圆上.

连接圆上任意两点的线段叫做**弦**（chord），经过圆心的弦叫做**直径**（diameter）. 如图 28.1-4，AB，AC 是弦，AB 是直径.

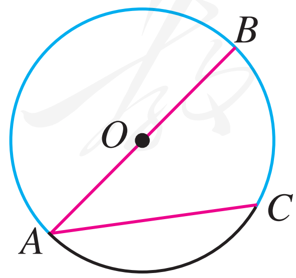


图 28.1-4

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**（arc）. 以 A，B 为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**（semi-circle）.

小于半圆的弧（如图 28.1-4 中的$\overset{\frown}{AC}$）叫做劣弧；大于半圆的弧（用三个点表示，如图 28.1-4 中的$\overset{\frown}{ABC}$）叫做优弧.

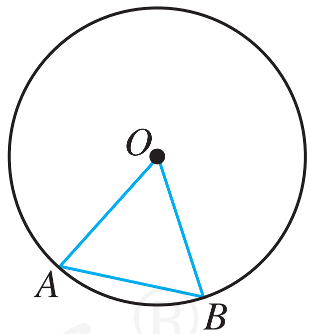
能够重合的两个圆叫做**等圆**. 容易看出：半径相等的两个圆是等圆；反过来，同圆或等圆的半径相等. 在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做**等弧**.

巩固运用28.1

1. 如何在操场上画一个半径是 5 m 的圆？说出你的理由.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 求证：A，B，C 三点在同一个圆上.
3. 求证：直径是圆中最长的弦.
4. 如图，在半径为 50 mm 的 $\odot O$ 中，弦 AB 长 50 mm. 求：

   (1) $\angle AOB$ 的度数；

   (2) 点 O 到 AB 的距离.



（第 4 题）

*28.2 垂直于弦的直径

前面，我们学习了与圆有关的一些概念，接下来研究圆的性质.

探究

将一个圆形纸片沿着它的任意一条直径对折，重复做几次，你发现了什么？由此你能得到什么结论？

可以发现，圆形纸片沿任意一条直径对折后，对折的两部分都能重合.

事实上，圆是轴对称图形，任何一条直径所在的直线都是圆的对称轴.

思考

如图 28.2-1，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，作直径 CD，使 $CD \perp AB$，垂足为 M. 图中有哪些相等的线段和弧？为什么？

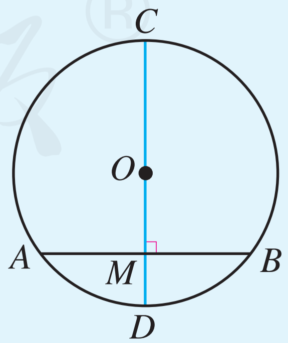


图 28.2-1

* 本节中的垂径定理为选学内容.

在图 28.2-1 中，垂直于弦 AB 的直径 CD 所在的直线是$\odot O$ 的对称轴. 把圆沿着直径 CD 折叠时，CD 两侧的两个半圆重合，点 A 与点 B 重合，AM 与 BM 重合，$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AD}$分别与$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{BD}$重合.

因此，$AM=BM$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

即直径 CD 平分弦 AB，并且平分$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{ACB}$.

这样，我们就得到垂径定理：

垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.

进一步，我们还可以得到推论：

平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

例 赵州桥是我国隋代建造的石拱桥，距今约有 1 400 年的历史，是我国古代人民勤劳与智慧的结晶. 它的主桥拱是圆弧形，它的跨度（弧所对的弦的长）为 37 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为7.23 m（图 28.2-2). 求赵州桥主桥拱的半径（结果保留小数点后一位).

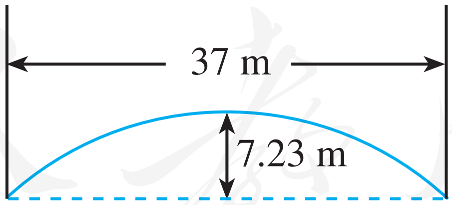


图 28.2-2

解： 如图 28.2-3，用$\overset{\frown}{AB}$表示主桥拱，设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O，半径为 R m.

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OC，D 为垂足，OC 与$\overset{\frown}{AB}$相交于点 C，连接 OA. 根据垂径定理，D 是 AB 的中点，C

是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD 就是拱高.

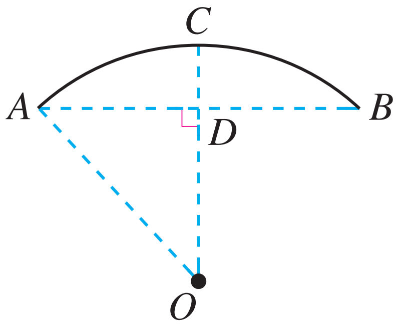


图 28.2-3

由题设可知

$AB=37$ m，$CD=7.23$ m，

所以

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37=18.5(\text{m}),$$

$$OD=OC-CD=(R-7.23)\text{m}.$$

在 Rt$\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

$$OA^2=AD^2+OD^2,$$

即

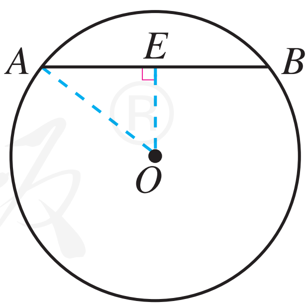
$$R^2=18.5^2+(R-7.23)^2.$$

解得

$$R\approx 27.3.$$

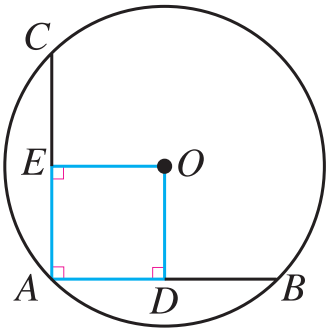
因此，赵州桥的主桥拱半径约为 27.3 m.

巩固运用28.2

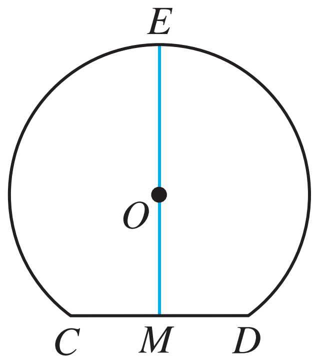


（第 1 题）

1. 如图，在$\odot O$ 中，弦 AB 的长为 8 cm，圆心 O 到 AB 的距离为 3 cm. 求$\odot O$ 的半径.
2. 如图，在$\odot O$ 中，AB，AC 为互相垂直且相等的两条弦，$OD\perp AB$，$OE\perp AC$，垂足分别为 D，E. 求证：四边形 $ADOE$ 是正方形.



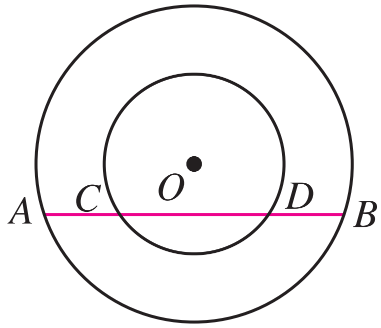
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图是一个隧道的横截面，它的形状是以点 O 为圆心的圆的一部分. 如果 M 是 $\odot O$ 中弦 CD 的中点，EM 经过圆心 O 且与 $\odot O$ 相交于点 E，$CD=4$ m，$EM=6$ m. 求 $\odot O$ 的半径.

4. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，大圆的弦 AB 与小圆相交于 C，D 两点. 求证 $AC=BD$.



（第 4 题）

5. $\odot O$ 的半径为 13 cm，AB，CD 是 $\odot O$ 的两条弦，$AB \parallel CD$，$AB=24$ cm，$CD=10$ cm. 求 AB 和 CD 之间的距离.

28.3 弧、弦、圆心角

探究

将一个圆形纸片绕圆心旋转 180°，所得的图形与原图形重合吗？由此你能得到什么结论？把圆绕圆心旋转任意一个角度呢？

实际上，圆是中心对称图形，圆心就是它的对称中心. 不仅如此，把圆绕圆心旋转任意一个角度，所得的图形都与原图形重合. 利用这个性质，我们还可以得到圆的其他性质.

我们把顶点在圆心的角叫做**圆心角**（central angle）. 现在利用上面的性质来研究在同一个圆中，圆心角及其所对的弧、弦之间的关系.

思考

如图 28.3-1，在 $\odot O$ 中，当圆心角 $\angle AOB = \angle A'OB'$ 时，它们所对的 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{A'B'}$、弦 AB 和 $A'B'$ 相等吗？为什么？

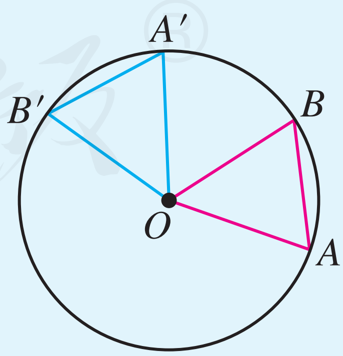


图 28.3-1

我们把$\angle AOB$连同$\overset{\frown}{AB}$绕圆心O旋转，使射线OA与OA'重合.

∵　$\angle AOB=\angle A'OB'$，

∴　射线OB与OB'重合.

又　$OA=OA'$，$OB=OB'$，

∴　点A与A'重合，点B与B'重合.

因此，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$重合，AB与$A'B'$重合，即$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$.

这样，我们就得到下面的定理：

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等.

同样，还可以得到：

在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦也相等；

在同圆或等圆中，相等的弦所对的圆心角相等，所对的优弧和劣弧也分别相等.

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量有什么关系？

例　如图 28.3-2，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle ACB=60°$. 求证：$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$.

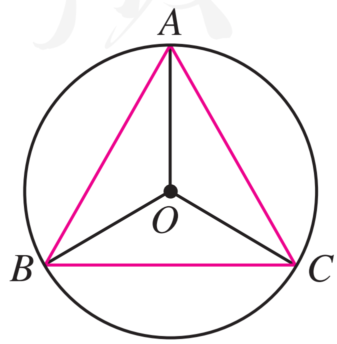


图 28.3-2

证明：∵　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴　$AB=AC$.

∴　$\triangle ABC$是等腰三角形.

又　$\angle ACB=60^\circ$，

∴　$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AB=BC=CA$.

∴　$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$.

巩固运用28.3

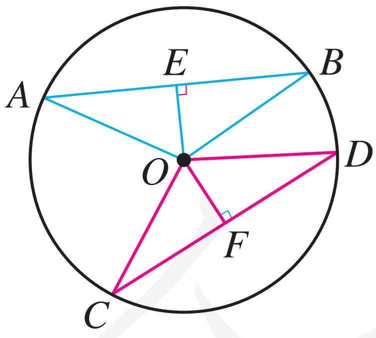
1. 如图，AB，CD 是$\odot O$ 的两条弦.

(1) 如果 $AB=CD$，那么________________，________________.

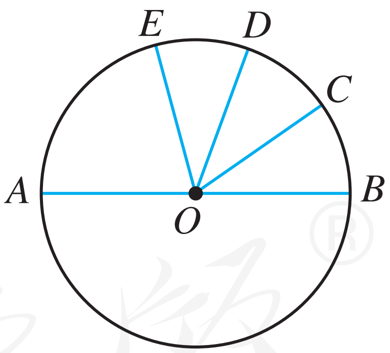
(2) 如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么________________，________________.

(3) 如果$\angle AOB=\angle COD$，那么________________，________________.

(4) 如果 $AB=CD$，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别为 E，F，那么 OE 与 OF 相等吗？为什么？



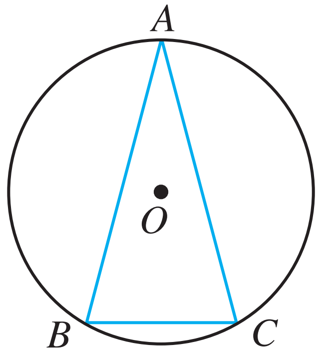
（第 1 题）



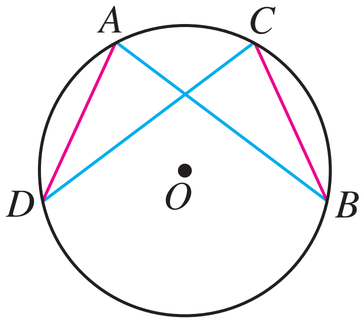
（第 2 题）

2. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle COD=35^\circ$. 求$\angle AOE$ 的度数.

3. 如图，在$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle C=75^\circ$. 求$\angle A$ 的度数.



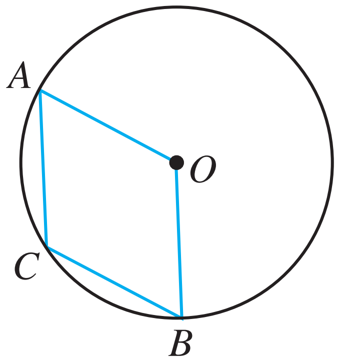
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AD=BC$，比较$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$的长度，并证明你的结论.

5. 如图，A，B 是 $\odot O$ 上的两点，$\angle AOB=120^{\circ}$，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点. 求证：四边形 $OACB$ 是菱形.



（第 5 题）

28.4 圆周角

在圆中，除圆心角外，还有一类角（如图 28.4-1 中的$\angle ACB$），它的顶点在圆上，并且两边都与圆相交，我们把这样的角叫做**圆周角**（angle in a circular segment）.

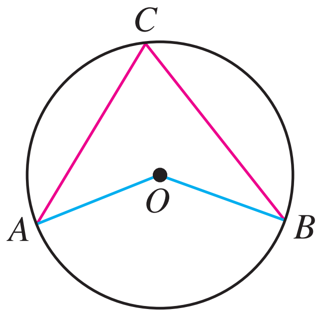


图 28.4-1

如图 28.4-1，连接 AO，BO，得到圆心角$\angle AOB$. 可以发现，$\angle ACB$ 与$\angle AOB$ 对着同一条弧$\overset{\frown}{AB}$，它们之间存在什么关系呢？下面我们就来研究这个问题.

探究

分别测量图 28.4-1 中$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角$\angle ACB$ 和圆心角$\angle AOB$ 的度数，它们之间有什么关系？

在$\odot O$ 上任取一条弧，作出这条弧所对的圆周角和圆心角，测量它们的度数，你能得出同样的结论吗？由此你能发现什么规律？

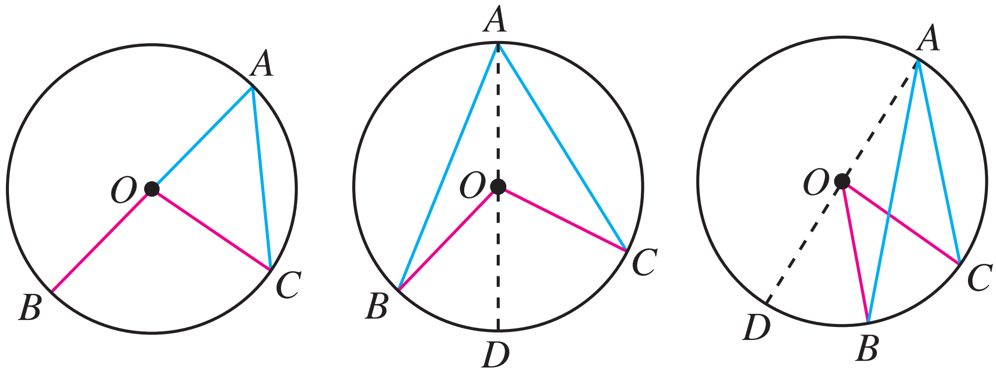
可以发现，一条弧所对的圆周角的度数等于这条弧所对的圆心角的度数的一半.

为了证明上面发现的结论，在$\odot O$ 上任取一个圆周角$\angle BAC$，沿 AO 所在直线将圆对折. 可以发现，圆心 O 与$\angle BAC$ 的位置关系有 3 种情况：

(1) 圆心在圆周角的一条边上；

(2) 圆心在圆周角的内部；

(3) 圆心在圆周角的外部.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 28.4-2

对于第(1)种情况，圆心 O 在$\angle BAC$ 的一条边上，如图 28.4-2(1).

$$\left.\begin{array}{l} OA=OC \Rightarrow \angle A=\angle C \\ \angle BOC=\angle A+\angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

这里的符号“⇒”读作“推出”，“$p \Rightarrow q$”表示由条件 p 推出结论 q.

对于第(2)种情况，圆心 O 在$\angle BAC$ 的内部，如图 28.4-2(2)，作直径 AD. 利用(1)的结果，有

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD \\ \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BAD+\angle DAC=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle DOC)$$

$$\Rightarrow \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

对于第(3)种情况，圆心 O 在$\angle BAC$ 的外部，如图

28.4-2(3)，也可以通过添加辅助线，将它转化为第(1)种情况，从而得到相同的结论（请你自己完成证明）.

这样，我们就得到圆周角定理：

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

例 1 如图 28.4-3，OA，OB，OC 都是$\odot O$ 的半径，$\angle AOB=2\angle BOC$. 求证$\angle ACB=2\angle BAC$.

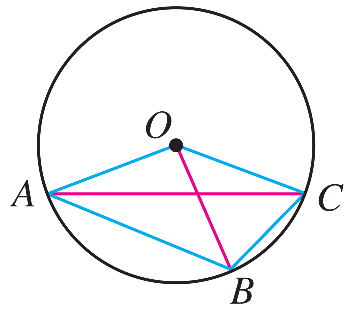


图 28.4-3

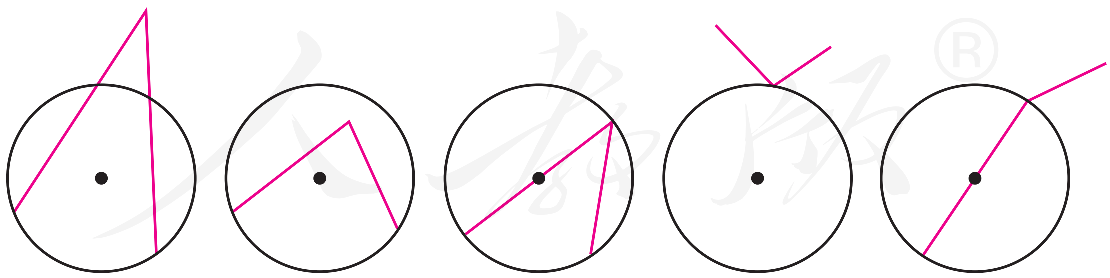
证明： ∵ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

又 $\angle AOB=2\angle BOC$，

∴ $\angle ACB=2\angle BAC$.

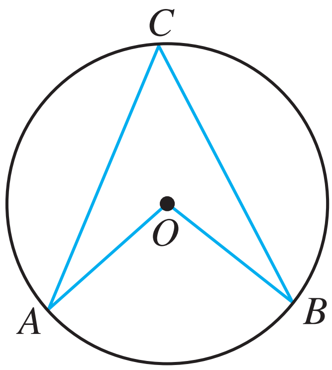
巩固运用28.4

1. 判断下列图形中的角是不是圆周角，并说明理由.

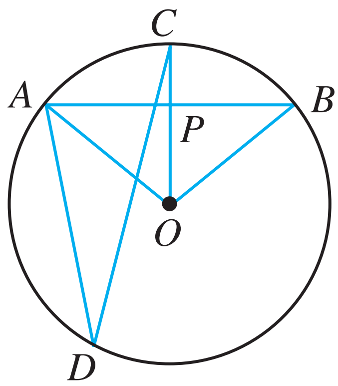


（第 1 题）

2. 如图，已知圆心角$\angle AOB$ 的度数为 $100°$，求圆周角$\angle ACB$ 的度数.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 P 是⊙O 的弦 AB 的中点，OP 的延长线与⊙O 相交于点 C，$\angle BOC=50^\circ$. 求圆周角 $\angle ADC$ 的度数.

由圆周角定理，再根据“在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦也相等”，我们可以得到下面的推论：

同弧或等弧所对的圆周角相等.

另外，如图 28.4-4，C 是⊙O 上一点. 若 AB 为⊙O 的直径，则 $\angle AOB=180^\circ$，根据圆周角定理，可得 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=90^\circ$；反过来，若 $\angle ACB=90^\circ$，根据圆周角定理，可得 $\angle AOB=180^\circ$，所以弦 AB 为⊙O 的直径. 由此我们可以得到圆周角定理的又一个推论：

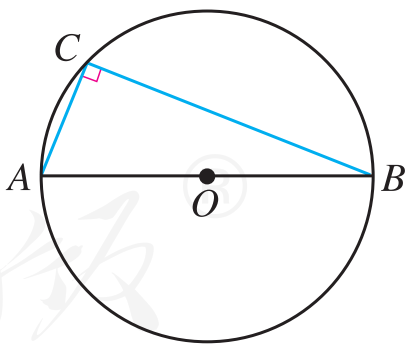


图 28.4-4

半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径.

例 2 如图 28.4-5，$\odot O$ 的直径 AB 为 10 cm，弦 AC 为 6 cm，$\angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$ 相交于点 D. 求 BC，AD，BD 的长.

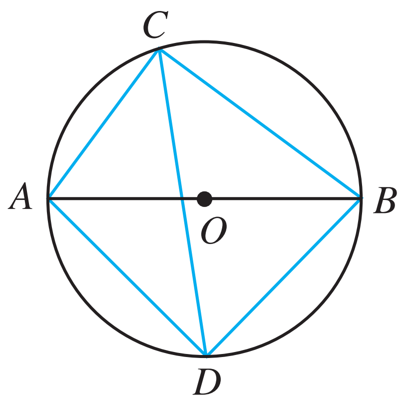


图 28.4-5

解： $\because$ AB 是直径，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ADB=90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8(\text{cm}).$$

如图 28.4-6，连接 OD.

$\because$ CD 平分$\angle ACB$，

$\therefore$ $\angle ACD=\angle BCD$，

$\therefore$ $\angle AOD=\angle BOD$.

$\therefore$ $AD=BD$.

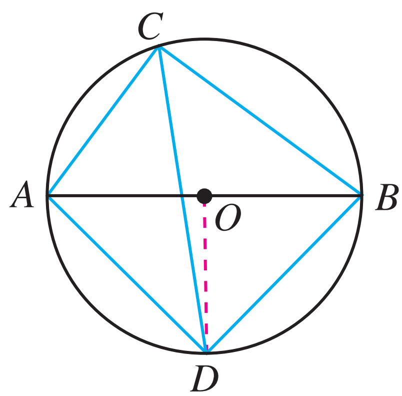


图 28.4-6

又 在 Rt$\triangle ABD$ 中，

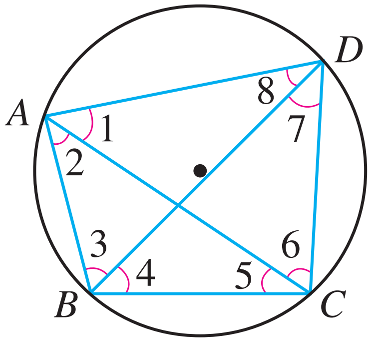
$$AD^2+BD^2=AB^2,$$

$\therefore$ $AD=BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.

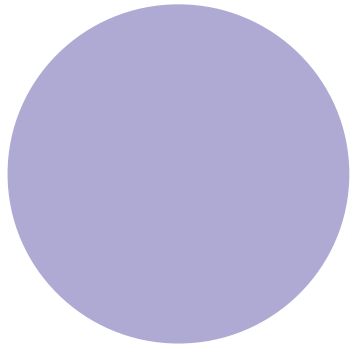
$\therefore$ $AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 10=5\sqrt{2}$ (cm).

巩固运用28.5

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 把它的 4 个内角分成 8 个角，这些角中哪些相等？为什么？



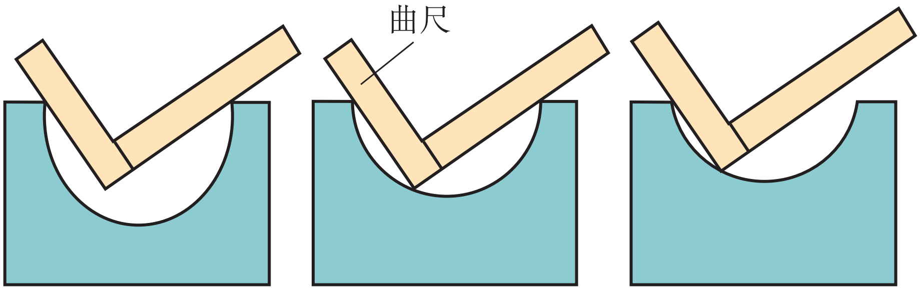
（第 1 题）



（第 2 题）

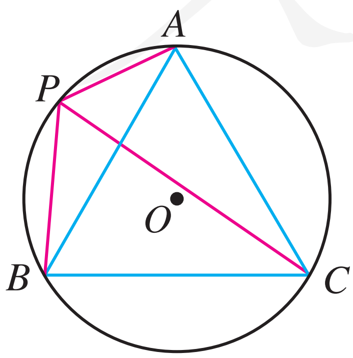
2. 你能用三角尺确定一张圆形纸片（如图）的圆心吗？与同学交流一下.

3. 如图，用直角曲尺检查半圆形的工件，哪个是合格的？为什么？

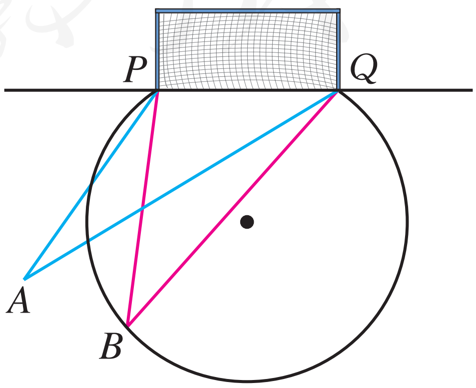


（第 3 题）

4. 如图，A，P，B，C 是$\odot O$ 上的 4 个点，$\angle APC=\angle CPB=60^\circ$. 判断$\triangle ABC$ 的形状，并证明你的结论.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在足球比赛中，甲带球奔向对方球门 PQ. 当他带球冲到点 A 时，同伴乙已经冲到点 B，此时甲是直接射门好，还是将球传给乙，让乙射门好（仅从射门角度大小考虑）？

如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做**圆内接多边形**，这个圆叫做这个**多边形的外接圆**. 如图 28.4-7，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的外接圆.

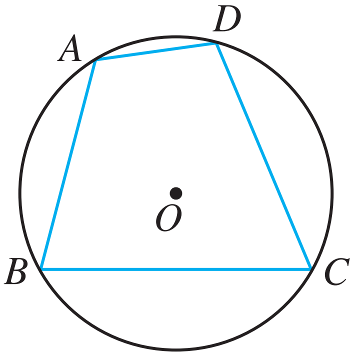


图 28.4-7

思考

圆内接四边形的 4 个角之间有什么关系？

因为圆内接四边形的每一个角都是圆周角，所以我们可以利用圆周角定理，来研究圆内接四边形的角之间的关系.

如图 28.4-8，连接 OB，OD.

∵ $\angle A$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BAD}$，

又 $\overset{\frown}{BCD}$ 和 $\overset{\frown}{BAD}$ 所对的圆心角的和是周角，

∴ $\angle A+\angle C=\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ$.

同理 $\angle B+\angle D=180^\circ$.

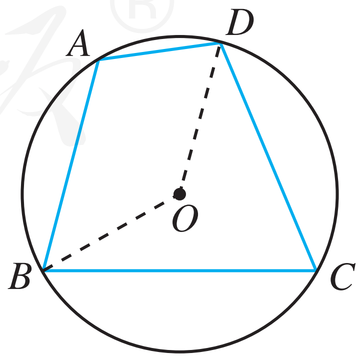


图 28.4-8

这样，利用圆周角定理，我们得到圆内接四边形的一个性质：

圆内接四边形的对角互补.

例 3 求证：圆内接平行四边形是矩形.

证明： 如图 28.4-9，四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $\angle B=\angle D$.

又 平行四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$\therefore$ $\angle B+\angle D=180°$.

$\therefore$ $\angle B=90°$.

$\therefore$ 圆内接平行四边形是矩形.

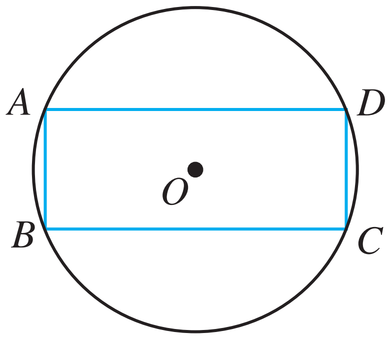
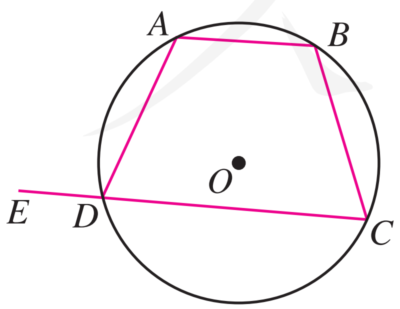


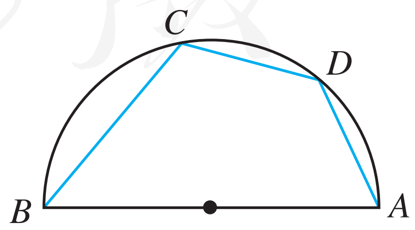
图 28.4-9

巩固运用28.6

1. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，E 为 CD 延长线上一点. 若$\angle B=110°$，求$\angle ADE$ 的度数.



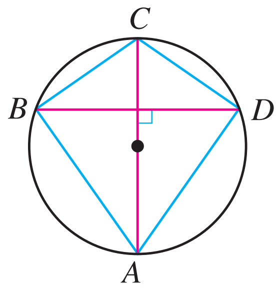
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 是半圆的直径，点 D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$\angle ABC = 50°$. 求 $\angle BCD$ 的度数.

3. 如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 BD，并且 $AC \perp BD$，$\angle BAD = 70°$. 求四边形其余各角的度数.



（第 3 题）

阅读与思考

圆的对称性

回想一下这一章的学习，圆有哪些对称性？借助圆的对称性，又发现了圆的哪些性质？

圆是轴对称图形，而且每一条直径所在的直线都是它的对称轴，利用这个性质，我们得到了垂径定理；圆还是中心对称图形，而且圆绕圆心旋转任意一个角度后所得的图形都与原图形重合，利用这个性质，我们得到了同圆或等圆中弧、弦、圆心角之间的关系.

事实上，在具有平面对称性的图形中，圆是具有无穷多条对称轴（直径所在的直线）的轴对称图形，而且圆绕其中心旋转任意一个角度后所得的图形都能跟原图形重合. 正因为圆的这些性质，它被称为最完美的曲线.

除了利用圆的对称性获得圆的其他数学性质外，它还可以帮助我们在游戏中稳操胜券. 比如下面摆硬币的游戏：

两个人轮流在圆形桌面上摆硬币，每次摆一个，个个不

能互相重叠，也不能有一部分落在桌面的边缘以外．这样重复多次以后，谁先摆不下硬币就算输．

和同学玩玩这个游戏，你能找到稳操胜券的办法吗？

答案就是，要做先摆硬币的人．为什么呢？因为桌面是圆形的，而圆是中心对称图形．“先手”只要把第一个硬币摆在桌面的中心，以后不管“后手”把硬币摆在哪里，“先手”总可以把相同面值的硬币摆在与“后手”所摆硬币（关于中心）对称的地方．这样，只要“后手”有地方摆，“先手”也总可以摆得下．因此，“后手”准输．

是不是很有趣？由于圆在生活中很常见，所以圆的性质的应用也很广泛．多观察、多查阅，去发现或找到一些应用圆的性质的情景或问题，并和同学分享吧！

数学活动

车轮做成圆形的数学道理

路上行驶的各种车辆，车轮都是圆形的．为什么车轮要做成圆形的呢？这里面有什么数学道理吗？

将一个圆形硬纸板沿直尺在桌面上滚动（图 1）．可以发现，圆心与桌面的距离始终是不变的，这个距离等于圆的半径．因此，把车轮做

成圆形，当车轮在平坦的地面上滚动时，车轮中心与地面的距离保持不变，坐车的人会感到非常平稳.

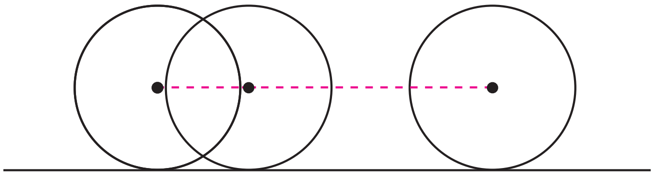


图 1

如果车轮是正方形形状的，情况会怎样呢？将一个正方形硬纸板沿直尺在桌面上滚动，用笔跟踪一下它的中心的轨迹，你得到了什么（图 2）？把车轮换成椭圆形再试一试！

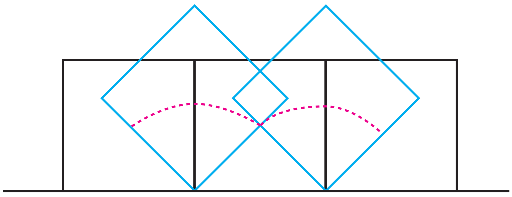


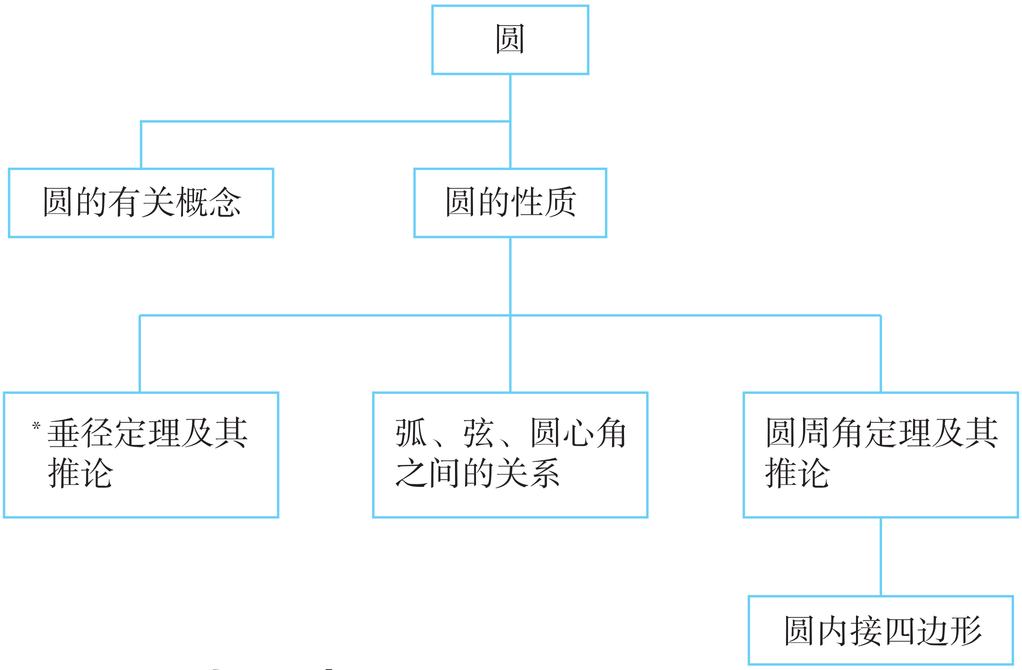
图 2

试想一下，如果把车厢装在过轮子中心的轴上，车辆在平坦的路面上行驶时，采用正方形或椭圆形形状的车轮，你会有什么感觉？

实际上，车轮做成圆形，还有其他原因. 例如，在物理学习中，我们知道，物体滚动时，要比滑动时的摩擦力小，而圆形物体是容易滚动的. 有条件的同学，还可以查阅资料，看看还有没有其他方面的道理.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 圆的位置及大小由哪些要素确定？如何从点的集合的角度理解圆的概念？

2. 圆是轴对称图形，它的任何一条直径所在的直线都是它的对称轴；圆也是中心对称图形，圆心就是它的对称中心．不仅如此，圆还是旋转对称图形．圆的许多性质都与圆的这些对称性有关．

*3. 垂直于弦的直径有什么性质？这个性质和圆的对称性有什么联系？

4. 在同圆或等圆中，两个相等的圆心角所对的弧、弦有什么关系？这个关系和圆的对称性有什么联系？

5. 一条弧所对的圆周角和它所对的圆心角有什么关系？你能举出一些它们的实际应用吗？

复习题 28

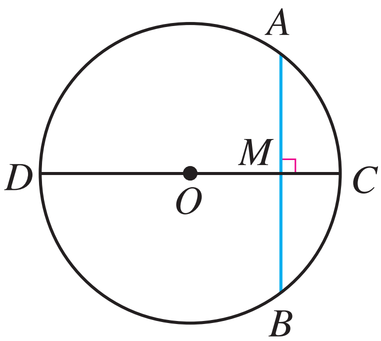
复习巩固

1. 选择题.

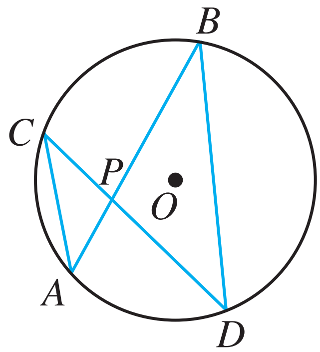
(1) 如图 (1), $\odot O$ 的直径 $CD=10$ cm, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$, 垂足为 M, $OM : OC = 3 : 5$, 则 AB 的长为 (　　).

(A) $\sqrt{91}$ cm　　(B) 8 cm

(C) 6 cm　　(D) 4 cm



(1)



(2)

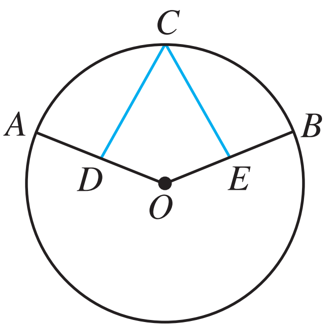
(第 1 题)

(2) 如图 (2), 在 $\odot O$ 中, 弦 AB, CD 相交于点 P, $\angle A=40°$, $\angle APD=75°$, 则 $\angle B=$ (　　).

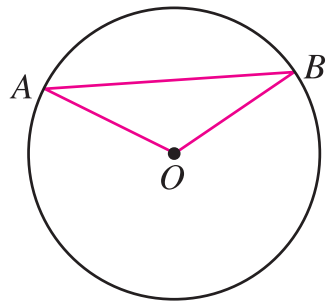
(A) 15°　　(B) 40°

(C) 75°　　(D) 35°

2. 如图, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$, D, E 分别是半径 OA, OB 的中点. 求证 $CD=CE$.



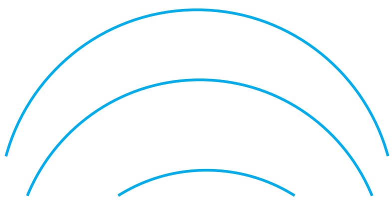
（第 2 题）



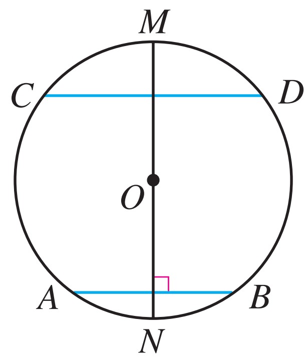
（第 3 题）

3. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 $OA=20$ cm，$\angle AOB=120^\circ$. 求$\triangle AOB$ 的面积.

4. 估计图中三段弧所在圆的半径的大小关系，再用圆规检验你的结论.



（第 4 题）

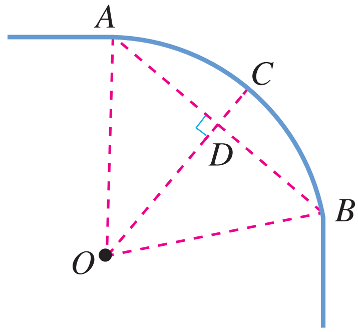


（第 5 题）

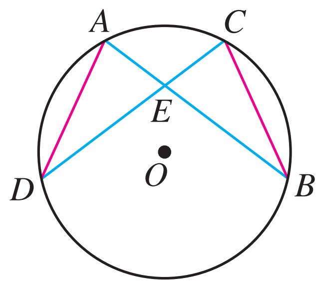
*5. 如图，AB，CD 是$\odot O$ 的两条平行弦，MN 是 AB 的垂直平分线，与$\odot O$ 相交于 M，N 两点. 求证：MN 垂直平分 CD.

综合运用

6. 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧（$\overset{\frown}{AB}$），点 O 是这段弧所在圆的圆心. $AB=300$ m，C 是$\overset{\frown}{AB}$上一点，$OC\perp AB$，垂足为 D，$CD=45$ m. 求这段弯路的半径.



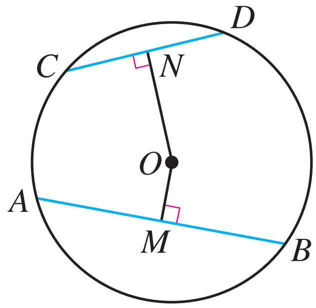
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在⊙O 中，$AD=BC$，AB 与 CD 相交于点 E. 求证$\triangle ADE \cong \triangle CBE$.

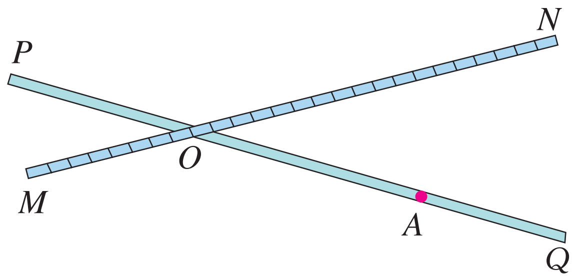
8. 如图，AB 和 CD 分别是⊙O 上的两条弦，圆心 O 到它们的距离分别是 OM 和 ON. 如果 $AB>CD$，OM 和 ON 的大小有什么关系？为什么？



（第 8 题）

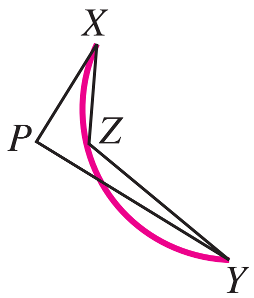
拓广探索

9. 如图，铁路 MN 和公路 PQ 在点 O 处交会，$\angle QON=30°$，在点 A 处有一栋居民楼，$AO=200$ m. 如果火车行驶时，周围 200 m 以内会受到噪声的影响，那么火车在铁路 MN 上沿 ON 方向行驶时，居民楼是否会受到噪声的影响？如果火车行驶的速度为 72 km/h，居民楼受噪声影响的时间约为多少秒（结果保留小数点后一位）？



（第 9 题）

10. 如图，一个海港在$\overset{\frown}{XY}$范围内是浅滩. 为了使深水船只不进入浅滩，需要测量船只所在的位置与两个灯塔的视角$\angle XPY$，并把它与已知的危险角$\angle XZY$（$\overset{\frown}{XY}$上任意一点Z与两个灯塔所成的角）相比较，航行中保持$\angle XPY<\angle XZY$. 你知道这样做的道理吗？



（第 10 题）

第二十九章　圆（二）

在生活中，我们经常遇到与圆有关的一些问题. 例如，如何确定射击运动员的成绩？用一张三角形的纸片，怎样裁出一个与各边都相切的圆？怎样计算搭建一个蒙古包所需的用料？等等. 要解决这些问题，需要我们进一步学习圆.

在上一章，我们已经认识了圆，学习了它的一些性质. 本章我们将在上一章的基础上进一步认识圆，研究点和圆、直线和圆、正多边形和圆之间的关系，学习与圆有关的一些计算，并用圆的有关知识解决一些实际问题.

29.1 点和圆的位置关系

问题 我国射击运动员在奥运会上屡获金牌，为祖国赢得荣誉. 图 29.1-1 是射击靶的示意图，它是由许多同心圆（圆心相同、半径不等的圆）构成的，你知道击中靶上不同位置的成绩是如何计算的吗？

要想解决这个问题，需要研究点和圆的位置关系.

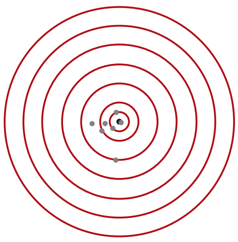


图 29.1-1

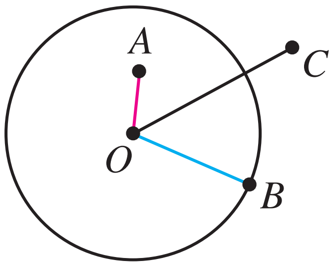


图 29.1-2

我们知道，圆上所有的点到圆心的距离都等于半径. 如图 29.1-2，设⊙O 的半径为 r，点 A 在圆内，点 B 在圆上，点 C 在圆外. 容易看出：$OA<r$，$OB=r$，$OC>r$.

反过来，如果 $OA<r$，$OB=r$，$OC>r$，则可以得到点 A 在圆内，点 B 在圆上，点 C 在圆外.

设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离 $OP=d$，则有：

点 P 在圆内$\Leftrightarrow d<r$；

点 P 在圆上$\Leftrightarrow d=r$；

点 P 在圆外$\Leftrightarrow d>r$.

这里的符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，它表示从符号“$\Leftrightarrow$”的左端可以推出右端，从右端也可以推出左端.

射击靶图上，有一组以靶心为圆心的大小不同的圆，它们把靶图由内到外分成几个区域，这些区域用由高到低的环数来表示，射击成绩用弹着点位置对应的环数表示．弹着点与靶心的距离决定了它在哪个圆内，弹着点离靶心越近，它所在的区域就越靠内，对应的环数也就越高，射击成绩越好．

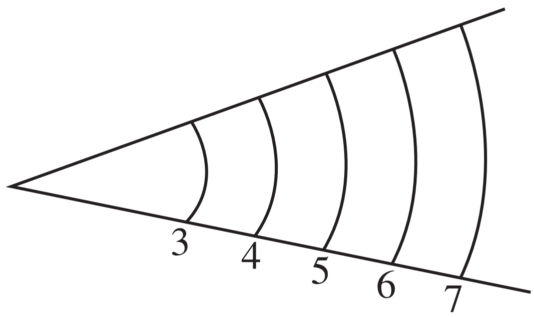
巩固运用29.1

1. $\odot O$ 的半径为 10 cm，根据下列点 P 到圆心 O 的距离，判断点 P 和$\odot O$ 的位置关系：

   (1) 8 cm；(2) 10 cm；

   (3) 12 cm.

2. 小明和小丽掷实心球的成绩分别是 6.4 m 和 5.1 m，他们投出的实心球分别落在图中哪个区域内？



（第 2 题）

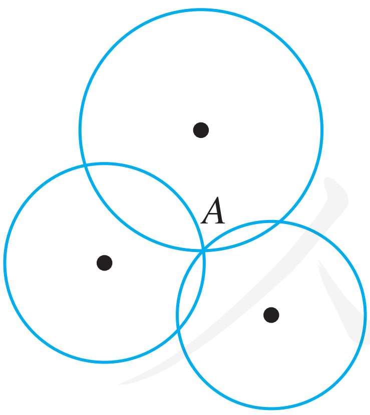
3. 画出由所有到已知点 O 的距离大于或等于 2 cm，并且小于或等于 3 cm 的点组成的图形．

4. $\odot O$ 的直径为 10 cm，圆心 O 到直线 l 的距离 $OD=3$ cm，在直线 l 上有 P，Q，R 三点，且 $PD=4$ cm，$QD>4$ cm，$RD<4$ cm. P，Q，R 三点对于$\odot O$ 的位置各是怎样的？

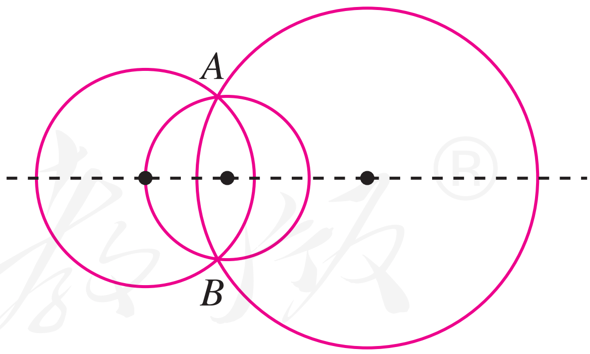
探究

我们知道，已知圆心和半径，可以画出一个圆. 经过一个已知点 A 能不能画出一个圆？这样的圆有多少个？经过两个已知点 A，B 呢？

画出一个圆的关键在于确定圆心的位置和半径的大小. 对于经过已知点的圆，当圆心确定后，半径也就随之确定，画圆的问题也就转化为确定圆心的问题. 因此，要画经过一个点 A 的圆，只要以点 A 以外的任意一点为圆心，以这一点与点 A 的距离为半径就可以画出，这样的圆有无数个（图 29.1-3(1)）. 要画经过两个点 A，B 的圆，由于所求的圆的圆心到 A，B 两点的距离相等，所以圆心在线段 AB 的垂直平分线上，这样的圆也可以画出无数个（图 29.1-3(2)）.



(1)



(2)

图 29.1-3

思考

经过不在同一条直线上的三个点 A，B，C 能不能画出一个圆？如果能，其圆心在什么位置？这样的圆有多少个？

对于经过不在同一条直线上的三点画圆的问题，因为所求的圆要经过 A，B，C 三点，所以圆心到这三点的距离要相等．因此，这个点既要在线段 AB 的垂直平分线上，又要在线段 BC 的垂直平分线上．如图 29.1-4，设点 O 为线段 AB 的垂直平分线 l_1 和线段 BC 的垂直平分线 l_2 的交点，则 $OA=OB=OC$．于是以点 O 为圆心，OA（或 OB，OC）为半径，便可以得到经过 A，B，C 三点的圆．因为过 A，B，C 三点的圆的圆心只能是点 O，半径等于 OA，所以这样的圆只有一个，即

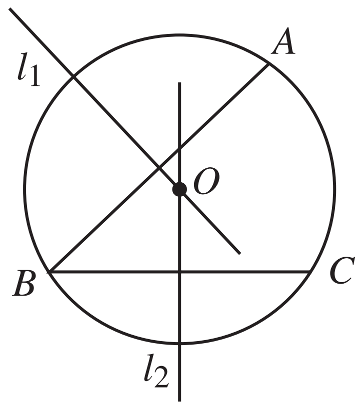


图 29.1-4

不在同一条直线上的三个点确定一个圆．

由图 29.1-4 可以看出，经过三角形的三个顶点可以确定一个圆，这个圆叫做三角形的**外接圆**（circumcircle），外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，叫做这个三角形的**外心**（circumcenter）．

思考

经过同一条直线上的三个点能画出一个圆吗？

如图 29.1-5，假设经过同一条直线 l 上的 A，B，C 三点可以画出一个圆. 设这个圆的圆心为 P，那么点 P 既在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上，又在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上，即点 P 为 l_1 与 l_2 的交点，而 $l_1 \perp l$，$l_2 \perp l$，这与我们以前学过的“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾. 所以，经过同一条直线上的三个点不能画出一个圆.

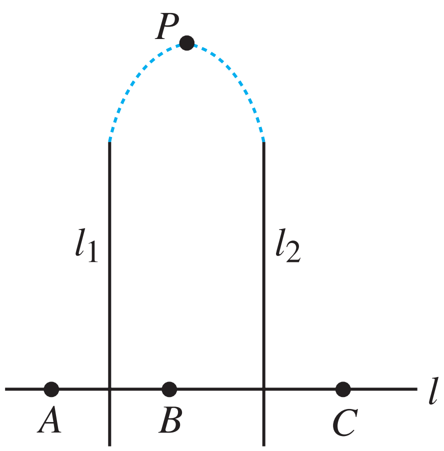


图 29.1-5

上面证明“经过同一条直线上的三个点不能画出一个圆”的方法与我们以前学过的证明不同，它不是直接从命题的已知得出结论，而是假设命题的结论不成立（即假设经过同一条直线上的三个点可以画出一个圆），由此经过推理得出矛盾（过一点有两条直线和已知直线垂直），由矛盾断定所作假设不正确，从而得到原命题成立. 这种方法叫做**反证法***.

在某些情形下，反证法是很有效的证明方法. 例如，可以用反证法证明平行线的性质“两直线平行，同位角相等”.

如图 29.1-6，我们要证明：如果 $AB \parallel CD$，那么 $\angle 1 = \angle 2$. 假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，过点 O 作直线 $A'B'$，

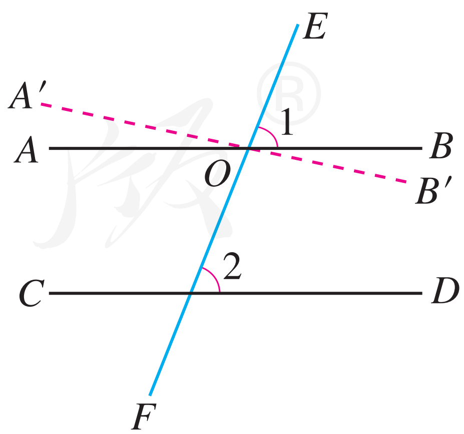


图 29.1-6

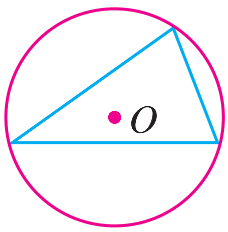
* “反证法”为选学内容.

使$\angle EOB'=\angle 2$. 根据“同位角相等，两直线平行”，可得$A'B'\parallel CD$. 这样，过点O就有两条直线AB，$A'B'$都平行于CD，这与平行公理“经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾. 这说明假设$\angle 1\neq\angle 2$不正确，从而$\angle 1=\angle 2$.

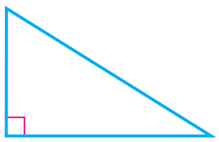
巩固运用29.2

1. 已知$AB=6$ cm，经过A，B两点，半径为4 cm的圆有多少个？如果半径为3 cm，2 cm呢？

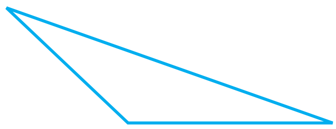
2. 如图(1)，对于锐角三角形，它的外心O在三角形的内部，对于直角三角形（图(2)）和钝角三角形（图(3)），它们的外心的位置分别有什么特点？



(1)



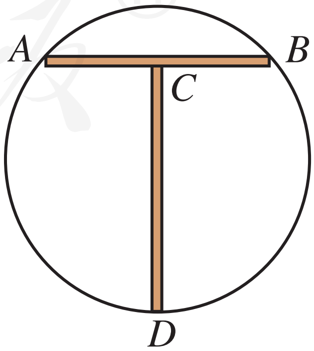
(2)



(3)

（第2题）

3. 如图，CD所在的直线垂直平分线段AB，怎样用这样的工具找到圆形物体的圆心？



（第3题）

29.2 直线和圆的位置关系

探究

（1）如果我们把太阳看作一个圆，把地平线看作一条直线，那么在太阳升起的过程中，太阳和地平线会有几种位置关系？由此你能得出直线和圆的位置关系吗？

（2）如图 29.2-1，在桌面上放置一根细木棍，把钥匙环看作一个圆．在桌面上移动钥匙环，你能发现在移动钥匙环的过程中，它与细木棍的公共点个数的变化情况吗？

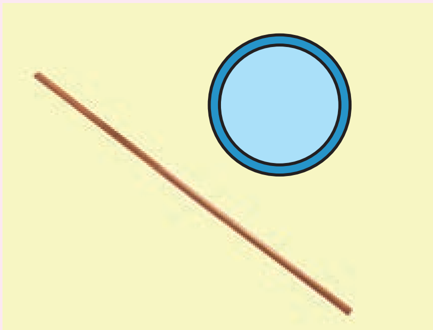


图 29.2-1

可以发现，直线和圆有三种位置关系（图 29.2-2）：

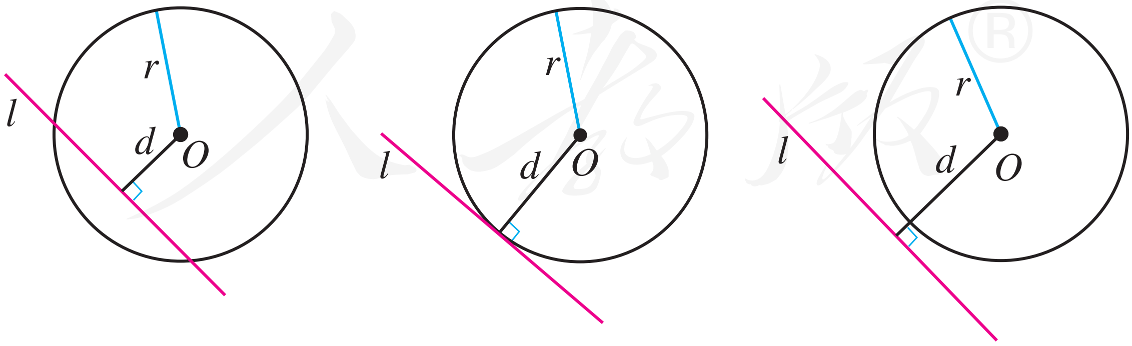


图 29.2-2

如图 29.2-2(1)，直线和圆有两个公共点，这时我们说

这条直线和圆**相交**，这条直线叫做圆的**割线**.

如图 29.2-2(2)，直线和圆只有一个公共点，这时我们说这条直线和圆**相切**，这条直线叫做圆的**切线**（tangent line），这个点叫做**切点**.

如图 29.2-2(3)，直线和圆没有公共点，这时我们说这条直线和圆**相离**.

思考

如图 29.2-2，设$\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 在直线和圆的不同位置关系中，d 与 r 具有怎样的大小关系？反过来，你能根据 d 与 r 的大小关系确定直线和圆的位置关系吗？

根据直线和圆相交、相切、相离的定义，容易得到：

直线 l 和$\odot O$ 相交$\Leftrightarrow d<r$；

直线 l 和$\odot O$ 相切$\Leftrightarrow d=r$；

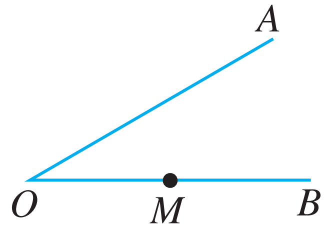
直线 l 和$\odot O$ 相离$\Leftrightarrow d>r$.

巩固运用29.3

1. 圆的直径是 13 cm，根据下列圆心与直线的距离，判断直线和圆的位置关系以及公共点的个数.

(1) 4.5 cm；(2) 6.5 cm；(3) 8 cm.

2. 如图，$\angle AOB=30^\circ$，M 为 OB 上一点，$OM=5$ cm. 以 M 为圆心，下列 r 为半径的圆与直线 OA 具有怎样的位置关系？为什么？



（第 2 题）

(1) $r=2$ cm；

(2) $r=4$ cm；

(3) $r=2.5$ cm.

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 判断以点 C 为圆心，下列 r 为半径的 $\odot C$ 与 AB 所在的直线的位置关系：

(1) $r=2$ cm；(2) $r=2.4$ cm；(3) $r=3$ cm.

4. 已知 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 $AB=6$ cm，直角边 $AC=3$ cm. 圆心为 C，半径分别为 2 cm，4 cm 的两个圆与 AB 所在的直线有怎样的位置关系？当半径为多长时，AB 所在的直线与圆相切？

下面，我们重点研究直线和圆的位置关系中，直线和圆相切的情况.

思考

如图 29.2-3，在 $\odot O$ 中，经过半径 OA 的外端点 A 画直线 $l\perp OA$，则圆心 O 到直线 l 的距离是多少？直线 l 和 $\odot O$ 有什么位置关系？

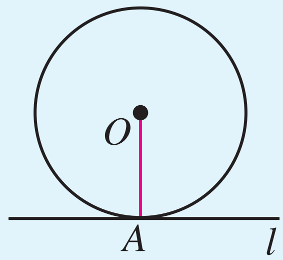


图 29.2-3

可以看出，这时圆心 O 到直线 l 的距离就是⊙O 的半径，直线 l 就是⊙O 的切线．这样，我们得到切线的判定定理：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

在生活中，有许多直线和圆相切的实例．例如，下雨天当你快速转动雨伞时飞出的水珠，在砂轮上打磨工件时飞出的火星，都是沿着圆的切线方向飞出的．

思考

将上面“思考”中的问题反过来．如图 29.2-3，如果直线 l 是⊙O 的切线，切点为 A，那么半径 OA 与直线 l 是不是一定垂直呢？

实际上，半径 OA 与直线 l 一定垂直．

一般地，我们有切线的性质定理：

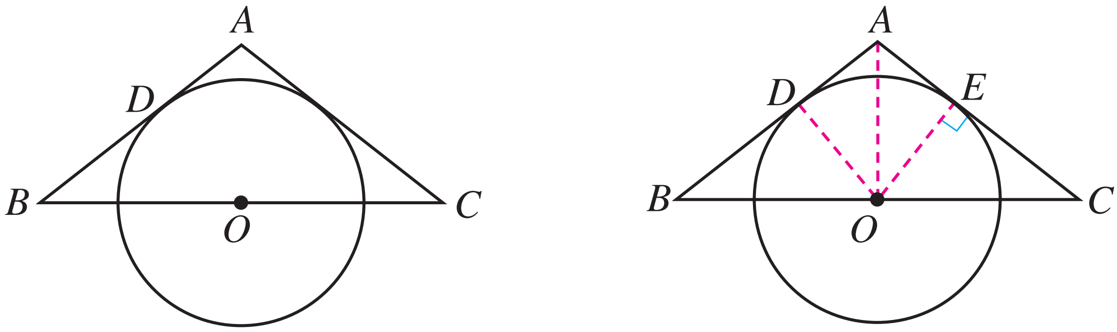
圆的切线垂直于过切点的半径.

例 1 如图 29.2-4(1)，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，腰 AB 与⊙O 相切于点 D．求证：AC 是⊙O 的切线．

分析： 根据切线的判定定理，要证明 AC 是⊙O 的切线，只要证明由点 O 向 AC 所作的垂线段 OE 是⊙O 的半径就可以了．而 OD 是⊙O 的半径，因此需要证明 $OE=OD$．

证明： 如图 29.2-4(2)，过点 O 作 $OE\perp AC$，垂足为 E，连接 OD，OA．

$\because$ ⊙O 与 AB 相切于点 D，



（1）　　（2）

图 29.2-4

∴　$OD \perp AB$.

又　$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，

∴　AO 平分 $\angle BAC$，即点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

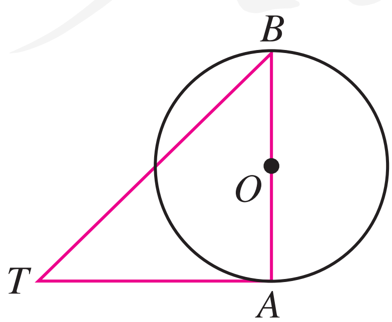
∴　$OE = OD$，即 OE 是 $\odot O$ 的半径.

这样，AC 经过 $\odot O$ 的半径 OE 的外端点 E，并且垂直于半径 OE，所以 AC 与 $\odot O$ 相切.

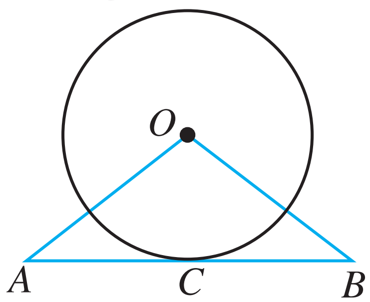
由本例可以看出，在解决有关圆的切线问题时，常常需要作过切点的半径.

巩固运用29.4

1. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle ABT = 45^\circ$，$AT = AB$. 求证：AT 是 $\odot O$ 的切线.



（第 1 题）



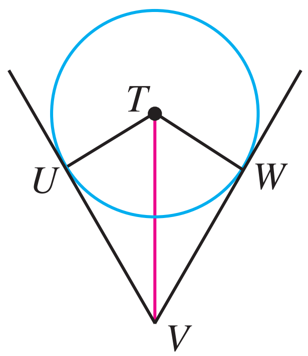
（第 2 题）

2. 如图，直线 AB 经过⊙O 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 求证：直线 AB 是⊙O 的切线.

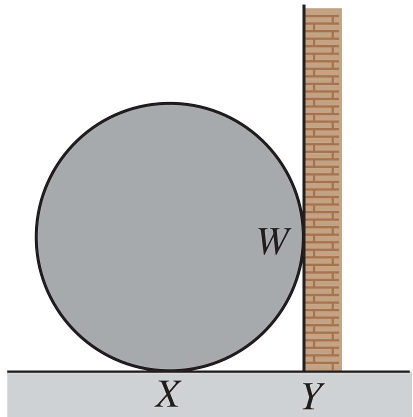
3. 一根钢管放在 V 形架内，其横截面如图所示，钢管的半径是 25 cm.

(1) 如果 $UV=28$ cm，VT 是多少？

(2) 如果 $\angle UVW=60°$，VT 是多少？



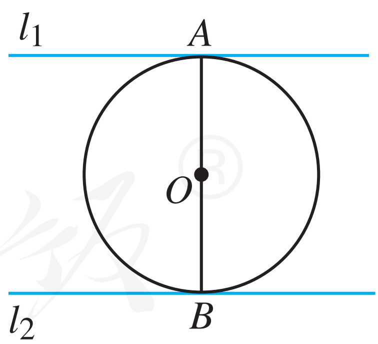
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，一个油桶靠在直立的墙边，量得 $WY=0.65$ m，并且 $XY\perp WY$. 这个油桶的底面半径是多少？为什么？

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，直线 l_1，l_2 是⊙O 的切线，A，B 是切点. l_1，l_2 有怎样的位置关系？证明你的结论.



（第 5 题）

下面研究经过圆外一点所画的两条切线之间的关系.

如图 29.2-5，过圆外一点 P 有两条直线 PA，PB 分别与$\odot O$ 相切. 经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的**切线长**.

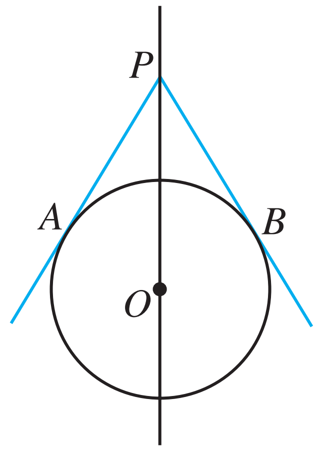


图 29.2-5

探究

如图 29.2-5，PA，PB 是$\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A，B. 图中的 PA 与 PB，$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 有什么关系?

如图 29.2-6，连接 OA 和 OB. 因为 PA 和 PB 是$\odot O$ 的两条切线，所以 $\angle PAO=\angle PBO=90°$，即 $\triangle AOP$ 和 $\triangle BOP$ 均为直角三角形. 又因为 $OA=OB$，$OP=OP$，所以$\triangle AOP\cong\triangle BOP$. 于是有

$$PA=PB，\angle APO=\angle BPO.$$

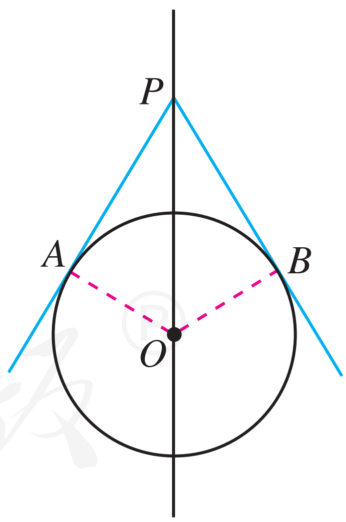


图 29.2-6

由此得到切线长定理*：

过圆外一点可以画圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

* “切线长定理”为选学内容.

思考

图 29.2-7 是一块三角形的铁皮，如何在它上面截下一块圆形的用料，并且使截下来的圆与三角形的三条边都相切？

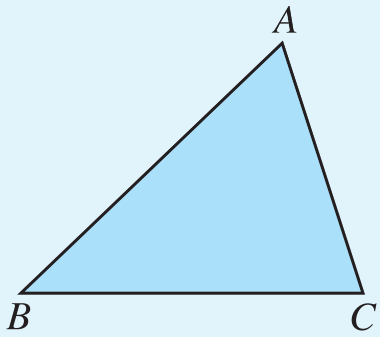


图 29.2-7

假设符合条件的圆已经画出，那么这个圆的圆心到三角形的三条边的距离都等于半径. 如何找到这个圆心呢？

我们以前学过，三角形的三条角平分线交于一点，并且这个点到三条边的距离相等. 因此，如图 29.2-8，设 $\angle B$，$\angle C$ 的平分线分别为 BM 和 CN，它们相交于点 I，那么点 I 到 AB，BC，CA 的距离都相等. 以点 I 为圆心，点 I 到 BC 的距离 ID 为半径的圆与 $\triangle ABC$ 的三条边都相切，圆 I 就是所求的圆.

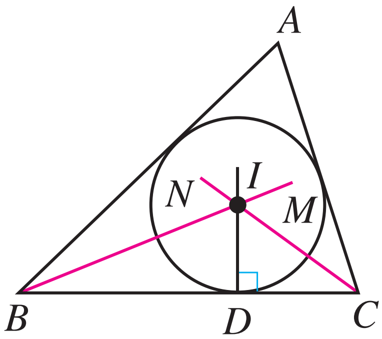


图 29.2-8

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**（inscribed circle），内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的**内心**（incenter）.

* **例 2**　如图 29.2-9，$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC，CA，AB 分别相切于点 D，E，F，且 $AB=9$，$BC=14$，$CA=13$. 求 AF，BD，CE 的长.

解： 设 $AF=x$，则

$AE=x$，

$CD=CE=AC-AE=13-x$，

$BD=BF=AB-AF=9-x$.

由 $BD+CD=BC$，可得

$(9-x)+(13-x)=14$.

解得　$x=4$.

因此　$AF=4$，$BD=5$，$CE=9$.

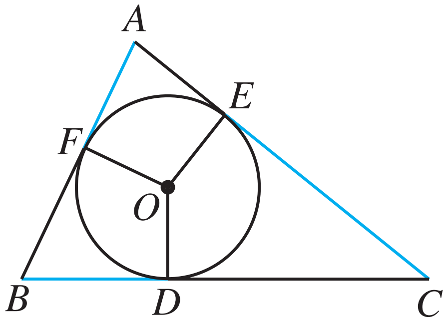
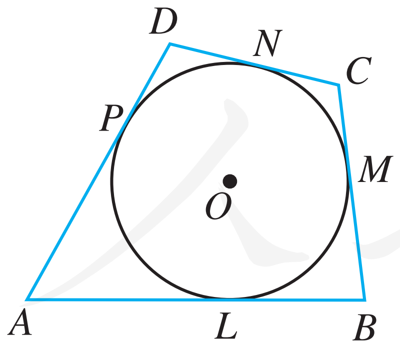


图 29.2-9

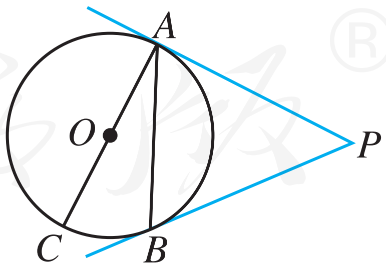
*巩固运用29.5

1. 已知⊙O 的半径为 3 cm，点 P 和圆心 O 的距离为 6 cm，经过点 P 有⊙O 的两条切线. 求这两条切线的夹角和切线长.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 和⊙O 分别相切于点 L，M，N，P. 求证：$AB+CD=AD+BC$.



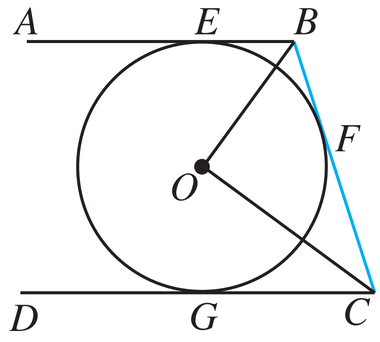
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 为切点，AC 是⊙O 的直径，$\angle BAC=25^\circ$. 求$\angle P$ 的度数.

4. 如图，AB，BC，CD 分别与 $\odot O$ 相切于 E，F，G 三点，且 $AB \parallel CD$，$BO=6$ cm，$CO=8$ cm. 求 BC 的长.（提示：先判断 $\triangle BOC$ 是直角三角形，再利用勾股定理计算.）



（第 4 题）

阅读与思考

圆和圆的位置关系

前面我们学习了点和圆、直线和圆的位置关系. 利用类似的方法，我们也可以研究圆和圆的位置关系.

取两个大小不同的钥匙环，将它们看作是两个半径不同的圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$. 在桌面上固定其中一个，移动另一个. 可以发现，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的位置可能出现以下几种情况（图 1）.

如果两个圆没有公共点，那么就说这两个圆相离，如图 1 中(1)(5)(6)所示. 其中(1)叫做外离，(5)(6)叫做内含，(6)中两圆的圆心相同是两圆内含的一种特殊情况. 如果两个圆只有一个公共点，那么就说这两个圆相切，如图 1 中(2)(4)所示. 其中(2)叫做外切，(4)叫做内切. 如果两个圆有两个公共点，那么就说这两个圆相交，如图 1 中(3)所示.

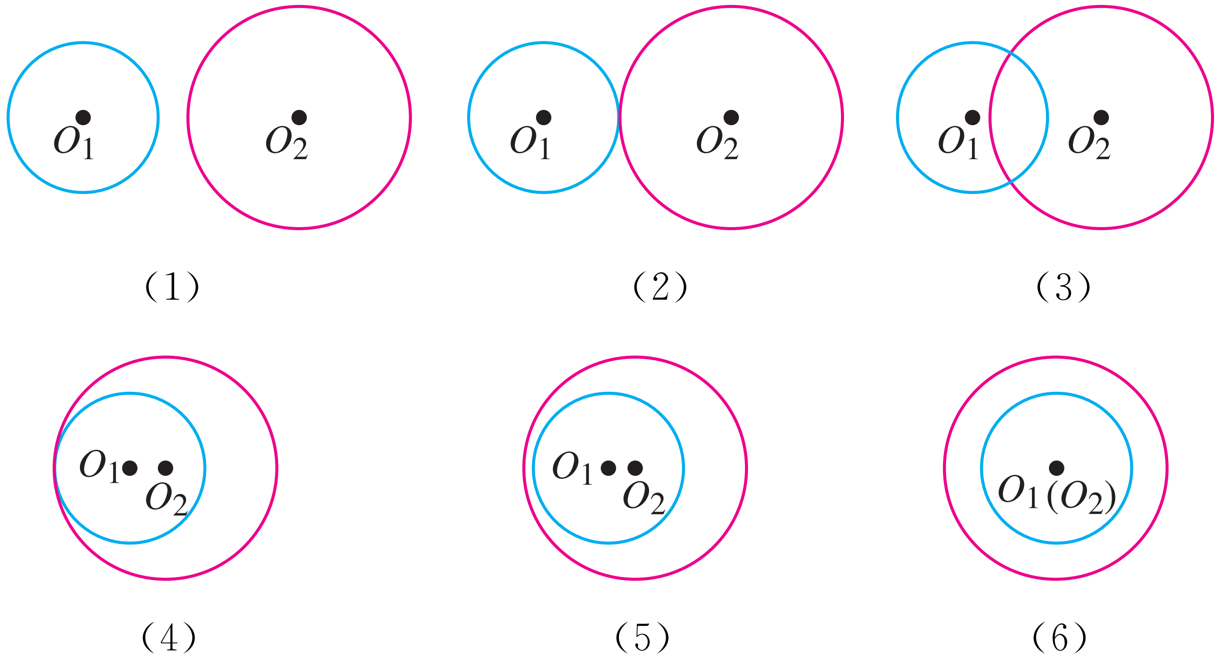


图 1

类似于研究点和圆、直线和圆的位置关系，我们也可以用两圆的半径和两圆的圆心距（两圆圆心的距离）来刻画两圆的位置关系. 如果两圆的半径分别为 r_1 和 r_2 $(r_1<r_2)$，圆心距为 d，请你利用 d 与 r_1 和 r_2 之间的关系讨论两圆的位置关系，并完成下表：

两圆的位置关系	d 与 r_1 和 r_2 之间的关系
外离	$d>r_1+r_2$
外切	
相交	
内切	
内含	

在生活中，圆和圆的各种位置关系也随处可见. 例如奥运五环、堆放的圆管、工件中的轴承等. 你能再举出一些例子吗？

29.3 正多边形和圆

我们知道，各边相等、各角也相等的多边形是正多边形. 日常生活中，我们经常能看到正多边形形状的物体，利用正多边形，也可以得到许多美丽的图案. 你能举出一些这样的例子吗?

正多边形和圆的关系非常密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以得到这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆. 例如，如图 29.3-1，把$\odot O$分成相等的 5 段弧，依次连接各分点得到的五边形 $ABCDE$ 就是正五边形. 这时，五边形 $ABCDE$ 是$\odot O$ 的内接正五边形，$\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆.

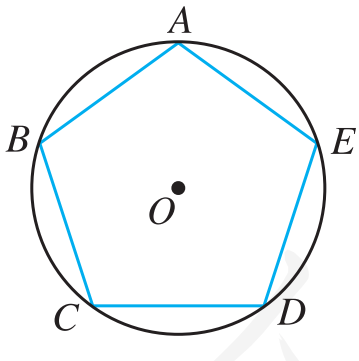


图 29.3-1

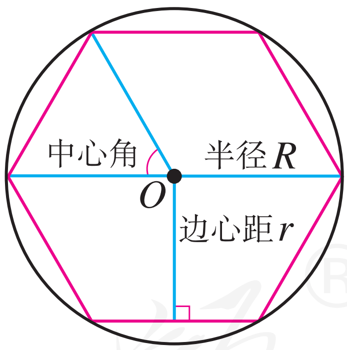


图 29.3-2

我们把一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的**中心角**，中心到正多边形的每一边的距离叫做正多边形的**边心距**（图 29.3-2）.

思考

正 n 边形的一个内角的度数是多少？中心角呢？正多边形的中心角与外角的大小有什么关系？

例 延安宝塔是革命圣地延安的标志和象征，它是一个八角九级楼阁式砖塔．其地基是周长为 36.8 m、半径为 6 m 的正八边形．求宝塔地基的面积（结果保留小数点后一位）．

解： 如图 29.3-3，在表示宝塔地基的以点 O 为中心的正八边形 $ABCDEFGH$ 中，连接 OA，OB，作 $OP \perp AB$，垂足为 P．

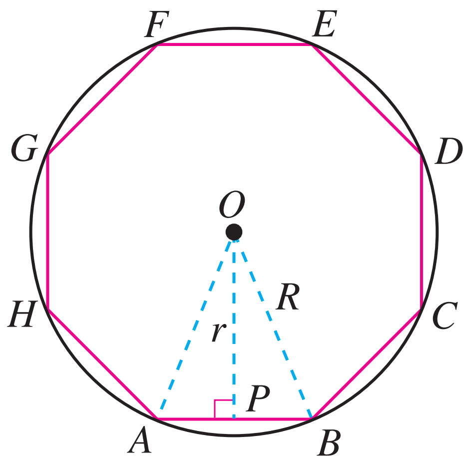


图 29.3-3

因为宝塔的地基是周长为 36.8 m、半径为 6 m 的正八边形，所以

$$AB=\frac{36.8}{8}=4.6(\mathrm{m}),\ OA=6\ \mathrm{m}.$$

所以

$$OP=\sqrt{OA^2-AP^2}=\sqrt{OA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{6^2-\left(\frac{4.6}{2}\right)^2}\approx 5.54(\mathrm{m}).$$

宝塔地基的面积

$$S=8\times\frac{1}{2}\times AB\times OP\approx 8\times\frac{1}{2}\times 4.6\times 5.54\approx 101.9(\mathrm{m}^2).$$

巩固运用29.6

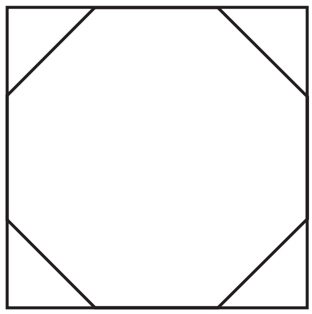
1. 矩形是正多边形吗？菱形呢？正方形呢？为什么？

2. 各边相等的圆内接多边形是正多边形吗？各角相等的圆内接多边形呢？如果是，说明理由；如果不是，举出反例.

3. 完成下表中有关正多边形的计算.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°			$2\sqrt{3}$			
4					1		
6					$\sqrt{3}$		

4. 如图，正方形的边长为 4 cm，剪去四个角后成为一个正八边形. 求这个正八边形的边长和面积.



（第 4 题）

5. 用 48 m 长的篱笆在空地上围成一个绿化场地，现有四种设计方案：正三角形、正方形、正六边形、圆. 哪种场地的面积最大？

阅读与思考

圆周率 π

我们知道，圆的周长 $C=2\pi R$，面积 $S=\pi R^2$，你知道公式中的 π 是怎么计算出来的吗？学过了正多边形和圆，就可以说出其中的道理了.

由公式 $C=2\pi R$ 可得 $\pi=\dfrac{C}{2R}$. 因此，如果已经求得圆的周长，那么只需把它和圆的直径相比就能得到圆周率 π. 因此，求圆周率 π 的问题在某种意义上就可归结为求圆的周长. 实际上，公式 $\pi=\dfrac{C}{2R}$ 中圆的周长 C 是可以用圆内接正多边形的周长来近似代替的. 如图 1，把圆 n 等分，顺次连接各分点，便得到一个正 n 边形. 再取这 n 段弧的中点，连同前面的 n 个分点得到 $2n$ 个分点，顺次连接这 $2n$ 个点，便得到正 $2n$ 边形. 继续这样做下去，圆内接正多边形的边数就是 $4n$，$8n$，$16n$，$32n$，…. 随着边数的成倍增多，它们的周长 p 越来越接近圆的周长 C，$\dfrac{p}{2R}$ 也越来越接近于圆的周长与直径的比值 $\dfrac{C}{2R}$，这个数就是圆周率 π. π 是一个无理

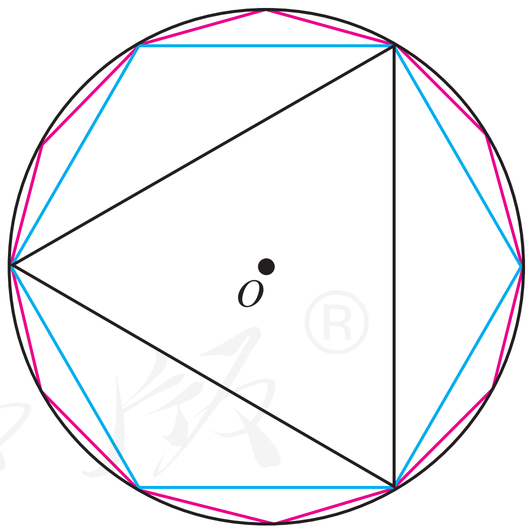


图 1

数，$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\cdots$.

历史上，对于圆周率 π 的研究是古代数学一个经久不衰的话题. 在我国，东汉初年的《周髀算经》里就有“径一周三”的古率. 公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes，约公元前 287—前 212）通过圆内接和外切正多边形逼近圆周的方法得到圆周率介于 $3\frac{10}{71}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 之间. 我国魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”，利用圆的内接正多边形来确定圆周率，并指出在圆的内接正多边形边数加倍的过程中“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”. 他计算出 $\pi\approx\frac{157}{50}=3.14$. 南朝的祖冲之（429—500）在公元 5 世纪又进一步求得 π 的值在 3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间，是世界上第一个将圆周率的计算精确到小数点后 7 位的人.

随着时代的发展，人们利用高等数学的知识来计算 π 的值，先后得出了许多计算 π 的公式，π 的近似值的位数也迅速增长.

电子计算机问世以后，圆周率的计算突飞猛进，π 的小数点后已经计算出的位数不断增长. 20 世纪 50 年代得到千位以上，60 年代则达到 50 万位，80 年代得到 10 亿位. 到 21 世纪初，科学家已计算出 π 的小数点后超过万亿的位数.

当今时代，π 的计算成为测试超级计算机的各项性能的方法之一. 运算速度与计算过程的稳定性对计算机至关重要. 这正是超高精度的 π 的计算直到今天仍然有重要意义的原因之一.

29.4 弧长和扇形面积

思考

我们知道，弧是圆的一部分，弧长就是圆周长的一部分. 想一想，如何计算圆周长？圆的周长可以看作是多少度的圆心角所对的弧长？由此出发，1°的圆心角所对的弧长是多少？n°的圆心角呢？

在半径为 R 的圆中，因为 360°的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$，所以 1°的圆心角所对的弧长是$\frac{2\pi R}{360}$，即$\frac{\pi R}{180}$. 于是 n°的圆心角所对的弧长为

$$\boxed{l=\frac{n\pi R}{180}.}$$

例 1 制造弯形管道时，经常要先按中心线计算“展直长度”，再下料. 图 29.4-1 所示的管道由一段圆弧形管道和两段直管道组成，其中圆弧形管道的圆心角为 100°，半径为 900 mm，直管道的长度为 700 mm. 试计算管道的展直长度 L(结果取整数).

解： 由弧长公式，得圆弧形管道$\overset{\frown}{AB}$的长

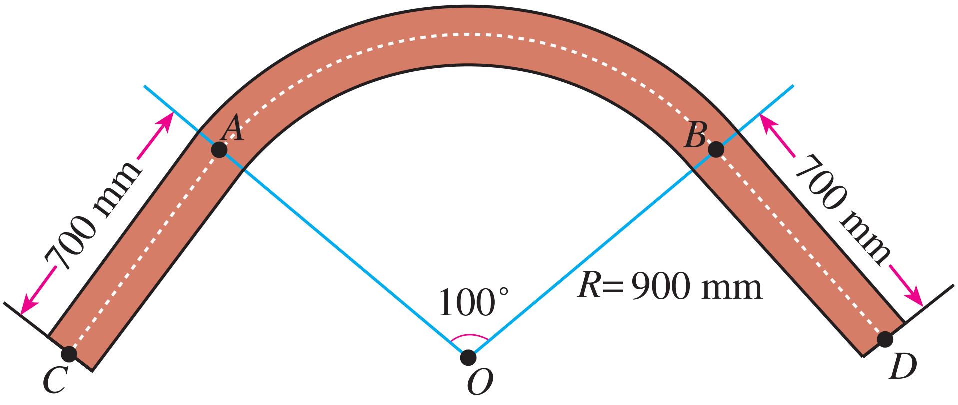


图 29.4-1

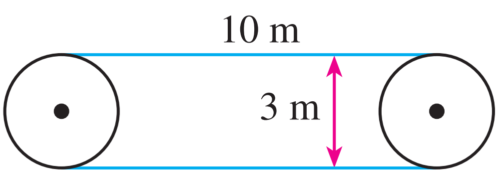
$$l=\frac{100\times900\times\pi}{180}=500\pi\approx1\ 570(\mathrm{mm}).$$

因此所要求的展直长度

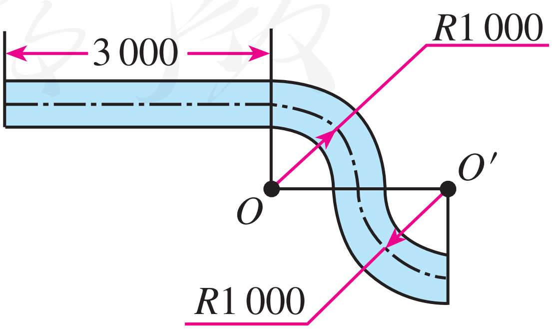
$$L\approx2\times700+1\ 570=2\ 970(\mathrm{mm}).$$

巩固运用29.7

1. 弧长相等的两段弧是等弧吗？
2. 如图，两个大小一样的传送轮连接着一条传送带. 求这条传送带的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图是一段弯形管道，其中两段圆弧形管道的圆心角 $\angle O=\angle O'=90°$，中心线的两条圆弧半径都为 1 000 mm，直管道长 3 000 mm. 求这段管道的展直长度（结果取整数）.

4. 在航海中，常用海里（n mile）作为路程的度量单位. 把地球看作球体，1 n mile 近似等于赤道所在的圆中 $1'$ 的圆心角所对的弧长. 已知地球半径（也就是赤道所在圆的半径）约为 6 370 km，1 n mile 约等于多少米（π 取 3.14，结果取整数）?

如图 29.4-2，由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫做**扇形**. 可以发现，扇形的面积除了与圆的半径有关外，还与组成扇形的圆心角的大小有关. 圆心角越大，扇形面积也就越大. 怎样计算圆的半径为 R，圆心角为 $n°$ 的扇形面积呢?

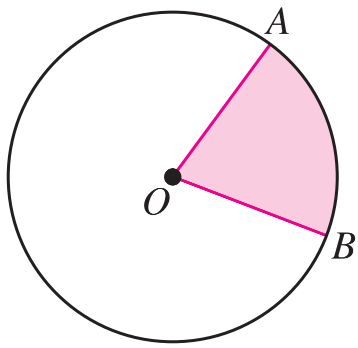


图 29.4-2

思考

由扇形的定义可知，扇形面积就是圆的面积的一部分. 想一想，如何计算圆的面积? 圆的面积可以看作是多少度的圆心角所对的扇形的面积? $1°$ 的圆心角所对的扇形面积是多少? $n°$ 的圆心角呢?

在半径为 R 的圆中，因为 $360°$ 的圆心角所对的扇形的面积就是圆面积 $S=\pi R^2$，所以圆心角为 $1°$ 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$. 于是圆心角为 $n°$ 的扇形面积是

$$\boxed{S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}.}$$

比较扇形面积公式与弧长公式，可以用弧长表示扇形面积：

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR,$$

其中 l 为扇形的弧长，R 为半径.

例 2 如图 29.4-3，水平放置的圆柱形排水管道的截面半径是0.6 m，其中水面高 0.3 m. 求截面上有水部分的面积（结果保留小数点后两位）.

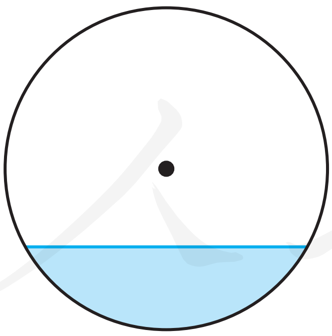


图 29.4-3

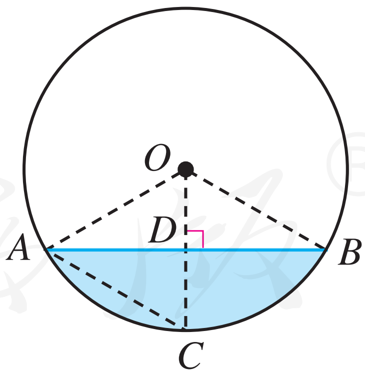


图 29.4-4

解： 如图 29.4-4，连接 OA，OB，作弦 AB 的垂直平分线，垂足为 D，OD 与 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点 C，连接 AC.

$\because$ $OC=0.6$ m，$DC=0.3$ m，

$\therefore \quad OD=OC-DC=0.3(\text{m})$.

$\therefore \quad OD=DC$.

又 $\quad AD\perp DC$,

$\therefore \quad AD$ 是线段 OC 的垂直平分线.

$\therefore \quad AC=AO=OC$.

从而 $\quad \angle AOD=60^\circ$，$\angle AOB=120^\circ$.

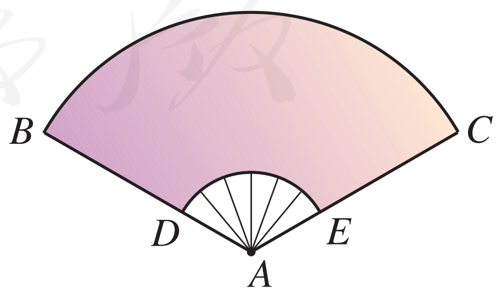
截面上有水部分的面积

$$
\begin{aligned}
S &= S_{\text{扇形}OAB}-S_{\triangle OAB}\\
&=\frac{120\pi}{360}\times 0.6^2-\frac{1}{2}AB\cdot OD\\
&=0.12\pi-\frac{1}{2}\times 0.6\sqrt{3}\times 0.3\\
&\approx 0.22(\text{m}^2).
\end{aligned}
$$

巩固运用29.8

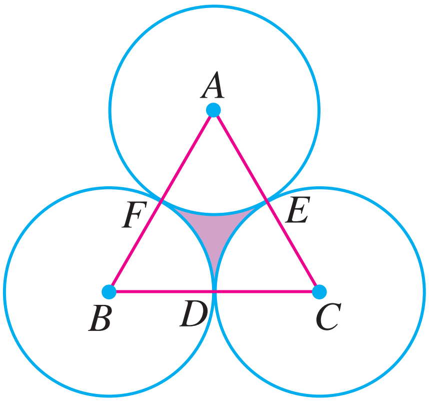
1. 草坪上的自动喷水装置能旋转 220°，它的喷灌区域是一个扇形，这个扇形的半径是 20 m. 求它能喷灌的草坪的面积.

2. 如图，扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB，AC 的夹角为120°，AB 的长为30 cm，扇面 BD 的长为20 cm. 求扇面的面积.

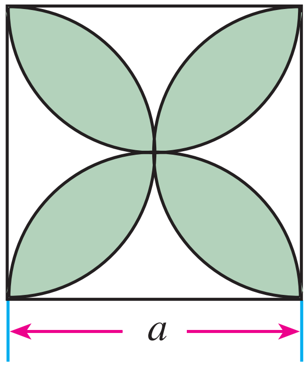


（第 2 题）

3. 如图，正三角形 ABC 的边长为 a，D，E，F 分别是 BC，CA，AB 的中点，以 A，B，C 三点为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径画圆. 求图中阴影部分的面积.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，正方形的边长为 a，以各边为直径在正方形内画半圆. 求图中阴影部分的面积.

我们知道，圆锥是由一个底面和一个侧面围成的几何体，如图 29.4-5，我们把连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫做圆锥的**母线**.

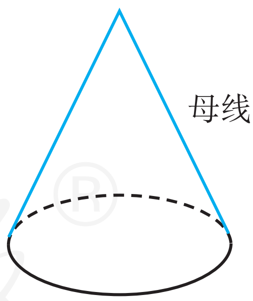


图 29.4-5

思考

圆锥的侧面展开图是什么图形？如何计算圆锥的侧面积？如何计算圆锥的全面积？

如图 29.4-6，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，容易得到，圆锥的侧面展开图是一个扇形. 设圆锥的母线长为 l，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为 l，扇形的弧长为 $2\pi r$，因此圆锥的侧面积为 πrl，圆锥的全面积为 $\pi r(r+l)$.

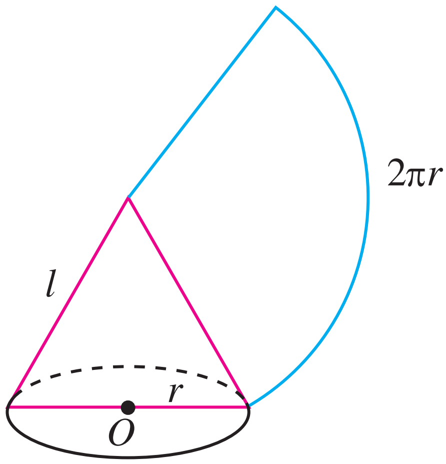


图 29.4-6

例 3 蒙古包可以近似地看作由圆锥和圆柱组成. 如果想用毛毡搭建 20 个底面积为 12 m^2，高为 3.2 m，外围高为 1.8 m 的蒙古包，至少需要多少平方米的毛毡（π 取 3.142，结果取整数）?

解： 图 29.4-7 是一个蒙古包的示意图.

根据题意，下部圆柱的底面积为 12 m^2，高 $h_2=1.8$ m；上部圆锥的高 $h_1=3.2-1.8=1.4(\mathrm{m})$.

圆柱的底面圆的半径

$$r=\sqrt{\frac{12}{\pi}}\approx 1.954(\mathrm{m}),$$

侧面积为

$$2\pi\times 1.954\times 1.8\approx 22.10(\mathrm{m}^2).$$

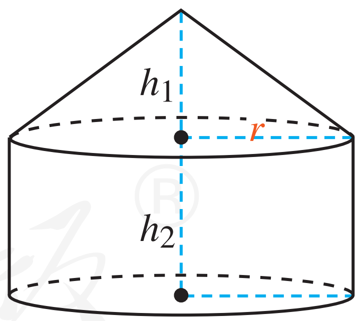


图 29.4-7

圆锥的母线长

$$l\approx\sqrt{1.954^2+1.4^2}\approx 2.404(\mathrm{m}),$$

侧面展开扇形的弧长为

$$2\pi\times 1.954\approx 12.28(\mathrm{m}),$$

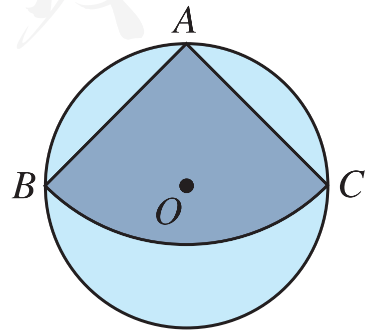
圆锥的侧面积为

$$\frac{1}{2}\times 2.404\times 12.28\approx 14.76(\mathrm{m}^2).$$

因此，搭建 20 个这样的蒙古包至少需要毛毡 $20\times(22.10+14.76)\approx 738(\mathrm{m}^2)$.

巩固运用29.9

1. 圆锥的底面直径是 80 cm，母线长 90 cm. 求它的侧面展开图的圆心角和圆锥的全面积.
2. 圆锥形的烟囱帽的底面圆的直径是 80 cm，母线长是 50 cm，制作 100 个这样的烟囱帽至少需要多少平方米的铁皮？
3. 粮仓的顶部是圆锥形，这个圆锥的底面圆的周长为 32 m，母线长 7 m. 为了防雨，需要在它的顶部铺上油毡，所需油毡的面积至少是多少？
4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. 把它分别沿三边所在直线旋转一周. 求所得三个几何体的全面积.
5. 如图，从一块直径是 1 m 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形，求被剪掉的部分的面积；如果将剪下来的扇形围成一个圆锥，圆锥的底面圆的半径是多少？



（第 5 题）

数学活动

探究四点共圆的条件

我们知道，过任意一个三角形的三个顶点能画一个圆. 过任意一个四边形的四个顶点能画一个圆吗？

图 1 给出了一些四边形，能否过它们的四个顶点画一个圆？试一试！

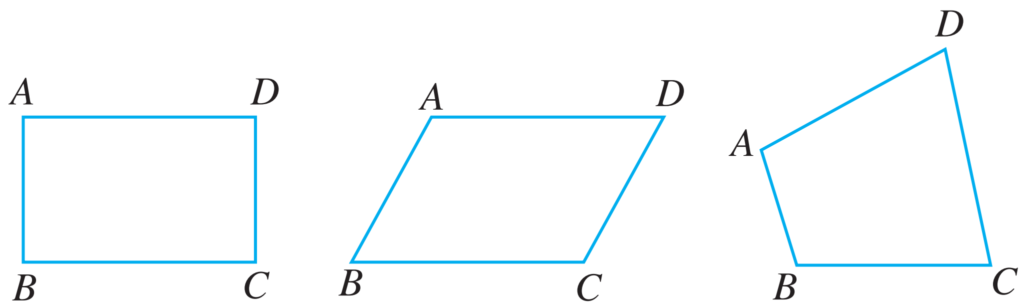


图 1

分别测量上面各四边形的内角，如果过某个四边形的四个顶点能画一个圆，那么其相对的两个内角之间有什么关系？

如果过某个四边形的四个顶点不能画一个圆，那么其相对的两个内角之间有上面的关系吗？试结合图 2 说明其中的道理.（提示：利用圆周角与其所对弧的大小关系，考虑$\angle B+\angle D$与 180°之间的关系.）

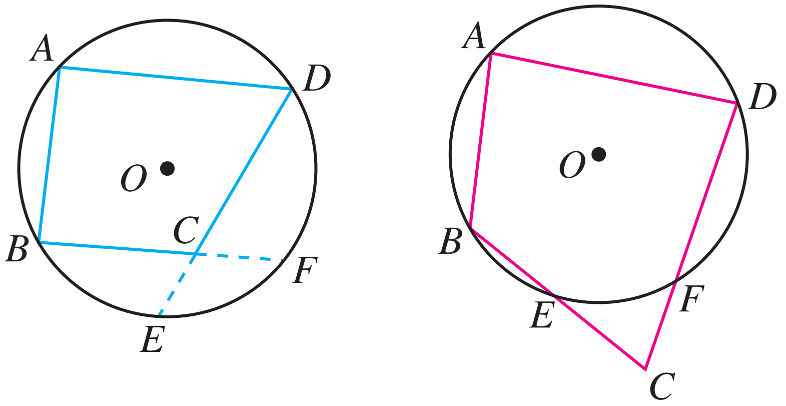
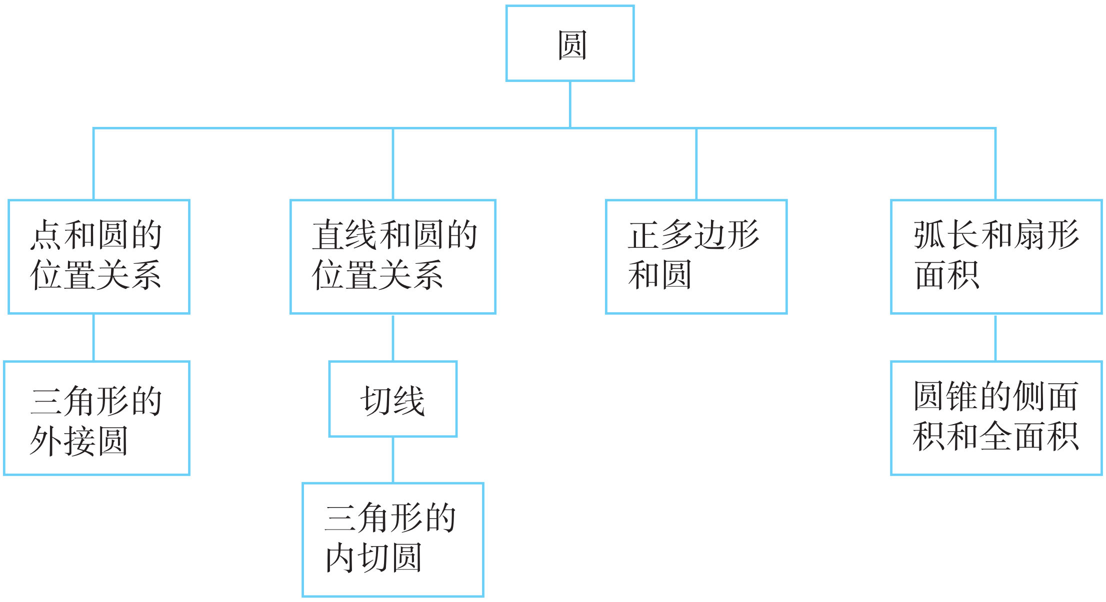


图 2

由上面的探究，试归纳出判定过某个四边形的四个顶点能画一个圆的条件.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1．本章在上一章的基础上，研究了点和圆、直线和圆的位置关系，圆和三角形、正多边形的关系，以及与圆有关的一些计算问题．数形结合以及类比是我们研究这些关系时采用的主要方法，它们也是探索数学新知识的重要方法．

2．点和圆有怎样的位置关系？直线和圆呢？你能举出这些位置关系的一些实例吗？你能用哪些方法刻画这些位置关系？

3．正多边形和圆有什么关系？

4．怎样由圆的周长和面积公式得到弧长公式和扇形面积公式，进而得到圆锥的侧面积公式？举例说明它们的一些应用．

复习题 29

复习巩固

1. 选择题.

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=1$，$BC=2$，M 是 AB 的中点，以点 C 为圆心，1 为半径画 $\odot C$，则（　　）.

(A) 点 M 在 $\odot C$ 上

(B) 点 M 在 $\odot C$ 内

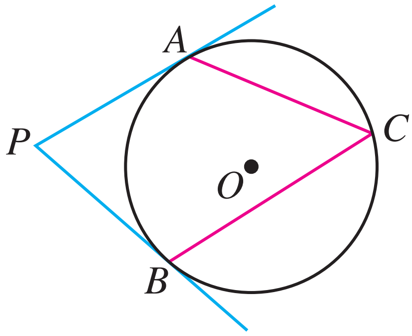
(C) 点 M 在 $\odot C$ 外

(D) 点 M 与 $\odot C$ 的位置关系不能确定

(2) 如图，PA，PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A，B 两点，$\angle P=70^{\circ}$，则 $\angle C=$（　　）.

(A) 70°　　(B) 55°

(C) 110°　　(D) 140°



（第 1(2)题）

(3) 以半径为 1 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则（　　）.

(A) 不能构成三角形

(B) 这个三角形是等腰三角形

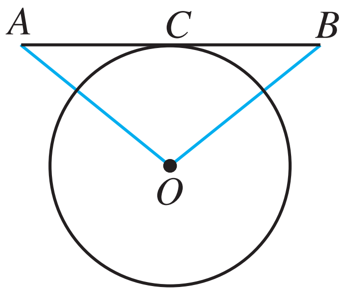
(C) 这个三角形是直角三角形

(D) 这个三角形是钝角三角形

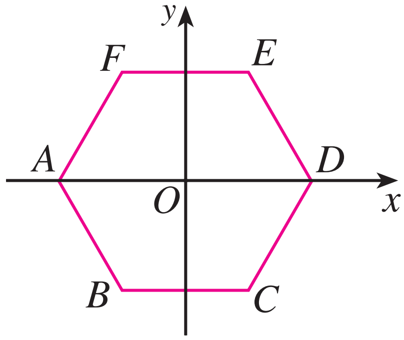
(4) 一个圆锥的侧面积是底面积的 2 倍，则圆锥侧面展开图的扇形的圆心角是（　　）.

(A) 120°　(B) 180°　(C) 240°　(D) 300°

2. 如图，AB 与 $\odot O$ 相切于点 C，$OA=OB$，$\odot O$ 的直径为 8 cm，$AB=10$ cm．求 OA 的长．



（第 2 题）

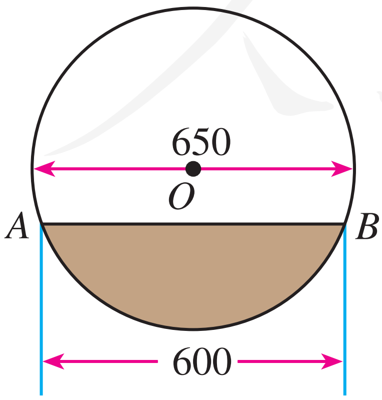


（第 3 题）

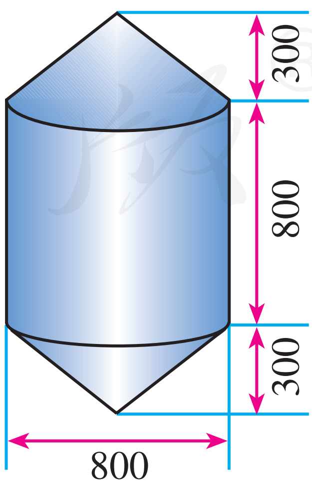
3. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的中心为原点 O，顶点 A，D 在 x 轴上，半径为 2 cm．求其各个顶点的坐标．

4. 分别求半径为 R 的圆内接正三角形、内接正方形的边长、边心距和面积．

5. 往直径为 650 mm 的圆柱形油槽内装入一些油以后，截面如图所示．若油面宽 $AB=600$ mm，求油的最大深度．



（第 5 题）

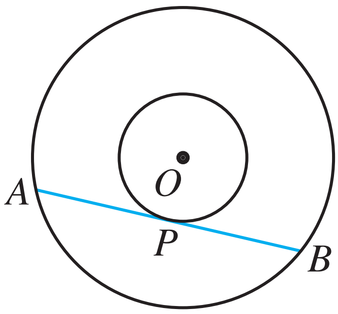


（第 6 题）

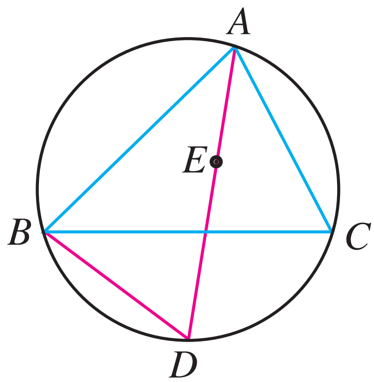
6. 如图，锚标浮筒是打捞作业中用来标记锚或沉船位置的，它的上下两部分是底面圆直径为 800 mm，高为300 mm 的圆锥，中间是高为800 mm的圆柱. 电镀时，如果每平方米用锌 0.11 kg，电镀 100 个这样的锚标浮筒，需要用多少锌？

综合运用

7. 如图，以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 是小圆的切线，点 P 为切点. 求证 $AP=BP$.



（第 7 题）

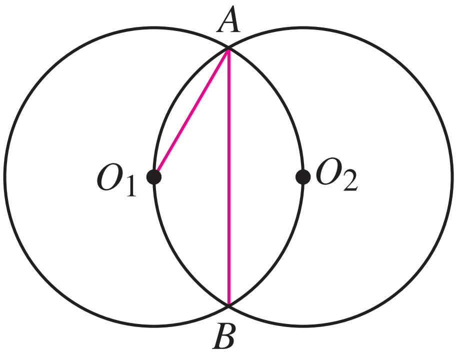


（第 8 题）

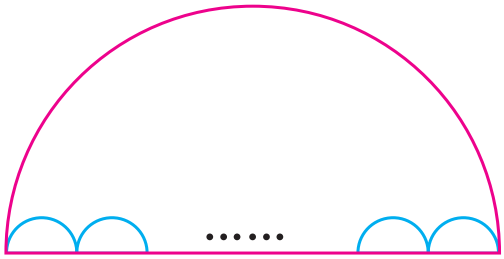
8. 如图，点 E 是$\triangle ABC$ 的内心，AE 的延长线和$\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D. 求证 $DE=DB$.

9. 如图，等圆$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，$\odot O_1$ 经过$\odot O_2$ 的圆心 O_2. 求$\angle O_1AB$ 的度数.

10. 如图，大半圆中有 n 个小半圆，大半圆的弧长为 L_1，n 个小半圆的弧长和为 L_2. 探索 L_1 和 L_2 的关系并证明你的结论.

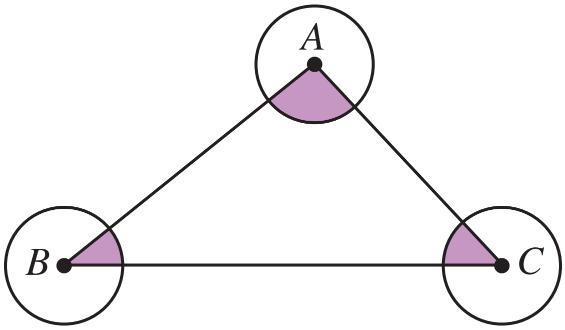


（第 9 题）



（第 10 题）

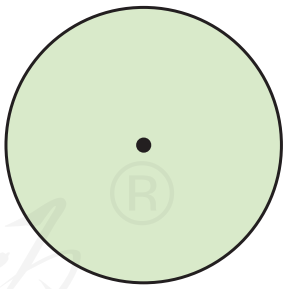
11. 如图，$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 两两不相交，且半径都是 0.5 cm. 求图中三个扇形（即阴影部分）的面积之和.



（第 11 题）

拓广探索

12. 如图，有一个圆形花坛，要把它分成面积相等的四部分，以种植不同的花卉，请你至少提供两种设计方案.



（第 12 题）

*13. $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，$\triangle ABC$ 的周长为 l，求$\triangle ABC$ 的面积.（提示：设$\triangle ABC$ 的内心为 O，连接 OA，OB，OC.）

第三十章　概率初步

同学们都听说过“天有不测风云”这句话吧！它的原意是指刮风、下雨、阴天、晴天这些天气状况，人们事先很难准确预料；后来泛指世界上很多事情具有偶然性，人们无法事先预料这些事情是否会发生.

随着实践和认识的逐步深入，人们发现偶然性事件中有些发生的可能性大，有些发生的可能性小.也就是说，偶然性事件发生的可能性的大小是有规律的.概率就是在研究这些规律的过程中产生的，人们用它描述偶然性事件发生的可能性的大小.例如，天气预报说明天的降水概率为90％，就意味着明天下雨或下雪的可能性很大；足球比赛中，通过抛掷硬币确定上半场比赛进攻方向的选择权，也应用了概率的知识，体现了公平原则.

现在概率的应用日益广泛.本章我们将学习概率的初步知识，提高对偶然性事件发生规律的认识.

30.1 随机事件与概率

30.1.1 随机事件

在现实世界中，我们经常会遇到无法预料事情发生结果的情况. 例如，虽然天气预报说明天有雨，但是我们无法确定明天是否一定会下雨；在某一时刻拨打查号台（114），无法确定线路是否能接通；参加抽奖活动，无法确定自己能否中奖，更无法确定能中几等奖；等等. 这些事情的发生都给我们以不确定的印象. 下面我们再来看两个问题.

问题 1 5 名同学参加演讲比赛，以抽签方式决定每个人的出场顺序. 为了抽签，我们在盒中放 5 个看上去完全一样的纸团，每个纸团里面分别写着表示出场顺序的数字 1，2，3，4，5. 把纸团充分搅拌后，小军先抽，他任意（随机）从盒中抽取 1 个纸团. 请思考以下问题：

（1）抽到的数字有几种可能的结果？

（2）抽到的数字小于 6 吗？

（3）抽到的数字会是 0 吗？

（4）抽到的数字会是 1 吗？

通过简单的推理或试验，可以发现：

（1）数字 1，2，3，4，5 都有可能被抽到，共有 5 种可能的结果，但是事先无法预料一次抽取会出现哪一种结果；

（2）抽到的数字一定小于 6；

（3）抽到的数字绝对不会是 0；

（4）抽到的数字可能是 1，也可能不是 1，事先无法确定.

问题 2 小伟掷一枚质地均匀的骰子，骰子的 6 个面上分别刻有 1 到 6 的点数. 请思考以下问题：掷一次骰子，在骰子向上的一面上，

（1）可能出现哪些点数？

（2）出现的点数大于 0 吗？

（3）出现的点数会是 7 吗？

（4）出现的点数会是 4 吗？

通过简单的推理或试验，可以发现：

（1）从 1 到 6 的每一个点数都有可能出现，所有可能的点数共有 6 种，但是事先无法预料掷一次骰子会出现哪一种结果；

（2）出现的点数一定大于 0；

（3）出现的点数绝对不会是 7；

（4）出现的点数可能是 4，也可能不是 4，事先无法确定.

在一定条件下，有些事件必然会发生. 例如，问题 1 中“抽到的数字小于 6”，问题 2 中“出现的点数大于 0”，这样的事件称为必然事件. 相反地，有些事件必然不会发生. 例如，问题 1 中“抽到的数字是 0”，问题 2 中“出现的点数是

7”，这样的事件称为不可能事件. 必然事件与不可能事件统称确定性事件.

在一定条件下，有些事件有可能发生，也有可能不发生，事先无法确定. 例如，问题 1 中“抽到的数字是 1”，问题 2 中“出现的点数是 4”，这两个事件是否发生事先不能确定. 在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**（random event）.

你还能举出一些随机事件的例子吗?

巩固运用30.1

1. 指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

   (1) 通常烧水加热到 100 ℃时，水沸腾;

   (2) 篮球队员在罚球线上投篮一次，未投中;

   (3) 掷一次骰子，向上一面的点数是 6;

   (4) 任意画一个三角形，其内角和是 360°;

   (5) 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯;

   (6) 射击运动员射击一次，命中靶心.

2. 列举一些生活中的随机事件、不可能事件和必然事件的例子.

问题 3 袋子中装有 4 个黑球、2 个白球，这些球的形状、大小、质地等完全相同，即除颜色外无其他差别. 在看不到球的条件下，随机从袋子中摸出 1 个球.

（1）这个球是白球还是黑球？

（2）如果两种球都有可能被摸出，那么摸出黑球和摸出白球的可能性一样大吗？

在上面的摸球活动中，“摸出黑球”和“摸出白球”是两个随机事件．一次摸球可能发生“摸出黑球”，也可能发生“摸出白球”，事先不能确定哪个事件发生．由于两种球的数量不等，所以“摸出黑球”与“摸出白球”的可能性的大小不一样，“摸出黑球”的可能性大于“摸出白球”的可能性．

一般地，随机事件发生的可能性是有大小的．

思考

能否通过改变袋子中某种颜色的球的数量，使“摸出黑球”和“摸出白球”的可能性大小相同？

巩固运用30.2

1. 已知地球表面陆地面积与海洋面积的比约为 3∶7．如果宇宙中飞来一块陨石落在地球上，“落在陆地上”与“落在海洋里”哪种可能性大？
2. 桌上倒扣着背面图案相同的 5 张扑克牌，其中 3 张黑桃、2 张红桃．从中随机抽取 1 张．

   （1）能够事先确定抽取的扑克牌的花色吗？

   （2）你认为抽到哪种花色的可能性大？

(3) 能否通过改变某种花色的扑克牌的数量，使“抽到黑桃”和“抽到红桃”的可能性大小相同？

3. 小明和小华进行乒乓球比赛，通过掷骰子决定谁先发球. 小明说：“骰子朝上一面的点数小于 3 时你先发，否则我先发.”小华说：“骰子朝上一面的点数为奇数你先发，否则我先发.”你觉得谁的方案比较公平？为什么？

30.1.2 概率

在同样条件下，某一随机事件可能发生也可能不发生. 那么，它发生的可能性究竟有多大？能否用数值刻画可能性的大小呢？下面我们讨论这个问题.

在问题 1 中，从分别写有数字 1，2，3，4，5 的 5 个纸团中随机抽取 1 个，这个纸团里的数字有 5 种可能，即

$$1，2，3，4，5.$$

因为纸团看上去完全一样，又是随机抽取，所以每个数字被抽到的可能性大小相等. 我们用 $\frac{1}{5}$ 表示每一个数字被抽到的可能性大小.

在问题 2 中，掷一枚骰子，向上一面的点数有 6 种可能，即

$$1，2，3，4，5，6.$$

因为骰子形状规则、质地均匀，又是随机掷出，所以每种点

数出现的可能性大小相等. 我们用 $\frac{1}{6}$ 表示每一种点数出现的可能性大小.

数值 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{6}$ 刻画了试验中相应随机事件发生的可能性大小. 一般地，对于一个随机事件 A，我们把刻画其发生可能性大小的数值，称为随机事件 A 发生的**概率**（probability），记为 $P(A)$.

由问题 1 和问题 2，可以发现以上试验有两个共同特点：

(1) 每一次试验中，可能出现的结果只有有限个；

(2) 每一次试验中，各种结果出现的可能性相等.

对于具有上述特点的试验，我们用事件所包含的各种可能的结果个数在全部可能的结果总数中所占的比，表示事件发生的概率. 例如，在上面的抽纸团试验中，“抽到 1”这个事件包含 1 种可能的结果，在全部 5 种可能的结果中所占的比为 $\frac{1}{5}$. 于是这个事件的概率

$$P(\text{抽到 }1)=\frac{1}{5}.$$

“抽到偶数”这个事件包含抽到 2，4 这两种可能的结果，在全部 5 种可能的结果中所占的比为 $\frac{2}{5}$. 于是这个事件的概率

$$P(\text{抽到偶数})=\frac{2}{5}.$$

你能求出“抽到奇数”这个事件的概率吗？

归纳

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

在 $P(A)=\frac{m}{n}$ 中，由 m 和 n 的含义，可知 $0\leqslant m\leqslant n$，进而有 $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$. 因此，

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

特别地，当 A 为必然事件时，$P(A)=1$；当 A 为不可能事件时，$P(A)=0$.

事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1；反之，事件发生的可能性越小，它的概率越接近 0（图 30.1-1）.

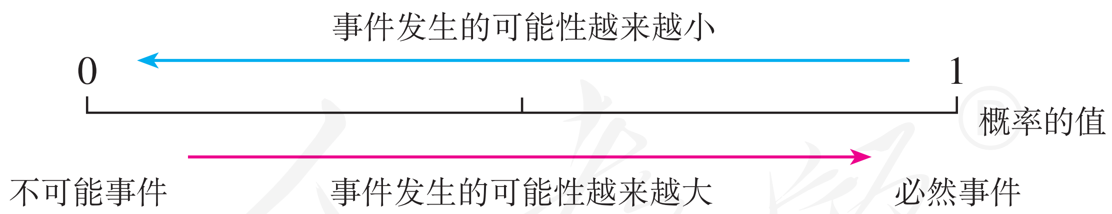


图 30.1-1

例 掷一枚质地均匀的骰子，观察向上一面的点数，求下列事件的概率：

（1）点数为 2；

（2）点数为奇数；

（3）点数大于 2 且小于 5.

解： 掷一枚质地均匀的骰子时，向上一面的点数可能为 1，2，3，4，5，6，共 6 种. 这些点数出现的可能性相等.

（1）点数为 2 有 1 种可能，因此

$$P(\text{点数为 }2)=\frac{1}{6}.$$

（2）点数为奇数有 3 种可能，即点数为 1，3，5，因此

$$P(\text{点数为奇数})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

（3）点数大于 2 且小于 5 有 2 种可能，即点数为 3，4，因此

$$P(\text{点数大于 2 且小于 5})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

巩固运用30.3

1. 足球比赛前，由裁判员抛掷一枚硬币. 若正面向上，则由甲队选择上半场进攻方向；若反面向上，则由乙队选择上半场进攻方向. 这种确定进攻方向的选择权的做法对参赛的甲、乙两队公平吗？为什么？
2. 10 件外观相同的产品中有 1 件不合格，现从中随机抽取 1 件进行检测，抽到不合格产品的概率为多少？
3. 不透明袋子中装有 5 个红球、3 个绿球，这些球除了颜色外无其他差别. 从袋子中随机摸出 1 个球，“摸出红球”和“摸出绿球”的可能性相等吗？它们的概率分别为多少？

4. 把一副扑克牌中的 13 张黑桃牌（分别对应1～13这 13 个数）洗匀后正面向下放在桌子上，从中随机抽取 1 张. 求下列事件的概率：

（1）抽出的牌是黑桃 6；

（2）抽出的牌是黑桃 10；

（3）抽出的牌上的数大于 10；

（4）抽出的牌上的数小于 5；

（5）抽出的牌的花色是黑桃.

5. 不透明袋子中有 2 个红球、3 个绿球和 4 个蓝球，这些球除颜色外无其他差别. 从袋子中随机取出 1 个球.

（1）能够事先确定取出的球是哪种颜色吗？

（2）取出每种颜色的球的概率会相等吗？

（3）取出哪种颜色的球的概率最大？

（4）如何改变各色球的数目，使取出每种颜色的球的概率都相等（提出一种方法即可）？

30.2 用列举法求概率

在一次试验中，如果可能出现的结果只有有限个，且各种结果出现的可能性大小相等，那么我们可以通过列举试验结果的方法，求出随机事件发生的概率.

例 1 如图 30.2-1，一个可以自由转动的质地均匀的转盘，被分成 7 个大小相同的扇形，每一扇形都涂上颜色，其中红色的有 3 个，绿色和黄色的各有 2 个，且指针的位置固定. 转动转盘，当转盘停止时，指针会指向某个扇形（指针指向两个扇形的交线时，当作指向右边的扇形）. 求下列事件的概率：

（1）指针指向红色；

（2）指针指向红色或黄色；

（3）指针不指向红色.

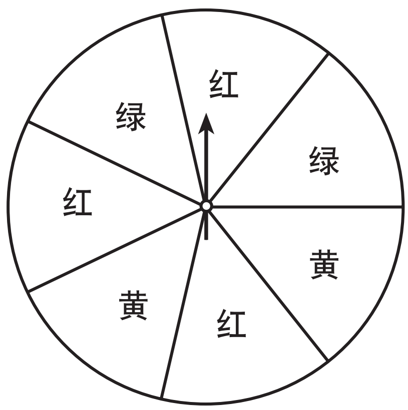


图 30.2-1

解： 因为这 7 个扇形大小相同，所以当转盘停止时，指针指向任何一个扇形的可能性都相等，即试验有 7 种等可能的结果. 可按颜色把 7 个扇形分别记为：红$_1$、红$_2$、红$_3$，绿$_1$、绿$_2$，黄$_1$、黄$_2$.

（1）指针指向红色（记为事件 A）的结果有 3 种，即指针指向红$_1$、红$_2$、红$_3$，因此

$$P(A)=\frac{3}{7}.$$

（2）指针指向红色或黄色（记为事件 B）的结果有 5 种，即指针指向红$_1$、红$_2$、红$_3$、黄$_1$、黄$_2$，因此

$$P(B)=\frac{5}{7}.$$

（3）指针不指向红色（记为事件 C），即指针指向绿$_1$、绿$_2$、黄$_1$ 或黄$_2$，共有 4 种结果，因此

$$P(C)=\frac{4}{7}.$$

把例 1 中的（1）(3）两问及答案联系起来，你有什么发现？

例 2　同时抛掷两枚质地均匀的硬币，求下列事件的概率：

（1）两枚硬币全部正面向上；

（2）两枚硬币全部反面向上；

（3）一枚硬币正面向上、一枚硬币反面向上.

解： 列举抛掷两枚硬币所能产生的向上一面的全部结果，它们是：

正正，正反，反正，反反.

所有可能的结果共有 4 种，并且这 4 种结果出现的可能性相等.

（1）所有可能的结果中，满足两枚硬币全部正面向上（记为事件 A）的结果只有 1 种，即“正正”，所以

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

（2）两枚硬币全部反面向上（记为事件 B）的结果也只有 1 种，即“反反”，所以

$$P(B)=\frac{1}{4}.$$

（3）一枚硬币正面向上、一枚硬币反面向上（记为事件 C）的结果共有 2 种，即“正反”“反正”，所以

$$P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

在例 2 中，如果是“先后两次抛掷一枚质地均匀的硬币”，试验的全部结果数和“同时抛掷两枚质地均匀的硬币”一样吗？

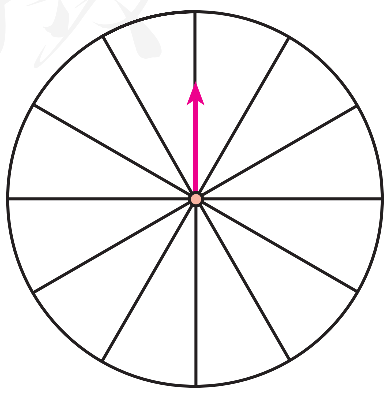
巩固运用30.4

1. 有一个质地均匀的正十二面体，十二个面上分别写有 1～12 这 12 个整数. 投掷这个正十二面体一次，求下列事件的概率：

   （1）向上一面的数字是 2 或 3；

   （2）向上一面的数字是 2 的倍数或 3 的倍数.

2. 如图，一个可以自由转动的质地均匀的转盘，被分成 12 个相同的扇形，指针的位置固定. 如果在转盘的适当地方涂上红、蓝两种颜色，使得转动的转盘自由停止时，指针指向红、蓝两



（第 2 题）

色的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，你认为应该怎样涂色？

3. 不透明袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外无其他差别. 随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再随机摸出一个. 求下列事件的概率：

   (1) 第一次摸到红球，第二次摸到绿球；

   (2) 两次都摸到相同颜色的小球；

   (3) 两次摸到的球中有一个绿球、一个红球.

4. 只有一张电影票，小明和小刚想通过抽取扑克牌的方式来决定谁去看电影. 现有一副扑克牌，请你设计对小明和小刚都公平的抽签方案，你能设计出几种？

例 3 同时掷两枚质地均匀的骰子，计算下列事件的概率：

(1) 两枚骰子的点数相同；

(2) 两枚骰子点数的和是 9；

(3) 至少有一枚骰子的点数为 2.

分析： 当一次试验是掷两枚骰子时，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用列表法.

解： 两枚骰子分别记为第 1 枚和第 2 枚，可以用表 30-1 列举出所有可能出现的结果.

表 30-1

第 2 枚	第 1 枚					
	1	2	3	4	5	6
1	(1，1)	(2，1)	(3，1)	(4，1)	(5，1)	(6，1)
2	(1，2)	(2，2)	(3，2)	(4，2)	(5，2)	(6，2)
3	(1，3)	(2，3)	(3，3)	(4，3)	(5，3)	(6，3)
4	(1，4)	(2，4)	(3，4)	(4，4)	(5，4)	(6，4)
5	(1，5)	(2，5)	(3，5)	(4，5)	(5，5)	(6，5)
6	(1，6)	(2，6)	(3，6)	(4，6)	(5，6)	(6，6)

由表 30-1 可以看出，同时掷两枚骰子，可能出现的结果有 36 种，并且它们出现的可能性相等.

（1）两枚骰子的点数相同（记为事件 A）的结果有 6 种，即（1，1），（2，2），（3，3），（4，4），（5，5），（6，6），所以

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

（2）两枚骰子的点数和是 9（记为事件 B）的结果有 4 种，即（3，6），（4，5），（5，4），（6，3），所以

$$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

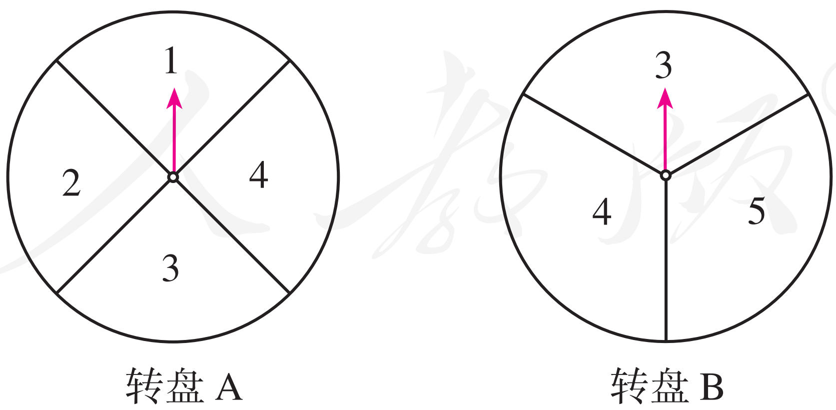
（3）至少有一枚骰子的点数为 2（记为事件 C）的结果有 11 种，即（2，1），（2，2），（2，3），（2，4），（2，5），（2，6），（1，2），（3，2），（4，2），（5，2），（6，2），所以

$$P(C)=\frac{11}{36}.$$

结合表 30-1，体会列表法对列举所有可能的结果的作用.

巩固运用30.5

1. 同时掷两枚质地均匀的骰子，求点数的和小于 5 的概率.
2. 一个不透明的口袋中有 4 个完全相同的小球，把它们分别标号为 1，2，3，4. 随机摸取 1 个小球然后放回，再随机摸出 1 个小球. 求下列事件的概率：
   (1) 两次取出的小球的标号相同；
   (2) 两次取出的小球标号的和等于 4.
3. 如图，两个可以自由转动的质地均匀的转盘 A，B，分别被分成 4 个和 3 个相同的扇形，每一个扇形都标上数字，且指针的位置固定.



（第 3 题）

甲、乙两人玩转盘游戏，游戏规则如下：同时转动两个转盘，当转盘停止后，若指针所指两个扇形的数

字之和为 3 的倍数，则甲胜；若指针所指两个扇形的数字之和为 4 的倍数，则乙胜；若指针落在分割线上，或者两个数字之和不为 3，4 的倍数，则需要重新转动转盘. 请问这个游戏规则对甲、乙双方公平吗，试说明理由.

例 4 甲口袋中装有 2 个相同的小球，它们分别写有字母 A 和 B；乙口袋中装有 3 个相同的小球，它们分别写有字母 C，D 和 E；丙口袋中装有 2 个相同的小球，它们分别写有字母 H 和 I. 其中，A，E，I 是元音字母；B，C，D，H 是辅音字母. 从三个口袋中各随机取出 1 个小球.

（1）取出的 3 个小球上恰好有 1 个、2 个和 3 个元音字母的概率分别是多少？

（2）取出的 3 个小球上全是辅音字母的概率是多少？

分析： 当一次试验是从三个口袋中取球时，列表法就不方便了，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用画树状图法.

解： 根据题意，可以画出如图 30.2-2 所示的树状图.

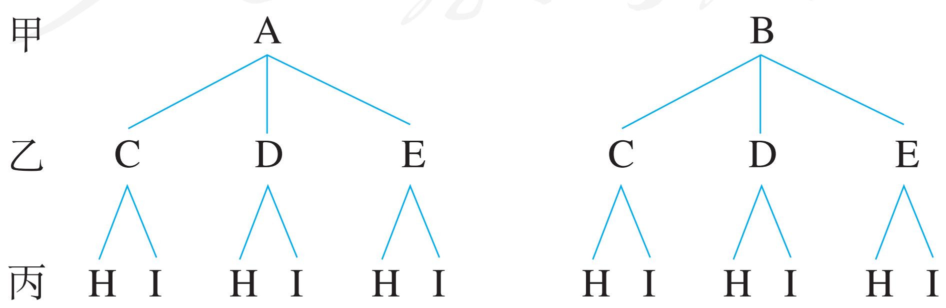


图 30.2-2

由树状图可以看出，所有可能出现的结果共有 12 种，即 ACH，ACI，ADH，ADI，AEH，AEI，BCH，BCI，BDH，BDI，BEH，BEI，这些结果出现的可能性相等.

（1）只有 1 个元音字母的结果有 5 种，即 ACH，ADH，BCI，BDI，BEH，因此

$$P(1\text{ 个元音})=\frac{5}{12}.$$

有 2 个元音字母的结果有 4 种，即 ACI，ADI，AEH，BEI，因此

$$P(2\text{ 个元音})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

全部为元音字母的结果只有 1 种，即 AEI，因此

$$P(3\text{ 个元音})=\frac{1}{12}.$$

（2）全是辅音字母的结果共有 2 种，即 BCH，BDH，因此

$$P(3\text{ 个辅音})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

用树状图列举的结果看起来一目了然，当事件要经过多个步骤（三步或三步以上）完成时，用画树状图法求事件的概率很有效.

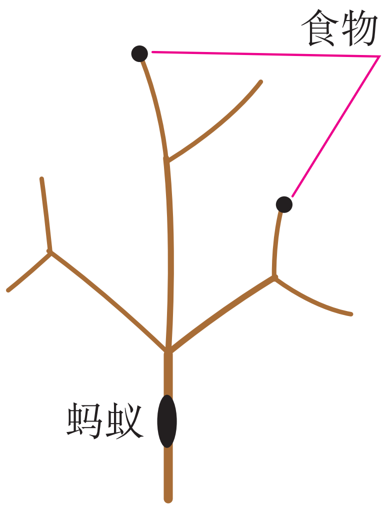
巩固运用30.6

1. 现有两个盒子，第一个盒子中有 2 个白球、1 个黄球，第二个盒子中有 1 个白球、1 个黄球，这些球除颜色外无其他差别. 分别从每个盒子中随机取出 1 个球，求下列事件的概率：

   (1) 取出的 2 个球都是黄球；

   (2) 取出的 2 个球有 1 个白球、1 个黄球.

2. 一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物. 假定蚂蚁在每个岔路口都随机选择一条路径，它获得食物的概率是多少？



(第 2 题)

3. 假定鸟卵孵化后，雏鸟为雌鸟与雄鸟的概率相同. 如果 3 枚鸟卵全部成功孵化，那么 3 只雏鸟中恰有 2 只雄鸟的概率是多少？

4. 经过某十字路口的汽车，可能直行，也可能向左转或向右转. 如果这 3 种可能性大小相同，求三辆汽车经过这个十字路口时，下列事件的概率：

   (1) 三辆车全部继续直行；

   (2) 两辆车向右转，一辆车向左转；

   (3) 至少有两辆车向左转.

30.3 用频率估计概率

用列举法可以求一些事件的概率. 实际上，我们还可以利用多次重复试验，通过统计试验结果估计概率.

我们从抛掷硬币这个简单问题说起. 抛掷一枚质地均匀的硬币时，“正面向上”和“反面向上”发生的可能性相等，这两个随机事件发生的概率都是 0.5. 这是否意味着抛掷一枚硬币 100 次时，就会有 50 次“正面向上”和 50 次“反面向上”呢？不妨用试验进行检验.

试验 把全班同学分成 10 组，每组同学抛掷一枚硬币 50 次，整理同学们获得的试验数据，并完成表 30-2.

第 1 组的数据填在第 1 列，第 1，2 组的数据之和填在第 2 列……10 个组的数据之和填在第 10 列. 如果在抛掷硬币 n 次时，出现 m 次“正面向上”，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为“正面向上”的频率.

表 30-2

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
“正面向上”的次数 m										
“正面向上”的频率 $\frac{m}{n}$										

请同学们根据试验所得数据想一想：“正面向上”的频

率有什么规律?

历史上，有些人曾做过成千上万次抛掷硬币的试验，其中一些试验结果见表 30-3.

表 30-3

试验者	抛掷次数 n	“正面向上”的次数 m	“正面向上”的频率 $\frac{m}{n}$
棣莫弗	2 048	1 061	0.518 1
布丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

思考

随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率的变化趋势是什么?

可以发现，在重复抛掷一枚硬币时，“正面向上”的频率在 0.5 附近摆动. 一般地，随着抛掷次数的增加，频率呈现出一定的稳定性：在 0.5 附近摆动的幅度会越来越小. 这时，我们称“正面向上”的频率稳定于 0.5. 它与前面用列举法得出的“正面向上”的概率是同一个数值.

在抛掷一枚硬币时，结果不是“正面向上”，就是“反面向上”. 因此，从上面的试验中也能得到相应的“反面向上”的频率. 当“正面向上”的频率稳定于 0.5 时，“反面

向上”的频率也稳定于 0.5. 它也与前面用列举法得出的“反面向上”的概率是同一个数值.

实际上，从长期实践中，人们观察到，对一般的随机事件，在做大量重复试验时，随着试验次数的增加，一个事件出现的频率，总在一个固定数的附近摆动，显示出一定的稳定性. 因此，我们可以通过大量的重复试验，用一个随机事件发生的频率去估计它的概率.

用频率估计概率，虽然不像列举法能确切地计算出随机事件的概率，但由于不受“各种结果出现的可能性相等”的条件限制，使得可求概率的随机事件的范围扩大. 例如，抛掷一枚图钉或一枚质地不均匀的骰子，不能用列举法求“针尖朝上”或“出现 6 点”的概率，但可以通过大量重复试验估计出它们的概率.

从抛掷硬币的试验还可以发现，“正面向上”的概率是 0.5，连续掷 2 次，结果不一定是“正面向上”和“反面向上”各 1 次；连续抛掷 100 次，结果也不一定是“正面向上”和“反面向上”各 50 次. 也就是说，概率是 0.5 并不能保证掷 $2n$ 次硬币一定恰好有 n 次“正面向上”，只是当 n 越来越大时，正面向上的频率会越来越稳定于 0.5. 可见，概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并非在每一次试验中都发生.

巩固运用30.7

1. 在做重复试验时，随着试验次数的增多，事件发生的频率一般会有什么变化趋势？

2. 下表记录了一名球员在罚球线上投篮的结果.

投篮次数 n	50	100	150	200	250	300	500
投中次数 m	28	60	78	104	123	152	251
投中频率 $\frac{m}{n}$							

(1) 计算投中频率，并填入表格中（结果保留小数点后两位）；

(2) 这名球员投篮一次，投中的概率约是多少（结果保留小数点后一位）？

3. 从一定高度落下的图钉，落地后可能图钉尖着地，也可能图钉尖不着地. 估计哪种事件的概率更大. 与同学们合作，通过做试验验证你事先的估计是否正确.

我们再来看一些问题.

问题 1 某林业部门要考察某种幼树在一定条件下的移植成活率，应采用什么具体做法？

幼树移植成活率是实际问题中的一种概率. 这个问题中幼树移植“成活”与“不成活”两种结果可能性是否相等未知，所以成活率要由频率去估计.

在同样条件下，对这种幼树进行大量移植，并统计成活情况，计算成活的频率. 随着移植数 n 越来越大，频率 $\frac{m}{n}$ 会越来越稳定，于是就可以把成活的频率作为成活率的估

计值.

表 30-4 是一张模拟的统计表，请补全表中空缺，并完成表下的填空.

表 30-4

移植总数 n	成活数 m	成活的频率 $\frac{m}{n}$（结果保留小数点后三位）
10	8	0.800
50	47	
270	235	0.870
400	369	
750	662	
1 500	1 335	0.890
3 500	3 203	0.915
7 000	6 335	
9 000	8 073	
14 000	12 628	0.902

从表 30-4 可以发现，随着移植数的增加，幼树移植成活的频率越来越稳定. 当移植总数为 14 000 时，成活的频率为 0.902，于是可以估计幼树移植成活的概率为______.

问题 2 某水果公司以 2 元/kg 的成本价新进 10 000 kg 柑橘. 如果公司希望这些柑橘能够获得利润 5 000 元，那么在出售柑橘（去掉损坏的柑橘）时，每千克大约定价为多少

元比较合适？

销售人员首先从所有的柑橘中随机抽取若干柑橘，进行“柑橘损坏率”统计，并把获得的数据记录在表 30-5 中．请你帮忙完成此表．

表 30-5

柑橘总质量 n/kg	损坏柑橘质量 m/kg	柑橘损坏的频率 $\frac{m}{n}$（结果保留小数点后三位）
50	5.50	0.110
100	10.50	0.105
150	15.15	
200	19.42	
250	24.25	
300	30.93	
350	35.32	
400	39.24	
450	44.57	
500	51.54	

填完表后，从表 30-5 可以看出，随着柑橘质量的增加，柑橘损坏的频率越来越稳定．柑橘总质量为 500 kg 时的损坏频率为 0.103，于是可以估计柑橘损坏的概率为 0.1（结果保留小数点后一位）．由此可知，柑橘完好的概率为 0.9．

根据估计的概率可以知道，在 10 000 kg 柑橘中完好柑橘的质量为

$$10\ 000\times 0.9=9\ 000(\text{kg}).$$

完好柑橘的实际成本为

$$\frac{2\times 10\ 000}{9\ 000}=\frac{2}{0.9}\approx 2.22(\text{元}/\text{kg}).$$

设每千克柑橘的售价为 x 元，则

$$(x-2.22)\times 9\ 000=5\ 000.$$

解得

$$x\approx 2.8(\text{元}).$$

因此，出售柑橘时，每千克定价大约 2.8 元可获利润 5 000元.

巩固运用30.8

1. 某射击运动员在同一条件下的射击成绩记录如下：

射击次数	20	40	100	200	400	1 000
“射中 9 环以上”的次数	15	33	78	158	321	801
“射中 9 环以上”的频率						

(1) 计算表中相应的“射中 9 环以上”的频率（结果保留小数点后两位）.

(2) 这些频率具有怎样的稳定性？

(3) 根据频率的稳定性，估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率（结果保留小数点后一位）.

2. 某农科所在相同条件下做某作物种子发芽率的试验，结果如下表所示：

种子个数	发芽种子个数	发芽种子频率 （结果保留小数点后三位）
100	94	
200	187	
300	282	
400	338	
500	435	
600	530	
700	624	
800	718	
900	814	
1 000	901	

一般地，1 000 kg 种子中大约有多少是不能发芽的？

阅读与思考

彩票中的概率

同学们，你们都知道彩票吧？电视里经常会播出彩票摇奖的画面，中奖的号码通过摇奖设备产生．当所买的彩票号码和摇奖产生的号码相同时，就代表中奖了．为了能够中奖，彩民通过各种方法去预测中奖号码．有的专门研究以往各期的中奖号码，试图寻找某种“规律”；有的专门选择所谓的“幸运号”；等等．彩票的中奖号码是不是真有规律可循，只是我们没有找到方法呢？或者说有没有办法可以使我们买彩票包赚不赔呢？

我们以体育彩票中最简单的“排列 3”直选投注为例进行分析，其他类型的彩票可以作类似分析．“排列 3”直选投注是指从 000～999 的数字中选取 1 个三位数作为 1 注投注号码进行的投注（每注金额为 2 元），投注号码与开奖号码数字相同且顺序一致即中奖（奖金为 1 040 元）．例如，开奖号码为 213，则投注号码为 213 的即中奖．

产生“排列 3”的中奖号码时，三个独立的摇奖盒子依次对应三位数中的一位，每一位都是从 0～9 这 10 个数字中随机产生，任何一个数字被摇出的可能性都相等．可见在 000～999 共1 000个号码中，任何一个号码产生的可能性都是相等的，它们的概率都为 $\frac{1}{1\ 000}$．因此，在摇奖前我们无

法预测中奖号码.如果有人宣称他能预测中奖号码，那他肯定是在吹牛.这种由随机方式来决定中奖号码的办法保证了彩票的公平性.

也许有人会问，多买几个不同的号码是否会提高中奖的概率呢？其实这个概率是可以计算的.如果买3个不同的号码，由于所有不同的号码有1 000种，且可能性都相等，那么中奖的概率就是$\frac{3}{1\,000}$.如果买n（$n\leqslant 1\,000$）个不同的号码，那么中奖的概率就是$\frac{n}{1\,000}$.当把所有的1 000个不同号码都买了，那么中奖的概率就是1，即肯定中奖.但这么做却是不划算的，因为买1 000个号码各一注需要花费$1\,000\times 2=2\,000$（元），获得的奖金只有1 040元.在数学上可以计算，不管买几个号码，从平均来看购买彩票的花费要多于获得的奖金.可见把买彩票当成投资，花大量资金指望借助买彩票发财的做法是错误的.

数学活动

抽签公平吗

准备 1 个不透明的盒子和 3 个看上去完全一样的纸团，每个纸团里面分别写着数字 1，2，3. 按以下步骤进行试验：

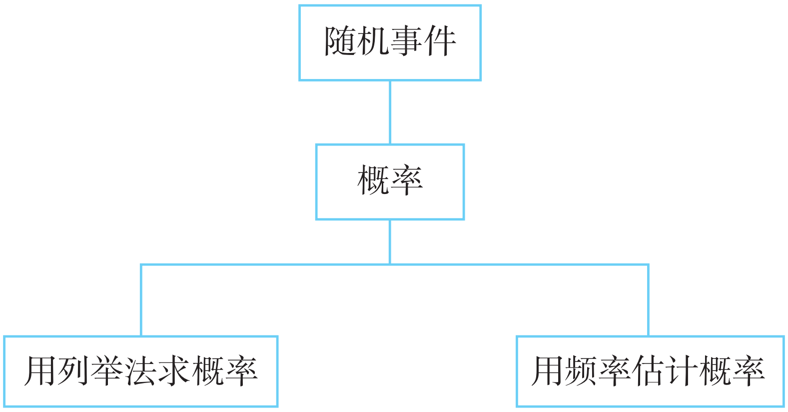
（1）把 3 个纸团放入盒中，并充分搅拌；

（2）3 名同学依次从盒中摸取 1 个纸团（摸出后不放回），并记录 3 名同学摸出的纸团里面的数字.

重复以上试验 50 次，统计每名同学摸到标有数字 1 的纸团的频率. 用每名同学摸到标有数字 1 的纸团的频率估计相应的概率，它们跟抽取的顺序有关吗？增加试验的次数再试试.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 随机事件在一次试验中是否发生具有偶然性，请举例说明什么是随机事件.

2. 概率从数值上刻画了随机事件发生的可能性大小，揭示了随机现象中存在的规律. 具备什么条件的试验，我们可以通过列举法得到随机事件的概率？用列举法求概率有哪些具体的方法？它们各有什么特点？

3. 在大量重复试验中，随着试验次数的增加，随机事件发生的频率会越来越稳定于概率. 据此，我们可以用频率来估计概率. 这种求概率的方法不受试验的各种结果出现可能性相等的限制. 请简述用频率估计概率的一般做法.

4. 结合本章内容，说说你对概率的理解以及概率在生活中的作用.

复习题 30

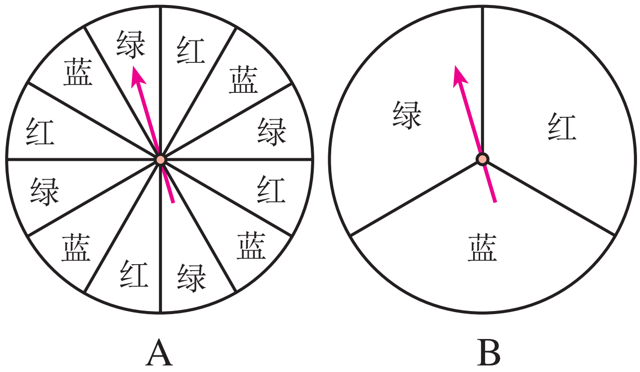
复习巩固

1. 在单词 mathematics（数学）的 11 个字母中，随机选择一个字母，求下列事件的概率：

(1) 字母为“t”；　　(2) 字母为“i”；

(3) 字母为元音字母；(4) 字母为辅音字母.

2. 如图，两个可以自由转动的质地均匀的转盘 A 和 B，它们的指针的位置都是固定的. 转盘 A 被平均分为 12 个扇形，其中红色、绿色、蓝色的扇形各 4 个；转盘 B 被平均分为 3 个扇形，其中红色、绿色和蓝色的扇形各 1 个. 转动转盘 A 和转盘 B，当两转盘停止时，哪个转盘的指针指向红色的概率大？为什么？



（第 2 题）

3. 从一副扑克牌中随机抽取一张.

(1) 它是王牌的概率是多少？

(2) 它是 Q 的概率是多少？

(3) 它是梅花的概率是多少？

4. 一个质地均匀的小正方体，六个面分别标有数字“1”“1”“2”“4”“5”“5”. 掷小正方体后，观察朝上一面的数字.

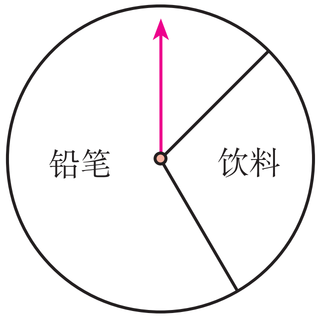
(1) 出现“5”的概率是多少?

(2) 出现“6”的概率是多少?

(3) 出现奇数的概率是多少?

5. 一天晚上,小伟在帮助妈妈清洗两个只有颜色不同的有盖茶杯时,突然停电了,小伟只好把杯盖和茶杯随机地搭配在一起. 求颜色搭配正确和颜色搭配错误的概率各是多少.

6. 某商场有一个可以自由转动的转盘(如图),指针的位置是固定的. 规定:顾客购物 100 元以上可以获得一次转动转盘的机会,当转盘停止时,指针落在哪一个区域就获得相应的奖品. 下表是活动进行中的一组统计数据:



(第 6 题)

转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
落在“铅笔”区域的次数 m	68	111	136	345	546	701
落在“铅笔”区域的频率 $\frac{m}{n}$						

(1) 计算并完成表格;

(2) 转动该转盘一次,获得铅笔的概率约是多少?

综合运用

7. 有 6 张看上去无差别的卡片，上面分别写着 1，2，3，4，5，6.

(1) 随机抽取 1 张后，放回并混在一起，再随机抽取 1 张，求第二次取出的数字能够整除第一次取出的数字的概率；

(2) 随机抽取 1 张后，不放回，再随机抽取 1 张，求第二次取出的数字能够整除第一次取出的数字的概率.

8. 一个批发商从某服装制造公司购进了 50 包型号为 L 的衬衫. 由于包装工人疏忽，在包裹中混进了型号为 M 的衬衫. 经统计，得到下面表格：

M 号衬衫/件	0	1	4	5	7	9	10	11
包数	7	3	10	15	5	4	3	3

一位零售商从 50 包中随机选取了 1 包，求下列事件的概率：

(1) 包中没有混入 M 号衬衫；

(2) 包中混入 M 号衬衫的件数不超过 7；

(3) 包中混入 M 号衬衫的件数超过 10.

9. 同学们，你们都知道“石头、剪子、布”的游戏吧！如果两个人做这种游戏，随机出手一次，两个人获胜的概率各是多少？

10. 盒中有 x 枚黑棋和 y 枚白棋，这些棋除颜色外无其他差别.

(1) 从盒中随机取出 1 枚棋子，如果它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$，写出表示 x 和 y 关系的表达式；

(2) 往盒中再放进 10 枚黑棋，取得黑棋的概率变为 $\frac{1}{2}$，求 x 和 y 的值.

拓广探索

11. 动物学家通过大量的调查估计：某种动物活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.5，活到 30 岁的概率为 0.3.

(1) 现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率为多少？

(2) 现年 25 岁的这种动物活到 30 岁的概率为多少？

部分中英文词汇索引