S H U X U E

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5539-7218-3
9 787553 972183
定价：19.22 元

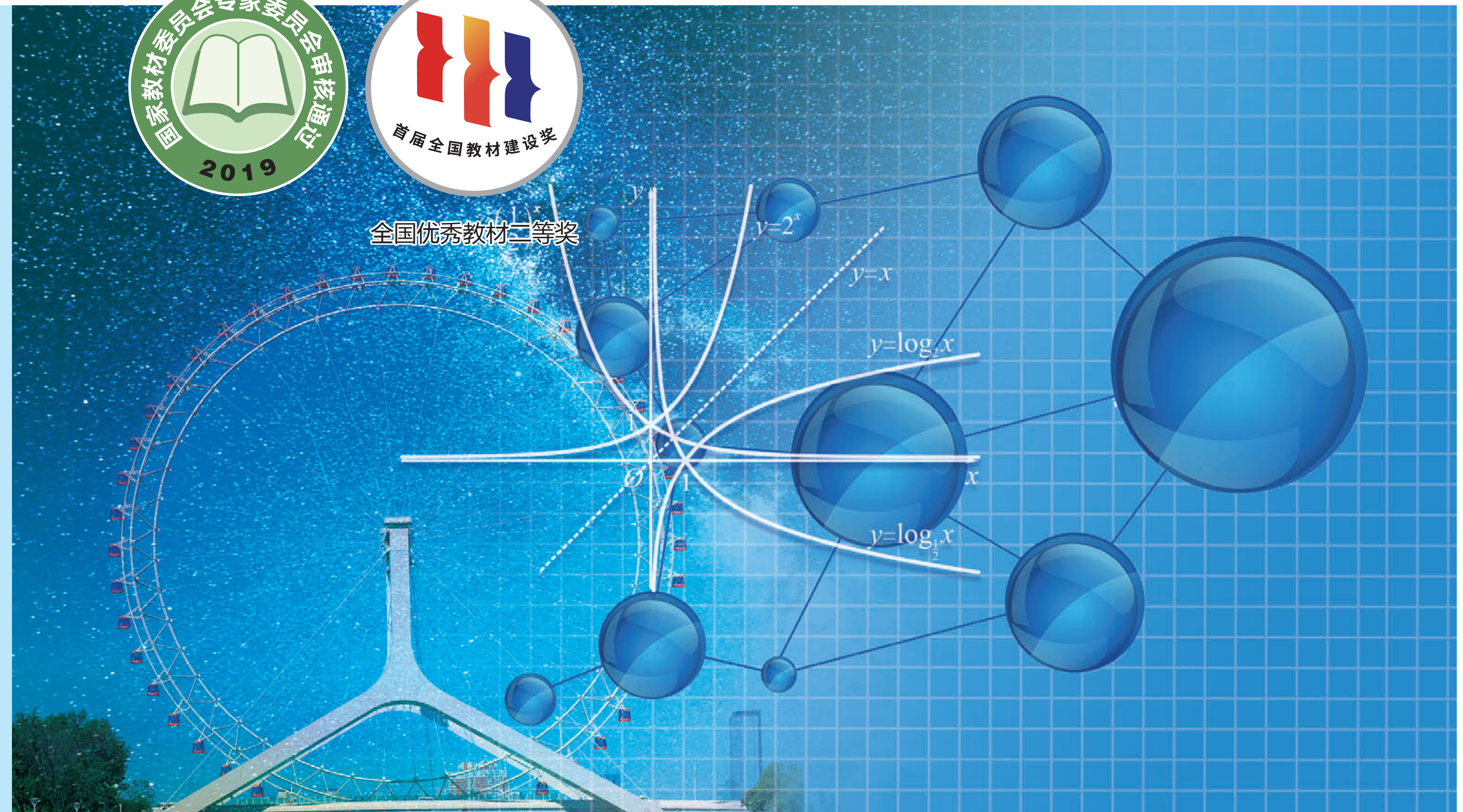
普通高中教科书

数学

必修

第一册

湖南教育出版社



普通高中教科书

数学

必修 第一册 SHUXUE

湖南教育出版社

普通高中教科书

数学

必修 第一册 SHUXUE

湖南教育出版社

主　　编　张景中　黄步高
执行主编　李尚志
副 主 编　何书元　朱华伟

本册主要编者　张景中　郑志明　朱华伟　李立斌
何书元　彭翕成　胡　旺　马佑军

前　言

寒来暑往，明镜白发；江水东逝，沧海桑田．我们生活的这个世界，包括我们自身，都在不断地运动或变化．

古希腊哲学家赫拉克利特说：人不能两次踏入同一条河流．他用生动的比喻说明一切都在不断地变化．但他没有把概念说清楚：什么叫同一条河流？昨天的黄河和今天的黄河是一条河还是两条河？

当时有的哲学家则认为，变化和运动只是人的幻觉．例如，芝诺提出了“飞矢不动”的著名怪论．他说，箭在每一瞬间都要占据确定的位置，所以每一瞬间都是静止的．既然每一瞬间都是静止的，怎么会动呢？

由上面两例可见，古人注意到了物体的状态和位置总是在不断变化，但他们尚未找到合理地刻画运动和变化的方法，难以理解事物的状态和位置怎么可以既是确定的又是变化的——他们或者否定运动的可能性，或者否认变化中的事物是同一事物．

直到 17 世纪，数学中出现了变量与函数的概念，人们才逐渐掌握了精确地描述运动与变化的工具．

在初中课程里，我们对函数的概念和表示方法有了初步的了解，并知道了一些应用的实际例子．

温故知新，举一反三．我们将通过更丰富的实例，进一步体会函数是描述变量间的确定性依赖关系的重要数学模型，同时学习用集合与对应的语言来刻画函数，用更准确、更简洁的语言来表述数学的概念、方法和把实际问题提炼为数学模型的过程．

事物的确定性变化过程有两个具有代表性的重要类型：一类是单调地增减，一类是反复地循环．前一类的基本数学模型，有幂函数、指数函数和对数函数等；后一类的基本数学模型，是以三角函数为代表的周期函数．这几类函数，能够描述解释大量的自然现象和社会现象，能够帮我们解决许多重要的实际和理论问题．很快，我们就要和这些新朋友认识了．

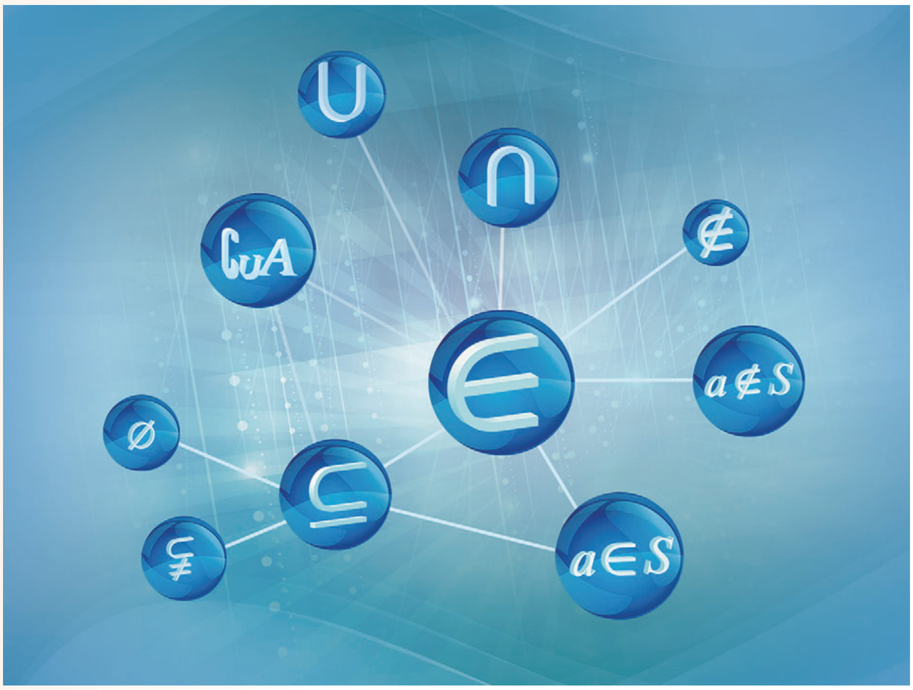
为了描述分析非确定性的变化过程，统计学、概率论等数学分支应运而生．学一些这方面的初步知识，有助于我们开阔视野，进一步认识大千世界．

为给同学们提供增长见识、开阔视野的空间，编者对有些教学内容做了一定的扩展，如“多知道一点”“数学文化”“数学实验”等，希望同学们喜欢．

学习数学的新阶段开始了．不久你将看到，学过的代数、几何，包括各种运算，还有方程，将连成一片，奏出以函数为主旋律的乐章．

目录 MULU

1 第1章 集合与逻辑



数学是科学的语言．科学的语言要严谨简洁，还要全球通用，无须转译．集合与逻辑，为严谨简洁而且通用的语言系统提供了基础．

1.1 集　合

《三国志》记载："布有良马曰赤兔."据《三国演义》描述，这匹宝马后来跟随关羽并大展神威.

思考：下面三句话里的"是"各自的含义是什么？

A. 关羽千里走单骑的坐骑是赤兔马.

B. 赤兔马是红马.

C. 红马是马.

第一个"是"的含义相当于"="，另外两个呢？

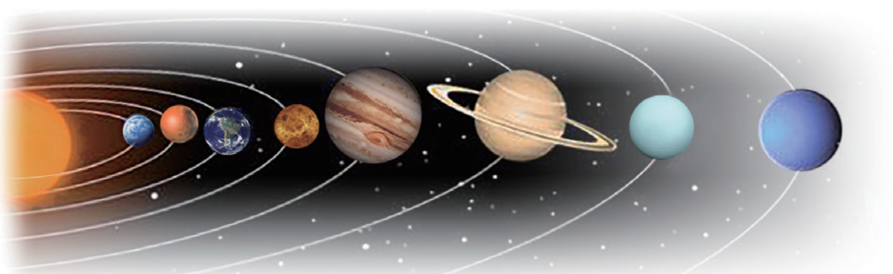
1.1.1 集　合

一　集合与元素

讨论问题或思考问题，常常需要把一些对象放在一起考虑，并且给这些对象一个总的名称.

在数学语言中，把一些对象放在一起考虑时，就说这些对象组成了一个**集合**或**集**，给这些对象的总的名称，就是这个集合的名字．这些对象中的每一个，都叫作这个集合的一个**元素**.

例如，单词 element 中出现的字母组成一个集合，e 是这个集合的一个元素；太阳系的八大行星组成一个集合，地球是这个集合的一个元素；所有大于 2 的素数组成一个集合，7 是这个集合的一个元素；等等.



集合论中最基本的关系是集合和它的元素之间的归属关系，表达归属关系的符号是$\in$，读作"**属于**".

若 S 是一个集合，a 是 S 的一个元素，记作 $a\in S$，读作“a 属于 S”.

反过来，若 a 不是 S 的元素，记作 $a\notin S$（或 $a\overline{\in}S$），读作“a 不属于 S”.

集合是数学中最基本的概念，具有以下基本属性：

（1）同一集合中的元素是互不相同的.

（2）集合中的元素是确定的．亦即给定一个集合，任何一个元素属于或不属于这个集合是确定的.

（3）集合中的元素没有顺序.

有了符号 $\in$，许多数学事实就可以用简单明确的符号来表达.

例 1 设 $L(A，B)$表示直线 AB 上全体点组成的集合，$P\in L(A，B)$的含义是什么？

解　$P\in L(A，B)$表示“P 是直线 AB 上的一个点”.

数学里最常用的集合是各种数的集合，简称数集．例如：

全体自然数组成的集合叫**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$.

全体整数组成的集合叫**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数组成的集合叫**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数组成的集合叫**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

通常用 $\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数组成的集合；类似的有 $\mathbf{R}_-$，$\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{N}_+$，$\mathbf{Q}_-$，….

元素个数有限的集合叫**有限集**（或有穷集），元素无限多的集合叫**无限集**（或无穷集）．没有元素的集合叫**空集**，记作 $\varnothing$；**空集也是有限集**.

例 2 下列集合中哪些是空集？哪些是无限集？

（1）一元二次方程 $x^2+1=0$ 的全体实根之集；

（2）所有素数之集；

（3）满足条件 $x+y=0$ 和 $xy\neq0$ 的所有实数组$(x，y)$之集；

（4）满足条件 $x^2+y^2=0$ 和 $xy\neq0$ 的所有实数组$(x，y)$之集.

解　(1)和(4)是空集，(2)和(3)是无限集.

练习

1. 使用“$\in$”“$\notin$”和数集符号来替代下列自然语言：

(1)“255 是正整数”即（　　　　　　　　）；

(2)“$\sqrt{2}$ 不是有理数”即（　　　　　　　　）；

(3)“3.141 6 是正有理数”即（　　　　　　　　）；

(4)“-1 是整数”即（　　　　　　　　）；

(5)“x 是负实数”即（　　　　　　　　）.

2. 下列集合中哪些是空集？哪些是有限集？哪些是无限集？

(1) 小于 10 000 的素数构成的集合；

(2) 一元二次方程 $x^2+x+1=0$ 的全体实根之集；

(3) 满足条件 $x+y=1$ 和 $xy>1$ 的所有实数组(x, y)之集；

(4) 满足条件 $x^2+y^2=1$ 和 $xy<0$ 的所有实数组(x, y)之集.

二　表示集合的方法

表示一个集合，就是把它有哪些元素交代清楚.

生活中常见的方法，是**把集合中的元素一一列举出来**. 饭馆里的菜单，计算机里的文件夹，各种委员会名单，都是这样做的. 这叫作**列举法**.

数学里用列举法表示集合，常用的格式是在一个大括号里写出每个元素的名字，相邻的名字用逗号分隔. 例如，小于 10 的正偶数组成的集合，用列举法可以表示为$\{2, 4, 6, 8\}$或$\{8, 2, 6, 4\}$等.

例 3　用列举法表示下列集合：

(1) 由方程 $x^2-1=0$ 的所有实数解构成的集合 S；

(2) 平方小于 200 的所有素数之集 P.

解　(1) $S=\{1, -1\}$；

(2) $P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

无限集一般不能用列举法表示. 有限集如果元素太多或叫不出名字来，例如某池塘里所有鱼的集合，也不便用列举法来表示. 这时可以**把集合中元素共有的，也只有该集合中元素才有的属性描述出来，以确定这个集合**. 这叫作**描述法**.

集会时介绍嘉宾常用列举法，致辞里说“女士们，先生们”用的就是描述法.

在数学里常用描述法来表示集合. 一般的格式是在一个大括号里写出集合中元素的共有属性. 例如，前面提到的集合$\{2, 4, 6, 8\}$，用描述法可以表示为$\{$小于 10 的正偶数$\}$. 又如本节“思考”中红马这一集合，可以表示为$\{$红马$\}$，而“赤兔

马是红马”可以表示为“赤兔马$\in$\{红马\}”，这里的“是”相当于“$\in$”.

有些集合用一句话描述起来不方便，通常在大括号里先写出集合元素的一般属性或形式，再画一条竖线，然后在竖线后面列出这些元素要满足的相关条件. 例如，任何一个偶数都可以表示为 $x=2k$，$k\in\mathbf{Z}$ 的形式，我们把所有偶数的集合表示为 $E=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

例 4 选择适当方法用符号表示下列用自然语言说明的集合.

(1) 平面 E 上以点 A 为圆心、半径为 5 的圆上所有点的集合 C（这里平面 E 指该平面上所有点组成的集合）；

(2) 由方程 $x^2+y^2=100$ 的所有整数解组 $(x,\ y)$ 构成的集合 S.

解 (1) 用描述法：$C=\{P\in E\mid |PA|=5\}$.

(2) 用列举法：$S=\{(0,\ 10),\ (0,\ -10),\ (10,\ 0),\ (-10,\ 0),\ (6,\ 8),\ (-6,\ 8),\ (6,\ -8),\ (-6,\ -8),\ (8,\ 6),\ (-8,\ 6),\ (8,\ -6),\ (-8,\ -6)\}$；

用描述法：$S=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=100,\ x\in\mathbf{Z},\ y\in\mathbf{Z}\}$.

数学里最常用的一类集合叫**区间**.

如图 1.1-1，设 a，b 是两个实数，$a<b$，所有大于 a 并且小于 b 的实数组成的集合叫作一个**开区间**，记作 $(a,\ b)$. 用符号表示就是 $(a,\ b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$. 若从上下文可看出 x 是实数，就可以简单地写作 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$. 类似地，所有满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 组成的集合叫作一个**闭区间**，记作 $[a,\ b]$. 举一反三，还有左开右闭区间 $(a,\ b]$ 和左闭右开区间 $[a,\ b)$. 实数 a，b 分别叫作上述区间的**左端点**和**右端点**.

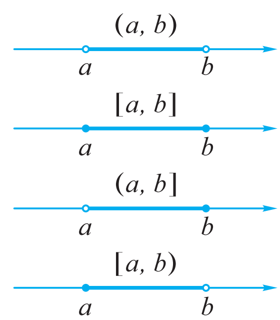


图 1.1-1

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,\ +\infty)$，符号 ∞ 读作“无穷大”或“无穷”，$-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作“负无穷大”（或“负无穷”）和“正无穷大”（或“正无穷”）. 有了符号 ∞，我们就可以把满足条件 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 组成的集合用区间的形式分别表示为 $[a,\ +\infty)$，$(a,\ +\infty)$，$(-\infty,\ b]$，$(-\infty,\ b)$.

例 5 用区间表示下列集合：

(1) $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$；

(2) $\{x\mid -4<x<-2\}$；

(3) $\{t\mid t<a\}$；

(4) $\{u\mid 0<u\leqslant\pi\}$.

解 (1) $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}=[-2,\ 4]$；

(2) $\{x\mid -4<x<-2\}=(-4,\ -2)$；

(3) $\{t\mid t<a\}=(-\infty,\ a)$；

(4) $\{u\mid 0<u\leqslant\pi\}=(0,\ \pi]$.

练 习

1. 用列举法表示下列集合：

(1) {不超过 30 的素数}； (2) {五边形 $ABCDE$ 的对角线}；

(3) {60 的正约数}； (4) $\{(x, y) | x+2y=6, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$.

2. 用自然语言描述下列集合：

(1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$； (2) $\{x\in\mathbf{R} | 3x>2\}$；

(3) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

3. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x\in\mathbf{R} | 3-x>5\}$； (2) $\{x\in\mathbf{R} | x+3>1$ 且 $5-x>2\}$.

1.1.2 子集和补集

一 子集

观察下列各组集合，你能发现两个集合间的关系吗？

(1) $A=\{3, 5, 7\}$，$B=(2, 8]$；

(2) $A=$\{等边三角形\}，$B=$\{等腰三角形\}.

可以发现，(1)中的集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，(2)中的集合 A 与集合 B 也有这种关系.

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，就说 A 包含于 B，或者说 B 包含 A，记作

$$A\subseteq B \text{（或 } B\supseteq A\text{）},$$

读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

例如，$\{3, 5, 7\}\subseteq(2, 8]$，\{等边三角形\}$\subseteq$\{等腰三角形\}.

上述定义也就是说：若由 $x\in A$ 能推出 $x\in B$，就说$A\subseteq B$.

若 A 包含于 B，则称 A 是 B 的一个**子集**. 例如，素数集是 $\mathbf{N}$ 的子集.

按定义有 $A\subseteq A$. 也就是说，每个集合都是它自己的子集.

我们规定**空集包含于任一集合**，是任一集合的子集.

如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$，就说两个集合**相等**，记作

$$A=B.$$

如果 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$，就说 A 是 B 的**真子集**，记作

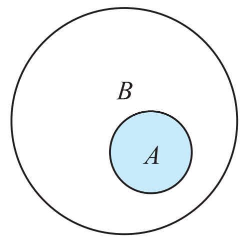
$$A\subsetneqq B,$$

读作“A 真包含于 B”. 例如，$(1, 6)\subsetneqq[1, 6]$.

回顾本节“思考”中的“红马是马”，可以表示为“\{红马\}$\subsetneqq$\{马\}”，这里的

"是"相当于"$\subsetneqq$".

如图 1.1－2，大圆和小圆分别表示两个集合；小圆画在大圆里，表示前者是后者的真子集．这类表示集合间关系的示意图叫作**韦恩图**（即 Venn 图）．



$A\subsetneqq B$

图 1.1－2

包含关系有**传递性**：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；若 $A\subsetneqq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subsetneqq C$；等等．

思考：你能写出数集 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 之间的包含关系吗？

例 6 设 $S=\{R，B，G\}$ 是计算机作图的三种基本色——红、蓝、绿组成的集合，写出 S 的所有子集．

分析 如何不重不漏地写出集合 $\{R，B，G\}$ 的所有子集呢？可采用下面的步骤：

（1）因为空集 $\varnothing$ 是所有集合的子集，所以首先写出 $\varnothing$；

（2）写出所有由一个元素构成的子集：$\{R\}$，$\{B\}$，$\{G\}$；

（3）写出所有由两个元素构成的子集：$\{R，B\}$，$\{R，G\}$，$\{B，G\}$；

（4）写出所有由三个元素构成的子集：$\{R，B，G\}$．

解 共有 8 个：$\varnothing$，$\{R\}$，$\{B\}$，$\{G\}$，$\{R，B\}$，$\{R，G\}$，$\{B，G\}$，$\{R，B，G\}$．

二 补集

下象棋的时候，看看棋盘上的局势，就知道被吃掉的有哪些棋子．

上课的时候，看看教室里的同学，就知道谁没有来．

如果在某个特定的场合，要讨论的对象都是集合 U 的元素和子集，就可以约定把集合 U 叫作**全集**（或基本集）．

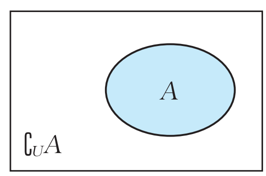


图 1.1－3

若 A 是全集 U 的子集，U 中所有不属于 A 的元素组成的子集叫作 A 的**补集**，记作 $\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U，且\ x\notin A\}．$$

其韦恩图表示如图 1.1－3 所示．当 U 可以从上下文确知时 A 的补集也可以记作 $\overline{A}$．显然 $\complement_U(\complement_U A)=A$．一般地，不论 A 是否是 B 的子集，都可用 $B\setminus A$ 表示 B 中不属于 A 的元素组成的子集．

例 7 设 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\in(0，12)\}$，$A=\{2x\mid 0<2x<12，x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{3x\mid 3x\in[1，11]，x\in\mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$ 和 $\complement_U B$．

解 由条件可知 $U=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11\}$，

$A=\{2，4，6，8，10\}$，$B=\{3，6，9\}$，

因此 $\complement_U A=\{1，3，5，7，9，11\}$，

$\complement_U B=\{1，2，4，5，7，8，10，11\}$．

例 8 把区间$[0, 1]$看成全集，写出它的下列子集的补集：

$A=(0, 1)$；　$B=\{1\}$；　$C=\{x \mid 0 \leqslant x < 0.5\}$；　$D=[0, 1]$.

解　用$\overline{S}$表示 S 的补集，则有

$\overline{A}=\{0, 1\}$；　$\overline{B}=[0, 1)$；　$\overline{C}=[0.5, 1]$；　$\overline{D}=\varnothing$.

练习

1. 设 Y 是由 6 的全体正约数组成的集合，写出 Y 的所有子集.

2. 判断下列每对集合之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{N}\}$，$B=\{y \mid y=4m, m \in \mathbf{N}\}$；

(2) $C=\{1, 2, 3, 4\}$，$D=\{x \mid x$ 是 12 的约数$\}$；

(3) $E=\{x \mid x-3<2, x \in \mathbf{N}_+\}$，$F=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. 设 $I=\{x \in \mathbf{Z} \mid x^3 \in [-125, 125]\}$，$A=\{2k \mid -5<2k<5, k \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{2k+1 \mid |k| \in [0, 3), k \in \mathbf{Z}\}$，求 $\complement_I A$，$\complement_I B$.

4. 把区间$[1, +\infty)$看成全集，写出它的下列子集的补集：

$A=(1, +\infty)$；$B=\{1\}$；$C=\{x \mid 1 \leqslant x < 5\}$；$D=[3, +\infty)$.

多知道一点

“白马非马” 的故事

公孙龙，中国古代哲学家，《白马论》是他的一篇哲学名篇. 文中的一个主要论题是“白马非马”. 他提出的理由之一是“求‘马’，‘黄’‘黑’马皆可致，求‘白马’，‘黄’‘黑’马不可致……是白马之非马，审矣！”意思是：若说要马，黄马黑马都行，若说要白马，黄马黑马就不行了……可见白马非马是无疑的了. 想一想，公孙龙话里的奥妙在哪里？

我们日常说话用的自然语言虽然生动通俗，但很难做到严谨，因为常有一字多义的情形. “白马非马”的“非”字，乃“是”字的反义词. “是”字的用法有多种. 例如：“关羽千里走单骑的坐骑是赤兔马”，这里的“是”相当于数学中的＝，表示“关羽千里走单骑的坐骑”和“赤兔马”是同一个事物；“赤兔马是红马”，这里的“是”相当于集合符号∈，表示“赤兔马”是“红马”集合的一个元素；“红马是马”，这里的“马”是个大集合，“红马”是个小集合，“是”字表示的是两个集合之间的包含关系，即红马集合包含于马集合.

可见“是”字身兼多义，如表示“等于”“属于”或“包含于”，那么“非”字也就可以表示“不等于”“不属于”或“不包含于”了. 公孙龙所论证的实际上是“白马集合不等于马集合”，这个意思大家一听就明，但含糊地说“白马非马”，通常会被理解成“白马集合不包含于马集合”，就引起讨论的兴趣了.

这个例子说明，使用集合的思想和一词一义的数学概念，有助于把事情弄清楚.

1.1.3 集合的交与并

一 两个集合的交

某电子技术服务公司在报纸上刊登广告招聘工作人员，对应聘人员的要求是：

* 高中或高中以上学历；

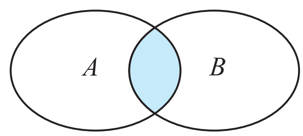
* 中文打字速度达 80 字/min .

这里有两个条件，满足其中一个条件的人员组成一个集合，两个条件就确定了两个集合．该公司希望，应聘人员是这两个集合的共有元素．

在数学里，把所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

图 1.1－4 是交集的韦恩图，阴影部分表示两个集合的交集．



$A\cap B$

图 1.1－4

数学里常常用到交集．例如，把直线和平面都看成点的集合，两直线的交点就是它们交集的元素；两平面的交线就是它们的交集，交集是空集时两平面平行．

例 9 求下列每对集合的交集：

(1) $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$，$B=\{9, 10, 8, 6, 1, 4\}$；

(2) $C=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$，$D=\{x \mid 3x-x^2=0\}$.

解 (1) $A\cap B=\varnothing$；

(2) $C\cap D=\{1, 3\}\cap\{3, 0\}=\{3\}$.

例 10 设方程 $2x+3y=7$ 的全体解组成集合 U，方程 $3x-y=5$ 的全体解组成集合 V，求 $U\cap V$.

解 $U\cap V$ 是两个方程联立而成的方程组 $\begin{cases}2x+3y=7,\\3x-y=5\end{cases}$ 的解集，

解方程组可得 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

用符号来表示就是：

$U=\{(x, y)\mid 2x+3y=7\}$，$V=\{(x, y)\mid 3x-y=5\}$，

$U\cap V=\{(x, y)\mid 2x+3y=7 \text{ 且 } 3x-y=5\}=\{(2, 1)\}$.

二　两个集合的并

生活中，可能碰到两组东西放在一起计算的问题．例如：

两个阅览室共有多少种不同的报刊？

几个地区共有多少种不同的野生动物？

两本英语词典共收录了多少个单词？

处理这些问题，需要引入集合的运算：集合的并．

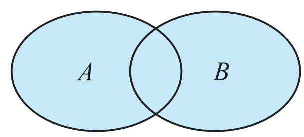
把集合 A，B 中的元素放在一起组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

也就是说，集合 $A\cup B$ 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成．

图 1.1－5 是两个集合的并集的韦恩图．

> 既属于 A 又属于 B 的元素，在 $A\cup B$ 中只算一个元素．



$A\cup B$

图 1.1－5

例 11　设 $A=\{0,1,4,9,16\}$，$B=\{9,4,\pi,\sqrt{2},1\}$，求 $A\cup B$．

解　$A\cup B=\{0,1,4,9,16\}\cup\{9,4,\pi,\sqrt{2},1\}$

$=\{0,1,4,9,16,\pi,\sqrt{2}\}$．

例 12　求下列集合的并集：

（1）$A=(1,3)$，$B=[2,5]$；　　（2）$C=[0,1]$，$D=\{x\mid x^2<1\}$．

解　（1）$A\cup B=(1,3)\cup[2,5]=(1,5]$；

（2）$C\cup D=[0,1]\cup\{x\mid x^2<1\}$

$=[0,1]\cup(-1,1)$

$=(-1,1]$．

交集和联立方程组的解集有关，并集和方程的解集有什么关系呢？

方程 $x^2-9=0$ 的解集为 $A=\{3,-3\}$，方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集为 $B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=\{3,-3,1,2\}$ 是方程 $(x^2-9)(x^2-3x+2)=0$ 的解集．所以，对于右端为零的方程，如果能将其左端分解成几个因式的乘积，就能使求解的问题简化．这是数学中常常把方程化成一端为零的形式的原因．

由交集和并集的定义可得，对于任意两个集合 A，B，均有

$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap B=B\cap A,$$
$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cup B=B\cup A.$$

练习

1. 设全集$U=\{1，2，3，4，5，6\}$，$A=\{1，3，5\}$，求$A\cap\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$.
2. 已知集合$A=\{x|x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-x-2=0\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$.
3. 已知集合$A=\{(x，y)|x-y=0\}$，$B=\{(x，y)|x+y=0\}$，求$A\cap B$.
4. 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|-4<x<-2\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$.

习题 1.1

学而时习之

1. 判断下列各组对象能否构成集合. 若能构成集合，指出是有限集还是无限集；若不能构成集合，试说明理由.

(1) 北京各区的名称；

(2) 尾数是 5 的自然数；

(3) 我们班身高大于 1.7 m 的同学.

2. 用符号“$\in$”和“$\notin$”填空：

(1) $\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{N}$；　(2) 1 ________ $\mathbf{Z}_-$；　(3) -2 ________ $\mathbf{R}$；

(4) π ________ $\mathbf{Q}_+$；　(5) 3^2 ________ $\mathbf{N}$；　(6) 0 ________ $\varnothing$.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 组成中国国旗的颜色名称的集合；

(2) 方程组$\begin{cases}3x-y=1,\\x+y=3\end{cases}$的解集.

4. 用描述法表示下列集合：

(1) 奇数组成的集合；

(2) 平面直角坐标系内第一象限的点组成的集合.

5. 用适当的符号填空：

(1) $\{0\}$ ________ $(-2，3)$；　(2) $\{a，c，b\}$ ________ $\{a，b，c\}$；

(3) $\mathbf{R}$ ________ $(-\infty，-3]$；　(4) $\{1，2，4\}$ ________ $\{x|x$ 是 8 的约数$\}$.

6. 只有一个元素的集合，例如$\{$孙悟空$\}$，它有两个子集：空集$\varnothing$和$\{$孙悟空$\}$. 两个或三个元素组成的集合各有多少个子集？你能找出一般规律吗？

7. 把 $\mathbf{R}$ 看成全集，用区间形式写出下列各集合的补集：

（1）$A=(2,+\infty)$；（2）$B=(-\infty,1)$；（3）$C=[1,+\infty)$.

8. 设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，$C=\{1,3,6,8\}$，求：

（1）$A\cap B$，$A\cap C$，$A\cap(B\cup C)$；（2）$A\cup B$，$A\cup C$，$C\cup(A\cap B)$.

9. 在 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 中任取两个，求它们的并集和交集.

10. 已知集合 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 2<x<8\}$，求 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

温故而知新

11. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x+y\in A,x-y\in A\}$，求集合 B 中元素的个数.

12. 已知 A，B 为非空集，I 为全集，且 $A\neq B$，用适当的符号填空：

（1）$A\cap B$ ________ $A\cup B$；（2）A ________ $A\cup(\complement_I A)$；

（3）$A\cap B$ ________ A；（4）$\varnothing$ ________ $A\cap B$；

（5）$A\cap A$ ________ $A\cup A$；（6）$A\cup\varnothing$ ________ A；

（7）$A\cap\varnothing$ ________ $A\cap(\complement_I A)$ ________ $\varnothing$；（8）$A\cap B$ ______ A ______ $A\cup B$.

13. 市场调查公司为了解某市市民在阅读报纸（日报和晚报）方面的取向，抽样调查了 500 个市民，调查结果显示：订阅日报的有 334 人，订阅晚报的有 297 人，其中两种都订的有 150 人. 试问：

（1）只订日报不订晚报的有多少人？

（2）只订晚报不订日报的有多少人？

（3）至少订一种报纸的有多少人？

（4）有多少人不订报纸？

14. 设 $\mathbf{R}$ 为全集，$A=\{x|x<a\}$，$B=\{x|1<x<2\}$，且 $A\cup\overline{B}=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

15. 已知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,8\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2,6\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,7\}$，求集合 A，B.

1.2 常用逻辑用语

前面，我们在用集合的基本符号“$\in$”解释包含、并和交等概念的含义时，还用到一些其他词语. 例如：

“若由 $x\in A$ 能推出 $x\in B$，就说 $A\subseteq B$.”

“集合 $A\cup B$ 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成.”

其中用了“若”“推出”“就”“所有”“或”等词语. 这些在数学乃至科学中常常用于引入概念、表述规律、推导定理法则或交流信息的词语，经过规范化使之意义更为清楚严谨后，叫作**逻辑用语**. 逻辑用语是一种理性语言，是表达理性思维的载体.

学习常用逻辑用语，掌握常用逻辑用语的用法，就可以利用这些逻辑用语准确、简洁地表述数学内容和数学思想. 同时，在各种交流活动中，也可以利用这些逻辑用语严密地表述对各种问题的思考结果. 借助这些逻辑用语梳理学过的数学事实，知识会更清晰更有条理，分析、解决问题的能力也会有所提高.

1.2.1 命　题

数学里的猜想、定理、公式都以命题的形式呈现. 欧几里得的《原本》的主体内容，就写成了几百个编号的命题.

一般说来，命题就是一个陈述句. 1.1 节“思考”中列出的三个陈述句，都可以认为是命题.

下面这类的语句都是数学中的命题：

(1) 两个奇数之和是一个偶数；

(2) 三角形的三个内角之和等于 180°；

(3) 若 a 是非零实数，则 $a^2>0$；

(4) $\sqrt{2}$ 是无理数；

(5) 若实数 a 满足 $a^2=9$，则 $a=3$.

上述这些陈述句的共同特征是作出了判断. 这种判断可能成立，也可能不成立，两者必居其一且仅居其一. 这种语句叫作**命题**，成立的命题叫作**真命题**，不成立的命题叫作**假命题**. 例如，上述命题中有 4 个真命题，而最后一个是假命题. 我们学过的公理、基本事实、定理都是真命题.

例 1 判断下列语句哪些是命题，是真命题还是假命题．

（1）$x>0$；

（2）等腰三角形两底角相等；

（3）若 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，则 $a>b$．

解 （1）因为无法判断它的真假，故不是命题．

（2）真命题．

（3）假命题．例如：$(-2)^2>(-1)^2$，但 $-2<-1$．

> 判断一个命题是假命题的常用方法是举出一个反例．

数学中暂时不知道真假的命题可以叫作**猜想**．一个好的猜想将推动数学的发展，因为人们在证明或否定猜想的过程中会提出许多新的数学概念和新的数学方法．

如果 p 是一个命题，则“p 不成立”也是一个命题，叫作 p 的**否定**，记作 $\neg p$，读作“**非 p**”．显然，p 也是 $\neg p$ 的否定．在 p 和 $\neg p$ 两者之中，一定有一个为真有一个为假．

例 2 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$：

（1）p：4 是方程 $x^2-16=0$ 的根；

（2）p：相似三角形的面积一定相等；

（3）p：16 是 4 的倍数．

解 （1）$\neg p$：4 不是方程 $x^2-16=0$ 的根；

（2）$\neg p$：相似三角形的面积不一定相等；

（3）$\neg p$：16 不是 4 的倍数．

> “相似三角形的面积一定相等”的否定不是“相似三角形的面积一定不相等”，想一想，为什么？

在数学中，命题通常由**条件**和**结论**组成，例如：

（1）若两个三角形全等，则它们相似；

（2）若两个三角形相似，则它们全等；

（3）若实数 $a\neq0$，则 $a^2>0$；

（4）若四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $AC\perp BD$；

（5）若 $a<0$，则方程 $ax^2+4x-3=0$ 没有正的实根；

（6）若 $a=b$，则 $a^2=b^2$．

上述命题都具有“若 p，则 q”的形式，其中 p 叫作命题的**条件**，q 叫作命题的**结论**．

当命题“若 p，则 q”为真，则记作 $p\Rightarrow q$，读作“p 推出 q”．

当命题“若 p，则 q”为假，则记作 $p\nRightarrow q$，读作“p 推不出 q”．

上述命题(1)和(2)，条件和结论互换了位置，这时称一个是另一个的**逆命题**．

即命题(1)和(2)互为逆命题.

想一想，上面 6 个命题及其逆命题，哪些是真命题?

练习

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 若 a，b 是任意实数，则 $|a|+|b|>0$；

(2) 若 x，y 是实数且 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$；

(3) 若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不相等的实数根；

(4) 若 $x^2+x-m=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 $m>0$.

2. 写出下列命题的否定，并判断其真假.

(1) p：5 不是 75 的约数；

(2) p：$x>2$ 是不等式 $3x-6>0$ 的解；

(3) p：方程 $x^2-2x+3=0$ 有实数根；

(4) p：空集是集合 A 的子集.

3. 判断命题“两条对角线互相垂直的四边形一定是菱形”的真假.

1.2.2 充分条件和必要条件

当“若 p，则 q”成立，即 $p \Rightarrow q$ 时，把 p 叫作 q 的**充分条件**，q 叫作 p 的**必要条件**.

$p \Rightarrow q$ 可以理解为若 p 成立，则 q 一定也成立，即 p 对于 q 的成立是**充分**的；反过来，若 q 不成立，则 p 必不成立，即 q 对于 p 的成立是**必要**的.

自然地，若 $p \nRightarrow q$，则 p 不是 q 的充分条件，q 也不是 p 的必要条件.

对照 1.2.1 节例 2 后面列出的 6 个命题可知：

命题(1)为真命题；

故“全等”是“相似”的充分条件，“相似”是“全等”的必要条件.

命题(2)为假命题；

故“相似”不是“全等”的充分条件，“全等”不是“相似”的必要条件.

命题(3)为真命题；

故“实数 $a \neq 0$”是“$a^2>0$”的充分条件，“$a^2>0$”是“实数 $a \neq 0$”的必要条件.

命题(4)为真命题；

故“四边形 $ABCD$ 为菱形”是“$AC \perp BD$”的充分条件，“$AC \perp BD$”是“四边

形 $ABCD$ 为菱形”的必要条件.

命题(5)为假命题；

故“$a<0$”不是“方程 $ax^2+4x-3=0$ 没有正的实根”的充分条件，“方程 $ax^2+4x-3=0$ 没有正的实根”也不是“$a<0$”的必要条件.

命题(6)为真命题；

故“$a=b$”是“$a^2=b^2$”的充分条件，“$a^2=b^2$”是“$a=b$”的必要条件.

如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 即 p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，此时我们称 p 是 q 的**充分必要条件**，简称**充要条件**. 当然，此时 q 也是 p 的充分必要条件.

换句话说，**如果一个命题和它的逆命题都成立，则此命题的条件和结论互为充分必要条件.**

上述命题(3)的逆命题也是真命题，故“实数 $a\neq 0$”是“$a^2>0$”的充分必要条件，“$a^2>0$”也是“实数 $a\neq 0$”的充分必要条件.

p 是 q 的充分必要条件指 p 成立**当且仅当** q 成立. 在这种情况下，p 和 q 称为互相**等价**. 两个互相等价的命题或条件通常是对同一事物从不同角度所作的描述. 例如，三角形全等的判别条件 SSS，SAS，ASA 分别从不同方面描述了两个三角形全等的同一个事实，它们互相等价.

例 3 从“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”和“既不充分又不必要条件”中选择适当的一种填空.

(1) $a\geqslant 5$ 是 a 为正数的________；

(2) 四边形的两对角线相等是该四边形为矩形的________；

(3) 四边形的一组对边平行且相等是四边形的两组对边分别平行的________；

(4) 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2=2$ 是 $x=2$ 的________.

分析 分别考虑命题“若 p，则 q”和“若 q，则 p”的真假性.

解 (1) $a\geqslant 5\Rightarrow a>0$，$a>0\nRightarrow a\geqslant 5$. 因此应填“充分而不必要条件”.

(2) 四边形是矩形⇒四边形的两对角线相等，反之不成立. 因此应填“必要而不充分条件”.

(3) 四边形的一组对边平行且相等⇔四边形的两组对边分别平行，它们实际上都在描述四边形是平行四边形. 因此应填“充要条件”.

(4) $x\in\mathbf{R}$ 时，$x^2=2\nRightarrow x=2$，$x=2\nRightarrow x^2=2$. 因此应填“既不充分又不必要条件”.

例 4 试证：

（1）在实数范围内，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件；

（2）四边形的两组对边分别相等是四边形为矩形的必要而不充分条件．

证明　（1）$x=1\Rightarrow x^2=1$，则 $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分条件；由于 $(-1)^2=1$，故 $x^2=1 \nRightarrow x=1$，则 $x=1$ 不是 $x^2=1$ 的必要条件．因此，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件．

（2）记 p：四边形的两组对边分别相等，q：四边形为矩形．

$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件；由于平行四边形的两组对边分别相等，$p \nRightarrow q$，则 p 不是 q 的充分条件．因此，四边形的两组对边分别相等是四边形为矩形的必要而不充分条件．

在学习平面几何时，我们知道有性质定理和判定定理的说法．例如，“等腰三角形两底角相等”叫作等腰三角形的**性质定理**，意思是说等腰三角形必有“两底角相等”这条性质，即此性质是等腰三角形的**必要条件**．反过来，“有两角相等的三角形是等腰三角形”叫作等腰三角形的**判定定理**，它揭示了具备此条件的三角形肯定是等腰三角形，即它是三角形成为等腰三角形的**充分条件**．把性质定理和判定定理综合起来就是简单的一句话：“两角相等是三角形为等腰三角形的**充要条件**．”使用**充分条件**、**必要条件**和**充要条件**这些逻辑用语来表述，学过的数学知识就更有条理了．

例 5 下面列出直角三角形的 6 条性质：

①两锐角之和等于直角；

②有且只有一条边是最长边；

③有一条边上的中线等于此条边的一半；

④有一边的平方等于另两边的平方之和；

⑤有一条边上的高分此边所成两线段的积等于此高的平方；

⑥有一条边是三角形外接圆的直径．

试指出哪些性质是三角形为直角三角形的充要条件．

解　以上除②之外，其余 5 条都是三角形为直角三角形的充要条件．

练习

1. 下列命题中，哪些命题是“四边形是矩形”的充分条件？

（1）四边形的对角线相等；

（2）四边形的四条边均相等；

（3）四边形有三个内角都为直角；

（4）四边形的两组对边分别平行且有一组对角互补．

2. 设 x，$y\in\mathbf{R}$，下列各式中哪些是“$xy\neq 0$”的必要条件？

（1）$x+y=0$；　　（2）$x^2+y^2>0$；

（3）$x^2+y^2\neq 0$；　　（4）$x^3+y^3\neq 0$．

3. 从“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”与“既不充分又不必要条件”中选出适当的一种填空：

（1）$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$是 $AB^2=AC^2+BC^2$的__________；

（2）$x>0$ 是 $x\geqslant 1$ 的__________；

（3）$x=2$ 是 $x^2=4$ 的__________；

（4）$0<x<2$ 是 $1<x<3$ 的__________．

1.2.3 全称量词和存在量词

一　含有量词的命题

前面看到，像 $x>0$ 这样带有不确定变量的语句不是命题．但如果加上一个约束，例如“对每一个实数 x 有 $x>0$”或者“有一个实数 x 使 $x>0$”，它们就是命题了．前者假而后者真，有了真假就是命题．

这里的“每一个”和“有一个”叫作**量词**，两者分别叫作**全称量词**和**存在量词**．涉及量词的命题必须指出量词的作用范围，说明“每一个”是哪个集合中的每一个，“有一个”是在哪个集合中有一个．

“任意”“所有”“每一个”等全称量词，数学上用符号“$\forall$”表示．设语句 $p(x)$中变量 x 的取值范围为集合 M（当 x 取值 $a\in M$ 时，$p(a)$成为一个命题），则语句“对 M 的任一个元素 x，有 $p(x)$成立”是命题，叫作**全称量词命题**．用符号简单地表示为

$$\forall x\in M,\ p(x).$$

“存在某个”“至少有一个”等存在量词，数学上用符号“$\exists$”表示．语句“存在 M 的某个元素 x，使 $p(x)$成立”也是命题，叫作**存在量词命题**．用符号简单地表示为

$$\exists x\in M,\ p(x).$$

全称量词和存在量词不但在数学里经常被使用，在日常生活中也经常被使用．

例如，市场上卖鸡蛋的老太太说：“我篮子里的每一个鸡蛋都是好的．”老太太表述了一个含有全称量词的命题．“每一个”是全称量词，并且指出了全称量词“每一个”的作用范围是“我篮子里的鸡蛋”，不是市场上的所有鸡蛋．

在数学里有许多命题明显地或暗含地使用了量词.

例如：对任意实数 a，$a^2+1>0$. 这里“任意实数 a”和“每一个实数 a”是意义相同的全称量词，命题中全称量词“任意”的作用范围是实数集 $\mathbf{R}$. 用符号表示就是“$\forall a\in\mathbf{R}$，$a^2+1>0$”.

又如：存在某个整数 a，使得 a^2-1 是 5 的倍数. “存在某个”是存在量词，命题中它的作用范围是整数集 $\mathbf{Z}$. 用符号表示就是“$\exists a\in\mathbf{Z}$，$\dfrac{a^2-1}{5}\in\mathbf{Z}$”.

例 6 指出下列命题中使用了什么量词以及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代：

(1) 对任意正实数 a，$a^2-a-2>0$；

(2) 对某个大于 10 的正整数 n，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$.

解 (1) 命题中有量词“任意”，这是一个全称量词，它的作用范围是正实数集合. 该命题可以写成“$\forall a\in\mathbf{R}_+$，$a^2-a-2>0$”.

(2) 命题中有量词“某个”，这是一个存在量词，它的作用范围是大于 10 的正整数集合. 该命题可以写成“$\exists n>10$，$n\in\mathbf{N}_+$，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$”，或者写成“$\exists n\in\mathbf{N}_+$，$n>10$，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$”“$\exists n\in\mathbf{N}_+\cap(10,+\infty)$，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$”.

如何判断含有量词的命题的真假呢？命题“我篮子里的每一个鸡蛋都是好的”究竟是真命题还是假命题？如果篮子里的每一个鸡蛋确实都是好的，这个命题就是真命题；只要篮子里某一个鸡蛋是坏的，这个命题就是假命题.

例如：因为对每个实数 a，有 $a^2+1>0$ 成立，所以命题“$\forall a\in\mathbf{R}$，$a^2+1>0$”是真命题.

又如：因为 $4^2-1=15$，所以命题“$\exists a\in\mathbf{Z}$，a^2-1 是 5 的倍数”是真命题.

例 7 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$；

(3) $\exists a\in\mathbf{Z}$，$a^2=3a-2$；

(4) $\exists a\geqslant 3$，$a^2=3a-2$；

(5) 设 A，B，C 是平面上不在同一直线上的三点，在平面上存在某个点 P 使得 $PA=PB=PC$.

解 (1) 因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant 0$，从而有 $x^2+2\geqslant 2>0$，即 $x^2+2>0$. 因此(1)是真命题.

(2) 因为 $0\in\mathbf{N}$，但当 $x=0$ 时，$x^4\geqslant 1$ 不成立. 因此(2)是假命题.

(3) 因为 $1\in\mathbf{Z}$ 且 $1^2=3\times1-2$，因此(3)是真命题.

（4）因为 $a^2=3a-2$ 只有两个实数根 $a=1$ 或 $a=2$，所以当 $a\geqslant 3$ 时 $a^2\neq 3a-2$. 因此(4)是假命题.

（5）A，B，C 三点构成一个三角形，三角形总有外接圆，设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，则 $PA=PB=PC$. 因此(5)是真命题.

练习

1. 指出下列命题中使用了什么量词以及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代：

（1）对区间 $(0, 90]$ 上的任意整数 n，有 $\sin n°>0$；

（2）对某个有理数 x，有 $4x=\dfrac{1}{2}$；

（3）线段 AB 上有一点 M 满足比例式 $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{MB}{AB}$.

2. 判断下列命题的真假：

（1）$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2=2$；

（2）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2=2$；

（3）线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；

（4）平面上任意两条直线必有交点.

二　含量词命题的否定

如何对含有量词的命题进行否定呢？先看下面两个例子：

（1）这个篮子里的鸡蛋都是好的；

（2）存在实数 x，使得 $x^2-3x-5=0$.

命题(1)的否定为“这个篮子里的鸡蛋并非都是好的”，换言之，“这个篮子里有鸡蛋是坏的”. 命题否定后，全称量词变为存在量词，“肯定”变为“否定”.

命题(2)的否定为“不存在实数 x，使得 $x^2-3x-5=0$”，即“对所有的实数 x，$x^2-3x-5\neq 0$”. 命题否定后，存在量词变为全称量词，“肯定”变为“否定”.

一般地，命题“$\forall x\in I$，$p(x)$”的否定是“$\exists x\in I$，$\neg p(x)$”；命题“$\exists x\in I$，$p(x)$”的否定是“$\forall x\in I$，$\neg p(x)$”. 即

$$\neg(\forall x,\ p(x))\Leftrightarrow\exists x,\ \neg p(x);$$
$$\neg(\exists x,\ p(x))\Leftrightarrow\forall x,\ \neg p(x).$$

要注意的是，在很多情形下，全称量词习惯上常常被省略. 例如“三角形的任意两边之和大于第三边”“平行四边形对角线互相平分”“直角三角形斜边的平方等于两直角边平方之和”等，这里分别指的是任意三角形、任意平行四边形和任意直角三角形. 平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 中，a 和 b 指的是任意两个实数.

例 8 写出下列存在量词命题的否定：

(1) p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$-2x^2+4x-3>0$；

(2) q：有的三角形的垂心在其外部；

(3) r：有一个小于 210 的正整数至少有 4 个质因数.

解 (1) $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$-2x^2+4x-3\leqslant 0$；

(2) $\neg q$：任意三角形的垂心都在其内部或边上；

(3) $\neg r$：任意小于 210 的正整数至多有 3 个质因数.

例 9 对下列含有量词的命题作否定，并判断其真假：

(1) p：任意有理数都可以写成两个整数之商；

(2) q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+3\leqslant 0$.

解 (1) $\neg p$：有个有理数不能写成两个整数之商. 假命题.

(2) $\neg q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+3>0$. 真命题.

练习

对下列含有量词的命题作否定，并判断其真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+1\geqslant 0$；

(2) $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=2$；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-3=0$；

(4) $\forall x\neq 0$，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\in[2,+\infty)$；

(5) 任意三角形都有内切圆；

(6) 任意两个直角三角形都是相似三角形.

习题 1.2

学而时习之

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

（1）菱形的两条对角线相等；

（2）末位是 5 的整数可以被 5 整除；

（3）$x=5$ 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根；

（4）设 a 是整数，若 a 是 2 的倍数，则 a^3 是 16 的倍数；

（5）设 a，b，c 为任意实数，若 $a=b$，则 $ac=bc$；

（6）到圆心的距离等于该圆半径的直线是圆的切线.

2. 写出下列命题的否定，并判断其真假：

（1）p：若$\triangle ABC$ 三条边的长分别为 5，12，13，则$\triangle ABC$ 是直角三角形；

（2）q：面积相等的三角形都是全等三角形；

（3）r：一元二次方程至多有两个解；

（4）s：若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

3. 判断下列命题的真假，并说明理由：

（1）“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的充分条件；

（2）“$x^2\neq 1$”是“$x\neq 1$”的必要条件；

（3）“四边形为正方形”是“四边形为矩形”的充分而不必要条件；

（4）“$a>b$”是“$a+c>b+c$”的充要条件；

（5）“$x=1$”是“$(x-1)(x-2)=0$”的充要条件；

（6）“$x\in A\cap B$”的充要条件是“$x\in A$”.

4. 从“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”与“既不充分又不必要条件”中选出适当的一种填空：

（1）“$a-1>0$”是“$a>1$”的________；

（2）“$a>0$，$b>0$”是“$a+b>1$”的________；

（3）“两个角是对顶角”是“两个角相等”的________；

（4）设 a，b，c 都是实数，“$a+b+c=0$”是“$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根”的________.

5. 设 a，$b\in\mathbf{R}$，下面式子中哪个是哪个的充分条件，哪个是哪个的必要条件？

（1）$ab=0$；

（2）$a^2+b^2=0$；

（3）$a^2+b^2>0$；

（4）$a=0$；

(5) $ab<0$;　　　　　　　　　　　(6) $b\neq 0$.

6. 对下列含有量词的命题作否定，并判断其真假：

(1) 存在某个整数 a，使得 $a^2=a$；

(2) 任意实数都可以写成平方和的形式；

(3) 每个能被写成两个奇数之和的整数都是偶数；

(4) $\forall m>0$，方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根；

(5) $\exists m>0$，方程 $x^2+x+m=0$ 有实数根.

温故而知新

7. 下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”“既不充分又不必要条件”中选出一种）？为什么？

(1) 已知集合 $A=\{1, a\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，p：$a=3$，q：$A\subseteq B$；

(2) p：$a\in \mathbf{N}_+$，q：$a\in \mathbf{Z}_+$；

(3) 设 x，y 是实数，p：$x>y$，q：$|x|>|y|$；

(4) p：D 在$\triangle ABC$ 的边 BC 的中线上，q：$\triangle ABD$ 的面积$=\triangle ACD$ 的面积.

8. 已知 p 是 r 的充分条件，而 r 是 q 的必要条件，同时也是 s 的充分条件，q 是 s 的必要条件，那么：

(1) s 是 p 的什么条件？

(2) p 是 q 的什么条件？

(3) 在 p，q，r，s 中，哪几对互为充要条件？

9. 对下列含有量词的命题作否定，并判断其真假：

(1) p：所有能被 2 整除的数都是偶数；

(2) p：$\exists x_0\in \mathbf{N}$，$2^{x_0}\leqslant 0$；

(3) p：$\exists x_0\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，$x_0^2\in \mathbf{Q}$；

(4) p：$\exists x\in \mathbf{Z}_+$，$\dfrac{3x+2}{x+1}\in \mathbf{N}$.

10. 参考 1.2.2 节的例 3，梳理初中学过的数学知识中有哪些可以用充分必要条件来表述.

数学文化

从德·摩根到康托尔：逻辑与集合

德·摩根（1806—1871）是英国数学家和逻辑学家．他在微积分、代数、数学史及逻辑学等方面有重要的贡献．

德·摩根

在代数学方面，他认为："代数学实际上是一系列'运算'，这种'运算'能在任何符号（不一定是数字）的集合上，根据一定的公式来进行．"这样看问题，实际上是把代数放在集合的基础之上了．

在逻辑学方面，他发展了一套适合推理的符号，提出了论域概念，并以代数的方法研究逻辑的演算．他认为，研究逻辑推理，先要有所讨论的一些基本对象，这些对象组成了"论域"．论域本质上也就是集合．这样，实际上是把逻辑学也放到集合的基础之上了．

就像两个集合 A 和 B 可以通过交或并产生新的集合一样，两个命题 p 和 q 可以通过"与"或"或"两种运算组成新的命题："p 和 q 都真"是一个命题，用符号 $p \wedge q$ 或 p and q 表示，读作"p 与 q"；"p 和 q 中至少有一个真"也是一个命题，用符号 $p \vee q$ 或 p or q 表示，读作"p 或 q"．下面两个漂亮的公式把 $\neg$，$\wedge$ 和 $\vee$ 这三个逻辑运算符号紧密联系起来，被称为德·摩根定律，具有广泛应用：

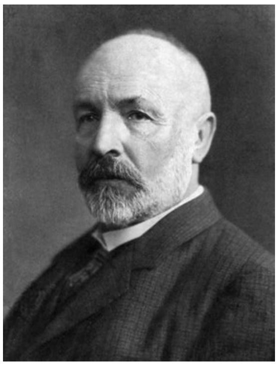
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q\ (\text{或}\ \neg(p\ \text{and}\ q) \Leftrightarrow \neg p\ \text{or}\ \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q\ (\text{或}\ \neg(p\ \text{or}\ q) \Leftrightarrow \neg p\ \text{and}\ \neg q)$$

有趣的是，如果把这两个公式中的命题 p 和 q 换成集合 A 和 B，$\wedge$ 和 $\vee$ 换成集合运算 $\cap$ 和 $\cup$，否定算符 $\neg$ 换成求补集的运算，就得到在集合论里面成立的德·摩根定律：

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$（两集合之交的补等于两集合补集之并），

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$（两集合之并的补等于两集合补集之交）．



康托尔

尽管德·摩根本人并没有提出有关集合的系统理论，但他对逻辑理论的研究却预示着集合论的出现．这表明，逻辑与集合两者之间有深刻的内在联系．

集合论的创立者，是德国数学家康托尔（1845—1918）．康托尔的集合理论中最精彩的部分，是比较两个无穷集合元素多少的理论与方法．

长期以来，哲学家和科学家们都认为无穷多和无穷多

无法比较多少．物理学家伽利略还具体思考过自然数多还是完全平方数多的问题．

直观地看，自然数多．但是每个自然数的右肩膀上标注一个小小的“2”，就成了完全平方数，这不是表明它们一样多吗？伽利略由此认为，无穷和无穷确实无法比较．

康托尔29岁(1874)时发表了关于集合论的第一篇论文，提出了比较无穷集合大小的基本概念和方法，引起了数学界的极大关注．

康托尔通过深入思考，抓住了问题的要害．问题是要比较无穷之间的大小，要比较就要有个标准：什么叫大，什么叫小，什么叫一样多？

标准由人来制定，但不能随心所欲，要订得合理，订得符合实际，订得能够自圆其说，道理讲得通．这就要参考我们的实际经验．

比较无穷集大小，我们没有经验．而对于有穷集的比较，是有办法的．

大厅里有许多人，还有许多椅子，人多还是椅子多，可以数一数．

更痛快的办法，是请大家就座．一个人只能坐一把椅子，一把椅子也只能坐一个人．如果没有椅子空着，又没有人站着，就可以肯定椅子和人一样多．

这叫作建立两个集合之间的“一一对应”．

其实所谓的“数一数”，也是一一对应的办法．数椅子时，指着一把椅子说1，再指着另一把说2，就是把椅子编了号码，也就是把椅子的集合和前若干个正整数组成的集合建立了一一对应．

因此，比较两个有穷集合的大小，我们只有一种办法，就是看能不能建立一一对应，能建立一一对应，就是一样多．这是人类认识数量关系的最基本的办法，也是最古老的办法．

于是，比较无穷集的元素多少，也只有用这种办法．不管是有穷还是无穷，只要能够在A和B两个集合的元素之间建立某种一一对应的关系，就应当承认A和B两个集合的元素一样多．如果A和B的某个子集能建立一一对应，但B不能和A的任何子集建立一一对应，就应当承认B比A的元素多．这就是康托尔提出的观点，也是现代数学界公认的观点．

按照这样的观点，自然数就和完全平方数一样多，因为两个集合之间可以建立一一对应．但是如何解释完全平方数仅仅是自然数的一小部分这个事实呢？

这没有难倒康托尔．他主张既然有了定义，就按定义办事，不能因为出现了某些不符合习惯思维的现象而动摇．对于有穷集，整体比部分多；对于无穷集，整体完全可能和它的某些部分一样多．这正是无穷集与有穷集的不同之处．进一步思考，这可以作为无穷集的定义！

什么叫无穷集？可以和自己的某个真子集建立一一对应的集合就叫无穷集．这样的定义跳出了“无穷就是取之不尽，就是非有穷，就是没完没了……”这种同语

反复的圈子．这是更合理的定义．

按此定义，康托尔证明了一批令人难以置信的结论：有理数和自然数一样多，线段上的点和直线上的点一样多；直线上的点和平面上的点一样多，也和空间的点一样多．

是不是所有无穷集的元素都一样多呢？康托尔证明，区间$(0，1]$上的实数比自然数多，即一条线段上的点的个数要比自然数多．也就是说，不可能把一条线段上的所有点像自然数那样一个接一个地排成一条无穷的长龙！但有理数可以．这说明无理数比有理数要多．这确实是一个重大发现．

为了叙述康托尔的论证，先将区间$(0，1]$上每个实数x用无穷小数$0.a_1a_2a_3\cdots$表示．由于$x\neq0$，各位数字a_1，a_2，$\cdots$不全为0．如$x=1$写成$1=0.999\ 99\cdots$．为了避免不同数字组成同一个无穷小数的情况，如$0.500\ 00\cdots=0.499\ 99\cdots$，约定将有限小数都写成有无穷多个非零数字的无穷小数，如$0.105=0.104\ 999\cdots$．假定区间$(0，1]$上的实数能够像自然数那样一个接一个排成无穷的长龙A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$，我们证明：区间$(0，1]$上一定能找到实数$B=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$与排进去的所有的数$A_n$都不同，这就能说明区间$(0，1]$上的实数不可能全部装进一条无穷的长龙．怎样找到这样的B与所有的A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$都不同？我们选B的小数部分所有数字b_n都不为0，并且B与每个A_n至少有一位数字不同．比如，选B的小数第1位b_1与$A_1=0.a_{11}a_{12}\cdots$的小数第1位a_{11}不同，B的小数第2位b_2与$A_2=0.a_{21}a_{22}\cdots$的小数第2位a_{22}不同．一般地，选B的小数第n位b_n与$A_n=0.a_{n1}\cdots a_{nn}\cdots$的小数第$n$位$a_{nn}$不同．比如，当$a_{nn}=2$时取$b_n=3$，当$a_{nn}\neq2$时取$b_n=2$．这就得到一个与排进长龙$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$，$\cdots$中的所有的实数都不同的$B$，从而证明了无论哪一条长龙都不能将区间$(0，1]$上的实数全部容纳进去．

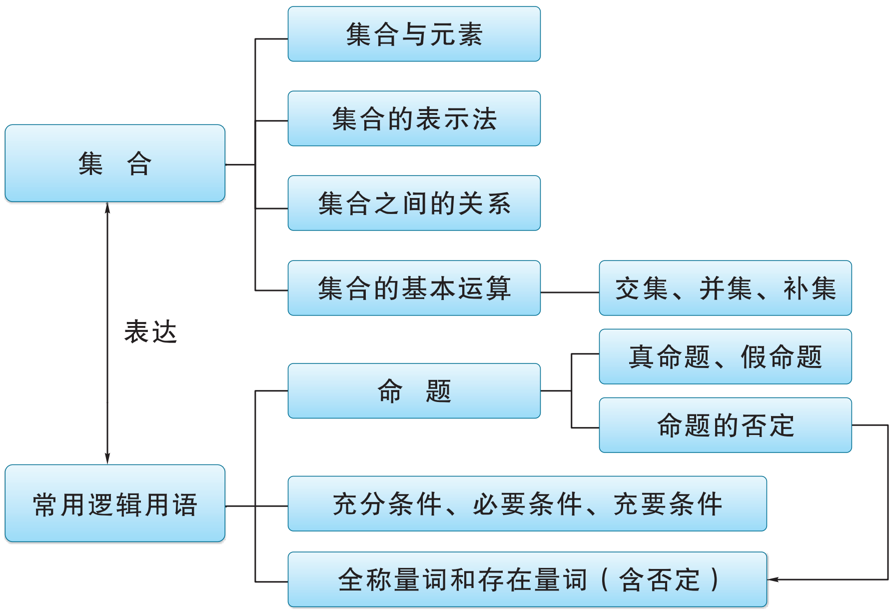
康托尔的工作给数学发展带来了一场革命．由于他的理论超越直观，所以曾受到当时一些大数学家的反对，著名数学家庞加莱和康托尔的老师克罗内克都对康托尔进行非难和指责．双方争辩持续了十年之久．康托尔由于经常处于精神压抑之中，1884年患了精神分裂症，1918年在精神病院逝世．

更多卓越的数学家支持康托尔．1897年举行的第一次国际数学家会议上，他的成就得到承认．大数学家希尔伯特大声疾呼，“没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶走”；著名哲学家和数学家罗素称康托尔的工作为“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”．

现代数学的发展表明，康托尔的集合论在人类认识史上第一次从本质上揭示了无穷的特性，使无穷的概念发生了革命性的变化，并渗透到所有的数学分支，也给逻辑学和哲学带来了深远的影响．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 集合是现代数学的基本概念．用集合的语言和符号表述数学事实，比起自然语言来更为严谨和简洁，而且世界通用．试结合生活中、数学中以及其他学科中的集合实例，用集合语言来描述它们，并交流用集合语言来表达的优势．

2. 集合的基本概念，可以浓缩为一个符号“$\in$”，有关集合的其他概念和符号都可以用符号$\in$来刻画．试结合集合的包含关系和集合的交、并、补运算，体会如何用$\in$来刻画这些关系与运算．

3. 集合是数学的基本概念．数学概念之间的关系，需要用逻辑用语来表达．

学习常用逻辑用语可以更深刻地理解数学内容，更严密地进行数学推理以及更正确地表达数学思想．

4. 举例说明什么叫作命题，如何对一个命题作否定．

5. 数学中的大量命题具有“若 p，则 q”的形式，试通过对这些命题的梳理，说明充分条件、必要条件以及充要条件的意义．

6. 当陈述语句中涉及不确定的对象时，其真假往往难以确定．使用全称量词和存在量词可以对不确定的对象进行约束，从而使语句具有确定的真假．试结合实例讨论，如何对含有量词的命题判断其真假，如何对含有一个量词的命题进行否定？

复习题一

学而时习之

1. 记 E 为平面上所有点组成的集合并且 $A\in E$，$B\in E$，说明下列集合的几何意义：

（1）$\{P\in E|PA<5\}$；　　（2）$\{P\in E|PA=PB\}$.

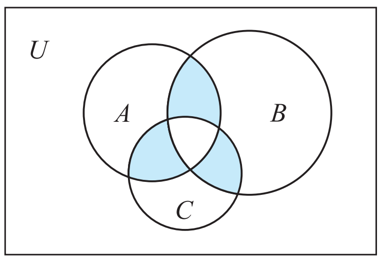
2. 用描述法写出下面这些区间的含义：

$$[-2,\ 7];\ [a,\ b);\ (123,\ +\infty);\ (-\infty,\ -9].$$

3. 设集合 $A=\{2,\ 3,\ a^2+4a+2\}$，集合 $B=\{0,\ 7,\ a^2+4a-2,\ 2-a\}$，这里 a 是某个正数，且 $7\in A$，求集合 B.

4. 已知集合 $A=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x|x$ 是矩形$\}$，$C=\{x|x$ 是正方形$\}$，$D=\{x|x$ 是菱形$\}$，求集合 A，B，C，D 之间的关系.

5. 已知全集为 U，集合 A，B，C 都是 U 的子集，用集合 U，A，B，C 表示图中的阴影部分.



（第 5 题）

6. 判断下列命题的真假：

（1）$a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的必要条件；

（2）$a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的充分条件；

（3）两个三角形的两组对应角分别相等是两个三角形相似的充要条件；

（4）$(2x-1)x=0$ 是 $x=0$ 的充分而不必要条件.

7. 下列命题中，哪些命题是“四边形是正方形”的充分条件？

（1）对角线相等的菱形；　　（2）对角线互相垂直的矩形；

（3）对角线相等的平行四边形；　　（4）有一个角是直角的菱形.

8. 用全称量词或存在量词的符号表述命题：“任意三角形 ABC 都有外接圆.”

9. 写出下列命题的否定，并判断其真假：

（1）每个有理数都是实数；

（2）过直线 l 外任意一点有且仅有一条直线与已知直线 l 平行；

（3）设 E，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 E，F 是 AB，AC 的中点，则 $EF/\!/BC$.

温故而知新

10. 已知集合 $A=\{x\mid x+1>0\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

11. 已知集合 A，B 均为全集 $U=\{1,2,3,4\}$的子集，且 $\complement_U(A\cup B)=\{4\}$，$B=\{1,2\}$，求 $A\cap(\complement_U B)$.

12. 在什么条件下，有$[a,b]\cup[c,d]=[a,d]$?

13. 为完成一项实地测量任务，夏令营的同学们成立了一支“测绘队”，需要 24 人参加测量，20 人参加计算，16 人参加绘图. 测绘队的成员中很多同学是多面手，已知有 8 人只参加测量、计算，有 6 人只参加测量、绘图，有 4 人只参加计算、绘图，另有几人三项工作都参加了. 试问这支测绘队至少有多少人?

14. 设 M 为 100 个连续正整数的集合，已知其中 2 的倍数有 50 个，3 的倍数有 33 个，6 的倍数有 16 个，如何利用这些数据求出 M 中不能被 3 整除的奇数的个数?

15. 已知 p：$1\leqslant x\leqslant 2$，q：$a\leqslant x\leqslant a+2$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求 a 的取值范围.

上下而求索

16. 画出以方程$(y-x)(y-x^2)=0$ 的解为坐标的所有点组成的图象.

17. 通过分析初中学过的数学知识，探讨逻辑用语和集合的联系.（例如，“若 $x\geqslant 2$，则 $x>1$，反之不然”可表述为$[2,+\infty)\subsetneqq(1,+\infty)$.）

2

第2章

一元二次函数、方程和不等式

函数关系、相等关系与不等关系是数学中最基本的数量关系，是构建函数、方程与不等式的基础．本章将学习一些关于不等式的基本知识，并从函数的观点来看方程和不等式，以理解函数、方程和不等式之间的联系，体会数学的整体性．

2.1 相等关系与不等关系

现实世界和日常生活中，“等”与“不等”是两个不同的概念，反映在数学上就是相等关系和不等关系．两者既对立，又统一，它们在一定条件下可以相互转化，在数学研究和数学应用中起着重要的作用．

2.1.1 等式与不等式

现实世界中，既有大量的相等关系，又广泛地存在着不等关系．在方程的学习中，我们学会了用相等关系解决生活中的诸多问题．同样地，可以用不等式刻画现实世界中的数量关系．相等关系更多地刻画“静态的数量关系”，而不等关系经常用来刻画“动态的数量关系”．

在日常生活中，我们经常用大与小、重与轻、长与短、高与矮、不低于或不超过等来描述客观对象在数量上的不等关系．

例如，在交通标识中常见的不等关系有：

如图 2.1－1(1)，该图标的意思是机动车的行驶速度 v 不可超过 60 km/h，即 $v \leqslant 60$．如图 2.1－1(2)，该图标的意思是机动车的总高度 h 不可超过 3.5 m，即 $h \leqslant 3.5$．如图 2.1－1(3)，该图标的意思是机动车的总重 M 不可超过 10 t，即 $M \leqslant 10$．

(1)

(2)

(3)

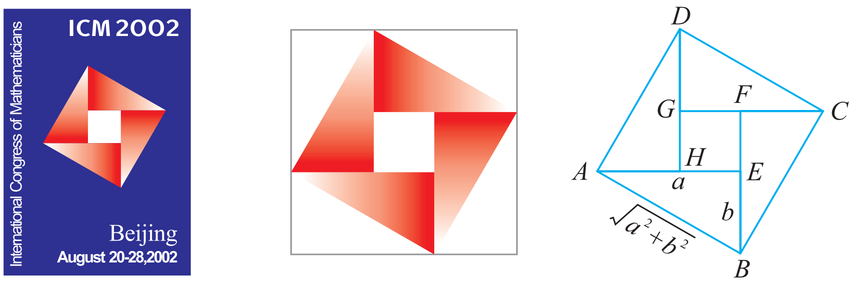
图 2.1－1

在数学中，我们也经常探究几个量之间的不等关系，例如，三角形的任意两边之和大于第三边，三角形的任意两边之差小于第三边，任何实数的平方都大于或等于 0，随机事件发生的概率在 0 与 1 之间，等等．

我们经常用不等式来研究含有不等关系的问题. 下面看两个具体的问题.

问题 1 图 2.1-2(1)是 2002 年在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，它取材于我国古代数学家赵爽的“弦图”，如图 2.1-2(2). 图 2.1-2(3)中的正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形，设直角三角形的两条直角边长分别为 a，$b(a\neq b)$，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样，4 个直角三角形的面积之和为 $4\times\frac{1}{2}ab=2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2. 由于正方形的面积大于 4 个直角三角形的面积之和，我们就得到一个不等式

$$a^2+b^2>2ab.$$



(1) (2) (3)

图 2.1-2

问题 2 某商店食用碘盐以单价 1 元销售，可以卖出 2 500 袋. 据市场调查，若单价每提高 0.1 元，销售量就会减少 50 袋. 若把提价后食用碘盐的单价设为 x 元，怎样用不等式表示销售的总收入不低于 3 000 元呢?

分析 若食用碘盐的单价为 x 元，则销售的总收入为 $\left(2\,500-\frac{x-1}{0.1}\times 50\right)x$ 元. 那么不等关系“销售的总收入不低于 3 000 元”可以用不等式表示为

$$\left(2\,500-\frac{x-1}{0.1}\times 50\right)x\geqslant 3\,000.$$

为了利用不等式研究不等关系，需要对不等式的性质做必要的了解.

我们知道，实数可以比较大小. 如果在数轴上两个不同的点 A 与 B 分别对应两个不同的实数 a 与 b，那么右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大（如图 2.1-3).

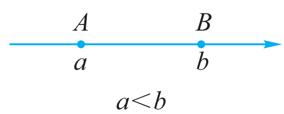


图 2.1-3

关于实数 a 与 b 大小的比较，有以下**基本事实**:

如果 $a-b>0$，那么 $a>b$；如果 $a-b=0$，那么 $a=b$；如果$a-b<0$，那么 $a<b$. 反过来也成立. 即

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0,$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0,$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了．如要证明$x\leqslant a$，只需证明 $x-a\leqslant 0$ 即可．

例 1 比较$(x+1)(x+3)$与$(x+2)^2$ 的大小．

解 因为 $(x+1)(x+3)-(x+2)^2$

$$=(x^2+4x+3)-(x^2+4x+4)$$
$$=-1<0,$$

所以 $(x+1)(x+3)<(x+2)^2$．

例 2 a g 糖水中含有 b g 糖，若再添加 m g 糖(其中 $a>b>0$，$m>0$)，生活常识告诉我们：添加的糖完全溶解后，糖水会更甜．根据这个生活常识，你能提炼出一个不等式吗？试给出证明．

解 因为加糖后糖水更甜，即糖水的浓度变大，所以提炼出的不等式为：

$$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}，其中\ a>b>0，m>0.$$

下面用作差比较法给出证明．

$$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{a(a+m)}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}.$$

因为 a，b，m 都是正数，且 $a>b$，

所以

$$a+m>0，a-b>0.$$

所以 $$\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0.$$

即 $$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}.$$

?

假设有一种机器可以抽取糖水中的糖，生活常识告诉我们：若把糖水中的糖抽掉 m g，则糖水会变淡．于是提炼出一个不等式：若 $a>b>m>0$，则$\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}$．你能证明这个不等式吗？

练习

1．比较大小：

(1) $(x+1)(x-3)$与$(x+2)(x-4)$；

(2) $(x^2-1)^2$ 与 x^4-x^2+1；

(3) x^2+y^2+1 与 $2(x+y-1)$．

2．若 $a<b<1$，试比较$\frac{a}{a-1}$与$\frac{b}{b-1}$的大小．

我们早已熟悉等式的很多基本性质，例如“等式两边同加（或减）一个数，等式仍然成立”“等式两边同乘（或除以）一个数，等式仍然成立”等等. 类比等式，不等式有哪些基本性质呢？

性质 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$. 即

$$a>b \Leftrightarrow b<a.$$

性质 2 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$. 即

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c.$$

证明 因为 $a>b$，$b>c$，

所以 $a-b>0$，$b-c>0$.

因此 $a-c=(a-b)+(b-c)>0$.（理由：正数＋正数＝正数）

即 $$a>c.$$

从以上两个性质还可以推出不等式的以下性质：

$$c<b,\ b<a \Rightarrow c<a.$$

性质 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

对于等式，如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$.

这就是说，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向.

推论 1 如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$.

证明 $a+b>c \Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)$

$\Rightarrow a>c-b$.

这就是说，不等式中任何一项可以改变符号后移到不等式的另一边. 由此可知，“三角形的任意两边之和大于第三边”“三角形的任意两边之差小于第三边”，这两句话逻辑上是等价的.

推论 2 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

证明 因为 $a>b$，$c>d$，所以

$$a+c>b+c,\ b+c>b+d.$$

所以

$$a+c>b+d.$$

显然，这一推论可以推广为：有限个同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向.

性质 4　如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$.

如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

对于等式，如果 $a=b$，那么 $ac=bc$.

证明　因为 $a>b$，所以 $a-b>0$.

又　$c>0$，

因此 $ac-bc=(a-b)c>0$.（理由：正数×正数=正数）

即　$$ac>bc.$$

对于 $c<0$ 的情况，尝试自行证明.

这就是说，在不等式的两边同乘一个正数，不等号的方向不变；若同乘一个负数，则不等号的方向反向.

推论 3　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

证明　因为 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$.

又因为 $c>d$，$b>0$，则 $bc>bd$.

由性质 2 得　$$ac>bd.$$

推论 4　如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n(n\in\mathbf{N}，n\geqslant 2)$.

反复利用推论 3 即可得证.

推论 5　如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

证明　假设 $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$，则有两种情况：

$$\sqrt{a}<\sqrt{b}，或\sqrt{a}=\sqrt{b}.$$

当 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ 时，由推论 4 知，$a<b$；

当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ 时，由二次根式的性质知，$a=b$.

这些都与已知条件 $a>b>0$ 矛盾，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

性质 5　如果 $a>b$，且 $ab>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

如果 $a>b$，且 $ab<0$，那么 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

证明　因为　$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab},$$

所以，当 $a>b$，且 $ab>0$ 时，有 $\frac{b-a}{ab}<0$，

即　$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

当 $a>b$，且 $ab<0$ 时，有 $\frac{b-a}{ab}>0$，

即 $$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$$

例 3 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

证明 因为 $c<d$，所以 $-c>-d$.

由 $a>b$ 和推论 2 知，$a-c>b-d$.

例 4 求证：如果 $a>b>0$，且 $d>c>0$，那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

证明 由 $d>c>0$ 和性质 5，得 $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0$.

又由 $a>b>0$ 和推论 3，得 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

练习

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

（1）若 $a>b$，则 $ca>cb$；　　（2）若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

（3）若 $a>b$，$c\neq 0$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；　　（4）若 $a>b$，$c\neq 0$，则 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$.

2. 回答下列问题：

（1）若 $a>b$，且 $c>d$，能否判断 $a-c$ 与 $b-d$ 的大小？举例说明.

（2）若 $a>b$，且 $c<d$，能否判断 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小？举例说明.

（3）若 $a>b$，且 $c>d$，能否判断 ac 与 bd 的大小？举例说明.

（4）若 $a>b$，$c<d$，且 $c\neq 0$，$d\neq 0$，能否判断 $\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{d}$ 的大小？举例说明.

3. 求证：

（1）若 $a>b>0$，且 $c<d<0$，则 $ac<bd$；

（2）若 $a>b$，且 a，b 同号，$c>0$，则 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$；

（3）若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

2.1.2 基本不等式

在 2.1.1 节问题 1 中，我们通过著名的“赵爽弦图”提炼出如下不等关系：

当 $a\neq b$ 时，$a^2+b^2>2ab$.

不难发现，当图 2.1－2(3)中 E，F，G，H 四点重合，即 $a=b$ 时，有 $a^2+b^2=2ab$. 而且，我们可用作差比较法给出如下证明：

$$(a^2+b^2)-2ab=(a-b)^2\geqslant 0.$$

据此，可得到如下定理：

对任意 a，$b\in\mathbf{R}$，必有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

特别地，当 $a>0$，$b>0$ 时，用 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 分别代替定理中的 a，b 可得如下推论：

对任意正数 a，b，必有 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证法一　因为 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，

所以

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$ 时等号成立.

> 对于任意实数 a，b，都有 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立吗？

证法二　如图 2.1－4 所示，以长是 $a+b$ 的线段为直径作圆 O，在直径 AB 上取点 C，使得 $CA=a$，$CB=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交上半圆于点 D，连接 AD 和 BD，可证 $\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DCB$，那么

$$\frac{CD}{CB}=\frac{CA}{CD},$$

即

$$CD=\sqrt{ab}.$$

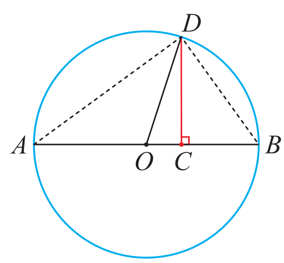


图 2.1－4

因为 OD 是圆的半径，故 $OD=\dfrac{a+b}{2}$. 显然，它大于或等于 CD，

即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当点 C 和点 O 重合，即 $a=b$ 时，等号成立.

一般地，对于正数 a，b，我们把 $\frac{a+b}{2}$ 称为 a，b 的**算术平均数**，$\sqrt{ab}$ 称为 a，b 的**几何平均数**. 把不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}(a>0, b>0)$ 称为**基本不等式**，且可以表述为：

两个正数的算术平均数大于或等于它们的几何平均数.

例 5 设 a，b 为正数，证明下列不等式：

（1）$a+\frac{1}{a} \geqslant 2$；（2）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$.

证明 （1）因为 a，$\frac{1}{a}$ 均为正数，由基本不等式，得

$$a+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}=2,$$

当且仅当 $a=\frac{1}{a}$，即 $a=1$ 时等号成立，所以原不等式成立.

（2）因为 a，b 为正数，所以 $\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$ 也为正数，由基本不等式，得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}=2,$$

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b$ 时等号成立，所以原不等式成立.

例 6 对任意三个正实数 a，b，c，求证：

$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证明 因为 a，b，$c>0$，由基本不等式，得

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},\ b+c \geqslant 2\sqrt{bc},\ c+a \geqslant 2\sqrt{ca},$$

把上述三个式子的两边分别相加，得

$$2(a+b+c) \geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}),$$

即

$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca},$$

当且仅当 $a=b$，$b=c$，$c=a$，即 $a=b=c$ 时等号成立.

例 7 已知 $0<x<1$，求 $\sqrt{x(1-x)}$ 的最大值.

解 因为 $0<x<1$，所以 $x>0$，$1-x>0$，

所以
$$\sqrt{x(1-x)} \leqslant \frac{x+(1-x)}{2}=\frac{1}{2},$$

当且仅当 $x=1-x$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

因此，当 $x=\frac{1}{2}$时，$\sqrt{x(1-x)}$取到最大值$\frac{1}{2}$.

练习

1. 设 a 为正数，计算下列两个数的算术平均数与几何平均数.

(1) 4，16；　(2) 3，12；　(3) 1，$4a^2$；　(4) $5a$，$5a$.

2. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

3. 设 a，b 为正实数，求证：$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 8a^3b^3$.

4. 已知 $0\leqslant x\leqslant 1$，求$(1+x)\cdot x^2\cdot(1-x)$的最大值.

2.1.3 基本不等式的应用

在日常生活与生产中，我们经常会遇到如何使材料最省、利润最高、成本最低等问题，这些问题通常可借助基本不等式来解决. 通过对以下几个实例的讨论，我们将体会基本不等式的应用.

例 8 (1) 把 12 写成两个正数的乘积，当这两个正数取什么值时，它们的和最小？

(2) 把 25 写成两个正数的和，当这两个正数取什么值时，它们的积最大？

解 (1) 设两个正数为 x，y，则 $x>0$，$y>0$，且 $xy=12$.

由

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

可得

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3},$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立，此时 $x=y=2\sqrt{3}$.

所以，把 12 写成两个 $2\sqrt{3}$的乘积时，它们的和最小，最小和为 $4\sqrt{3}$.

> $x+y\geqslant 4\sqrt{3}$，就说明 $x+y$ 始终大于或等于 $4\sqrt{3}$，取等号时，两数之和最小.

(2) 设两个正数为 x，y，则 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=25$.

由

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{25}{2},$$

可得

$$xy\leqslant\frac{625}{4},$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立，此时 $x=y=\frac{25}{2}$.

所以，把 25 写成两个 $\frac{25}{2}$ 的和时，它们的积最大，最大积为 $\frac{625}{4}$.

例 8 蕴含了基本不等式的一个非常重要的应用模型，你能概括出这个模型吗？

已知 x，y 都为正数，则

(1) 如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当且仅当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$.

例 9 某单位欲建造一间底面为矩形且面积为 12 m^2 的背面靠墙的小屋，房屋正面的造价为 1 200 元/m^2，侧面的造价为 800 元/m^2，屋顶的造价为 5 200 元．如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和底面的费用，问怎样设计房屋能使总造价最低？最低总造价是多少元？

解 设房屋正面的长为 x m，侧面的长为 y m，房屋的总造价为 z 元．根据题意，有 $xy=12$，且

$$\begin{aligned} z &=3x\times 1\,200+2\times 3y\times 800+5\,200 \\ &=5\,200+1\,200(3x+4y). \end{aligned}$$

由基本不等式与不等式的性质，可得

$$\begin{aligned} 5\,200+1\,200(3x+4y) &\geqslant 5\,200+1\,200\times 2\sqrt{12xy} \\ &=5\,200+1\,200\times 2\sqrt{12\times 12} \\ &=34\,000, \end{aligned}$$

当且仅当 $3x=4y$ 时等号成立，此时 $x=4$，$y=3$.

所以，将房屋设计成正面长为 4 m，侧面长为 3 m 时总造价最低，最低总造价是 34 000 元．

例 10 某公司设计了如图 2.1－5 所示的一块绿化景观地带，两条平行线段的两端用半圆形弧相连接．已知这块绿化景观地带的内圈周长为 400 m，当平行线段的长设计为多少时，中间矩形区域的面积最大？

图 2.1－5

解 设平行线段长为 x m，半圆形直径为 d m，中间的矩形区域面积为 S m^2.

由题意可知

$$S=xd，且\ 2x+\pi d=400,$$

所以

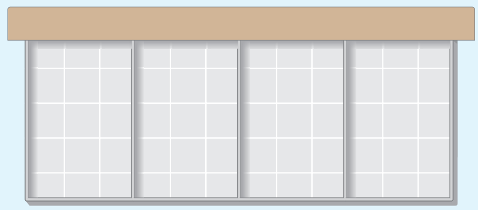
$$S=xd=\frac{1}{2\pi}\cdot\pi d\cdot 2x\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi d+2x}{2}\right)^2=\frac{20\ 000}{\pi},$$

当且仅当 $\pi d=2x=200$，即 $d=\frac{200}{\pi}$，$x=100$ 时，等号成立.

所以，当平行线段的长设计为 100 m 时，中间矩形区域的面积 S 最大，最大值为 $\frac{20\ 000}{\pi}$ m^2.

练习

1. 如图，动物园要以墙体为背面，用钢筋网围成四间具有相同面积的矩形虎笼.



（第 1 题）

（1）现有可围 36 m 长钢筋网的材料，每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使每间虎笼的面积最大？

（2）若每间虎笼的面积为 20 m^2，则每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使围成四间虎笼的钢筋网总长最小？

2. 现在要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的中间印刷面积为 128 dm^2，上下空白各 2 dm，左右空白各 1 dm，如何确定海报尺寸可使四周空白面积最小？

习题 2.1

学而时习之

1. 比较 $(2a+1)(a-3)$ 与 $(a-6)(2a+7)+45$ 的大小.

2. 比较下列各题中两个代数式值的大小：

（1）$(\sqrt{m}-1)^2$ 与 $(\sqrt{m}+1)^2$；

（2）$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 与 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

3. 如果 $a<b<0$，则有（用“>”或“<”填空）：

（1）$-a$ ________ $-b$；（2）$\frac{1}{a}$ ________ $\frac{1}{b}$；

（3）$\sqrt{a^2}$ ________ $\sqrt{b^2}$；（4）$\frac{b}{a}$ ________ 1.

4. 下列结论是否成立？若成立，试说明理由；若不成立，试举出反例．

（1）如果 $c-a>c-b$，那么 $a<b$；

（2）若 $ab>c$，$b>0$，则 $a>\frac{c}{b}$；

（3）若 $ac>bc$，则 $a>b$；

（4）若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$．

5. 证明下列不等式，并讨论等号成立的条件：

（1）若 $a>0$，则 $a+a^3\geqslant 2a^2$；

（2）若 $ab=4$，则 $a^2+b^2\geqslant 8$；

（3）若 $-1\leqslant x\leqslant 1$，则 $\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant\frac{1}{2}$；

（4）若 $ab\neq 0$，则 $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$；

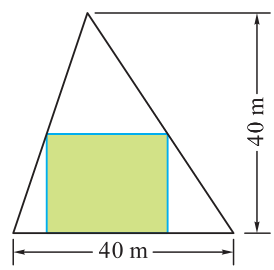
（5）对任意实数 a 和 b，$a^2+b^2+\frac{4}{a^2+b^2+1}\geqslant 3$．

6.（1）把 36 写成两个正数的乘积，当这两个正数取什么值时，它们的和最小？

（2）把 18 写成两个正数的和，当这两个正数取什么值时，它们的积最大？

7. 甲、乙两人同时从 A 地出发，沿同一条线路步行到 B 地．甲在前一半时间的行走速度为 a，后一半时间的行走速度为 b；乙用速度 a 走完前半段路程，用速度 b 走完后半段路程．若 $a\neq b$，问甲、乙两人谁先到达 B 地？

8. 如图，在一块锐角三角形空地中欲建一个面积最大的内接矩形花园（阴影部分），则花园的长、宽分别为多少时面积最大？最大面积是多少？



（第 8 题）

9. 某商品计划提价两次，有甲、乙、丙三种方案，其中 $p>q>0$．经两次提价后，哪种方案提价的幅度大？为什么？

方　案	第一次提价	第二次提价
甲	$p\%$	$q\%$
乙	$q\%$	$p\%$
丙	$\frac{p+q}{2}\%$	$\frac{p+q}{2}\%$

温故而知新

10. 利用不等式的性质证明下列不等式：

(1) 若 $a<b$，$c<0$，则 $(a-b)c>0$；

(2) 若 $a<0$，$-1<b<0$，则 $a<ab^2<ab$.

11. 下列结论是否成立？若成立，试说明理由；若不成立，试举出反例.

(1) 若 $ab>0$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

(2) 若 $ab>0$，则 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\geqslant 2$；

(3) 若 $ab<0$，则 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\leqslant -2$.

12. 某公司计划在本地租地建仓库，已知每月土地费用与仓库到车站的距离成反比，而每月货物的运输费用与仓库到车站的距离成正比. 经测算，若在距离车站 10 km 处建仓库，则每月的土地费用和运输费用分别为 2 万元和 8 万元，那么要使两项费用之和最小，仓库应建在离车站多远处？

13. 某商品进货价为每件 50 元，经市场调查得知，当销售单价 x(元)在区间 $[50，80]$上时，每天售出的件数 $P=\dfrac{10^5}{(x-40)^2}$. 若想每天获得的利润最大，销售价格应定为每件多少元？

2.2 从函数观点看一元二次方程

二次函数与一元二次方程是我们学习过的两个重要内容，它们之间有着怎样的关系呢？

先观察几个具体的一元二次方程及对应的二次函数，如：

（1）一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 与二次函数 $y=x^2-4x+3$；

（2）一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 与二次函数 $y=x^2-4x+4$；

（3）一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 与二次函数 $y=x^2-2x+3$．

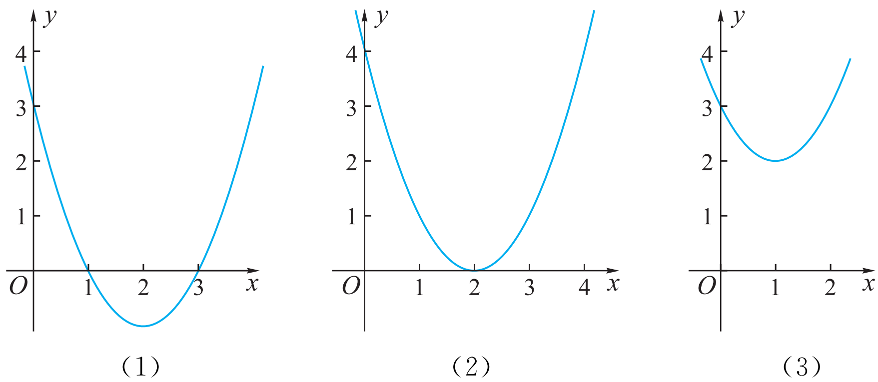


图 2.2－1

容易知道，一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 有两个实数根 $x_1=1$，$x_2=3$；二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象与 x 轴有两个交点(1，0)，(3，0)，如图 2.2－1(1)．这样，方程 $x^2-4x+3=0$ 的两个实数根就是函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象与 x 轴交点的横坐标．

一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=2$；二次函数 $y=x^2-4x+4$ 的图象与 x 轴有唯一的交点(2，0)，如图2.2－1(2)．这样，方程 $x^2-4x+4=0$ 的实数根就是函数 $y=x^2-4x+4$ 的图象与 x 轴交点的横坐标．

一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 没有实数根；二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象与 x 轴没有交点，如图 2.2－1(3)．

上述关系对一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 及对应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是否也成立呢？

一般地，设判别式 $\Delta=b^2-4ac$，我们有：

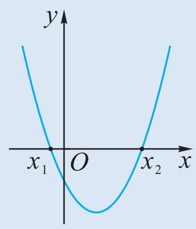
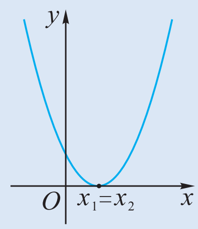
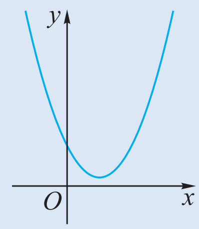
（1）当 $\Delta>0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根 x_1，x_2，对应二次函数

的图象与 x 轴有两个交点$(x_1，0)$，$(x_2，0)$；

（2）当 $\Delta=0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2$，对应二次函数的图象与 x 轴有唯一的交点$(x_1，0)$；

（3）当 $\Delta<0$ 时，一元二次方程没有实数根，对应二次函数的图象与 x 轴没有交点．

根据以上归纳，可得如下表格：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个相异实根 $x_1，x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根

一般地，我们把使得 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$成立的实数 x 叫作二次函数$y=ax^2+bx+c$ 的**零点**．例如，1，3 是二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的两个零点，2 是二次函数 $y=x^2-4x+4$ 的唯一零点，二次函数 $y=x^2-2x+3$ 没有零点．

这样，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点，也就是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标．

例 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2.2－2 所示，根据图象解答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根；

（2）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围．

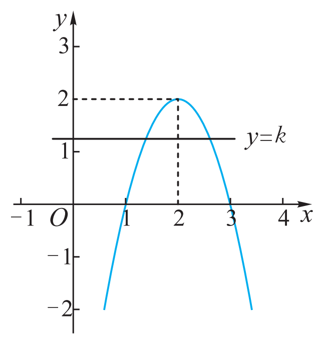


图 2.2－2

解 （1）观察图象可知，二次函数的图象与 x 轴交于$(1，0)$，$(3，0)$两点，故方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=1$，$x_2=3$．

（2）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与直线 $y=k$ 有两个不同的交点．观察图象可知，二次函数图象的顶点纵坐标为 2，所以只有当 $k<2$ 时才能满足条件．

例 2 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, -3)$，与 x 轴的两个交点的横坐标的平方和为 15，求该二次函数的表达式.

解 由二次函数的图象与 y 轴交于点 $A(0,-3)$知，$c=-3$.

设二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标为 x_1，x_2，则 x_1，x_2 是一元二次方程

$$x^2+bx-3=0$$

的两个根，由根与系数的关系知

$$x_1+x_2=-b,\ x_1x_2=-3,$$

所以

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=b^2+6=15,\end{aligned}$$

解得 $b=\pm3$.

故所求二次函数的表达式为 $y=x^2+3x-3$ 或 $y=x^2-3x-3$.

> 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与系数的关系为：
>
> $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,
>
> $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

练 习

1. 利用函数图象判断下列方程有没有实数根，有几个根.

(1) $-x^2+4x+3=0$； (2) $2x(x-2)+3=0$；

(3) $-2x^2+x+3=0$； (4) $5x^2+2x=3x^2+5$.

2. 已知二次函数 $y=x^2-2mx+m^2+3$(m 为常数)，求证：不论 m 为何值，该二次函数均没有零点.

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有最小值-3，且函数的零点为-1 和 2，求该二次函数的表达式.

4. 一名男生推铅球，铅球行进高度 y(m)与水平距离 x(m)之间的关系式是 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. 试求铅球被推出的距离.

多知道一点

十字相乘法

把一个整式写成几个整式的乘积，称为因式分解. 提取公因式分解、应用乘法公式分解、分组分解是我们常用的方法.

对于二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解，“十字相乘法”也是一种值得尝试的方法.

例 分解因式：$6x^2-7x+2$.

上式假如可以分解因式，必然是分成两个一次因式的乘积.

如
$$\begin{aligned}6x^2-7x+2&=(ax+b)(cx+d)\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd.\end{aligned}$$

如果能够找到整数 a，c，b，d 满足 $ac=6$，$bd=2$，且 $ad+bc=-7$，就把 $6x^2-7x+2$ 分解成两个整系数一次因式的乘积了.

对于上例，因式分解的过程大致为：先分别把二次项系数 6 和常数项 2 分解因数，分别得到 $6=3\times2$ 和 $2=(-2)\times(-1)$. 当然，还有其他的分解，分解之后还需检验交叉相乘后能否得到一次项系数. 我们用下面的算式予以体现：

$$\begin{array}{c}(a)3 \qquad -2(b)\\ \times \\ (c)2 \qquad -1(d)\\ \hline 3\times(-1)+2\times(-2)=-7\end{array}$$

因此可得 $a=3$，$b=-2$，$c=2$，$d=-1$，则 $6x^2-7x+2=(3x-2)(2x-1)$.

一般地，对于二次三项式 ax^2+bx+c，如果能够找到 a_1，a_2，c_1，c_2 满足 $a=a_1a_2$，$c=c_1c_2$，且 $b=a_1c_2+a_2c_1$，则有因式分解

$$ax^2+bx+c=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2).$$

为了便于理解，我们将 $a=a_1a_2$ 与 $c=c_1c_2$ 的因子排成如下方式：

$$\begin{array}{c}a_1 \qquad c_1\\ \times \\ a_2 \qquad c_2\\ \hline \text{交叉乘积之和 } a_1c_2+a_2c_1=b\end{array}$$

十字相乘法适用于二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根的情况.

练习 分解因式：(1) x^2+5x+6； (2) x^2-x-6；

(3) $2x^2-7x+3$； (4) $-6x^2-x+12$.

习题 2.2

学而时习之

1. 利用函数图象判断下列方程有没有实数根，有几个根.

(1) $2x^2-3x+1=0$；　　(2) $9x^2+12x+4=0$；

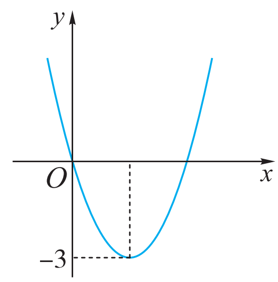
(3) $-x^2+2x-4=0$.

2. 已知二次函数 $y=x^2+ax+b$ 的两个零点分别是 2 和 3，求 a，b 的值.

3. (1) 求二次函数 $y=x^2+px+p-2$ 的零点个数；

(2) 已知二次函数 $y=x^2+2x+a$ 在区间$[-2, 1]$上的最小值大于 0，求该函数的零点个数.

4. 如图所示为二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象，若一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 有实数根，求 m 的最大值.



（第 4 题）

5. 已知二次函数 $y=(1-m)x^2+4x-3$ 的图象开口向下，与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$两点.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 当 $x_1^2+x_2^2=10$ 时，求该二次函数的表达式.

温故而知新

6. 已知二次函数 $y=x^2-4x+3.5$ 的图象交 x 轴于 A，B 两点，交 y 轴于点 C，函数图象的顶点为 P，求 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle ABP}$.

7. 若一元二次方程 $5x^2-7x-a=0$ 的一个根在区间$(-1, 0)$上，另一个根在区间$(1, 2)$上，求实数 a 的取值范围.

2.3 一元二次不等式

2.3.1 一元二次不等式及其解法

许多实际问题都可以转化为不等式问题，例如：

问题 某杂志每本的成本为 3 元，现定价为 5 元，发行量为 10 万本．杂志社为了扩大发行量，准备略降低单价，据市场调查知，若单价每降低 0.1 元，发行量就相应增加 1 万本．要使总利润不会减少，则杂志的定价应在什么范围?

分析 设杂志的单本定价为 x 元($3\leqslant x\leqslant 5$)，单价每降低 0.1 元发行量就相应增加10^4 本，即单价每降低 1 元，发行量就相应增加10^5 本，据此可列表如下：

项　目	降价前	降价后
成本/(元/本)	3	3
定价/(元/本)	5	x
发行量/本	10^5	$10^5+10^5(5-x)$
总利润/元	$(5-3)\times 10^5$	$(x-3)[10^5+10^5(5-x)]$

要使总利润不低于降价前的总利润，就有

$$(x-3)[10^5+10^5(5-x)]\geqslant(5-3)\times 10^5,$$

整理得

$$x^2-9x+20\leqslant 0.$$

只要求得以上不等式的解集，就得到了问题的答案．

我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为**一元二次不等式**．

怎样求上面一元二次不等式的解集呢?

从 2.2 节我们知道，一元二次方程与相应的二次函数有着密切的联系，一元二次方程的根就是对应二次函数的零点．那么，一元二次不等式和相应的二次函数是否也有类似的联系呢?

解一元二次方程 $x^2-9x+20=0$，得两个实数根

$$x_1=4，x_2=5.$$

然后画出二次函数 $y=x^2-9x+20$ 的图象，如图 2.3－1 所示.

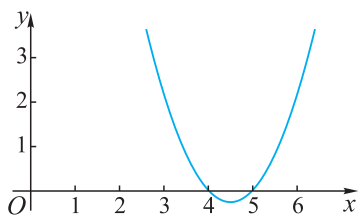


图 2.3－1

观察图象可知，当 $x<4$ 或 $x>5$ 时，函数图象位于 x 轴上方，此时 $y>0$，即 $x^2-9x+20>0$；当 $4<x<5$ 时，函数图象位于 x 轴下方，此时 $y<0$，即 $x^2-9x+20<0$. 所以，一元二次不等式 $x^2-9x+20\leqslant 0$ 的解集是

$$\{x \mid 4\leqslant x\leqslant 5\}.$$

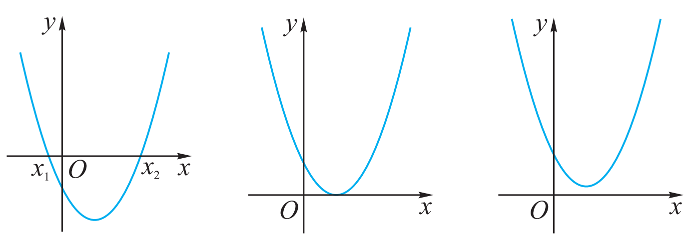
所以，当杂志的定价在 4～5 元/本的范围内时，总利润不会减少.

其实，上述方法可以推广到求一般的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集. 我们可由二次函数的零点与一元二次方程根的关系，先求出对应一元二次方程的根，再根据二次函数的图象与 x 轴的位置关系确定一元二次不等式的解集.

由于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象可根据零点个数分为 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 三种情况，因此，我们可分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 与 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集.

计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

1. 当 $\Delta>0$ 时，先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 x_1 和 x_2（不妨设 $x_1<x_2$），二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2.3－2(1) 所示，因此，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty，x_1)\cup(x_2，+\infty)$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $(x_1，x_2)$.



(1)　　(2)　　(3)

图 2.3－2

2. 当 $\Delta=0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象其顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a}，0\right)$ 在 x 轴上，其余部分都在 x 轴的上方，如图 2.3－2(2) 所示，因此，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集

为$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$，不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为$\varnothing$.

3. 当$\Delta<0$时，二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象全部位于x轴的上方，如图2.3-2(3)所示，因此，不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(-\infty,+\infty)$，不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为$\varnothing$.

因此，解形如$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$(其中$a>0$)的一元二次不等式，一般可分为三步：

(1) 确定对应一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根；

(2) 画出对应二次函数$y=ax^2+bx+c$的大致图象；

(3) 由图象得出不等式的解集.

对于二次项系数是负数(即$a<0$)的一元二次不等式，可以先把二次项系数化为正数，再按上述步骤求解.

借助二次函数图象的直观性，得到求解一元二次不等式的通法，这体现了数形结合，亦反映了函数、方程与不等式之间的关联.

例 1 解不等式$2x^2-x-3\geqslant 0$.

解 方程$2x^2-x-3=0$有两个不相等的实数根

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{2}.$$

函数$y=2x^2-x-3$的图象如图2.3-3所示，与x轴有两个交点$(-1,0)$，$\left(\frac{3}{2},0\right)$，由图象得不等式$2x^2-x-3\geqslant 0$的解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant\frac{3}{2}\right\}.$$

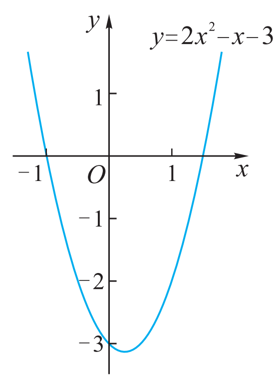


图 2.3-3

例 2 解不等式$4x^2-4x+1>0$.

解 方程$4x^2-4x+1=0$有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}.$$

函数$y=4x^2-4x+1$的图象如图2.3-4所示，与x轴仅有一个交点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，由图象得不等式$4x^2-4x+1>0$的解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2}\right\}.$$

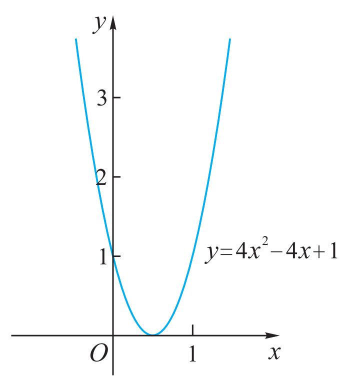


图 2.3-4

例 3 解不等式$-x^2+4x-5>0$.

解 （方法一）在不等式两端同时乘以-1，可得$x^2-4x+5<0$.

由于$\Delta<0$，所以方程$x^2-4x+5=0$没有实数根，于是函数$y=x^2-4x+5$的图象与x轴没有交点，如图2.3-5(1)所示，由图象得不等式$x^2-4x+5<0$的解集为$\varnothing$.

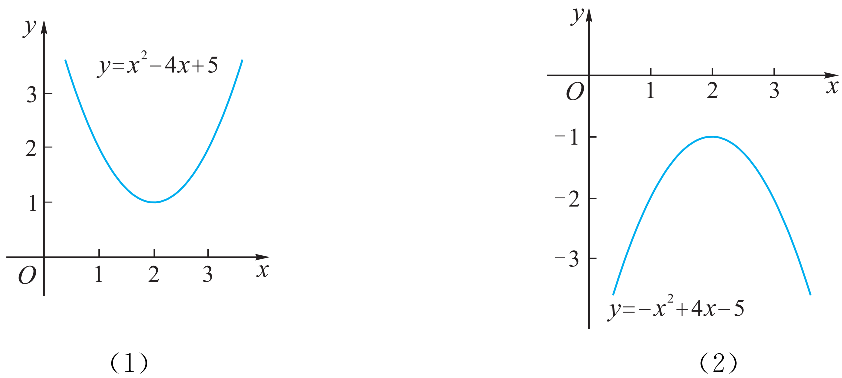


图 2.3-5

（方法二）方程$-x^2+4x-5=0$没有实数根，于是函数$y=-x^2+4x-5$的图象与x轴没有交点，如图2.3-5(2)所示，由图象得不等式$-x^2+4x-5>0$的解集为$\varnothing$.

练习

解下列不等式：

(1) $x^2-x-6<0$；

(2) $-2x^2+x-5<0$；

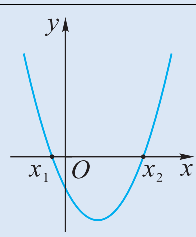
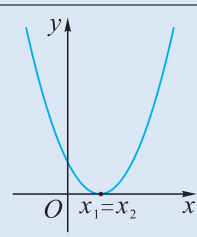
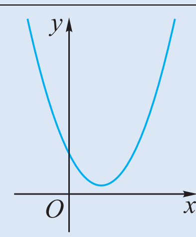
(3) $3x^2+2x+\dfrac{1}{3}<0$；

(4) $16-24x\leqslant-9x^2$；

(5) $(x+1)^2-6>0$；

(6) $(x-3)(x+3)>1$.

由求解一元二次不等式的方法与过程可知，一元二次不等式与相应一元二次方程和二次函数有紧密的联系，具体地，我们可用如下一张表格予以说明：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个相异实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根

续表

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

不难发现，一元二次方程和一元二次不等式分别是二次函数函数值等于零和不等于零时的“局部”情形，而相应一元二次方程和一元二次不等式的解都可由二次函数的图象得出.

例如，根据二次函数 $y=2x^2-x-1$ 的图象，可得一元二次方程 $2x^2-x-1=0$ 的两实数根分别为 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$，则一元二次不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle\vert\, x<-\dfrac{1}{2}\text{或 }x>1\right\}$，一元二次不等式 $2x^2-x-1\leqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle\vert\, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

例 4 解不等式 $\dfrac{-2x+5}{x-2}>0$.

解 原不等式等价于 $(-2x+5)(x-2)>0$，即 $(2x-5)(x-2)<0$，

所以

$$2<x<\frac{5}{2}.$$

故原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle\vert\, 2<x<\dfrac{5}{2}\right\}$.

例 5 若对任意的实数 x，一元二次不等式

$$x^2+2(1+k)x+3+k>0$$

恒成立，求实数 k 的取值范围.

解 由题意知，一元二次不等式 $x^2+2(1+k)x+3+k>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，于是对应二次函数 $y=x^2+2(1+k)x+3+k$ 的图象开口向上，且恒在 x 轴上方，所以

$$\Delta=4(1+k)^2-4(3+k)<0,$$

即

$$4(k^2+k-2)<0,$$

求解该一元二次不等式得

$$-2<k<1.$$

例 6 已知不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(-3, -1)$，求实数 a，b 的值.

解 由一元二次不等式解集的结构知，-3 和 -1 是一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根，所以

$$\begin{cases}(-3)^2-3a+b=0,\\(-1)^2-a+b=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=4,\\b=3.\end{cases}$$

练习

1. 解不等式：(1) $\dfrac{x-3}{-3x+6}<0$； (2) $\dfrac{x+1}{3x-2}\geqslant 2$.

2. 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $x^2+2(k-3)x+4k=0$ 分别满足：

(1) 无实数根？ (2) 有两正实根？

3. 设关于 x 的不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 的解集为 $(-\infty, +\infty)$，求实数 a 的取值范围.

4. 若不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $\{x \mid 2<x<3\}$，求不等式 $bx^2-ax-1\geqslant 0$ 的解集.

2.3.2 一元二次不等式的应用

在 2.3.1 节中，我们学习了一元二次不等式的解法，本节我们将通过具体实例的分析与求解，体会一元二次不等式的实际应用.

例 7 某产品的总成本 y(万元)与产量 x(台)之间满足如下关系式：

$$y=3\,000+20x-0.1x^2\ (x\in(0, 240), x\in \mathbf{N}_+).$$

若每台产品的售价为 25 万元，则生产者不亏本(销售收入不小于总成本)时的最低产量为多少？

解 根据题意可得

$$25x-(3\,000+20x-0.1x^2)\geqslant 0,$$

整理得

$$x^2+50x-30\,000\geqslant 0.$$

方程 $x^2+50x-30\,000=0$ 有两个不相等的实数根

$$x_1=150, x_2=-200.$$

由图象得不等式 $x^2+50x-30\ 000\geqslant 0$ 的解集为

$$\{x|x\leqslant -200 \text{ 或 } x\geqslant 150\}.$$

在这个实际问题中，$x>0$，所以 x 的最小值为 150，即生产者不亏本时的最低产量为 150 台.

例 8 已知汽车从踩刹车到停车所滑行的距离 L(m)与速度 v (km/h)之间有如下关系式：

$$L=k\cdot M\cdot v^2,$$

其中 k 是比例系数，且 $k>0$，M 是汽车质量(t). 若某辆卡车不装货物(司机体重忽略不计)以 36 km/h 的速度行驶时，从刹车到停车需要走 20 m. 当这辆卡车装着等于车重的货物行驶时，为保证安全，要在发现前面 20 m 处有障碍物时能在离障碍物 5 m 以外处停车，则最高速度应低于多少(设司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 s)?

解 由关系式 $L=k\cdot M\cdot v^2$，将 $v=36$，$L=20$ 代入得 $k\cdot M=\dfrac{20}{36^2}$.

又卡车司机从发现障碍物到踩刹车需经过 1 s，这 1 s 内卡车已行驶的路程为 $v\cdot\dfrac{1\ 000}{3\ 600}\ \text{m/s}\cdot 1\ \text{s}=\dfrac{5v}{18}\ \text{m}$. 因此，

$$\frac{5v}{18}+k\cdot 2M\cdot v^2<20-5,$$

整理得

$$\frac{2}{18^2}v^2+\frac{1}{18}v-3<0.$$

方程 $\dfrac{2}{18^2}v^2+\dfrac{1}{18}v-3=0$ 有两个不相等的实数根

$$v_1=-27,\ v_2=18.$$

由图象得不等式 $\dfrac{2}{18^2}v^2+\dfrac{1}{18}v-3<0$ 的解集为

$$\{v|-27<v<18\}.$$

在这个实际问题中，$v>0$，所以最高速度应低于 18 km/h .

例 9 某化学试剂生产厂以 x kg/h 的速度运输生产某种产品(生产条件要求边生产边运输，且 $1\leqslant x\leqslant 10$)，每小时可获得利润 $100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$元.

(1) 要使运输生产该产品 2 h 获得的利润不低于 3 000 元，求 x 的取值范围.

(2) 要使运输生产 900 kg 该产品获得的利润最大，该工厂应该选取何种运输生产速度？并求最大利润.

解 (1) 依题意可得

$$2\times100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\geqslant3\ 000,$$

即
$$5x-14-\frac{3}{x}\geqslant0.$$

因为 $1\leqslant x\leqslant10$，所以 $5x^2-14x-3\geqslant0$，即 $(x-3)(5x+1)\geqslant0$，解得 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{5}$. 结合 $1\leqslant x\leqslant10$ 知，x 的取值范围为 $3\leqslant x\leqslant10$.

（2）设利润为 y 元，则依题意可得

$$\begin{aligned}y&=\frac{900}{x}\times100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\\&=90\ 000\left(-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+5\right)\\&=90\ 000\left[-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{61}{12}\right].\end{aligned}$$

因此，当 $\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$，即运输生产速度为 6 kg/h 时，该工厂获得的利润最大，最大利润为 457 500 元.

由上观之，我们利用一元二次不等式解决实际问题的一般步骤是：

（1）理解题意，分析清楚量与量之间的关系；

（2）建立相应的不等关系，把实际问题抽象为一元二次不等式问题；

（3）解这个一元二次不等式得到实际问题的解.

练习

1. 一家汽车制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量 x（辆）与创收价值 y（元）之间有如下关系式：

$$y=-2x^2+220x.$$

若这家制造厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 6 000 元以上，那么它在一个星期内生产的摩托车数量 x 应满足什么条件？

2. 行驶中的汽车，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，这段距离称为“刹车距离”. 刹车距离是分析交通事故的一个重要指标.

在一个限速为 40 km/h 的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场勘查测得甲车的刹车距离略超过 12 m，乙车的刹车距离略超过 10 m，又知甲、乙两种车型的刹车距离 s（m）与车速 v（km/h）分别有如下关系式：

$$s_{甲}=0.1v+0.01v^2,\quad s_{乙}=0.05v+0.005v^2.$$

问：甲、乙两辆汽车是否有超速现象？

习题 2.3

学而时习之

1. 下面四个不等式中解集为空集的是(　　)

(A) $3x^2-7x-10\leqslant 0$　　(B) $-x^2+6x-9\leqslant 0$

(C) $-2x^2+x<-3$　　(D) $x^2-4x+7\leqslant 0$

2. 集合 $A=\{x|x^2-x-12\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|2x^2-x-6\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　)

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 3

3. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的一个充要条件是(　　)

(A) $\begin{cases}a>0,\\ \Delta>0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}a<0,\\ \Delta>0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0\end{cases}$

4. 解下列一元二次不等式：

(1) $2x^2-2\sqrt{2}x+1>0$；　　(2) $x^2+x-1<0$；

(3) $-3x^2+5x-4\geqslant 0$；　　(4) $(2x-1)^2<4$；

(5) $(x+1)(x+2)<(x+1)(2-x)+1$；　　(6) $(3x+2)(x+2)>4$.

5. 解不等式：(1) $\dfrac{1}{x}>4$；　　(2) $\dfrac{1}{2-x}\leqslant 3$.

6. 某服装公司生产的衬衫，在某城市年销售 8 万件，现该公司在该市设立代理商来销售衬衫，代理商向服装公司收取销售金额 $r\%$ 的代理费. 为此，该衬衫每件价格要提高到 $\dfrac{80}{1-r\%}$ 元才能保证公司利润. 由于提价每年将少销售 $0.62r$ 万件，如果代理商每年收取的代理费不少于 16 万元，求 r 的取值范围.

温故而知新

7. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-16<0\}$，$B=\{x|-x^2+3x+18>0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

8. 解关于 x 的不等式：$x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$.

9. 某旅店有 200 张床位. 若每张床位一晚上的租金为 50 元，则可全部租出；若将出租收费标准每晚提高 $10x$ 元(x 为正整数)，则租出的床位会相应减少 $10x$ 张. 若要使该旅店某晚的收入不少于 12 600 元，则每张床位的出租价格可定在什么范围内?

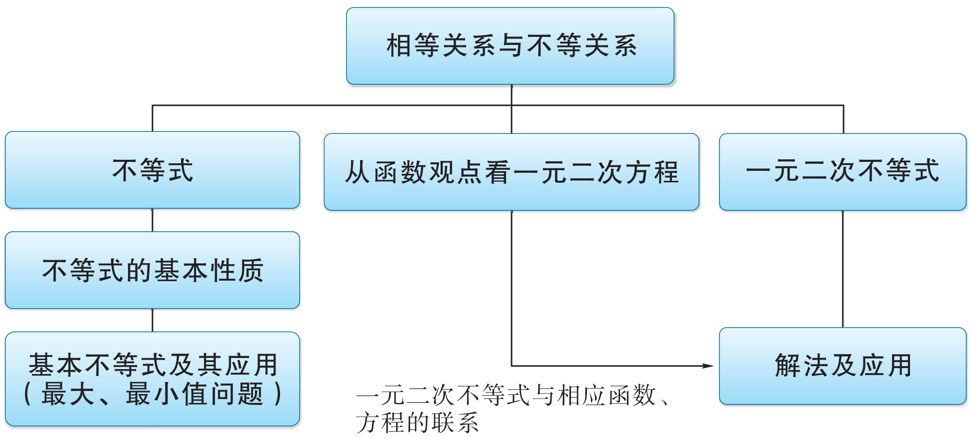
10. 在一次体育课上，某同学以初速度 $v_0=12$ m/s 竖直上抛一排球，该排球能够在抛出点 2 m 以上的位置最多停留多长时间?（注：若不计空气阻力，则竖直上抛的物体距离抛出点的高度 h(m)与时间 t(s)满足关系式 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8$ m/s^2.）

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m+2=0$ 的两个相异实根的平方和大于 2，求实数 m 的取值范围.

12. 已知一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x|x<2$ 或 $x>3\}$，求不等式 $bx^2+ax+c>0$ 的解集.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 相等关系、不等关系是现实世界最基本的数量关系. 现实生活中存在着大量的不等关系，你能举出一些实例，并用不等式来描述这些不等关系吗?

2. 试类比学过的等式与不等式的性质，进一步探索等式与不等式的共性与差异.

3. 基本不等式以及不等式的性质是证明不等式的重要手段和方法. 你能证明基本不等式吗? 在使用基本不等式解决最大(小)值等实际问题时，需要注意什么?

4. 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式，可以感悟到数学知识之间的紧密关联——相等与不等是可以相互转化的，正是这种相互转化，使我们可以借助函数图象和方程的解来求解不等式. 试结合问题，体会解一元二次不等式的方法与步骤.

5. 不等式可以刻画现实世界中的数量关系. 尝试从实际问题中抽象出一元二次不等式模型，并进行求解，进而解决简单的实际问题.

复习题二

学而时习之

1. 证明下列不等式：

(1) 若 $a>b>0$，则 $a^3b>ab^3$；

(2) 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $x(x+2)<(x+1)^2$；

(3) 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $x^2>4x-5$；

(4) 若 $x\neq-1$，则$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\dfrac{1}{3}$.

2. 证明下列不等式：

(1) 若 $a<b<0$，$c<d<0$，则 $ac>bd$；

(2) 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a^2c>b^2d$.

3. 证明下列不等式：

(1) 若 a，b，c，d 都是正数，则：

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant4abcd;$$

(2) 若 a，b，c 是非负实数，则

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\geqslant6abc;$$

(3) 若 a，b 是非负实数，则

$$a+b+2\geqslant2(\sqrt{a}+\sqrt{b});$$

(4) 若 a，$b\in\mathbf{R}$，则$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

4. 已知二次函数 $y=x^2-(m-1)x+2m$ 在$[0，1]$上有且只有一个零点，求实数 m 的取值范围.

5. 解不等式：

(1) $-3x^2+8x-4<0$； (2) $4x^2-20x+25\leqslant0$；

(3) $4<x^2-x-2<10$； (4) $-1<2x^2-x-2<1$.

6. (1) 在面积为定值 S 的扇形中，半径是多少时扇形的周长最小？

(2) 在周长为定值 P 的扇形中，半径是多少时扇形的面积最大？

7. 某种型号的汽车在水泥路面上的刹车距离 s(m)与汽车行驶速度 v(km/h)之间有如下关系式：

$$s=\frac{1}{20}v+\frac{1}{180}v^2.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 39.5 m，那么这辆汽车刹车前的速度至少为多少？(结果精确到 0.01 km/h)

8. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为$\left(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{3}\right)$，求 a 和 b 的值.

温故而知新

9. 已知 $0<x<4$，求 $\frac{1}{4-x}-x$ 的最小值.

10. 小王从甲地到乙地往返的速度分别为 a km/h 和 b km/h(其中 $a<b$)，其全程的平均速度为 v km/h，则(　　)

(A) $a<v<\sqrt{ab}$　　(B) $v=\sqrt{ab}$

(C) $\sqrt{ab}<v<\frac{a+b}{2}$　　(D) $v=\frac{a+b}{2}$

11. 已知 $m<n$，试写出两个一元二次不等式，使它们的解集分别为

(1) $(-\infty, m)\cup(n, +\infty)$；　　(2) (m, n).

12. 设二次函数 $y=kx^2-kx+\frac{3}{4}$.

(1) 若方程 $y=0$ 有实根，则实数 k 的取值范围是________.

(2) 若不等式 $y>0$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 k 的取值范围是________.

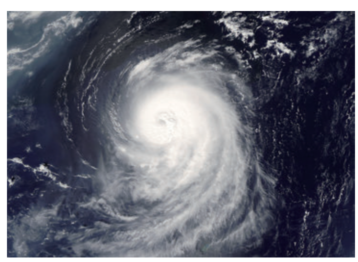
(3) 若不等式 $y>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围是________.

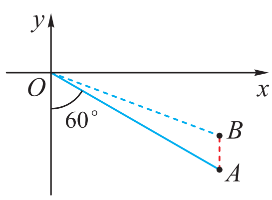
13. 如图，某新建居民小区欲建一面积为 700 m^2 的矩形绿地，在绿地四周铺设人行道，设计要求绿地长边外人行道宽3 m，短边外人行道宽 4 m. 怎样设计绿地的长与宽，才能使人行道的占地面积最小？(结果精确到 0.1 m)

(第 13 题)

14. 某单位用 2 160 万元购得一块空地，准备在该地上建造一栋至少 10 层、每层 2 000 m^2 的楼房. 经预算，如果将楼房建为 $x(x\geqslant 10)$层，则每平方米的平均建筑费用为$(560+48x)$元. 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为多少层？(注：平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用，平均购地费用=$\frac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$.)

15. 如图，码头 O 南偏东 60°方向 400 km 处(A)有一个台风中心. 台风正以 40 km/h 的速度向正北方向移动，且距台风中心 350 km 以内都会受台风影响. 问从现在起多长时间后，码头 O 将受台风影响，码头受台风影响的时间大约多久？





(第 15 题)

上下而求索

16. 证明不等式：

（1）若 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，则 $ab^2+a^2b<a^3+b^3$；

（2）若 a，b 是实数且 $a\neq b$，则 $ab^3+a^3b<a^4+b^4$；

（3）把(1)和(2)中的不等式推广到一般情形，并证明你的结论.

17. 为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层. 某幢建筑物要建造可使用 20 年的隔热层，每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C(万元)与隔热层厚度 x(cm)满足关系式：

$$C=\frac{k}{3x+5}\ (0\leqslant x\leqslant 10).$$

若不建隔热层，每年能源消耗费用为 8 万元. 设 y(万元)为隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和.

（1）求 k 的值及 y 的表达式.

（2）问隔热层修建多厚时，总费用 y 最小？并求最小值.

3

第 3 章

函数的概念与性质

一切事物都处在相互关联和不断变化的过程之中．函数是描述变量间依赖关系的重要数学模型．用集合和对应的语言更清楚地表达函数概念，有助于我们正确认识函数、理解函数和运用函数解决问题．

3.1 函　数

3.1.1 对函数概念的再认识

初中课程中，我们已经学习了**函数**概念．联系着函数概念，还学习了有关的术语，例如**自变量**、**对应**、**函数值**等等．

函数对我们来说并不陌生．从学习加减乘除开始，我们实际上就一直在和函数打交道．

例如加法，设 $s=x+3$，给定了实数 x，则**对应**的 s 的值就确定了．s 可看成是变量 x 的函数；x 的取值范围是 $\mathbf{R}$，s 的取值范围也是 $\mathbf{R}$．

例如梯形面积公式 $S=\dfrac{(a+b)h}{2}$，若梯形两底 a 和 b 的值确定了，**对应**的面积 S 就可以看成是变量 h 的函数；h 和 S 的取值范围都是 $(0,+\infty)$．

例如圆周长公式 $C=2\pi r$，给定了半径 r 的值，**对应**的圆周长 C 的值就确定了．C 可看成是变量 r 的函数；r 和 C 的取值范围都是 $(0,+\infty)$．

函数变量的取值范围，可以根据讨论问题的情形来确定．例如自由落体的路程公式 $H=\dfrac{1}{2}gt^2$，给定了下落时间 t 的值，则**对应**的下落距离 H 的值就确定了．H 可看成是变量 t 的函数．t 的取值范围是有限区间 $[0,T]$，而 T 的值则根据具体的物理条件来确定．

有时，变量和函数值之间的对应关系并不一定是用同一个算术表达式给出的．例如，$|x|$ 可以看成 x 的函数，它的定义是“当 $x\geqslant 0$ 时 $|x|=x$，否则 $|x|=-x$”．这个函数自变量 x 的取值范围是 $\mathbf{R}$，那么其函数值的取值范围是什么呢？

函数是变量与变量之间的确定性对应关系．确定性是函数概念的灵魂．矩形的周长和面积之间也有关系，周长很短的矩形面积不可能很大．但给定了周长并不能确定面积，所以矩形的面积不是周长的函数．

回顾一下，初中数学中的函数概念是这样的：

如果在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一的值与它对应，那么称 y 是 x 的函数．其中 x 是自变量，y 是因变量．

这里说的"变量 x 的每一个值""一个变化过程"是什么意思呢？变量在什么范围内取值？什么范围内变化？我们只能在具体例子中去体会．

有了集合的概念，就可以将变量的取值范围看成集合，将函数看成两个集合之间的对应关系．

一般地，我们有：

设 A，B 是两个非空的实数集，如果按照某种确定的对应关系 f，对于集合 A 中的任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一的数 y 和它对应，那么称这样的对应 f：$A \to B$ 为定义于 A 取值于 B 的**函数**，也记作

$$y=f(x)\ (x \in A,\ y \in B).$$

其中，x 叫作自变量，x 的取值范围 A 叫作函数的**定义域**；与 $x \in A$ 对应的数 y 叫作函数值，记作 $f(x)$，所有函数值组成的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫作函数的**值域**．值域是集合 B 的子集．

由函数的定义可知，函数的值域由函数的定义域和对应关系完全确定，因此确定一个函数主要取决于两个要素：定义域和对应关系．对值域的了解表明对函数有了更深入的认识，所以值域也是函数的要素之一．

两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，当且仅当有相同的定义域 U 且对每个 $x \in U$ 都有 $f(x)=g(x)$ 时，叫作**相等**．也就是说，即使两个函数的对应关系形式上相同，但定义域不同，那么它们不是同一个函数．

例 1 确定下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$；（2）$g(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$．

分析 若只给出函数的关系式 $y=f(x)$ 而没有指明其定义域，那么函数的定义域就是指使关系式有意义的 x 值的全体所组成的集合．

解 （1）要使二次根式有意义，实数 x 需满足 $x^2+x-2 \geqslant 0$，即 $x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant 1$．故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ -2] \cup [1,\ +\infty)$．

（2）要使分式有意义，当且仅当分式的分母 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2) \neq 0$，即需满足 $x \neq -1$ 且 $x \neq -2$．故函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ -2) \cup (-2,\ -1) \cup (-1,\ +\infty)$；也可表示为 $\{x \mid x \neq -1$ 且 $x \neq -2\}$ 或 $\mathbf{R} \setminus \{-1,\ -2\}$．

函数定义中还引进了一个表示对应关系的函数符号 $f(x)$．善于使用这个符号，会使推理和计算更为简便严谨.

例 2 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=x^2$，计算下列各式：

(1) $f(2)+g(3)$；　　　　(2) $f(a^2)-g(a)$；

(3) $f(f(f(0)))$.

解 (1) $f(2)+g(3)=(2+1)+3^2=3+9=12$；

(2) $f(a^2)-g(a)=(a^2+1)-a^2=1$；

(3) 因为 $f(0)=0+1=1$，

所以 $f(f(0))=f(1)=1+1=2$，

从而 $f(f(f(0)))=f(2)=2+1=3$.

练习

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；　　　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$；

(3) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$；　　　　(4) $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$.

2. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=x-3$ 和 $g(x)=x^2+1$，计算下列各式：

(1) $f(2)+g(-1)$；　　　　(2) $f(u^2)-2g(u)$；

(3) $g(g(g(1)))$.

3. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=x^2+1$.

(1) 求 $f(t)+1$ 的值；　　　　(2) 求 $f(t+1)$的值.

多知道一点

映　射

在函数的定义中，把“数集”放宽为一般的集合，就得到**映射**的概念：

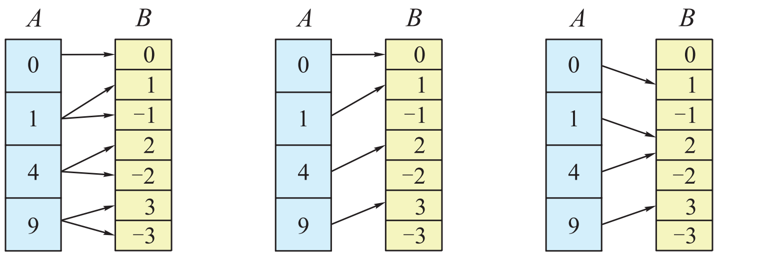
映射的定义：设 A，B 是两个非空的集合，如果按照某种对应关系 f，对于集合 A 中的任何一个元素 x，在集合 B 中都有唯一的元素 y 和它对应，这样的对应 f 叫作集合 A 到集合 B 的**映射**，记作 f：$A \to B$，或者

$$y=f(x)(x\in A,\ y\in B).$$

这里，A 叫作映射的**定义域**，与 $x\in A$ 对应的 y 叫 x 的像，记作 $f(x)$或 $y=f(x)$，由所有 $x\in A$ 的像组成的集合叫作映射的**值域**.

对照映射的定义，就能看出本章所讲的函数是**非空数集到非空数集的映射**.

下图(1)～(3)中所表示的集合 A 和集合 B 间的对应关系中，哪个是从集合 A 到集合 B 的映射，哪个不是?



（1）求平方根　（2）求算术平方根　（3）任意指定对应

按映射的定义可知：

(1)的对应关系是“开平方”，即对于集合 A 中的每一个非负数 x，除了 0 之外，集合 B 中都对应着两个平方根，例如，和 A 中元素 1 相对应的 B 中元素有两个：1 和-1，所以这不是从集合 A 到集合 B 的映射.

(2)的对应关系是“求算术平方根”，而每个非负实数 x 都有且只有一个算术平方根，因此，这一对应是从集合 A 到集合 B 的映射.

(3)的对应关系是任意指定的，集合 A 中的任一个数都对应于集合 B 中唯一确定的一个数，因此，这一对应是从集合 A 到集合 B 的映射.

映射对我们来说其实并不陌生. 加减乘除，都是二元数组集合到数集合的映射；三角形的面积，是三角形集合到数集合的映射；平面上点和坐标的对应，是点集合到二元数组集合的映射；万物都有名字，名字就是事物到字符的映射.

3.1.2 表示函数的方法

把一个函数的**对应关系**和**定义域**交代清楚的办法，就是表示函数的方法．在初中数学中，我们用数学表达式、函数表或函数图象来表示函数．这是表示函数的三种主要方法，分别叫作**解析法**、**列表法**和**图象法**．

数学研究的对象是抽象的．抽象的东西看不见摸不着，把它表示出来才便于研究．因此，数学讲究表示．

一 解析法

正方形面积 S 是边长 x 的函数，用公式 $S=x^2(x\in(0,+\infty))$ 来表示，既说明了 S 是 x 的函数，又说明了如何从 x 出发求出对应的面积 S．

这种把常量和表示自变量的字母用一系列运算符号连接起来得到的式子，叫作**解析式**（也叫作解析表达式或函数关系式），**解析法**就是用解析式来表示函数的方法．

用解析式表示函数简捷明了，便于计算函数值和推导函数的性质，是最基本最常用的函数表示方法之一．

例 3 某地在山区修建水库大坝，坝高随山势起伏在 10 m 到 50 m 之间变化．已知坝体的横断面为梯形，上底 a 为 30 m，下底 b 与坝高 x 之间满足关系式：$b=30+4x$．为估计修建大坝的土方量，需要把横断面面积表示为坝高的函数 $y=S(x)$，试写出该函数的解析式及其定义域，并求出坝高为 15 m，20 m，30 m 时大坝横断面的面积．

解 由题意可得函数 $y=S(x)$ 的解析式为

$$S(x)=\frac{(a+b)x}{2}=\frac{(30+30+4x)x}{2}=2x^2+30x,$$

该函数的定义域为[10，50]．

由函数解析式可求出对应于坝高为 15 m，20 m，30 m 时大坝横断面的面积分别为 $S(15)=900\ \mathrm{m}^2$，$S(20)=1\ 400\ \mathrm{m}^2$，$S(30)=2\ 700\ \mathrm{m}^2$．

从以上解析式可以看到，该函数是二次函数，它的图象是我们所熟悉的，必要时用计算机也容易画出它的图象，列出函数表．通常，只要找到了函数的解析式，求函数值、画图象、列表都能迎刃而解．

如果我们讨论的函数由一个解析式表示，并且不考虑它的实际意义，那么这个函数的定义域就是指使这个解析式有意义的自变量取值范围，也称为自然定义域．在实际问题中，函数的定义域还受到实际意义的制约，通常将自然定义域收缩到某

个子集作为函数的定义域.

二 列表法

商店里有些营业员为了工作的方便，对一些畅销商品，事先列好一张表备用. 例如某商品每件价格为 1.45 元，可以列出下表：

数量/件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
价格/元	1.45	2.9	4.35	5.8	7.25	8.7	10.15	11.6	13.05	14.5

其实，这就是最简单的函数列表表示法，这里，自变量是商品的件数，而相应的销售价格就是商品件数的函数.

还比如，某水库的存水量 $Q(\times 10^4\ \mathrm{m}^3)$ 与水库最深处的水深 $H(\mathrm{m})$ 的关系如下表所示：

水深 H/m	5	10	15	20	25	30	35
存水量 $Q/(\times 10^4\ \mathrm{m}^3)$	20	40	90	160	275	437	650

从表中可以看到，每一深度 H 都对应唯一的一个存水量 Q，这个表就给出了 H 与 Q 之间的对应关系，也就是函数关系.

用列表法表示函数关系，优点是具体易用，不懂数学运算的人也能查表做事，缺点是不够全面. 例如，如果你还想知道该水库在水深为 22 m 时的存水量，那么你所能得到的只是“大约多少多少”了，因为，在表中你是查不出来的. 再者，从表上也很难看出函数的数学性质.

不过，因为列表法有着简单明了的优点，对一些特定的自变量值，相应的函数值可以直接从表上查到，因此，人们也常将某些用解析式表示的函数编成表格，如平方表、平方根表以及将要学习的对数表、三角函数表等数学用表，都可以看作是用列表法表示函数. 在历史上没有电子计算机的年代，函数表是科学研究和工程技术有关计算活动中不可缺少的工具.

> 数学用表在生活中是很常见的. 例如银行的储蓄利率表，保险公司的汽车折旧保费表，税务部门按不同收入的税率表，等等.
>
> 你能举出更多的例子吗？

三 图象法

医院为了及时了解住院病人的病情，通常每隔一定时间要为病人测一次体温，护士在打好方格的纸上把每次测得的病人体温记成一串点，再把这些点用线段或曲线连接起来，这就形成了每个病人的体温曲线. 医生则把这一曲线作为了解病情变

化的重要参考.

自动测温仪则是根据上述原理，自动完成定时测温、描出曲线的工作.

例如，设时间为 t(时)，气温为 T(℃)，自动测温仪测得某地某日从 0 时到 24 时的温度曲线如图 3.1－1. 在图上，如果要知道某一时刻该地的温度，只要在 t 轴上找到表示时刻 t 的点，过该点作出 t 轴的垂线与气温曲线交于点 (t, T)，便得到时刻 t 对应的一个温度 T. 这条气温曲线就给出了时间和气温间的对应规律.

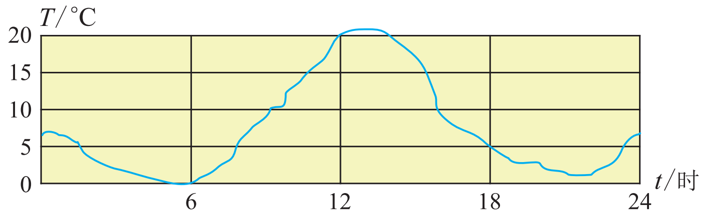


图 3.1－1

你能从图 3.1－1 看出下午 2—3 时当地的气温吗？能看出这 24 小时内何时气温最低吗？

为了直观地了解函数的性质，常要作出函数的图象. 作图通常有**列表**、**描点**、**连线**三个步骤：

列表——先找出一些有代表性的自变量值 x，并计算出与这些自变量相对应的函数值 $f(x)$，用表格的形式表示出来；

描点——从表中得到一系列的点 $(x, f(x))$，在坐标平面上描出这些点；

连线——用光滑曲线把这些点按自变量由小到大的顺序连接起来.

要作出更精确的图象，常常需要描出更多的点.

例 4 作出函数 $y=\sqrt{x}(x\in[0, 16])$ 的图象.

解 选择方便计算的几个数值，列表如下：

x	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	16
y	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4

根据表中数据在平面直角坐标系中描点、连线，得到图 3.1－2.

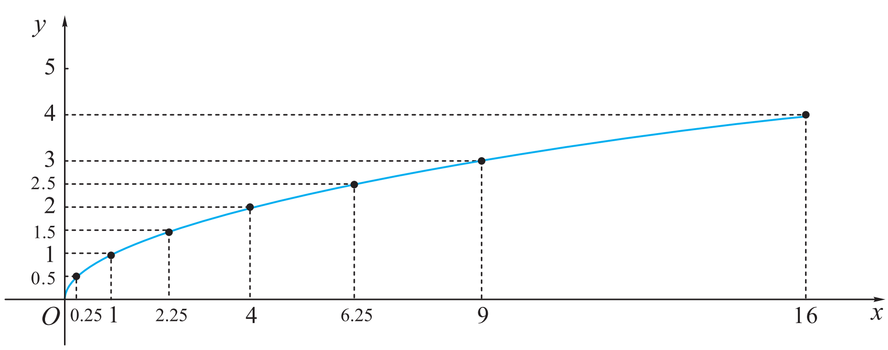


图 3.1－2

你能根据图 3.1－2 估计出 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{11}$ 的近似值吗？

函数的三种表示方法，各有长处和不足，在对具体问题的研究中常常将不同的方法结合起来．

在数学课程中，我们主要讨论的是解析法和图象法，并且经常把两种方法结合起来进行讨论．有了函数的解析式，用计算机等电子设备作函数图象或列函数表很方便，所以获取函数的解析式和计算方法常常是研究函数的基础性工作．

练习

1. 学校要印刷一批资料，现要求纵向矩形纸面上、下各留 4 cm 空白，左、右各留3 cm 空白，中间排版部分要求面积为 432 cm^2．写出纸张面积$y(cm^2)$与中间排版部分宽度 x(cm)之间的函数解析式 $y=S(x)$，确定其定义域，再计算出$S(8)$，$S(12)$，$S(24)$的值．

2. 利用课本中关于水库存水量的列表作出由水深确定存水量的函数图象，并根据图象估计出水深为 7 m 和 18 m 时的存水量．

3. 画出函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的图象，并根据图象回答下列问题：

（1）比较 $f(0)$，$f(1)$，$f(3)$ 的大小；

（2）若 $x_1<x_2<1$，比较 $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小；

（3）求函数 $f(x)$的值域．

多知道一点

表示函数的其他方法

汽车司机要知道油箱里有多少油，用把带刻度的尺子放进去一量便知．因为油量是油深的函数，这个函数关系体现在尺子刻度上，这种表示函数的方法称为标尺法．

用计算器或计算机能求许多函数值，因为里面有计算函数的程序．程序是根据算法编出来的，科技活动用到的大量函数，现在要用算法或程序来表示，而不是用列表法来表示．

函数也可以用描述法来表示．例如，当 x 为有理数时，让 $D(x)=1$，否则让 $D(x)=0$，这就定义了函数 $D(x)$．它叫作狄利克雷函数．

数学实验

用计算机作函数图象和列函数表

函数的图象能够帮助我们了解函数的性质．特别是我们可以使用计算机技术，根据函数解析式和数据作出函数的图象．使用“超级画板”或其他具有类似功能的软件，在计算机上作函数的图象既快捷又准确．

在右键菜单里单击“函数或参数方程曲线”，在出现的对话框里（如图 1）输入函数表达式“x^(1/2)”，参数范围取 0 到 10，点数取 101，单击“确定”，函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象就出现了（如图 2）．

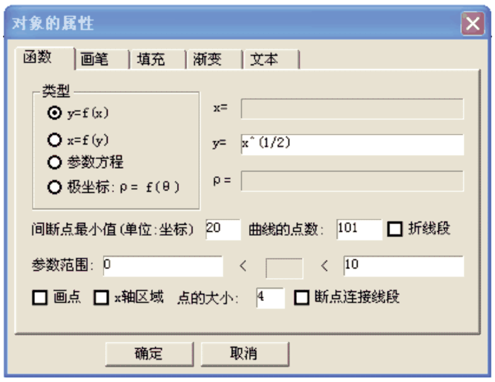


图 1

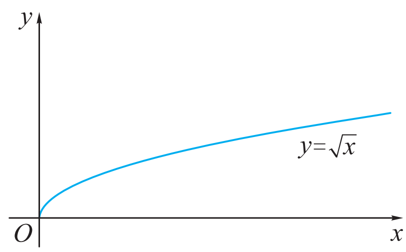


图 2

用鼠标在曲线附近单击左键，曲线变色，表示计算机知道你选择了它．执行菜单命令“插入|表格”，屏幕上就出现了对应的函数表．

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x
0.0000	0.0000	0.9999	1.0000	2.0000	1.4142	3.0000	1.7320	4.0000	2.0000	5.0000	2.2360	6.0000	2.4494	7.0000
0.1000	0.3162	1.0999	1.0488	2.1000	1.4491	3.1000	1.7606	4.1000	2.0248	5.1000	2.2583	6.1000	2.4698	7.1000
0.2000	0.4472	1.2000	1.0954	2.2000	1.4832	3.2000	1.7888	4.2000	2.0493	5.2000	2.2803	6.2000	2.4899	7.2000
0.3000	0.5477	1.3000	1.1401	2.3000	1.5165	3.3000	1.8165	4.3000	2.0736	5.2000	2.3021	6.3000	2.5099	7.3000
0.4000	0.6324	1.4000	1.1832	2.4000	1.5491	3.4000	1.8439	4.4000	2.0976	5.4000	2.3237	6.4000	2.5298	7.4000
0.5000	0.7071	1.5000	1.2247	2.5000	1.5811	3.5000	1.8708	4.5000	2.1213	5.5000	2.3452	6.5000	2.5495	7.5000
0.6000	0.7745	1.6000	1.2649	2.6000	1.6124	3.6000	1.8973	4.6000	2.1447	5.6000	2.3664	6.6000	2.5690	7.6000
0.7000	0.8366	1.7000	1.3038	2.7000	1.6431	3.7000	1.9235	4.7000	2.1679	5.7000	2.3874	6.7000	2.5884	7.7000
0.7999	0.8944	1.8000	1.3416	2.8000	1.6733	3.8000	1.9493	4.8000	2.1908	5.8000	2.4083	6.8000	2.6076	7.8000
0.9000	0.9486	1.9000	1.3784	2.9000	1.7029	3.9000	1.9748	4.9000	2.2135	5.9000	2.4289	6.9000	2.6267	7.9000

这时表上的格子不够，可以用鼠标指着表格按右键，在右键菜单中单击“属性”，打开表格的属性设置对话框，在对话框下部把表格的行数改为 11，列数改为 20，单击“确定”即可．

3.1.3 简单的分段函数

事物的发展，在各个阶段会有不同的变化规律．用函数来表示时，对于自变量的不同范围可能用不同的解析式．

例 5 某地为了鼓励节约用电，采用分段计费的方法计算用户的电费：每月用电量不超过 100 kW·h，按 0.57 元/(kW·h)计费；每月用电量超过 100 kW·h，其中 100 kW·h 仍按原标准收费，超过部分按 1.5 元/(kW·h)计费．

(1) 设月用电 x kW·h，应交电费 y 元，写出 y 关于 x 的函数解析式．

(2) 小赵家第一季度缴纳的电费情况如下表：

月　份	1	2	3	合　计
计费金额/元	114	75	45.6	234.6

问：小赵家第一季度共用电多少？

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，月电费＝月用电量×标准电价，可得

$$y=0.57x;$$

当 $x>100$ 时，月电费＝100 kW·h 的电费＋超过 100 kW·h 部分的电费，可得

$$y=0.57\times 100+1.5\times(x-100)=1.5x-93.$$

所以
$$y=\begin{cases}0.57x, & x\in[0,\ 100],\\ 1.5x-93, & x\in(100,\ +\infty).\end{cases}$$

(2) 由(1)可知，当电费不超过 57 元时，说明月用电量不超过 100 kW·h；当电费超过 57 元时，说明月用电量超过 100 kW·h．因此用电量应使用函数的不同关系式来计算．

因为 1 月份、2 月份电费超过 57 元，所以按第二个函数关系式计算，即 $1.5x-93=114$，$1.5x-93=75$，分别算出 1 月份用电 138 kW·h，2 月份用电 112 kW·h；而 3 月份电费不超过 57 元，按第一个函数关系式计算，有 $0.57x=45.6$，算出 3 月份用电 80 kW·h．

因此，小赵家第一季度共用电 330 kW·h．

一般地，如果自变量在定义域的不同取值范围内时，函数由不同的解析式给出，这种函数叫作**分段函数**．

例 5 中的函数就是一个分段函数．

例 6 画出函数 $f(x)=|x|$ 的图象，并求 $f(-3)$，$f(3)$，$f(-1)$，$f(1)$ 的值.

解 因为
$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$
所以函数 $f(x)$ 的图象为过原点且平分第一、第二象限的一条折线，如图 3.1-3 所示.

其中 $f(-3)=3$，$f(3)=3$，$f(-1)=1$，$f(1)=1$.

由上可知，$f(x)=|x|$ 也是一个分段函数.

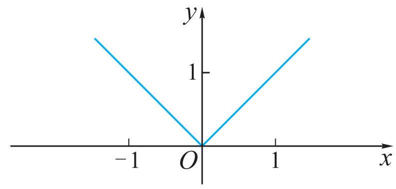


图 3.1-3

要解决与分段函数有关的问题，通常要“分段”讨论，但需注意的是，最后要有一个统一的结论. 分段仅仅是用了不同的表达式，分了段仍然是一个函数.

例 7 画出函数 $f(x)=|x-2|+|x+1|$ 的图象.

解 为了去掉绝对值符号，需分段讨论：

当 $x<-1$ 时，$f(x)=(2-x)+(-x-1)=1-2x$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2-x+x+1=3$；

当 $x>2$ 时，$f(x)=x-2+x+1=2x-1$.

分段画出 $f(x)$ 的图象，如图 3.1-4 所示.

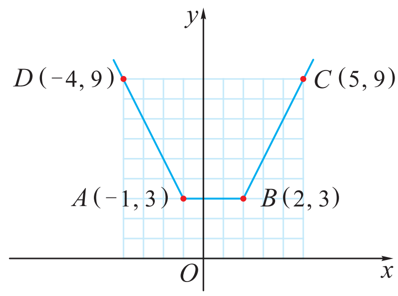


图 3.1-4

作分段函数的图象，一段一段地按表达式画是基本方法. 本例可更简单：因为 $|x-2|$ 和 $|x+1|$ 不论在哪一段中，去掉绝对值符号后所得的都是一次函数，其和（或差）是一次函数或常数函数，图象都是直线，每段都是线段或射线，要作出其图象，只要在每段上取两个点就够了.

为了简单，尽可能取分段点. 绝对值函数的分段点，就是绝对值符号中的量为 0 的点，所以 $f(x)$ 的分段点在 $x=-1$ 和 $x=2$ 之处. 为了画出第一段和第三段的射线，再取 $x=-4$ 和 $x=5$.

这样，即使不去掉绝对值符号，也能画图.

多知道一点

常用的分段函数

在前面，我们介绍了 $f(x)=|x|$ 是一个分段函数（$|x|$ 也写作 $\mathrm{abs}(x)$）. 在数学里，还有几个很常用的分段函数. 例如常用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[4]=4$，$[4.1]=4$，$[-3.14]=-4$ 等，$[x]$ 叫作整数部分函数. 对应地，$\{x\}=x-[x]$ 叫作小数部分函数，例如 $\{4\}=0$，$\{4.1\}=0.1$，$\{-3.14\}=0.86$ 等. 还有一个符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$，当 $x>0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=1$；当 $x=0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=0$；当 $x<0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=-1$.

练习

1. 作出下列函数的图象，并写出函数的值域：

(1) $y=|x+3|$；　　(2) $y=|x-2|-|x+2|$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x<-1, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x>1.\end{cases}$

(1) 求 $f(3)+f(-3)f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的值；

(2) 对函数 $f(x)$，若存在点 x_0，使得 $f(x_0)=1$，求实数 x_0 的值.

3. 一个质点沿直线运动. 质点由静止匀加速 T s 后速度达到8 m/s，然后质点以恒定速度 8 m/s 运动了 $5T$ s，之后质点在 40 s 内匀减速到完全停下.

(1) 画出质点运动的速度-时间图象；

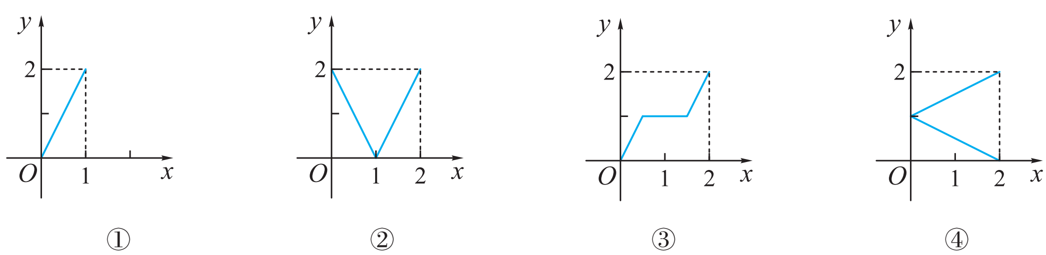
(2) 已知质点运动的总位移是 600 m，求 T 的值；

(3) 画出质点运动的加速度-时间图象.

习题 3.1

学而时习之

1. 设集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，那么下列四个图形中，能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有(　　)



（第 1 题）

(A) ①②③④　　(B) ①②③　　(C) ②③　　(D) ②

2. 已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)=2x^2-3$ 和 $g(x)=4x$，求 $f(g(-1))$，$g(f(-1))$，$f(f(-2))$，$g(g(-2))$的值.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)$的值.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+2x-3}$；　　(2) $y=\dfrac{x+4}{x^3-4x}$.

5. 下列各组函数中，表示同一个函数的是(　　)

(A) $y=x-1$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　(B) $y=x^0$ 和 $y=1$

(C) $y=x^2$ 和 $y=(x+1)^2$　　(D) $y=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $y=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}$

6. 作出下列函数的图象，并说出函数的定义域、值域.

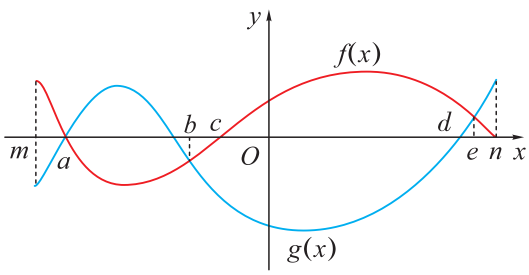
(1) $y=3x^2-5x+2$；　　(2) $y=x^3$.

7. 已知圆 O 的直径为 4，将该圆的内接矩形 $ABCD$（四个点都在圆周上）的面积表示为它的一边 AB 的长 x 的函数 $f(x)$，并求出其定义域.

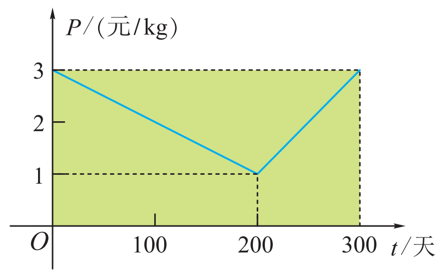
8. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $[m, n]$，它们的图象如下图所示，则不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集是(　　)

(A) $[m, a)\cup(b, e)$　　(B) $(a, c)\cup(e, n]$

(C) $(b, c)\cup[m, a]$　　(D) $(a, b)\cup(c, e)$



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 某农场种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系可用如上图所示的一条折线表示，写出市场售价与时间的函数解析式 $P=f(t)$.

10. 滑雪运动员以恒定加速度沿着笔直的雪道向下滑. 在 $t=0$ 时刻，他以 6 m/s 的速度经过点 A. 然后继续以相同的加速度下滑直到他以 15 m/s 的速度经过了点 B. 在 B 点，雪道开始变平，他从 B 点开始以恒定速度 15 m/s 滑到 C 点. 已知 A，C 之间的路程是 615 m，他从 B 点滑到 C 点用了 20 s.

(1) 求出 A，B 之间的路程；

(2) 求该运动员从 A 滑到 B 的时间；

(3) 画出该运动员滑雪的速度-时间图象.

温故而知新

11. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$分别由下表给出：

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

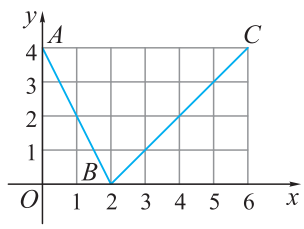
x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f(g(1))$的值为________；满足 $f(g(x))>g(f(x))$的 x 的值是________.

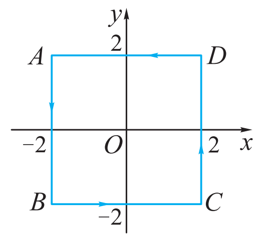
12. 已知函数 $f(x)$对任意 $t\in\mathbf{R}$ 满足等式 $f(1-t)=1+t^2$，求 $f(x)$.

13. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}_+$，且函数 $f(x)$满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ $(x,\ y\in\mathbf{R}_+)$，若 $f(27)=1$，求 $f(\sqrt{3})$的值.

14. 如图，函数 $f(x)$的图象是折线段 ABC，其中点 A，B，C 的坐标分别为 $(0,\ 4)$，$(2,\ 0)$，$(6,\ 4)$，求 $f(f(f(2)))$的值.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，一个动点 P 从点 A 出发，沿着边 $AB\to BC\to CD\to DA$ 运动，返回到点 A 后停止运动，设点 P 走过的路程为 x.

(1) 将线段 AP 的长度表示成 x 的函数 $f_1(x)$；

(2) 设点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，当点 A，O，P 三点不共线时，将$\triangle AOP$ 的面积表示成 x 的函数 $f_2(x)$.

上下而求索

16. 设函数 $\mathrm{sign}(x)$的定义为

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

(1) 画出该函数的图象；

(2) 探索利用函数 $\mathrm{sign}(x)$把分段函数写成一个解析表达式的方法，并具体尝试用一个表达式来写出上面第 9 题中的函数.

3.2 函数的基本性质

3.2.1 函数的单调性与最值

给定一个函数的解析式或图象，你能不能从中看出这个函数的性质呢？

函数尽管千变万化，但函数值毕竟是实数，实数变化，无非是变大变小．要问函数的性质，首先在大小上做文章．大，大到什么程度，上面封顶不封顶？小，小到什么程度，下面保底不保底？

概括来说，对函数性质的研究，我们首先关心的是函数值的变化范围(封顶和保底)和变化趋势（走高和下滑)．如图 3.2－1 是某报 2016 年 11 月刊登的上海证券交易所综合股价指数(简称上证指数)一年多来的走势曲线图．

图 3.2－1

从图 3.2－1 可以看到，自 2015 年 6 月份以来，上证指数从最高点震荡后总体一路下跌，虽中途偶有攀升，但到 2016 年 2 月份震荡下跌，几乎到最低点．随后又回升至 3 000 点，呈现平稳的态势．

从图上观察函数的性质，难免有一些疑问：只靠眼睛观察得到的认识是不是准确呢？例如，从有界限的图怎能看出函数值是无界限的呢？描点连线画图的可靠性如何保证呢？

> 发现疑问，提出疑问，是学习数学的好习惯，是创新思维的开始．你还能提出更多的问题吗？

例如，图 3.2－2 是计算机用描点连线的方法画出的同一个函数的两个图象．虚线是取 10 个点描出的，实线是取 50 个点描出的，两者明显不同．

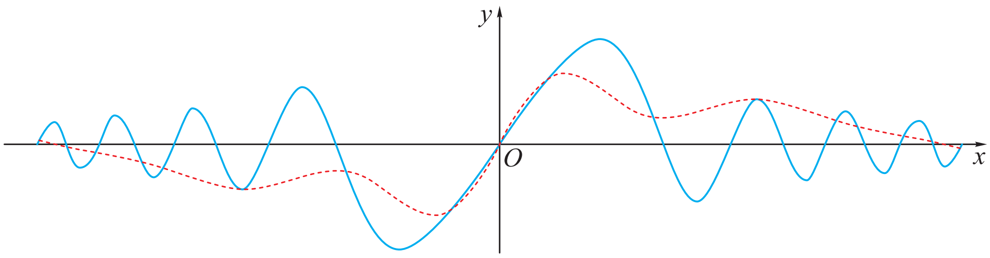


图 3.2－2

可见，光靠描点作图看图来研究函数的性质还不够．从解析式出发研究函数性质，在数学推理的指导下画图，对函数的性质会了解得更全面、更准确，为此要用更严密的数学语言来描述函数的性质．

以下设 D 是函数 $f(x)$ 的定义域，I 是 D 的一个非空的子集．如不加说明，我们认为 I 是个区间．

（1） 函数的最大（小）值

如果有 $a\in D$，使得不等式 $f(x)\leqslant f(a)$ 对一切 $x\in D$ 成立，就说 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取到最大值 $M=f(a)$，称 M 为 $f(x)$ 的**最大值**，a 为 $f(x)$ 的最大值点．

仿照上面，同样可以写出 $f(x)$ 的**最小值**和最小值点的定义．

最大值和最小值统称为**最值**．

（2） 函数的单调性

如果对于 I 上任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是区间 I 上的**增函数**，也称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增，如图 3.2－3．

如果对于 I 上任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是区间 I 上的**减函数**，也称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减，如图3.2－4．

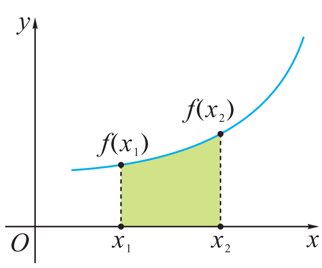


图 3.2－3

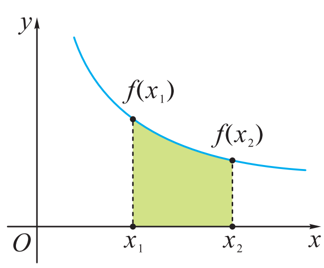


图 3.2－4

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有（严格的）**单调性**，区间 I 叫作 $y=f(x)$ 的单调区间．

例 1 证明：定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=3x+b$ 是增函数.

证明 设 x_1 和 x_2 是任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(3x_2+b)-(3x_1+b)\\&=3(x_2-x_1)>0.\end{aligned}$$

于是
$$f(x_2)>f(x_1).$$

由函数单调性的定义可知，函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

对于例 1 的解答过程，假如任取的 x_1，x_2 满足 $x_1>x_2$，怎么判断 $f(x)$ 是增函数还是减函数呢？此时 $x_2-x_1<0$，$f(x_2)-f(x_1)=3(x_2-x_1)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$，由函数单调性的定义仍可知，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

由此可知，当 x_2-x_1 与 $f(x_2)-f(x_1)$ 同为正数时，$f(x)$ 是增函数；当 x_2-x_1 与 $f(x_2)-f(x_1)$ 同为负数时，$f(x)$ 也是增函数. 也就是说，只要 x_2-x_1 与 $f(x_2)-f(x_1)$ 同号，$f(x)$ 就是增函数. 同理可知，当 x_2-x_1 与 $f(x_2)-f(x_1)$ 异号时，$f(x)$ 是减函数.

> 函数的单调性把自变量的变化方向和函数值的变化方向联系起来，描述了函数的变化过程和趋势，是函数的最重要的特征之一.

实际计算中，只要将 $f(x_2)-f(x_1)$ 与 x_2-x_1 相除，根据商 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 是正还是负，就能判别 $f(x_2)-f(x_1)$ 与 x_2-x_1 是同号还是异号，进而判别 $f(x)$ 是增函数还是减函数.

例 1 中的商 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=3>0$，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

例 2 证明函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$ 在区间 $(0,1]$ 上递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上递增，并指出函数在区间 $(0,+\infty)$ 上的最值点和最值.

解 （1）设 x_1 和 x_2 是区间 $(0,1]$ 上任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}k&=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\\&=\frac{x_2+\dfrac{1}{x_2}-\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)}{x_2-x_1}\\&=1-\frac{1}{x_1x_2}.\end{aligned}$$

由 $0<x_1<x_2\leqslant 1$，得 $0<x_1x_2<1$，$\dfrac{1}{x_1x_2}>1$，

于是
$$k=1-\frac{1}{x_1x_2}<0.$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上递减.

(2) 设 x_1 和 x_2 是区间 $[1, +\infty)$ 上任意两个实数，且 $x_1<x_2$.

由 $x_2>x_1\geqslant 1$，得 $x_1x_2>1$，$\dfrac{1}{x_1x_2}<1$，

于是
$$k=1-\frac{1}{x_1x_2}>0.$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上递增.

综合(1)(2)可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上 $x=1$ 处取到最小值，最小值为 $f(1)=2$.

例 3 若关于 x 的函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty, 4)$ 上递减，求实数 a 的取值范围.

解 因为二次函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$，且开口向上，所以函数在区间 $(-\infty, 1-a]$ 上递减.

又已知该函数在区间 $(-\infty, 4)$ 上递减，则需满足
$$1-a\geqslant 4,$$
即 $a\leqslant -3$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.

? 你能借助函数图象来说明实数 a 的取值范围吗?

练习

1. (1) 在定义域 $[a, b]$ 上递减的函数 $f(x)$，最大值是多少?

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[a, u]$ 上递减而在区间 $[u, b]$ 上递增，最小值是多少?

2. 检验下列函数的增减性，并说明是否有最大(小)值. 如果有，指出最大(小)值和对应的最大(小)值点.

(1) $f(x)=-\dfrac{2}{x}\left(x\in(-\infty, 0)\right)$;

(2) $f(x)=3-\dfrac{x}{2}\left(x\in[-6, 1]\right)$;

(3) $f(x)=x^2-6x+7\left(x\in[-2, 4]\right)$;

(4) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}\left(x\in[0, 3]\right)$.

3. 若函数 $f(x)=-x^2+2ax-1$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上递增，求实数 a 的取值范围.

3.2.2 函数的奇偶性

图 3.2-5 中的两个函数图象都是我们熟悉的，它们有什么共同点？

图 3.2-6 中的两个函数图象也是我们熟悉的，它们有什么共同点？

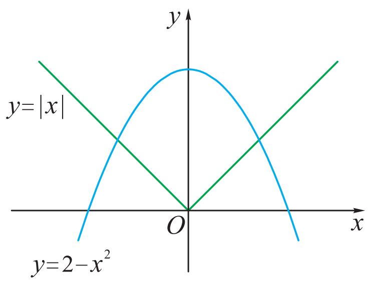


图 3.2-5

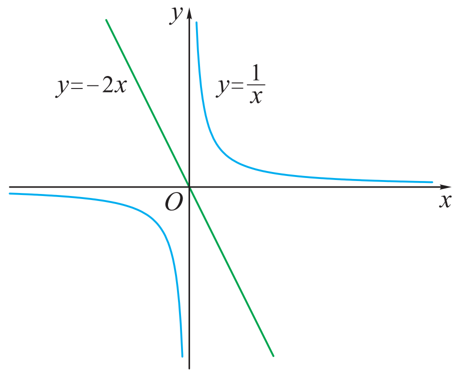


图 3.2-6

不难发现，图 3.2-5 中的两个图象，都是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

图 3.2-6 中的两个图象，都是以原点为中心的中心对称图形.

如果 $F(x)$的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，就称 $F(x)$是**偶函数**.

如果 $F(x)$的图象是以原点为中心的中心对称图形，就称 $F(x)$是**奇函数**.

> 想一想：函数 $y=ax^2+bx+c$ 在什么条件下是偶函数？在什么条件下是奇函数？在什么条件下是非奇非偶的函数？在什么条件下是又奇又偶的函数？

能够简单地用数学符号语言来描述函数的奇偶性吗？

说偶函数 $F(x)$的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，具体是什么意思呢？这就是说，若点 A 在图象上，则点 A 关于 y 轴的对称点 B 也在图象上，而 y 轴是线段 AB 的垂直平分线.

于是，如果 A 的坐标为$(x, F(x))$，则 B 的坐标为$(-x, F(-x))$；直线 AB 平行于 x 轴，所以 A，B 在 x 轴同侧，并且到 x 轴的距离相等，即 $F(-x)=F(x)$.

反过来，如果对于 $F(x)$的定义域中的任意的 x，$F(-x)$都有定义并且满足 $F(-x)=F(x)$，这表明图象上任一点$(x, F(x))$关于 y 轴的对称点$(-x, F(x))=(-x, F(-x))$也在图象上，即 $F(x)$的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

所以**偶函数就是满足条件 $F(-x)=F(x)$的函数**.

同理可证：**奇函数是满足条件 $F(-x)=-F(x)$的函数**.

上面的讨论概括如下：

(1) 如果对一切使 $F(x)$有定义的 x，$F(-x)$也有定义，并且$F(-x)=F(x)$成立，则称 $F(x)$为偶函数；

（2）如果对一切使 $F(x)$ 有定义的 x，$F(-x)$ 也有定义，并且 $F(-x)=-F(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 为奇函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2+|x|$；（2）$g(x)=x+\dfrac{k}{x}$；

（3）$h(x)=x^3(x\in[-2, 5])$.

解 （1）因为 $f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

（2）因为 $g(-x)=-x+\dfrac{k}{(-x)}=-\left(x+\dfrac{k}{x}\right)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数.

（3）因为函数的定义域关于原点不对称，所以 $h(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 5 设 $g(x)$ 是定义于 $[-5, 5]$ 上的函数，且 $f(x)=g(x)+g(-x)$，讨论 $f(x)$ 的奇偶性；如果在 $[0, 5]$ 上 $f(x)=1-2x$，试求它在 $[-5, 0]$ 上的表达式.

解 因为
$$\begin{aligned}f(-x)&=g(-x)+g(-(-x))\\&=g(-x)+g(x)\\&=f(x),\end{aligned}$$
所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x\in[-5, 0]$ 时，$-x\in[0, 5]$，
由偶函数性质得 $f(x)=f(-x)=1-2(-x)=1+2x$.

练习

1. 判断下列函数的奇偶性：

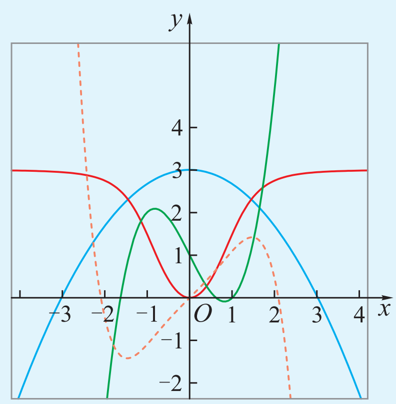
（1）$f(x)=x+\dfrac{x^3}{5}-\dfrac{x^5}{10}$；

（2）$f(x)=3-\dfrac{x^2}{3}$；

（3）$f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{3+x^4}}$；

（4）$f(x)=1-2x+x^3$.

这几个函数的图象如图所示，你能在图中分别标出对应的函数吗？



（第 1 题）

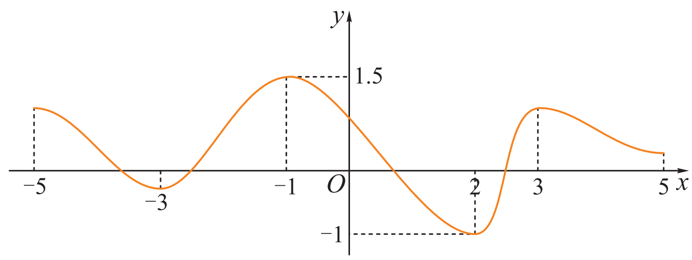
2. 求证：定义于 $\mathbf{R}$ 上的两个奇函数的乘积是偶函数.

3. 设 $g(x)$ 是定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数，且 $f(x)=g(x)-g(-x)$，讨论 $f(x)$ 的奇偶性；如果在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x)=x^2-x$，求它在 $(-\infty, 0]$ 上的表达式.

习题 3.2

学而时习之

1. 如图所示是函数 $f(x)$ 的图象．列出 $f(x)$ 的若干区间，说明它在各区间上的增减性，并指出该函数的最大、最小值点及最值．



（第 1 题）

2. 检验下列函数的增减性，并说明是否有最大最小值．如果有，指出最大最小值和最大最小值点．

（1）$f(x)=3x-h$（$x\in[-2, 5]$）；　（2）$g(x)=x^2-2x-5$（$x\in(-\infty, 2]$）；

（3）$k(x)=\dfrac{2}{1-x}$（$x\in[-5, 0]$）；　（4）$f(x)=-\dfrac{3}{x}$（$x\in(0, +\infty)$）．

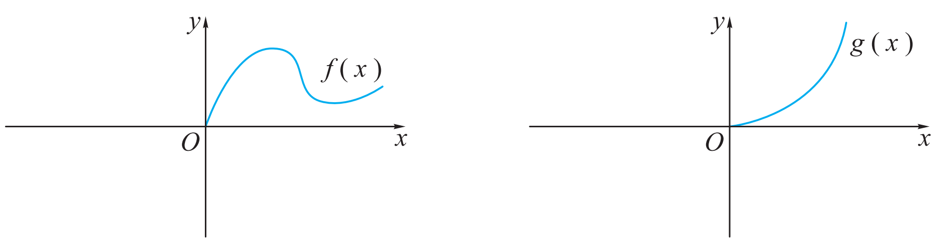
3. 已知函数 $f(x)=-mx^2+3x+1$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上是增函数，求实数 m 的取值范围．

4. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^4-2x^2$；　（2）$f(x)=x^5-x$；

（3）$f(x)=\dfrac{3x}{1-x^2}$；　（4）$f(x)=|x|+x$．

5. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义在 **R** 上的偶函数和奇函数，将下图补充完整．



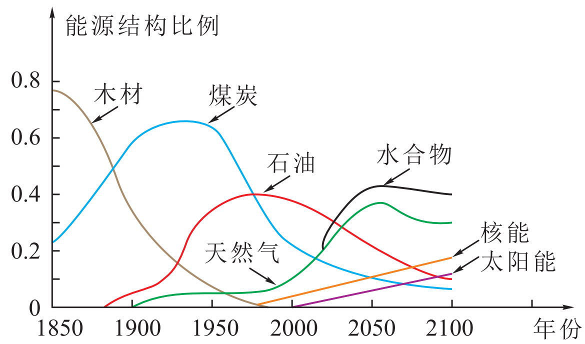
（第 5 题）

6. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，求 $f(-1)$．

7. 已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x(x+4)$，试求出函数 $f(x)$在 **R** 上的表达式.

温故而知新

8. 根据如图所示的图象，简要说明近 150 年来人类消耗的能源结构变化情况，并对未来 100 年能源结构的变化趋势作出预测.



21世纪能源发展示意图

（第 8 题）

9. 设函数 $f(x)$的定义域为$(-4，5)$，如果 $f(x)$在$(-4，0)$上是减函数，在$(0，5)$上也是减函数，能不能断定它在$(-4，5)$上是减函数？如果 $f(x)$在$(-4，0]$上是增函数，在$[0，5)$上也是增函数，能不能断定它在$(-4，5)$上是增函数？

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-a}(x\neq a)$.

(1) 若 $a=-2$，证明：$f(x)$在$(-\infty,-2)$上递增；

(2) 若 $a>0$，且 $f(x)$在$(1，+\infty)$上递减，求 a 的取值范围.

11. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的有哪些？

(1) $y=x+1$；　　(2) $y=-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=x|x|$.

12. 设偶函数 $f(x)$的定义域为 **R**，当 $x\in[0，+\infty)$时，$f(x)$是减函数，试确定 $f(-2)$，$f(\pi)$，$f(-3)$之间的大小关系.

13. 已知 $f(x)$，$g(x)$分别是定义在 **R** 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，求 $f(1)+g(1)$.

14. 设函数 $f(x)$的定义域为 **R**，且 $f(1+x)=f(1-x)$. 若当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=x^2-1$，试确定 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$之间的大小关系.

数学文化

函数概念的形成与发展

在整个数学当中，一个首要的概念是函数．意大利科学家伽利略(1564—1642)研究运动学，法国数学家笛卡儿(1596—1650)研究动点轨迹，伽利略和笛卡儿的工作中蕴含了函数的精髓．伽利略指出："从静止开始的匀加速下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比．"即可写成 $s=kt^2$，其中 t 是时间，s 是自由落体的下落距离．伽利略的这些话清楚地表明他是在讨论变量与函数，只差字面上的概括和函数符号的引入这一步了．17 世纪上半叶，笛卡儿指出，当动点做曲线运动时(曲线是动点的轨迹)，动点的 x 坐标与 y 坐标相互依赖并同时发生变化，其关系可由包含 x 与 y 的方程式给出．他的这些观点暗含了函数的思想．

"function（函数)"作为数学术语是德国数学家莱布尼茨(1646—1716)首先采用的．1692 年莱布尼茨发表论文并正式使用函数来表示变量之间的依赖关系．


莱布尼茨

特别值得指出的是，中文的"函数"一词是 1859 年我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》时由"function"创译的，他给出的理由是"凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数"，即"函"为包含之意．

新思想常常不是单独产生的．1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利(1667—1748)对函数下了这样的定义："一个变量的函数是指由这个变量和常量以任意一种方式组成的一种量．"1748 年，约翰·伯努利的学生，数学家欧拉(1707—1783)给出了函数的定义："一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式．"师生两人关于函数的定义如出一辙．

1797 年，法国数学家拉格朗日(1736—1813)重述了上面伯努利与欧拉的定义，但他指出："我们用字母 f 或 F 放在一个变量前面以表示该变量的一个函数，即表示依赖于这个量的另一个量，它按一种给定的规律随那个变量一起变化．"其他数学家也纷纷给出大同小异的关于函数的定义．18 世纪的数学家们都认为一个函数必须处处有相同的解析表达式，例如函数 $y=x^2+2x+1$，$y=\dfrac{1}{x}$，等等，即使像高斯(1777—1855）那样天才的数学家也认为函数是一个封闭的（解析的）表达式．

法国数学家傅立叶(1768—1830)和柯西(1789—1857)则主张，函数未必一定要有一个解析表达式．傅立叶指出："如果对于给定区间上的每一个 x 值有唯一的一

个 y 值同它对应，那么 y 就是 x 的一个函数，至于在整个区间上 y 是否可以用数学运算来求得，那是无关紧要的事.”德国著名数学家狄利克雷(1805—1859)给出一个数学史上著名的函数实例：

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 是有理数}),\\ 0 & (x\text{ 是无理数}).\end{cases}$$

狄利克雷函数 $D(x)$ 具体而深刻地显示了函数是数集到数集的映射这个现代函数的观点.

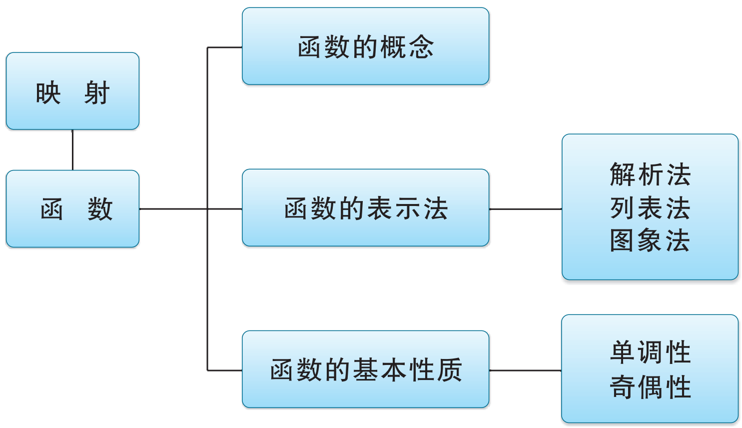
到现代，函数的应用已经渗透到数学、计算机科学、自然科学乃至人文科学的各个领域中了.

在计算机程序语言中，函数概念有了很大拓展并得到了充分应用. 特别是在某些人工智能语言中，几乎所有的操作都用函数来表示.

由于物理学的推动和数学理论发展的需要，数学中的函数概念也有了新的发展，出现了测度函数、广义函数等新的研究分支. 函数的定义域已经不限于实数集合，而推广到了点集合、数组集合以至于曲线集合等等. 大量的重要数学问题和实际问题，归结到特定函数的计算. 函数是纯数学与应用数学的灵魂.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 初中已学习函数的概念，在本章，我们进一步用更加严谨的集合和对应语言来刻画函数，突出了函数概念的本质是一个数集到另一个数集的一种确定的对应关系，明确了构成函数的要素，并引入函数符号 $y=f(x)$. 通过本章的学习，你对函数概念有什么新的认识和体会吗？

2. 数学讲究表示. 函数有哪几种常用的表示法？试结合具体实例，分析、比较这几种表示法的特点.

3. 根据函数的解析式或图象来探索它的性质，是数学的重要课题. 函数的变化无非是变大变小，函数的单调性描述了函数的变化过程和趋势，是函数最重要的特征. 如何判断一个函数的单调性？更进一步，你能用数学语言来表述吗？函数最值的几何意义如何理解？

4. 如何判断一个函数的奇偶性？你能解释奇函数、偶函数图象的对称性吗？你能用数学语言来表述函数的奇偶性吗？

5. 函数是描述客观世界变化规律的数学模型. 函数的思想方法不仅将贯穿高中数学课程的始终，还会成为你今后学习或用到的数学知识的主旋律. 小学到初中所学的数学知识，大都可以放到函数的框架之中；大量的实际问题，可以用函数模型来描述和回答. 用函数的观点看数学和其他学科里的许多问题，常有纲举目张的效果.

复习题三

学而时习之

1. 判断下列对应是否为集合 A 到集合 B 的函数：

（1）$A=\mathbf{R}$，$B=\{x|x>0\}$，$f:x\to y=|x|$；

（2）$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}$，f：$x\to y=x^2$；

（3）$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}$，f：$x\to y=\sqrt{x}$；

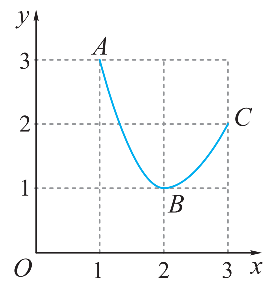
（4）$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{0\}$，$f:x\to y=0$.

2. 求函数 $y=\sqrt{2x^2-x-2}$的定义域.

3. 已知 $f(x+1)=x^2+4x+1$，求 $f(x)$的解析式.

4. 已知函数 $y=f(x)$的对应关系如下表，函数 $y=g(x)$的图象是如图所示的曲线 ABC，其中 $A(1,3)$，$B(2,1)$，$C(3,2)$，则 $f(g(2))$的值为________.

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	0



（第 4 题）

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(a)+f(1)=0$，求实数 a 的值.

6. 已知 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$，试判断 $f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的单调性，并加以证明.

7. 求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间$[0,3]$上的最大值和最小值.

8. 已知二次函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称，且在区间$[0,+\infty)$上为增函数，试确定 $f(0)$，$f(3)$，$f(-4)$之间的大小关系.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c\in\mathbf{Z})$是奇函数，且 $f(1)=2$，$f(2)<3$，求 a，b，c 的值.

10. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x+a)$为偶函数，求 a 的值.

11. 某企业生产一种精密电子仪器的固定成本为 20 000 元，每生产一台仪器需增加投入 100 元，已知总收益满足函数：

$$R(x)=\begin{cases}400x-\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 400,\\ 80\ 000, & x>400,\end{cases}$$

其中 x 是仪器的月产量.

（1）将利润表示为月产量的函数；

(2) 当月产量为何值时，企业所获利润最大？最大利润是多少元？

温故而知新

12. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)(x, y\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(0)$的值；

(2)求证：$f(-x)=-f(x)$；

(3)若 $f(2)=\sqrt{5}$，求 $f(200)$的值.

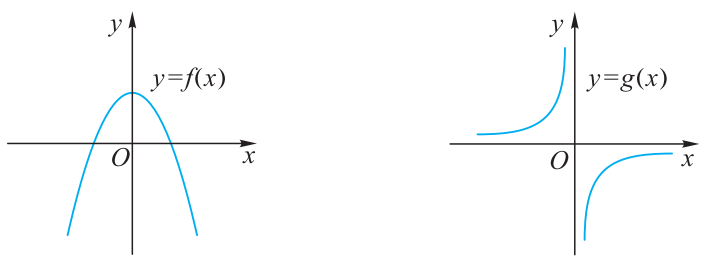
13. 某市对家庭每月用水的收费规定为：若用水量不超过基本月用水量 a m³，则只付基本费 8 元和损耗费 c 元($c<5$)；若用水量超过基本月用水量，则除了需付基本费和损耗费外，超过部分还需按 b 元/m³ 进行付费．已知该市某家庭 1—3 月的用水量分别为 9 m³，15 m³ 和 22 m³，其支付的费用分别为 9 元，19 元和 33 元．试写出每月支付费用 y(元)关于月用水量 x(m³)的函数，并画出函数的图象.

14. 已知某函数在区间$(-\infty, 1]$上递减，在区间$[1, +\infty)$上递增，且 $f(1)=1$．试写出一个这样的函数解析式.

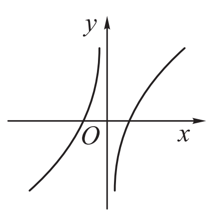
15. 若函数 $f(x)=2x+\dfrac{m}{x}$在区间$(0, 2]$上是减函数，求实数 m 的取值范围.

16. 若偶函数 $f(x)$在区间$[-8, -5]$上递减且在区间$[-5, -1]$上递增，试讨论$f(x)$在区间$[2, 7]$上的增减性，并进一步讨论 $f(x)$为奇函数的情形.

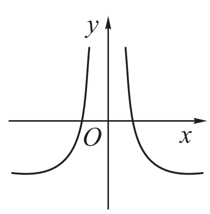
17. 已知函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象如图所示，则函数 $y=f(x)\cdot g(x)$的图象可能是(　　)



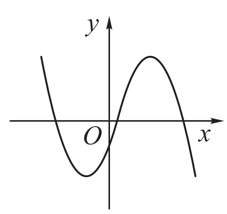
(第 17 题)



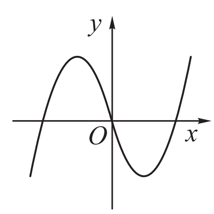
(A)



(B)



(C)



(D)

上下而求索

18. 探索并回答下列问题：

（1）把 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度，求所得图象的函数解析式；

（2）把 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象向左平移 2 个单位长度，求所得图象的函数解析式；

（3）把 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象向上平移 1 个单位长度，求所得图象的函数解析式；

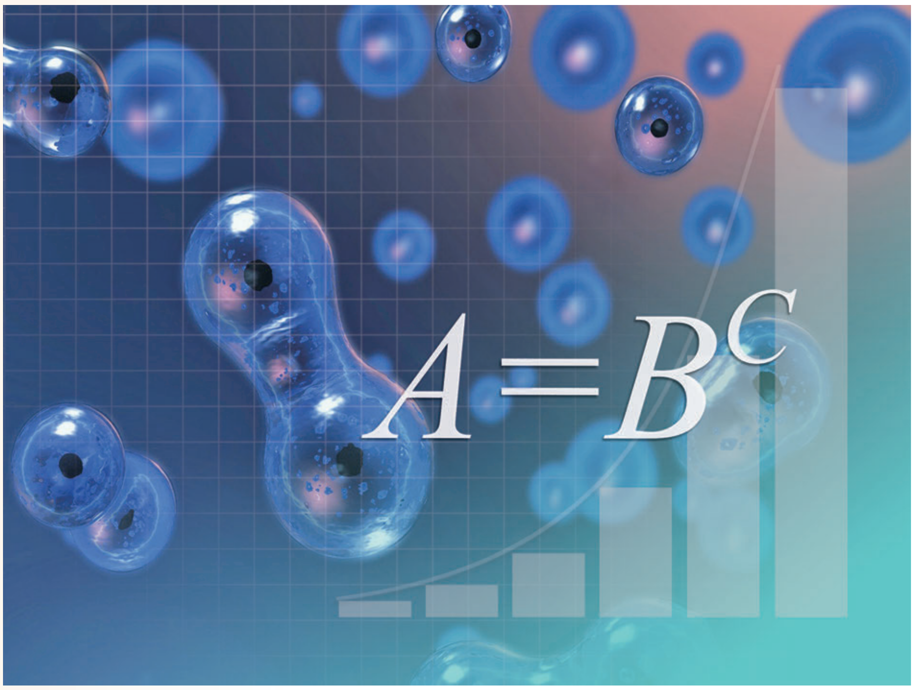
（4）把 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象向下平移 2 个单位长度，求所得图象的函数解析式.

19. 探索函数 $y=x+\dfrac{c}{x}$（常数 $c>0$）的奇偶性、值域以及单调性，并说明理由；若函数为 $y=x^2+\dfrac{c}{x^2}$（常数 $c>0$）时，该函数的性质有何变化？

4

第 4 章

幂函数、指数函数和对数函数



数量的单调增长和衰减的现象，大量出现在客观世界的变化过程之中．从乘方开方运算发展出来的指数函数、对数函数和幂函数，既是描述增加或衰减过程的三种基本数学模型，又是沟通乘法和加法两种基本数学运算的桥梁，在理论和实践中扮演了重要角色．

4.1 实数指数幂和幂函数

4.1.1 有理数指数幂

在初中，我们引入了正整数指数幂的概念，把 n(正整数)个实数 a 的连乘记作 a^n，后来，又把幂指数的概念扩大到整数范围，规定了当 $a\neq 0$ 时 $a^0=1$ 和 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(n\in\mathbf{N})$.

我们还知道，整数指数幂的运算有下列运算法则：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^n=a^nb^n.$$

下面，我们把整数指数幂推广到有理数指数幂.

一 根式

若一个(实)数 x 的 n 次方($n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$)等于 a，即 $x^n=a$，则称 x 是 a 的 n 次方根.

当 n 是奇数时，数 a 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{a}$.

当 $a>0$ 时，$\sqrt[n]{a}>0$；当 $a=0$ 时，$\sqrt[n]{a}=0$；当 $a<0$ 时，$\sqrt[n]{a}<0$.

例如，$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$；$x^3=-3$ 时，有 $x=\sqrt[3]{-3}$.

当 n 是偶数时，正数 a 的 n 次方根有两个，它们互为相反数. 其中正的 n 次方根叫作算术根，记作 $\sqrt[n]{a}$.

当 $a>0$ 时，如 $x^n=a$，则 $x=\pm\sqrt[n]{a}$.

例如，若 $x^2=3$，则 $x=\pm\sqrt{3}$；若 $x^4=3$，则 $x=\pm\sqrt[4]{3}$.

再规定：$\sqrt[n]{0}=0$，负数没有偶次方根.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作**根式**（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$），n 叫作**根指数**，a 叫作**被开方数**.

根据上述定义，有 $(\sqrt{3})^2=3$，$(\sqrt[3]{-7})^3=-7$.

一般地，有

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

由根式的定义，又有

$$\sqrt[3]{7^3} = 7,\quad \sqrt[3]{(-7)^3} = \sqrt[3]{-7^3} = -7,$$

$$\sqrt[4]{7^4} = 7,\quad \sqrt[4]{(-7)^4} = \sqrt[4]{7^4} = 7.$$

一般地，

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

例 1 化简下列各式：

(1) $\sqrt[3]{(-2)^3}$； (2) $\sqrt[4]{(-2)^4}$； (3) $\sqrt[3]{(3-a)^3}$；

(4) $\sqrt{(a-b)^2}\ (a<b)$； (5) $\sqrt{(3-a)^2}$.

解 (1) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$；

(2) $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$；

(3) $\sqrt[3]{(3-a)^3}=3-a$；

(4) 因为 $a<b$，所以 $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a$；

(5) $\sqrt{(3-a)^2}=|3-a|=\begin{cases}3-a, & \text{当 } a\leqslant 3 \text{ 时},\\ a-3, & \text{当 } a>3 \text{ 时}.\end{cases}$

二 分数指数幂

根式运算是一件比较复杂的事，例如，常常要先把根式化为同次根式再按运算法则进行运算，而引入分数指数的概念就可以大大简化根式运算.

当 $a>0$，m，$n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 时，规定

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},\quad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{-\frac{m}{n}}.$$

这样就有 $\sqrt{2^4}=2^{\frac{4}{2}}=4$，$\dfrac{1}{\sqrt[6]{3^3}}=3^{-\frac{3}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，方便多了.

如果再规定 0 的正分数指数幂为 0，0 没有负分数指数幂，那么，在 $a>0$ 时，对于任意有理数 r，s 仍有下列运算法则：

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s},$$
$$(a^r)^s = a^{rs},$$
$$(ab)^r = a^r b^r (b > 0).$$

这就把整数指数幂推广为有理数指数幂了.

例 2 求值:

(1) $16^{\frac{3}{4}}$; (2) $25^{-\frac{1}{2}}$;

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

解 (1) $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8$;

(2) $25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{2\cdot(-\frac{1}{2})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$;

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3^{-1})^{-3} = 3^3 = 27$;

(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5^3}{4^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5^{3\cdot\frac{2}{3}}}{4^{3\cdot\frac{2}{3}}}\right)^{-1} = \left(\frac{5^2}{4^2}\right)^{-1} = \frac{16}{25}$.

例 3 用分数指数幂的形式表示下列各式 ($a>0$):

(1) $a\cdot\sqrt[3]{a}$; (2) $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}$; (3) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$.

解 (1) $a\cdot\sqrt[3]{a} = a\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}$;

(2) $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3} = a^2\cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{2+\frac{3}{4}} = a^{\frac{11}{4}}$;

(3) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}} = (a\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$.

例 4 计算下列各式 (式中字母都是正数):

(1) $(3m^{\frac{3}{4}}\cdot n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{5}{6}})$;

(2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6$.

解 (1) $(3m^{\frac{3}{4}}\cdot n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{5}{6}})$

$= \frac{3\cdot(-4)}{-6}\cdot m^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

$= 2n$;

(2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6$

$= (a^{\frac{1}{3}})^6\cdot(b^{-\frac{5}{6}})^6$

$= a^2b^{-5}$

$= \frac{a^2}{b^5}$.

建立分数指数幂的目的之一是简化根式运算，下面举例来说明.

例 5 用分数指数幂的形式表示下列根式(式中字母都是正数)：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}$； (2) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{27})\div\sqrt[6]{3}$；

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

$=(ab)^{\frac{1}{6}}$；

(2) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{27})\div\sqrt[6]{3}=(3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{3}{2}})\div3^{\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{1}{6}}-3^{\frac{4}{3}}$；

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}=(xy^2\cdot(xy)^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$=(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}}$.

练习

1. 用根式的形式表示下列各式($a>0$)：

(1) $a^{\frac{1}{5}}$； (2) $a^{\frac{3}{4}}$； (3) $a^{-\frac{3}{5}}$； (4) $a^{-\frac{2}{3}}$.

2. 用分数指数幂的形式表示下列各式(式中字母都是正数)：

(1) $\sqrt[4]{a^3}$； (2) $\sqrt[4]{(m+n)^3}$； (3) $\sqrt[5]{(a+2b)^2}$；

(4) $\sqrt[4]{(m-n)^2}\ (m<n)$； (5) $\sqrt{a^4b^3}$； (6) $\dfrac{m^2}{\sqrt[3]{m}}$.

3. 计算：

(1) $125^{\frac{1}{3}}$； (2) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$； (3) $1\ 000^{-\frac{2}{3}}$；

(4) $\left(\dfrac{243}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$； (5) $a^{\frac{4}{5}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{7}{5}}\ (a>0)$.

4. 化简(式中字母都是正数)：

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})\cdot(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$；

(2) $\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\cdot\sqrt{(a^{-5})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^{-\frac{1}{2}})^3}$.

4.1.2 无理数指数幂

一 有理数指数幂的基本不等式

我们知道，对任意的正整数 n 和正数 a，若 $a>1$，则 $a^n>1$；若 $a<1$，则 $a^n<1$. 那么，对于任意的正有理数 $\frac{m}{n}$，$a^{\frac{m}{n}}$ 和 1 之间是否也有类似的关系呢？

设 $a>1$，下面用反证法证明必有 $a^{\frac{1}{n}}>1$：

假设 $a^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$.

则 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a\leqslant 1$，与已知 $a>1$ 矛盾，故 $a^{\frac{1}{n}}>1$.

进一步可推知，$a^{\frac{m}{n}}>1$.

> 试着证明当正数 $a<1$ 时，有 $a^{\frac{m}{n}}<1$.

综合起来得到有关有理数指数幂的基本不等式：

对任意的正有理数 r 和正数 a，

若 $a>1$ 则 $a^r>1$；若 $a<1$ 则 $a^r<1$.

根据负指数的意义和倒数的性质可得推论：

对任意的负有理数 r 和正数 a，

若 $a>1$ 则 $a^r<1$；若 $a<1$ 则 $a^r>1$.

由此可知：

对任意的正数 $a>1$ 和两有理数 $r>s$，有 $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}>1$，即 $a^r>a^s$.

对任意的正数 $a<1$ 和两有理数 $r>s$，有 $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}<1$，即 $a^r<a^s$.

这两个不等式，有助于建立和理解无理数指数幂的概念.

二 无理数指数幂的概念

现在，对于 $a>0$，当 x 是任意有理数时，a^x 都有了意义.

在实际问题中，变量 x 可以是无理数，正数的无理数指数幂又怎么定义呢？

例如，要知道 $a^{\sqrt{2}}$ 是什么意思，就是问如何确定它的大小.

回顾一下，$\sqrt{2}$ 的大小是怎样确定的呢？

我们知道 $\sqrt{2}=1.414\ 213\cdots$，是因为知道它比 1 大，比 2 小；比 1.4 大，比 1.5 小；比 1.41 大，比 1.42 小；比 1.414 大，比 1.415 小；比 1.414 2 大，比 1.414 3 小……如果需要，我们能够把 $\sqrt{2}$ 算到任意多位小数，即把它的大小范围估计到任意的精度，要多精确都可以达到，这样就算确定了它.

类似的办法，可以确定实数 $a^{\sqrt{2}}$.

例如，设 $a=10$，利用前述的不等式可得下表：

$\sqrt{2}$的近似值	$10^{\sqrt{2}}$的近似值
$1<\sqrt{2}<2$	$10<10^{\sqrt{2}}<10^{2}$
$1.4<\sqrt{2}<1.5$	$10^{1.4}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.5}$
$1.41<\sqrt{2}<1.42$	$10^{1.41}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.42}$
$1.414<\sqrt{2}<1.415$	$10^{1.414}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.415}$
$1.414\,2<\sqrt{2}<1.414\,3$	$10^{1.414\,2}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.414\,3}$

根据 $10^{1.414\,2}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.414\,3}$，先计算出

$$10^{1.414\,2}=25.953\,74\cdots>25.95,$$
$$10^{1.414\,3}=25.959\,71\cdots<25.96,$$

立刻知道 $25.95<10^{\sqrt{2}}<25.96$，获得了 $10^{\sqrt{2}}$的四位有效数字.

这样，用 a 的有理数次幂来逼近其无理数次幂，可以要多精确就有多精确. 所以，任意正数 a 的无理数次幂就有了确定的意义. 于是，给定任意正数 a，对任意实数 u，a 的 u 次幂 a^{u} 都有了定义.

在幂的表达式 a^{u} 中，a 叫作**底数**，u 叫作**指数**.

可以证明，有理数指数幂的前述运算规律，对实数指数幂仍然成立. 类似地，仍有一般的幂运算基本不等式：

对任意的正数 u 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^{u}>1$；若 $a<1$ 则 $a^{u}<1$.

对任意的负数 u 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^{u}<1$；若 $a<1$ 则 $a^{u}>1$.

例 6 化简下列各式：

(1) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$；　　(2) $(-2)^{4}\cdot 4^{\pi-2}$.

解 (1) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=3^{2}=9$；

(2) $(-2)^{4}\cdot 4^{\pi-2}=4^{2}\cdot 4^{\pi-2}=4^{2+\pi-2}=4^{\pi}$.

例 7 已知 $a>1$，$h>0$，对任意的实数 u，求证：

(1) $a^{u+2h}-a^{u+h}>a^{u+h}-a^{u}$；

(2) $(1+h)^{100}>1+100h$.

证明 (1) 因为 a^{u+2h}，a^{u+h}，a^{u} 都是正数，且$\dfrac{a^{u+2h}}{a^{u+h}}=\dfrac{a^{u+h}}{a^{u}}=a^{h}>1$，

故 $a^{u+2h}-a^{u+h}$，$a^{u+h}-a^{u}$ 也是正数.

又

$$\frac{a^{u+2h}-a^{u+h}}{a^{u+h}-a^{u}}=\frac{a^{u+h}\cdot a^{h}-a^{u}\cdot a^{h}}{a^{u+h}-a^{u}}=\frac{a^{h}(a^{u+h}-a^{u})}{a^{u+h}-a^{u}}=a^{h}>1,$$

即得 $$a^{u+2h}-a^{u+h}>a^{u+h}-a^{u}.$$

（2）由于对正数 A 和 B 有 $(1+A)(1+B)>1+A+B$，故 $(1+h)^2>1+2h$，$(1+h)^3>(1+2h)(1+h)>1+3h$，从而

$$(1+h)^{10}=[(1+h)^2(1+h)^3]^2>[(1+2h)(1+3h)]^2>(1+5h)^2>1+10h,$$

两端 10 次方得

$$(1+h)^{100}>(1+10h)^{10}>1+100h.$$

练 习

1. 用计算器求下列各式的值（结果精确到 0.001）：

（1）$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}}$；　　（2）$1.2^{\sqrt{3}}$；　　（3）$5^{\sqrt{2}}$.

2. 化简下列各式：

（1）$(5^{3+\sqrt{2}})^{3-\sqrt{2}}$；　　（2）$\pi^{4-\pi}\cdot\pi^{\pi-2}$.

3. 已知 $0<a<1$，$h>0$，对任意的实数 u，求证：$a^{u+h}-a^{u+2h}<a^{u}-a^{u+h}$.

4.1.3 幂函数

大雾天，海陆空的交通运输都会受到影响.

雾是大量小水滴在空气中悬浮而形成的. 小水滴为什么不掉下来呢？

近似地把水滴看成小球，用球的直径 x 来刻画它的大小. 当 x 变小时，水滴所受的重力和空气阻力都在变小，但程度不同.

水滴所受的重力和体积成正比，即和 x^3 成正比；但它所受的空气阻力却和表面积成正比，即和 x^2 成正比.

当直径 x 从 1 mm 变小到 0.1 mm 时，水滴所受的重力减小到 0.1%，而阻力减小到 1%. 相对来说，阻力与重力的比值增加到 10 倍. 同理，x 从 1 mm 变小到 0.01 mm 时，阻力与重力的比值增加到 100 倍. 随着直径 x 的变小，水滴所受的重力比起阻力来，很快就变得微不足道了. 这就是小水滴成雾的原因.

上面的讨论中用到的变量 x，x^2 和 x^3，都是自变量 x 的函数. 这三种函数我们已经很熟悉了.

一般来说，当 x 为自变量而 α 为非零实数时，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫作（α 次）**幂函数**. 上面提到的 1，2，3 次幂函数，都是**正整数次幂函数** $y=x^{n}$（$x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{Z}_{+}$）的例子.

应用幂运算的基本不等式，可推出

对任意的正数 r 和两正数 $a>b$，有 $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r>1$，即 $a^r>b^r$.

对任意的负数 r 和两正数 $a>b$，有 $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r<1$，即 $a^r<b^r$.

由此可确定幂函数的增减性；而正整数次幂函数的奇偶性，则与幂指数的奇偶性一致.

多个正整数次幂函数与常数通过相乘相加组成的多项式函数，在理论和实际应用上极为重要.

正整数次幂函数的倒数 $y=\frac{1}{x^n}$是负整数次幂函数. 一般写成 $y=x^{-n}$，这里 n 是正整数，$x\neq 0$.

我们已学过的倒数函数 $y=\frac{1}{x}$，以及平方倒数函数 $y=\frac{1}{x^2}$，是最常用的负整数次幂函数.

从点光源发出的射线，如果没有介质的屏蔽，其强度随到达位置与光源的距离 x 的增大而变弱，强度与 x^2 成反比.

根据万有引力定律，与地心距离为 x 的物体所受的重力的大小，与 x^2 成反比. 这是宇宙飞行技术的最基本的理论依据.

负整数次幂函数还有一个特点：其图象向上（下）与 y 轴正（负）向无限接近，向右（左）与 x 轴正（负）向无限接近. 这一点无法用有限的图形来检验，但是可以通过幂运算的性质推理得知.

负整数次幂函数和正整数次幂函数，统称为整数次幂函数.

自变量 x 的平方根 $\sqrt{x}$ 或立方根 $\sqrt[3]{x}$，是最常见的分数次幂函数.

工业生产过程中排放的烟尘，在没有风的日子，会长时间笼罩在一片地方的上空. 这是因为，悬浮的颗粒在不流动的空气中扩散的速度与时间的平方根成正比，这是缓慢的运动.

一般地，对于实数次幂函数 $y=x^\alpha$（$\alpha\neq 0$）：

（1）当 $\alpha>0$ 时，它在$[0，+\infty)$上有定义且递增，值域为$[0，+\infty)$，函数图象过$(0，0)$和$(1，1)$两点；

（2）当 $\alpha<0$ 时，它在$(0，+\infty)$上有定义且递减，值域为$(0，+\infty)$，函数图象过点$(1，1)$，向上与 y 轴正向无限接近，向右与 x 轴正向无限接近.

图 4.1－1 是我们熟悉的五个幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的图象，它们中的后四个，各代表了一类幂函数.

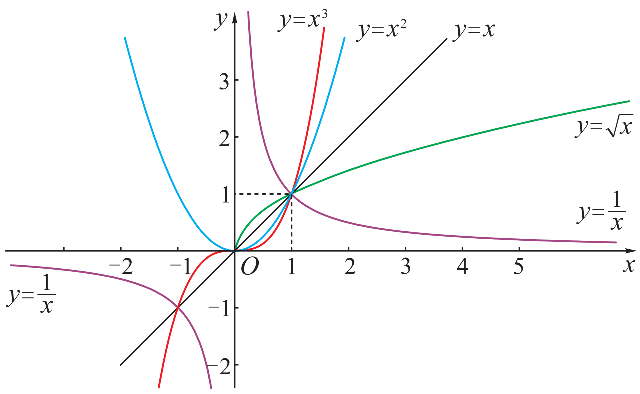


图 4.1－1

对于一般的非零实数 α，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 只在 $x>0$ 时才能都有意义. 对于整数次幂函数，由于图象的对称性，把它们在 $(0，+\infty)$ 上的图象和性质说清楚了，其他部分的情形也就容易知道. 所以我们主要关心幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $x>0$ 时的图象和性质.

例 8 比较下列各组中两个数的大小：

(1) $1.5^{1.4}$，$1.6^{1.4}$； (2) $1.5^{0.4}$，$1.6^{0.4}$；

(3) $1.5^{-1.5}$，$1.6^{-1.5}$.

解 (1) $1.5^{1.4}$，$1.6^{1.4}$ 可看作幂函数 $y=x^{1.4}$ 的两个函数值. 该函数在 $[0，+\infty)$ 上递增，由于底数 $1.5<1.6$，所以 $1.5^{1.4}<1.6^{1.4}$.

(2) $1.5^{0.4}$，$1.6^{0.4}$ 可看作幂函数 $y=x^{0.4}$ 的两个函数值. 该函数在 $[0，+\infty)$ 上递增，由于底数 $1.5<1.6$，所以 $1.5^{0.4}<1.6^{0.4}$.

(3) $1.5^{-1.5}$，$1.6^{-1.5}$ 可看作幂函数 $y=x^{-1.5}$ 的两个函数值. 该函数在 $(0，+\infty)$ 上递减，由于底数 $1.5<1.6$，所以 $1.5^{-1.5}>1.6^{-1.5}$.

由例 8 可以看到，利用幂函数的单调性，通过自变量的大小关系可以判断相应函数值的大小关系.

例 9 若 $f(x)$ 是幂函数，且 $f(8)=16$，求 $f(9)$，$f(64)$.

解 设 $f(x)=x^{\alpha}$.

由已知条件得 $f(8)=8^{\alpha}=16=8\cdot 2=8\cdot 8^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{4}{3}}$.

由 $8>1$ 知，若 $\alpha>\dfrac{4}{3}$，则 $f(8)=8^{\alpha}>8^{\frac{4}{3}}=16$；

若 $\alpha<\dfrac{4}{3}$，则 $f(8)=8^{\alpha}<8^{\frac{4}{3}}=16$. 两者皆与条件不合，故确定 $\alpha=\dfrac{4}{3}$.

于是 $f(9)=9^{\frac{4}{3}}$，$f(64)=64^{\frac{4}{3}}=256$.

练 习

1. 结合图 4.1-1 中的五个函数图象回答问题：

（1）哪几个是偶函数，哪几个是奇函数？

（2）写出每个函数的定义域、值域.

（3）写出每个函数的单调区间.

（4）从图中你发现了什么？

2. 对幂函数 $y=x^{\alpha}$，填空：

（1）当 $\alpha>1$，$x\geqslant 0$ 时，图象恒过________和________两点；其中当 $0<x<1$ 时，幂函数图象在 $y=x$ 图象的________方；当 $x>1$ 时，幂函数图象在 $y=x$ 图象的________方.

（2）当 $0<\alpha<1$，$x\geqslant 0$ 时，图象也恒过________和________两点；其中当 $0<x<1$ 时，幂函数图象在 $y=x$ 图象的________方；当 $x>1$，幂函数图象在 $y=x$ 图象的________方.

（3）当 $\alpha<0$，$x>0$ 时，图象恒过点________.

3. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(3,\ \frac{1}{9}\right)$，求函数的解析式，并作出该函数图象的草图，判断该函数的奇偶性和单调性.

4. 已知 $m(x)$ 是幂函数，若 $m(9)=27m(1)$，求 $m(25)$ 和 $m(8)$.

习题 4.1

学而时习之

1. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{(-6)^3}$；（2）$\sqrt{(-7)^2}$；

（3）$\sqrt[4]{(\sqrt{2}-2)^4}$；（4）$\sqrt[5]{(x-y)^5}$.

2. 用分数指数幂的形式表示下列各式（其中 a，b 均为正数）：

（1）$a\cdot\sqrt{a}\cdot\dfrac{a^2}{\sqrt{a\sqrt{a}}}$；（2）$\sqrt{\dfrac{a^3}{b}\sqrt{\dfrac{b^2}{a^6}}}$；

（3）$\sqrt{2a^3b^5}\cdot(-6\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})$.

3. 用计算器求值（结果精确到0.001）：

（1）$7.2^{-\frac{1}{3}}$；（2）$4.7^{\frac{1}{2}}$；（3）$3^{\sqrt{2}}$.

4. 计算下列各式（式中字母均为正数）：

（1）$x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{12}}$；（2）$a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{6}}$；

（3）$(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$；（4）$\left(\dfrac{4s^2r^{-6}}{9t^4}\right)^{\frac{3}{2}}$；

（5）$6x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\div\left(\dfrac{3}{2}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)$；（6）$(x^2-2+x^{-2})\div(x^2-x^{-2})$；

（7）$(x-y)\div(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$；（8）$\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$.

5. 计算：$\sqrt[3]{2-\dfrac{62}{27}}+\sqrt{\left(-3\dfrac{2}{3}\right)^2}-3\div16^{-0.75}+\sqrt[5]{2}\cdot(4^{-\frac{1}{5}})^{-2}$.

6. 化简下列各式：

（1）$(\pi^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1}$；（2）$((\sqrt{3})^{\sqrt[4]{64}})^{\sqrt{25}}$.

7. 比较下列各组中两个数的大小：

（1）$3.5^{1.7}$，$3.4^{1.7}$；（2）$3.5^{0.3}$，$3.4^{0.3}$；

（3）$3.5^{-1.6}$，$3.4^{-1.6}$；（4）$0.12^{-0.6}$，$0.11^{-0.6}$.

8. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点$\left(8,\dfrac{1}{2}\right)$，求函数的解析式，并作出该函数图象的草图，判断该函数的奇偶性和单调性.

温故而知新

9. 若 $2^x+2^{-x}=5$，求 $4^x+\dfrac{1}{4^x}$的值.

10. 已知 $x>1$，且 $x+x^{-1}=3$，求下列各式的值：

（1）$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$；（2）$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$；（3）$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$.

11. 已知 $f(x)$是奇函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^{\frac{2}{5}}$，求当 $x<0$ 时，$f(x)$的解析式.

12. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，试比较 a，b，c 的大小.

13. 已知幂函数 $f(x)=x^{2m^2-m-6}(m\in\mathbf{Z})$在区间$(0,+\infty)$上是减函数.

（1）求函数 $f(x)$的解析式；

（2）讨论函数 $f(x)$的奇偶性和单调性；

（3）求函数 $f(x)$的值域.

4.2 指数函数

4.2.1 指数爆炸和指数衰减

在幂的表达式 a^u 中，让幂指数为常数而取底数 a 为自变量 x，得到了幂函数.

另一方面，如果让底数为常数而取指数为自变量 x，则得到一类新的函数 $y=a^x$ ($x\in\mathbf{R}$)，这叫作**指数函数**，其中 $a>0$，且 $a\neq1$.

当底数 $a>1$ 时，指数函数值随自变量的增长而增大，底数 a 较大时指数函数值增长速度惊人，被称为**指数爆炸**.

把自变量 x 看成时间，在长为 T 的时间周期$[u, u+T]$中，指数函数 $y=a^x$($a>1$)的值从 a^u 增长到 a^{u+T}，增长率为$(a^{u+T}-a^u)\div a^u=a^T-1$，它是一个常量. 因此，在经济学或其他学科中，当某个量在一个既定的时间周期中，其**增长百分比**是一个常量时，这个量就被描述为**指数式增长**，也称**指数增长**.

棋盘上的麦粒，是我们熟悉的涉及指数增长的故事.

真实的世界里，有更生动的指数增长的过程. 铀核裂变过程中的链式反应是一个重要的事例.

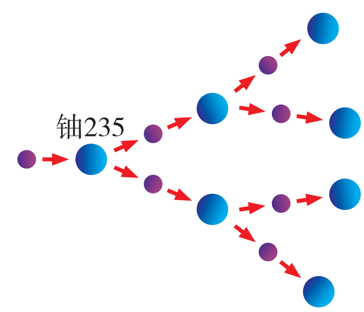


图 4.2－1　铀核裂变图示

在铀核裂变释放出巨大能量的同时，还放出两三个中子来. 如图 4.2－1，若一个中子打碎一个铀核，产生能量，放出两个中子来；这两个中子又打中另外两个铀核，产生两倍的能量，再放出四个中子来；这四个中子又打中邻近的四个铀核，产生四倍的能量，再放出八个中子来……以此类推，这样的链式反应，也就是一环扣一环的反应，又称连锁反应，持续下去，宛如雪崩.

裂变过程中释放出大量能量，比如说，1 g 铀 235 完全裂变所释放的能量相当于 2 t 优质煤完全燃烧所释放的能量.

自然界有许多现象，例如细胞分裂、生物繁殖、疾病传染、火药爆炸等，都可以用指数增长来描述.

反过来，如果底数 $0<a<1$ 时，指数函数值随自变量的增长而缩小以至无限接近于 0，叫作**指数衰减**. 指数衰减的特点是：在一个既定的时间周期中，其**缩小百分比**是一个常量.

指数衰减的一个有趣的应用，是考古学家用^{14}C测定化石年代．这叫作放射性同位素鉴年法．

自然界中的碳主要是^{12}C，也有少量^{14}C．^{14}C是高层大气中的原子核在太阳射来的高能粒子流的作用下产生的，它是具有放射性的碳同位素，能够自发地进行β衰变，变成氮，半衰期为 5 730 年．活的植物通过光合作用和呼吸作用与环境交换碳元素，体内^{14}C的比例与大气中的相同．植物枯死后，遗体内的^{14}C仍在进行衰变，不断减少，但是不再得到补充．因此，根据放射性强度减小的情况就可以算出植物死亡的时间．

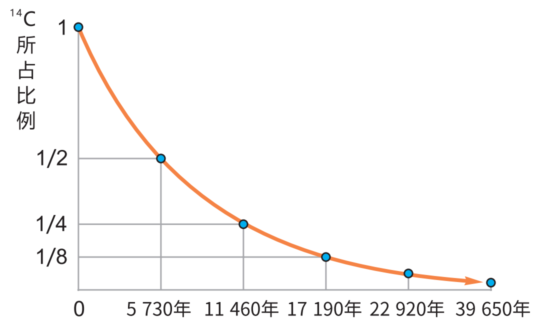


图 4.2－2　^{14}C的衰变图示

具体地说，植物枯死后，遗体内的^{14}C的含量可以用指数函数$C(x)=a^x$来描述．这里x表示植物枯死后经过的时间，以年为单位；底数a是小于 1 的正数．所谓半衰期为 5 730 年，就是经过 5 730 年$C(x)=a^x$的数值减少一半，即$a^{u+5\,730}=\dfrac{a^u}{2}$，化简后得到$a^{5\,730}=\dfrac{1}{2}$，用计算机或科学计算器计算可得$a\approx0.999\,879$．利用这些数据，可以从测量得到的$C(x)=a^x$的数值估计$x$，即植物枯死后经过的时间．

下面的例题，提供了指数函数更多的应用实例．

例 1　2012 年某地区人均 GDP 为 38 852 元，2013 年为 43 992 元；如果假定增速不变，取自变量x为 2012 年后的年数，将该地区人均 GDP 用函数$G(x)=C\cdot a^x$来近似地表示，写出此函数的解析式，依此估计 2020 年该地区人均 GDP 数量和相对于 2012 年的增长倍数，并说明底数a的意义．

解　按假设条件和数据，有

$$G(0)=C\cdot a^0=38\,852,\quad G(1)=C\cdot a^1=43\,992.$$

解得$C=38\,852$，$a=\dfrac{43\,992}{C}=\dfrac{43\,992}{38\,852}\approx1.132$．

因此该函数的解析式为$G(x)=38\,852\times1.132^x$．

依此估计出 2020 年该地区人均 GDP 为

$$\begin{aligned}G(8)&=C\times a^8\\&\approx38\,852\times1.132^8\\&\approx38\,852\times2.696\\&\approx104\,745\ (\text{元}),\end{aligned}$$

相对于 2012 年，增长了约 1.7 倍．底数a是每年人均 GDP 与上一年的比，平均增长率为$(a-1)\times100\%\approx13.2\%$．

例 2 医学中常用的钴 60 射线，穿过厚度为 1 cm 的铅板后，强度变为原来的 0.568，穿过厚度为 x cm 的铅板后的强度与原来的强度之比为 $H(x)=a^x$. 若铅板厚度为 12 cm，射线穿过铅板后的强度与原来的强度之比是多少？

解 由 $H(1)=a^1=0.568$，得 $H(x)=0.568^x$.

故射线穿过厚度为 12 cm 的铅板后强度与原来的强度之比是 $H(12)=0.568^{12}\approx 0.001\ 128$，即约为原来的千分之一.

练 习

1. 现有某种细胞 1 个，该细胞每小时分裂一次，即由 1 个细胞分裂成 2 个细胞，依此规律，若该细胞分裂 x h 后，写出得到的细胞个数 y 关于 x 的函数解析式. 若细胞总数量超过 2 048 个，则至少要经过几小时的分裂？

2. 已知放射性元素氡的半衰期是 3.82 天，问：

(1) 经过 7.64 天以后，氡元素会全部消失吗？

(2) 要经过多少天，剩下的氡元素只有现在的 $\frac{1}{8}$？

(3) 质量为 m 的氡经 x 天衰变后其质量为 $f(x)=m\cdot a^x$，试用计算器求 a 的值.

4.2.2 指数函数的图象与性质

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的性质，归根结底源于幂运算的性质. 例如，由于任意非零数的零次幂为 1，即 $a^0=1$，可见任意指数函数的图象都经过点 $(0, 1)$；由于正数的任意次幂仍为正，所以任意指数函数的图象都在 x 轴上方. 由前述幂运算的基本不等式可得：

对任意的正数 $a>1$ 和两数 $r>s$，有 $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}>1$，即 $a^r>a^s$.

对任意的正数 $a<1$ 和两数 $r>s$，有 $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}<1$，即 $a^r<a^s$.

可见：**当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增；**
当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减.

当 $a>1$ 时，设 $a=1+h$，可以证明 $a^n=(1+h)^n>nh$. 这表明只要 x 足够大则 a^x 可以大于任意给定的正数，而 $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ 则可以小于任意给定的正数. 由此可得**指数函数的值域为 $(0, +\infty)$.**

有了这样基本的理性认识，就能够在作图之前预见到图象的大致模样. 等到图象出来，对照栩栩如生的曲线来检验自己的想法，就更为亲切，更有成功感.

例 3 作出指数函数 $y=2^x$ 和 $y=10^x$ 的图象.

解 通过列表、描点连线（也可借助信息技术在计算机上作图），得图 4.2－3.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2^x$	…	0.25	0.5	1	2	4	…
x	…	-1	-0.5	0	0.5	1	…
$y=10^x$	…	0.1	0.32	1	3.16	10	…

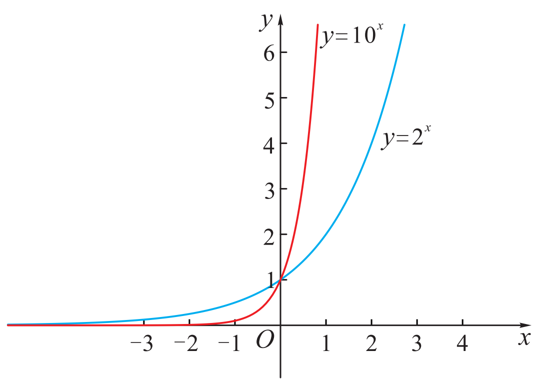


图 4.2－3

指数函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 的底数都大于 1. 一般地，当底数 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 的图象走势类似于图 4.2－3.

从图象看指数函数 $y=a^x$ $(a>1)$的性质，和理性认识相符，例如：

(1) 图象总在 x 轴上方，且图象与 x 轴永不相交，值域是$(0, +\infty)$.

(2) 图象恒过点$(0, 1)$，用式子表示就是 $a^0=1$.

(3) 函数是区间$(-\infty, +\infty)$上的增函数.

当然，作出来的图象是有限的，从图象得出来的这些结论是看曲线走势发挥想象力的结果.

如果底数 $a\in(0, 1)$，则它的倒数$\dfrac{1}{a}>1$. 若点 $P(x, y)$在函数 $y=a^x(0<a<1)$的图象上，由于 $a^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$，则点 $P(x, y)$关于 y 轴的对称点 $Q(-x, y)$一定在函数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x\left(\dfrac{1}{a}>1\right)$的图象上，反之亦成立. 所以函数 $y=a^x(0<a<1)$与函数

$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x\left(\frac{1}{a}>1\right)$的图象关于 y 轴对称. 例如 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 与 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称，如图 4.2－4 所示.

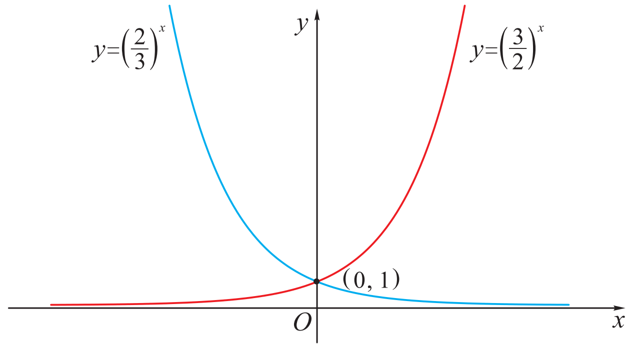
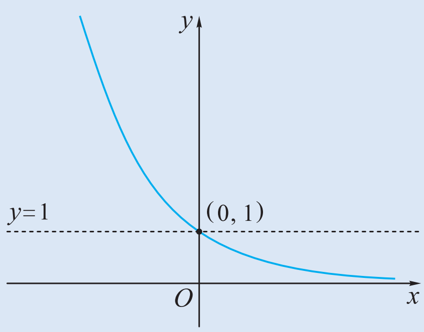
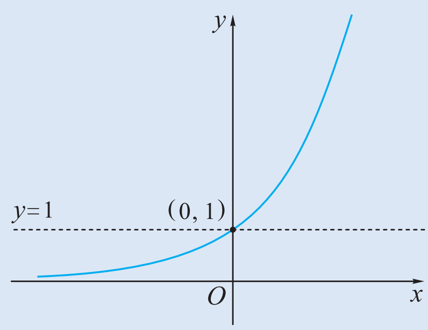


图 4.2－4

> 底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称. 事实上，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 的图象可以看成指数函数 $y=a^x$（$0<a<1$）的代表. 与 $a>1$ 时的区别，仅仅在于递增和递减的不同. 其他如定义域与值域，恒过点(0，1)等都是一样的. 将这些性质对比列表如下：

表达式	$y=a^x$（$0<a<1$）	$y=a^x$（$a>1$）
图　象		
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
值　域	$(0, +\infty)$	
性　质	函数图象过定点（0，1），即 $a^0=1$	
	在 **R** 上递减	在 **R** 上递增

例 4　比较下列各组中两个数的大小：

(1) $3.5^{1.5}$，$3.5^{1.3}$；　　(2) $0.3^{1.5}$，$0.3^{1.3}$；

(3) $0.7^{0.8}$，$0.8^{0.7}$.

解　(1) $3.5^{1.5}$，$3.5^{1.3}$可看作函数 $y=3.5^x$ 的两个函数值.

由于底数 $3.5>1$，所以指数函数 $y=3.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

因为 $1.5>1.3$，所以 $3.5^{1.5}>3.5^{1.3}$.

(2) $0.3^{1.5}$，$0.3^{1.3}$ 可看作函数 $y=0.3^x$ 的两个函数值.

由于底数 $0.3<1$，所以指数函数 $y=0.3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

因为 $1.5>1.3$，所以 $0.3^{1.5}<0.3^{1.3}$.

(3) 因为 $y=0.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $0.7^{0.8}<0.7^{0.7}$.

由 $\dfrac{0.8^{0.7}}{0.7^{0.7}}=\left(\dfrac{0.8}{0.7}\right)^{0.7}>1$ 得 $0.7^{0.7}<0.8^{0.7}$.

所以 $0.7^{0.8}<0.7^{0.7}<0.8^{0.7}$.

> 比较两个数的大小，既可以作差，也可以用比的方法.

例 5 已知指数函数 $f(x)=a^x$ 的图象经过点 $(2,7)$，求 $f(-6)$ 和 $f(3)$.

解 因为 $f(x)=a^x$ 的图象经过点 $(2,7)$，

所以 $f(2)=a^2=7$，

解得 $a=7^{\frac{1}{2}}$，于是 $f(x)=7^{\frac{x}{2}}$.

所以 $f(-6)=7^{\frac{-6}{2}}=7^{-3}=\dfrac{1}{7^3}=\dfrac{1}{343}$，

$f(3)=7^{\frac{3}{2}}=\sqrt{343}=7\sqrt{7}$.

例 6 一种放射性物质不断衰变为其他物质，每经过 1 年剩余的量是原来的 84%，画出这种物质的剩余量随时间变化的图象，并从图象上观察大约要经过多少年，剩余量是原来的 50%.

解 可设原来的量是 1 个单位，经过 x 年后，剩余量是 y 个单位.

可得函数解析式为 $y=0.84^x$. 列表如下：

x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=0.84^x$	…	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	0.35	…

在直角坐标系中画出 $y=0.84^x$ 的图象，如图 4.2-5 所示. 从图象和上表都可以看到，大约经过 4 年，剩余量是原来的 50%.

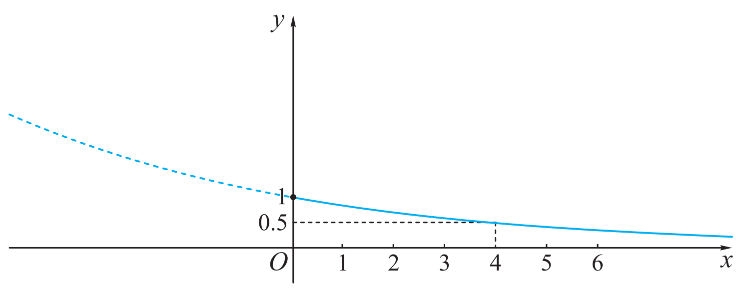


图 4.2-5

练 习

1. 在同一直角坐标系内作出下列各函数的图象：

（1）$y=3^x$；（2）$y=3^{-x}$.

2. 求函数 $y=2^{|3-x|}$ 的值域.

3. 比较下列各组中两个数的大小：

（1）$0.2^{0.3}$ 和 $0.2^{0.2}$；（2）$1.2^{0.3}$ 和 $1.2^{0.2}$；

（3）$0.3^{0.1}$ 和 $0.3^{-0.1}$；（4）$1.35^{0.2}$ 和 $1.35^{-0.2}$.

4. 已知指数函数 $f(x)=a^x$ 的图象经过点$(2, 2)$，求 $f(1)$的值.

习题 4.2

学而时习之

1. 已知函数 $f(x)=2^x$，计算：

（1）$f(0)-f(-1)$；（2）$f(2)-f(1)$；

（3）$f(4)-f(3)$；（4）$f(6)-f(5)$.

试比较这些计算结果，说一说你的发现.

2. 如果某林区的木材蓄积量每年平均比上一年增长 12%，经过 x 年可以增长到原来的 y 倍，写出 y 关于 x 的函数解析式.

3. 小张新购买某型号轿车的价格为 16 万元，使用 x 年后的轿车参照$P(x)=16\cdot 0.9^x$ 来衡量价值.

（1）试解释上述函数表达式中 0.9 的含义.

（2）使用 3 年后的轿车价值多少？9 年后呢？

4. 某食品的保鲜时间 y(h)与储藏温度 x(℃)满足函数关系式 $y=e^{kx+b}$（$e=2.718\ 28\cdots$，k，b 为常数）. 若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 h，在 22 ℃的保鲜时间是 48 h，求该食品在 33 ℃的保鲜时间.

5. 求下列函数的定义域：

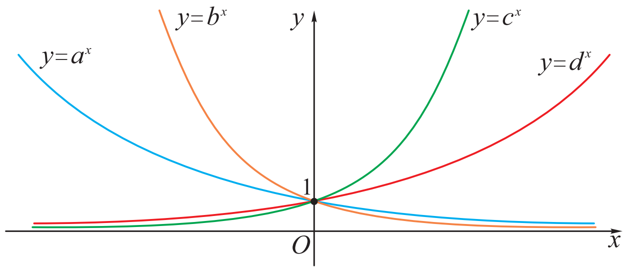
（1）$y=8^{\frac{1}{3x-1}}$；（2）$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^x}$.

6. 在同一直角坐标系内作出下列各函数的图象：

$$y=4^x,\ y=4^{-x},\ y=4^{x+1},\ y=4^{x-1}.$$

并说明后三个函数图象可由 $y=4^x$ 的图象经过怎样的变换而得到.

7. 设 a，b，c，d 都是不等于 1 的正数，$y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 在同一直角坐标系中的图象如下图所示，则 a，b，c，d 的大小关系是____________.



（第 7 题）

8. 已知 $0<a<1$，$b<-1$，则函数 $y=a^x+b$ 的图象不经过哪一象限？

9. 比较下列各组中两个数的大小：

（1）$1.6^{2.5}$，1.7^3；（2）$0.6^{-0.1}$，$0.6^{-0.5}$；（3）$1.7^{0.3}$，$0.9^{3.1}$.

温故而知新

10. 运用图象法，判断函数 $y=2^x$ 与 $y=x^2$ 的图象的交点个数，并借助计算机作图，检验自己的判断是否正确.

11. 已知函数 $f(x)=a^{|3x-1|}(a>0$ 且 $a\neq1)$满足 $f(1)=\dfrac{4}{9}$.

（1）求 a 的值；

（2）求函数 $f(x)$的单调区间；

（3）求函数 $f(x)$的值域.

12. 若函数 $f(x)=(a^2-8)^x$ 是区间$(-\infty,+\infty)$上的减函数，求实数 a 的取值范围.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ g(x), & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)$是奇函数，求 $g(2)$的值.

14. 若函数 $f(x)=a^{2x}+a^x-2(a>0$ 且 $a\neq1)$在区间$[-1,0]$上的最小值为 $-\dfrac{5}{4}$，求 a 的值.

15. 函数 $y=3\cdot a^x$ 与 $y=a^x$ 有哪些相同点和不同点？函数 $y=-2\cdot a^x$ 呢？思考分析后作出图象，并观察检验自己的判断.

4.3 对数函数

4.3.1 对数的概念

我们在 4.2.1 节的例 2 中知道，钴 60 射线穿过厚度为 1 cm 的铅板后，强度是原来的 0.568，穿过厚度为 x cm 的铅板后的强度与原来的强度之比为 $H(x)=0.568^x$. 若要射线穿过铅板后的强度是原来的百分之一，铅板厚度应为多少呢？也就是说，知道 $H(x)=0.568^x=0.01$，如何求 x 呢？

把问题抽象化为一般的数学问题：在等式

$$N=a^b(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$$

中，知道了 N 和 a，如何求 b？

由 $8=2^b$ 容易看出来 $b=3$，但已知 $2=10^b$ 求 b 就不容易了.

这是一种新的数学运算，叫作对数运算. 具体来说：

如果 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq 1)$，那么 b 叫作以 a 为底，(正)数 N 的**对数**，记作 $b=\log_a N$. 这里，a 叫作对数的**底数**，N 叫作对数的**真数**.

对数的发明者——纳皮尔.

"log" 是拉丁文 logarithmus（对数）的缩写.

例 1 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

（1）$2^3=8$；　　（2）$10^5=100\ 000$；

（3）$3^x=7$；　　（4）$\log_2 32=5$；

（5）$\log_3\dfrac{1}{27}=-3$；　　（6）$\log_x b=2$.

解　（1）$\log_2 8=3$；　　（2）$\log_{10} 100\ 000=5$；

（3）$\log_3 7=x$；　　（4）$2^5=32$；

（5）$3^{-3}=\dfrac{1}{27}$；　　（6）$x^2=b\ (x>0, x\neq 1)$.

把对数定义中的 $b=\log_a N$ 代入 $a^b=N$，得到

$$a^{\log_a N}=N\ (N>0,\ a>0\text{ 且 }a\neq 1);$$

把 $N=a^b$ 代入 $b=\log_a N$，得到

$$b=\log_a a^b\ (b\in\mathbf{R},\ a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

上述两个等式叫作**对数的基本恒等式**．用它们做有关对数的推理或计算比较方便．例如，由基本恒等式立刻知道：

$$\log_a a=\log_a a^1=1,\quad \log_a 1=\log_a a^0=0.$$

即**底的对数为 1，1 的对数为 0.**

例 2 求下列各式的值：

（1）$\log_2\dfrac{1}{2}$；（2）$\log_{0.6}1$；

（3）$2^{\log_2 3-2}$；（4）$2^{\log_2(3+2)}$．

解 （1）$\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$；

（2）$\log_{0.6}1=\log_{0.6}0.6^0=0$；

（3）$2^{\log_2 3-2}=2^{\log_2 3}\cdot 2^{-2}=\dfrac{2^{\log_2 3}}{2^2}=\dfrac{3}{4}$；

（4）$2^{\log_2(3+2)}=2^{\log_2 5}=5$．

练习

1. 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

（1）$5^4=625$；（2）$2^{-6}=\dfrac{1}{64}$；

（3）$4^x=10$；（4）$3^{-\frac{m}{4}}=9$；

（5）$\log_2 16=4$；（6）$\log_3\dfrac{1}{9}=-2$；

（7）$\log_3(5+x)=2$；（8）$\log_{a-1}(b+2)=3$．

2. 求下列各式的值：

（1）$\log_2\dfrac{1}{16}$；（2）$\log_{\frac{1}{2}}32$；

（3）$\log_{0.4}1$；（4）$\log_{2.5}6.25$；

（5）$4^{\log_4 3}$；（6）$3^{\log_3 7+1}$．

3. 求下列各式中 x 的值：

（1）$\log_5 x=3$；（2）$\log_2(2x+1)=3$；

（3）$\log_x\dfrac{1}{8}=3$；（4）$\log_2 8^x=-3$．

4.3.2 对数的运算法则

既然指数式可以写成对数式，指数的运算法则也就可以改写成对数的运算法则. 由对数的定义（或对数的基本恒等式）可以推导出下面三条运算法则：

(1) $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$；

(3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(其中 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$).

证明 （1）设$\log_a M=p$，$\log_a N=q$，那么 $a^p=M$，$a^q=N$.

由指数的运算法则，有：$MN=a^pa^q=a^{p+q}$.

其对数形式是 $p+q=\log_a(MN)$，

即

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N.$$

若用对数的基本恒等式则更直截了当：

$$\begin{aligned}\log_a(M\cdot N)&=\log_a(a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N})\\&=\log_a a^{\log_a M+\log_a N}=\log_a M+\log_a N.\end{aligned}$$

（2）设$\log_a M=p$，那么 $a^p=M$，$M^n=(a^p)^n=a^{pn}$.

改写为对数形式是 $np=\log_a M^n$，

即

$$\log_a M^n=n\log_a M.$$

若用对数的基本恒等式则为

$$\log_a M^n=\log_a(a^{\log_a M})^n=\log_a a^{n\log_a M}=n\log_a M.$$

（3）试仿照(1)写出证明过程.

对数的运算法则中，最重要的是(1)，它刻画了对数运算的本质：化乘为加.

你能用这一条法则推导出其他法则吗?

这三个公式以及上面已经引入的对数基本恒等式，还有$\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，就成为对数运算的基础.

例 3 设 $A=\log_a x$，$B=\log_a y$，$C=\log_a z$，用 A，B，C 表示下列各式：

（1）$\log_a\dfrac{xy^2}{z^3}$；　　（2）$\log_a\dfrac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解 （1）

$$\begin{aligned}\log_a\frac{xy^2}{z^3}&=\log_a(xy^2)-\log_a z^3\\&=\log_a x+2\log_a y-3\log_a z\\&=A+2B-3C；\end{aligned}$$

(2) $\log_a \dfrac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=3\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z$

$=3A+\dfrac{1}{2}B-\dfrac{1}{3}C$.

例 4 求下列各式的值：

(1) $\log_3(9^4\cdot 3^3)$；　　(2) $\log_{10}\sqrt[3]{10\ 000}$.

解 (1) $\log_3(9^4\cdot 3^3)=\log_3 9^4+\log_3 3^3=4\log_3 3^2+3=4\times 2+3=11$；

(2) $\log_{10}\sqrt[3]{10\ 000}=\log_{10}\sqrt[3]{10^4}=\log_{10}10^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}$.

例 5 计算：

(1) $\log_5 35-\log_5\dfrac{1}{50}-\log_5 14$；　　(2) $\log_{10}12.5-\log_{10}\dfrac{5}{8}+\log_{10}\dfrac{1}{2}$.

解 (1) $\log_5 35-\log_5\dfrac{1}{50}-\log_5 14$

$=\log_5\left(35\div\dfrac{1}{50}\div 14\right)=\log_5 125=\log_5 5^3=3$；

(2) $\log_{10}12.5-\log_{10}\dfrac{5}{8}+\log_{10}\dfrac{1}{2}$

$=\log_{10}\left(12.5\div\dfrac{5}{8}\times\dfrac{1}{2}\right)=\log_{10}10=1$.

练 习

1. 用$\log_a x=A$，$\log_a y=B$，$\log_a z=C$，$\log_a(x-y)=D$，$\log_a(x+y)=E$表示下列各式：

(1) $\log_a(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-1})$；　　(2) $\log_a\dfrac{\sqrt{x}}{y^3z^2}$；　　(3) $\log_a\left(\dfrac{x-y}{x+y}\cdot z\right)$；

(4) $\log_a\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$；　　(5) $\log_a\left(\dfrac{x}{z(x+y)}\right)^4$；　　(6) $\log_a\sqrt[5]{\dfrac{z^2}{x^2-y^2}}$.

2. 下列运算是否正确？如果其中有错误，试举出反例.

(1) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a\dfrac{M}{N}$；　　(2) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a(M-N)$；

(3) $\log_a M-\log_a N=\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$.

3. 计算：

(1) $\log_3(27\times 9^2)$；　　(2) $\log_{10}\dfrac{1}{1\ 000}$；　　(3) $\log_7 30-\log_7 12-\log_7\dfrac{5}{2}$.

对数运算随着底数的变化而变化，变化太多就不方便．把底数取定了，对计算和推理都有很大好处．

在没有计算机的年代，为了复杂计算的需要，引入了以 10 为底的**常用对数**，并且把$\log_{10}N$记为 $\lg N$．

在数学研究中，常用以 e(e=2.718 28…)为底的对数．这种对数叫作**自然对数**，并且把 $\log_{e}N$ 记为 $\ln N$．

在历史上，经过不懈的努力，人们建立了常用对数表和自然对数表．

现在，在计算机或计算器中，设置两个简单的程序，就能计算常用对数和自然对数．那么不是 10 或者 e 作为底数的对数，怎样求值？对每个底数都作出一张对数表或在计算机里存个计算程序，既不必要，也不可能．如果能在不同底数的对数间进行转换就好了．

用对数的基本恒等式，直接有

$$\log_a N=\log_a(b^{\log_b N})=\log_b N\cdot\log_a b,$$

所以

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

这个公式叫作对数的**换底公式**．

最常用的对数换底公式是$\log_a N=\dfrac{\lg N}{\lg a}$和$\log_a N=\dfrac{\ln N}{\ln a}$，因为常用对数计算起来最方便，而自然对数最受数学家的青睐．

例 6 已知 $\lg 2\approx 0.301\ 0$，求 2^{100}有多少位整数．

解 设 $x=2^{100}$，等号两边同取以 10 为底的对数，得

$$\lg x=\lg 2^{100}=100\lg 2\approx 100\times 0.301\ 0=30.1,$$

所以 $x=10^{30+0.1}=10^{30}\times 10^{0.1}$.

又 $10^0<10^{0.1}<10^1$，因此 $10^{30}<x<10^{31}$，这说明 2^{100}是一个三十一位数．

实际上，

$$2^{100}=1\ 267\ 650\ 600\ 228\ 229\ 401\ 496\ 703\ 205\ 376.$$

这说明估计正确．

例 7 利用换底公式求值：

（1）$\log_9 27$；　　（2）$\log_{\frac{1}{2}}16$．

解 （1）由换底公式得，$\log_9 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2}=\dfrac{3}{2}$；

（2）由换底公式得，$\log_{\frac{1}{2}}16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 2^{-1}}=-4$．

例 8 利用换底公式证明：

（1）$\log_a b\cdot\log_b a=1$；　　　（2）$\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$.

证明　（1）由换底公式得，

$$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a},$$

因此
$$\log_a b\cdot\log_b a=1.$$

（2）由换底公式得，

$$\log_{a^n}b^m=\frac{\log_a b^m}{\log_a a^n}=\frac{m\log_a b}{n\log_a a}=\frac{m}{n}\log_a b.$$

> 由例 8(2)，有 $\log_a b=\log_{a^n}b^n$. 这个公式可以用来简化对数运算. 如 $\log_{\sqrt{3}}2=\log_3 4$（底数和真数同取平方）.

例 9 地震的强烈程度通常用里氏震级 $M=\lg A-\lg A_0$ 表示，这里 A 是距离震中 100 km 处所测量地震的最大振幅，A_0 是该处的标准地震振幅.

（1）若一次地震测得 $A=25$ mm，$A_0=0.001$ mm，该地震的震级是多少（计算结果精确到 0.1）?

（2）计算里氏 8 级地震的最大振幅是里氏 5 级地震最大振幅的多少倍.

解　（1）
$$\begin{aligned}M&=\lg 25-\lg 0.001\\&=\lg\frac{25}{0.001}\\&=\lg 25\ 000\\&=\lg 2.5+\lg 10^4\\&\approx 4.4.\end{aligned}$$

因此该地震的震级约为里氏 4.4 级.

（2）设里氏 8 级和 5 级地震的最大振幅分别为 A_1，A_2. 由题意，得

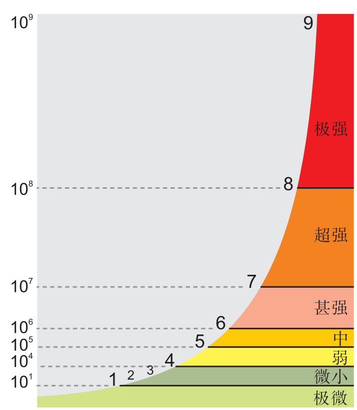
$$\begin{cases}\lg\dfrac{A_1}{A_0}=8,\\[2mm]\lg\dfrac{A_2}{A_0}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{A_1}{A_0}=10^8,\\[2mm]\dfrac{A_2}{A_0}=10^5.\end{cases}$$

由上可得，

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_0\cdot 10^8}{A_0\cdot 10^5}=10^3=1\ 000.$$

因此里氏 8 级地震的最大振幅是里氏 5 级地震最大振幅的 1 000 倍.

里氏震级表



练 习

1. 已知 $\lg 3\approx 0.4771$，估计 9^{50} 的大小．

2. 利用换底公式求值：（1）$\log_{25}125$；　　（2）$\log_{\frac{1}{3}}27$．

3. 利用换底公式证明：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$．

4. 我们都处于有声世界之中．音量大小的单位是分贝(dB)，对于一个强度为 I 的声波，音量的定义是 $\eta=10\lg\dfrac{I}{I_0}$，这里 I_0 是人耳能听到的声音的最低声波强度，$I_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$．

（1）如果 $I=1\ \mathrm{W/m^2}$，求相应的分贝值；

（2）70 dB 时的声音强度 I 是 60 dB 时声音强度 I' 的多少倍？

4.3.3 对数函数的图象与性质

由于指数函数是严格单调的，等式 $x=a^y$ 中不同的 y 对应于不同的 x，即每个 x 对应的 y 是确定的，从而对数运算 $y=\log_a x$（$x>0$，$a>0$ 且 $a\neq 1$）确定了一个函数，叫作（以 a 为底的）**对数函数**，它描述的数量关系是 $x=a^y$．此等式中把 x 和 y 互换位置就成了指数函数 $y=a^x$ 的表达式，因此称指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为**反函数**．这时，指数函数的定义域$(-\infty,+\infty)$成了对数函数的值域，指数函数的值域$(0,+\infty)$是对数函数的定义域．

要找寻函数 $y=f(x)$ 的反函数，可以先把 x 和 y 换位，写成 $x=f(y)$，再把 y 解出来，表示成 $y=g(x)$ 的形式．如果这种形式是唯一确定的，就得到了 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$．既然 $y=g(x)$ 是从 $x=f(y)$ 解出来的，必有 $f(g(x))=x$．

既然对数函数 $y=\log_a x$ 描述的数量关系 $x=a^y$ 和指数函数表达式 $y=a^x$ 的区别不过是把 x 和 y 换位，可见点 (x, y) 在 $y=\log_a x$ 的图象上的充要条件，就是点 (y, x) 在 $y=a^x$ 的图象上．从几何上看，两者的图象关于直线 $y=x$ 对称．把 $y=a^x$ 的图象以直线 $y=x$ 为对称轴做反射，就得到了 $y=\log_a x$ 的图象．如图 4.3－1，先

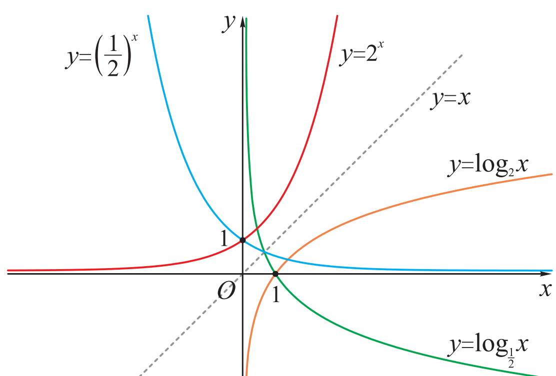
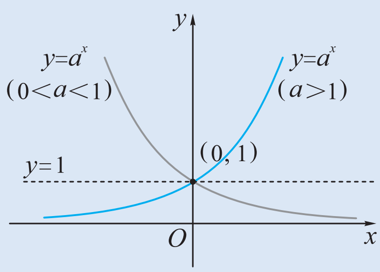
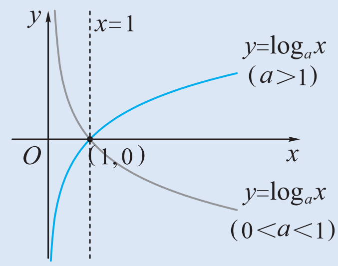


图 4.3－1

作出 $y=2^x$ 的图象，以 y 轴为对称轴做反射得到 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象；再以直线 $y=x$ 为对称轴做反射，$y=2^x$ 的图象反射后成为 $y=\log_2 x$ 的图象，而 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象反射后成为 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象．

一般地，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，则它们的图象关于直线 $y=x$ 轴对称．两者中一个递增另一个也递增，一个递减另一个也递减．因而由指数函数的增减性可得到对数函数的增减性．下面将这两类函数的性质对比列表如下：

函　数	指数函数 $y=a^x$	对数函数 $y=\log_a x$
图　象		
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$
值　域	$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
图象经过点	$(0,\ 1)$	$(1,\ 0)$
增减性	$a>1$ 时递增；$0<a<1$ 时递减	$a>1$ 时递增；$0<a<1$ 时递减

例 10 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{0.5}(3-x)$；　　(2) $y=\log_{2x-3}(x^2+3)$．

解　(1) 要使函数有意义，需 $3-x>0$，即 $x<3$．

所以函数 $y=\log_{0.5}(3-x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ 3)$．

(2) 要使函数有意义，需 $2x-3>0$ 且 $2x-3\neq1$，即 $x>\frac{3}{2}$ 且 $x\neq2$．

所以函数 $y=\log_{2x-3}(x^2+3)$ 的定义域是 $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)\cup(2,\ +\infty)$．

例 11 比较下列各组中两个数的大小：

(1) $\log_2 7.6$ 和 $\log_2 8.7$；

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 7.6$ 和 $\log_{\frac{1}{2}} 8.7$；

(3) $\log_a 7.6$ 和 $\log_a 8.7$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$；

(4) $\log_{0.8} 2$ 和 $2^{0.8}$．

解　(1) 因为函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $7.6<8.7$，

所以 $$\log_2 7.6<\log_2 8.7.$$

(2) 因为函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，且 $7.6<8.7$，

所以 $$\log_{\frac{1}{2}} 7.6>\log_{\frac{1}{2}} 8.7.$$

(3) 当 $a>1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $7.6<8.7$，

所以 $$\log_a 7.6<\log_a 8.7;$$

当 $0<a<1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

所以 $$\log_a 7.6>\log_a 8.7.$$

(4) 因为函数 $y=\log_{0.8} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

所以 $$\log_{0.8} 2<\log_{0.8} 1=0.$$

又因为 $2^{0.8}>0$，所以 $\log_{0.8} 2<2^{0.8}$.

例 12　证明函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 在区间 $(3, +\infty)$ 上递减.

证明　记 $g(x)=x^2-2x-3$.

设 u，v 是 $(3, +\infty)$ 上任意两个实数，且 $u<v$，则

$$\frac{g(v)-g(u)}{v-u}=\frac{(v^2-u^2)-2(v-u)}{v-u}=u+v-2>0,$$

所以，$g(x)=x^2-2x-3$ 在 $(3, +\infty)$ 上递增.

因而对于 $(3, +\infty)$ 上任意两个实数 u，v，当 $u<v$ 时，

有 $$g(v)>g(u)>g(3)=0.$$

又 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减，

所以 $$\log_{\frac{1}{2}} g(u)>\log_{\frac{1}{2}} g(v).$$

因此，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 在 $(3, +\infty)$ 上递减.

借助计算机软件可画出函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 和 $g(x)=x^2-2x-3$ 的图象，如图4.3-2. 由图也可以看出，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 在 $(3, +\infty)$ 上递减.

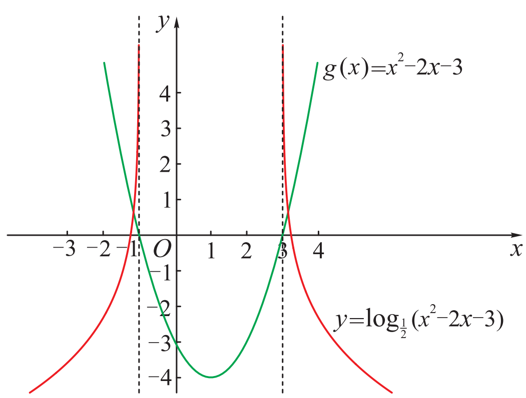


图 4.3-2

练 习

1. 试说明函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象关于 x 轴对称，并借助 $y=\log_3 x$ 的图象画出 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，结合图象归纳这两个函数的相同点与不同点.

2. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\log_4(1-x)$；　　（2） $y=\log_3 \dfrac{1-x}{1+x}$；

（3） $y=\dfrac{1}{\log_2(x-2)}$；　　（4） $y=\sqrt{\log_{0.2}(5x-4)}$.

3. 比较下列各组中两个数的大小：

（1） $\log_{1.2}1.6$，$\log_{1.2}1.7$；　　（2） $\log_{\frac{2}{3}}0.5$，$\log_{\frac{2}{3}}0.6$；

（3） $\log_a 0.9$，$\log_a 0.8$.

4. 若 $\log_a \dfrac{2}{3}<2(a>0$ 且 $a\neq 1)$，求 a 的取值范围.

习题 4.3

学而时习之

1. 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

（1） $3^x=2$；　　（2） $2^m=6$；

（3） $\log_2 \dfrac{1}{4}=-2$；　　（4） $\log_{10}0.01=-2$.

2. 求下列各式的值：

（1） $\log_{1.2}1$；　　（2） $\log_9 81$；　　（3） $2\log_9 3$；　　（4） $e^{\ln 8}$.

3. 计算：

（1） $\log_2(4^7\times 2^5)$；　　（2） $\log_a 2+\log_a \dfrac{1}{2}(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

（3） $2\log_5 10+\log_5 0.25$；　　（4） $\log_2(\log_2 16)$.

4. 计算：

（1） $\dfrac{\ln 2+\ln 3}{\ln 36}$；　　（2） $\lg^2 2+\lg^2 5+2\lg 2\lg 5$；

（3） $\log_2 9\cdot\log_3 4$；　　（4） $\log_4 28+\log_{\frac{1}{4}}56$；

（5） $\lg \dfrac{1}{100}+\log_{\frac{1}{3}}9-\log_5 125-\log_4 \dfrac{1}{32}$；　　（6） $\log_8 \dfrac{1}{32}+\lg \sqrt[3]{100}$；

(7) $\sqrt{\ln^2 3+\ln 9e}$；　　　　　　　　(8) $\log_2 \dfrac{1}{25}\cdot\log_3 \dfrac{1}{8}\cdot\log_5 \dfrac{1}{9}$.

5. 设 $a=\lg 2$，$b=\lg 3$，用 a，b 分别表示$\lg 6$，$\lg \dfrac{2}{3}$，$\lg 1.5$，$\lg 12$，$\lg 18$.

6. 已知 $11.2^a=1\ 000$，$0.011\ 2^b=1\ 000$，求$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$的值.

7. 溶液的酸碱度(pH)是由公式 $\mathrm{pH}=-\lg[\mathrm{H}^+]$计量的，其中$[\mathrm{H}^+]$表示溶液中氢离子的浓度，单位为 mol/L. pH 的范围为 0～14.

(1) $[\mathrm{H}^+]$为 0.1 mol/L，0.01 mol/L 的溶液的 pH 分别是多少？

(2) 随着氢离子浓度的降低，pH 会发生怎样的变化？

(3) 试确定橙汁(pH=3.5)的氢离子浓度.

(4) 试确定人体血液在 pH=7.4 时的氢离子浓度.

8. 1986 年切尔诺贝利(现属乌克兰)发电厂的放射性物质泄漏到大气中，奥地利被碘 131 污染(半衰期约为 8 天)，当碘 131 的含量为 10%时将干草喂给奶牛是安全的. 那么农民需要等待多久才能使用这些干草？

9. 大气压强 $p=\dfrac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$，它的单位是“帕斯卡”(Pa，$1\ \mathrm{Pa}=1\ \mathrm{N/m^2}$)，已知大气压强 p(Pa) 随高度 h(m)的变化规律是 $p=p_0e^{-kh}$，p_0 是海平面大气压强，$k=0.000\ 126\ \mathrm{m}^{-1}$. 当地高山上一处大气压强是海平面处大气压强的$\dfrac{1}{3}$，求高山上该处的海拔.

10. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{\frac{2}{3}}(-x^2+2x+8)$；

(2) $y=\sqrt{2-\log_3(x^2-4)}$.

11. 函数 $y=2^x$ 的反函数的图象经过点(　　)

(A) (1，3)　　(B) (0，1)　　(C) (3，1)　　(D) (1，0)

12. 比较 a，b，c 的大小：

(1) 已知 $1<x<2$，$a=(\log_2 x)^2$，$b=\log_2 x^2$，$c=\log_2(\log_2 x)$；

(2) 已知 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$.

13. 对于函数 $y=\log_m x$ 与 $y=\log_n x$.

(1) 若 $0<m<n<1$，你能在直角坐标系中画出它们的大致图象吗？你发现了什么？

(2) 若 $1<m<n$，你能在直角坐标系中画出它们的大致图象吗？你发现了什么？

温故而知新

14. 已知 $\log_3[\log_5(\log_7 x)]=1$，求 x 的值.

15. 已知 $2^x=24^y=3$，求$\dfrac{3y-x}{xy}$的值.

16. 已知 x_1，x_2 是方程 $3(\lg x)^2-\lg x^5+1=0$ 的两个实数根，求 $\lg(x_1x_2)\cdot(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_1)$的值.

17. 已知$\log_4(x+2)+\log_2(x+2)^2=5$，求 x 的值.

18. 记 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，写出 $f(g(x))$和 $g(f(x))$的具体表达式并化简. 尝试说明这里的表达式和化简结果与对数的基本恒等式 $N=a^{\log_a N}$ 和 $b=\log_a a^b$ 的关系.

19. 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$的定义域和值域相同的是(　　)

(A) $y=x$　　(B) $y=\lg x$　　(C) $y=2^x$　　(D) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

20. 已知函数 $f(x)=\log_a \dfrac{4-x}{4+x}(a>0$ 且 $a\neq1)$.

(1) 判断函数 $f(x)$的奇偶性；

(2) 判断函数 $f(x)$的单调性.

21. 心理学家有时使用函数 $L(t)=A(1-\mathrm{e}^{-kt})$来测定在时间 $t(\mathrm{min})$内能够记忆的量 L，其中 A 表示需要记忆的量，k 表示记忆率. 假设一个学生有 200 个单词要记忆，心理学家测定在 5 min 后该学生已经记忆了 20 个单词.

(1) 试确定记忆率 k 的值.

(2) 该学生 10 min 后大约能记忆多少单词？15 min 后呢？

(3) 该学生记忆 180 个单词需要多长时间？

(4) 利用数学软件画出该函数的图象.

数学文化

历史上的对数

数学史上一般认为对数是由苏格兰数学家纳皮尔(1550—1617)于16世纪末到17世纪初所发明.

那时，哥白尼的“太阳中心说”开始流行，天文学成为热门学科. 纳皮尔是一位天文爱好者，为了简化有关天文观测数据的计算，他多年潜心研究大数的计算技术，终于独立发明了对数.

纳皮尔首先发明了一种计算特殊多位数之间乘积的方法. 下面的表格说明了这个方法的原理.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384

表中两行数字之间的关系是明确的：第一行是指数，第二行表示2的对应幂. 如果要计算第二行中两个数的乘积，可以通过第一行对应数字的加法来实现.

比如，第一行中 $6+8=14$，对应第二行中的 $64\times256=16\ 384$.

这种计算方法，体现了现代数学中对数函数化乘除为加减的性质.

但表中第二行的数字跳得太快，并且缺少很多数字，如3，5，7等，这样很多数的计算就无法借助这张表来完成. 经过多年的探索，纳皮尔解决了这些问题，于1614年出版了他的数学名著《奇妙的对数规律的描述》，向世人公布并且解释了他的这项发明.

对数的另外一个发明人，是别尔基(1552—1632)，他不是数学家，但他是最先掌握对数思想的人. 1603年，别尔基被任命为布拉格地方的宫廷钟表匠，由于工作的需要，他要利用仪器结合观察的情况做天文计算，这就促使他产生简化计算的思想. 他花了8年的时间完成了著作《等差数列和等比数列表》，这实际上就是一种对数表. 但他的著作直到1620年才出版，此时纳皮尔的对数已经闻名全欧洲了.

指数和对数发展史上的关键人物还有英国数学家布里格斯(1561—1630)，他在1616年拜访纳皮尔，提出编造常用对数表. 在纳皮尔去世后，他以毕生的精力，继承纳皮尔未竟的事业，在1624年出版了《对数算术》一书，载有1～20 000及90 000～100 000的14位对数表，这在当时是需要花费巨大精力的工作. 1628年，由荷兰数学家佛拉格(1600—1667)把余下的20 000～90 000的常用对数补全，这是流行最广的对数表.

法国哲学家、数学家、物理学家笛卡儿(1596—1650)于1637年开始用符号 a^n 表示正整数幂，即 n 个 a 的连乘. 幂的符号经过多人的工作，扩展到分数指数幂、负指数幂，直到18世纪初，英国著名物理学家、数学家牛顿(1643—1727)开始用 a^x 表示任意实数指数幂.

欧拉(1707—1783)在18世纪发现对数与指数间的联系，他指出“对数源出于指数”，这个见解很快被人们所接受.

原来，历史上先有对数运算，后来才有一般指数的幂运算.

那么，历史上发明对数的大师们，是如何解决前面表格上“数字跳得太快”这个关键问题的呢?

他们的办法都是在表中的第二行，每次不乘2，而用一个非常接近于1的数来代替2，以使得两个数的间隔尽量小. 纳皮尔用的是小于1的数 $b=1-0.000\ 000\ 1=0.999\ 999\ 9$，这是因为他想将对数用于简化三角函数的计算. 而别尔基用的是大于1的数 $a=1+0.000\ 1=1.000\ 1$，因为他主要考虑日常的计算.

那个年代既没有函数概念，又没有幂指数的记号，对数的原理推导和数据计算的困难可想而知. 下面粗略地解释一下他们的方法.

以别尔基的方法为例，分别从 $y=0$ 和 $x=1.000\ 0$ 开始计算，每一步让 y 加1，而 x 则增加当前值的万分之一. 用 x_n 记对应于 $y=n$ 时的 x 的值，有

$$x_{n+1}=x_n+\frac{x_n}{10\ 000}=x_n\cdot 1.000\ 1=1.000\ 1^{n+1},$$

于是 $x_n=1.000\ 1^n$，也可记为 $x=1.000\ 1^y$. 实际上，$y=100$ 时对应的 $x=1.010\ 049\ 662\cdots$，而 $y=101$ 时则 $x=1.010\ 150\ 667\cdots$，这样算到 $y=460\ 54$ 时，有 $x=99.999\ 955\ 936\cdots$，对于4位有效数字的乘除和乘方开方就够用了. 例如要计算 $7\ 640\div 2\ 784$，由于 $7\ 640\div 2\ 784=7.640\div 2.784$，可在表上查出7.640和2.784对应的最近的 y 分别为20 335和10 239.

y	20 333	20 334	20 335	20 336	20 337
x	7.638 5	7.639 2	7.640 0	7.640 8	7.641 5

y	10 237	10 238	10 239	10 240	10 241
x	2.783 3	2.783 6	2.783 9	2.784 2	2.784 4

两者相减得 $20\ 335-10\ 239=10\ 096$，从表中查出10 096对应的 $x\approx 2.744\ 4$.

y	10 094	10 095	10 096	10 097	10 098
x	2.743 8	2.744 1	2.744 4	2.744 6	2.744 9

实际计算有 $7\ 640\div 2\ 784=2.744\ 252\ 87\cdots$，可见用此表获得了4位有效数字.

表格中 x 和 y 的关系，用对数符号表示就是 $y=\log_{1.000\ 1}x$. 使用换底公式 $\log_{10}x=\frac{\log_{1.000\ 1}x}{\log_{1.000\ 1}10}=\frac{\log_{1.000\ 1}x}{23\ 027}$ 可以将上述表格转换为更方便计算的常用对数表.

想一想，有没有编制常用对数表的更好的方法呢?

4.4 函数与方程

4.4.1 方程的根与函数的零点

我们已经知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点，也就是该函数图象与 x 轴交点的横坐标.

更一般地，求方程 $f(x)=0$ 的实数根，就是确定函数 $y=f(x)$ 的零点. 对不能用公式法求根的方程 $f(x)=0$ 来说，我们可以将它与函数 $y=f(x)$ 联系起来，利用函数的性质找出零点，从而求出方程的根.

设函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，如果在区间 $[a, b]$ 的左端 $x=a$ 处，曲线在 x 轴上方，而在 $x=b$ 处，曲线在 x 轴下方，则可以断定，曲线一定会和 x 轴在 (a, b) 内的某点处相交，如图 4.4－1. 一般地，当 x 从 a 到 b 逐渐增加时，**如果 $f(x)$ 连续变化且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在点 $x_0\in(a, b)$，使得 $f(x_0)=0$.** 如果知道 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增或单调递减，就进一步断定，方程 $f(x)=0$ 在 (a, b) 内恰有一个根.

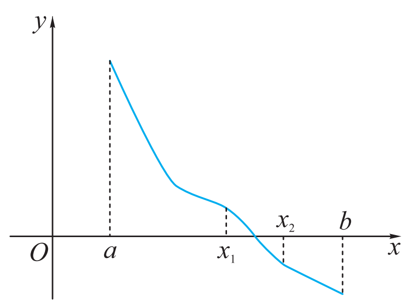


图 4.4－1

例 1 讨论函数 $f(x)=2x^3-5$ 在区间 $(1, 2)$ 内零点的个数.

解 由于

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=11>0,$$

又 $f(x)=2x^3-5$ 单调递增，因此函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内零点的个数为 1.

运用函数的思想来求方程的解可以给我们带来很大的便利. 例如一个方程 $f(x)=g(x)$ 的解就可以看作两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象的公共点的横坐标，或函

数$y=f(x)-g(x)$的零点．从这个角度出发，我们可以从图象来观察方程解的个数和分布情况．

例 2 讨论方程 $2^{-x}=\log_2 x$ 的解的个数与分布情况．

分析 方程 $2^{-x}=\log_2 x$ 的解是函数 $f(x)=\log_2 x-2^{-x}$ 的零点，可以通过适当的计算和增减性讨论来解答；也可以将所求方程的解看成是两函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=2^{-x}$ 的图象的公共点的横坐标．

解 考察函数 $f(x)=\log_2 x-2^{-x}$，其零点就是方程 $2^{-x}=\log_2 x$ 的解．

计算得：
$$f(1)=\log_2 1-2^{-1}=-0.5<0,$$
$$f(2)=\log_2 2-2^{-2}=0.75>0,$$
可见 $f(x)=\log_2 x-2^{-x}$在$(1, 2)$内有零点．

另一方面，由于$\log_2 x$ 单调递增而-2^{-x}也单调递增(因为 2^{-x}单调递减)，因此$f(x)=\log_2 x-2^{-x}$单调递增，所以 $f(x)=\log_2 x-2^{-x}$在$(1, 2)$内恰有一个零点．

由图 4.4 - 2 可看出，函数 $y=2^{-x}$与 $y=\log_2 x$ 的图象只在区间$(1, 2)$内有一个交点，所以原方程有且只有一个解，且此解在区间$(1, 2)$上．

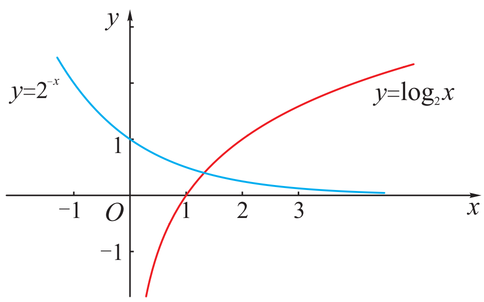


图 4.4 - 2

例 3 讨论三次方程 $x^3-3x^2+1=0$ 的解的个数与分布情况．

解 记函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$，通过计算得 $f(-1)=-3<0$，$f(0)=1>0$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=-3<0$，$f(3)=1>0$，可知函数 $f(x)$在区间$(-1, 0)$，$(0, 1)$和$(2, 3)$内各有至少一个零点．

用计算机软件可作出函数图象，如图 4.4 - 3 所示．从图上可以看出，$f(x)=$

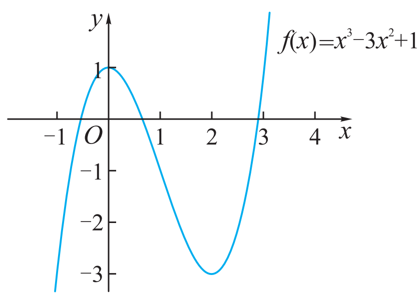


图 4.4 - 3

x^3-3x^2+1 在区间 $(-1, 0)$，$(0, 1)$ 和 $(2, 3)$ 内各有一个零点．由于 $f(x)=x^3-3x^2+1=x^2(x-3)+1$ 在 $(-\infty, -1]$ 上为负，在 $[3, +\infty)$ 上为正，故只有这三个零点．

因此原方程有三个解，且分别位于区间 $(-1, 0)$，$(0, 1)$ 和 $(2, 3)$ 上．

练 习

1. 讨论下列函数的零点个数：

(1) $f(x)=2x^2-x-1$；　　(2) $f(x)=x^3-8$；

(3) $f(x)=\log_2(x^2-2x-2)$；　　(4) $f(x)=x^3-x^2-4x+4$．

2. 讨论下列方程解的个数与分布情况：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^2$；　　(2) $\ln x=-2x+6$；

(3) $x^3-3x+1=0$．

4.4.2 计算函数零点的二分法

在一个风雨交加的夜里，从某水库闸房到防洪指挥部的电话线路发生了故障．这是一条 10 km 长的线路，在这条线路上有 200 多根电线杆．想一想：维修工人应怎样最合理地迅速查出故障所在地呢？

如图 4.4－4，工人首先从线路的中点 C 查起，如果 CB 段正常，就选择 CA 的中点 D 测试；如果 DA 段正常，就选择 DC 的中点 E 继续测试……像检修线路所用的这种方法称作**二分法**．

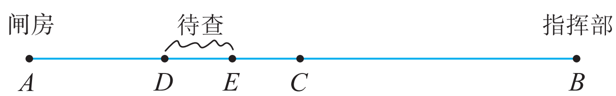


图 4.4－4

二分法还可以用来寻找函数的零点，迅速地缩小搜索范围，接近零点的准确位置．

例 4 在例 3 中，我们已经说明了 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $[0, 1]$ 上恰有一个零点．试用二分法来计算这个零点的更精确的近似值(误差不超过 0.001)．

解 已经知道 $f(0)>0$，$f(1)<0$，这是出发点；然后一次次缩小零点所在区间：

第一次，取 $[0, 1]$ 的中点 $\frac{0+1}{2}=0.5$，用计算器或计算机求出 $f(0.5)\approx 0.38>0$，由于 $f(0.5)\cdot f(1)<0$，可知零点在 $[0.5, 1]$ 上；

第二次，取[0.5，1]的中点$\frac{0.5+1}{2}=0.75$，求出$f(0.75)\approx-0.27<0$，由于$f(0.5)\cdot f(0.75)<0$，可知零点在[0.5，0.75]上；

第三次，取[0.5，0.75]的中点$\frac{0.5+0.75}{2}=0.625$，求出$f(0.625)\approx 0.07>0$，由于$f(0.625)\cdot f(0.75)<0$，可知零点在[0.625，0.75]上.

为了表述清楚，记零点所在区间为$[a, b]$，其中点$m=\frac{1}{2}(a+b)$. 继续计算列出表格：

次数	a，$+$	b，$-$	$m=\frac{a+b}{2}$	$f(m)$的近似值	区间长 $b-a$
1	0	1	0.5	0.38	1
2	0.5	1	0.75	−0.27	0.5
3	0.5	0.75	0.625	0.07	0.25
4	0.625	0.75	0.687 5	−0.09	0.125
5	0.625	0.687 5	0.656 25	−0.009	0.062 5
6	0.625	0.656 25	0.640 625	0.032	0.031 25
7	0.640 625	0.656 25	0.648 437 5	0.01	0.015 625
8	0.648 437 5	0.656 25	0.652 343 75	0.000 95	0.007 812 5
9	0.652 343 75	0.656 25	0.654 296 875	−0.004	0.003 906 25
10	0.652 343 75	0.654 296 875	0.653 320 312 5	−0.002	0.001 953 125

从表中计算数据看出，计算到第10次，包含零点的区间长度小于0.002. 取此区间中点与零点的距离不超过区间长度之半即0.001. 于是可取0.653作为零点的近似值，也即方程$x^3-3x^2+1=0$的一个近似解.

从上述计算过程，可以看出用二分法求函数零点近似值的一般操作方法.

设函数$y=f(x)$定义在区间D上，其图象是一条连续曲线. 我们希望求它在D上的一个零点x_0的近似值x，使它与零点的误差不超过给定的正数ε，即使得$|x-x_0|\leqslant\varepsilon$.

(1) 在D内取一个闭区间$[a, b]\subseteq D$，使$f(a)$与$f(b)$异号，即$f(a)\cdot f(b)<0$；

(2) 取区间$[a, b]$的中点$m=\frac{1}{2}(a+b)$；

(3) 如果$|m-a|<\varepsilon$，则取m为$f(x)$的零点近似值，计算终止；

(4) 计算$f(m)$，如果$f(m)=0$，则m就是$f(x)$的零点，计算终止；

(5) $f(m)$与$f(a)$同号则令$a=m$，否则令$b=m$，再执行(2).

想一想：步骤(5)的根据是什么？计算一定会终止吗？要取多少次中点？

参考上述操作步骤，可以画出用二分法求方程的近似解的程序框图(图 4.4－5)：

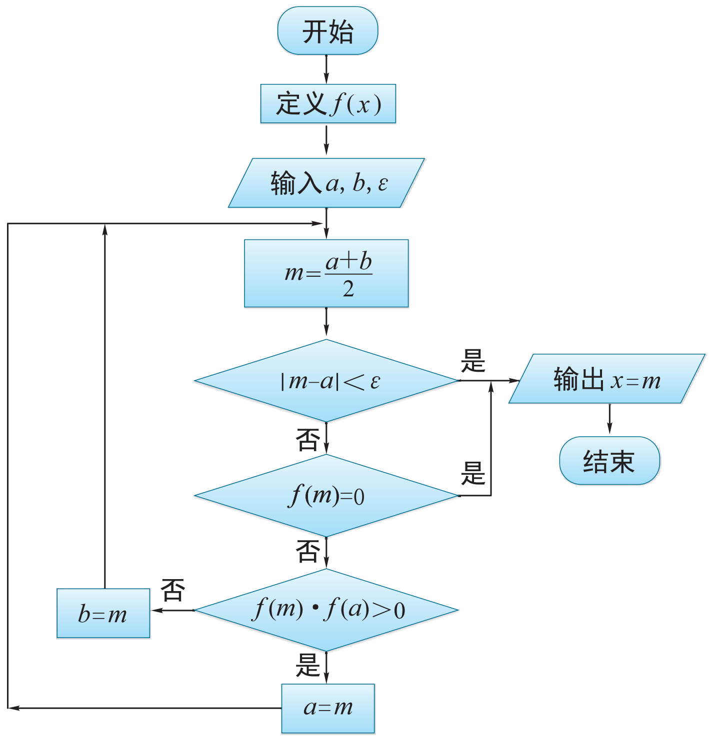


图 4.4－5

例 5 求曲线 $y=\ln x$ 和直线 $y=-x+2$ 的交点的横坐标(误差不超过 0.01).

解 曲线 $y=\ln x$ 和直线 $y=-x+2$ 的交点的横坐标 x 应满足等式 $\ln x=-x+2$，即 $\ln x+x-2=0$，则交点的横坐标是函数 $y=f(x)=\ln x+x-2$ 的零点(参看图 4.4－6).

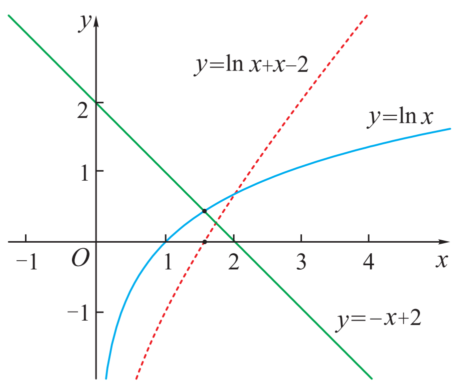


图 4.4－6

由 $f(1)=-1<0$ 和 $f(2)=\ln 2>0$ 可知 $f(x)$在区间(1，2)内有一个零点；由 $f(x)$单调递增可知它只有这一个零点．用二分法计算，列表如下：

次数	a，$-$	b，$+$	$m=\dfrac{a+b}{2}$	$f(m)$的近似值	区间长 $b-a$
1	1	2	1.5	-0.09	1
2	1.5	2	1.75	0.31	0.5
3	1.5	1.75	1.625	0.11	0.25
4	1.5	1.625	1.562 5	0.009	0.125
5	1.5	1.562 5	1.531 25	-0.04	0.062 5
6	1.531 25	1.562 5	1.546 875	-0.02	0.031 25
7	1.546 875	1.562 5	1.554 687 5	-0.004	0.015 625

得出零点的近似值为 1.555，误差不超过 0.008. 因此曲线 $y=\ln x$ 和直线 $x+y=2$ 的交点的横坐标约为 1.555 .

练 习

1. 用二分法求方程 $x^2+x-1=0$ 的根的近似值(误差不超过 0.001).

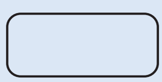
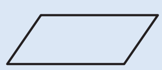
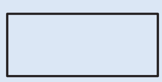
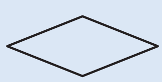
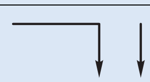
2. 借助计算器或计算机，用二分法求方程 $x^3-x-1=0$ 在区间$[1, 2]$上的根的近似值(误差不超过 0.001).

3. 求曲线 $y=\lg x$ 和直线 $y=-x+3$ 的交点的横坐标(误差不超过 0.01).

多知道一点

程序框图

程序框图是一种用程序框、流程线以及文字符号说明来表示解决某一类问题的程序(步骤)的图形. 下表列举了几个基本的程序框和它们表示的功能.

名　称	图　形	功　能
终端框(起止框)		表示一个算法的起始和结束
输入、输出框		数据的输入或者结果的输出
处理框(执行框)		赋值、计算，传送结果
判断框(选择框)		根据给定条件判断，成立时出口为“是”，否则为“否”
流程线		连接程序框，表示流程方向

习题 4.4

学而时习之

1. 讨论下列函数的零点个数：

(1) $f(x)=e^{x-1}+4x-4$；　　(2) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

2. 用图象法判定方程 $\log_2 x=-(x-1)^2+2$ 的根的个数.

3. 借助计算机作出函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象，并讨论方程 $\frac{1}{3}x^3-4x+4=0$ 的根的个数与分布情况.

4. 借助计算器或计算机，用二分法求方程 $2^{-x}=x+2$ 在区间 $[-1, 0]$ 上的根的近似值(误差不超过 0.01).

温故而知新

5. 若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间(　　)

(A) (a, b) 和 (b, c) 内　　(B) $(-\infty, a)$ 和 (a, b) 内

(C) (b, c) 和 $(c, +\infty)$ 内　　(D) $(-\infty, a)$ 和 $(c, +\infty)$ 内

6. 若函数 $f(x)=x^2-2x+a$ 在区间 $(-2, 0)$ 和 $(2, 3)$ 内各有一个零点，求实数 a 的取值范围.

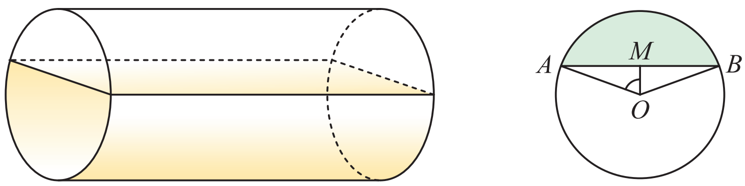
***7.** 参考前面的二分法步骤框图编写程序，求函数 $f(x)=\ln x-1$ 的零点的近似值(误差不超过 0.01%).

8. (数学探究活动)仔细观察本节例 4 表格中的计算数据. 第二次运算求出 $f(0.75)\approx-0.27$，而第三次运算求出 $f(0.625)\approx0.07$. 区间 $[0.625, 0.75]$ 左端处函数值的绝对值 0.07 要比右端处函数值的绝对值 0.27 小得多. 一个合理的想法是：函数的零点可能更接近区间的左端. 如果下一个点不取中点，而按照两端函数值绝对值大小的比例来分割区间，是不是更合理呢？尝试把这个想法实现为一系列操作步骤，列表做例 4，与二分法做比较.

数学实验

用二分法求方程的近似解

实际问题：如图 1(a)，有一个轴线水平放置的直径为 2 m 的圆柱形储油罐，当储油量为油罐容积的$\frac{2}{3}$时，油的深度是多少？



(a)　　　　(b)

图 1

问题可以化为更一般的数学问题：如图 1(b)，弦 AB 把半径为 R 的圆分成两块，要使较小的一块是圆面积的$\frac{1}{a}$，如何确定弦 AB 到圆心的距离？

设 AB 的中点为 M，$\angle AOM=k°$，则弦 AB 到圆心的距离 $OM=R\cos k°$. 这时，扇形 OAB 的面积是$\frac{k\pi R^2}{180}$，而$\triangle OAB$ 的面积是 $R^2\sin k°\cos k°$，于是，问题化为求满足下列等式的数 k：

$$\frac{k\pi R^2}{180}-R^2\sin k°\cos k°=\frac{\pi R^2}{a}.$$

化简后得到关于未知数 k 的方程：

$$F(k,\ a)=\pi+a\sin k°\cos k°-\frac{ak\pi}{180}=0.$$

下面根据实际问题取 $a=3$，记 $f(k)=F(k,\ 3)$，得到方程

$$f(k)=\pi+3\sin k°\cos k°-\frac{k\pi}{60}=0.$$

设方程的解为 k^*，以下分三步进行：

第一步，确定 k^* 的大致范围. 取 $k=60$，得 $f(60)=1.299\cdots>0$，取 $k=90$，得 $f(90)=-1.57\cdots<0$，可见 $k^*\in(60,\ 90)$.

第二步，通过二分法迭代计算可得出 $k^*\in(74.6,\ 74.7)$. 暂将区间$(74.6,\ 74.7)$的中点作为解的近似值，即取 $k^*\approx 74.65$.

第三步，在原问题中，$R=1$ m，当$\angle AOM=74.65°$时，有 $OM=R\cos 74.65°\approx 0.264\ 7$ m. 又知道 k^* 的准确值在 74.6 到 74.7 之间. 由于 $R\cos 74.6°\approx 0.265\ 6$ m，$R\cos 74.7°\approx 0.263\ 9$ m，可见我们的解答结果的实际误差在 1 mm 之内.

因此油的深度为 1＋0.264 7＝1.264 7(m).

使用“网络画板”或“超级画板”中的表达式测量和动画按钮赋值功能，可以用鼠标操作控制二分法计算步骤，如图 2 .

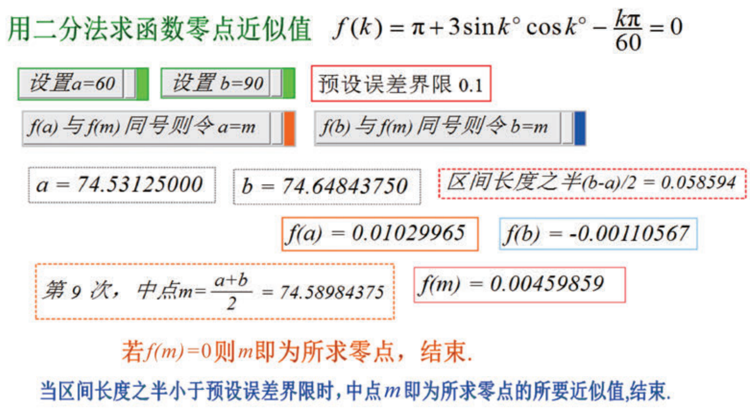


图 2

如图 3，左边是二分法的通用程序，右边是它在“超级画板”的程序工作区运行 4.4.2 节例 4 中的问题的情形.

```
Float(1);

f(x){*;}
eff(a,b,d){ u=f(a); v=f(b);
         while (u*v<0 && b-a>d)
          {c=(a+b)/2; w=f(c);
           if (w==0) {u=w;}
          else {if (u*w<0) {v=w; b=c;}
          else {u=w; a=c;}}}
      (a+b)/2; }
```

```
 Float(1);
>> 计算结果显示浮点数 #
 f(x){x^3-3*x^2+1;}
 eff(a,b,d){ u=f(a); v=f(b);
          while (u*v<0 && b-a>d)
           {c=(a+b)/2; w=f(c);
            if (w==0) {u=w;}
           else {if (u*w<0) {v=w; b=c;}
           else {u=w; a=c;}}}
       (a+b)/2; }
>> f(x)
eff(a, b, d) #

 eff(0,1,0.001);
>> (1337)/(2048)=0.652832 #
```

图 3

4.5 函数模型及其应用

4.5.1 几种函数增长快慢的比较

当底数 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 都是增函数；我们早已熟悉的一次函数 $y=kx+b$，当 $k>0$ 时也是增函数；幂函数 $y=x^\alpha$，当 $\alpha>0$ 时是$[0,+\infty)$上的增函数. 这些函数的函数值 y 都随着自变量 x 的增长而增长.

增函数的共同特点是，函数值 y 随着自变量 x 的增长而增长. 同为增长，但增长的快慢可能不同. 这好比赛跑，有冠军亚军，也有排不上名次的.

赛跑有赛跑的规则，到最后跑到前面的才是胜利者.

例 1 比较 $y=\sqrt{x}$和 $y=\dfrac{x}{4}$ 在区间$[0,+\infty)$上增长的快慢.

解 如图 4.5-1 所示.

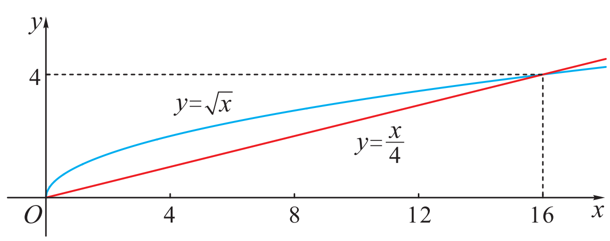


图 4.5-1

开始 $y=\sqrt{x}$一路领先，但越来越慢；$y=\dfrac{x}{4}$匀速前进；在 $x=16$ 处两者相等.

当 $x>16$ 时，$x^2>16x$，两边开方得 $x>4\sqrt{x}$，即一直有$\dfrac{x}{4}>\sqrt{x}$，而且前者与后者之比$\dfrac{\sqrt{x}}{4}$越来越大，所以 $y=\dfrac{x}{4}$增长得更快.

开运动会常常要分组选拔，函数赛跑也可以先分组比一比. 我们考虑五类在区间$(0,+\infty)$上递增的函数：

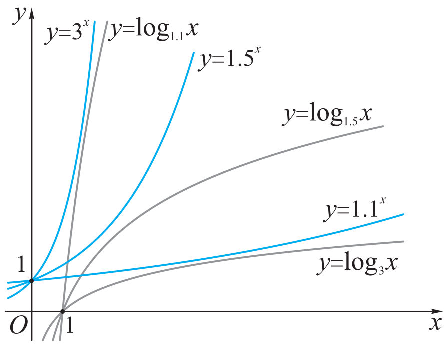
指数函数 $y=a^x(a>1)$算 A 组；幂函数 $y=x^\alpha(\alpha>1)$算 B 组；一次函数 $y=kx+b(k>0)$算 C 组；幂函数 $y=x^\alpha(0<\alpha<1)$算 D 组；对数函数 $y=\log_a x(a>1)$算最后

一组，E 组.

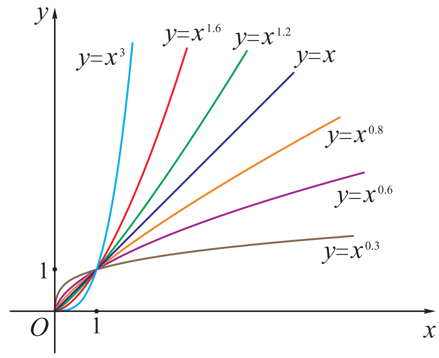
同一组的比赛容易分出高低，看图便知分晓.

从图 4.5－2(1)看出，A 组内，a 越大跑得越快；E 组内，a 越小跑得越快.

从图 4.5－2(2)看出，B 组和 D 组一起比赛，都是 α 越大跑得越快.



(1)



(2)

图 4.5－2

现在来看 C 组，一次函数 $y=kx+b(k>0)$.

如果两个一次函数的一次项系数相等，只有常数项不同，则两个函数的差是常数. 起跑时在前面的永远在前面，领先距离永远不变. 从图象上看，是两条平行直线.

如果两个一次函数的一次项系数不相等，系数大的跑得就快. 不管起跑时落后有多少，系数大的总能后来居上，而且将遥遥领先. 在方格纸上画几个一次函数的图象便能看出这个规律.

小组选拔赛的情形一目了然. 组与组之间的比赛呢?

上面已经对 B，D 两组做了比较.

数学上可以证明，B 组的任一个成员 $y=x^{\alpha}(\alpha>1)$总比 C 组的 $y=kx+b(k>0)$增长得快.

例 2 比较 $y=x^{1.0001}$和 $y=100x+1\,000$ 在区间$[0，+\infty)$上增长的快慢.

解 当 $x>1\,000$ 时，有 $101x>100x+1\,000$，因而有

$$\frac{x^{1.0001}}{100x+1\,000}>\frac{x^{1.0001}}{101x}=\frac{x^{0.0001}}{101}.$$

于是，对任意正数 $M>1$，当 $x>(101M)^{10\,000}>1\,000$ 时，有

$$x^{1.0001}=x^{0.0001}\cdot x>[(101M)^{10\,000}]^{0.0001}\cdot x=M\cdot 101x>M(100x+1\,000).$$

这表明无论 M 多大，当 x 大到一定程度，$y=x^{1.0001}$就会比$y=100x+1\,000$ 的 M 倍还大.

可见，当幂指数大于 1 时，不论一次函数的一次项系数和常数项多么大，只要

自变量足够大，幂函数的增长就比一次函数快得多.

类似地，C 组的函数总比 D 组增长得快.

总之，指数增长最快，对数增长最慢.

在区间 $(0, +\infty)$ 上，$a>1$，$\alpha>0$，总会存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，就有 $\log_a x<x^\alpha<a^x$.

指数增长快，大家印象比较深；对数增长慢，一般不大注意.

一个城市的电话号码的位数，大致是城市人口以 10 为底的对数，上百万人口的城市，要发展到人口上千万，才需要把电话号码增加一位. 所以电话号码的升位是一个城市的大事，也说明对数的增长多么艰难.

查英汉词典，从几万个单词中查一个单词，或从几十万个单词中查一个单词，用的工夫差不多，都要不了多久. 这是因为，由于合理编排，查字典的工作量是字数的对数函数，字数增长几倍，多查几秒而已.

在互联网上搜索资料或在计算机上查找数据，能迅速地从海量数据中找到有关的网页或文件. 这也是因为，数据经过合理组织，搜索工作量是数据量的对数函数.

但要注意，这里讲的是自变量足够大的情形. 具体问题要具体分析：自变量变化范围有多大，能不能提供空间让指数函数表演一番？在银行存上 10 000 元，设年利率为 3%，每年自动转存，n 年后连本带利是 $10\ 000(1+0.03)^n$ 元. 这笔钱的增长是指数增长. 算一算，多少年才能成为亿万富翁？

函数增长快慢的比较，还可以看速度的变化，看它是越跑越快呢，还是越跑越慢.

计算速度的简单办法，是看单位时间内走过的路程. 例如当自变量加 1 时，看函数值改变多少，也就是看 $f(x+1)-f(x)$ 的大小.

下面，每组派一个代表来比较. 先看函数值的比较表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$2x+7$	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$\sqrt{x}$	1	1.414	1.732	2	2.236	2.449	2.646	2.828	3	3.162
$\log_2 x$	0	1	1.585	2	2.322	2.585	2.807	3	3.170	3.322

再看增长量的比较表，分析这五个函数增长速度的变化各有什么特点.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^{x+1}-2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
$(x+1)^2-x^2$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$2(x+1)+7-(2x+7)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	0.414	0.318	0.268	0.236	0.213	0.197	0.182	0.172	0.162	0.155
$\log_2(x+1)-\log_2 x$	1	0.585	0.415	0.322	0.263	0.222	0.193	0.170	0.152	0.137

从表中最后两行可以看出，$y=\sqrt{x}$ 和 $y=\log_2 x$ 这两个函数的增长量都随着 x 的增加而变小. 但是，这两个函数增长速度的快慢，暂时还看不出明显的差别. 作为练习，可以在计算机上算算看.

比较函数增长的快慢，有些情形从图上很难看出来.

图 4.5－3 是函数 $y=1.01^x$ 和 $y=2x$ 的图象，仅仅从这个图，看得出 $y=1.01^x$ 后来能远远超过 $y=2x$ 吗?

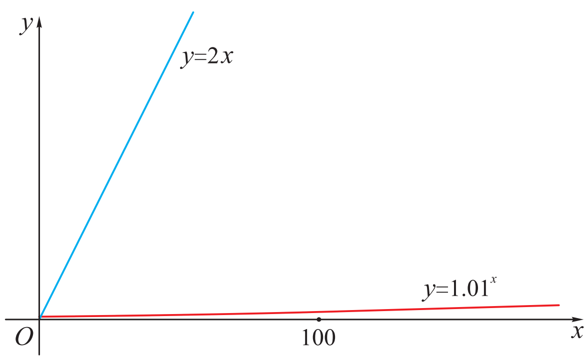


图 4.5－3

图 4.5－4 是函数 $y=\dfrac{x}{100}$ 和 $y=\log_{1.05}x$ 的图象，仅仅从这个图，看得出 $y=\dfrac{x}{100}$ 后来能远远超过 $y=\log_{1.05}x$ 吗?

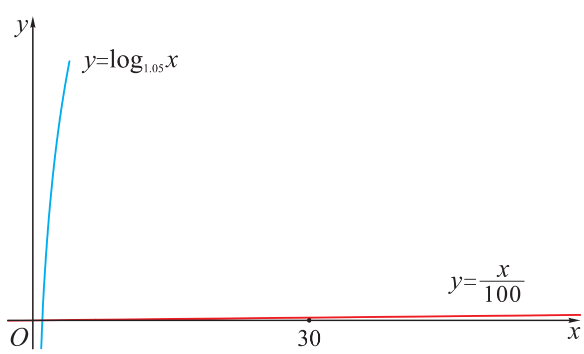


图 4.5－4

练 习

1. 在银行存 10 000 元，假设年利率为 2%，每年结算自动转存. 多少年达到 10 万元？多少年达到 100 万元？

2. 用不等式推理或借助计算机，比较函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\sqrt{x}$ 增长的快慢.

3. 用不等式推理或借助计算机，比较函数 $y=1.01^x$ 和 $y=x^3$ 增长的快慢.

4.5.2 形形色色的函数模型

把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解来解释现实问题，数学知识的这一应用过程称为数学建模.

数学建模的步骤通常是：

(1) 正确理解并简化实际问题：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息. 根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

(2) 建立数学模型：在上述基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构.

(3) 求得数学问题的解.

(4) 将求解时分析计算的结果与实际情形进行比较，验证模型的准确性、合理性和适用性.

让我们看一个实际例子.

例 3 某商用无人机公司从 2016 年 1 月份开始投产，已知前 4 个月的产量分别为 1 万台，1.2 万台，1.3 万台，1.37 万台. 由于产品技术先进、质量可靠，前几个月的产品销售情况良好. 为了方便营销人员在推销产品时，接受订单不至于过多或过少，需要估测以后几个月的产量. 公司分析，产量的增加是由于工人技术日益熟练和生产流程更为优化，并且公司也暂时不准备增加设备和工人. 假如你是公司管理者，将会采用什么办法估算以后几个月的产量？

解 如图 4.5-5，在直角坐标系(为方便观察，取 y 轴的单位长度较大) 中依次描出体现基本数据的四个点：

$$A(1,\ 1),\ B(2,\ 1.2),\ C(3,\ 1.3),\ D(4,\ 1.37).$$

（方法一）一次函数模拟

设模拟函数为 $y=ax+b$，将 B，C 两点的坐标代入，有

$$\begin{cases}2a+b=1.2,\\3a+b=1.3.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$$

所以得 $y=0.1x+1$.

该函数的图象如图 4.5-5 所示.

评价 此法的结论是，在不增加工人和设备的条件下，产量会每月上升 1 000 台，这是不太可能的.

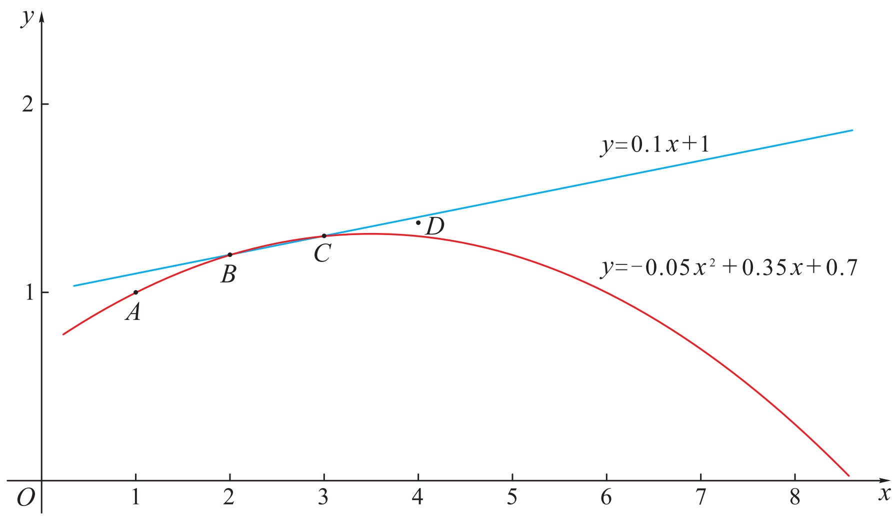


图 4.5-5

（方法二）二次函数模拟

设模拟函数为 $y=ax^2+bx+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，有

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$$

所以得 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

该函数的图象如图 4.5-5 所示.

评价 由此法计算出 4 月份的产量为 1.3 万台，比实际产量少 700 台，而且，由二次函数的性质可知，产量自 4 月份开始将每月下降(图象开口向下，对称轴是直线 $x=3.5$)，这显然不符合实际情况.

（方法三）利用幂函数模拟

设模拟函数为 $y=ax^{\alpha}+b$，此处为方便起见，取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，

因此设 $y=a\sqrt{x}+b$，将 A，B 两点的坐标代入，有

$$\begin{cases} a+b=1, \\ \sqrt{2}a+b=1.2. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a\approx 0.48, \\ b\approx 0.52. \end{cases}$$

所以得　$y=0.48\sqrt{x}+0.52$.

借助计算机软件可作出该函数的图象如图 4.5－6 所示.

评价　将 $x=3$ 及 $x=4$ 代入函数解析式，分别得到 $y\approx 1.35$ 及 $y\approx 1.48$，与实际产量差距较大.

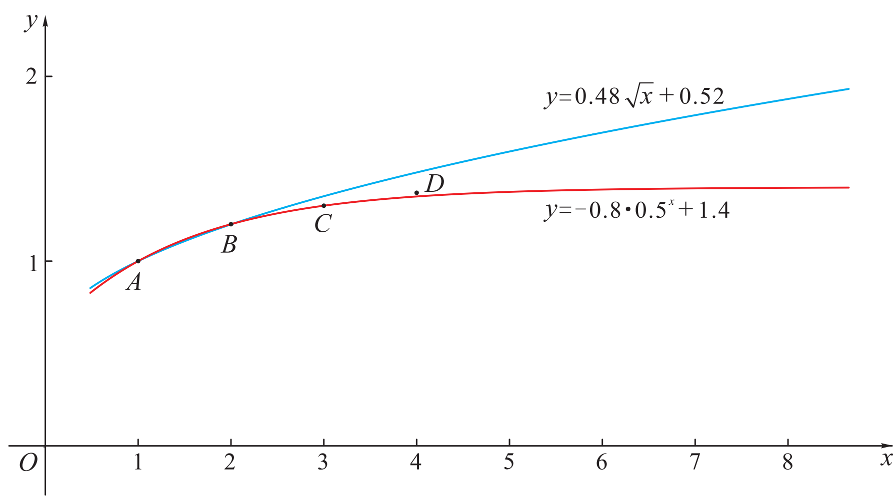


图 4.5－6

（方法四）利用指数函数模拟

设模拟函数为 $y=a\cdot b^x+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，得

$$\begin{cases} ab+c=1, \\ ab^2+c=1.2, \\ ab^3+c=1.3. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a=-0.8, \\ b=0.5, \\ c=1.4. \end{cases}$$

所以得　$y=-0.8\cdot 0.5^x+1.4$.

借助计算机软件可作出该函数的图象如图 4.5－6 所示.

评价　将 $x=4$ 代入函数解析式，得 $y=-0.8\cdot 0.5^4+1.4=1.35$，与第 4 个月的产量比较接近.

比较上述四个模拟函数的优劣，既要考虑到误差最小，又要考虑生产的实际情形，比如增产的趋势和可能性. 经过筛选，以指数函数模拟为最佳：一是误差最小；二是由于是新建生产线，随着工人技术、管理效率逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而求得的指数函数模型恰好反映了这种趋势. 因此选用 $y=-0.8\cdot 0.5^x+1.4$ 模拟，比较接近客观实际.

练习

从国家统计局网站可以了解到中国居民2014—2017年手机上网人数(如下表所示)：

年　份	2014	2015	2016	2017
手机上网人数/亿	5.57	6.2	6.95	7.53

(1) 描点画出手机上网人数随年份变化的大致图象；

(2) 试选择合适的函数类型建立数学模型，刻画手机上网人数随年份变化的规律，并预测2018年中国居民手机上网人数.

习题 4.5

学而时习之

1. 在同一直角坐标系内分别作出下列各组函数的草图，比较它们在$(0, +\infty)$范围内增长的快慢.

(1) $y=2^x$ 和 $y=x^2$；

(2) $y=x^3$ 和 $y=3x^2$；

(3) $y=\dfrac{x}{2}$ 和 $y=\sqrt{x}$；

(4) $y=\dfrac{x}{4}$ 和 $y=\log_2 x$.

2. 三个变量 y_1，y_2，y_3 随着变量 x 的变化情况如下表，则关于 x 分别呈对数函数、指数函数、幂函数变化的变量依次为(　　)

x	1	3	5	7	9	11
y_1	5	135	625	1 715	3 645	6 655
y_2	5	29	245	2 189	19 685	177 149
y_3	5	6.10	6.61	6.985	7.2	7.4

(A) y_1，y_2，y_3　　(B) y_2，y_1，y_3

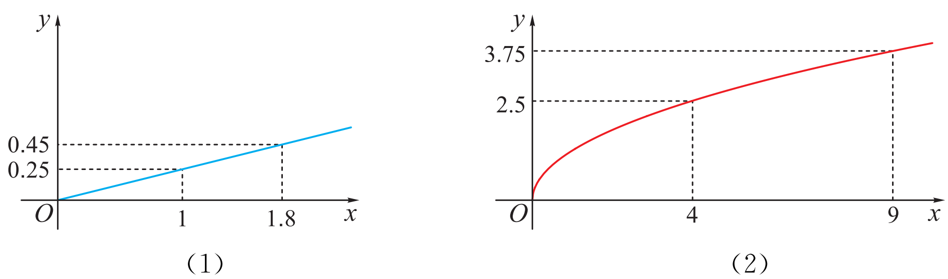
(C) y_3，y_2，y_1　　(D) y_1，y_3，y_2

3. 幂函数的增长快慢和幂指数的大小密切相关．但是，增长很快的幂函数和增长比较慢的指数函数相比，仍然是小巫见大巫．

试用计算器计算并填写下表，探索这个现象．

x	x^3	1.1^x
0		
1		
30		
50		
100		
150		
200		
250		

4. 某企业生产 A，B 两种产品，根据市场调查和预测，A 产品的利润 y(万元)与投资额 x(万元)成正比，其关系如图(1)所示；B 产品的利润 y(万元)与投资额 x(万元)的算术平方根成正比，其关系如图(2)所示．



（第 4 题）

(1) 分别将 A，B 两种产品的利润表示为投资额的函数．

(2) 该企业已筹集到 10 万元资金，并全部投入 A，B 两种产品的生产，问：怎样分配这 10 万元投资，才能使企业获得最大利润？其最大利润约为多少万元(结果精确到 1 万元)？

5. 在密闭培养环境中，某类细菌的繁殖在初期会较快，随着单位体积内细菌数量的增加，繁殖速度又会减慢．在一次实验中，检测到这类细菌在培养皿中的数量与时间的关系为：

时间 x/h	2	3	4	5	6	8
数量 y/百万个	3.5	3.8	4	4.16	4.3	4.5

（1）建立平面直角坐标系，并在坐标系中描出对应的点，观察细菌数量随时间变化的关系；

（2）试用函数 $y=a\log_2 x+b$ 和 $y=a\sqrt{x}+b$ 分别进行函数模型拟合.

温故而知新

6. 在$(1, +\infty)$上比较函数 $f(x)=\dfrac{x}{1\ 000}$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 增长的快慢，并探讨：当 x 在什么范围内时，$f(x)<g(x)$？当 x 在什么范围内时，$f(x)>g(x)$？

7. 几名中学生对“怎样烧开水最快最省煤气”的问题进行实验研究. 当关着煤气的时候，煤气旋钮(下称旋钮)的位置定为 $0°$，煤气开到最大时为 $90°$. 在 $0°\sim90°$ 之间分成 5 等份，代表不同的煤气流量，它们分别是 $18°$，$36°$，$54°$，$72°$，$90°$. 实验数据如下表：

旋钮位置	18°	36°	54°	72°	90°
烧开一壶水(3.75 L)所需时间/min	19	16	13	12	10
烧开一壶水所需煤气量/m^3	0.130	0.122	0.139	0.149	0.172

试对表中数据做分析，并回答下列问题：

（1）能否找到最省时间同时又最省气的烧水方法？

（2）如果你急于用水，最省时间的烧水方法是怎样的？

（3）把旋钮位置作为自变量，烧开一壶水所需煤气量作为函数值，请你在平面直角坐标系内作出相应的图象.

（4）从图象上看，是不是旋钮开得越小越省气？为什么？怎样才能比较省气？

8. 下表是中国近年来人口数据(不包括香港、澳门特别行政区和台湾省)：

年 份	2013	2014	2015	2016
人口数	13.61 亿	13.68 亿	13.75 亿	13.83 亿

（1）在平面直角坐标系内标出这四个点，再把这些点连接成线.

（2）选择其中合适的两个点，建立一次函数模拟，用模拟函数预测 2017 年中国人口数.

（3）能否用“更好”的直线 $y=ax+b$ 来模拟这组数据的变化？也就是说，能否确定 a，b 的值，使式子 $S=[y_1-(a+b)]^2+[y_2-(2a+b)]^2+[y_3-(3a+b)]^2+[y_4-(4a+b)]^2$ 的值最小？(按如下步骤进行预测)

A. 化简 S，使之成为字母 a 的二次三项式；

B. 确定当 a 取何值时(设为 a_0)，二次三项式 S 取最小值(设为 S_0)，这里 a_0 和 S_0 都应该是含字母 b 的式子，且 S_0 是字母 b 的二次三项式；

C. 求 b 的值 b_0，使 S_0 取最小值；

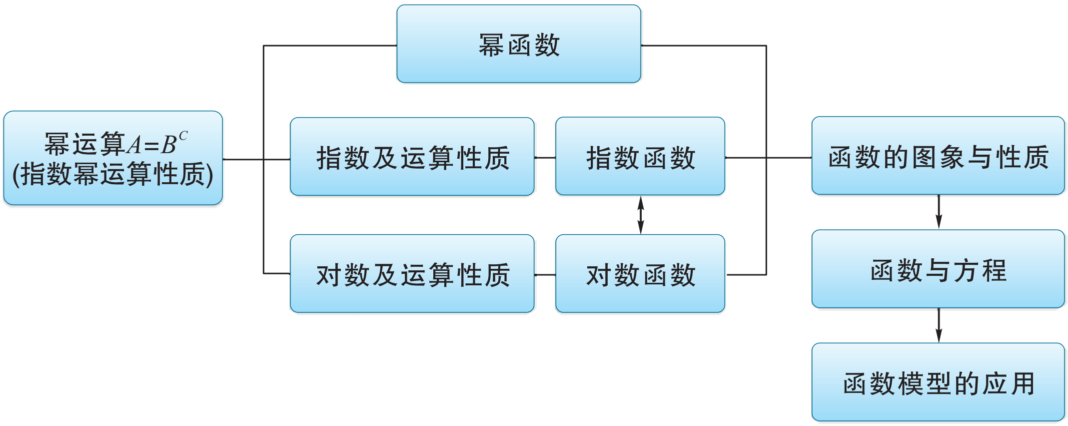
D. 求出对应于上述 b_0 的 a_0 值；

E. 用一次函数 $y=a_0x+b_0$ 模拟数据的变化，用模拟函数预测 2017 年中国人口数.

(4) 把所得到的两个预测数据和 2017 年中国实际人口数进行比较.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 将整数指数幂推广到有理数指数幂和实数指数幂是描述客观世界所必需的，试描述指数幂的上述拓展过程，并说明我们是如何确定 $a^{\sqrt{2}}$ 的大小的？

2. 有了幂运算 $A=B^C$，在 A，B，C 三个数中，一个不变，另外两个数之间就有了确定的对应关系．其中一个作为自变量 x，另一个就是 x 的函数．这就得到三类重要的函数：指数函数、对数函数和幂函数．如何理解对数运算是指数运算的逆运算？指数和对数有哪些运算法则？其中最基本的是什么？

3. 幂函数、指数函数和对数函数的定义域、值域、增减性各有哪些共同点和不同点？这些函数的图象分别有哪些特征？

4. 如何理解对数函数和指数函数互为反函数？如何分别从图象和表达式理解反函数？

5. 用函数的观点回顾方程，解方程可以化归为函数零点的计算．对于大量没有求解公式的方程，化为求函数零点后，可以用二分法或其他近似方法求函数零点的近似值．用二分法求函数零点的条件是什么？操作步骤如何进行？

6. 利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数增长的差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义．

7. 用函数的观点环视大千世界，我们看到许多事物发展过程中的某些具有标志性的数量可以看成时间的函数，能用适当的函数构建数学模型来描述．收集一些社会生活中普遍使用的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数以及分段函数等)的实例，了解函数模型的广泛应用．

复习题四

学而时习之

1. 求下列各式的值(式中字母都是正数)：

(1) $8^{-\frac{2}{3}}$；　　(2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$；　　(3) $x\sqrt{2x}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}$；

(4) $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x-y}$；　　(5) $x^{\frac{4}{5}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot(-4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{2}})\div(\sqrt{3}x^{\frac{7}{5}}y^{\frac{5}{8}})$.

2. 已知 $y^x=\sqrt{3}+1$，求$\frac{y^{2x}-y^{-2x}}{y^x+y^{-x}}$的值.

3. 证明：幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$在区间$[0，+\infty)$上是增函数.

4. 20 世纪 60 年代，地质考古学家在阿拉斯加的一个洞穴中发现了古人类穿过的草鞋，实验测得那只草鞋的^{14}C含量大约是现生长同种草的^{14}C含量的 25%，已知^{14}C的半衰期为 5 730 年，试估计草鞋的编织年代.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3^{2x-1}-\frac{1}{9}}$；　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{-x^2+x+2}}$；

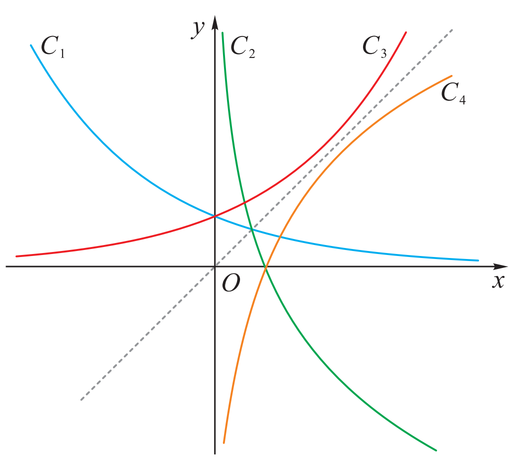
(3) $y=\lg(2\ 018^x-1)$；　　(4) $y=\frac{1}{\log_a(-x^2+4x-3)}$.

6. 已知函数 $f(x)=a^x$ 在$[0，1]$上的最大值与最小值的和为 3，求 a 的值.

7. 已知函数 $f(x)=2-a^{2x+1}(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象恒过定点 A，求点 A 的坐标.

8. 若 $x\in(1，2)$，$y_1=3^{4^x}$，$y_2=3^{x^2}$，$y_3=3^x$，试比较 y_1，y_2，y_3 的大小.

9. 如图，有一条曲线是函数 $y=a^x(0<a<1)$的图象，其他三条曲线是从这条曲线出发经轴反射得到的. 试写出这些曲线对应的函数表达式.



(第 9 题)

10. 已知 $\log_{a_1}b_1=\log_{a_2}b_2=\cdots=\log_{a_n}b_n=\lambda$，

求证：$\log_{a_1a_2\cdots a_n}(b_1b_2\cdots b_n)=\lambda$.

11. 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}，已知 $\lg 3\approx0.48$. 从数量级的角度考虑，下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是（　　）

(A) 10^{33}　　(B) 10^{53}　　(C) 10^{73}　　(D) 10^{93}

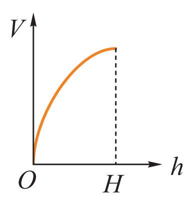
12. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}c$，试比较 2^a，2^b，2^c 的大小.

13. 求函数 $y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$ 的单调递增区间.

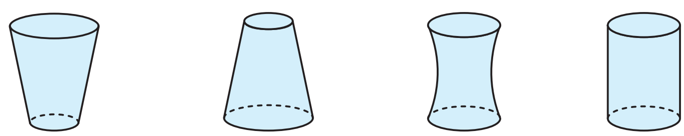
14. 运用图象法，判断函数 $f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数.

15. 借助计算器或计算机，用二分法求函数 $f(x)=x^3+2x-1$ 在区间 $[0,1]$ 内的零点的近似值(误差不超过 0.1).

16. 向高为 H 的水瓶中注水，注满为止，如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如左下图所示，那么水瓶的形状是（　　）



（第 16 题）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

17. 煤油在作为喷气发动机燃料之前需通过黏土去除其中的污染物. 某种煤油中污染物含量为 p_0，测得这种煤油通过长为 x m 的圆形黏土管道后污染物的含量 p 如下表：

x/m	0	1	2	3
p	p_0	$0.8p_0$	$0.64p_0$	$0.512p_0$

(1) 写出一个 p 关于 x 的函数解析式，使之与表中数据吻合；

(2) 要使这种煤油中污染物的含量不超过原来的 5%，利用(1)中得到的函数求圆形黏土管道至少要多长(结果精确到 0.01 m).

18. 某工厂生产一种电脑零件，每月的生产数据如下表：

月　份	1	2	3
产量/千件	50	52	53.9

为估计以后每月该电脑零件的产量，以这三个月的产量为依据，用函数 $y=ax+b$ 或 $y=a^x+b$(a，b 为常数，且 $a>0$)来模拟这种电脑零件的月产量 y(千件)与月份的关系. 试问哪个模拟函数较好？并说明理由.

温故而知新

19. 已知幂函数 $f(x)=x^m$.

（1）若 $f(x)$的图象在 $x\in(0，1)$时位于直线 $y=x$ 的上方，求实数 m 的取值范围；

（2）若 $f(x)$的图象在 $x\in(1，+\infty)$时位于直线 $y=x$ 的上方，求实数 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

（1）判断函数 $f(x)$的奇偶性；

（2）判断函数 $f(x)$的单调性，并给出证明.

21. 设函数 $f(x)$定义在 $\mathbf{R}$ 上，它的图象关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=3^x-1$，试比较 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{2}{5}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$的大小.

22. 物体在常温下的温度变化满足一定的规律：设物体的初始温度是 T_0，经过一定时间 t 后的温度是 T，则 $T-T_a=(T_0-T_a)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$，其中 T_a 表示环境温度，h 为正常数.

现有一杯 88 ℃的热咖啡，放在 24 ℃的房间中，如果咖啡降温到 40 ℃需要20 min，那么降温到 35 ℃时，需要多长时间(结果精确到 0.1 min，参考数据：ln 0.5≈−0.693 1，ln 0.171 9≈−1.760 8)?

23. 将 $y=2^x$ 的图象(　　)，再作关于直线 $y=x$ 对称的图象，可得到函数 $y=\log_2(x+1)$的图象.

(A) 先向左平移 1 个单位长度

(B) 先向右平移 1 个单位长度

(C) 先向上平移 1 个单位长度

(D) 先向下平移 1 个单位长度

24. 若定义在区间$(-1，0)$内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足 $f(x)>0$，求 a 的取值范围.

25. 已知 $f(x)=\log_a(2-ax)$在区间$[0，1]$上是减函数，求 a 的取值范围.

26. 将温度探头放入一杯水中，随着时间变化记录水温数据，得到下表数据.

时间/min	1	2	3	4	5
温度/℃	90.5	82.5	75.5	69.0	63.5

（1）描点画出水温随时间变化的大致图象；

（2）建立一个能基本反映水温 y(℃)随时间 x(min)变化的函数模型，并借助计算机软件作出其图象，观察它与描点画出的图象的吻合程度；

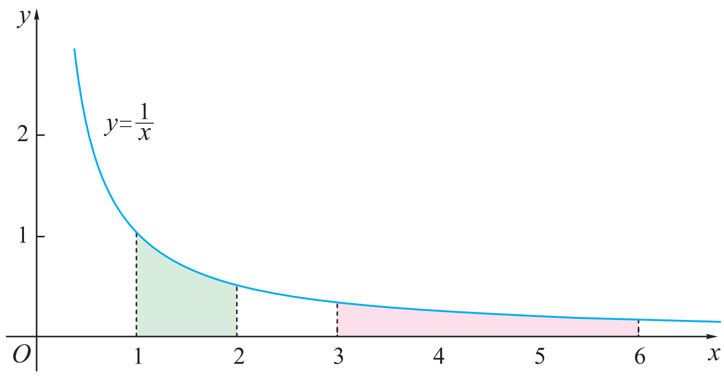
（3）分析所得的函数模型图象，估计经过多少分钟水温才会降到 35 ℃左右.

上下而求索

*27. 对于任意两正数 u，$v(u<v)$，记区间$[u,v]$上曲线 $y=\dfrac{1}{x}$下的曲边梯形面积为 $L(u,v)$，并约定 $L(u,u)=0$ 和 $L(v,u)=-L(u,v)$，记 $L(1,x)=\ln x$. 探索下列诸命题，思考能否从函数 $y=\ln x$ 出发引入幂函数、指数函数和对数函数.

(1) 对正数 u，h 有 $\dfrac{h}{u+h}<L(u,u+h)<\dfrac{h}{u}$；

(2) $L(1,2)=L(3,6)$(参看下图)；



(第 27 题)

(3) 对正数 k 和 $0<u<v$ 有 $L(u,v)=L(ku,kv)$；

(4) 对任意两个正数 u，v 有 $\ln(uv)=\ln u+\ln v$；

(5) 由此推出 $\ln\dfrac{u}{v}=\ln u-\ln v$，对有理数$\dfrac{n}{m}$有 $\ln u^{\frac{n}{m}}=\dfrac{n}{m}\ln u$；

(6) $y=\ln x$ 的反函数记为 $y=\exp(x)$，记 $\exp(1)=\mathrm{e}$，对有理数$\dfrac{n}{m}$有 $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right)=\mathrm{e}^{\frac{n}{m}}$；

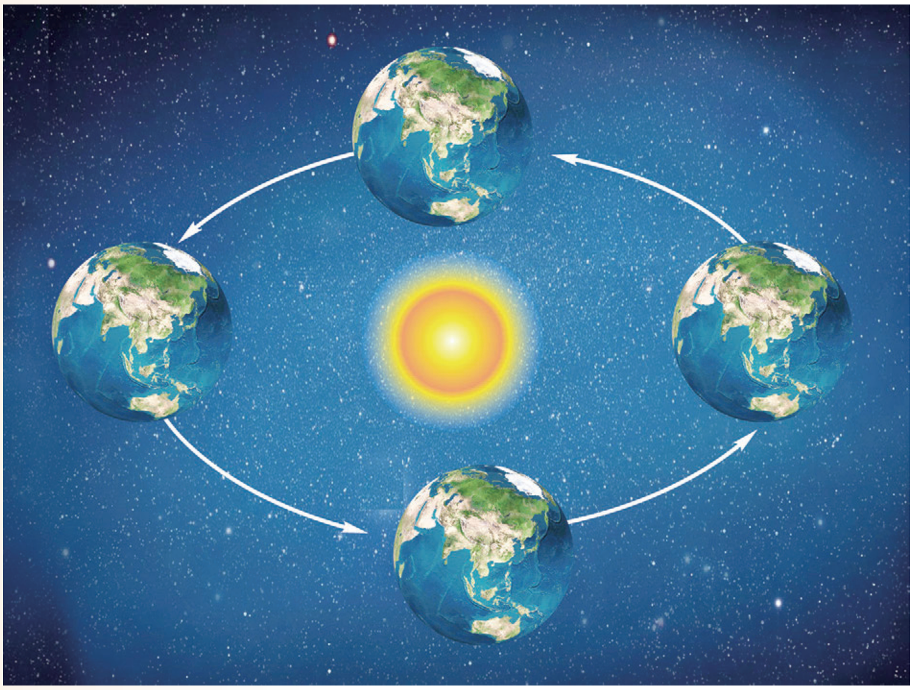
(7) 对任意正数 a 和有理数$\dfrac{n}{m}$有 $a^{\frac{n}{m}}=\exp\left(\dfrac{n}{m}\ln a\right)$；

(8) 对任意正数 a 和实数 x 有 $a^x=\exp(x\ln a)$，$\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

5

第5章

三角函数



潮涨潮落、月圆月缺、四季交替等是自然界中按一定的规律周而复始出现的现象. 在数学中，我们如何刻画客观世界中这些周期性的变化规律呢？本章要学习的三角函数就是研究周期现象的重要数学模型，它刻画了转动过程中点的位置变化规律. 三角函数是怎样定义的？它有哪些特有的性质？是怎样描述和解释周期性变化规律的？我们将在这一章的学习中探究和解答这些问题.

5.1 任意角与弧度制

万物皆变，万物皆动.

有平动，有转动.

平动量距离，转动量什么?

思考：时钟现在的时间是10:10，经过40 min后，时钟的分针转过了多少度？经过1 h 30 min呢?

5.1.1 角的概念的推广

我们知道，角可以看作是平面内一条射线绕着其端点从初始位置旋转到终止位置时所形成的图形. 我们以前学习的角，其大小都在0°到360°之间，而在现实生活中，我们可以发现大量由旋转所形成的角大于360°. 例如，行驶的自行车、汽车、火车的车轮，它们通常都要旋转很多圈. 此外，平面上的旋转可以是顺时针方向，也可以是逆时针方向. 因此，要准确地刻画旋转所成的角不仅要知道旋转的量，还要知道旋转的方向.

为了表示不同旋转方向所形成的角，联想到正负数可表示具有相反意义的量，我们做如下规定：

一条射线绕着端点以逆时针方向旋转所成的角称为**正角**；以顺时针方向旋转所成的角称为**负角**；不旋转所成的角称为**零角**，用0°表示. 零角的始边与终边重合.

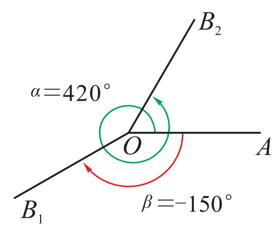


图 5.1－1

如图5.1－1中，角α是OA沿逆时针方向绕O点转动形成的角，所以$\alpha=420°$；角β是OA沿顺时针方向绕O点转动形成的角，所以$\beta=-150°$.

这样，角的概念就推广到了任意角，包括正角、零角和负角.

为了研究问题方便，我们常在平面直角坐标系内讨论角，为此取角的顶点为坐标原点，角的始边为x轴的非负半轴，那么，角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限角；如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象

本书中提到的角，若不特别说明，总是指角的顶点与原点重合，角的始边与x轴的非负半轴重合.

限．例如，45°角和405°角都是第一象限角，120°角和-240°角都是第二象限角(如图 5.1－2)．

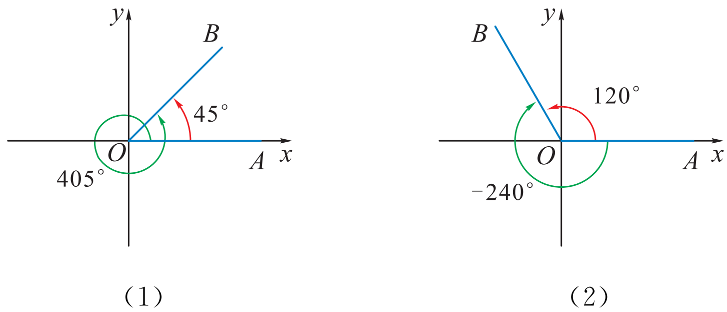


图 5.1－2

结合图 5.1－2 思考：对于直角坐标系内任意一条射线 OB，以它为终边的角 α 是否唯一？如果不唯一，那么终边相同的角有什么关系？

从角的形成过程可以看到，与某一个角 α 的始边相同且终边相同的角有无数个，它们的大小与角 α 都相差 360°的整数倍．在图 5.1－2 中，405°角与 45°角的终边重合，这两个角的大小之差为 360°；而-240°角与 120°角的终边重合，这两个角的大小之差为-360°．

我们可以把所有与角 α 终边相同的角用集合表示出来，即

$$\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

当 $k=0$ 时，角 β 就是角 α 本身．

例 1 在 0°～360°内找出与下列各角终边相同的角，并判定它是第几象限角．

(1) -80°；　　(2) $1\,600^\circ$；　　(3) $-819^\circ36'$．

分析 只需将这些角表示成 $\alpha+k\cdot 360^\circ(0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ)$的形式，然后根据 α 来确定它们所在的象限．

解 (1) 因为 $-80^\circ=280^\circ-360^\circ$，

所以在 0°～360°内，与-80°角终边相同的角是 280°，它是第四象限角．

(2) 因为 $1\,600^\circ=160^\circ+4\times360^\circ$，

所以在 0°～360°内，与 $1\,600^\circ$角终边相同的角是 160°，它是第二象限角．

(3) 因为 $-819^\circ36'=260^\circ24'-3\times360^\circ$，

所以在 0°～360°内，与$-819^\circ36'$角终边相同的角是 $260^\circ24'$，它是第三象限角．

例 2 写出终边在 y 轴非负半轴上的角的集合．

解 在 0°～360°内，终边在 y 轴非负半轴上的角是 90°，则所有这些角的集合为

$$\{\beta \mid \beta=90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

你能用集合表示出终边在 y 轴上的角吗？

练习

1. 锐角是第几象限角？“第一象限角是锐角”这句话对吗？试说明理由.

2. 在直角坐标系中作出下列各角，并指出它们是第几象限角：

（1）135°；　　（2）−120°；　　（3）855°；　　（4）−750°.

3. 在 0°～360°内找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：

（1）3 290°；　　（2）−545°30′；　　（3）−210°；　　（4）−1 300°.

4. 写出终边在 x 轴上的角的集合.

5.1.2 弧度制

我们曾经学过一种度量角的方法，把周角分成 360 等份，每一份叫作 1 度的角，这种用“度”作单位来度量角的单位制叫作**角度制**. 下面我们介绍在数学和其他科学研究中常用的另一种度量角的单位制.

如图 5.1－3，半径为 r 的圆的圆心与原点重合，角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，交圆于点 A，终边与圆交于点 B. 圆心角 α 所对的$\overset{\frown}{AB}$的长为 l .

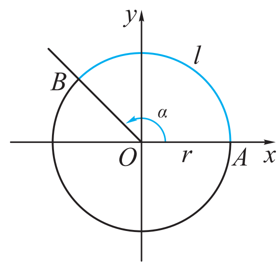


图 5.1－3

如果 $\alpha=1°$，$\overset{\frown}{AB}$的长度等于周角所对弧长 $2\pi r$ 的$\frac{1}{360}$，即

$$l=\frac{1}{360}\cdot 2\pi r=\frac{\pi}{180}r,$$

其中$\frac{l}{r}=\frac{\pi}{180}$，是个定值.

当 $\alpha=n°$时，$\overset{\frown}{AB}$的长度等于$\frac{\pi}{180}r$ 的 n 倍，即

$$l=n\cdot\frac{\pi}{180}r=\frac{n\pi}{180}r,$$

其中$\frac{l}{r}=\frac{n\pi}{180}$，这表示弧长与半径的比值$\frac{l}{r}$与半径无关，仅与角 α 的大小有关，当 n 为定值时，这个比值也是定值. 这就启示我们用圆的半径去度量弧，从而找到一种不同于用度作为单位来度量角的方法.

试一试： 如果$\angle AOB$为 120°，135°，270°呢？

规定：把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫作 **1 弧度**的角，“弧度”用符号 rad 表示. 如图 5.1－4，圆 O 的半径为 1，$\overset{\frown}{AB}$的长等于 1，则$\angle AOB$ 就是 1 弧度的角.

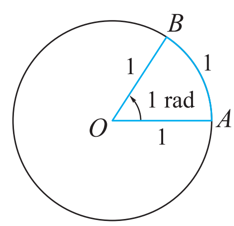


图 5.1－4

如前所述，这样规定的 1 弧度角的大小是完全确定的，与所在圆的大小(即半径)无关. 这种以“弧度”为单位来度量角的单位制叫作**弧度制**.

下面介绍关于弧度的计算和应用.

试结合图 5.1-3，填写下表：

$\overset{\frown}{AB}$的长	OB 旋转的方向	$\angle AOB$ 的弧度数
r	逆时针方向	1
$2\pi r$	逆时针方向	
$2r$		-2
πr	顺时针方向	
0		
		-360π

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

这里，α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

特别地，当圆心角 α 所在圆的半径是 1(即单位圆)时，那么角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=l$. 也就是说，我们可以用单位圆周上的$\overset{\frown}{AB}$的长来度量它所对的圆心角 $\angle AOB$ 的弧度数的绝对值.

例 3 利用单位圆，写出 360°，180°，90°，1°的圆心角所对应的弧度数.

解 在单位圆中，

360°的圆心角的弧长是 2π，那么它对应的弧度数是 2π rad；

180°的圆心角的弧长是 π，那么它对应的弧度数是 π rad；

90°的圆心角对应的弧度数是 $\frac{\pi}{2}$ rad；

1°的圆心角对应的弧度数是 $\frac{\pi}{180}$ rad.

根据例 3，我们可以得到角度制和弧度制之间的换算关系：

$$180°=\pi\ \text{rad},$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\ 45\ \text{rad}.$$

反过来有：

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57°18'.$$

欧拉在 1748 年出版的《无穷小分析引论》中明确提出弧度制思想. 这一思想将线段与弧的度量统一起来，大大简化了三角函数的微积分公式及计算.

例 4 把下列各角从度化为弧度：

（1）$120°$；　　　　（2）$25°30'$.

解　（1）$120°=120\times\frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad}=\frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad}$；

（2）$25°30'=25.5°=25.5\times\frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad}=\frac{17\pi}{120}\ \mathrm{rad}$.

例 5 把下列各角从弧度化为度：

（1）$\frac{3\pi}{4}\ \mathrm{rad}$；　　　　（2）$5\ \mathrm{rad}$.

解　（1）$\frac{3\pi}{4}\ \mathrm{rad}=\frac{3\pi}{4}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=135°$；

（2）$5\ \mathrm{rad}=5\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx286.5°$.

在科学应用中，用弧度制表示角的时候，单位“弧度”通常略去不写．比如，$\alpha=1$ 表示 α 是 1 rad 的角，即 $\alpha\approx57°18'$；$\alpha=2\pi$ 则表示 $\alpha=2\pi$ rad，即 α 是周角．因此，当直接用一个实数来表示角的时候，一定是指这个角的弧度数．

角的概念推广以后，在弧度制下，角的集合与实数集 **R** 之间建立起一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数（即这个角的弧度数）与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角（即弧度数等于这个实数的角）与之对应．弧度数是实数，这将为我们今后用函数观点讨论涉及角的计算问题带来方便．利用弧度制度量角还有一个重要的原因，就是它能简化许多公式．例如当 $\alpha=n°$时，弧长计算公式是 $l=\frac{|n|\pi}{180}r$．而根据弧度数的计算公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$，若 $\alpha=x$ rad，得到弧长的另一计算公式：$l=|x|r$．

例 6 如图 5.1-5，设扇形的圆心角 $\alpha=x$，半径为 r，弧长为 l，扇形面积记为 S．

（1）用 r 与 x 表示扇形的面积 S；

（2）用 r 与 l 表示扇形的面积 S．

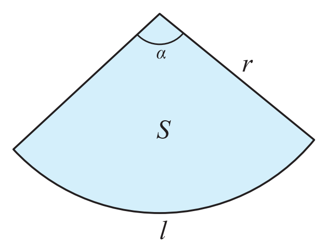


图 5.1-5

解　（1）x rad 角的大小是周角的$\frac{|x|}{2\pi}$，所形成扇形的面积 S 是整个圆的面积 πr^2 的$\frac{|x|}{2\pi}$．即

$$S=\frac{|x|}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}|x|r^2.$$

（2）由(1)可得 $S=\frac{1}{2}|x|r^2=\frac{1}{2}|x|r\cdot r$．

又因为 $l=|x|r$，所以 $S=\frac{1}{2}lr$．

练 习

1. 将下表中的角度和弧度互化：

角 度	$0°$	$30°$	$45°$			$120°$	$135°$	$150°$			$360°$
弧 度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3\pi}{2}$	

2. 用弧度表示：

（1）终边在 x 轴上的角的集合；

（2）终边在 y 轴上的角的集合．

3. 求出下列条件中扇形的弧长与面积．

（1）扇形的圆心角是 $\frac{3\pi}{4}$，半径是 8；

（2）扇形的圆心角是 $75°$，半径是 6．

习题 5.1

学而时习之

1. 在 $0°\sim360°$ 内找出与下列各角终边相同的角 α，并判断它是第几象限角：

（1）$-165°$；　（2）$1\,390°$；　（3）$-567°26'$．

2. 当 α 是锐角时，试判断 2α 是哪个象限的角．

3. 将下列各角化成 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z}，0\leqslant\alpha<2\pi)$ 的形式，并指出它们是第几象限角：

（1）$\frac{17\pi}{3}$；　（2）$\frac{17\pi}{4}$；　（3）$-\frac{17\pi}{6}$；　（4）$-\frac{9\pi}{5}$．

4. 用角度和弧度分别写出第一、第二、第三、第四象限角的集合．

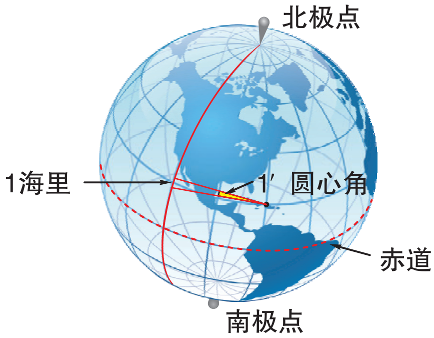
5. 把下列各角从度化为弧度：

（1）$15°$；　（2）$36°$；　（3）$-105°$；　（4）$145°$．

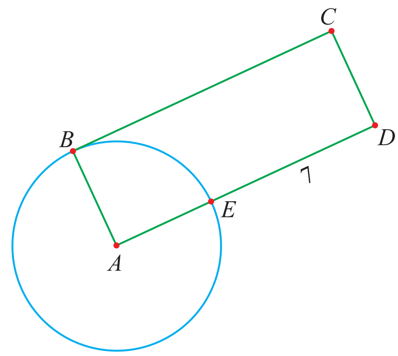
6. 把下列各角从弧度化为度：

（1）$-\frac{\pi}{2}$；（2）$\frac{10}{3}\pi$；（3）-1.5；（4）$\frac{2}{5}$.

7. 在航海上，最初规定地球子午圈的 1 分弧长为 1 海里（如图），已知地球的半径约为 6 371 km，根据此规定计算 1 海里的长度.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，已知矩形 $ABCD$ 截圆 A 所得的$\overset{\frown}{BE}$的长为 2π，$DE=7$，求矩形在圆外部分的面积.

9. 已知弧长为 60 cm 的扇形面积是 300 cm^2，求：

（1）扇形的半径；

（2）扇形圆心角的弧度数.

温故而知新

10. 当 α 是第二象限角时，试讨论$\frac{\alpha}{2}$是哪个象限的角.

11. 已知圆上按顺时针排列的 5 个点 A，B，C，D，E 将该圆分为五段弧，其长度之比$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{EA}=1:2:3:4:5$，求五边形 $ABCDE$ 的各个内角的弧度数.

12. 半径为 12 cm 的轮子，以 400 r/min 的速度按顺时针方向旋转.

（1）轮沿上的点 A 每秒转过的度数是多少？相应的弧度数呢？

（2）求轮沿上的点 B 在轮子转动 $1\,000^\circ$时所经过的路程.

13. 已知相互咬合的两个齿轮，大轮有 48 齿，小轮有 20 齿，当大轮顺时针转动一周时，小轮转动的角是多少度？多少弧度？如果大轮的转速是 150 r/min，小轮的半径为 10 cm，那么小轮圆周上的点每秒转过的弧长是多少？

5.2 任意角的三角函数

5.2.1 任意角三角函数的定义

一 用比值定义三角函数

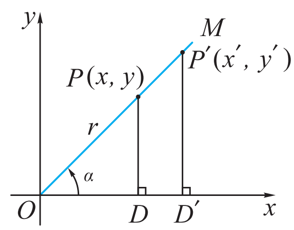


图 5.2－1

如图 5.2－1，在平面上建立直角坐标系．以锐角 α 的顶点为原点 O，角 α 的始边为 x 轴的非负半轴．在 α 的终边 OM 上任取不同于原点 O 的点 $P(x，y)$，则 OP 的长度为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$．

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 D，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OPD$ 中，三边 OP，OD，DP 之长分别为 r，x，y．

由锐角三角函数的定义有：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}，\ \cos\alpha=\frac{x}{r}，\ \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

若在角 α 的终边 OM 上另取一点 $P'(x'，y')$，按照同样的方法构造直角三角形，由相似三角形的知识可以知道：对于确定的角 α，上述三个比值不会随点 P 在 α 的终边上的位置的变化而变化．因此，把锐角放在直角坐标系中，锐角的三角函数(正弦、余弦、正切)可以用终边上不同于原点的任意一点的坐标来表示．

是否可以把这种思想推广到直角坐标系中任意角的三角函数呢？

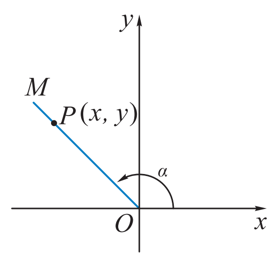


图 5.2－2

如图 5.2－2，设 α 是一个任意角，在角 α 的终边 OM 上任取不同于原点 O 的点 P，利用点 P 的坐标$(x，y)$定义：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}，\cos\alpha=\frac{x}{r}，\tan\alpha=\frac{y}{x}，\text{其中 } r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

以上三个比值分别称为角 α 的**正弦、余弦、正切**．

依照上述定义，对于每一个确定的角 α，都分别有唯一确定的比值 $\frac{y}{r}$ 和 $\frac{x}{r}$ 与之

对应，故正弦和余弦都是角 α 的函数．当 OM 在 y 轴上，也就是 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$x=0$，这时 $\dfrac{y}{x}$ 无意义．除此之外，对于每一个确定的角 α，都有唯一确定的比值 $\dfrac{y}{x}$ 与之对应，故正切也是角 α 的函数．$y=\sin\alpha$，$y=\cos\alpha$，$y=\tan\alpha$ 分别叫作角 α 的**正弦函数、余弦函数、正切函数**．以上三种函数都称为**三角函数**．由于引入弧度制后，角的集合与实数集之间可以建立一一对应的关系，因此三角函数可以看成以实数为自变量的函数．在弧度制下，正弦函数、余弦函数和正切函数的定义域如下表：

三角函数	定义域
$y=\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$y=\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$y=\tan\alpha$	$\left\{\alpha\,\middle\|\,\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

例 1 如图 5.2-3，已知角 α 的终边经过点 $P(4,\ -3)$，求 α 的正弦、余弦和正切值．

解 $x=4$，$y=-3$，则 $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，

所以
$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5},$$
$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{4}{5},$$
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}.$$

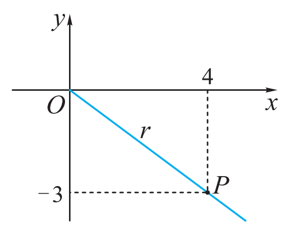


图 5.2-3

例 2 求角 $\dfrac{7\pi}{4}$ 的正弦、余弦和正切值．

解 在平面直角坐标系中作 $\angle AOB=\dfrac{7\pi}{4}$（如图 5.2-4），在终边 OB 上取点 P，使 OP 的长为 1．

由于点 P 在第四象限，OP 与 x 轴正方向的夹角为 $\angle POA=\dfrac{\pi}{4}$，因此可得点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

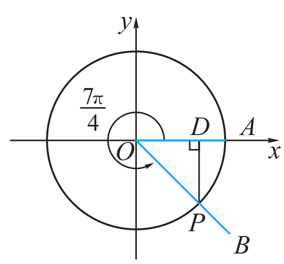


图 5.2-4

因为 $r=OP=1$，

所以 $\sin\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{y}{x}=-1$．

练习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-12, -5)$，求 α 的正弦、余弦和正切值.
2. 利用三角函数的定义求下列各角的正弦、余弦和正切值.

(1) $\frac{\pi}{2}$；　(2) π；　(3) $-\frac{\pi}{4}$；　(4) $\frac{3\pi}{4}$；　(5) $\frac{7\pi}{3}$.

二　用有向线段表示三角函数

在三角函数的定义式中，正弦 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 与余弦 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ 的分母都是 r. 为了简单起见，我们可以取 $r=1$，即让点 $P(x, y)$ 在单位圆上，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$. 而 x，y 都可以作线段来表示. 具体作图方法如下：

如图 5.2-5，设单位圆的圆心为直角坐标系的原点 O，角 α 的终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 D.

由三角函数的定义可知，三角函数值 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$ 有正负之分，若仅用线段 DP，OD 来分别表示它们还不够，需引入方向. 为此，我们规定：

将 DP 看作有方向的线段，D 为起点，P 为终点：当它指向 y 轴的正方向时，取正实数值 y；当它指向 y 轴的负方向时，取负实数值 y；当它的长度为 0 时，取零值. 在所有的情况下都有

$$DP=y=\sin\alpha.$$

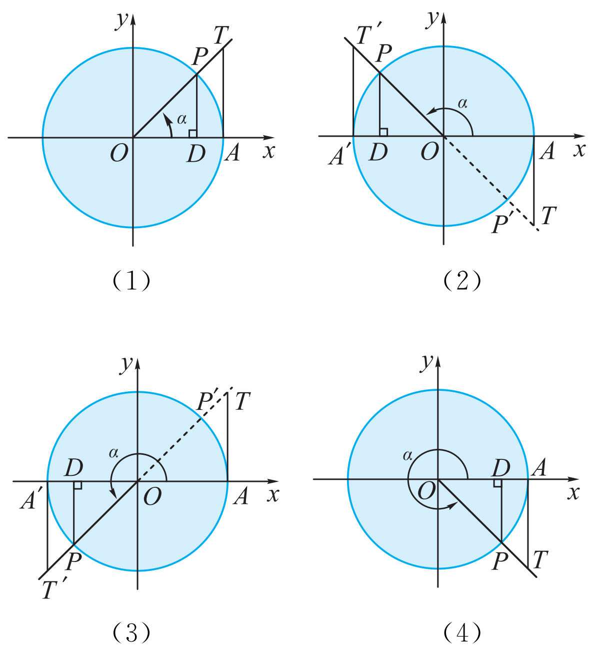


图 5.2-5

> 由于直角坐标系内点的坐标与坐标轴的方向有关，以坐标轴的方向来规定有向线段的方向，使得它们的取值与点 P 的坐标一致.

同理，我们将 OD 看作有方向的线段，O 为起点，D 为终点：当 OD 指向 x 轴的正方向时，取正实数值 x；当 OD 指向 x 轴的负方向时，取负实数值 x；当它的长度

为 0 时，取零值. 在所有这些情况下都有

$$OD=x=\cos\alpha.$$

由单位圆与角 α 的交点 P 作出的这条带方向的线段 DP，它的方向和长度分别代表了 $\sin\alpha$ 的符号和绝对值，DP 代表的实数就是角 α 的正弦，故 DP 称为角 α 的**正弦线**. 同理，我们将有向线段 OD 称为角 α 的**余弦线**.

那么，如何用有向线段来表示角 α 的正切呢？

由正切函数的定义 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ 可知，只要在角 α 的终边上取一点 T 使它的横坐标为 1，则纵坐标就等于 $\tan\alpha$. 因此，如图 5.2－5，过点 $A(1，0)$作单位圆的切线 $x=1$，如果 $\tan\alpha$ 存在，设该切线与角 α 的终边(当 α 为第一、四象限角时)或其反向延长线(当 α 为第二、三象限角时)相交于点 $T(1，y_1)$.

根据正切函数的定义与相似三角形的知识，有

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{DP}{OD}=\frac{AT}{OA}.$$

而 $OA=1$，则有 $\tan\alpha=AT$.

因此，只要 $\tan\alpha$ 存在，则上述与单位圆相切的有向线段 AT 代表的实数就是 $\tan\alpha$，故 AT 称为角 α 的**正切线**.

正弦线、余弦线、正切线统称为**三角函数线**.

例 3 利用正弦线、余弦线、正切线研究各象限角的三角函数值的符号.

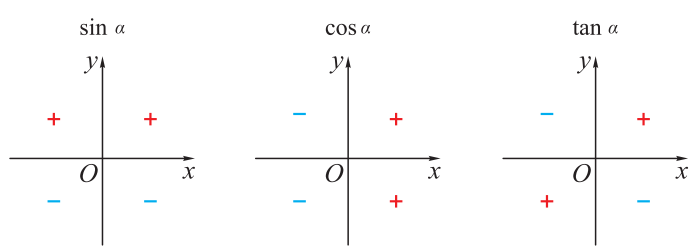
解 观察图 5.2－5 中各象限角的三角函数线，可知：

第一、二象限角的正弦线 DP 为正向，正弦值为正；第三、四象限角的正弦线 DP 为负向，正弦值为负.

第一、四象限角的余弦线 OD 为正向，余弦值为正；第二、三象限角的余弦线 OD 为负向，余弦值为负.

第一、三象限角的正切线 AT 为正向，正切值为正；第二、四象限角的正切线 AT 为负向，正切值为负.

以上各三角函数值在各象限的符号可用图 5.2－6 来直观表示：



(1)　(2)　(3)

图 5.2－6

试用三角函数的定义说明正弦、余弦、正切在各个象限的符号.

例 4 设 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，试确定 θ 是第几象限的角.

解 因为 $\sin\theta<0$，

所以 θ 是第三或第四象限的角或终边在 y 轴的负半轴上.

因为 $\tan\theta>0$，

所以 θ 是第一或第三象限的角.

因此满足 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$ 的 θ 是第三象限的角.

练习

1. 你能从单位圆中的三角函数线得出三角函数的哪些性质?
2. 作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线.

(1) $\dfrac{\pi}{4}$； (2) $\dfrac{2\pi}{3}$； (3) $\dfrac{7\pi}{6}$； (4) $-\dfrac{\pi}{3}$.

3. 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin\dfrac{4\pi}{3}$； (2) $\cos 3$；

(3) $\tan 250°$； (4) $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{3}$.

5.2.2 同角三角函数的基本关系

我们给一个角 α 定义了正弦、余弦、正切这三种三角函数. 从定义中可以看出这些函数是相互关联的，我们希望可以由其中一个函数计算出其他函数的值.

为此我们需找出同一个角的正弦、余弦、正切的关系式.

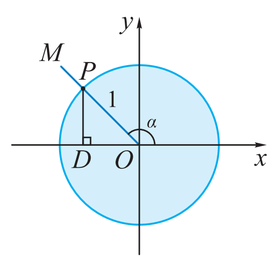


图 5.2-7

如图 5.2-7，设 $\alpha=\angle xOM$ 是任意角. 以点 O 为圆心作单位圆与角 α 的终边交于点 P，并作角 α 的正弦线 DP 和余弦线 OD. 在 Rt△OPD 中，由勾股定理得

$$|DP|^2+|OD|^2=|OP|^2=1.$$

将 $DP=\sin\alpha$，$OD=\cos\alpha$ 代入得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

又由角 α 的终边 OP 上点 P 的坐标$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$及正切函数的定义得：当 $\cos\alpha\neq0$ 时，有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

这就得到了角 α 的正弦、余弦、正切之间的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

例 5 已知 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，并且 α 是第四象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

解 由 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 之间的关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及第四象限角的余弦 $\cos\alpha>0$ 得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=-\frac{5}{12}.$$

例 6 已知 $\tan\alpha=k$，且角 α 在第三象限，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.

解 由角 α 在第三象限知：$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$.

由 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=k$，得 $\sin\alpha=k\cos\alpha$.

将上式代入
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
得
$$k^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
即
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{k^2+1}.$$

因此

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}},\quad \sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

例 7 求证：$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

证明
$$\begin{aligned}1+\tan^2\alpha&=1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\\&=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\&=\frac{1}{\cos^2\alpha}.\end{aligned}$$

例 8 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，

两边平方，得
$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{25},$$

即
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{25}.$$

将 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 代入上式，得
$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-1\right)=-\frac{12}{25}.$$

练 习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第四象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.
2. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.
3. 求证：$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.
4. 化简：(1) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$；　　(2) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$.
5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$ 的值.

5.2.3 诱导公式

在前面的学习中，为了求得任意角的三角函数值，我们依据三角函数的定义，在角 α 的终边上找到一点 P 的坐标，进而求得．还有一个办法，就是将角 α 转化到 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 范围内，用我们熟悉的锐角三角函数知识来求解．如何将角进行转化？这就是本节的主要内容．

由三角函数的定义可以知道：终边相同的角的同一三角函数值相等．

即有：

公式一

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha,$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$.

对任意角 β 可适当选取整数 k，使 $\beta=\alpha+2k\pi$，$\alpha\in[0,\ 2\pi)$，从而角 β 的三角函数值可化为在区间 $[0,\ 2\pi)$ 内的角 α 的三角函数值来求.

例 9 求下列各三角函数值：

（1）$\sin 81\pi$；　　　　（2）$\tan 765°$.

解　（1）$\sin 81\pi=\sin(40\times 2\pi+\pi)=\sin\pi=0$；

（2）$\tan 765°=\tan(2\times 360°+45°)=\tan 45°=1$.

除了探究一些终边相同的角之间的转化，我们还可以利用单位圆的对称性来研究一些角的终边所具有的某些特殊的关系（如两个角的终边关于坐标轴对称、关于原点 O 对称等），进而将这些角进行转化.

设任意角 α 的终边与单位圆的交点坐标为 $P(x,\ y)$，则

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x,\ 当\ x\neq 0\ 时，\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

（1）如图 5.2－8（1），作点 $P(x,\ y)$ 关于 x 轴的对称点 $P_1(x,\ -y)$，则 $\angle xOP_1=-\alpha$. 由三角函数的定义可得

$$\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=x=\cos\alpha,$$

$$当\ x\neq 0\ 时，\tan(-\alpha)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\alpha.$$

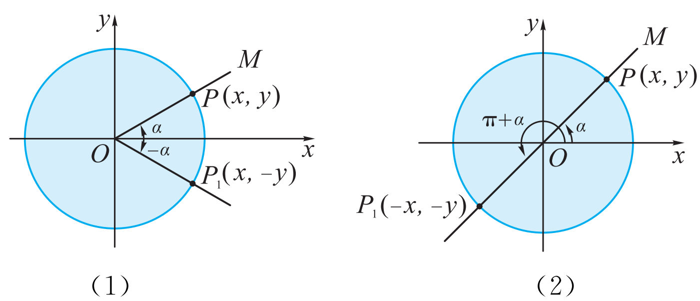


图 5.2－8

（2）如图5.2－8（2），作点 $P(x,\ y)$ 关于点 O 的对称点 $P_1(-x,\ -y)$，也就是将 OP 旋转 π 到 OP_1，则 $\angle xOP_1=\pi+\alpha$，于是由三角函数的定义可得

$$\sin(\pi+\alpha)=-y=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-x=-\cos\alpha,$$

$$当\ x\neq 0\ 时，\tan(\pi+\alpha)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\alpha.$$

（3）利用（1）（2）的结果得

$\sin(\pi-\alpha)=\sin[\pi+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$，

$\cos(\pi-\alpha)=\cos[\pi+(-\alpha)]=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$，

$\tan(\pi-\alpha)=\tan[\pi+(-\alpha)]=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

探究 α 与 $\pi-\alpha$ 之间的函数关系，我们还可以从这两个角的终边关于 y 轴对称来推导. 试试看.

为了使用方便，我们将上述探究得到的公式总结如下：

公式二

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

公式三

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.$$

公式四

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.$$

> 你能借助单位圆的三角函数线来推导公式二至公式四吗？

以上公式一至公式四可以概括为如下法则：

$k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$的三角函数值，等于角$\alpha$的同名函数值，前面添上一个把角$\alpha$看成锐角时原函数值的符号.

利用公式一至公式四，就可以把任意角的三角函数转化为锐角三角函数进行计算. 转化过程一般按下列步骤进行：

任意角的三角函数 → $[0,2\pi)$内角的三角函数 → 锐角三角函数

例 10 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $\cos\frac{2\pi}{3}$；　(3) $\tan\frac{5\pi}{4}$；　(4) $\cos\frac{35\pi}{6}$.

解 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(2) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$；

(4) $\cos\frac{35\pi}{6}=\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 11 化简：

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\tan(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}.$$

解 原式 $=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{-\tan\alpha}{-\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}$

$=-1.$

练 习

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\cos 765°$； (2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$； (3) $\cos\frac{15\pi}{4}$；

(4) $\tan\frac{4\pi}{3}$； (5) $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$； (6) $\cos(-2\ 040°)$.

2. 将角 $2\pi-\alpha$ 的三角函数用角 α 的三角函数来表示.

3. 化简：$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi+\alpha)\tan(\pi+\alpha)}{\tan(-\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}$.

在初中数学中讲锐角三角函数时，曾经根据直角三角形两锐角互余的关系得出了锐角 α 与它的余角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数之间的关系：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

这样的关系式是否对任意角 α 成立呢？

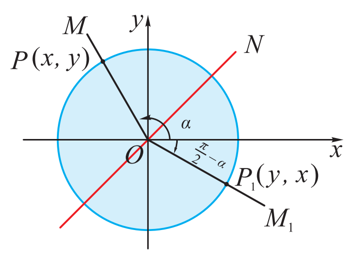


图 5.2－9

如图 5.2－9，设角 α 的终边 OM 交单位圆于点 $P(x，y)$，角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边 OM_1 交单位圆于点 P_1.

由于角 α 与角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的平均值为 $\frac{1}{2}\left[\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\frac{\pi}{4}$，因此角 α 的终边 OM 与角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边 OM_1 关于 $\angle xON=\frac{\pi}{4}$ 的终边 ON 所在直线 $y=x$ 对称，则点 P 与 P_1 关于直线 $y=x$ 对称，可以求得点 P_1 的坐标为 $(y，x)$.

由三角函数的定义可知：

$$\cos\alpha=x,\qquad \sin\alpha=y;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=y=\sin\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x=\cos\alpha.$$

在此基础上，我们还可以推导出：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

由此得出关于$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$与α的正、余弦关系式：

公式五

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

你能用单位圆的三角函数线推导公式五吗？

公式五可概括为如下法则：

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$的正弦(余弦)函数值，等于角α的余弦(正弦)函数值，前面添上一个把角α看成锐角时原函数值的符号.

利用公式五，可以实现正弦函数与余弦函数的相互转化.

当角α的终边不在坐标轴上时，还可以得出以下公式：

公式六

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}.$$

以上关于角α与$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数的关系式，都称为**诱导公式**.

诱导公式揭示了终边具有某种对称关系的两个角的三角函数值之间的关系.

例 12 化简：

（1）$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$；（2）$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

解 （1）$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$；

（2）$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

例 13 化简：

$$\frac{\cos(\alpha-\pi)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

解 原式$=\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)$

$=-\cos^2\alpha$.

练习

1. 化简：

(1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$； (2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，计算：

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$； (2) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

3. 化简：

(1) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha-3\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$；

(2) $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)$.

习题 5.2

学而时习之

1. 已知角 α 的终边上一点 P 的坐标为$(4t,-3t)$(其中 $t>0$)，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

2. 利用三角函数的定义，求下列各角的正弦、余弦和正切值：

(1) 2π； (2) $\frac{3\pi}{2}$； (3) $\frac{5\pi}{4}$； (4) $\frac{5\pi}{3}$.

3. 作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线：

(1) $\frac{\pi}{3}$； (2) $\frac{5\pi}{6}$； (3) $\frac{5\pi}{3}$； (4) $-\frac{\pi}{4}$.

4. 确定下列各三角函数值的符号：

（1）$\sin 7.5\pi$；（2）$\cos \dfrac{25\pi}{3}$；

（3）$\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$；（4）$\sin \dfrac{2\pi}{3}\cdot\tan \dfrac{15\pi}{4}$.

5. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

6. 证明：

（1）$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$；（2）$\tan^2\beta\cdot\sin^2\beta=\tan^2\beta-\sin^2\beta$.

7. 求下列各三角函数值：

（1）$\sin 1\,920^\circ$；（2）$\cos\left(-\dfrac{26}{3}\pi\right)$；（3）$\tan \dfrac{47}{6}\pi$；

（4）$\cos\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$；（5）$\tan\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$.

8. 求值：$\sqrt{3}\cos 420^\circ+\tan 330^\circ+\sin(-60^\circ)$.

9. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$，计算：

（1）$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$；（2）$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

10. 化简（$n\in\mathbf{Z}$）：

（1）$\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)$；（2）$\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)$.

温故而知新

11. 已知 $\sin\theta=\dfrac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\dfrac{4-2m}{m+5}$，且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$，求实数 m 的值.

12. 已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $5x^2-x+5m=0$ 的两根，求实数 m 的值.

13. 已知 $\tan\alpha=-2$，计算：

（1）$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；（2）$\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$.

14. 已知 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\dfrac{1}{4}$，计算：

（1）$\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$；（2）$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，试判断下列关系式是否恒成立，并说明理由.

（1）$\cos(A+B)=\cos C$；（2）$\sin(A+B)=\sin C$；（3）$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

5.3 三角函数的图象与性质

我们知道，实数集与角的集合之间可以建立一一对应关系，而一个确定的角又对应着唯一确定的正弦(或余弦)值. 从而任意给定一个实数 x，有唯一确定的值 $\sin x$ (或 $\cos x$)与之对应. 由这个对应关系所确定的函数 $y=\sin x$(或 $y=\cos x$)称为正弦函数(或余弦函数)，其定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

同理，对任意给定的实数 $x\notin\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，有唯一确定的值 $\tan x$ 与之对应. 由这个对应关系所确定的函数 $y=\tan x$ 称为正切函数，其定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

在归纳总结三角函数定义及解析式的基础上，本节我们将采用研究函数的方法，通过分析三角函数的解析式和图象，研究其性质.

5.3.1 正弦函数、余弦函数的图象与性质

我们可以利用正弦线画出 $y=\sin x$ 在区间$[0,\ 2\pi]$上的图象.

如图 5.3-1，在平面直角坐标系的 x 轴上取一点 O_1，以 O_1 为圆心画单位圆交 x 轴于点 A，且有向线段 O_1A 指向 x 轴的正方向. 在单位圆上任取一点 P，作 PD 垂直于 x 轴，垂足为 D，则 DP 是对应角$\angle PO_1A$ 的正弦线，$DP=\sin x_0$，其中 x_0 为$\angle PO_1A$ 的弧度数. 在 x 轴上取点 $N(x_0,\ 0)$，将正弦线 DP 平移至 NM，使点 D 与 N 重合，可知点 M 的坐标为$(x_0,\ \sin x_0)$，它是函数 $y=\sin x$ 图象上的一点.

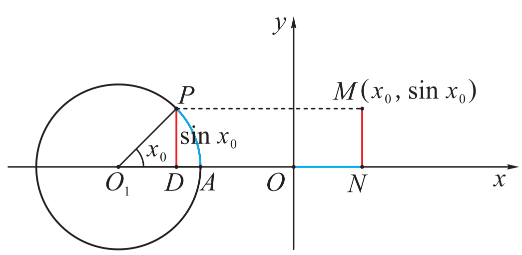
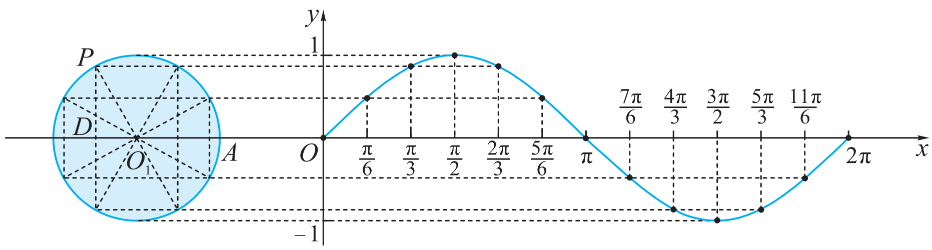


图 5.3-1

随着弧度数 x_0 的改变，可以得到函数 $y=\sin x$ 图象上的其他点．为方便起见，可将圆 O_1 平均分成 12 等份(分得越多，相应作出的图象越精确)，使 x_0 的值依次取 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π，借助于它们的正弦线，依次作出函数 $y=\sin x$ 图象上的点 $(0,\ \sin 0)$，$\left(\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$，…，$(2\pi,\ \sin 2\pi)$，用一条光滑的曲线将这些点依次连接起来，就得到函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,\ 2\pi]$上的图象，如图 5.3-2．



$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$

图 5.3-2

由于 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ 对所有整数 k 都成立，因此，将$y=\sin x$ 在区间$[0,\ 2\pi]$上的图象逐次向左和向右平移 2π 个单位长度，就可以得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象(如图 5.3-3)．

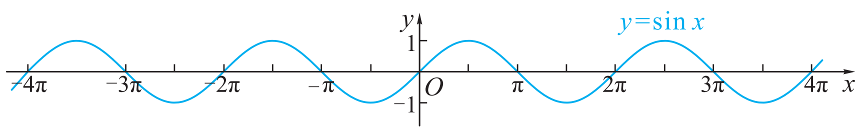


图 5.3-3

我们可以借助计算机作图软件快捷精准地画出三角函数在指定区间上的图象．

正弦函数 $y=\sin x$ 的图象称为**正弦曲线**．

正弦曲线在区间$[0,\ 2\pi]$上有五个点(最高点、最低点、与 x 轴的交点)

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)$$

对曲线的升降起伏起着关键作用．在精度要求不太高的时候，只要画出了这五个点，曲线的大致形状就基本确定了，将它们依次连成光滑曲线，就得到正弦曲线的简图．正弦曲线的这种近似画法称为“五点法”．

怎样作余弦函数 $y=\cos x$ 的图象？

由 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 可知，只需把 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度即可，如图 5.3-4．

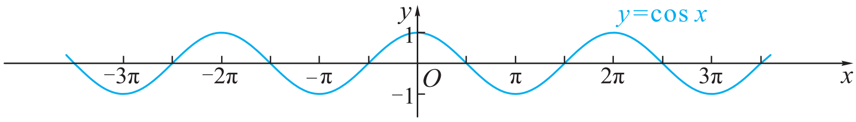


图 5.3－4

余弦函数 $y=\cos x$ 的图象称为余弦曲线.

> 你能由图 5.3－4，得出余弦曲线 $y=\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的关键五点吗?

例 1 用“五点法”画出下列函数的简图：

（1）$y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$；

（2）$y=2\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$.

解 （1）按五个关键点列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点，并将这些点依次连成一条光滑曲线，即得所求图象，如图 5.3－5.

> 你能从函数图象变换的角度，利用函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象来得到 $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象吗?

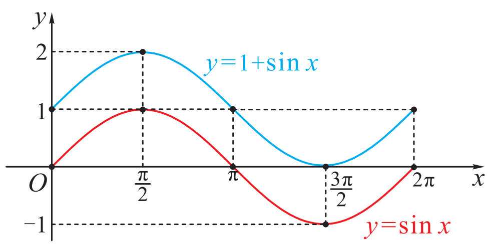


图 5.3－5

（2）按五个关键点列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$2\cos x$	2	0	-2	0	2

描点，并将这些点依次连成一条光滑曲线，即得所求图象，如图 5.3－6.

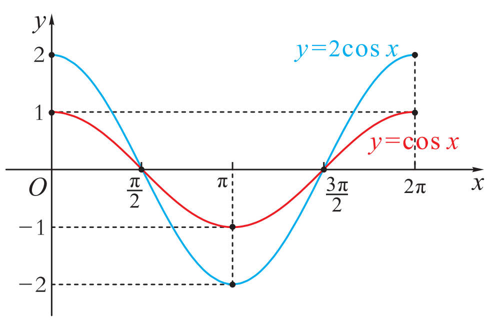


图 5.3－6

练习

用“五点法”画出下列函数的简图：

(1) $y=\cos x-1$，$x\in[-\pi, \pi]$；

(2) $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$；

(3) $y=-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$.

下面，我们根据正弦函数$y=\sin x$及余弦函数$y=\cos x$的定义并结合函数图象，研究它们的诸多性质.

1. 周期性

由诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in\mathbf{Z})$可知，当自变量$x$增加或减少$2\pi$的整数倍时，$\sin x$的值会重复出现. 为了定量地描述这种变化规律，我们引入周期函数的概念.

一般地，对于函数$y=f(x)$，如果存在非零常数T，使得当x取定义域内每一个值时，$x\pm T$都有定义，并且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称函数$y=f(x)$为**周期函数**，T称为这个函数的一个**周期**.

如果T是函数$y=f(x)$的周期，则由$f(x)=f(x+T)=f((x+T)+T)=f(x+2T)$知道$2T$也是它的周期，同理可知$T$的所有非零整数倍都是$y=f(x)$的周期.

按照这个概念，$y=\sin x$，$y=\cos x$都是周期函数，2π及2π的所有非零整数倍也都是它们的周期. 但从图象上可以看出，比2π更小的正数不可能是$y=\sin x$，$y=\cos x$的周期. 也就是说：这两个函数的图象向右平移比2π更短的距离不可能与原来的曲线重合，我们称2π是$y=\sin x$，$y=\cos x$的**最小正周期**. 最小正周期常简称为周期①.

2. 值域与最值

从三角函数的定义和图象可知：**正弦函数、余弦函数的值域都是$[-1, 1]$，最大值都是1，最小值都是-1.**

对于正弦函数$y=\sin x$，当且仅当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值1，当且仅当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值$-1$.

对于余弦函数$y=\cos x$，当且仅当$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值1，当且仅当

① 在本书中提到三角函数的周期时，一般是指它们的最小正周期. 本章中对函数最小正周期的证明均从略.

$x=(2k+1)\pi(k\in \mathbf{Z})$时取得最小值$-1$.

3. 奇偶性

观察正弦曲线和余弦曲线，可以看到：正弦曲线关于原点O对称，正弦函数$y=\sin x$应该是奇函数；余弦曲线关于y轴对称，余弦函数$y=\cos x$应该是偶函数.

由诱导公式$\sin(-x)=-\sin x$知，**正弦函数$y=\sin x$是奇函数.**

由诱导公式$\cos(-x)=\cos x$知，**余弦函数$y=\cos x$是偶函数.**

4. 单调性

我们可以先在正弦函数$y=\sin x$的一个周期的区间$\left(\text{如}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$上讨论它的单调性，再利用它的周期性，将单调性扩展到整个定义域.

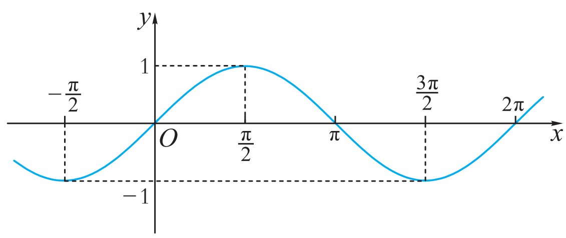


图 5.3-7

如图5.3-7，可以看到：

当x由$-\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{\pi}{2}$时，曲线逐渐上升，$\sin x$的值由-1单调递增到1；

当x由$\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{3\pi}{2}$时，曲线逐渐下降，$\sin x$的值由1单调递减到-1.

这个变化情况如下表所示：

x的变化	$-\frac{\pi}{2}$	…	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$的变化	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

这就是说，正弦函数$y=\sin x$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在闭区间$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$上是减函数.

由于正弦函数$y=\sin x$的周期是2π，因此正弦函数$y=\sin x$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in \mathbf{Z})$上都是增函数，函数值从$-1$增大到1；在闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in \mathbf{Z})$上都是减函数，函数值从1减小到$-1$.

对于余弦函数 $y=\cos x$，我们也可以在它的一个周期的区间(如$[0, 2\pi]$)上讨论它的单调性.

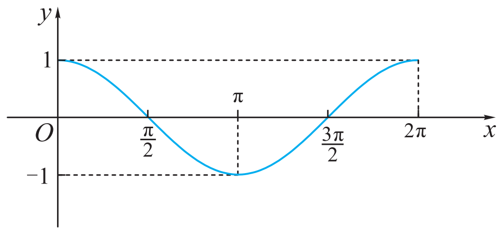


图 5.3-8

如图 5.3-8，当 x 由 0 增大到 π 时，曲线逐渐下降，$\cos x$ 的值由 1 单调递减到 -1；当 x 由 π 增大到 2π 时，曲线逐渐上升，$\cos x$ 的值由 -1 单调递增到 1.

类似地，余弦函数 $y=\cos x$ 在闭区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数，函数值从 1 减小到 -1；在闭区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数，函数值从 -1 增大到 1.

例 2 求下列函数的最大值及取得最大值时自变量 x 的集合：

（1）$y=2\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$；　　（2）$y=2-\cos\dfrac{x}{3}$，$x\in\mathbf{R}$.

解　（1）令 $z=2x$，使函数 $y=2\sin z$，$z\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 z 的集合是

$$\left\{z\,\middle|\, z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

由 $2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因此使函数 $y=2\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\, x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最大值是 2.

（2）令 $z=\dfrac{x}{3}$，当函数 $y=2-\cos z$，$z\in\mathbf{R}$ 取得最大值时，$\cos z$ 取最小值，此时 z 的集合是

$$\{z\mid z=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

由 $\dfrac{x}{3}=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=3\pi+6k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因此使函数 $y=2-\cos\dfrac{x}{3}$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 x 的集合是 $\{x\mid x=3\pi+6k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，最大值是 3.

> ？你能求出例 2 中各函数取得最小值时自变量 x 的集合吗？

例 3 利用三角函数的单调性，比较下列各组数的大小：

（1）$\sin(-1)$，$\sin(-1.1)$；　　（2）$\cos\dfrac{11\pi}{7}$，$\cos\dfrac{12\pi}{7}$.

解 （1）由于$-\frac{\pi}{2}<-1.1<-1<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，因此

$$\sin(-1)>\sin(-1.1).$$

（2）由于 $\pi<\frac{11\pi}{7}<\frac{12\pi}{7}<2\pi$，且 $y=\cos x$ 在区间$[\pi,\ 2\pi]$上单调递增，因此

$$\cos\frac{11\pi}{7}<\cos\frac{12\pi}{7}.$$

例 4 求函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$的单调递增区间.

解 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $z=2x-\frac{\pi}{4}$，函数 $y=\cos z$ 的单调递增区间是$[\pi+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

> 若令 $z=\frac{\pi}{4}-2x$，则如何求解呢？

由 $\pi+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2\pi+2k\pi$，得

$$\frac{5\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

因此，函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$的单调递增区间是$\left[\frac{5\pi}{8}+k\pi,\ \frac{9\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

思考：你能求出函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$的单调递减区间吗？

练习

1. 求使下列函数取得最大值、最小值时自变量 x 的集合，并写出最大值、最小值：

（1）$y=-2\sin x+1$，$x\in\mathbf{R}$；　　（2）$y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=-\frac{1}{2}\cos 2x$；　　（2）$y=\sin x\cos x$.

3. 利用三角函数的单调性，比较下列各组数的大小：

（1）$\sin\frac{1}{2}$，$\sin\frac{1}{3}$；　　（2）$\cos\frac{8\pi}{5}$，$\cos\frac{9\pi}{5}$；

（3）$\sin 1$，$\sin 2$；　　（4）$\cos\frac{4\pi}{9}$，$\cos\frac{7\pi}{9}$.

4. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=-\cos\frac{x}{2}$；　　（2）$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

5.3.2 正切函数的图象与性质

我们可以类比画正弦曲线的方式，利用单位圆上的正切线 AT 作正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象，如图 5.3-9.

由诱导公式可得：

$$\tan(x+k\pi)=\frac{\sin(x+k\pi)}{\cos(x+k\pi)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x, \qquad (*)$$

其中 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$. 这说明正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上的图象与其在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象完全相同，因此可以将正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象逐次向左和向右平移 π 个单位长度，就得到正切函数 $y=\tan x\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$ 的图象（如图 5.3-10），这称为**正切曲线**.

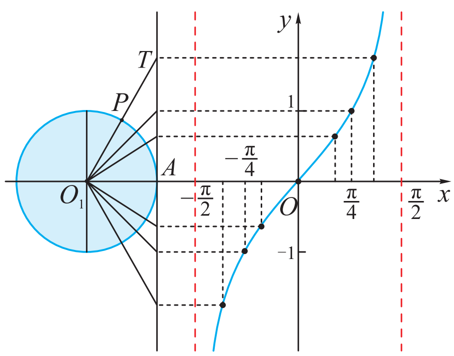


图 5.3-9

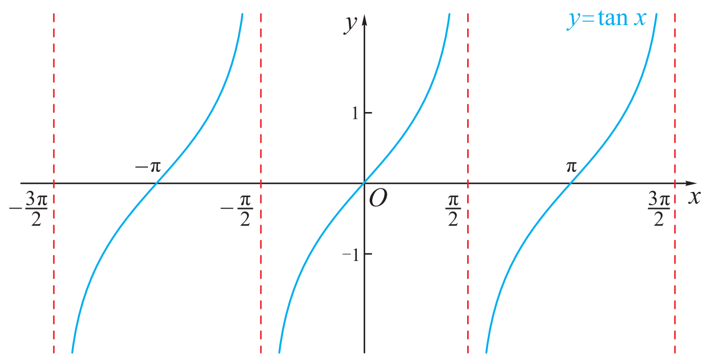


图 5.3-10

由图象可以看出：正切曲线由被互相平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 所隔开的无穷多支曲线组成.

下面我们来研究正切函数 $y=\tan x$ 的诸多性质：

1. **周期性**

由上面的 $(*)$ 式可知正切函数 $y=\tan x$ 是周期函数，$k\pi(k\in\mathbf{Z},\ k\neq0)$ 是它的周期，而 π 是正切函数的**最小正周期**.

2. **值域**

由图 5.3-9 中正切线 AT 可知，随着 $\angle AO_1P$ 的弧度数 x 从 0 开始增大，AT 的长度也在增大，并且当 x 趋向于 $\frac{\pi}{2}$ 时，AT 的长度可以大于指定的任意正数，即趋向

于无穷大，则 $\tan x$ 能取到 $[0, +\infty)$ 内的任意实数．类似地，$\tan x$ 也能取到 $(-\infty, 0]$ 内的任意实数．因此，**正切函数的值域是实数集 $\mathbf{R}$**，正切函数没有最大值和最小值．

3．奇偶性

观察正切曲线，我们可以看到正切曲线关于原点 O 对称，正切函数 $y=\tan x$ 应该是奇函数．

由诱导公式 $\tan(-x)=-\tan x$ 知，**正切函数 $y=\tan x$ 是奇函数**．

4．单调性

从图 5.3－10 可以看出：正切函数 $y=\tan x$ 在每个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增．

例 5 求函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域和单调区间．

解 要使函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 有意义，自变量 x 应满足

$$2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z}),$$

即

$$x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

所以函数的定义域是 $\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$．

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，得

$$-\frac{5}{12}\pi+\frac{k}{2}\pi<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

因此，函数的单调递增区间是 $\left(-\frac{5}{12}\pi+\frac{k}{2}\pi, \frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$．

例 6 利用函数的单调性，比较下列各组数的大小：

（1）$\tan(-3)$，$\tan(-3.1)$； （2）$\tan\frac{7\pi}{6}$，$\tan\frac{7\pi}{5}$．

解 （1）由于 $-\frac{\pi}{2}-\pi<-3.1<-3<\frac{\pi}{2}-\pi$，且函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-\pi\right)$ 上单调递增，

因此

$$\tan(-3.1)<\tan(-3).$$

（2）由于 $-\frac{\pi}{2}+\pi<\frac{7\pi}{6}<\frac{7\pi}{5}<\frac{\pi}{2}+\pi$，且函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ 上

单调递增，

因此 $$\tan\frac{7\pi}{6}<\tan\frac{7\pi}{5}.$$

练习

1. 正切函数在整个定义域上是增函数吗？为什么？

2. 求下列函数的定义域和单调区间：

（1）$y=\tan 3x$；（2）$y=3\tan\frac{x}{2}$；（3）$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 利用函数的单调性，比较下列各组数的大小：

（1）$\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$；（2）$\tan\frac{\pi}{9}$，$\tan\frac{7\pi}{9}$.

习题 5.3

学而时习之

1. 画出下列函数的简图：

（1）$y=\sin\frac{1}{2}x$，$x\in[0,4\pi]$；（2）$y=-\cos x$，$x\in[-\pi,\pi]$.

2. 下列函数中，哪些是奇函数，哪些是偶函数？

（1）$y=-\sin 2x$；（2）$y=2\cos x+1$；

（3）$y=3\tan x$；（4）$y=|\sin x|$.

3. 求使下列函数取得最大值、最小值时自变量 x 的集合，并写出最大值、最小值：

（1）$y=-2\cos 2x$；（2）$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 利用三角函数的单调性，比较下列各组数的大小：

（1）$\sin 3$，$\sin 4$；（2）$\cos 2$，$\cos 3$；

（3）$\sin\frac{6\pi}{5}$，$\cos\frac{6\pi}{5}$.

5. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$；（2）$y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

6. 画出函数 $y=-\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的简图.

7. 求函数 $y=\tan(\pi-3x)$的定义域和单调区间.

8. 求适合下列条件的 x 的值(其中 $x\in[0,\ 2\pi]$).

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\sin x=\frac{1}{2}$；

(3) $\cos x=-\frac{1}{2}$；

(4) $\tan x=-1$.

9. 根据三角函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 的集合：

(1) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\sqrt{2}+2\cos x\geqslant 0$；

(3) $\tan x\leqslant 1$；

(4) $\tan x-\sqrt{3}\geqslant 0$.

温故而知新

10. 作出函数 $y=|\sin x|$的图象，观察图象说出它的周期，并用周期函数的定义加以证明.

11. 正弦函数是奇函数，它的图象关于原点对称，即原点是它的对称中心.

(1) 除原点外，它还有其他的对称中心吗？若有，对称中心的坐标是什么？

(2) 正弦曲线是轴对称图形吗？如果是，对称轴的方程是什么？

(3) 函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象是中心对称图形吗？是轴对称图形吗？若是，对称中心的坐标和对称轴的方程分别是什么？

12. 利用函数 $y=\sin x$，$x\in[-\pi,\ \pi]$与 $y=\cos x$，$x\in[-\pi,\ \pi]$的图象，在$[-\pi,\ \pi]$上求 $\sin x<0$ 且 $\cos x<0$ 时 x 的取值范围.

13. 求函数 $y=\log_{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调区间.

5.4 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质

在现实世界中，周期现象比比皆是．例如，在物理和工程技术中，为了表示交流电的电流 y 与时间 t 的关系，简谐振动中位移 y 与时间 t 的关系等，人们往往用形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 A，ω，φ 是常数)的函数来表示．

例如，简谐振动中(如图 5.4－1)，弹簧下面悬挂着的小球在位置 O 处于平衡状态．将小球竖直向下拉到某个位置，然后放开，小球就在平衡位置的附近往复运动．为了描述小球的坐标位置 y(又称位移)随着时间 t 的变化图象，我们在小球上安装一支绘图笔，让一条纸带在与小球振动方向垂直的方向上匀速运动，笔在纸带上画出的就是小球的振动图象，如图 5.4－2．

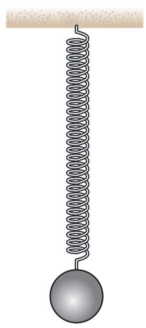


图 5.4－1

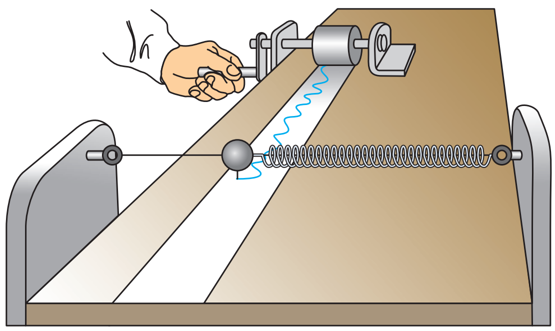


图 5.4－2

我们还可以借助传感器和计算机描绘小球振动的图象，如图 5.4－3 所示．

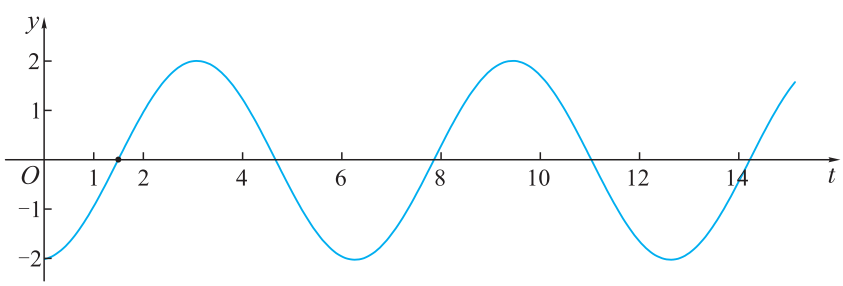


图 5.4－3

观察图 5.4－3 可以发现，这与我们熟悉的正弦曲线很相似．思考函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$之间有哪些关系呢？显然，前者就是后者在 $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=0$ 时的特殊情况．下面，我们来探索函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，并分析参数 A，ω，φ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响．

例 1 在同一直角坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=2\sin x$，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象，观察它们之间的关系，并说出这三个函数的周期、最大值、最小值、值域之间的关系.

解 函数 $y=\sin x$，$y=2\sin x$，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期都是 2π，在 $[-\pi, \pi]$ 上分别求出这三个函数的图象上的五个关键点，并作出它们在一个周期内的简图，如图 5.4－4.

如何找到画这三个函数图象的关键五点？试列表，并比较这五点坐标的异同.

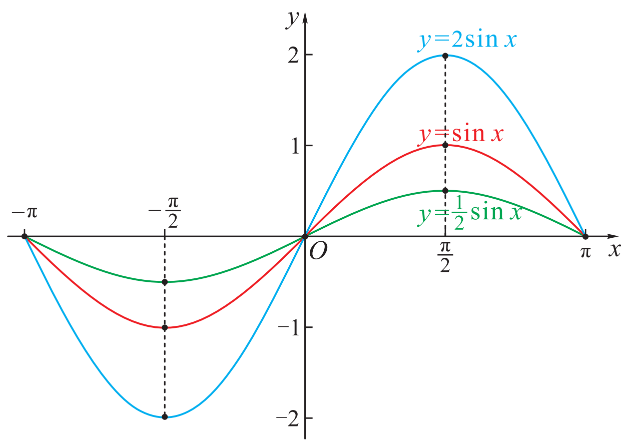


图 5.4－4

这三个函数的奇偶性、单调区间是一样的吗？

观察图 5.4－4，可以看出：

$y=2\sin x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点 $(x, \sin x)$ 的横坐标不变、纵坐标乘以 2（到 x 轴的距离放大到原来的 2 倍）得到. 因而 $y=2\sin x$ 的周期仍是 2π，最大值和最小值分别变为 2 和 -2，值域变成了 $[-2, 2]$，也就是说“振动幅度”扩大到 $y=\sin x$ 的 2 倍.

类似地，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点 $(x, \sin x)$ 的横坐标不变、纵坐标乘以 $\frac{1}{2}$（到 x 轴的距离缩短到原来的 $\frac{1}{2}$）得到. 因而 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期仍是 2π，最大值和最小值分别变为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$，值域变为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，“振动幅度”缩小为 $y=\sin x$ 的 $\frac{1}{2}$.

一般地，对任意 $A>0$ 且 $A\neq1$，函数 $y=A\sin x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标不变、纵坐标乘以 A 得到. $y=A\sin x$ 的周期仍是 2π，值域为 $[-A, A]$，最大值和最小值分别为 A 和 $-A$.

这个结论可以推广到余弦函数的情况吗？为什么？

例 2 在同一直角坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=\sin\frac{1}{2}x$在$[-2\pi, 2\pi]$上的图象，观察它们之间的关系，并说出这三个函数的周期、最大值、最小值、值域之间的关系.

解 通过“五点法”作出函数 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=\sin\frac{1}{2}x$ 在区间$[-2\pi, 2\pi]$上的简图，如图 5.4－5.

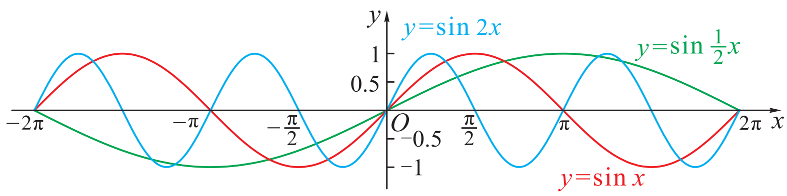


图 5.4－5

观察图 5.4－5，可以看出：

$y=\sin 2x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x, \sin x)$的纵坐标不变、横坐标除以 2$\left(\text{到 } y \text{ 轴的距离缩短到原来的}\frac{1}{2}\right)$得到. 因而 $y=\sin 2x$ 的值域、最大值、最小值都与 $y=\sin x$ 相同，周期缩短为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x, \sin x)$的纵坐标不变、横坐标除以$\frac{1}{2}$(到 y 轴的距离放大到原来的 2 倍)得到. 因而 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的值域、最大值、最小值都与 $y=\sin x$ 相同，周期扩大为 $2\pi\cdot 2=4\pi$.

一般地，对任意 $\omega>0$ 且 $\omega\neq 1$，函数 $y=\sin\omega x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标伸长$(0<\omega<1)$或缩短$(\omega>1)$为原来的$\frac{1}{\omega}$而得到. $y=\sin\omega x$ 的值域为$[-1, 1]$，周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

这个结论可以推广到余弦函数的情况吗？为什么？

例 3 作出函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 在长度为一个周期的闭区间上的简图，并说明 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 的图象是由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化而得到的.

解 函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$，在$\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$上求出函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 图

象上的五个关键点，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=3\sin\frac{3}{2}x$	0	3	0	-3	0

描点，连线，作出函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$，$x\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$的大致图象，如图 5.4-6 所示.

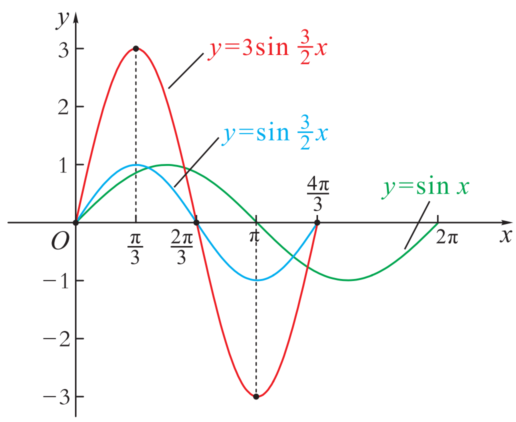


图 5.4-6

从图 5.4-6 可以看出，函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 的图象可以用下面的方法得到：先把函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$，再把所得图象上各点的横坐标不变、纵坐标伸长到原来的 3 倍，即得到函数 $y=3\sin\frac{3}{2}x$ 的图象.

练 习

1. 用“五点法”作下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

（1）$y=\frac{1}{3}\sin x$；　　（2）$y=\sin\frac{1}{3}x$；

（3）$y=2\sin\frac{1}{2}x$.

2. 试说明第 1 题中每个函数的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化而得到.

例 4 在同一直角坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的图象，分析它们之间的变化关系.

解 通过“五点法”画出函数 $y=\sin x$，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的简图，如图 5.4－7.

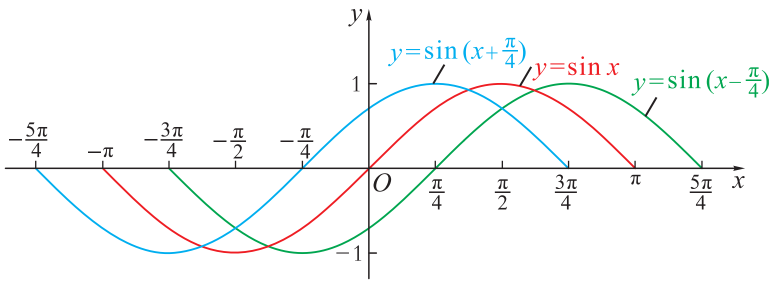


图 5.4－7

观察图 5.4－7，可以发现：

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x,\ \sin x)$的纵坐标不变、横坐标减去$\frac{\pi}{4}$得到，也就是将 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到.

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x,\ \sin x)$的纵坐标不变、横坐标加上$\frac{\pi}{4}$得到，也就是将 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到.

一般地，$y=\sin(x+\varphi)$（$x\in\mathbf{R}$，常数 $\varphi\neq0$）的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象向左（当 $\varphi>0$）或向右（当 $\varphi<0$）平移$|\varphi|$个单位长度得到.

> ？这个结论可以推广到余弦函数的情况吗？为什么？

例 5 画出函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$（$x\in\mathbf{R}$）的图象，并求出这个函数的周期和值域.

解 （方法一） 函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，我们先用“五点法”作出它在一个周期内的图象.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=0$，得 $x=-\frac{\pi}{8}$，把 $x=-\frac{\pi}{8}$作为第一点的横坐标，依次递加一个周期的$\frac{1}{4}$，即$\frac{\pi}{4}$，就可以得到其余四个点的横坐标. 列表如下：

x	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
$2x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	2	0	-2	0

作出函数在$\left[-\frac{\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}\right]$上的简图，并左右连续地平移，就可以得到这个函数的图象，如图 5.4－8.

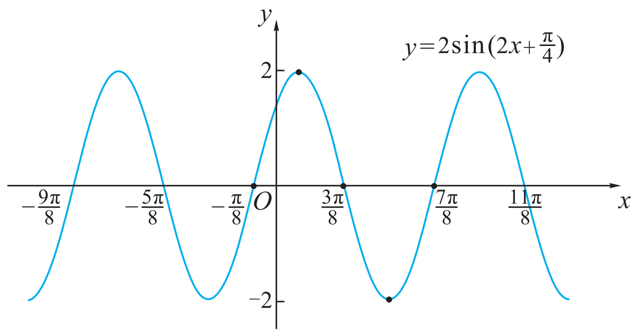


图 5.4－8

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的值域为$[-2,\ 2]$.

（方法二）先作出函数 $y=\sin x$ 的图象，将正弦曲线向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，值域仍为$[-1,\ 1]$，周期仍为 2π.

再将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，这个函数的值域仍为$[-1,\ 1]$，周期变成$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象上每一点的横坐标不变、纵坐标扩大为原来的 2 倍，就得到函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，如图 5.4－9 .

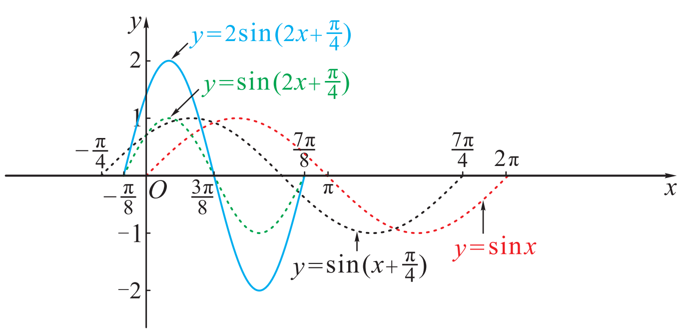


图 5.4－9

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期为 π，值域为$[-2,\ 2]$.

一般地，设 $A>0$，$\omega>0$，φ 是常数，函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

的图象可经过以下步骤得到：

将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左（当 $\varphi>0$）或向右（当 $\varphi<0$）平移 $|\varphi|$ 个单位长度；

再将所得曲线上每一点的横坐标伸长（$0<\omega<1$）或缩短（$\omega>1$）为原来的 $\frac{1}{\omega}$（纵坐标不变）；

进一步将所得曲线上每一点的纵坐标扩大（$A>1$）或缩小（$0<A<1$）为原来的 A 倍（横坐标不变）.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的值域为 $[-A, A]$，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$.

现在，我们回过头来重新审视本节开头提到的简谐振动的图象（图 5.4-2、图 5.4-3）. 数学上可以证明，这些图象所对应的函数解析式为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，而式子中的参数在物理学中有明确的意义．例如简谐振动中，A 表示这个振动物体偏离平衡位置的最大距离，称为**振幅**.

若 x 表示时间（$x\in[0, +\infty)$），则这个简谐振动的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，而 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 表示单位时间内往复振动的次数，称为**频率**①．$\omega x+\varphi$ 称为**相位**．$x=0$ 时的相位 φ 称为**初相**.

例 6 图 5.4-10 为某简谐振动的图象，试根据图象回答下列问题：

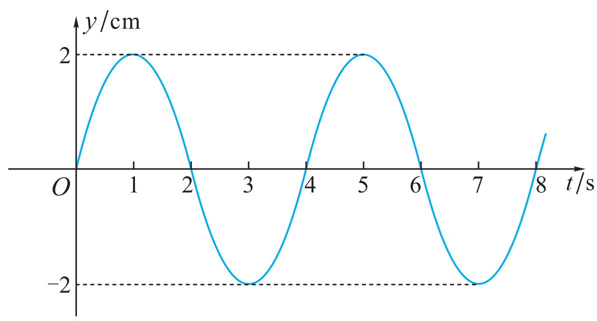


图 5.4-10

（1）求该简谐振动的振幅、周期、频率和初相；

（2）求 $t=15$ s 时，振子相对于平衡位置的位移；

（3）写出这个简谐振动的函数解析式.

解 （1）从图象上可以看出，这个简谐振动的振幅为 2 cm，周期为 4 s，频率为 $\frac{1}{4}$ Hz，初相为 0.

① 在国际单位制中，周期的单位是秒(s)，频率 f 的单位是赫兹(Hz)，1 Hz=1 s^{-1}.

（2）由于振动的周期为 4 s，因此当 $t=15$ s 时，位移 y 为 -2 cm.

（3）设这个简谐振动的函数解析式为

$$y=A\sin(\omega t+\varphi),\ t\in[0,\ +\infty).$$

由 $\frac{2\pi}{\omega}=4$，得 $\omega=\frac{\pi}{2}$.

又 $A=2$，$\varphi=0$，于是该简谐振动的函数解析式为

$$y=2\sin\frac{\pi}{2}t,\ t\in[0,\ +\infty).$$

练习

1. 作出下列函数图象的简图，并说明它们的图象可由正弦曲线做怎样的变化而得到：

（1）$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　（2）$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；

（3）$y=3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$.

2. 填空：

（1）为了得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向______平移______个单位长度；

（2）为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点向______平移______个单位长度；

（3）将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式是____________________.

3. 做简谐振动的小球上下运动，它在时刻 t(s) 时相对于平衡位置 O 的位移 y(cm) 由下列函数关系式确定：

$$y=2\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right).$$

（1）以 t 为横坐标，y 为纵坐标，作出这个函数的简图；

（2）求该简谐振动的振幅、周期、频率和初相.

多知道一点

探索函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期

对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$)，我们设其最小正周期为 T，由周期函数的定义有

$$A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin[\omega(x+T)+\varphi]=A\sin[(\omega x+\varphi)+\omega T]$$

对所有 x 都成立.

记 $\theta=\omega x+\varphi$，则 $A\sin\theta=A\sin(\theta+\omega T)$ 对所有的 θ 成立.

又函数 $f(\theta)=\sin\theta$ 的最小正周期为 2π，

故使得 $A\sin(\theta+\omega T)=A\sin\theta$ 的最小正数 $\omega T=2\pi$，因此 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

对于余弦函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，同样的道理可以推出其周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

习题 5.4

学而时习之

1. 作出下列函数图象的简图：

(1) $y=3\sin\dfrac{x}{3}$；

(2) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(3) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$；

(4) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. 选择题：

(1) 为了得到函数 $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有的点(　　)

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度

(D) 向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度

(2) 要得到函数 $y=\cos(2x+1)$ 的图象，只需把函数 $y=\cos 2x$ 的图象上所有的点(　　)

(A) 向左平移 1 个单位长度　　(B) 向右平移 1 个单位长度

(C) 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度　　(D) 向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度

3. 不画图，直接写出下列简谐振动的振幅、周期与初相，并说明它们的图象可由正弦曲线经过怎样的变化而得到：

(1) $y=\frac{2}{3}\sin x$；　　(2) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

4. 已知函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 用“五点法”作出函数在一个周期内的简图.

(2) 该函数图象可由正弦曲线经过怎样的变化而得到?

(3) 写出该函数的定义域、值域、周期，单调区间、对称中心坐标和对称轴方程.

5. 在匀强磁场中，匀速转动的线圈所产生的电流 I(A)是时间 t(s)的正弦函数，关系式为 $I=3\sin\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)$，试求它的初始($t=0$)电流、最大电流和周期.

温故而知新

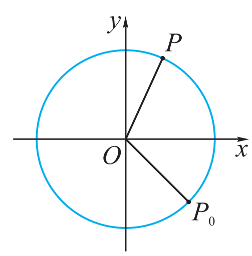
6. 将函数 $f(x)=\sin \omega x$(其中 $\omega>0$)的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象经过点 $\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)$，则 ω 的最小值是多少?

7. 将函数 $y=2\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 的图象做怎样的变化可以得到函数 $y=\cos x$ 的图象?

8. 如图，质点 P 在半径为 2 cm 的圆周上逆时针运动，其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$，角速度为 1 rad/s.

(1) 求点 P 的纵坐标 y 关于时间 t 的函数解析式；

(2) 求点 P 的运动周期和频率.



(第 8 题)

数学实验

用计算机作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

借助“超级画板”或其他有类似功能的软件，可在计算机上作出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的动态图象．拖动参数 A，ω 和 φ，能观察到图象随参数变化的情形．

操作步骤如下：

1．输入函数解析式：在右键菜单里单击“函数或参数方程曲线”，在打开的对话框里选“$y=f(x)$”，在激活的输入栏里填写 $a*\sin(b*x+c)$，曲线的点数设置为 1 000，参数范围为 -15 到 15，单击“确定”．

2．作出可控制参数点：作坐标点 $(a,\ -1)$，$(b,\ -2)$，$(c,\ -3)$，顺次标注为 A，ω 和 φ．自这三点分别向 y 轴引垂线．

3．作出 $\cos x$ 的曲线，作为比较，线型可选择虚线．

4．测量变量 a，b，c，在测量值显示框里将等号左边的变量名分别改为 A，ω 和 φ．

5．加上标题“正弦波的振幅、频率和相角”和“$y=A\sin(\omega x+\varphi)$”，再添加上其他必要的说明．

6．用鼠标分别拖动点 A，ω 和 φ，或选择其中一点用左右箭头键驱动，观察图象的变化(如图 1)．

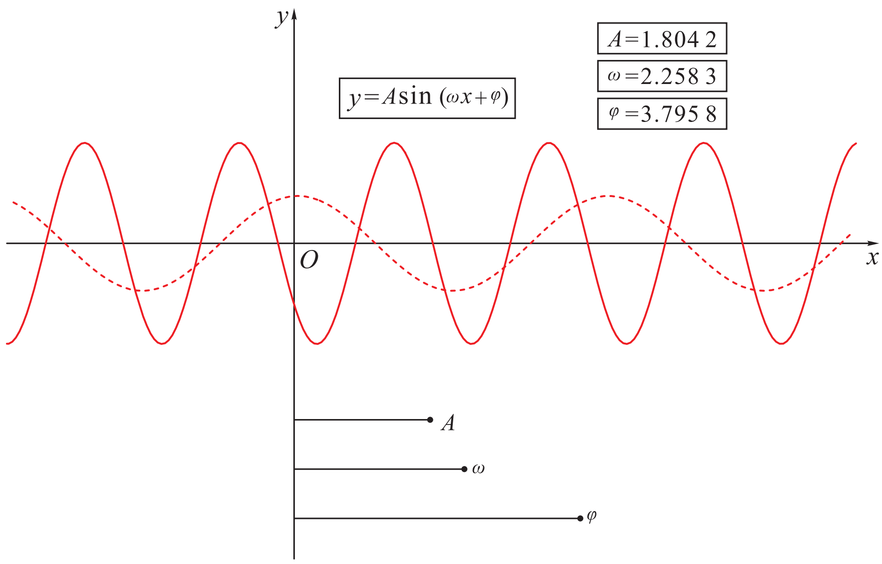


图 1

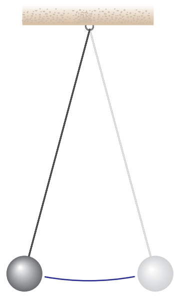
图 1 中虚线是 $y=\cos x$ 的图象．

调整参数 A，ω 和 φ，使动态曲线和虚线尽可能重合．这时，三个参数的值分别是多少？

5.5 三角函数模型的简单应用

三角函数作为描述现实世界中周期现象的一种数学模型，可以用来研究许多问题．下面，我们结合实例来说明三角函数模型的简单应用．

例 1 图 5.5－1 为小球在做单摆运动时，离开平衡位置时的位移 y(cm)随时间 x(s)变化所满足的函数图象，已知该图象满足 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(x\in[0,+\infty),\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的形式．试根据函数图象求出这个单摆运动的函数解析式．



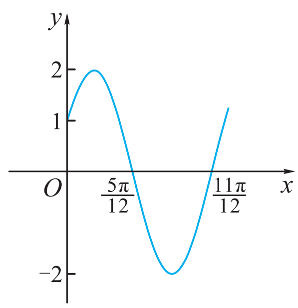


图 5.5－1

分析 已知函数图象满足 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，根据图象上的一些关键点可以确定 A，ω，φ，进而确定函数解析式．

解 由图象知，周期 $T=2\left(\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$.

因为点$\left(\dfrac{5\pi}{12},\ 0\right)$在函数图象上，

所以 $A\sin\left(2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$，即 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$.

又已知 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{5\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}+\varphi<\dfrac{4\pi}{3}$，

从而 $\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

又点(0，1)在函数图象上，所以 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，得 $A=2$.

故所求函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

> 例 1 还可以通过待定系数法来解决．由于$\left(\dfrac{5\pi}{12},\ 0\right)$及$\left(\dfrac{11\pi}{12},\ 0\right)$在图象上，由“五点法”可知：
>
> $$\begin{cases}\omega\cdot\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=\pi,\\[2mm]\omega\cdot\dfrac{11\pi}{12}+\varphi=2\pi,\end{cases}$$
>
> 解得 $\omega=2$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

例 2 已知摩天轮的半径为 60 m，其中心距离地面 70 m，摩天轮做匀速转动，每 30 min 转一圈，摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处.

（1）试确定在时刻 t(min)时，点 P 离地面的高度 h；

（2）在摩天轮转动的一圈内，点 P 距离地面超过 100 m 的时间有多长？

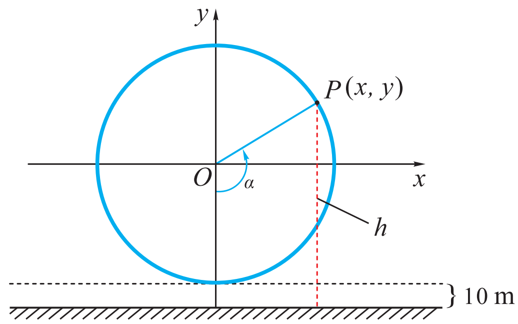


图 5.5－2

解 （1）如图 5.5－2，以摩天轮所在面为坐标平面，以摩天轮的中心点为原点 O，x 轴和 y 轴分别平行和垂直于地平面，建立直角坐标系.

点 P 的初始位置在最低点，设点 P 从最低点沿逆时针方向匀速转动，OP 在时间 t(min)内所转过的角度为 $\frac{2\pi}{30}\cdot t=\frac{\pi}{15}t$，因此 OP 与 Ox 的夹角为 $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}t$，于是，点 P 的纵坐标 $y=60\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}t\right)=-60\cos\frac{\pi}{15}t$.

因此点 P 离地面的高度 $h=70+y=\left(70-60\cos\frac{\pi}{15}t\right)$(m).

（2）根据题意，可得

$$70-60\cos\frac{\pi}{15}t\geqslant 100,$$

化简得

$$\cos\frac{\pi}{15}t\leqslant -\frac{1}{2}.$$

由于 $0\leqslant t\leqslant 30$，因此

$$\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{15}t\leqslant\frac{4\pi}{3},$$

解得

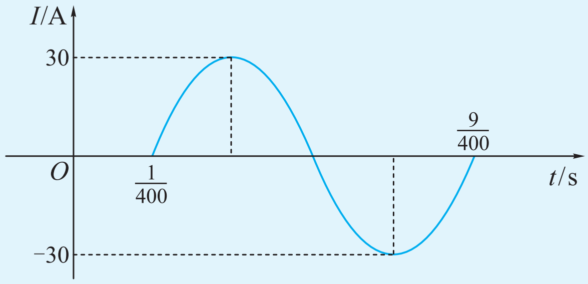
$$10\leqslant t\leqslant 20.$$

因此在摩天轮转动的一圈内，点 P 距离地面超过 100 m 的时间有 10 min .

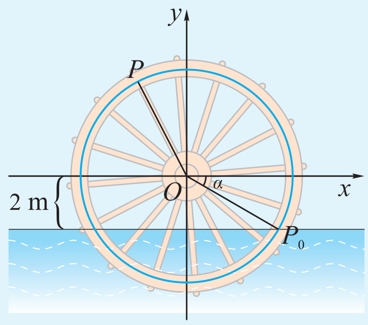
正如章前语的描述：潮涨潮落、月圆月缺、四季交替等是自然界中按一定的规律周而复始出现的现象……这都说明周期变化的现象在现实生活中比比皆是. 三角函数作为描述现实世界中周期现象的重要数学模型有着广泛的应用. 试针对现实生活中的某种周期现象，用适当的方法搜集数据，并利用这些数据为这种周期现象建立一个函数模型.

练 习

1. 已知一正弦电流 I(A)随时间 t(s)的部分变化曲线如图所示，试写出 I 关于 t 的函数解析式.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一个水轮的半径为 4 m，水轮圆心 O 距离水面 2 m，已知水轮每分钟转动 5 圈，当水轮上点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计算时间.

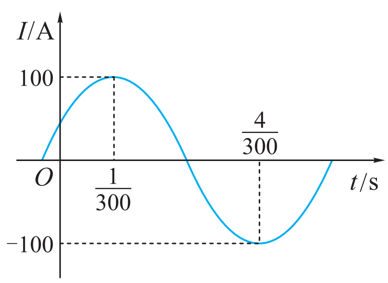
（1）将点 P 距离水面的高度 h(m)表示为时间 t(s)的函数；

（2）点 P 第一次到达最高点大约需要多长时间？

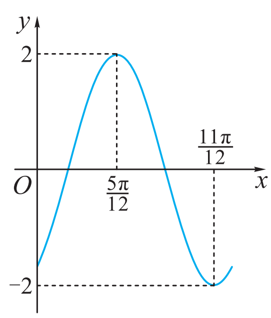
习题 5.5

学而时习之

1. 电流 I(A)随时间 t(s)变化的函数 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$的图象如图所示，则 $t=\dfrac{7}{120}$ s 时的电流为________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图为某简谐振动的图象，它符合 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\ \omega>0,\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的形式.

(1) 求该简谐振动的振幅、周期、频率和初相；

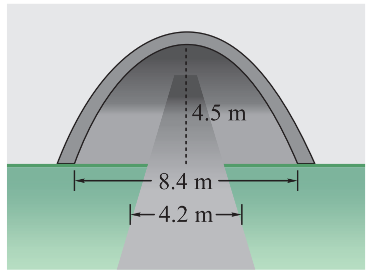
(2) 求该简谐振动的函数解析式；

(3) 求该函数的单调递增区间.

3. 如图为一个公路隧道，隧道口截面为正弦曲线，已知隧道跨径为 8.4 m，最高点离地面 4.5 m.

(1) 若设正弦曲线的左端为原点 O，试求出该正弦曲线的函数解析式；

(2) 如果路面宽度为 4.2 m，试求出公路边缘距隧道顶端的高度.



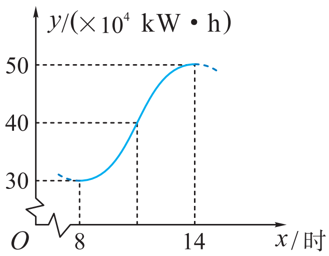
(第 3 题)

温故而知新

4. 如图，某地夏天 8—14 时的用电量变化曲线近似满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ $(0<\varphi<\pi)$.

(1) 求这一天的最大用电量及最小用电量；

(2) 写出这段曲线的函数解析式.



(第 4 题)

5. 已知某海滨浴场的浪高 y(m)是时间 t(时)$(0\leqslant t\leqslant 24)$的函数，记作 $y=f(t)$. 下表是某日各时刻的浪高数据：

t/时	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y/m	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	0.5	0.99	1.5

经长期观测，$y=f(t)$可近似地看成是函数 $y=A\cos\omega t+b$.

(1) 根据以上数据，求出该函数的周期 T、振幅 A 及函数解析式；

(2) 依据规定，当海浪高度高于 1 m 时才对冲浪爱好者开放，试依据(1)的结论，判断一天内 8:00 至 20:00 之间有多长时间可供冲浪者进行运动.

数学文化

三角学的历史

数学的发展来源于生活和社会发展的需要．三角学起源于对三角形边角关系的定量考察，这始于古希腊天文学家希帕恰斯(约前190—前125)，天文学家、数学家托勒密(约100—约170)等人对天文的测量，故在相当长的一个时期里，三角学隶属于天文学，而在它的形成过程中利用了已经积累得相当丰富的算术、几何(包括球面几何)和天文知识．

希帕恰斯

托勒密

公元前600年左右，古希腊学者泰勒斯利用相似三角形的原理测出了金字塔的高，这成为西方三角测量的肇始．公元前2世纪后，希帕恰斯为了天文观测的需要，作了一个和现在三角函数表相仿的“弦表”，即在固定的圆内，不同圆心角所对弦长的表，这一成果使他被后人认定为西方三角学的奠基者，并赢得了“三角学之父”的称誉．公元2世纪，希腊学者托勒密继承希帕恰斯的成就，并加以整理著成《天文学大成》，该书被认为是西方第一本系统论述三角学理论的著作．约同时代的梅内劳斯写了一本专门论述球三角学的著作《球面学》，内容包括球面三角形的基本概念和许多平面三角形定理在球面上的推广，以及球面三角形的许多独特性质．他的工作使希腊三角学研究进入全盛时期．

古希腊文化传播到古印度后，古印度人对三角术进行了进一步研究．公元5世纪末，古印度著名数学家、天文学家阿耶波多(476—550)提出用弧对应的弦长的一半来对应半弧的正弦．

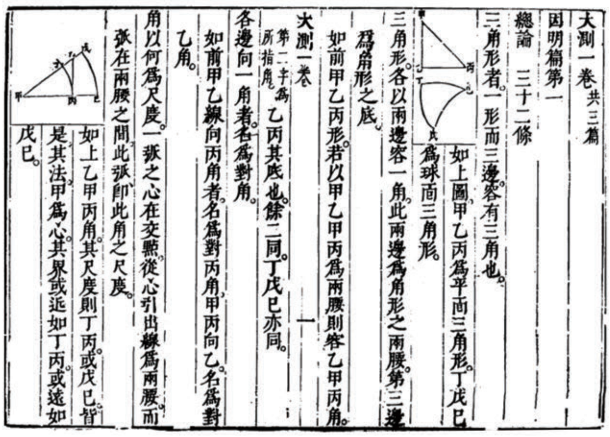
到了公元14世纪，阿拉伯天文学家引入了正切、余弦、正割和余割的概念，并计算了间隔10分的正弦和正切数值表．阿拉伯人将三角计算重新以算术方式代数化的努力为后来三角学从天文学中独立出来，成为应用更广泛的学科奠定了基础．

进入15世纪后，阿拉伯数学开始传入欧洲，随着欧洲商业的兴盛，航行、历法测定和地理测绘中出现了对三角学的需求，在翻译阿拉伯数学家著作的同时，欧洲

数学家开始制作更详细精准的三角函数表．

17 世纪，三角学传入中国．同年，外国传教士邓玉函、汤若望和明朝学者徐光启(1562—1633)编译成《大测》一书．“大测者，观三角形之法也．”可见“大测”与当时的“三角学”的意义是一样的．不过，“大测”的名称并不通行，三角在中国早期比较通行的名称是“八线”和“三角”．“八线”是指在单位圆上的八种三角函数线：正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线、正矢线、余矢线．


徐光启


大測一卷 共三篇
因明篇第一
總論 三十二條
三角形者。一形而三邊。容有三角也。
如上圖甲乙丙為平面三角形。丁戊巳
為球面三角形。
三角形各以兩邊容一角。此兩邊為角形之兩腰。第三邊
為角形之底。
如前甲乙丙形。若以甲乙甲丙為兩腰。則容乙甲丙角。
大測一卷 一
第二手為所指角。乙丙其底也。餘二同。丁戊巳亦同。
各邊向一角者。名為對角。
如前甲乙線向丙角者。名為對丙角。甲丙向乙。名為對
乙角。
角以何為尺度。一弧之心在交點。從心引出線為兩腰。而
弧在兩腰之間。此弧即此角之尺度。
如上乙甲丙角。其尺度則丁丙。或戊巳。皆
是其法甲為心。其界或近如丁丙。或遠如
戊巳。

《大测》书影

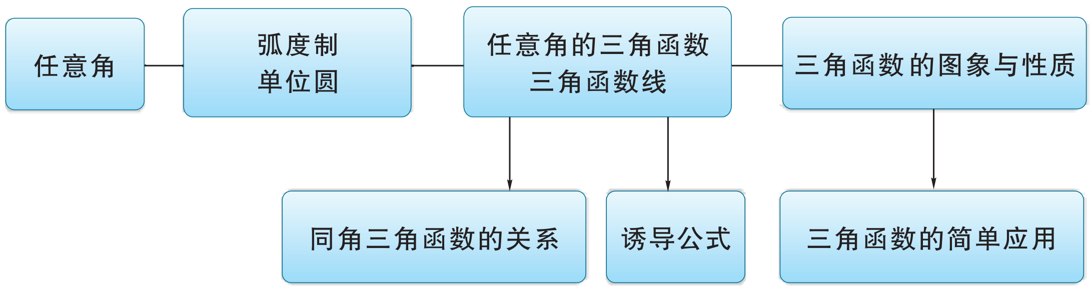
18 世纪开始，随着解析几何等分析学工具的引进，数学家们开始对三角函数进行分析学上的研究．瑞士数学家欧拉(1707—1783)在《无穷小分析引论》一书中首次给出用线段的比来定义三角函数．在欧拉之前，研究三角函数大都在一个确定半径的圆内进行．因此，当时的三角函数实际上是定圆内一些线段的长．

19 世纪法国数学家傅立叶(1768—1830)在研究热传导问题时，提出把函数看作三角函数的无穷级数之和，三角函数就成为调和分析的基石，于是三角学成为分析学的一部分．

三角学的现代发展已经结束，随着现代数学的综合性趋势加强，其中的一些内容已分属于数学的其他学科，如三角函数可归于分析学，三角测量可归于几何学，三角函数式的恒等变形可归于代数学．从这个意义上说，作为独立的数学分科的三角学已渐渐消失，但用于刻画周期现象的三角函数，仍然发挥着巨大的作用．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 任意角和弧度制的引入都与生产实际以及数学本身发展的需要紧密相关. 弧度制是如何定义的？用实数刻画角的大小为我们研究三角函数带来哪些方便？

2. 任意角的三角函数是怎样定义的？为什么称其为函数？

3. 单位圆在三角函数的研究中有着重要的作用. 为什么在单位圆中作出的有向线段能表示三角函数？尝试借助有向线段画出正弦、余弦、正切的三角函数图象. 你能借助单位圆的对称性，利用定义推导出诱导公式吗？

4. 三角函数的图象与性质是本章的重点. 试借助图象归纳总结正弦函数、余弦函数和正切函数的性质. 与我们前面所学的函数知识相比，这些三角函数有哪些不同的性质？

5. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$有何关系？你能借助图象理解参数 ω，φ，A 的意义吗？这些参数的变化对函数图象有何影响？

6. 三角函数是刻画周期现象的一类重要的模型. 你能针对现实生活中的某种周期现象，用适当的方法搜集数据，并利用这些数据为这个周期现象构建一个函数模型吗？

复习题五

学而时习之

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出$[-2\pi,\ 2\pi)$上与它终边相同的角.

（1）$-\dfrac{5}{3}\pi$；　　（2）$\dfrac{21}{5}\pi$；　　（3）$\dfrac{3}{4}\pi$；　　（4）$\dfrac{1}{6}\pi$.

2. 时钟的分针长 6 cm，分针走了 25 min，求：

（1）分针转过的角的弧度数；

（2）分针扫过的扇形的面积；

（3）分针尖端所走过的弧长.

3. 已知角 α 的终边经过点 $P(a,\ a)$，其中 $a\neq 0$，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

4. 在单位圆中，角 α，β 的正弦线分别为 MP_1，MP_2，若 $MP_1+MP_2=0$，求 α，β 之间的等量关系.

5. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$，求 $\sin^4\theta-\cos^4\theta$ 的值.

6. 求下列各式的值：

（1）$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$；

（2）$(3\sin\theta+4\cos\theta)^2+(3\cos\theta-4\sin\theta)^2$.

7. 计算：

（1）已知 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

（2）已知 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{5}$，求 $\cos\alpha$ 的值；

（3）已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，求 $\cos(2\pi-\alpha)$ 及 $\tan(\alpha-3\pi)$ 的值；

（4）已知 $\tan\alpha=2$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 的值.

8. 利用“五点法”作出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$和函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象，并指出 $y=\sin x$ 是减函数且 $y=\cos x$ 是增函数时 x 的取值范围.

9. 已知函数 $y=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$，

（1）求函数的单调区间及取得最大、最小值时自变量 x 的集合；

（2）判断函数的奇偶性.

10. 求下列函数的周期：

（1）$y=\sin\dfrac{2x}{3}$；　　（2）$y=\cos(-4x)$；

（3）$y=3\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　（4）$y=-\tan x$.

11. 画出下列简谐振动的图象，指出它们如何由正弦曲线变化而得到，并求出它们的振幅、周期、初相.

（1） $y=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$；　　（2） $y=-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$；

（3） $y=3\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

12. 一弹簧振子的位移 y(cm)与时间 t(s)的函数关系式为 $y=5\cos(\pi t+0.4\pi)$.

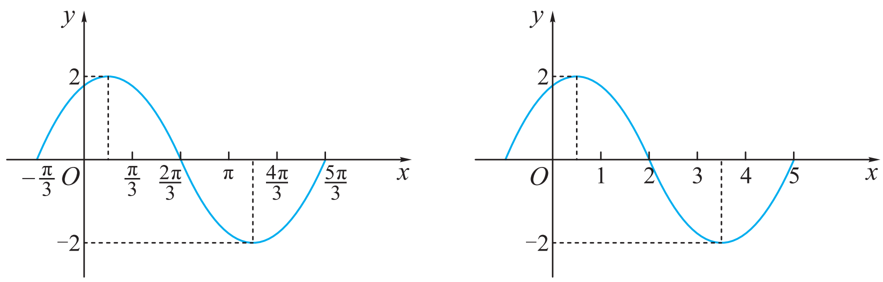
（1） 当 $t=0.6$ s 时，弹簧振子的位移是多少？

（2） 振动一次所需要的时间是多少？

（3） 用计算机画出它的图象.

13. 一根长为 l(cm)的线，一端固定，另一端悬挂一个小球. 小球做单摆运动时，离开平衡位置的位移 s(cm)和时间 t(s)的函数关系式为 $s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right)$，其中 g 为重力加速度，$g=9.8\ \text{m/s}^2$. 要使小球摆动的周期为 1 s，求 l 的值.

14. 如图都是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$在一个周期内的图象，试分别写出这两个函数的解析式.



（1）　　（2）

（第 14 题）

温故而知新

15. 化简 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$，其中 α 为第二象限角.

16. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，且 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 为第二象限角，求 $\sin\left(\alpha-\frac{13\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{21\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 已知 $y=a-b\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$的最大值为 6，最小值为 -2. 求实数 a，b 的值.

18. 把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，然后向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得图象的函数解析式是什么？

19. 若函数 $y=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象与直线 $y=2$ 的两个相邻公共点之间的距离等于 2π，

求函数的单调递减区间.

20. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$-\frac{\pi}{4}$为函数 $f(x)$的零点，直线 $x=\frac{\pi}{4}$为函数$f(x)$图象的对称轴，且 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{36}\right)$上单调，求 ω 的最大值.

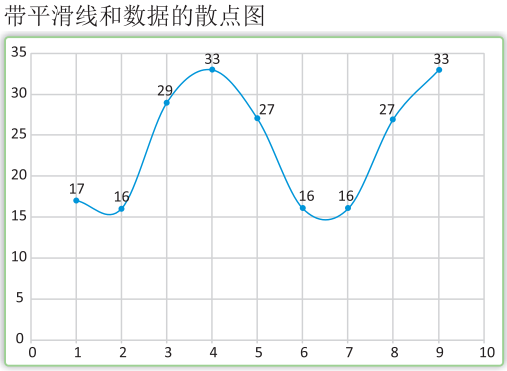
上下而求索

21. （数学探究活动）生成于大西洋的强烈热带气旋被称为飓风. 中心风速 178～209 km/h 对应于三级飓风，中心风速 210～249 km/h 对应于四级飓风，中心风速超过 250 km/h 对应于五级飓风. 以下数据是大西洋海域从 1921 年到 2010 年每十年的主要飓风（含三、四、五级）数量.

时间/年	x	主要飓风数量
1921—1930	1	17
1931—1940	2	16
1941—1950	3	29
1951—1960	4	33
1961—1970	5	27
1971—1980	6	16
1981—1990	7	16
1991—2000	8	27
2001—2010	9	33

（1）试利用计算机软件绘制“带平滑线和数据的散点图”；

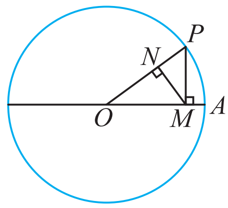
带平滑线和数据的散点图



（2）借助图象，尝试求出形如正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的解析式；

（3）使用数学软件找到最佳拟合的正弦型函数.

22. 如图，点 A 与点 P 分别是单位圆 O 上的定点与动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离 MN 表示为 x 的函数 $f(x)$.

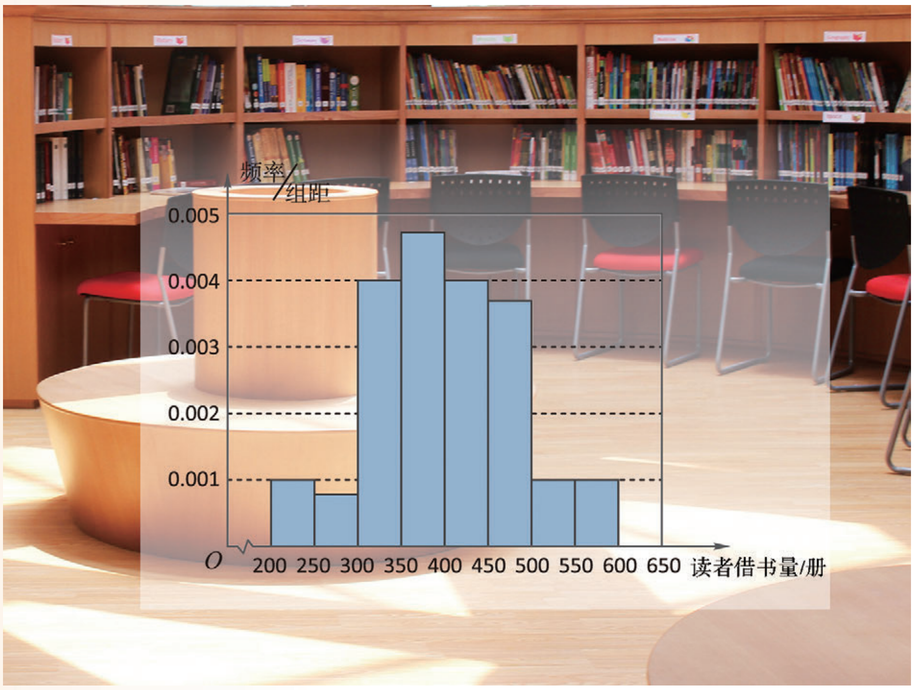


（第 22 题）

(1) 当 $x\in[0, 2\pi)$时，求出函数 $f(x)$的表达式；

(2) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，利用计算机软件作出函数 $y=f(x)$与 $g(x)=\sin 2x$ 的图象，通过图象讨论上述两个函数在单调性、最值、奇偶性以及周期性等方面有何异同.

第6章 统计学初步



统计学是利用科学方法收集、整理、描述和分析所得数据资料，并以此进行推断或决策的学科．如何收集数据？如何整理并描述数据？如何从数据中提取有用的信息，并作出合理的决策？这是本章将要学习的主要内容．

6.1 获取数据的途径及统计概念

统计是处理数据的一门科学．随着信息技术的高速发展，人类正步入大数据时代．今天的人们时刻与数据在打交道，无论是国家宏观政策的科学制定，还是社会经济管理、学术研究乃至个人的工作与生活等方面，人们都积极运用统计知识获取数据、分析数据并使用数据来解决问题，“以数据说话”正改变着人类的思维方式，并推动社会的发展．

一 收集数据

人们借助统计学方法研究实际问题，首先要做的工作就是针对问题收集相关数据．例如我国人口的迁徙是否有规律，经济预测是否科学，产品质量控制是否达标，网购商品是否畅销，等等，这些问题都需要通过收集数据作出回答．如何收集数据？

所有统计数据都是来自调查或实验．但是，从使用者的角度看，统计数据主要来自两条途径：间接来源和直接来源．

1. 数据的间接来源

如果与研究内容有关的原信息已经存在，我们只是对这些原信息重新加工、整理，使之成为我们进行统计分析可以使用的数据，就称该原信息为间接来源的数据．具体而言，常见的间接来源数据有国家各级统计部门公布的统计公报、定期出版的各类统计年鉴，各类经济信息中心、专业调查机构、各行业协会提供的市场信息和行业发展的数据情报，各类专业期刊、报纸、图书所提供的文献资料，从互联网或图书馆查阅到的相关资料，等等(如图 6.1－1)．间接来源数据又称为二手数据．

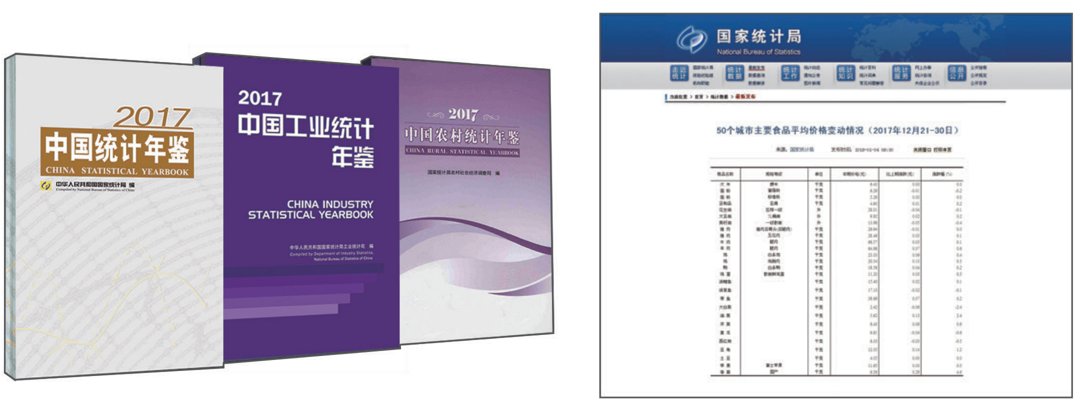


图 6.1－1

2. 数据的直接来源

虽然二手数据具有搜集方便、数据采集快、采集成本低等特点，但二手数据并不是为特定的研究问题而产生，因此仅仅靠二手数据往往还不能回答研究所提出的问题，再加上数据有可能过时或不准确，这时就要通过调查和实验的方法直接获得第一手数据.

调查通常是对社会现象而言的. 例如，经济学家通过搜集经济现象的数据来分析经济形势，社会学家通过收集有关人的数据以了解人类行为，管理学家通过收集生产、经营活动的有关数据以分析生产过程的协调性和效率，等等.

实验大多是对自然现象而言的. 例如，化学家通过实验了解不同元素结合后产生的变化，农学家通过实验了解水分、温度对农作物产量的影响，药学家通过实验验证新药的疗效，等等. 实验作为收集数据的一种科学方法，也广泛应用于社会科学中. 心理学、教育学、社会学、管理学的研究中大量使用实验的方法获取所需要的数据.

二 统计中的几个基本概念

1. 总体与个体

要进行统计调查，就必须先确定调查的对象. 在统计学中，我们把调查对象的全体叫作**总体**，把总体中的成员叫作**个体**.

总体中个体的某一特征总可以数字化. 为了叙述的简单和明确，我们把个体看成数量，把总体看成数量的集体.

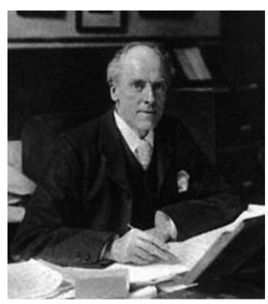
例如，要调查高一年级春季期中考试的数学成绩时，称高一年级的期中数学成绩是总体，称单个学生的数学成绩是个体. 还比如，要检验一批灯泡的使用寿命，这批灯泡的使用寿命就构成总体，某个灯泡的使用寿命就是一个个体.

2. 样本

从总体中抽取的一部分个体就称为总体的一个**样本**，样本也叫作观测数据，构成样本的个体数目称为**样本容量**，简称为**样本量**.

从总体中抽取样本的工作称为**抽样**. 抽样的目的是根据样本提供的信息推断总体的特征.

动物学家威尔顿于1892年在做海洋生物观测时，第一次使用了“样本”一词. 四年后，英国统计学家卡尔·皮尔逊第一次使用了“总体”一词，并于1903年将总体和样本联系在一起.



卡尔·皮尔逊

3. 普查与抽样调查

统计调查一般分为两种：普查与抽样调查.

普查，又称全面调查，即对需要调查的对象进行逐个调查. 普查所得的资料较为全面可靠，但普查的工作量很大，要耗费较大的人力、物力、时间等，并且有些数据是无法进行普查的，如调查某型号灯管的使用寿命、调查某型号炮弹的杀伤力等. 因此，在很多实际问题的调查中，常采用抽样调查的方法.

抽样调查是从调查对象的总体中，抽取若干个个体进行调查. 抽样调查可以把调查对象集中在少数个体上，并获得与全面调查相近的结果. 这是一种较经济的调查方法，因而被广泛采用.

普查与抽样调查最经典的例子莫过于中国人口调查.

中国人口普查与人口抽样调查

人口普查是当今世界各国广泛采用的搜集人口资料的最基本的方法，是提供全国基本人口数据的主要来源.

国务院颁布的《全国人口普查条例》规定，中国人口普查每 10 年进行一次，尾数逢 0 的年份为普查年度，标准时点为普查年度的 11 月 1 日零时.

为准确及时地掌握每年人口变动的情况，国家在两次全国人口普查之间设置了 1%人口抽样调查，一般是尾数逢 5 的年份进行调查. 国家统计局 2016 年 4 月 20 日发布的《2015 年全国 1%人口抽样调查主要数据公报》显示，这次全国 1%人口抽样调查以全国人口为总体，采取多种抽样方法，最终确定样本量为 2 131 万人，占全国总人口的 1.55%. 根据调查人口推算，全国大陆 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的人口为 137 349 万人. 同第六次全国人口普查的 133 972 万人相比，五年共增加 3 377 万人，增长 2.52%；其中男性人口为70 356 万人，占 51.22%，女性人口为 66 993 万人，占 48.78%. 总人口性别比(以女性为 100，男性对女性的比例)由第六次全国人口普查的 105.20 下降为 105.02. 全国共有家庭户 40 947 万户，家庭户人口为 126 935 万人，平均每个家庭户的人口为 3.10 人，与 2010 年第六次全国人口普查持平.

注：上述数据不包括香港、澳门特别行政区和台湾省.

练习

1. 指出下列统计调查的总体、样本、样本容量.

(1) 某市电力公司为确定本市阶梯电价的收费标准，拟从全市选取 2 000 个家庭进行调查；

(2) 某购物网站为研究顾客的满意度，拟选取 1 000 名消费者进行调查.

2. 以下调查中，哪些适宜普查，哪些适宜抽样调查？

(1) 调查某批次汽车的抗撞击能力；

(2) 了解某班学生的身高情况；

(3) 调查《春节联欢晚会》的收视率；

(4) 选出某校短跑最快的学生参加全市比赛.

习题 6.1

学而时习之

1. 获取数据的途径有哪些？试结合身边的统计活动分析如何获取数据.

2. 为调查参加运动会的 1 000 名运动员的年龄情况，从中抽查了 100 名运动员的年龄，下列说法正确的是(　　)

A. 1 000 名运动员是总体　　B. 每个运动员是个体

C. 抽取的 100 名运动员是样本　　D. 样本容量是 100

3. 要调查下面几个问题，你认为应该做全面调查还是抽样调查？

(1) 了解全班同学每周体育锻炼的时间；

(2) 调查市场上某种食品的色素含量是否符合国家标准；

(3) 鞋厂检测生产的鞋底能承受的弯折次数.

4. 试比较普查与抽样调查的优劣.

温故而知新

5. 数据的真实性.

当下，许多媒体充斥着各种各样的统计数字和图表. “让数据说话”成为许多广告的常用手法. 例如，某减肥药厂商做广告时声称，其生产的减肥药效果有效率达到 80%. 见到这样的广告数据你会怎么想？试与同学从各种媒体中收集一些广告，并用统计知识分析一下他们所提供的数据和结论的真实性. (提示：数据是谁收集的？怎样收集的？样本容量是多少？样本是如何选取的？这些数据是什么时候收集的？)

6.2 抽　样

统计调查，获取有效数据极为关键. 普查和抽样调查是获取数据的重要手段. 在许多实际问题中，当总体容量很大或检测过程具有一定的破坏性时，很难直接研究总体，这时可以通过从总体中抽取一个样本进行研究，然后根据样本的情况去估计总体的相应情况.

在日常生活中，人们总是自觉或不自觉地应用抽样方法. 例如，在市场上买花生或瓜子时总要先抓几颗看看是否饱满、干燥；在厨房煮汤时，为考察汤的味道，没必要把汤全喝完，而只要把汤搅拌均匀，从中品尝一勺就够了.

生活中的实例为我们进行抽样调查活动并收集数据提供了一些启发. 例如：

第一，“把汤搅拌均匀”是说明抽样的随机性，没有抽样的随机性，样本就不能很好地反映总体的情况.

第二，“品尝一勺”指出了选取的样本量不能太少，也不必太大. 太少了不足以品出味道，品尝一大碗也没有必要.

第三，“无论这锅汤有多少，只要一勺就够了”. 这里体现出抽样调查的如下基本性质：总体个数增大时，样本量不必按比例增大.

科学的抽样方法必须使样本具有代表性，也就是抽取的样本能客观反映总体的情况，没有人为的主观偏向. 如何科学地进行抽样呢?

6.2.1 简单随机抽样

如果在抽样过程中，能使总体中的每个个体都有相同的可能性被选入样本，那么这样的抽样叫作**随机抽样**. 随机抽样可以避免人为的主观偏向，使样本具有代表性.

人们经常用“**任取**”“**随机抽取**”或“**等可能抽取**”等来表示随机抽样.

随机抽样分为无放回的随机抽样和有放回的随机抽样. 例如，口袋中有质地相同的 10 个小球，分 3 种颜色. 从中无放回地随机抽取 1 个，共抽取 n 个($n \leqslant 10$)，这种抽样方法称为无放回的随机抽样. 从袋中每次随机抽取一球记录颜色后放回，共抽取 n 次，这样的抽样方法称为有放回的随机抽样.

在无放回的随机抽样下，同一个小球不会被抽中两次. 而在有放回的随机抽样下，同一个小球可能被抽中多次. 当样本量 $n=10$，采用无放回的随机抽样就可以

完全了解袋中小球的颜色分布情况，采用有放回的随机抽样并不能对袋中小球的颜色分布作出准确判断.

一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中无放回地抽取 $n(n\leqslant N)$ 个个体为样本，如果总体内的每个个体都有相同的可能性被抽到，则把这样的抽样方法称为**简单随机抽样**.

> 本书中所有的随机抽样都是指简单随机抽样.

我们把简单随机抽样得到的样本称为**简单随机样本**.

常用的简单随机抽样方法有抽签法和随机数法.

1. 抽签法

下面通过一个实例来说明：

高一(1)班计划从 50 名同学中抽取 5 名同学参加某项课外活动. 为保证每名同学被抽取的机会均等，我们可以把 50 名同学的学号写在小纸片上，然后将纸片揉成团放入一个不透明袋子中，充分摇匀后，从中无放回地抽出 5 个纸团并记下上面的学号. 这 5 个学号对应的同学就构成了一个简单随机样本.

我们可将抽签法的步骤简单总结如下：

①假设一个总体有 N 个个体，将它们逐一编号；

②制作 N 个号签(号签可以用小球、纸片等制作)，将编号写在号签上；

③将号签放在一个容器中，并充分搅拌均匀；

④从容器中任意抽取 n 个号签，记录其编号，就得到一个容量为 n 的样本.

2. 随机数法

下面通过一个实例来说明随机数法.

某中学为了解高一年级 500 名同学的视力情况，准备抽取 10% 的同学作为样本. 实现简单随机抽样的方法是先将 500 名同学从 1 到 500 进行编号，然后将 500 张编有 1 到 500 号的小纸片放入一个大纸箱中充分摇匀，最后从纸箱中无放回地抽取 50 张纸片. 纸片上的号码就是被选中的同学的号码. 纸片上的这 50 个数被称为**随机数**. 显然，此例中随着总体个数的增大，制签的过程将变得烦琐. 事实上，我们完全可以借助计算机产生随机数来解决这个问题.

下表是用计算机在 1～500 中随机产生的 50 个随机数：

476	116	304	243	446	382	229	17	411	223
308	396	461	370	89	203	468	459	206	447
29	177	407	5	95	70	102	109	302	137
100	8	374	224	466	233	210	424	263	106
337	420	10	341	190	416	252	355	215	153

接下来，我们按照上面随机数表中的号码选出对应编号的 50 名同学，测量他们的视力后，得到一个容量为 50 的简单随机样本.

简单随机抽样是一种最基本的抽样方法，是其他抽样方法的基础. 抽签法的突出特点是简单、直观，在总体个数不大时，使总体处于“搅拌均匀”的状态容易实现，这时，每个个体有均等的机会被抽中，从而能够保证样本的代表性. 但当总体中个体很多时，对个体编号的工作量很大，并且由于搅拌不均匀可能导致抽样的不公平. 采用随机数的方法可以克服这一问题.

练 习

1. 什么是样本的代表性?

2. 要从全班同学中随机抽取 10 人调查上周末课外阅读时间，试用抽签法进行抽取，并写出过程.

3. 某校高一年级有 600 名学生，为了解这些学生的身高状况，从中抽取一个容量为 60 的简单随机样本. 试借助计算机生成随机数表，完成这一抽样.

6.2.2 分层抽样

生活经验告诉我们，要了解一盘菜炒得好不好吃，一般只要随机品尝几口就可以下结论了，没有必要等到把菜吃完再作出结论. 但如果品尝的是西红柿炒鸡蛋，你进行随机品尝就不能只品尝西红柿或只品尝鸡蛋，这对你作出正确的判断是不利的. 你应当随机品尝一下西红柿，再随机品尝一下鸡蛋，然后进行综合评价. 这种品尝方法就是分层抽样方法.

当总体由差异明显的几个部分组成时，为了使抽取的样本更好地反映总体的情况，把总体中各个个体按照某种特征或某种规则划分为互不交叉的层，然后对各层按其在总体中所占比例独立进行简单随机抽样，这种抽样方法称为**分层抽样**.

例 1 某网络音乐平台就网络用户对某一特色栏目的喜爱程度进行调查，参与网络投票的总人数为 50 000. 网络用户对栏目的评价如下表所示：

星级评价	☆☆☆☆☆	☆☆☆☆	☆☆☆	☆☆	☆
票　数	9 986	15 607	14 885	6 034	3 488

该音乐平台为进一步了解用户的具体想法和意见，打算从上述 50 000 人中抽取 100 人进行电子邮件形式的调查，应怎样进行抽样?

分析　因为总体人数较多，不宜采用简单随机抽样. 又由于观众对栏目喜爱程

度差异较大，故应采用分层抽样.

解 采用分层抽样，其总体容量为 50 000.

“五星评价”占$\frac{9\ 986}{50\ 000}$，应抽取 $100\times\frac{9\ 986}{50\ 000}\approx20$(人)；

“四星评价”占$\frac{15\ 607}{50\ 000}$，应抽取 $100\times\frac{15\ 607}{50\ 000}\approx31$(人)；

“三星评价”占$\frac{14\ 885}{50\ 000}$，应抽取 $100\times\frac{14\ 885}{50\ 000}\approx30$(人)；

“二星评价”占$\frac{6\ 034}{50\ 000}$，应抽取 $100\times\frac{6\ 034}{50\ 000}\approx12$(人)；

“一星评价”占$\frac{3\ 488}{50\ 000}$，应抽取 $100\times\frac{3\ 488}{50\ 000}\approx7$(人).

即按照“五星评价”至“一星评价”分别抽取 20 人，31 人，30 人，12 人，7 人.

从上面的抽样过程可以看出，分层抽样保证了样本中包含有各种特征的抽样单位，样本的结构与总体的结构保持一致性，这对提高样本的代表性是非常重要的. 在后面学习用样本估计总体时，我们将会了解到分层抽样既可以对总体特征进行估计，也可以对各层的特征进行估计. 这些优点使分层抽样在实践中得到了广泛的应用.

前面介绍了简单随机抽样和分层抽样. 对一个实际问题而言，究竟用何种抽样为好应视具体情况而定. 我们简单归纳如下：

<table>
<tr><th>抽样类别</th><th>特　点</th><th>适用范围</th><th>共同点</th></tr>
<tr><td>简单随机抽样</td><td>从总体中随机抽取</td><td>总体中的个体差异不易分层</td><td rowspan="2">抽样过程中，每个个体被抽到的可能性相同</td></tr>
<tr><td>分层抽样</td><td>将总体分层，按各层个体数之比抽取，各层抽样时采用简单随机抽样</td><td>总体由差异明显的几个互不交叉的部分组成</td></tr>
</table>

例 2 下列问题中，采用哪种抽样方法较为合理?

(1) 某微波炉厂质量检查组为了解某批次 1 000 台微波炉的使用寿命.

(2) 每年 6 月 6 日是“全国爱眼日”. 某县卫生部门要调查该县中小学生视力保护情况，已知该县有小学生 12 000 名，初中生 10 000 名，高中生 6 000 名.

(3) 某校要调查该校九年级 400 名学生的身高和体重情况，以供该校营养师参考进而指导食堂伙食营养搭配.

解 (1) 由于总体容量较大，可采用随机数法进行抽样.

(2) 由于总体容量大，并且具有明显的层次性，因而应当先采用分层抽样，然

后再在每层采用随机数法进行抽样.

(3) 由于总体容量较大，男女学生在身高和体重方面又有较大的差异，所以应当先采用分层抽样，然后对男生和女生分别用抽签法进行抽样.

科学的抽样方法可以提高用样本估计总体的精度，关于历史上采取不正确的抽样方法而导致调查结论严重失真的教训，可参阅本小节的“数学文化”. 但影响精度的不仅有抽样方法，还有样本容量. 一般地，样本容量较大时，可以获得较精确的估计.

练习

1. 一个志愿者组织有男成员 48 人，其中 45 岁以上的有 12 人；有女成员 36 人，其中 45 岁以上的有 18 人.

(1) 如果按照性别进行分层抽样，要抽取一个容量为 21 的样本，那么男、女成员各应抽取多少人？

(2) 如果按照年龄进行分层抽样，要抽取一个容量为 28 的样本，那么 45 岁以上的成员应抽取多少人？

2. 某公司甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个，120 个，180 个，150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为(1)；在丙地区中有 20 个特大型销售点，要从中抽取 7 个调查其收入和售后服务等情况，记这项调查为(2). 完成(1)(2)这两项调查时，宜分别采用何种抽样方法？

多知道一点

调查问卷的设计

在统计调查中，调查问卷的设计是有一定讲究的，特别是对一些敏感性问题的调查，例如调查社区家庭暴力现象、单位是否违规经营、学生在考试中是否作弊等等．下面，我们结合实例来说明如何对敏感性问题进行调查．

某校高二年级共有 360 名学生．为了解该年级的学生在做数学作业前是否先复习相关的课堂内容，老师要进行一次抽样调查．如果已经用随机抽样的方式抽到了 100 个学生的学号，试问以下哪种调查方案较好？

（A）老师在课堂上询问并记录这 100 名学生的情况．

（B）采用问卷的方式对这 100 名学生进行调查．只需要他们在下面的匿名问卷上打钩，然后请被调查者将问卷交给老师．

问卷：请选择［做作业前先复习］　　　［做作业前不复习］
我们承诺没有人知道你的回答是什么．

（C）采用和(B)相同的调查方案，但是告诉被调查者要调查 100 名学生，而且让他们将答卷折叠后投入封闭的投票箱，全部调查完毕后再开箱统计．

（D）将(B)中的问卷夹入各自的数学作业本中上交．

分析　由于部分学生不愿意让别人知道自己在做作业前是否先复习相关的课堂内容，所以调查时应当让被调查者知道他的回答会得到保密．只有这样，调查才有可能获得事实真相．按照这个原则，方案(C)是其中较好的方案．

方案(A)忽略了被调查者的感受，容易得到有偏差的结果．

方案(B)和(D)忽略了有的被调查者不愿让老师知道自己的真实情况，因而可能不回答事实真相．

在抽样调查中，调查的方式方法也是非常重要的．无论是当面调查还是问卷调查都应当做到以下两点：

（1）提问的内容要简单明确．提问太长，会给回答带来困难和引起被调查者的反感，不利于得到正确的回答．

（2）用词要确切，通俗易懂，有礼貌，不用引导词语．

例如：

“您用什么牌子的牙膏？”时间范围不明确，应改为“您现在用什么牌子的牙膏？”；

“很多人都要买汽车，您呢？”带有引导性，应改为“您最近打算买汽车吗？”．

习题 6.2

学而时习之

1. 调查本地出租车司机的月平均收入时，在街面上进行随机抽样调查，得到的样本是简单随机样本吗？

2. 某县有 50 个加油站，质监部门计划从中抽取 25 个加油站调查其加油机是否合格，你能帮助该部门设计随机抽样方案吗？

3. 某校 1 000 名学生中，O 型血有 410 人，A 型血有 280 人，B 型血有 240 人，AB 型血有 70 人．为了研究血型与色弱的关系，需从中抽取一个容量为 100 的样本，应怎样抽取样本？

4. 学校要在高一年级 450 名同学中随机选取 45 人参加暑假的夏令营，试完成以下工作：

(1) 设计一个随机抽样方案；

(2) 设计一个分层抽样方案，使得选取出男生 23 名，女生 22 名；

(3) 如果全年级有 9 个班，设计一个分层抽样方案，使得各班随机选取 5 人．

温故而知新

5. 在调查某个城市的家庭年平均收入时，能否只在该市的娱乐场所(如电影院、歌剧院、游乐场、健身馆等)进行随机抽样？原因是什么？能否只在该市的公共汽车站进行随机抽样？原因是什么？

6. 某单位最近组织了一次健身活动，活动分为登山组和游泳组，且每个职工至多参加其中一组．在参加活动的职工中，青年人占 42.5%，中年人占 37.5%，老年人占 20%．登山组的职工占参加活动总人数的三分之一，且该组中，青年人占 50%，中年人占 30%，老年人占 20%．为了解各组不同年龄层次的职工对本次活动的整体满意程度，现用分层抽样的方法从参加活动的全体职工中抽取一个容量为 200 的样本．试确定：

(1) 游泳组中，青年人、中年人、老年人分别所占的比例；

(2) 游泳组中，青年人、中年人、老年人分别应抽取的人数．

7. (数学探究活动)对本年级同学每天完成作业的时间进行一次抽样调查，规定样本量 $n=100$，试设计一个合理的调查方案和一份调查问卷（参见“多知道一点”），并具体实施一次抽样调查工作．

《文学摘要》的破产

1936 年是美国总统选举年．这年罗斯福任美国总统期满，参加第二届的连任竞选，对手是堪萨斯州州长兰登．当时美国刚从经济大萧条中恢复过来，失业人数仍高达 900 多万，人们的经济收入下降 1/3 后开始逐步回升．当时，观察家们普遍认为罗斯福会当选．而美国的《文学摘要》杂志的调查却预测兰登会以 57％对 43％的压倒性优势获胜．《文学摘要》的预测是基于对 240 万选民的民意调查得出的．自 1916 年以来，在历届美国总统的选举中《文学摘要》都做了正确的预测．《文学摘要》的威信有力地支持着它的这次预测．但是选举的结果却是罗斯福以 62％对 38％的压倒性优势获胜．此后不久《文学摘要》杂志就破产了．

要了解《文学摘要》预测失败的原因就必须检查他们的抽样调查方案．《文学摘要》是将问卷寄给了 1 000 万选民，这些选民的地址是在诸如电话簿、俱乐部会员名单等上面查到的．

分析　1936 年只有大约 1/4 的家庭安装了电话．由于有钱人才更有可能安装家庭电话和参加俱乐部，所以《文学摘要》的调查方案漏掉了那些不属于俱乐部的穷人和没有安装电话的穷人，这就导致了调查结果有排除穷人的偏向．

在 1936 年，由于经济开始好转，穷人普遍有赞同罗斯福当选的倾向，富人有赞同兰登当选的倾向．《文学摘要》的调查结果更多地代表了富人的意愿，导致了预测的失败．

评论　抽样的方案应当公平地对待每一位选民和每一个群体，以便得到选民的真实情况．将哪一个群体排除在外的抽样方案都会得到有偏差的样本，从而导致错误的结论．

同一年，刚刚成立的盖洛普调查公司正确地预测了罗斯福获胜．以后，盖洛普公司做过多次美国总统大选的民意调查．由于采取了正确的抽样设计方案，在调查人数不是很多的情况下，预测的结果都是成功的．

6.3 统计图表

通过统计调查得到的原始数据，一般都是杂乱无章的，既不便于阅读，也不便于理解和分析. 人们借助统计图表对获取的原始数据加以整理，并用简明醒目的方式加以表述，这将使得这些数据变得一目了然、清晰易懂. 一张好的统计图表，往往胜过冗长的文字表述.

下面，我们结合案例进一步认识统计图表在整理数据中的作用.

案例 1 为研究不同类型饮料的市场销售情况，一家市场调查公司对随机抽取的一家超市进行调查. 表 6 - 1 是调查员随机观察 50 名顾客购买饮料类型的记录：

表 6 - 1

顾客性别	饮料类型	顾客性别	饮料类型	顾客性别	饮料类型	顾客性别	饮料类型	顾客性别	饮料类型
男	碳酸饮料	女	矿泉水	女	碳酸饮料	女	其　他	男	碳酸饮料
女	茶饮料	男	其　他	女	茶饮料	男	碳酸饮料	女	果　汁
男	矿泉水	男	碳酸饮料	男	茶饮料	女	果　汁	女	矿泉水
女	矿泉水	女	茶饮料	男	碳酸饮料	男	矿泉水	男	碳酸饮料
女	碳酸饮料	女	碳酸饮料	女	碳酸饮料	男	其　他	男	茶饮料
男	矿泉水	女	其　他	女	茶饮料	女	碳酸饮料	女	其　他
男	碳酸饮料	男	矿泉水	男	矿泉水	女	其　他	男	果　汁
女	茶饮料	女	碳酸饮料	女	茶饮料	男	果　汁	男	茶饮料
女	果　汁	男	茶饮料	男	碳酸饮料	女	茶饮料	女	其　他
男	碳酸饮料	男	其　他	女	矿泉水	女	果　汁	男	矿泉水

（1）试根据上述抽样信息，绘制频数分布表.

（2）试用扇形统计图、条形统计图来表示顾客购买不同类型饮料的情况.

解　(1) 将样本数据按类型分类整理，制成如下频数分布表：

饮料类型	购买数量(频数)		合　计
	男	女	
果　汁	2	4	6
矿泉水	6	4	10
茶饮料	4	7	11
碳酸饮料	9	6	15
其　他	3	5	8
合　计	24	26	50

从频数分布表可以看出，样本中购买碳酸饮料的顾客最多，购买矿泉水和茶饮料的顾客较多，而购买果汁的顾客最少．我们还可以从男女性别的角度来作出一些判断，请尝试说出你的分析结果．

(2) 为了直观地看出顾客购买饮料类型的情况，可以借助扇形统计图来予以呈现，如图 6.3 - 1.

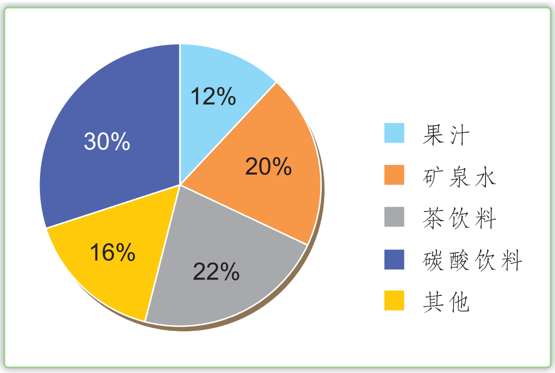
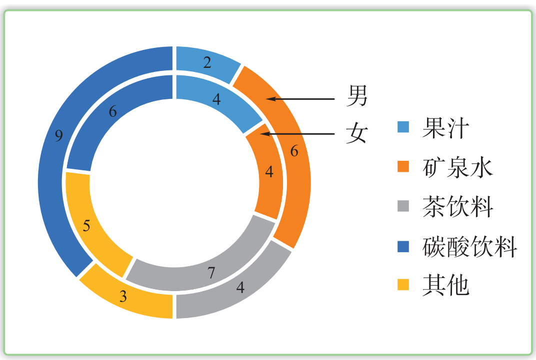


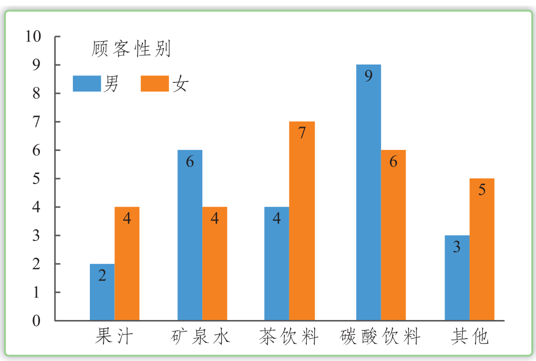
图 6.3 - 1

在扇形统计图中，我们用圆形及圆内扇形的角度来表示一个样本（或总体）中各组成部分的数据占整体数据的比例．这对于研究结构性问题十分有用．

为了综合体现顾客性别对选购饮料类型的差异，可以借助复式扇形统计图以及复式条形统计图来予以呈现，如图 6.3 - 2．



(1)



(2)

图 6.3 - 2

根据图 6.3－2，可以分析出该超市男、女顾客对饮料类型的喜爱程度．例如女性顾客更多购买茶饮料，而男性顾客更多购买碳酸饮料，等等．

若数据是在不同时间上取得的，则可以借助折线统计图清晰地反映数据的发展变化趋势．

案例 2 据国家统计局年鉴，我国城乡居民 2006—2016 年国内游人数如表 6－2 所示（不包括香港、澳门特别行政区和台湾省），试根据数据绘制折线统计图．

表 6－2

年　份	城镇居民国内游人数/（$\times 10^6$ 人次）	农村居民国内游人数/（$\times 10^6$ 人次）
2006	576	818
2007	612	998
2008	703	1 009
2009	903	999
2010	1 065	1 038
2011	1 687	954
2012	1 933	1 024
2013	2 186	1 076
2014	2 483	1 128
2015	2 802	1 188
2016	3 195	1 240

解 由表中数据在直角坐标系中描点，并用线段依次连接各点得到折线统计图，如图 6.3－3．

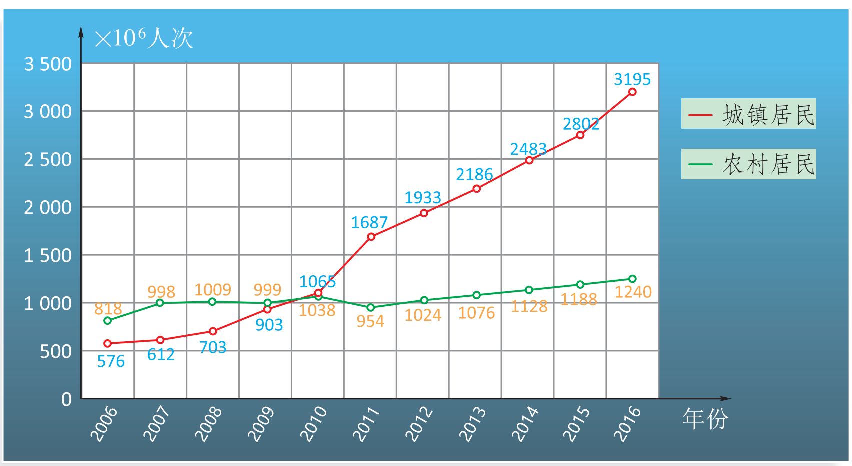


图 6.3－3

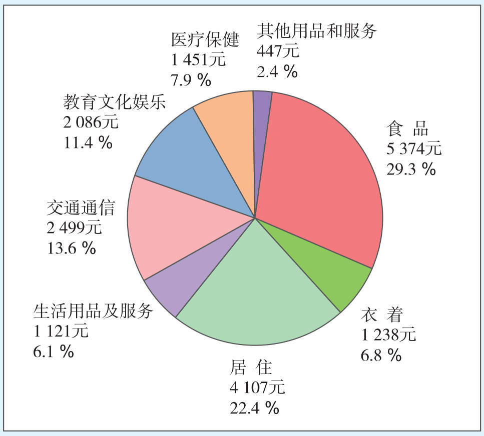
从图 6.3-3 可以清楚地看出，城乡居民国内游人数逐年提高，2006—2009 年，农村居民国内游人数多于城镇居民；2010—2016 年，城镇居民国内游人数超出农村居民，并且这种差距有扩大的趋势．

练习

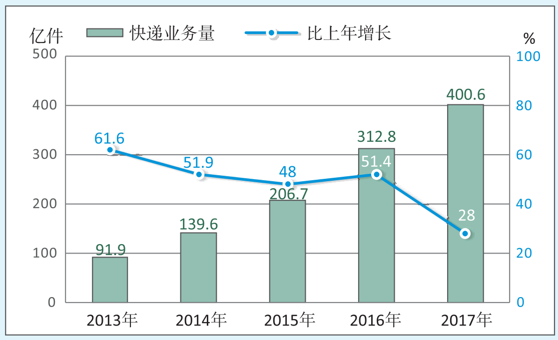
1. 收集本班同学课外阅读图书的类型数据，并制作扇形统计图和条形统计图.

2. 下列统计图分别摘自国家统计局网站，试说明这些统计图所表达的意义．充分利用该网站的数据资源就自己感兴趣的话题主动搜集数据，并适当整理，制作统计图表.

2017年全国居民人均消费支出及其构成



2013—2017年全国快递业务量及其增长速度



（第 2 题）

从一个总体得到一个包含大量数据的样本时，我们很难直接看出样本所包含的信息．在初中，我们已经知道频数分布表和频数分布直方图能直观、清晰地展示样本数据的分布规律．下面，我们结合一个案例来学习频率分布直方图.

案例 3 下面是某城市公共图书馆在一年中通过随机抽样调查得到的 60 天读者借书量(单位：册)，并排序如下：

213	230	239	289	291	301	308	310	311	312
318	318	337	343	344	348	349	351	360	362
368	372	374	379	383	385	390	393	396	398
399	400	404	406	425	429	430	436	438	440
441	444	446	453	456	458	471	473	475	483
484	495	498	498	521	524	549	556	568	584

为估计图书馆每天借书量的分布情况，以便合理安排工作人员，试根据以上数据制作一个频率分布表以帮助分析.

（1）计算极差（即一组数据中最大值与最小值的差）

样本数据中最小值是 213，最大值是 584. 它们的极差是 371.

（2）确定组距和组数

这 60 个数据散布在闭区间[213，584]上. 为了分组的方便，我们取一个略大的区间[200，600)，然后将该区间分成若干组. 若取组距为 50，那么

$$组数=\frac{极差}{组距}=\frac{371}{50}=7.42,$$

因此可以将数据分为 8 组.

一般来讲，当样本量为 n 时，可以参考经验公式 $K=1+4\lg n$ 将数据分成 K 组. 实际应用时，应当根据样本量的大小、数据的特点以及分析的要求来灵活确定.

（3）将数据分组

将[200，600)八等分，所分 8 组为：

[200，250)，[250，300)，[300，350)，[350，400)，[400，450)，[450，500)，[500，550)，[550，600).

（4）列频率分布表

当样本量是 n 的观测数据中有 n_i 个落入第 i 组时，我们称 $f_i=\frac{n_i}{n}$ 是第 i 组的**频率**. 计算出数据落入各组的频率为

$$f_1=\frac{3}{60}=5\%,\ f_2=\frac{2}{60}\approx 3.3\%,\ \cdots,\ f_8=\frac{3}{60}=5\%,$$

列出频率分布表，如表 6－3 所列.

表 6－3

分　组	发生天数(频数) n_i	频率 f_i
[200，250)	3	5%
[250，300)	2	3.3%
[300，350)	12	20%
[350，400)	14	23.3%
[400，450)	12	20%
[450，500)	11	18.3%
[500，550)	3	5%
[550，600)	3	5%
总　计	60	100%

表 6－3 体现了样本数据落在各个小组的比例大小，从中可以看到，借书量在[350,400)内的天数最多，在[300，350)和[400，450)内的天数次之，大部分借书量集中在[300，500)之间.

数据的频率分布表初步展示了数据分布的一些规律．如果用图形来表示频率分布表就会更加形象和直观．例如，在直角坐标系中，用横轴表示读者借书量，纵轴表示频数，就可得到我们在初中学习过的频数分布直方图，如图 6.3－4．

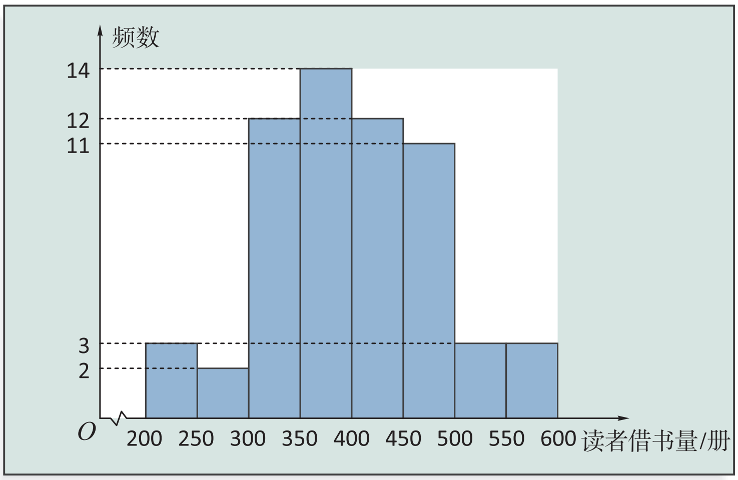


图 6.3－4

如果我们在直角坐标系中，用横轴表示读者借书量，纵轴表示$\dfrac{频率}{组距}$，将各分组的端点画在横轴上，用 $g_i=\dfrac{f_i}{组距}$ 作为小矩形的高，就得到由相连小矩形构成的图形．这样的图形称为**频率分布直方图**．如图 6.3－5．

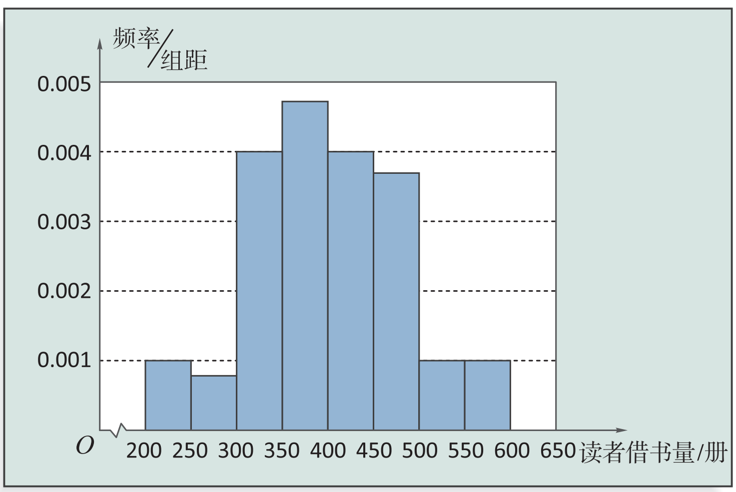


图 6.3－5

图 6.3－5 中，每个小矩形的面积＝组距×$\dfrac{频率}{组距}$＝频率，所以各个小矩形的面积表示相应各组的频率，这样，频率分布直方图就以面积的形式反映了数据落在各个小组的频率的大小，并且容易知道，在频率分布直方图中各小矩形的面积之和等于 1．

从频率分布直方图可以直观地发现样本的一些分布规律，如在 375 附近达到“峰值”，并具有一定的对称性，这说明借书量在 375 册附近较为集中．另外还可以看出，特别少和特别多的借书量很少．

如果将频率分布直方图中的左边和右边各延长一个分组，取各相邻小矩形上底边的中点，用线段顺次连接各点，就得到**频率分布折线图**. 频率分布折线图也反映出数据频率分布的规律. 图 6.3－6 是图书馆读者借书量的频率分布折线图.

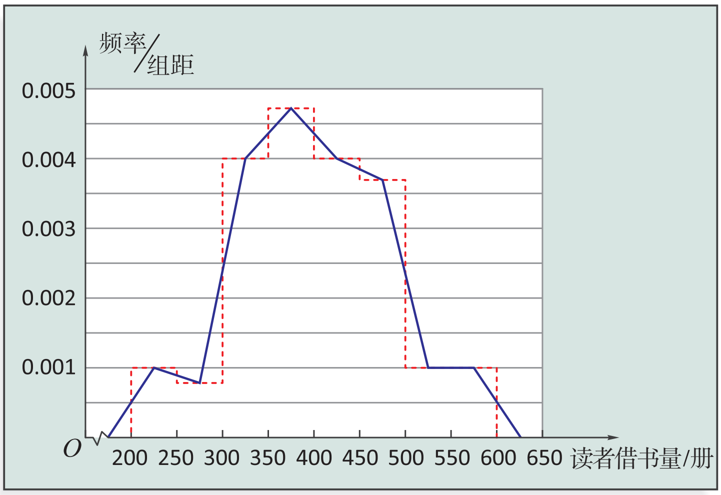


图 6.3－6

统计图表是展示数据的有效工具，通过制作统计图表可使杂乱的数据有条理地、形象地显示出来，这将为研究实际问题，做好统计分析打下良好的基础.

练 习

1. 试比较频数分布直方图与频率分布直方图的异同.

2. 同样一组数据，如果组距不同，得到的频率分布直方图的形状也会不同. 结合课本中图书馆借书实例，以 40 为组距重新作图，试比较前后图的不同.

3. 一种袋装食品用生产线自动装填，每袋质量大约为 50 g，但由于某些原因，每袋食品不会恰好是 50 g. 现随机抽取 100 袋食品，测得的质量数据如下：

单位：g

57	46	49	54	55	58	49	61	51	49
51	60	52	54	51	55	60	56	47	47
53	51	48	53	50	52	40	45	57	53
52	51	46	48	47	53	47	53	44	47
50	52	53	47	45	48	54	52	48	46
49	52	59	53	50	43	53	46	57	49
49	44	57	52	42	49	43	47	46	48
51	59	45	45	46	52	55	47	49	50
54	47	48	44	57	47	53	58	52	48
55	53	57	49	56	56	57	53	41	48

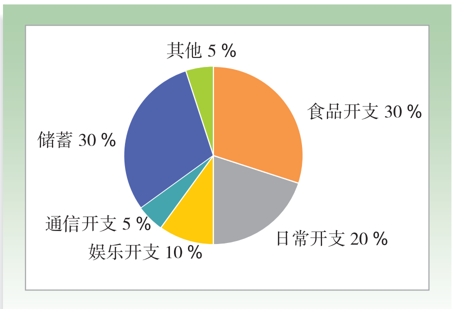
（1）为了获得样本数据的分布情况，试制作频率分布表；

（2）绘制频率分布直方图及频率分布折线图.

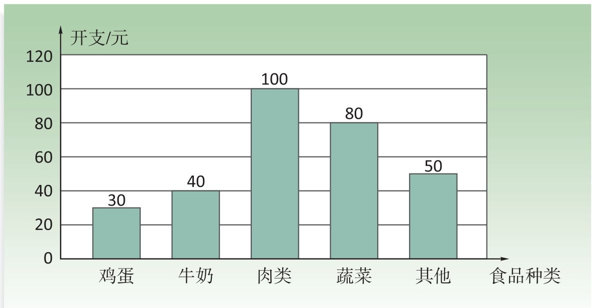
习题 6.3

学而时习之

1. 小敏一星期的总开支分布如图(1)所示，一星期的食品开支如图(2)所示，则小敏一星期的鸡蛋开支占总开支的百分比为多少？



(1)



(2)

（第 1 题）

2. 20 世纪初，人们将驼鹿引入美国密歇根湖的一座孤岛. 该种群从 1915 年到 1960 年的数量变化情况如下表：

年　份	1915	1917	1921	1925	1928	1930	1934	1943	1947	1950	1960
驼鹿种群数量/只	200	300	1 000	2 000	2 500	3 000	400	170	600	500	600

(1) 用统计图表示该种群数量随时间变化的情况.

(2) 从 1915 年到 1930 年，该种群数量不断增加，可能的原因有哪些？

(3) 该种群的数量后来急剧下降，可能的原因有哪些？

3. 某出租车公司随机调查该公司 50 辆出租车某天 8:00—18:00 的营业额（单位：元)情况，结果如下：

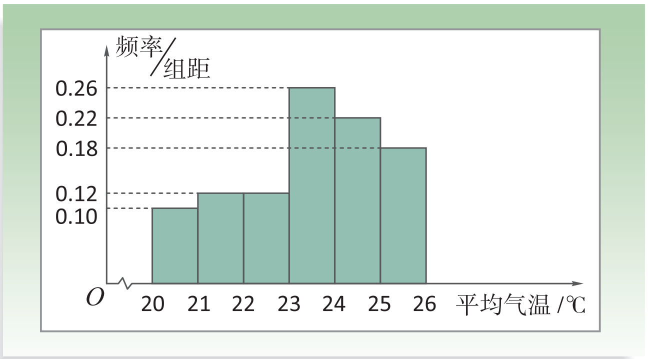
单位：元

259	294	295	297	300	300	300	301	301	302
303	306	308	309	311	314	315	315	321	323
327	328	331	334	336	339	339	339	347	348
350	350	352	355	359	359	361	363	370	376
377	383	388	389	390	396	404	410	410	411

(1) 试根据以上数据制作频率分布表；

(2) 绘制频数分布直方图和频率分布直方图，并比较两者的异同.

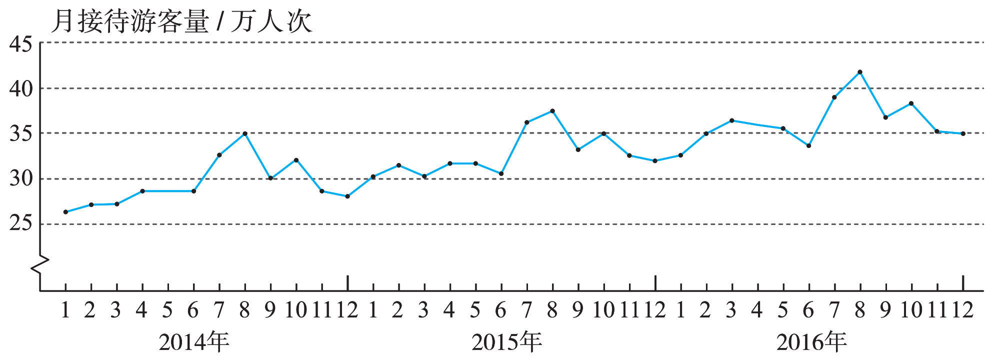
4. 如图是根据我国部分城市某年 6 月份的平均气温数据得到的样本频率分布直方图，其中平均气温的范围是[20，26]，样本数据的分组为[20，21)，[21，22)，[22，23)，[23，24)，[24，25)，[25，26]. 已知样本中平均气温低于 22 ℃的城市个数为 11，求样本中平均气温不低于 25 ℃的城市个数.



（第 4 题）

温故而知新

5. 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量的数据，绘制了下面的折线图.



（第 5 题）

根据该折线图，下列结论正确的有________.

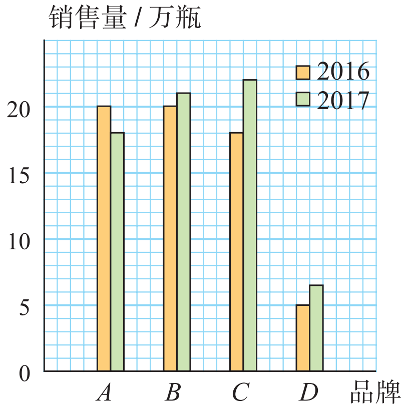
(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

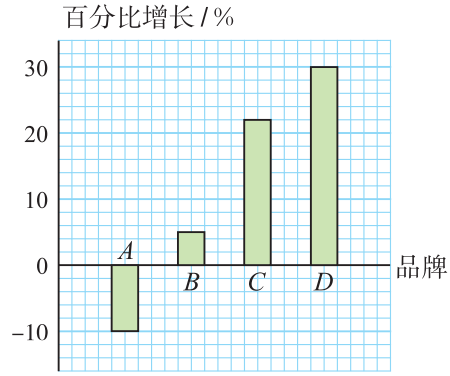
(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7—8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

6．如图(1)为四种不同品牌的食用油 2016 年和 2017 年的销售量.



(1)

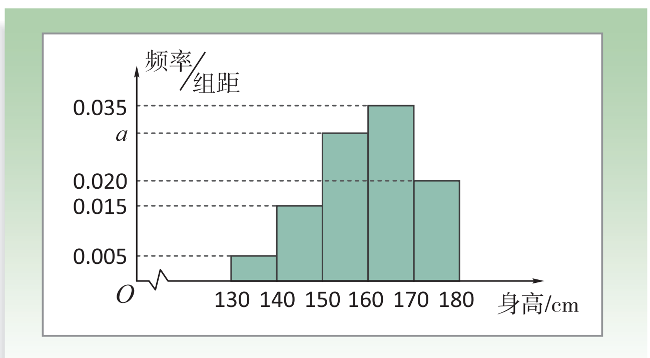


(2)

（第 6 题）

D 牌食用油生产商在媒体上刊登了如图(2)所示的统计图广告，并声称：“D 牌食用油销量增长惊人，绝对是您的首选!”试判断 D 牌食用油生产商的广告语是否合理.

7．从某中学随机抽取 100 名同学，将他们的身高数据(单位：cm)绘制成频率分布直方图(如图). 若要从身高在[150，160)，[160，170)，[170，180)三组内的学生中，用分层抽样的方法选取 16 人参加一项活动，则从身高在[170，180)内的学生中选取的人数应为多少?



（第 7 题）

8．调查本班每名同学本周六体育锻炼的时间，并作出这组数据的频率分布表、频率分布直方图.

利用计算机制作统计图表

当需要处理大量数据或绘制准确度较高的统计图表时，利用计算机软件是一种方便又快捷的方法. Excel 是其中一种最常用的绘制统计图表的软件，可以用来做数据统计、制表、数据分析等.

我们以 6.3 节案例 1 的样本数据为例，利用 Excel 生成频数分布表. 首先将表 6-1 的表头和数据，以行(或列)的方式整体输入 Excel 中，然后用鼠标选中这些数据单元格，单击【数据】菜单中的【数据透视表和数据透视图】，根据对话框的提示，单击完成就可得到“数据透视表”，如图 1 为不同类型饮料和顾客性别的频数分布表.

	A	B	C	D	E	F	G
1	顾客性别	饮料类型					
2	男	碳酸饮料		计数项:饮料类型	顾客性别		
3	女	茶饮料		饮料类型	男	女	总计
4	男	矿泉水		茶饮料	4	7	11
5	女	矿泉水		果汁	2	4	6
6	女	碳酸饮料		矿泉水	6	4	10
7	男	矿泉水		其他	3	5	8
8	男	碳酸饮料		碳酸饮料	9	6	15
9	女	茶饮料		总计	24	26	50
10	女	果汁					
11	男	碳酸饮料					
12	女	矿泉水					
13	男	其他					
14	男	碳酸饮料					
15	女	茶饮料					

图 1

根据数据分析的需求，我们还可以利用 Excel 绘制不同类型的统计图，比如条形图、折线图、扇形图、散点图等，其操作步骤大致相同：选中输入的数据，单击工具栏(或【插入】菜单)中的“图表”标识，按照图表向导进行相应操作，即可得到不同类型的统计图(如图 2). 请同学们借助软件绘制 6.3 节案例 2、案例 3 的统计图.

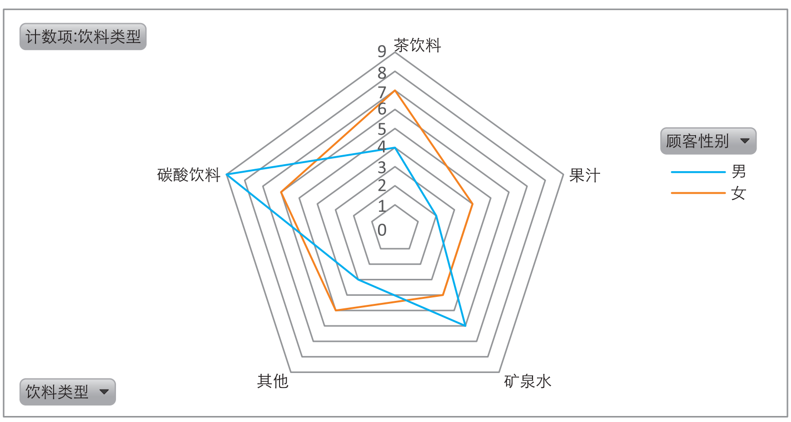


图 2

6.4 用样本估计总体

前面我们学习了收集、整理和描述统计数据的一些基本方法. 通过对统计数据的整理和描述，我们对客观事物的概貌有了一个了解，但这还不够，我们还需要选择适当的统计方法分析数据，并从数据中提取有用信息进而了解数据背后的规律.

我们在研究一个对象时，往往不是那么容易获取其全部数据，这时，可以采用随机抽样的方法在总体中抽取样本. 由于样本是从总体中抽取的部分数据，因而样本蕴含着总体的许多信息，这使得我们有可能通过样本的某些特性去估计总体的相应特征. 通常包括用样本的数字特征(如平均数、方差)估计总体的数字特征，用样本的频率分布估计总体的分布，而这就是本节要学习的主要内容.

在初中，我们已经学习了反映一组数据的集中趋势或离散程度的数字特征，如平均数、中位数、众数、方差等. 为便于叙述的展开，先介绍几个统计概念.

参数是用来描述总体特征的指标. 常见的总体参数有总体平均数、众数和中位数以及总体方差等等. 在统计中，总体参数通常用希腊字母表示. 如总体平均数用 μ(音 miù)表示.

统计量是用来描述样本特征的指标. 它是根据样本计算出来的量. 常见的统计量有样本平均数、样本方差等. 统计量通常用英文字母来表示，如样本平均数用 $\bar{x}$ 表示. 接下来，我们将结合案例进一步学习一些常用的统计量，并用它来估计总体参数，体会用样本估计总体的统计思想.

6.4.1 用样本估计总体的集中趋势

一 平均数

平均数也称为均值，在统计学中具有重要的地位，是刻画一组数据集中趋势最主要的指标. 若样本容量为 n，第 i 个个体是 x_i，则样本平均数

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

总体均值是总体的指标，是一个固定的量. 而样本均值依赖于样本的选择，不

同的样本通常有不同的样本均值．所以我们说样本均值带有随机性．

实践和理论都表明：在随机抽样的前提下，当样本容量增加时，样本均值 $\overline{x}$ 会向总体均值 μ 接近．于是，称 $\overline{x}$ 为 μ 的估计．

例 1 一种产品需要人工组装，现有 A，B 两种可供选择的组装方法．为检验哪种方法生产效率更高，现随机抽取 29 名工人并随机分成两组：第一组 14 人，采用方法 A 组装；第二组 15 人，采用方法 B 组装．让两组工人在相同的时间内组装产品，得到产品数量(单位：个)如下表所示：

方法 A	126	129	129	130	131	127	129	127	128	128	127	128	128	125	
方法 B	129	125	126	126	119	126	128	127	126	127	127	126	126	127	125

哪种组装方法的效率更高？

分析 平均数刻画了一组数据的平均水平．当我们要比较组装方法在相同时间内的效率时，可以分别计算用不同组装方法得到的产品数量的平均数，再通过平均数来进行比较．

解 设两组工人采用方法 A，B 组装的平均产量分别为 $\overline{x}_A$，$\overline{x}_B$，则

$$\overline{x}_A=\frac{126+129+129+\cdots+125}{14}=128(\text{个})，$$

$$\overline{x}_B=\frac{129+125+126+\cdots+125}{15}=126(\text{个}).$$

由于在相同时间内，方法 A 的平均产量高于方法 B 的平均产量，所以我们可以认为方法 A 的效率更高．

例 2 表 6－4 是某地统计局调查 100 个家庭月均用水量(单位：t)的频率分布表，试估计该地家庭的月均用水量．

表 6－4

分　组	频　数	频　率
[0，0.5)	4	0.04
[0.5，1)	8	0.08
[1，1.5)	15	0.15
[1.5，2)	22	0.22
[2，2.5)	25	0.25
[2.5，3)	14	0.14
[3，3.5)	6	0.06

续表

分　组	频　数	频　率
[3.5，4)	4	0.04
[4，4.5)	2	0.02
合　计	100	1.00

分析　要确定这100个家庭的月均用水量，就必须计算其总用水量. 由于每组中的个体月用水量只是一个范围，因此可用各组区间的组中值(位于各组中央的值)近似地表示.

解　(方法一) 100个家庭的月总用水量约为

0.25×4+0.75×8+1.25×15+1.75×22+2.25×25+2.75×14+ 3.25×6+3.75×4+4.25×2 =202(t)，

$$202\div100=2.02(\mathrm{t}).$$

因此估计该地家庭的月均用水量为2.02 t .

(方法二) 求组中值与对应频率之积的和.

$$\begin{aligned}\bar{x}&=0.25\times0.04+0.75\times0.08+1.25\times0.15+1.75\times0.22+2.25\times0.25+2.75\times0.14+3.25\times0.06+3.75\times0.04+4.25\times0.02\\&=2.02(\mathrm{t}),\end{aligned}$$

因此估计该地家庭的月均用水量为2.02 t .

例2在计算平均数时，是用各组的组中值代表各组的实际数据. 使用组中值进行计算的前提是假定各组数据在组内的分布是均匀的.

一般地，若取值为 x_1，x_2，…，x_n 的频率分别为 f_1，f_2，…，f_n，则其平均数为 $x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n$.

例3　某市进行家庭年收入调查时，分别对城镇家庭和农村家庭进行调查. 在全部城镇的85 679户中无放回地随机抽取了350户，在全部农村的275 692户中无放回地随机抽取了360户. 调查结果为：城镇家庭年平均收入是35 612元，农村家庭年平均收入是5 623元. 试估计该市家庭年平均收入.

解　统计调查使用了分层抽样. 设总体 A 表示该市所有家庭的年收入，总体 A 分为两层：第一层 A_1 对应所有城镇家庭的年收入，第二层 A_2 对应所有农村家庭的年收入.

用 $\bar{x}_1$ 表示来自总体 A_1 的样本均值，用 $\bar{x}_2$ 表示来自总体 A_2 的样本均值，则 $\bar{x}_1=35\ 612$，$\bar{x}_2=5\ 623$.

A_1 在 A 中所占的比例是

$$W_1=\frac{85\ 679}{85\ 679+275\ 692}\approx0.237\ 1.$$

A_2在 A 中所占的比例是

$$W_2=\frac{275\ 692}{85\ 679+275\ 692}\approx 0.762\ 9.$$

所以 A 的总体均值的估计是

$$\begin{aligned}\overline{X}&=W_1\overline{x}_1+W_2\overline{x}_2\\&=0.237\ 1\times 35\ 612+0.762\ 9\times 5\ 623\\&\approx 12\ 733.\end{aligned}$$

即该市家庭年平均收入的估计是 12 733 元.

在分层抽样中，用 N 表示总体 A 的个体总数，若将总体 A 分为 L 层，用 N_i表示第 i 层($i=1$，2，…，L)的个体总数，则有

$$N=N_1+N_2+\cdots+N_L.$$

我们称

$$W_i=\frac{N_i}{N}(i=1,2,\cdots,L)$$

为第 i 层的**层权**.

对 $i=1$，2，…，L，用 $\overline{x}_i$表示从第 i 层抽出样本的均值. 我们称

$$\overline{X}=W_1\overline{x}_1+W_2\overline{x}_2+\cdots+W_L\overline{x}_L$$

是总体均值 μ 的**简单估计**.

分层抽样在获得总体均值估计的同时，也得到各层的均值估计. 在例 3 中，不但得到了 A 的均值估计，还得到了 A_1和 A_2的均值估计.

练 习

1. 为了保护学生的视力，教室内的日光灯管使用一段时间后必须更换. 已知某校教室内共有 500 根日光灯管，后勤部门随机统计了其中 100 根日光灯管在必须换掉前的使用天数，结果如下：

天　数	151～180	181～210	211～240	241～270	271～300	301～330	331～360	361～390
灯管数	1	11	18	20	25	16	7	2

(1) 试计算这 100 根灯管的平均使用天数；

(2) (1)题的结果是总体均值吗?

2. 某中学高中学生有 500 人，其中男生有 320 人，女生有 180 人. 现在从男生中随机抽取 32 人，测得他们的平均身高为 173.5 cm；从女生中随机抽取 18 人，测得她们的平均身高为 163.83 cm . 试估计总体身高均值.

二 众数、中位数

1. 众数

我们称观测数据中出现次数最多的数是**众数**，用 M_o 表示.

按照这个定义，在抽样调查中，样本中出现次数最多的数是样本的众数. 如果观测数据中每个数出现的次数都相同，它就没有众数. 一组数据可以有两个或多个众数.

众数作为一组数据的代表，能反映一组数据的集中趋势.

例如，某鞋店店主统计了一个月内销售各种尺码男鞋的数据，如下表所示：

鞋的尺码/cm	23	23.5	24	24.5	25	25.5	26	26.5
销售量/双	5	6	6	10	17	10	12	7

从统计表可以看出，一个月内销售量最多的男鞋尺码是 25 cm，即众数 $M_o=25$，这组数据的平均数 $\bar{x}=24.97$，此时，用平均数作为这组数据的代表值是没有实际意义的，而用众数作为顾客对男鞋所需尺寸的集中趋势的体现既便捷又符合实际.

众数是一个位置代表值，它不受数据组中极端值的影响.

2. 中位数

将一组观测数据按从小到大的顺序排列后，我们称处于中间位置的数是**中位数**，用 M_e 表示.

具体而言，当数据的个数是奇数时，处于中间位置的数就是中位数；当数据的个数是偶数时，则中间两个数的平均数即为中位数.

由中位数的定义可知，所研究的数据中有一半小于或等于中位数，一半大于或等于中位数.

中位数的作用与算术平均数有些相近，可以用来表示总体的“中等”水平，因此中位数作为一组数据的代表，也能反映一组数据的集中趋势.

例如，某公司共有 10 名职工，他们的年薪分别是 1.5 万元，2 万元，2 万元，2.9 万元，3.6 万元，3.8 万元，4.6 万元，5 万元，6 万元，8 万元，则 $M_e=\frac{3.6+3.8}{2}=3.7$(万元). 年薪的中位数 3.7 万元表示该公司的中等工资水平.

中位数不受数据组中极端值的影响，从而具有较好的稳定性. 由于中位数是一种位置的平均数，因此世界许多国家或地区在分析人口统计数据时，常将年龄中位数作为分析人口年龄分布状况和集中趋势的重要指标.

3. 众数、中位数和平均数的比较

众数、中位数和平均数均能反映数据的集中趋势，而它们作为一组数据的代表又具有不同的特点．我们应当根据问题的需要，选择合适的统计量来描述数据的集中趋势．

例 4 某公司全体职工的月工资如下：

月工资/元	18 000	12 000	8 000	6 000	4 000	2 500	2 000	1 500	1 200
人　数	1（总经理）	2（副总经理）	3	4	10	20	22	12	6

（1）试求出该公司月工资数据中的众数、中位数和平均数．

（2）你认为用平均数、中位数或众数中的哪一个更能反映该公司的工资水平？

（3）对于职工月工资数据的平均数、中位数和众数，你认为该公司总经理、普通员工及应聘者将分别关注哪一个？说说你的理由．

解　（1）在上述 80 个数据中，2 000 出现了 22 次，出现的次数最多，因此这组数据的众数是 2 000．

把这 80 个数据按从小到大的顺序排列后，位于中间的数是 2 000，2 500，因此这组数据的中位数是$\dfrac{2\ 000+2\ 500}{2}=2\ 250$．

这组数据的平均数为

$$\bar{x}=\frac{18\ 000+12\ 000\times2+8\ 000\times3+\cdots+1\ 200\times6}{80}$$

$$=\frac{249\ 200}{80}=3\ 115.$$

我们把这组数据的众数、中位数、平均数表示在图 6.4－1 中．

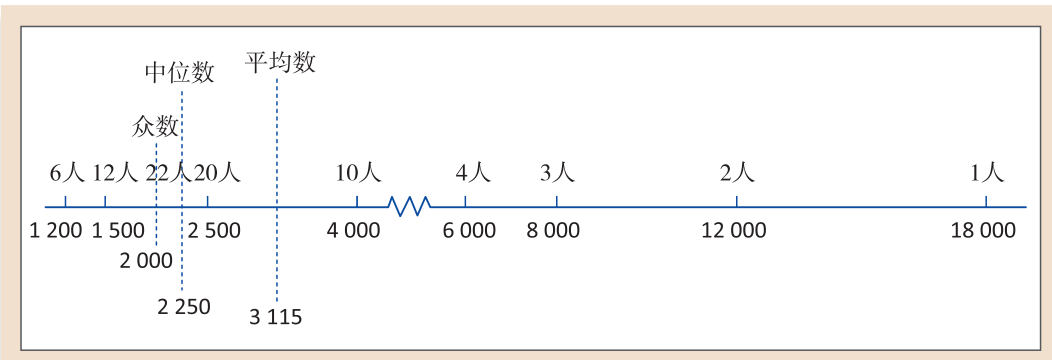


图 6.4－1

（2）由于大多数员工的月工资达不到平均数 3 115，显然用平均数作为该公司员工月工资的代表值并不合适；众数 2 000 及中位数 2 250 在一定程度上代表了大多数人的工资水平，较能反映月工资水平的实际情况．

（3）公司总经理最关心的是月工资的总额，所以他关注的是平均数；

普通员工关注的是自己的收入在本公司职工群体中的位置，中位数能帮助职工了解自己的工资收入处于什么样的水平；

应聘者最想知道公司发给大多数员工的工资数额，这也是一般应聘者将会拿到的工资，因此应聘者关注的是该公司月工资的众数.

平均数、中位数和众数都是一组数据的代表，它们从不同侧面反映了数据的集中趋势. 平均数的计算要用到所有的数据，它能够充分利用数据提供的信息，因此在现实生活中应用较广，但它容易受极端值的影响；中位数对极端值不敏感，但没有利用数据中的所有信息；众数只能反映一组数据中出现次数最多的数据，也没有利用数据中的所有信息.

练 习

1. 国际上通常用年龄中位数指标作为划分国家或地区人口年龄构成类型的标准：

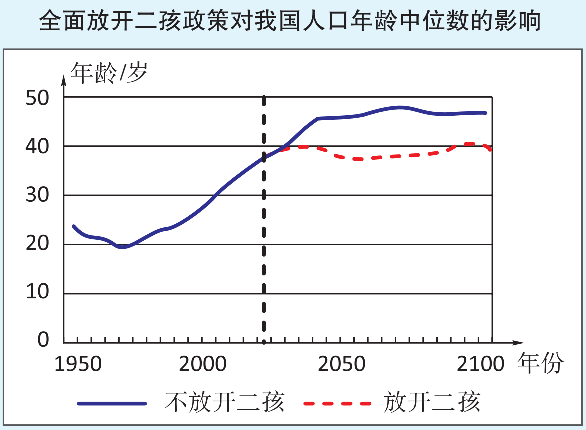
①年龄中位数在 20 岁以下为年轻型人口；

②年龄中位数在 20～30 岁为成年型人口；

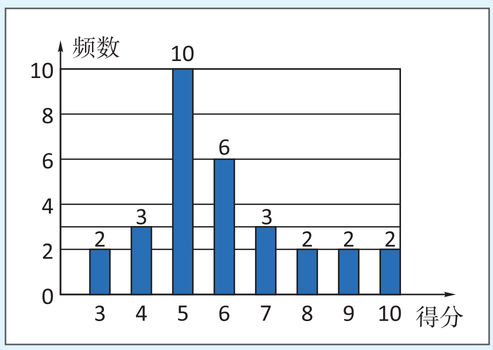
③年龄中位数在 30 岁以上为老年型人口.

（1）试查找数据，分析我国人口年龄构成类型；

（2）试结合下图谈谈全面放开二孩政策对我国人口年龄中位数的影响.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某大学随机抽取 30 名学生参加环保知识测试，得分(十分制)情况如上图所示，试结合图象分析得分的平均数、众数、中位数之间的大小关系.

3. 甲、乙、丙三家电子厂商在广告中都声称，他们的某型电子产品在正常情况下的待机时间是 12 h，质量检测部门对这三家销售产品的待机时间进行了抽样调查，统计结果(单位：h)如下：

甲：8，9，9，9，9，11，13，16，17，19；

乙：10，10，12，12，12，13，14，16，18，19；

丙：8，8，8，10，11，13，17，19，20，20．

（1）分别求出以上三组数据的平均数、众数、中位数.

（2）这三个厂商的推销广告分别利用了上述哪一种数据来表示待机时间？

（3）如果你是顾客，宜选择哪个厂商的产品？为什么？

6.4.2 用样本估计总体的离散程度

平均数、众数以及中位数作为一组数据的代表，刻画了该组数据的集中趋势.而数据的离散程度可以用极差、方差或标准差来描述.

一 极差

在统计学中，我们将一组数据中的最大值与最小值统称为**极值**，将最大值与最小值之差称为**极差**，也称全距，用 R 表示.

例如，某地随机抽取 9 个家庭，调查得到每个家庭的人均月收入(单位：元)为

1 080，750，1 080，1 080，850，960，2 000，1 250，1 630，

则 9 个家庭人均月收入的极差

$$R=2\ 000-750=1\ 250(\text{元}).$$

极差反映了一组数据变化的幅度，是描述数据离散程度的最简单的代表值，计算简单又易于理解，但它容易受极端值的影响.由于极差只利用了一组数据两端的信息，不能反映中间数据的离散状况，因而不能全面地描述数据的离散程度.

二 方差

学校从甲、乙两名射击运动员中选拔一人参加市中学生运动会，甲、乙两人参加测试的成绩(单位：环)如下：

甲：7，8，8，9，7，8，8，9，7，9

乙：6，8，7，7，8，9，10，7，9，9

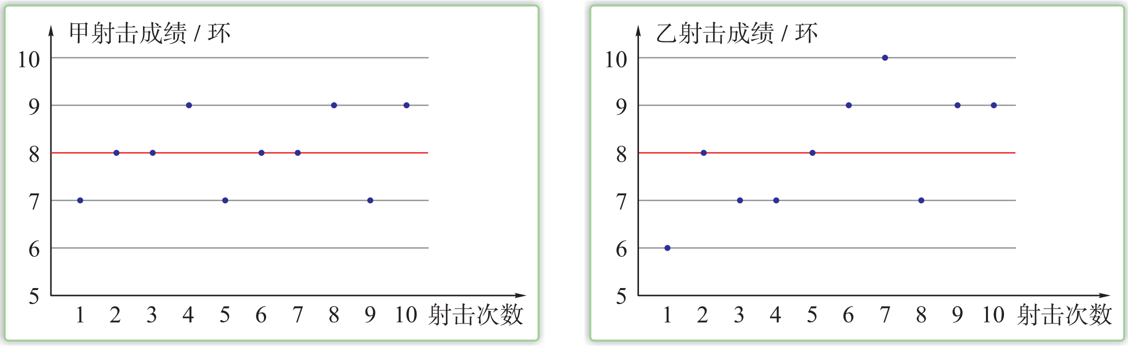
教练员该如何选出合适选手？

很自然地，我们首先考虑两人射击测试的平均成绩，经计算得

$$\bar{x}_{甲}=8.0,\quad \bar{x}_{乙}=8.0,$$

可见两人的平均成绩相同．那么是否意味着两个人的射击水平没有差异呢？

我们可以将甲、乙的射击成绩表示在图 6.4－2 中．



（1）　（2）

图 6.4－2

比较上面两幅图可以发现，甲的射击成绩大多集中在平均成绩 8 环的附近，而乙的射击成绩与平均成绩比较，波动较大．

统计上，常采用方差来刻画一组数据波动的大小：若设 y_1，y_2，…，y_N是总体的全部个体，μ 是总体均值，则称

$$\sigma^2=\frac{(y_1-\mu)^2+(y_2-\mu)^2+\cdots+(y_N-\mu)^2}{N}$$

为**总体方差**或方差．

总体方差 σ^2 刻画了总体中的个体向总体均值 μ 的集中或离散的程度：方差越小，表明个体与均值 μ 的距离越近，个体向 μ 集中得越好．

总体方差 σ^2 也刻画了总体中个体的稳定或波动的程度：方差越小，表明个体越整齐，波动越小．

方差越大又表示什么？

类似地，若从总体中随机抽样，获得 n 个观测数据 x_1，x_2，…，x_n，用 $\bar{x}$ 表示这 n 个数据的均值，则称

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

为这 n 个数据的**样本方差**，也简称为方差．

样本方差 s^2 刻画了样本数据相对于样本均值 $\bar{x}$ 集中或离散的程度．

样本方差依赖于样本的选取，带有随机性．如果样本是随机抽取的，当样本容量较大时，样本方差是总体方差的估计．

下面，我们由获得的样本数据，并利用方差来分析甲、乙射击成绩的波动大小：

$$s_{甲}^2=\frac{1}{10}[(7-8)^2+(8-8)^2+\cdots+(9-8)^2]=0.6,$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{10}[(6-8)^2+(8-8)^2+\cdots+(9-8)^2]=1.4.$$

由于 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，可以估计甲的射击成绩比乙更稳定，故可推荐甲参加运动会.

例 5 某省农科院在某地区选择了自然条件相同的两个试验区，用相同的管理技术试种甲、乙两种水稻各 100 亩．待水稻成熟，分别从甲、乙的 100 亩水稻中随机抽取 10 亩水稻，它们的亩产量如下表所示．就产量这一指标来讲，试确定哪个品种的水稻在该地区更适合推广.

种类	水稻的亩产量/kg									
甲	865	885	886	876	893	885	870	905	890	895
乙	870	875	884	885	886	888	882	890	895	896

分析 为选择合适的水稻品种，从产量这一指标而言，可以从样本的平均亩产量与产量的稳定性两个角度来衡量.

解 使用计算器可算出甲、乙品种各 10 亩抽样水稻的平均亩产量为

$$\overline{x}_{甲}=885\ \text{kg},\quad \overline{x}_{乙}=885.1\ \text{kg}.$$

由于这 10 亩水稻是随机抽取的，而这两种水稻的样本均值相差很小，从而我们可以估计大面积种植这两种水稻后的平均亩产量也应相差很小.

借助计算器计算方差可得

$$s_{甲}^2=129.6,\quad s_{乙}^2=59.09.$$

由于 $s_{乙}^2<s_{甲}^2$，因此我们可以估计乙种水稻的亩产量要比甲种水稻稳定．综合以上两种因素，我们可以得出：在该地区，乙种水稻更有推广价值.

例 6 某校高一年级有男生 180 人，女生 120 人．某统计小组为调查本年级学生身高情况，采取分层抽样的方法从总体中随机抽取样本，其中男生抽取 18 人，女生抽取 12 人．将男生组看作样本 A_1，计算出样本 A_1 的平均身高为 173.5 cm，方差为 17；将女生组看作样本 A_2，计算出样本 A_2 的平均身高为 164.0 cm，方差为 30．试根据以上数据计算由 A_1，A_2 组成的样本 A 的方差，并估计总体方差.

分析 按分层抽样获取的样本分为两层：男生组与女生组．现已知男生组样本和女生组样本的均值与方差，借助方差的定义可计算出分层抽样样本的方差，进而估计总体方差.

解 设从男生中抽出的样本个体为 y_1，y_2，…，y_{18}，均值记为 $\overline{y}$，方差记为 s_1^2；从女生中抽取的样本个体为 z_1，z_2，…，z_{12}，均值记为 $\overline{z}$，方差记为 s_2^2.

先计算总样本均值 $\bar{x}$：

$$\bar{x}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{18}+z_1+z_2+\cdots+z_{12}}{18+12}$$
$$=\frac{18\bar{y}+12\bar{z}}{18+12}$$
$$=\frac{18\times 173.5+12\times 164.0}{30}$$
$$=169.7(\mathrm{cm});$$

再计算总样本方差：

$$s^2=\frac{1}{30}[(y_1-\bar{x})^2+(y_2-\bar{x})^2+\cdots+(y_{18}-\bar{x})^2+$$
$$(z_1-\bar{x})^2+(z_2-\bar{x})^2+\cdots+(z_{12}-\bar{x})^2]$$
$$=\frac{1}{30}\left\{\sum_{i=1}^{18}[(y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\bar{x})]^2+\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{12}[(z_j-\bar{z})+(\bar{z}-\bar{x})]^2\right\}$$
$$=\frac{1}{30}\left\{\left[\sum_{i=1}^{18}(y_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{18}(\bar{y}-\bar{x})^2\right]+\right.$$
$$\left.\left[\sum_{j=1}^{12}(z_j-\bar{z})^2+\sum_{j=1}^{12}(\bar{z}-\bar{x})^2\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{30}[18s_1^2+18(\bar{y}-\bar{x})^2+12s_2^2+12(\bar{z}-\bar{x})^2]$$
$$=\frac{1}{30}(18\times 17+18\times 3.8^2+12\times 30+12\times 5.7^2)$$
$$=43.86.$$

于是可以估计该校高一年级学生身高的方差为 43.86 .

n 个实数 a_1，a_2，…，a_n 的和简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$\sum$ 音 sigma，读作“西格玛”.

分层抽样在获得总体方差估计的同时，也得到各层的方差估计.

从例 6 可知，如果将总体分为两层，第一、二层的样本量分别为 n_1，n_2，样本均值分别为 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，样本方差分别为 s_1^2，s_2^2，则全部样本的样本容量、样本均值和样本方差分别为

$$n=n_1+n_2,$$
$$\bar{x}=\frac{1}{n}(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2),$$
$$s^2=\frac{1}{n}\{n_1[s_1^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2]+n_2[s_2^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2]\}.$$

如果将总体分为 k 层，第 j 层抽取的样本为 x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jn_j}，第 j 层的样本容量为 n_j，样本均值为 $\bar{x}_j$，样本方差为 s_j^2，$j=1$，2，…，k. 记 $\sum\limits_{j=1}^{k}n_j=n$，你能计算出全部样本的均值和方差吗？

三 标准差

方差充分利用所有数据，并且仅用一个数值来刻画一组数据的离散程度，但方差也有局限性，如方差的单位是观测数据的单位的平方，而刻画离散程度的一种理想度量应当具有与观测数据相同的单位．解决这一局限性的方法就是引入标准差．

标准差是方差的算术平方根．

如果 σ^2 是总体方差，则称 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ 是**总体标准差**；

如果 s^2 是样本方差，则称 $s=\sqrt{s^2}$ 是**样本标准差**．

给定数据 x_1，x_2，…，x_n 和均值 $\overline{x}$．由方差计算公式知道，样本标准差 s 可以用下面的公式计算：

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}.$$

显然，在刻画观测数据的离散程度上，方差与标准差是一样的．在对许多实际问题进行分析时，人们更多地使用标准差．

样本标准差依赖于样本的选取，也带有随机性．样本方差是总体方差的估计．样本标准差是总体标准差的估计．

例 7 一台机床生产一种直径为 40 mm 的零件，在正常生产时，零件的直径的标准差不应超过 0.1．如果超过 0.1，则机床应检修调整．

下表是某日 8:30—9:30 及 10:00—11:00 两个时段中各随机抽取 10 个零件量出的直径的数值(单位：mm)：

8:30—9:30	40	39.8	40.1	40.2	39.8	40.1	40.2	40.2	39.8	39.8
10:00—11:00	40	40	39.9	40	39.9	40.2	40	40.1	40	39.9

试判断在这两个时段内机床生产是否正常．

分析 判断机床生产是否正常可以从样本的均值与标准差两个角度来衡量．

解 设 8:30—9:30 为甲时段，10:00—11:00 为乙时段．

用计算器计算可得

$$\overline{x}_{甲}=40，\overline{x}_{乙}=40.$$

$$s_{甲}\approx 0.173，s_{乙}\approx 0.089.$$

从样本均值看，两个时段生产的零件尺寸差异性不大；从样本标准差看，$s_{甲}>0.1$，$s_{乙}<0.1$，这说明甲时段(8:30—9:30)机床生产不正常，而经过调试，机床在乙时段(10:00—11:00)生产正常：生产的零件稳定程度高，且在质量控制范围内．

在工业生产中，平均数和标准差是监测产品质量的重要指标．若样本的平均数或标准差超过了规定的界限，说明这批产品的质量可能距生产要求有较大偏离，应检查并找出原因，及时解决问题．

练习

1. 某公司准备盖大楼，有两块土地可供征用，但两块土地都崎岖不平，需要平整．现对每块土地确定房基基准高度，然后在两块土地上分别适当地另取 10 点，用水平仪测得各点对基准的相对标高(单位：cm)如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	−45	76	47	−26	135	84	−61	−38	76	92
乙	74	120	100	−70	−44	95	63	−50	57	−25

问：哪一块土地较容易平整?

2. 某电池厂有 A，B 两条生产线制造同一型号可充电电池．A，B 生产线的产量比为 4∶5．现采用分层抽样的方法从某天两条生产线上的成品中随机抽取样本，并测量产品可充电次数的均值及方差，结果如下：

项　目	抽取成品数	样本均值	样本方差
A 生产线产品	16	215	8
B 生产线产品	20	212	13

试根据以上数据计算由 36 个产品组成的样本的方差，并估计总体方差．

3. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸(单位：cm)，结果如下：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

(1) 计算该零件抽样尺寸的极差．

(2) 计算该零件抽样尺寸的样本均值 $\overline{x}$，样本方差 s^2 和样本标准差 s．

(3) 将样本均值 $\overline{x}$ 作为总体均值 μ 的估计值，样本标准差 s 作为总体标准差 σ 的估计值，根据生产经验，在一天的抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程中可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．试利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查．

6.4.3 用频率分布直方图估计总体分布

前面，我们学习了频率分布直方图，知道了频率分布直方图能够直观地反映样本的频率分布规律.

例如在6.3节“频率分布直方图”的案例中，我们根据某公共图书馆在一年中通过随机抽样调查得到的60天的读者借书量，绘制了相应的频率分布直方图（见图6.3-5）. 一方面，由于抽样是随机进行的，所以该直方图可以认为是一年的所有工作日中读者借书量的分布的近似，也就是说，随机抽样得到的样本的频率分布直方图是总体分布的近似；另一方面，由抽样的随机性可以想到，如果随机抽取另外一个容量为60的样本，所形成的样本频率分布直方图会与前一个样本的频率分布直方图有所不同. 但是，它们都可以近似地看作总体的分布.

根据这一点，由直方图6.3-5可知，对于随机选取的一天，图书的借出量在350～400册的估算概率最大，此概率估计值就是频率分布表6-3中的23.3%.

300～350册的估算概率与400～450册的估算概率在其次，此概率的估计值是频率分布表6-3中的20%.

250～300册的估算概率最小，此概率的估计值是频率分布表6-3中的3.3%.

总之，从频率分布直方图可以更直观地看到该图书馆每日借出图书册数的分布情况.

例8 某校高一年级共有450名男生，为了解他们的身高情况，从中随机抽查了50名学生，测得他们的身高数据(单位：cm)如下：

151	153	157	159	160	161	162	163	163	164
164	164	165	165	166	166	167	167	168	168
169	169	169	170	170	170	171	171	172	172
172	173	173	173	173	173	174	175	175	176
176	177	177	178	178	179	180	181	181	183

（1）列出频率分布表并画出频率分布直方图；

（2）估算该年级身高在[170，175)内的男生人数；

（3）估算该年级身高在170 cm以下的男生人数.

解 （1）这组数据的最大值为183，最小值为151，极差为32. 为分组的方便，取略大的身高范围[150，185)，同时取组距为5，分为7组. 计算相应的分组频率，就得到下面的频率分布表(表6-5）.

表 6－5

身高分段	发生次数 n_i	频　率
[150，155)	2	4%
[155，160)	2	4%
[160，165)	8	16%
[165，170)	11	22%
[170，175)	14	28%
[175，180)	9	18%
[180，185)	4	8%
总　　计	50	100%

绘制频率分布直方图，如图 6.4－3.

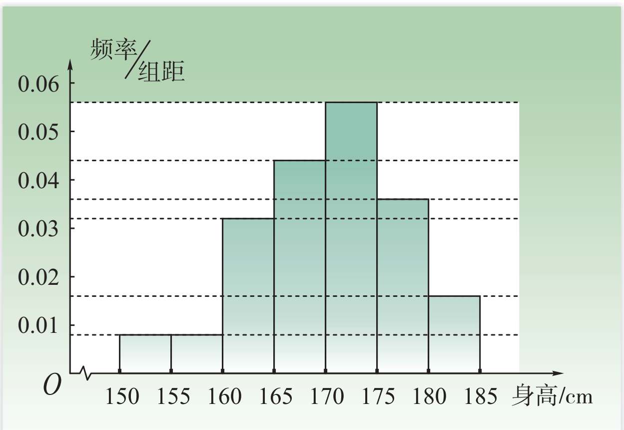


图 6.4－3

由图 6.4－3，你能分析出该组数据的中位数、众数、平均数的位置吗？

(2) 由表 6－5 和图 6.4－3 可以估计，总体中约有 28%的男生身高在[170，175)内. 由于全年级共有 450 名男生，所以该年级身高在[170，175)内的男生大约有

$$450\times28\%=126(\text{人}).$$

(3) 样本中身高在 170 cm 以下的男生所占比例约为

$$4\%+4\%+16\%+22\%=46\%,$$

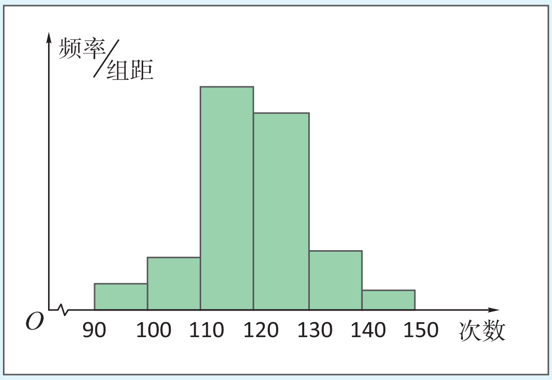
所以该年级身高在 170 cm 以下的男生大约有

$$450\times46\%=207(\text{人}).$$

例 8 中的样本容量只有 50，可以设想：如果要抽样调查该地所有高一年级男生的身高，随着样本容量的不断增大，分组的组距不断缩小，频率分布直方图实际上越来越接近于总体的分布.

练习

1. 为了了解高一学生的体能情况，某校抽取部分学生进行1分钟跳绳测试，将所得数据整理后，画出频率分布直方图(如图). 图中从左到右各小矩形面积之比为2∶4∶17∶15∶9∶3，第二小组频数为12.



(第1题)

(1) 第二小组的频率是多少？样本容量是多少？

(2) 若次数在110以上(含110)为达标，试估计该校全体高一学生的达标率是多少.

2. 据媒体报道：某市今年前4个月空气质量为优良. 某中学数学兴趣小组据此提出了“今年究竟能有多少天空气质量达到优良”的问题. 他们上网查询环境保护部公布的环境空气质量标准，得到下表所示的空气质量指数分级相关信息：

空气质量指数分级

空气质量指数	$0\leqslant x\leqslant 50$	$51\leqslant x\leqslant 100$	$101\leqslant x\leqslant 150$
空气质量级别	一级(优)	二级(良)	三级(轻度污染)
空气质量指数	$151\leqslant x\leqslant 200$	$201\leqslant x\leqslant 300$	大于300
空气质量级别	四级(中度污染)	五级(重度污染)	六级(严重污染)

他们同时查询市环保监测站提供的资料，并从数据中随机抽取了今年1—4月份中30天的空气质量指数.

某市30天空气质量指数

30	32	40	42	45	45	77	83	85	87
90	113	127	153	132	98	65	50	53	57
64	66	77	92	98	130	46	150	187	201

(1) 根据空气分级质量标准和抽查的空气质量指数，绘制频率分布直方图.

(2) 试根据频率分布直方图，估计该市今年1—4月(按120天计算)空气质量是优良(包括一、二级)的天数，并评估该市的空气质量水平. 到互联网查找资料，与全国其他城市比较，该市空气质量处于什么水平？

6.4.4 百分位数

百分位数是位于按一定顺序排列的一组数据中某一个百分位置的数值，以 P_r 表示，其中 r 是区间[1，99]上的整数．一个百分位数 P_r 将总体或样本的全部观测值分为两部分，至少有 $r\%$的观测值小于或等于它，且至少有$(100-r)\%$的观测值大于或等于它，当 $r\%=50\%$时，P_r 即对应中位数.

我们在生活中经常应用百分位数，例如，“全班有 25%的人某科考试成绩低于 83 分”，这句话的意思是全班小于或等于 83 分的人数不少于全班人数的 25%，大于或等于 83 分的人数不少于 $1-25\%=75\%$．这时，我们称 83 为所有成绩的第 25 百分位数.

如何求一组观测数据的百分位数呢?

首先是确定位置，然后是求出对应的百分位数．下面我们以计算 P_{25} 为例进行说明：

设观测数据已经按从小到大的顺序排列，如 x_1，x_2，…，x_n.

第一步，计算 $c=n\times25\%$；

第二步，如果 c 不是整数，用 m 表示比 c 大的最小整数，则所求的 P_{25} 是 x_m，如果 c 是整数，则所求的 P_{25} 是$\dfrac{x_c+x_{c+1}}{2}$.

对于[1，99]之间的整数 r，将上述的 25%改为 $r\%$，即可求得 P_r.

在统计学中，P_{25} 又称为第一四分位数，P_{50} 又称为第二四分位数，P_{75} 又称为第三四分位数.

例 9 计算下列数据

$$1，5，9，12，13，18，21，23，28，36$$

的百分位数：P_{25}，P_{50}，P_{75}.

解 数据量 $n=10$.

因为 $c=n\times25\%=2.5$ 不是整数，3 是比 2.5 大的最小整数，

所以 $P_{25}=x_3=9$；

因为 $c=n\times50\%=5$ 是整数，

所以 $P_{50}=\dfrac{x_5+x_6}{2}=\dfrac{13+18}{2}=15.5$；

因为 $c=n\times75\%=7.5$ 不是整数，8 是比 7.5 大的最小整数，

所以 $P_{75}=x_8=23$.

对于从小到大排列的 n 个数，P_{25} 大约处于这 n 个数的 $\frac{1}{4}$ 处，P_{50} 大约处于这 n 个数的中间，P_{75} 大约处于这 n 个数的 $\frac{3}{4}$ 处.

百分位数是用于衡量数据位置的度量，它提供了有关数据在最小值与最大值之间位置的信息. 多个百分位数结合使用，可更全面地描述数据的分布特征.

例 10 某地政府为满足居民基本用电需求，并提高能源的利用效率，实现绿色发展，计划对全市居民用电标准按年采用三阶式递增电价收费：75%的用户在最低电价一档，20%的用户用电量超出一阶电价的临界值而未超过二阶电价的临界值，超过一阶临界值的用电量按二阶电价缴费，5%的用户用电量超过二阶电价的临界值，超过二阶临界值的用电量按三阶电价缴费. 为此，当地电力公司调查了 200 户居民 6 月份的用电量(单位：kW·h)，并排序如下：

8	18	22	31	42	48	49	50	51	56	57	57	60	61
61	61	62	62	63	63	65	66	67	69	70	70	71	72
72	74	76	77	77	78	78	80	80	82	82	82	83	84
84	88	88	89	90	91	93	93	94	95	96	96	96	97
98	98	98	99	100	100	100	101	101	101	105	106	106	106
107	107	107	107	108	108	109	109	110	110	110	111	112	113
113	114	115	116	118	120	120	120	121	123	124	127	127	127
130	130	130	131	131	132	132	132	133	133	134	134	134	135
135	135	135	136	137	137	138	139	139	140	141	142	144	146
146	147	148	149	151	152	154	156	159	160	162	163	163	164
165	167	169	170	170	172	174	174	177	178	178	180	182	182
187	189	191	191	192	194	194	200	201	201	202	203	203	206
208	212	213	214	216	223	224	237	247	250	250	251	253	254
258	260	265	274	274	283	288	289	304	319	320	324	339	462
498	530	542	626										

阶梯电价的临界点如何确定?

分析 电力公司选取 6 月份进行调查，是因为 6 月用电量在 12 个月中处于中等偏上(可能需要空调用电)，一年的用电量近似等于这个月的用电量乘以 12. 阶梯电价临界值的确定依赖于总体分布，我们要用样本数据的信息确定第 75 百分位数以及第 95 百分位数.

解 样本容量 $n=200$.

为了使 75%的用户以最低电价一档缴费，需确定 P_{75}.

因为 $c=n\times75\%=150$ 是整数，

所以 $P_{75}=\dfrac{x_{150}+x_{151}}{2}=\dfrac{178+178}{2}=178$.

这说明 6 月份约有 75%的用户用电量不超过 178 kW·h. 假设每年用电量不超过 178×12=2 136(kW·h)按最低档电价缴费，则大约 75%的用户将按最低档缴费.

因为 $c=n\times95\%=190$ 是整数，

所以 $P_{95}=\dfrac{x_{190}+x_{191}}{2}=\dfrac{289+304}{2}=296.5$.

这说明 6 月份约有 95%的用户用电量不超过 296.5 kW·h，也就是说该月用电量超过 296.5 kW·h 的用户只有 5%. 若每年用电量超过 2 136 kW·h，不超过 296.5×12=3 558(kW·h)，则 2 136 kW·h 按最低档电价收费，超过部分按第二档电价收费.

若每年用电量超过 3 558 kW·h，则超过部分按第三档电价收费.

练 习

1. 2017 年，劳资部门在对 A 企业进行人均年收入(单位：万元)调查时，采用随机抽样的方法得到以下 10 个数据：

$$0.96,\ 1,\ 2.5,\ 3.3,\ 3.6,\ 4,\ 4.5,\ 4.6,\ 4.8,\ 5,$$

试计算 P_{25}，P_{50}和 P_{75}.

2. 某城市计划对居民生活用气(天然气)按年采用三阶式收费：75%的用户在最低气价一档，18%的用户用气量超出一阶气价的临界值而未超过二阶气价的临界值，超过一阶临界值的用气量按二阶气价缴费，7%的用户用气量超过二阶气价的临界值，超过二阶临界值的用气量按三阶气价缴费. 为此，当地燃气公司调查了 100 户居民一年的用气量(单位：m^3)，并排序如下：

105	120	140	142	146	155	160	165	178	187	192	199
200	206	206	213	220	223	225	230	233	239	241	245
248	249	252	254	256	256	258	260	263	265	266	267
270	271	272	273	275	278	280	283	286	287	290	290
290	299	300	303	304	305	306	308	310	311	313	316
316	318	321	323	325	326	326	327	329	330	332	333
335	336	336	337	338	340	341	385	396	413	420	428
431	443	454	456	460	465	470	475	480	485	490	497
500	510	520	536								

(1) 阶梯气价的临界点如何确定？

(2) 若第一档气价为 2.90 元/m^3，第二档气价为 3.48 元/m^3，第三档气价为 4.35 元/m^3，某户居民今年用气 330 m^3，则应缴纳多少燃气费？

习题 6.4

学而时习之

1. 唐代是我国封建社会的兴盛时期. 从现存的唐代墓志中，我们了解到 95 个唐代妇女的初婚年龄，如下表所示：

（甘肃安西榆林窟壁画，张大千临摹）

初婚年龄/岁	13	14	15	16	17	18	19	20
人　数	5	1	10	9	14	19	11	7
初婚年龄/岁	21	22	23	24	25	29	33	
人　数	6	5	2	3	1	1	1	

（1）计算上述样本的平均初婚年龄，据此估计唐代妇女的平均初婚年龄.

（2）试比较唐代妇女平均初婚年龄与我国当代妇女法定初婚年龄的大小.

（3）通过互联网调查世界各国妇女初婚年龄，妇女初婚年龄是否随着时代的发展而逐渐增大？请尝试解释说明.

2. 下面是某城市某日在不同观测点对细颗粒物($PM_{2.5}$)的观测值：

275	268	237	208	225	396	168	199	157	166	176	173	188
221	176	159	168	150	173	198	177	129	144	163	141	142
157	142	112	136	140	166	102	110	98				

（1）数据中有无众数？

（2）计算数据的中位数与均值，它们相等吗？

（3）若数据中的最大值比现有的最大值多 25，数据的极差、中位数、众数、平均数发生改变了吗？

3. 抽样统计甲、乙两名射击运动员的 5 次训练成绩(单位：环)，结果如下：

运动员	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

派哪名运动员参加本周末的比赛比较合适？

4. 为研究男女学生在生活费支出(单位：元)上的差异，某中学在高一年级 400 名学生(其中男生 220 人，女生 180 人)中随机抽取 22 名男生与 18 名女生，统计他们的生活费支出，得到下面的结果：

$$男生：\overline{x}_1=520，s_1^2=250；$$

$$女生：\overline{x}_2=500，s_2^2=280.$$

试根据以上数据估计该校高一学生生活费支出的总体均值、总体方差.

5. 某订餐网站从平台商家中随机抽取 30 个商家，对他们的平均送达时间(单位：min)进行统计，获得以下数据：

12	15	18	19	19	20	21	25	25	26	27	28	29	31	32
34	35	35	36	37	38	39	39	40	41	42	45	50	55	60

(1) 试估计该订餐平台上商家的平均送达时间；

(2) 试估计总体标准差.

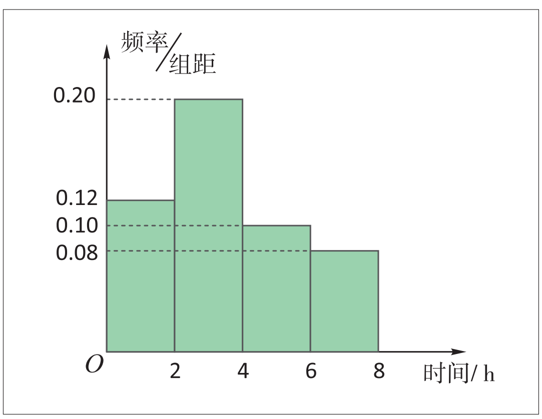
6. 下面是北方某城市 2018 年 1—2 月的日平均气温(单位：℃)的记录数据：

−3	2	−4	−7	−11	−1	7	8	9	−6
−14	−18	−15	−9	−6	−1	0	5	−4	−9
−6	−8	−12	−16	−19	−15	−22	−25	−24	−19
−8	−6	−15	−11	−12	−19	−25	−24	−18	−17
−14	−22	−13	−9	−6	0	−1	5	−4	−9
−3	2	−4	−4	−1	7	5	−6	−5	

(1) 将数据适当分组，并画出相应的频率分布直方图；

(2) 试估计该城市 1—2 月的日平均气温在 0 ℃以下的天数所占的百分比.

7. 研究人员随机调查了某地 1 000 名“上班族”每天在工作之余使用手机上网的时间，并绘制了如图所示的频率分布直方图. 若同一组中的数据用该组区间的组中值作代表，试估计该地“上班族”每天在工作之余使用手机上网的平均时间.



(第 7 题)

8. 某校高一年级共有 1 200 人参加英语测验，已知所有学生成绩的第 70 百分位数是 75 分，至少有多少名学生的英语成绩大于或等于 75 分?

9. 人体测量的数据以第 k 百分位数(记为 P_k)作为一种指标界值. 最常用的是 P_5，P_{50}，P_{95} 三种. 在身高中，我们称 P_5 为矮身材，P_{50} 为中身材，P_{95} 为高身材. 现调查得到如下所示的 20 名 19 岁中国女性的身高数据(单位：cm)：

152	152	153	154	155	156	158	159	160	161
162	162	163	163	165	167	168	170	171	172

试分别求矮身材、中身材、高身材的界值.

温故而知新

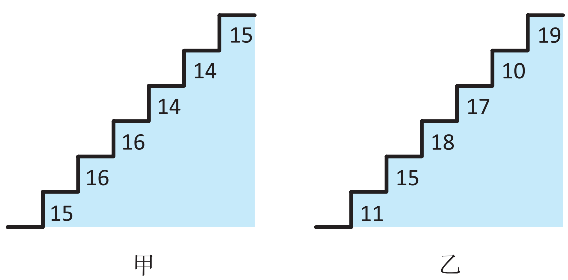
10. 某超市调查顾客的购买力，随机查阅了 10 位使用现金的顾客的消费额和 12 位使用移动支付的顾客的消费额，获得如下数据(单位：元)：

现金消费：	19.50	39.50	78.60	35.70	31.80	
	98.30	23.50	108.00	29.00	32.20	
移动支付消费：	45.90	89.70	123.60	98.75	59.30	45.35
	109.45	95.50	103.00	24.00	65.50	67.20

(1) 分别估计该超市使用现金与使用移动支付的顾客的平均消费额；

(2) 在所有购物的顾客中，如果有 32% 的顾客使用现金，估计该超市的顾客的平均消费额.

11. 如图是某景区甲、乙两段台阶路，图中所标数字表示台阶的高度(单位：cm). 试结合所学的统计方法(如运用平均数、中位数、方差和极差)来评价走哪段台阶路更舒服.



(第 11 题)

12. 从某企业生产的某种产品中抽取100件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得到如下频数分布表：

质量指标值分组	[75，85)	[85，95)	[95，105)	[105，115)	[115，125)
频　数	6	26	38	22	8

（1）根据以上数据作出频率分布直方图；

（2）估计这种产品质量指标值的平均数及方差(同一组中的数据用该组区间的组中值作代表)；

（3）根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于95的产品至少要占全部产品80%”的规定？

数学文化

统计与文学作品鉴定①

威廉·莎士比亚(1564—1616)是英国大文豪，也被视为有史以来最伟大的文学家之一. 1985 年秋天，有位莎翁研究专家在牛津大学博德利图书馆里发现了一首写在纸片上的九节诗. 这张纸片已被收藏近 200 年，它上面的诗歌是莎翁写的吗?

文艺复兴时期英国戏剧家、诗人威廉·莎士比亚

两年以后，两位统计学家对这首诗做了研究，并与莎士比亚的写作风格进行对比，结果发现它们惊人的一致. 已知莎翁诗文著作中用词总量为 884 647 个，其中 31 534 个是不同的，它们出现的频数如下：

单词使用的频数	1	2	3	4	5	…	>100
不同的单词数	14 376	4 343	2 292	1 463	1 043	…	846

由此可见，莎翁喜欢用新词，他使用一次就舍弃的词高达 45.6%，仅用两次的词占 13.8%. 倘若对莎翁的部分作品做同样的统计，不同的词出现的频数会高一些. 这首新诗中共有 429 个单词，有 258 个是不同的，观测值与基于莎翁写作风格的预测值相对接近. 与此同时，统计学家也调查了与莎翁同时代的著名诗人约翰逊、马洛和邓恩的写作风格，发现他们的预测值与这首诗的观测值存在统计学上的显著性差异.

在此以后，莎士比亚的另外三部著作《罗密欧与朱丽叶》《托马斯·莫尔爵士》和《爱德华三世》也是用同样的方法加以验证的. 因为《罗密欧与朱丽叶》写的是意大利上流社会，而莎翁出身于英国平民家庭，故而在过去的三个世纪里，包括狄更斯和马克·吐温等在内的文学家都曾怀疑它不是莎士比亚的作品.

苏联作家肖洛霍夫的传世之作《静静的顿河》也曾遭受类似的质疑，这部小说让肖洛霍夫获得了 1965 年的诺贝尔文学奖. 1974 年，另一位苏联作家索尔仁尼琴(1970 年诺贝尔奖得主)在巴黎公开提出质疑，他认为肖洛霍夫当时才 20 多岁，不可能写出有如此广度和深度的鸿篇巨制，而且书中的思想内容和艺术技巧也不均衡.

① 本文节选自蔡天新著《数学的故事》，中信出版社，2018 年出版.

这场争论一直持续到肖洛霍夫暮年，有人怀疑他抄袭了已故作家克留科夫的作品. 1984 年，挪威奥斯陆大学的一位统计学家领导了一个小组，他们将肖洛霍夫不存在任何争议的作品、《静静的顿河》和克留科夫的作品分为三组，利用统计方法进行分析.

第一，他们统计不同词汇占总词汇量的比例，三组分别为 65.5%，64.6%，58.9%. 第二，选择最常见的 20 个俄语单词，统计它们出现的频率，三组分别为 22.8%，23.3%，26.2%. 第三，统计出现不止一次的词汇所占比例，三组分别为 80.9%，81.9%，76.9%.

无论哪一种统计都显示，克留科夫的作品风格与《静静的顿河》之间，存在着显著的统计差异，而肖洛霍夫更像是《静静的顿河》的原作者.

在中国，古典小说《红楼梦》也有悬疑，有红学家认为后 40 回与前 80 回在风格上有很大差异，因此怀疑是另外一个作者所为，这自然引起一些统计学家的兴趣.

过去半个多世纪以来，海峡两岸以及美国多位学者用统计学的方法对《红楼梦》进行了研究. 例如，上海的统计学家李贤平和南京的统计学家韦博成分别对书中虚词和实词(如花卉、树木、饮食和诗词)的出现频率进行统计，也发现了明显的差异存在，佐证前 80 回和后 40 回是两个不同的作者.

现在，我们再来说说莎士比亚. 他的生日与忌日同为 4 月 23 日，这也是西班牙语世界最伟大的作家、《堂·吉诃德》的作者塞万提斯的忌日，他们在 1616 年的同一天去世. 中国历史上最负盛名的戏剧家之一汤显祖也在这一年去世. 这个概率实在太小了，小到我们无法估测，甚至完全可以忽略不计.

20 世纪印度裔美国籍统计学家 C. R. 劳说过，“假如世上每件事情均不可预测地随机发生，那我们的生活将无法忍受. 反之，假如每件事情都是确定的、完全可以预测的，那我们的生活又将十分无趣”. 他还指出，“在终极的分析中，一切知识都是历史；在抽象的意义下，一切科学都是数学；在理性的世界里，所有的判断都是统计学”.

数学文化

大数据

纵观人类文明的发展历程，数据(data)总是如影相随，它的拉丁文解释“已知”就清晰地表达了人们试图通过数据来研究规律，发现规律，乃至更好地理解我们生存的空间．人类探索世界的脚步从来就没有停止过，总尝试着将一切信息用数据来表达、分析，以期更好地理解事实的真相，把握客观规律，推动社会的发展．在很长一段时间，准确分析大量数据对我们而言都是一种挑战，毕竟我们记录、储存和分析数据的工具不够好，尤其是在 20 世纪后期，部分前沿学科如天文学和基因学研究出现的海量数据更使人们感受到前所未有的挑战．现代信息技术的飞速发展给我们带来了机遇，正是在这些领域，人们运用高速计算机存储记录数据，借助云计算技术以及统计模型对海量数据进行分析，获得了前所未有的进步．

2008 年，数家国际知名科学媒体推出“大数据”专刊，将大数据(big data)这一概念推至世人面前并引发前所未有的关注．大数据通常指无法在一定时间内用常规软件工具进行记录、管理和处理的数据，是需要用新处理模式才能进行统计分析的海量、高增长和多样化的信息资料．自大数据诞生之日起，政府、学界、企业用“大数据”这一全新的视角重新审视我们的现实世界，会发现我们从来没有像今天这样，有机会和条件在非常多的领域和非常深入的层次获得与使用全面数据，深入探索现实世界的规律，获取过去不可能获取的知识．人类这一思维以及行为方式的突破无疑顺应了时代的发展，标志着人们在寻求科学量化和理性认识世界的道路上前进了一大步．

人们利用大数据技术在诸多领域取得了实质性的突破．例如，在政府公共管理领域，相关部门基于大型搜索引擎几千万条最为频繁的检索内容，分析流感等病疫传播状况，并结合气温变化、环境指数、人口流动等因素建立预测模型，这将为政府提供实时的流行疾病动态监测以及早期预警．还比如，交通管理部门利用大数据分析，可以得知哪一时间、哪一地段最容易拥堵，或在这一地段附近多修路，或提前预警以引导居民合理安排出行，实现对交通流的最佳配置和控制，改善交通状况．

大数据技术将使得企业的管理更为精准，产生效益．例如，智能电网在欧洲已经普及，它每隔 5 分钟或 10 分钟收集一次数据，系统基于大数据可以预测用户的用电习惯等，并推断出在未来 2～3 个月时间里，整个电网大概需要多少电．电网管理

商据此即可向发电企业提前购买一定数量的电，以降低采购成本．还比如，跨国零售企业可以通过对其门店销售数据的整合分析，更准确地了解不同地域文化的消费者对其产品款式的偏好，从而更智能地决定门店的库存备货策略．

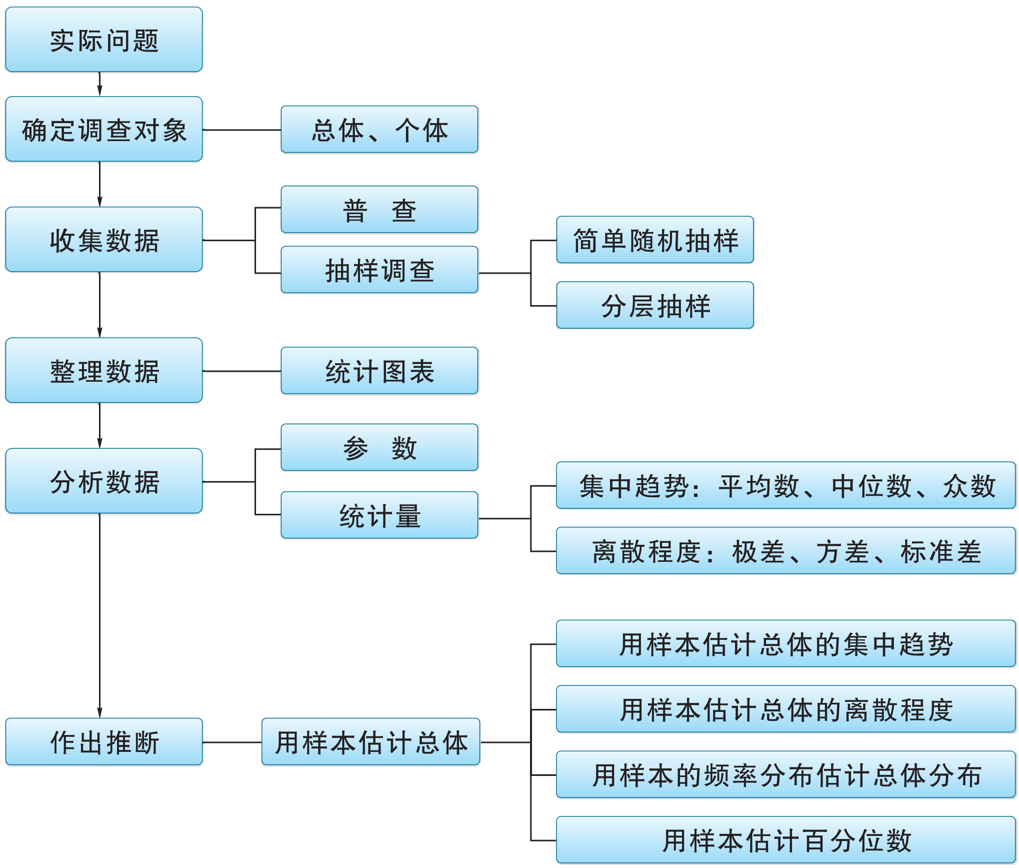
大数据技术也渗透到人们的日常生活中．比如，在医院的儿科部门，诊疗系统会记录早产儿和患病婴儿的每一次心跳，然后将这些数据与历史数据相结合建立识别模式．基于这些分析，系统可以在婴儿表现出任何明显的症状之前就检测到感染，这使得医生可以早期干预和治疗．还比如，购物平台结合用户的浏览记录推断出每个用户的关注点，从而推送更前沿更详细的信息，以满足多样化的需求．

全球范围内，运用大数据推动经济发展，完善社会治理，提升政府服务和监管能力正成为趋势，有关发达国家相继制定实施大数据战略性文件，大力推动大数据发展和应用．2015 年 8 月 31 日，中华人民共和国国务院印发《促进大数据发展行动纲要》，系统部署大数据发展工作．相关领域的专家表示，数据的重要作用日益凸显，我们有必要“用数据说话，用数据决策，用数据管理，用数据创新”，更好地服务于国家发展战略．

回溯人类文明的发展史，科学技术的每一个重大突破，都会引起生产力的深刻变革和人类社会的巨大进步．而大数据技术正改变着我们的生活模式和理解世界的方式，成为新发明和新服务的源泉．更为重要的是，大数据开拓了我们的思维，为我们理解事物的规律打开了一扇大门，但真正的价值还远未发掘，这需要我们蓄势待发，共同创造．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．运用统计学知识解决实际问题的过程中，我们首先要根据实际问题的需求收集数据，试结合生活实际提出一些统计问题，并思考如何获取数据．

2．如果我们能够掌握总体的全部数据，那么只需做一些简单的统计描述，就可得到所关心的总体特征，如总体均值、方差等．但现实情况比较复杂，有些现象的范围比较广，不可能对总体中的每个个体进行测量，或者总体的个体数据多，不可能也没有必要进行一一测量，这就需要从总体中随机抽取一部分个体进行调查，抽样调查是进行统计调查的主要方式．在抽取样本的过程中，要遵循的最基本的原则是什么？简单随机抽样与分层抽样各有何特点？

3．获取的数据尽管杂乱无章，但经过统计图表的科学呈现，显得井然有序并体现出诸多有价值的信息．尝试总结本章所介绍的各种统计图表的差异．

4．用样本估计总体是统计的基本思想．具体而言，本章从以下几个维度来介绍：（1）介绍了用样本的数字特征估计总体的数字特征，你能说出平均数、中位数和众数，以及极差、方差与标准差的统计含义吗？它们在统计中起到的作用是什么？（2）用样本的频率分布直方图来刻画一组数据的分布情况，进而估计总体分布，这将有助于我们从整体上把握研究对象．（3）用样本估计百分位数．百分位数用于描述总体或样本的百分位点，多个百分位数结合使用可更全面地描述数据的分布特征．

5．身处大数据时代，人们在解决许多实际问题的过程中，自觉运用统计思维，使用统计方法来解释实际问题、推断结果的合理性．这对于我们依托数据探索并认识事物的本质和规律将大有裨益．请同学们结合自己的学习、生活提出一些简单的统计问题，并运用所学的知识去解决．

复习题六

学而时习之

1. 为了解某市高中学业水平考试中数学成绩的情况，从参加考试的学生中随机抽查了1 000名学生的数学成绩进行统计分析．在这个问题中，下列说法正确的是(　　)

(A) 总体指的是该市参加学业水平考试的全体学生

(B) 个体指的是1 000名学生中的每一名学生

(C) 样本容量指的是1 000名学生

(D) 样本是指1 000名学生的数学学业水平考试成绩

2. A中学高一年级的500名同学中有218名女生，在调查全年级同学的平均身高时，预备抽样调查50名同学．

(1) 设计一个合理的分层抽样方案．

(2) 你的设计中，第一层和第二层分别是什么？

(3) 分层抽样是否在得到全年级同学平均身高的估计时，还分别得到了男生和女生的平均身高的估计？

3. 通过国家统计局网站，收集2010—2017年我国城镇居民人均可支配收入及人均消费支出数据，利用软件绘制折线统计图，并根据图象分析今后几年的趋势．

4. 在某次测量中得到的A样本数据为：82，84，84，86，86，86，88，88，88，88．若B样本数据恰好是A样本数据每个都加2后所得数据，则A，B两样本的下列数字特征对应相同的是(　　)

(A) 众数　　(B) 平均数

(C) 中位数　　(D) 标准差

5. 为研究某小区家庭用于文化方面(报刊、电视、网络、书籍等)的支出，现从200个家庭中抽取容量为20的样本，调查结果(单位：元)如下：

200	150	170	150	160	130	140	100	110	240
150	160	180	130	100	180	100	180	170	120

试估计该小区家庭文化支出的总体均值、总体方差及总体标准差．

6. 一条产品生产线平均每天的产量为3 700件，标准差为50件．如果某一天的产量低于或高于平均产量，并落在± 2个标准差的范围之外，就认为该生产线失去控制．下表是该生产线一周各天的产量，问该生产线哪几天失去了控制？

时　间	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
产量/件	3 850	3 670	3 690	3 720	3 610	3 590	3 700

7. 某百货公司连续 40 天的销售额数据(单位：万元)如下：

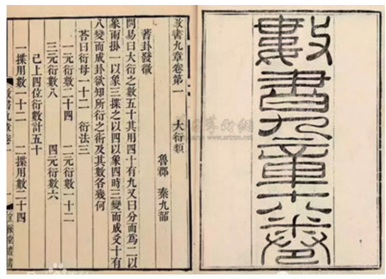
41	25	29	47	38	34	30	38	43	40
46	36	45	37	37	36	45	43	33	44
35	28	46	34	30	37	44	26	38	44
42	36	37	37	49	39	42	32	36	35

(1) 将上面的数据进行适当的分组，编制频数分布表，并绘制频率分布直方图；

(2) 在绘制的频率分布直方图上指出数据组的中位数、众数、平均数所在区域，并比较它们之间的大小；

(3) 试估计该百货公司一年(按 365 天计算)的销售额.

8. 我国古代数学名著《数书九章》中有“米谷粒分”问题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1 534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒. 这批米内夹谷约多少石？



《数书九章》书影

9. 甲、乙、丙、丁四人参加全省数学竞赛，初赛时四人分别处于第 95，第 96，第 97，第 98 百分位数处，已知参加初赛的总人数为 50 000，并且取成绩前 1 500 名进入决赛，试问上述四人中有哪几位可参加决赛？

温故而知新

10. 一家人才测评机构对“创客园区”的 20 家小微企业的经理人进行自信心测试，获得的测试分数如下：

78	63	72	89	91	56	68	76	85	60
71	84	61	89	79	93	86	78	92	80

(1) 以上述数据组成总体，求总体平均数与总体标准差.

(2) 设计恰当的随机抽样方法，从总体中抽取一个容量为 10 的样本，求样本均值与标准差.

(3) 利用上面的随机抽样方法，再抽取容量为 10 的样本，计算样本均值和标准差. 将求得的结果与(2)中的结果进行比较，它们一样吗？

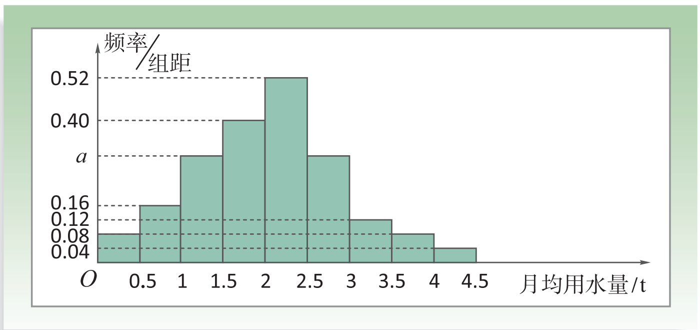
(4) 利用(2)中的随机抽样方法，分别从总体中抽取一个容量为 8，12，16，18 的样本，求样本均值与标准差. 分析样本容量与样本均值、样本标准差对总体的估计效果之间有什么关系.

11．将某班 40 人随机平均分成两组，两组学生一次考试的成绩情况如下表所示：

统计量	平均成绩	标准差
第一组	90	6
第二组	80	4

求全班学生的平均成绩和标准差.

12．某市政府为了鼓励居民节约用水，计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准 x t，一位居民的月用水量不超过 x t 的部分按平价收费，超出 x t 的部分按议价收费. 为了解居民用水情况，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量(单位：t)，将数据按照[0，0.5)，[0.5，1)，…，[4，4.5)分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



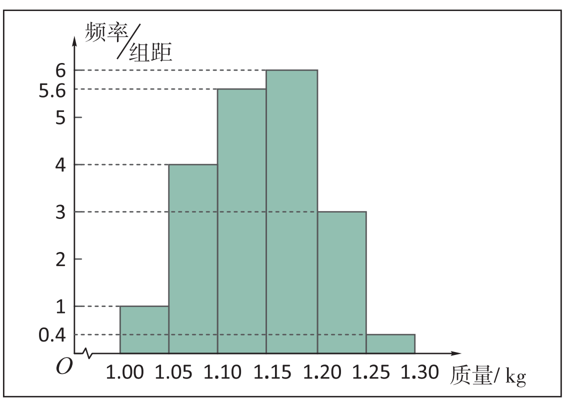
（第 12 题）

(1) 求直方图中 a 的值，并估计居民月均用水量的中位数；

(2) 设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 t 的人数，并说明理由；

(3) 若该市政府希望使 85% 的居民月用水量不超过标准 x t，估计 x 的值，并说明理由.

13．为了解一个鱼塘中养殖的鱼的生长情况，从这个鱼塘中多个不同位置捕捞出 100 条鱼，称得每条鱼的质量(单位：kg)，并将所得数据分组(每组包含左端值，不包含右端值)，画出频率分布直方图，如图所示.



（第 13 题）

（1）根据直方图作频率分布表；

（2）估计数据落在[1.15，1.30)中的概率为多少；

（3）将上面捕捞的 100 条鱼分别做一记号后再放回鱼塘，几天后再从鱼塘的多处不同位置捕捞出 120 条鱼，其中带有记号的鱼有 6 条，请根据这一情况来估计该鱼塘中鱼的总条数.

14. 下表为某市青少年(12～13 岁)立定跳远体能达标表(单位：cm)：

百分位数 P_r		5	10	20	30	40	50	60	70	75	80	85	90	95
男	12 岁	127	136	147	155	162	169	175	182	186	190	195	201	211
	13 岁	139	149	161	169	177	184	191	198	202	207	212	219	229
女	12 岁	109	117	128	135	141	147	153	159	163	167	171	177	186
	13 岁	110	119	129	137	143	149	155	161	165	169	173	179	188

（1）小兰今年 12 岁就读六年级，她立定跳远的距离是 153 cm，则她立定跳远的百分等级是________.

（2）小兰明年就读初中时，她想要立定跳远的成绩位于表中 P_{75} 的位置，则她立定跳远至少要跳________cm 以上.

（3）若立定跳远的成绩达到 P_{75} 算是优良，小军今年 13 岁，他立定跳远的距离是 200 cm，请问他的立定跳远成绩是不是优良？

上下而求索

15. 一天，在一堂数学课上，老师测量了在场所有学生的身高，计算后发现男生的平均身高是 170 cm，女生的平均身高是 160 cm. 其中，张强是最高的，他的身高是 180 cm；杜梅是最矮的，她的身高是 150 cm.

那天有两名学生缺课. 但是第二天这两个人均到校上课，老师也测量了他们的身高，然后重新计算平均身高. 有趣的是，女生的平均身高和男生的平均身高都没变.

下面哪些结论能从这些信息中推断出来？在每个结论的“是”或“否”上面打“√”.

两名学生都是女生	是	否
一名是男生，另一名是女生	是	否
两名学生的身高一样	是	否
所有学生的平均身高没变	是	否
杜梅仍然是最矮的	是	否

16. (数学探究活动)在工业产品设计、建筑设计等领域，通常需要参考人体尺寸数据进行合理研发，以开发符合人体工程学的舒适产品．百分位数在其中发挥了重要的作用．工程设计师根据国家颁布的成年人人体尺寸设计产品，这将使得有更多人适用该产品．

下表为中国男性人体主要尺寸，节选自《中国成年人人体尺寸》：

测量项目 \ 百分位数 \ 年龄分组	18～60 岁						
	1	5	10	50	90	95	99
4.1.1　身高/mm	1 543	1 583	1 604	1 678	1 754	1 775	1 814
4.1.2　体重/kg	44	48	50	59	71	75	83
4.1.3　上臂长/mm	279	289	294	313	333	338	349
4.1.4　前臂长/mm	206	216	220	237	253	258	268
4.1.5　大腿长/mm	413	428	436	465	496	505	523
4.1.6　小腿长/mm	324	338	344	369	396	403	419

(1) 收集涉及中国成年人人体尺寸的国家标准，了解人体尺寸百分位数的设定依据．

(2) 调查本地区常使用的工业产品数据，如大巴车轿厢高度、公共场所座椅高度、衣服的尺寸等数据，针对国家标准进行统计探究活动，这些产品符合国家标准吗？符合个人的舒适感受吗？

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英文名	页码
集　合	set	2
自然数集	set of natural number	3
整数集	set of integer	3
有理数集	set of rational number	3
实数集	set of real number	3
有限集	finite set	3
无限集	infinite set	3
空　集	empty set	3
区　间	interval	5
开区间	open interval	5
闭区间	closed interval	5
子　集	subset	6
真子集	proper subset	6
全　集	universe set	7
补　集	complementary set	7
交　集	intersection	9
并　集	union	10
命　题	proposition	13
逆命题	converse proposition	14
充分条件	sufficient condition	15
必要条件	necessary condition	15
充要条件	sufficient and necessary condition	16
基本不等式	basic inequality	38
零　点	zero point	45
一元二次不等式	quadratic inequality with one unknown	49
函　数	function	65
定义域	domain	65
值　域	range	65
分段函数	piecewise function	73
最大值	maximum	79

中文名	英文名	页码
最小值	minimum	79
单调性	monotonicity	79
偶函数	even function	82
奇函数	odd function	82
幂函数	power function	99
指数函数	exponential function	104
对　数	logarithm	112
底　数	base	112
真　数	proper number	112
对数函数	logarithmic function	118
反函数	inverse function	118
二分法	bisection method	128
正　角	positive angle	152
负　角	negative angle	152
零　角	zero angle	152
角度制	degree measure	154
弧度制	radian measure	154
正　弦	sine	159
余　弦	cosine	159
正　切	tangent	159
三角函数	trigonometric function	160
诱导公式	induction formula	169
周期函数	periodic function	175
周　期	period	175
最小正周期	minimal positive period	175
总　体	population	207
个　体	individual	207
简单随机抽样	simple random sampling	211
分层抽样	stratified sampling	212
平均数	mean	229
众　数	mode	233
中位数	median	233
极　差	range	236
方　差	variance	237
标准差	standard deviation	240
百分位数	percentile	245

后　记

为全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，加快实现教育现代化和建设教育强国的宏伟目标，并为学生的终身发展奠定良好基础，我们依据教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，组织专家编写出《普通高中教科书·数学》，现将本书热忱地奉献给广大读者.

本书的编写遵循《普通高中数学课程标准(2017 年版)》确立的基本理念和目标要求，以发展学生数学核心素养为导向，通过选取体现时代发展、科技进步和符合学生生活经验的素材，采取符合学生认知发展规律的呈现方式，帮助学生在获得必要的基础知识和基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验的过程中，进一步发展其思维能力、实践能力和创新意识. 在教科书编写过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧. 一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订编写提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的谢意！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期而艰巨的任务. 我们真诚地希望广大师生在使用本书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成数学教科书建设这一光荣的使命！

教材编写委员会

普通高中教科书
数　学
必修　第一册
责任编辑：邹伟华　胡　旺
湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）
电子邮箱：hnephmath@126.com
客服电话：0731－85486796
湖南出版中心重印
广东省新华书店经销
湖南天闻新华印务有限公司印装
890 mm×1240 mm　16开　印张：17　字数：350 000
2019年11月第1版　2021年12月第4次印刷
ISBN 978－7－5539－7218－3
定价：19.22元
批准文号：粤发改价格〔2017〕434号·举报电话：12315
如有质量问题，影响阅读，请与湖南出版中心联系调换。
联系电话：0731－88388986　0731－88388987