教育部审定
2018

盲校义务教育实验教科书

数学

八年级 上册

人民教育出版社

盲校义务教育实验教科书

数学

八年级 上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：薛　彬　李海东
本册主编：刘长明
主要编写人员：吴　静　付　洁　杜　洪　金萍萍
薛　彬　宋莉莉　刘长明
责任编辑：张艳娇
美术编辑：王俊宏

盲校义务教育实验教科书　数学　八年级　上册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　×××印刷厂
版　　次　2018年7月第1版
印　　次　　年　月第1次印刷
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张　13.75
字　　数　147千字
书　　号　ISBN 978-7-107-32988-3
定　　价　15.55元
价格依据文件号：京发改规［2016］13号

编者的话

同学们，欢迎大家使用这套数学教科书，它是我们根据《盲校义务教育数学课程标准（2016年版）》编写的，希望它能成为你们学习数学的好帮手.

为什么要学习数学呢？主要的理由有两个方面：

数学应用很广泛. 数学是重要的基础科学. 华罗庚说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在." 随着与计算机技术的结合，数学在我们的生活、学习、工作乃至娱乐中的作用与日俱增.

数学使人更聪明. 数学是锻炼思维的体操. 学习数学能使我们更合乎逻辑、更有条理、更精确、更深入地思考和解决问题，增强我们的想象力和创造性，有助于提高学习能力. 懂得并能运用数学，就意味着你有更多的机会和选择.

这套教科书有什么特点呢？主要有以下三个方面：

整体设计，加强联系，突出数学核心内容. 教科书围绕课程标准的核心内容整体设计，构建符合数学逻辑和学习心理的教科书体系. 循序渐进地安排核心的数学概念和重要的数学思想方法，以便同学们更好地掌握它们.

反映背景，加强应用，体现数学基本思想. 教科书精选现实生活和数学发展的典型问题为背景，让同学们感受知识的自然发展过程，感受数学的抽象思想. 通过解决具有真实背景的问题，让同学们感受数学与生活的联系，体现数学的

模型思想.

体现过程，加强探究，积累数学活动经验. 教科书在内容的呈现上努力体现数学思维规律，以问题引导学习，给同学们自主探索的机会，经历数学概念的概括过程、数学结论的形成过程，从中体会数学的研究方法，积累数学活动经验.

如何使用这套教科书学好数学呢？下面提出一些想法：

勤于思考，勇于探究，善于归纳. 我们所学的数学基础知识，大多是从丰富的实际背景中抽象概括而成的，这是一个由表及里、逐步深入的过程. 教科书安排了“思考”“探究”“归纳”等栏目，引导同学们经历上述过程，通过观察、实验、猜想、推理、反思、交流等活动积累学习经验，逐步学会发现、提出、分析和解决问题.

巩固基础，注重运用，提高能力. 学数学首先要充分重视概念、公式和定理等，并且要通过解题等实践活动，深化认识和提高能力. 同学们在学习教科书“巩固运用”“复习题”“数学活动”等内容时，应加强独立思考，认真地分析问题、探寻解题思路、落实解题步骤，并要反思解题过程，使自己学数学、用数学的能力不断提高.

开阔视野，自主学习，立足发展. 数学源远流长、博大精深、奥妙无穷. 教科书提供了“阅读与思考”等选学内容，还提供了标有“*”的内容供学生选学. 希望同学们通过生动活泼、积极主动的学习，在更广阔的数学天地中提升学习能力和增强探究能力.

让我们开始八年级上册的学习吧！

首先，我们将在整式的乘法的基础上，学习“**因式分解**”这种与整式的乘法方向相反的变形．这种变形在以后的学习中将会用到．

与整式一样，“**分式**”也是我们研究数量关系并用来解决问题的重要工具．分式是分数的拓展，它们有很多共同的特征，因而我们可以类比分数来学习分式．

在现实生活中存在着大量的需要研究不等关系的问题．在“**不等式与不等式组**”中，你会学到列、解不等式的方法．如同方程可以解决具有相等关系的问题一样，不等式可以解决具有不等关系的问题．

对三角形我们并不陌生，在“**三角形**”一章，你不仅能学到三角形的更多性质，而且能够学到研究几何图形的重要思想和方法，并初步了解所学的图形知识在日常生活中的广泛应用．

“**全等三角形**”将带你认识“全等”这种图形间特殊的关系，并研究它的性质和判定方法．通过这一章的学习，你会进一步提高推理论证和解决问题的能力．

在“**轴对称**”一章中，我们将对轴对称图形作专门的研究，并学习画出各种轴对称图形，了解它们的广泛应用．在这一章，你还会对等腰三角形这种重要的几何图形有进一步的认识．

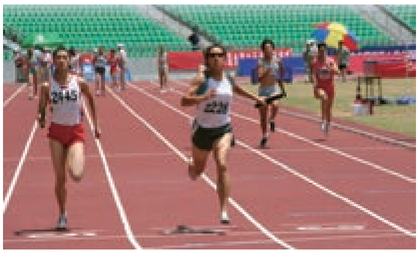
数学伴着我们成长，数学伴着我们进步，数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

编者

2018 年 1 月

目　　录

第十五章　不等式与不等式组



第十六章　三角形

第十七章　全等三角形

第十八章　轴对称

第十三章　因式分解

在七年级下册“第十章　整式的乘除”的学习中，我们研究过这样的问题：为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长 p m，宽 b m 的长方形绿地，向两边分别加宽 a m 和 c m. 计算扩大后的绿地面积，我们可以采用两种方法. 一种是，计算扩大前和扩大后各个部分的面积之和，即

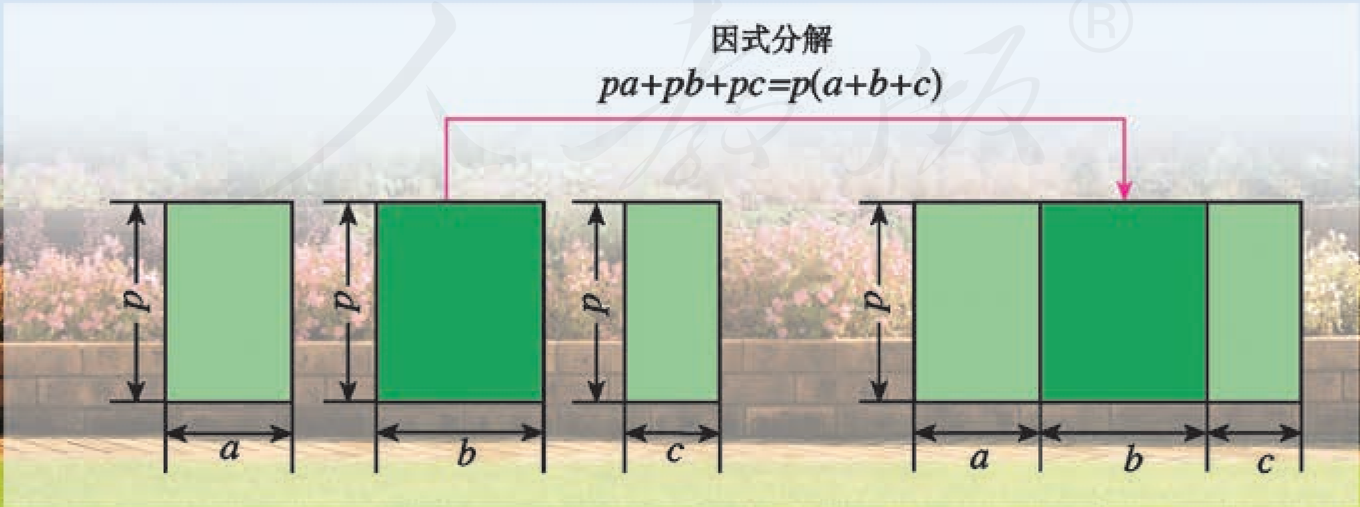
$$pa+pb+pc; \qquad ①$$

另一种是，直接计算绿地面积（扩大后的绿地仍然是一个长方形），即

$$p(a+b+c). \qquad ②$$

我们知道上述两式是相等的. 从②式到①式的运算是我们学过的整式的乘法运算，从①式到②式，相当于把一个多项式写成两个整式的乘积.

利用整式的乘法运算，可以将几个整式的乘积化为一个多项式的形式. 反过来，在式的变形中，有时需要将一个多项式写成几个整式的乘积的形式，这就是本章要学习的内容.



13.1 提公因式法

在本章引言中，我们知道

$$pa+pb+pc=p(a+b+c).$$

这表明多项式 $pa+pb+pc$ 可以写成两个整式的乘积的形式.

探究

请把下列多项式写成整式的乘积的形式：

(1) $x^2+x=$________________；

(2) $x^2-1=$________________.

根据整式的乘法，可以联想得到

$$x^2+x=x(x+1),$$

$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$

上面我们把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的**因式分解**(factorization)，也叫做把这个多项式**分解因式**. 可以看出，因式分解与整式乘法是方向相反的变形，即

$$pa+pb+pc \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} p(a+b+c).$$

我们看多项式

$$pa+pb+pc,$$

它的各项都有一个公共的因式 p，我们把因式 p 叫做这个多项式各项的**公因式**（common factor）.

由

$$pa+pb+pc=p(a+b+c)$$

可知，$pa+pb+pc$ 可以分解成两个因式乘积的形式，其中一个因式是各项的公因式 p，另一个因式 $a+b+c$ 是 $pa+pb+pc$ 除以 p 所得的商.

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

下面我们看几个利用提公因式法分解因式的例子.

例 1 把 $mx^2+my^2-mz^2$ 分解因式.

分析： 这个多项式的各项有公因式 m，提出公因式 m.

解： $mx^2+my^2-mz^2=m(x^2+y^2-z^2)$.

巩固运用13.1

1. 下列由左边到右边的变形，哪些是因式分解？哪些不是？

   (1) $(x+2)(x-2)=x^2-4$；

   (2) $x^2-4=(x+2)(x-2)$；

   (3) $x^2-4+3x=(x+2)(x-2)+3x$.

2. 分解因式：

   (1) $ax-ay$；　　(2) a^2-2a；

（3）a^2+ab；　　　　　（4）$xy-y^2+yz$.

例 2　把 $8a^3b^2+12ab^3c$ 分解因式.

分析：先找出 $8a^3b^2$ 与 $12ab^3c$ 的公因式，再提出公因式. 我们看这两项的系数 8 与 12，它们的最大公因数是 4；两项的字母部分 a^3b^2 与 ab^3c 都含有字母 a 和 b，其中 a 的最低次数是 1，b 的最低次数是 2，因此我们选定 $4ab^2$ 为要提出的公因式. 提出公因式 $4ab^2$ 后，另一个因式 $2a^2+3bc$ 就不再有公因式了.

解：
$$\begin{aligned}&8a^3b^2+12ab^3c\\=&4ab^2\cdot 2a^2+4ab^2\cdot 3bc\\=&4ab^2(2a^2+3bc).\end{aligned}$$

如果提出公因式 $4ab$，那么另一个因式是否还有公因式？

例 3　把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

分析：$b+c$ 是 $2a(b+c)$ 和 $-3(b+c)$ 的公因式，可以直接提出.

解：$2a(b+c)-3(b+c)=(b+c)(2a-3)$.

巩固运用13.2

1. 分解因式：

（1）$3mx-6my$；

（2）$4a^2+10ab$；

（3）$8m^2n+2mn$；

（4）$12xyz-9x^2y^2$；

（5）$p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$；

（6）$2a(y-z)-3b(z-y)$.

2. 先分解因式，再求值：

$$4a^2(x+7)-3(x+7)，其中 a=-5，x=3.$$

3. 计算 $5\times3^4+4\times3^4+9\times3^2$.

13.2 公式法

13.2.1 平方差公式

思考

多项式 a^2-b^2 有什么特点？你能将它分解因式吗？

这个多项式是两个数的平方差的形式．由于整式的乘法与因式分解是方向相反的变形，把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的等号两边互换位置，就得到

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b),}$$

即**两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积．**

例 1 分解因式：

(1) $4x^2-9$；　　(2) a^2-25b^2.

分析： 在（1）中，$4x^2=(2x)^2$，$9=3^2$，$4x^2-9=(2x)^2-3^2$，即可用平方差公式分解因式；在（2）中，$25b^2=(5b)^2$，$a^2-25b^2=a^2-(5b)^2$，即可用平方差公式分解因式．

解： (1)　$4x^2-9$

$=(2x)^2-3^2$

$=(2x+3)(2x-3)$；

(2)　a^2-25b^2

$=a^2-(5b)^2$

$=(a+5b)(a-5b)$.

例 2　分解因式：

(1) x^2-y^4；　　(2) $(x+p)^2-(x+q)^2$.

分析： 在（1）中，$y^4=(y^2)^2$，$x^2-y^4=x^2-(y^2)^2$，即可用平方差公式分解因式；在（2）中，把 $x+p$ 和 $x+q$ 各看成一个整体，设 $x+p=m$，$x+q=n$，则原式化为 m^2-n^2.

解： (1)　x^2-y^4

$=x^2-(y^2)^2$

$=(x+y^2)(x-y^2)$；

(2)　$(x+p)^2-(x+q)^2$

$=[(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)]$

$=(2x+p+q)(p-q)$.

巩固运用13.3

1. 下列多项式能否用平方差公式分解因式？为什么？

(1) x^2+y^2；　　(2) x^2-y^2；

(3) $-x^2+y^2$；　　(4) $-x^2-y^2$.

2. 分解因式：

(1) $36-m^2$；　　(2) $49n^2-1$；

(3) $a^2-\frac{1}{25}b^2$；　　(4) $81a^2-16b^4$；

(5) $(m+n)^2-(m-n)^2$；　　(6) $4b^2-(b+c)^2$.

13.2.2 完全平方公式

思考

多项式 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 有什么特点？你能将它们分解因式吗？

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的 2 倍，这恰是两个数的和或差的平方，我们把 $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做**完全平方式**，利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式分解因式.

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

的等号两边互换位置，就得到

$$\boxed{\begin{aligned}a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\end{aligned}}$$

即**两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方.**

例 3 分解因式：

（1）x^2+4x+4；　　　　（2）$16x^2-24x+9$.

分析： 在（1）中，$4=2^2$，$4x=2\cdot x\cdot 2$，因此 x^2+4x+4 是一个完全平方式，即

$$\begin{array}{ccccccc} x^2+4x+4= & x^2 & + & 2\cdot x\cdot 2 & + & 2^2; \\ & \updownarrow & & \updownarrow \quad \updownarrow & & \updownarrow \\ & a^2 & + & 2\cdot a\cdot b & + & b^2 \end{array}$$

在（2）中，$16x^2=(4x)^2$，$9=3^2$，$24x=2\cdot 4x\cdot 3$，因此 $16x^2-24x+9$ 是一个完全平方式.

解：（1）x^2+4x+4

$=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2$

$=(x+2)^2$；

（2）$16x^2-24x+9$

$=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2$

$=(4x-3)^2$.

例 4 分解因式：

（1）$(a+b)^2-12(a+b)+36$；

（2）$-x^2+4xy-4y^2$.

分析： 在（1）中，将 $a+b$ 看作一个整体，设 $a+b=m$，则原式化为完全平方式 $m^2-12m+36$；对于（2），可通过添括号将原式写成 $-(x^2-4xy+4y^2)$，括号内的式子

为完全平方式.

解：(1) $(a+b)^2-12(a+b)+36$

$=(a+b)^2-2\cdot(a+b)\cdot 6+6^2$

$=(a+b-6)^2$；

(2) $-x^2+4xy-4y^2$

$=-(x^2-4xy+4y^2)$

$=-[x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2]$

$=-(x-2y)^2$.

可以看出，如果把乘法公式的等号两边互换位置，那么就可以得到用于分解因式的公式. 运用这些公式可以把某些具有特殊形式的多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做**公式法**.

巩固运用13.4

1. 下列多项式是不是完全平方式？为什么？

(1) a^2-4a+4；　　(2) $1+4a^2$；

(3) $4b^2+4b-1$；　　(4) a^2+ab+b^2.

2. 分解因式：

(1) a^2+2a+1；　　(2) $x^2-12x+36$；

(3) $4x^2-4x+1$；　　(4) $4p^2+12pq+9q^2$；

(5) $(x+y)^2-10(x+y)+25$；

(6) $-2xy-x^2-y^2$.

对于复杂的分解因式问题，有时需要综合运用提公因式法与公式法.

例 5 分解因式：

（1）a^3b-ab；（2）x^4-y^4.

分析： 在（1）中，a^3b-ab 有公因式 ab，可以先提出公因式，再进一步分解；在（2）中，x^4-y^4 可以写成 $(x^2)^2-(y^2)^2$ 的形式，这样就可以利用平方差公式进行因式分解了.

解：（1）
$$\begin{aligned}&a^3b-ab\\=&ab(a^2-1)\\=&ab(a+1)(a-1);\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&x^4-y^4\\=&(x^2+y^2)(x^2-y^2)\\=&(x^2+y^2)(x+y)(x-y).\end{aligned}$$

分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

例 6 分解因式：

（1）$3ax^2+6axy+3ay^2$；（2）$-ax^2+2a^2x-a^3$.

分析： 先提出公因式，再进一步分解.

解：（1）
$$\begin{aligned}&3ax^2+6axy+3ay^2\\=&3a(x^2+2xy+y^2)\\=&3a(x+y)^2;\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&-ax^2+2a^2x-a^3\\=&-a(x^2-2ax+a^2)\\=&-a(x-a)^2.\end{aligned}$$

巩固运用13.5

1. 分解因式：

(1) x^2y-4y；　　(2) a^3-2a^2+a；

(3) $ax^2+2a^2x+a^3$；　　(4) $-a^4+16$；

(5) $3-6x+3x^2$；　　(6) $-3x^2+6xy-3y^2$.

2. 分解因式：

(1) $(a-b)^2+4ab$；

(2) $(p-4)(p+1)+3p$.

（提示：先化简，再分解.）

阅读与思考

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子是数学学习中常见的一类多项式，如何将这种类型的式子进行因式分解呢？

我们发现，$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$. 这个规律可以利用多项式的乘法法则推导得出：

$$\begin{aligned}&(x+p)(x+q)\\=&x^2+px+qx+pq\\=&x^2+(p+q)x+pq.\end{aligned}$$

因式分解是与整式乘法方向相反的变形，利用这种关系可得

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q). \qquad ①$$

利用①式可以将某些二次项系数是1的二次三项式分解因式．例如，将式子 x^2+3x+2 分解因式．这个式子的二次项系数是1，常数项 $2=1\times2$，一次项系数 $3=1+2$，因此这是一个 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子．利用①式可得

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

上述分解因式 x^2+3x+2 的过程，也可以用十字相乘的形式形象地表示：先分解二次项系数，分别写在十字交叉线的左上角和左下角；再分解常数项，分别写在十字交叉线的右上角和右下角；然后交叉相乘，求代数和，使其等于一次项系数（图1）．

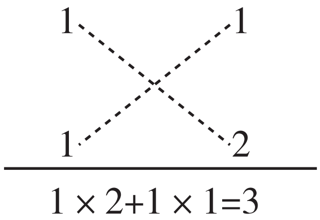


图1

图1中第一横行（1　1）代表（$x+1$），第二横行（1　2）代表（$x+2$）．这样，我们也可以得到

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

利用这种方法，你能将下列多项式分解因式吗？

（1）$x^2+7x+10$；　　（2）x^2-2x-8；

（3）$y^2-7y+12$；　　（4）$x^2+7x-18$.

数学活动

观察下列式子：

$2\times4+1=9=3^2$；

$4\times6+1=25=5^2$；

$6\times8+1=49=7^2$；

$8\times10+1=81=9^2$；

……

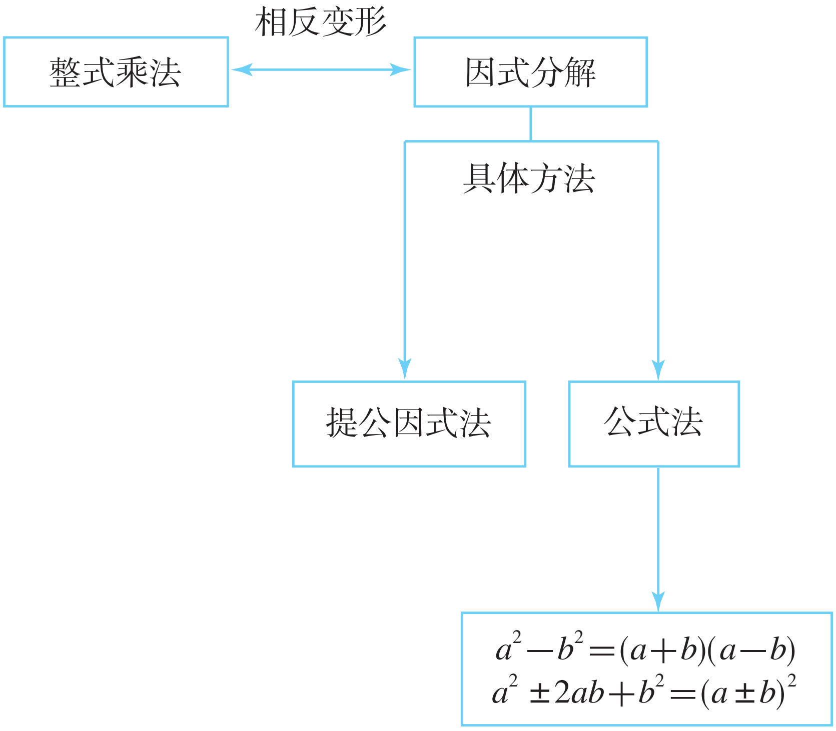
（1）请你找找上述式子的规律，并写出第 5 个式子.

（2）根据你发现的规律，试着写出式子的一般式.

（3）你能用本章所学知识证明这个一般式的正确性吗？

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们在整式乘法的基础上，学习了因式分解这种与整式的乘法方向相反的变形．整式的乘法是把几个整式相乘，得到一个新的整式，而因式分解是把一个多项式化为几个整式相乘．请你举例说明因式分解与整式乘法之间的这种关系．

2. 本章我们学习了两种分解因式的方法，分别是提公因式法和公式法．请举例说明如何运用所学的方法分解因式．分解因式的步骤一般有哪些？

复习题 13

复习巩固

分解因式（第 1～3 题）：

1. （1）$15a^{3}+10a^{2}$；　（2）$12abc-3bc^{2}$；

（3）$6p(p+q)-4q(p+q)$；

（4）$m(a-3)+2(3-a)$.

2. （1）$1-36b^{2}$；　（2）$12x^{2}-3y^{2}$；

（3）$0.49p^{2}-144$；　（4）$(2x+y)^{2}-(x+2y)^{2}$.

3. （1）$1+10t+25t^{2}$；　（2）$m^{2}-14m+49$；

（3）$y^{2}+y+\frac{1}{4}$；

（4）$(m+n)^{2}-4m(m+n)+4m^{2}$；

（5）$25a^{2}-80a+64$；

（6）$a^{2}+2a(b+c)+(b+c)^{2}$.

综合运用

4. 利用因式分解计算：

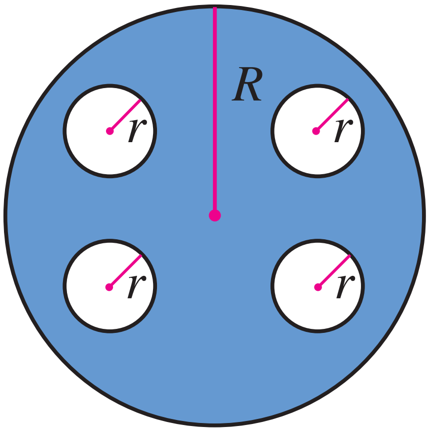
（1）$21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$；

（2）$758^{2}-258^{2}$.

5. 分解因式：

（1）$4xy^{2}-4x^{2}y-y^{3}$；　（2）$3ax^{2}-3ay^{2}$.

6. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，挖去半径为 r 的四个小圆．计算当 $R=8$ cm，$r=1$ cm 时剩余部分的面积（π 取 3.14）.



（第 6 题）

拓广探索

7. 求证：当 n 是整数时，两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

8. 已知 $4y^2+my+9$ 是完全平方式，求 m 的值.

第十四章　分式

一艘轮船在静水中的最大航速为 30 km/h，它以最大航速沿江顺流航行 90 km 所用时间，与以最大航速逆流航行 60 km 所用时间相等，江水的流速为多少？

如果设江水流速为 v km/h，则轮船顺流航行 90 km 所用时间为 $\dfrac{90}{30+v}$ h，逆流航行 60 km 所用时间为 $\dfrac{60}{30-v}$ h，由方程 $\dfrac{90}{30+v}=\dfrac{60}{30-v}$ 可以解出 v 的值.

像 $\dfrac{90}{30+v}$ 和 $\dfrac{60}{30-v}$ 这样分母中含有字母的式子都是分式. 本章我们将类比分数学习分式，解一些分式方程，并利用分式的知识解决一些实际问题.

14.1 分式

14.1.1 从分数到分式

思考

填空：

(1) 长方形的面积为 10 cm^2，长为 7 cm，则宽为________ cm；长方形的面积为 S，长为 a，则宽为________.

(2) 一名马拉松运动员 b h 行进了 a km，则他的平均速度为________ km/h；一名竞走运动员行进 a km 比这名马拉松运动员多用 1 h，则他的平均速度为________ km/h.

> 同 $5\div3$ 可以写成 $\frac{5}{3}$ 一样，式子 $A\div B$ 可以写成 $\frac{A}{B}$.

在上面问题中，填出的依次是 $\frac{10}{7}$，$\frac{S}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b+1}$.

思考

式子$\frac{S}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b+1}$以及引言中的式子$\frac{90}{30+v}$，$\frac{60}{30-v}$有什么共同点？它们与分数有什么相同点和不同点？

可以发现，这些式子与分数一样都是$\frac{A}{B}$（即 $A\div B$）的形式. 分数的分子 A 与分母 B 都是整数，而这些式子中的 A 与 B 都是整式，并且 B 中都含有字母.

一般地，如果 A，B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$叫做**分式**（fraction）. 在分式$\frac{A}{B}$中，A 叫做分子，B 叫做分母.

分式是不同于整式的另一类式子. 上面的$\frac{S}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b+1}$，$\frac{90}{30+v}$和$\frac{60}{30-v}$等都是分式. 由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性. 例如，分数$\frac{2}{3}$仅表示 $2\div 3$ 的商，而分式$\frac{x}{y}$既可以表示 $2\div 3$，又可以表示 $(-5)\div 2$，$8\div(-9)$ 等.

思考

我们知道，要使分数有意义，分数中的分母不能为0. 要使分式有意义，分式中的分母应满足什么条件？

分式的分母表示除数，由于除数不能为0，所以分式的分母不能为0，即当 $B\neq0$ 时，分式$\dfrac{A}{B}$才有意义.

符号“$\neq$”表示“不等于”.

如无特别声明，本章出现的分式都有意义.

例 1 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义？

（1）$\dfrac{2}{3x}$；（2）$\dfrac{x}{x-1}$；

（3）$\dfrac{1}{5-3b}$；（4）$\dfrac{x+y}{x-y}$.

解：（1）当 $3x=0$，即 $x=0$ 时，分式$\dfrac{2}{3x}$没有意义，则当 $x\neq0$ 时，分式$\dfrac{2}{3x}$有意义；

（2）当 $x-1=0$，即 $x=1$ 时，分式$\dfrac{x}{x-1}$没有意义，则当 $x\neq1$ 时，分式$\dfrac{x}{x-1}$有意义；

（3）当 $5-3b=0$，即 $b=\dfrac{5}{3}$时，分式$\dfrac{1}{5-3b}$没有意义，

则当 $b\neq\frac{5}{3}$ 时，分式 $\frac{1}{5-3b}$ 有意义；

（4）当 $x-y=0$，即 $x=y$ 时，分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 没有意义，则当 $x\neq y$ 时，分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义.

巩固运用14.1

1. 列式表示下列各量：

（1）某村有 n 个人，耕地 40 hm^2，则人均耕地面积为________ hm^2.

（2）$\triangle ABC$ 的面积为 S，BC 边的长为 a，则高 AD 为________.

（3）走一段长 10 km 的路，步行用 $2x$ h，骑自行车所用时间比步行所用时间的一半少 0.2 h，骑自行车的平均速度为________________.

2. 下列式子中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{1}{x}$，$x-1$，$\frac{a+6}{2b}$，$\frac{x^2+2x+1}{5}$，$\frac{c}{a-b}$，$\frac{3}{4}(x+y)$，$\frac{x}{x^2-y^2}$，$\frac{m-n}{m+n}$.

3. 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义？

（1）$\frac{2}{a}$；　（2）$\frac{1}{3-x}$；　（3）$\frac{2m}{3m+2}$；

（4）$\frac{1}{m-n}$；　（5）$\frac{2a-b}{3a+b}$.

14.1.2 分式的基本性质

由分数的基本性质可知，如果数 $c \neq 0$，那么

$$\frac{2}{3}=\frac{2c}{3c}, \quad \frac{4c}{5c}=\frac{4}{5}.$$

一般地，对于任意一个分数 $\frac{a}{b}$，有

$$\frac{a}{b}=\frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \qquad \frac{a}{b}=\frac{a \div c}{b \div c} \ (c \neq 0),$$

其中 a，b，c 是数.

分数的基本性质：

一个分数的分子、分母乘（或除以）同一个不为 0 的数，分数的值不变.

思考

类比分数的基本性质，你能猜想分式有什么性质吗？

分式的基本性质：

分式的分子与分母乘（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

上述性质可以用式子表示为

$$\frac{A}{B}=\frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \quad \frac{A}{B}=\frac{A \div C}{B \div C} \ (C \neq 0),$$

其中 A，B，C 是整式.

例 2 填空：

(1) $\dfrac{x^3}{xy}=\dfrac{(\quad)}{y}$，$\dfrac{3x^2+3xy}{6x^2}=\dfrac{x+y}{(\quad)}$；

(2) $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{(\quad)}{a^2b}$，$\dfrac{2a-b}{a^2}=\dfrac{(\quad)}{a^2b}$ $(b\neq 0)$.

解： (1) 因为$\dfrac{x^3}{xy}$的分母 xy 除以 x 才能化为 y，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需除以 x，即

> 看分母如何变化，想分子如何变化.

$$\frac{x^3}{xy}=\frac{x^3\div x}{xy\div x}=\frac{x^2}{y}.$$

同样地，因为$\dfrac{3x^2+3xy}{6x^2}$的分子 $3x^2+3xy$ 除以 $3x$ 才能化为 $x+y$，所以分母也需除以 $3x$，即

> 看分子如何变化，想分母如何变化.

$$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}=\frac{(3x^2+3xy)\div(3x)}{6x^2\div(3x)}=\frac{x+y}{2x}.$$

所以，括号中应分别填 x^2 和 $2x$.

(2) 因为$\dfrac{1}{ab}$的分母 ab 乘 a 才能化为 a^2b，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需乘 a，即

$$\frac{1}{ab}=\frac{1\cdot a}{ab\cdot a}=\frac{a}{a^2b}.$$

同样地，因为$\frac{2a-b}{a^2}$的分母 a^2 乘 b 才能化为 a^2b，所以分子也需乘 b，即

$$\frac{2a-b}{a^2}=\frac{(2a-b)\cdot b}{a^2\cdot b}=\frac{2ab-b^2}{a^2b}.$$

所以，括号中应分别填 a 和 $2ab-b^2$.

我们知道，分数的约分和通分在分数的运算中起着非常重要的作用. 类似地，分式的约分和通分在分式的运算中也有非常重要的作用.

思考

联想分数的约分，由例 2 你能想出如何对分式进行约分吗？

与分数的约分类似，在例 2（1）中，我们利用分式的基本性质，约去$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}$的分子和分母的公因式 $3x$，不改变分式的值，把$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}$化为$\frac{x+y}{2x}$. 像这样，根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去，叫做分式的**约分**（reduction of a fraction）. 经过约分后的分式$\frac{x+y}{2x}$，其分子与分母没有公因式. 像这样分子与分母没有公因式的分式，叫做**最简分式**（fraction in lowest terms）.

同样地，$\dfrac{x^3}{xy}$被约分成$\dfrac{x^2}{y}$，$\dfrac{x^2}{y}$也是最简分式.

分式的约分，一般要约去分子和分母所有的公因式，使所得结果成为最简分式或者整式.

例 3 约分：

(1) $\dfrac{2nt}{mn}$； (2) $\dfrac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}$；

(3) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$.

分析： 为约分，要先找出分子和分母的公因式.

解： (1) $\dfrac{2nt}{mn}=\dfrac{2t}{m}$；

(2) $\dfrac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}=-\dfrac{5abc\cdot 5ac^2}{5abc\cdot 3b}=-\dfrac{5ac^2}{3b}$；

(3) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

$=\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{x-3}{x+3}$.

如果分子或分母是多项式，先分解因式对约分有什么作用？

巩固运用14.2

1. 下列各组中的两个分式是否相等？为什么？

(1) $\dfrac{2x}{y}$与$\dfrac{4xy}{2y^2}$； (2) $\dfrac{6ac}{9a^2b}$与$\dfrac{2c}{3ab}$.

2. 约分：

（1）$\dfrac{5x}{25x^2}$；　　（2）$\dfrac{2bc}{ac}$；

（3）$\dfrac{x^2+xy}{(x+y)^2}$；　　（4）$\dfrac{x^2-36}{2x+12}$.

3. 不改变分式的值，使下列分式的分子和分母都不含“—”号：

（1）$\dfrac{-5y}{-x^2}$；　　（2）$\dfrac{-a}{2b}$；

（3）$\dfrac{4m}{-3n}$；　　（4）$-\dfrac{-x}{2y}$.

思考

联想分数的通分，由例 2 你能想出如何对分式进行通分吗？

与分数的通分类似，在例 2（2）中，我们利用分式的基本性质，将分子和分母乘同一个适当的整式，不改变分式的值，把$\dfrac{1}{ab}$和$\dfrac{2a-b}{a^2}$化成分母相同的分式. 像这样，根据分式的基本性质，把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式，叫做分式的**通分**（reduction of fractions to a common denominator）.

例 4 通分：

(1) $\dfrac{3}{2a^2}$与$\dfrac{a-b}{ab}$；　　(2) $\dfrac{2x}{x-5}$与$\dfrac{3x}{x+5}$.

分析： 为通分，要先确定各分式的公分母，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母，它叫做**最简公分母**.

解： (1) 最简公分母是 $2a^2b$.

$$\frac{3}{2a^2}=\frac{3\cdot b}{2a^2\cdot b}=\frac{3b}{2a^2b},$$

$$\frac{a-b}{ab}=\frac{(a-b)\cdot 2a}{ab\cdot 2a}=\frac{2a^2-2ab}{2a^2b}.$$

> $2a^2$ 的因式有 2，a^2；ab 的因式有 a，b. 两式中所有因式的最高次幂的积是 $2a^2b$.

(2) 最简公分母是$(x-5)(x+5)$.

$$\frac{2x}{x-5}=\frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{2x^2+10x}{x^2-25},$$

$$\frac{3x}{x+5}=\frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{3x^2-15x}{x^2-25}.$$

思考

分数和分式在约分和通分的做法上有什么共同点？这些做法的根据是什么？

巩固运用14.3

1. 通分：

(1) $\dfrac{x}{3y}$与$\dfrac{3x}{2y^2}$；　　(2) $\dfrac{x}{ab}$与$\dfrac{y}{bc}$；

（3）$\dfrac{2c}{bd}$与$\dfrac{3ac}{4b^2}$；　　（4）$\dfrac{6c}{a^2b}$与$\dfrac{c}{3ab^2}$.

2. 通分：

（1）$\dfrac{x}{a(x+2)}$与$\dfrac{y}{b(x+2)}$；

（2）$\dfrac{x-y}{2x+2y}$与$\dfrac{xy}{(x+y)^2}$.

3. 某村种植了 m hm^2 玉米，总产量为 n kg；水稻的种植面积比玉米的种植面积多 p hm^2，水稻的总产量比玉米总产量的 2 倍多 q kg. 写出表示玉米和水稻的单位面积产量（单位：$\mathrm{kg/hm}^2$）的式子，并对这两个式子进行通分.

14.2 分式的乘除

问题 1 一个长方体游泳池的容积为 V，底面的长为 a，宽为 b，当游泳池内的水占容积的 $\frac{m}{n}$ 时，水的深度为多少？

游泳池的深度为 $\frac{V}{ab}$，水的深度为 $\frac{V}{ab} \cdot \frac{m}{n}$.

问题 2 大拖拉机 m 天耕地 a hm²，小拖拉机 n 天耕地 b hm²，大拖拉机的工作效率是小拖拉机的工作效率的多少倍？

大拖拉机的工作效率是 $\frac{a}{m}$ hm²/天，小拖拉机的工作效率是 $\frac{b}{n}$ hm²/天，大拖拉机的工作效率是小拖拉机工作效率的 $\frac{a}{m} \div \frac{b}{n}$ 倍.

从上面的问题可知，为讨论数量关系有时需要进行分式的乘除运算.

分式与分数具有类似的形式，我们可以类比分数的运算法则认识分式的运算法则.

思考

你还记得分数的乘除法法则吗？类比分数的乘除法法则，你能说出分式的乘除法法则吗？

类似于分数，分式有：

乘法法则：**分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.**

除法法则：**分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.**

上述法则可以用式子表示为

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}$；　　(2) $\frac{a}{2b^2}\div\frac{ac}{-4b}$.

解：(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}=\frac{4xy}{6x^3y}=\frac{2}{3x^2}$；

(2) $\frac{a}{2b^2}\div\frac{ac}{-4b}=\frac{a}{2b^2}\cdot\frac{-4b}{ac}$

$=-\frac{4ab}{2ab^2c}$

运算结果应化为最简分式.

$$=-\frac{2}{bc}.$$

例 2 计算：

(1) $\frac{a-2}{a+1}\cdot\frac{a-1}{a-2}$;　　(2) $\frac{1}{49-m^2}\div\frac{1}{m^2-7m}$.

解： (1)

$$\begin{aligned}&\frac{a-2}{a+1}\cdot\frac{a-1}{a-2}\\=&\frac{(a-2)(a-1)}{(a+1)(a-2)}\\=&\frac{a-1}{a+1};\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{49-m^2}\div\frac{1}{m^2-7m}\\=&-\frac{1}{m^2-49}\cdot(m^2-7m)\\=&-\frac{m(m-7)}{(m+7)(m-7)}\\=&-\frac{m}{m+7}.\end{aligned}$$

> 分子、分母是多项式时，通常先分解因式，再约分.

巩固运用14.4

1. 写出本节中问题 1 和问题 2 的计算结果.
2. 计算：

(1) $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{16b}{9a^2}$;　　(2) $\frac{-7x}{3yz}\cdot\left(-\frac{9y^2}{x^2}\right)$;

(3) $\dfrac{2m}{5n} \div \dfrac{4m^2}{10n^3}$；　　　(4) $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{y-x}{x+y}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{a+b}{5ab} \cdot \dfrac{15a^2b}{a^2-b^2}$；　　　(2) $\dfrac{x^2+1}{x-6} \cdot \dfrac{x^2-36}{x^3+x}$；

(3) $\dfrac{2x+2y}{5x^2-4xy} \div \dfrac{x+y}{5x-4y}$.

4. 在一块 a hm² 的稻田上插秧，如果 10 个人插秧，要用 m 天完成；如果一台插秧机工作，要比 10 个人插秧提前 3 天完成. 一台插秧机的工作效率是一个人工作效率的多少倍？

例 3　计算 $\dfrac{2x}{5x-3} \div \dfrac{3}{25x^2-9} \cdot \dfrac{x}{5x+3}$.

解：

$$\dfrac{2x}{5x-3} \div \dfrac{3}{25x^2-9} \cdot \dfrac{x}{5x+3}$$

$$=\dfrac{2x}{5x-3} \cdot \dfrac{25x^2-9}{3} \cdot \dfrac{x}{5x+3}$$

$$=\dfrac{2x^2}{3}.$$

乘除混合运算可以统一为乘法运算.

思考

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=?$　　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=?$　　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{10}=?$

根据乘方的意义和分式的乘法法则，可得：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}=\frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\underline{\qquad\qquad};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

一般地，当 n 是正整数时，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{个}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}}}=\frac{a^n}{b^n}，\text{即}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

这就是说，**分式乘方要把分子、分母分别乘方.**

例 4 计算：

(1) $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2$；　　(2) $\frac{2a^3}{b^4}\div\left(\frac{ac}{b^2}\right)^3$.

解：(1) $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2=\frac{(-2a^2b)^2}{(3c)^2}=\frac{4a^4b^2}{9c^2}$；

(2) $\frac{2a^3}{b^4}\div\left(\frac{ac}{b^2}\right)^3$

$$=\frac{2a^3}{b^4}\div\frac{(ac)^3}{(b^2)^3}$$

$$=\frac{2a^3}{b^4}\div\frac{a^3c^3}{b^6}$$

> 式与数有相同的混合运算顺序：先乘方，再乘除.

$$=\frac{2a^3}{b^4}\cdot\frac{b^6}{a^3c^3}$$

$$=\frac{2b^2}{c^3}.$$

巩固运用14.5

1. 计算：

(1) $\frac{n}{mp^2}\cdot\frac{5mp}{n^2}\div\frac{5m}{3np}$；

(2) $\frac{1}{x+1}\div(x-2)\cdot\frac{x-2}{x+1}$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{-x^2}{3y}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{x^3y}{z^2}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\frac{a^3}{b}\div\left(\frac{2a^2}{5b}\right)^2$；　　(2) $\left(\frac{-ac}{b^2}\right)^3\cdot\frac{b^3}{2a^4}$.

4. 一艘船顺流航行 n km 用了 m h. 如果逆流航速是顺流航速的 $\frac{p}{q}$，那么这艘船逆流航行 t h 走了多少路程？

14.3 分式的加减

问题 1　甲工程队完成一项工程需 n 天，乙工程队要比甲队多用 3 天才能完成这项工程，两队共同工作一天完成这项工程的几分之几？

甲工程队一天完成这项工程的 $\frac{1}{n}$，乙工程队一天完成这项工程的 $\frac{1}{n+3}$，两队共同工作一天完成这项工程的 $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}\right)$.

问题 2　2015 年、2016 年、2017 年某地的森林面积（单位：km^2）分别是 S_1，S_2，S_3，2017 年与 2016 年相比，森林面积增长率提高了多少？

2017 年的森林面积增长率是 $\frac{S_3-S_2}{S_2}$，2016 年的森林面积增长率是 $\frac{S_2-S_1}{S_1}$，2017 年与 2016 年相比，森林面积增长率提高了 $\frac{S_3-S_2}{S_2}-\frac{S_2-S_1}{S_1}$.

从上面的问题可知，为讨论数量关系，有时需要进行分式的加减运算.

思考

分式的加减法与分数的加减法类似，它们的实质相同．观察下列分数加减运算的式子：$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$．你能将它们推广，得出分式的加减法法则吗？

类似分数的加减法，分式的加减法法则是：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减．

上述法则可用式子表示为

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c},$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$； (2) $\frac{2}{3cd^{2}}+\frac{1}{2c^{2}d}$；

(3) $\frac{a}{a^{2}-b^{2}}-\frac{1}{a+b}$．

解：(1) $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

$$=\frac{x+1}{x+1}=1;$$

(2) $\frac{2}{3cd^2}+\frac{1}{2c^2d}$

$$=\frac{4c}{6c^2d^2}+\frac{3d}{6c^2d^2}$$

$$=\frac{4c+3d}{6c^2d^2};$$

(3) $\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}$

$$=\frac{a}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a+b}$$

$$=\frac{a}{(a+b)(a-b)}-\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{a-(a-b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{b}{a^2-b^2}.$$

结果也可以写成$\frac{b}{(a+b)(a-b)}$.

巩固运用14.6

1. 计算：

(1) $\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}$;　　(2) $\frac{a}{b+1}+\frac{2a}{b+1}+\frac{3a}{b+1}$;

(3) $\frac{3x}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^2}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{1}{5a^2b}+\dfrac{2}{10ab^2}$；　　(2) $\dfrac{3}{2m-n}-\dfrac{2m-n}{(2m-n)^2}$；

(3) $\dfrac{2x}{x^2-64y^2}-\dfrac{1}{x-8y}$；　　(4) $\dfrac{a^2}{a-1}-a-1$.

3. 绿化队原来用漫灌方式浇绿地，a 天用水 m t，现在改用喷灌方式，m t 水可用 $2a$ 天. 现在比原来每天节约用水多少吨？

例 2　计算 $\dfrac{1}{2p+3q}+\dfrac{1}{2p-3q}$.

解：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2p+3q}+\frac{1}{2p-3q}\\=&\frac{2p-3q}{(2p+3q)(2p-3q)}+\frac{2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}\\=&\frac{2p-3q+2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}=\frac{4p}{4p^2-9q^2}.\end{aligned}$$

例 3　计算：

(1) $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^2\cdot\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{a}{b}\div\dfrac{b}{4}$；

(2) $\left(m+2+\dfrac{5}{2-m}\right)\cdot\dfrac{2m-4}{3-m}$.

解：(1)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2a}{b}\right)^2\cdot\frac{1}{a-b}-\frac{a}{b}\div\frac{b}{4}\\=&\frac{4a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{a-b}-\frac{a}{b}\cdot\frac{4}{b}\end{aligned}$$

式与数有相同的混合运算顺序：先乘方，再乘除，然后加减.

$$=\frac{4a^2}{b^2(a-b)}-\frac{4a}{b^2}$$

$$=\frac{4a^2}{b^2(a-b)}-\frac{4a(a-b)}{b^2(a-b)}$$

$$=\frac{4a^2-4a^2+4ab}{b^2(a-b)}$$

$$=\frac{4ab}{b^2(a-b)}$$

$$=\frac{4a}{ab-b^2};$$

(2) $\left(m+2+\frac{5}{2-m}\right)\cdot\frac{2m-4}{3-m}$

$$=\frac{(m+2)(2-m)+5}{2-m}\cdot\frac{2m-4}{3-m}$$

$$=\frac{9-m^2}{2-m}\cdot\frac{2(m-2)}{3-m}$$

$$=\frac{(3-m)(3+m)}{2-m}\cdot\frac{-2(2-m)}{3-m}$$

$$=-2(m+3)$$

$$=-2m-6.$$

巩固运用14.7

1. 写出本节中问题 1 和问题 2 的计算结果.

2. 计算：

(1) $\frac{2m}{5n^2p}-\frac{3n}{4mp^2}$；　　(2) $\frac{3y}{2x+2y}+\frac{2xy}{x^2+xy}$；

(3) $\dfrac{y}{x-2y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}\right)$； (4) $\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2\cdot\dfrac{y}{2x}-\dfrac{x}{y^2}\div\dfrac{2y^2}{x}$.

3. 两地相距 n km，提速前火车从一地到另一地要用 t h，提速后行车时间减少了 0.5 h. 提速后火车的速度比原来速度快了多少？

14.4 整数指数幂

我们知道，当 n 是正整数时，

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}.$$

正整数指数幂有以下运算性质：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ （m，n 是正整数）；

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$ （m，n 是正整数）；

(3) $(ab)^n=a^nb^n$ （n 是正整数）；

(4) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ （$a\neq 0$，m，n 是正整数，$m>n$）；

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$ 是正整数）.

其中，第（5）个性质就是分式的乘方法则.

此外，我们还学习过 0 指数幂，即当 $a\neq 0$ 时，$a^0=1$.

思考

a^m 中指数 m 可以是负整数吗？如果可以，那么负整数指数幂 a^m 表示什么？

由分式的约分可知，当 $a\neq 0$ 时，

$$a^3\div a^5=\frac{a^3}{a^5}=\frac{a^3}{a^3\cdot a^2}=\frac{1}{a^2}. \qquad ①$$

另一方面，如果把正整数指数幂的运算性质（4）

$$a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0，m，n \text{ 是正整数}，m>n)$$

中的条件 $m>n$ 去掉，即假设这个性质对于像 $a^3 \div a^5$ 的情形也能使用，则有

$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}. \qquad ②$$

由①②两式，我们想到如果规定 $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}\ (a \neq 0)$，就能使 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 这条性质也适用于像 $a^3 \div a^5$ 这样的情形. 为使上述运算性质适用范围更广，同时也可以更简便地表示分式，数学中规定：

学习了分式后，对指数的认识会有新发展. 即将讨论的 a^{-n}（n 是正整数）就属于分式.

一般地，当 n 是正整数时，

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a \neq 0).$$

这就是说，a^{-n}（$a \neq 0$）是 a^n 的倒数.

你现在能说出当 m 分别是正整数、0、负整数时，a^m 各表示什么意思吗？

引入负整数指数幂后，指数的取值范围就推广到全体整数. 随着指数由正整数扩大到全体整数，正整数指数幂的运算性质也可以推广到整数指数幂.

例 1 计算：

（1）$a^{-2} \div a^5$； （2）$(a^{-1}b^2)^3$；

（3）$\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^{-2}$； （4）$a^{-2}b^2 \cdot (a^2b^{-2})^{-3}$.

解：（1）$a^{-2} \div a^{5}=a^{-2-5}=a^{-7}=\frac{1}{a^{7}}$；

（2）$(a^{-1}b^{2})^{3}=(a^{-1})^{3}(b^{2})^{3}=a^{-3}b^{6}=\frac{b^{6}}{a^{3}}$；

（3）$\left(\frac{b^{3}}{a^{2}}\right)^{-2}=\frac{(b^{3})^{-2}}{(a^{2})^{-2}}=\frac{b^{-6}}{a^{-4}}=a^{4}b^{-6}=\frac{a^{4}}{b^{6}}$；

（4）
$$\begin{aligned} a^{-2}b^{2}\cdot(a^{2}b^{-2})^{-3} &= a^{-2}b^{2}\cdot(a^{2})^{-3}(b^{-2})^{-3} \\ &= a^{-2}b^{2}\cdot a^{-6}b^{6}=a^{-8}b^{8} \\ &= \frac{b^{8}}{a^{8}}. \end{aligned}$$

巩固运用14.8

1. 填空：

（1）$3^{0}=$________，$3^{-2}=$________；

（2）$(-3)^{0}=$________，$(-3)^{-2}=$________；

（3）$b^{0}=$________，$b^{-2}=$________ $(b\neq0)$.

2. 计算：

（1）$(-3ab^{-1})^{3}$；　　（2）$(x^{3}y^{-2})^{-2}$.

3. 计算：

（1）$3a^{-2}b\cdot 2ab^{-2}$；　　（2）$4xy^{2}\div(-2x^{-2}y)$；

（3）$x^{2}y^{-3}(x^{-1}y)^{3}$.

我们已经知道，一些较大的数适合用科学记数法表示. 例如，光速约为 3×10^{8} m/s，太阳半径约为 6.96×10^{5} km，2014 年世界人口数约为 7.2×10^{9} 等.

有了负整数指数幂后，小于 1 的正数也可以用科学记数法表示. 例如，$0.000\ 01=10^{-5}$，$0.000\ 025\ 7=2.57\times10^{-5}$，$0.000\ 000\ 025\ 7=2.57\times10^{-8}$等，即小于 1 的正数可以用科学记数法表示为 $a\times10^{-n}$的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数. 这种形式更便于比较数的大小，例如 2.57×10^{-5}显然大于 2.57×10^{-8}，前者是后者的10^{3} 倍.

思考

对于一个小于 1 的正小数，如果小数点后至第一个非 0 数字前有 8 个 0，用科学记数法表示这个数时，10 的指数是多少？如果有 m 个 0 呢？

例 2 纳米（nm）是非常小的长度单位，$1\ \mathrm{nm}=10^{-9}\ \mathrm{m}$. 把 $1\ \mathrm{nm}^{3}$的物体放到乒乓球上，就如同把乒乓球放到地球上. $1\ \mathrm{mm}^{3}$ 的空间可以放多少个 $1\ \mathrm{nm}^{3}$ 的物体（物体之间的间隙忽略不计）？

> 纳米技术是一种高新技术，它可以在微观世界里直接探索 0.1～500 nm 范围内物质的特性，从而创造新材料. 这项技术有重要应用.

解： $1\ \mathrm{mm}=10^{-3}\ \mathrm{m}$，

$1\ \mathrm{nm}=10^{-9}\ \mathrm{m}$.

$(10^{-3})^{3}\div(10^{-9})^{3}=10^{-9}\div10^{-27}=10^{-9-(-27)}=10^{18}$.

$1\ \mathrm{mm}^{3}$ 的空间可以放10^{18}个 $1\ \mathrm{nm}^{3}$ 的物体.

10^{18}是一个非常大的数，它是 1 亿（即10^{8}）的 100 亿（即10^{10}）倍.

巩固运用14.9

1. 用科学记数法表示下列数：

   0.000 1，0.012，0.003 45，0.000 108.

2. 下列用科学记数法写出的数，原来分别是什么数？

   10^{-5}，2.1×10^{-4}，3.01×10^{-5}，7.2×10^{6}.

3. 计算：

   (1) $(2\times10^{-6})\times(3.2\times10^{3})$；

   (2) $(2\times10^{-6})^{2}\div(10^{-4})^{3}$.

阅读与思考

容器中的水能倒完吗

请看下面的问题：

一个容器装有 1 L 水，按照如下要求把水倒出：第 1 次倒出 $\frac{1}{2}$ L 水，第 2 次倒出的水量是 $\frac{1}{2}$ L 的 $\frac{1}{3}$，第 3 次倒出的水量是 $\frac{1}{3}$ L 的 $\frac{1}{4}$，第 4 次倒出的水量是 $\frac{1}{4}$ L 的 $\frac{1}{5}$……第 n 次倒出的水量是 $\frac{1}{n}$ L 的 $\frac{1}{n+1}$……按照这种倒水的方法，这 1 L 水经多少次可以倒完？

你可能会想到通过实验探寻问题的答案，但是实验中要精确地测量倒出的水量，当倒出的水量很小时测量的难度非

常大．我们不考虑实际操作因素，将上面的问题抽象成数学模型加以解决．

容易列出倒 n 次水倒出的总水量为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}. \quad ①$$

根据分式的减法法则，

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

反过来，有

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \quad ②$$

利用②可以把①改写为

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right). \quad ③$$

合并③中的相反数，得 $1-\frac{1}{n+1}$，即倒 n 次水倒出的总水量为

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\ (\mathrm{L}).$$

可以发现，从数学上看，随着倒水次数 n 的不断增加，倒出的总水量 $\frac{n}{n+1}$ 也不断增加．然而，不论倒水次数 n 有多大，倒出的总水量 $\frac{n}{n+1}$ 总小于 1．因此，按这种方法，容器中的 1 L 水是倒不完的．

14.5 分式方程

现在回到本章引言中的问题.

为解决引言中提出的问题，我们得到了方程

$$\frac{90}{30+v}=\frac{60}{30-v}. \quad ①$$

方程①的分母中含未知数 v，像这样分母中含未知数的方程叫做**分式方程**（fractional equation）. 我们以前学习的方程都是整式方程，它们的未知数不在分母中.

思考

如何解分式方程①?

我们已经熟悉一元一次方程等整式方程的解法，但是分式方程的分母中含未知数，因此解分式方程是一个新的问题. 能否将分式方程化为整式方程呢? 我们自然会想到通过“去分母”实现这种转变.

分式方程①中各分母的最简公分母是 $(30+v)(30-v)$. 把方程①的两边乘最简公分母可化为整式方程，解这个整式方程可得方程①的解.

解： 方程①两边乘 $(30+v)\cdot(30-v)$，得

$$90(30-v)=60(30+v).$$

将方程①化成整式方程的关键步骤是什么?

解得

$$v=6.$$

检验：将 $v=6$ 代入①中，左边 $=\frac{5}{2}=$ 右边，因此 $v=6$ 是分式方程①的解.

由上可知，江水的流速为 6 km/h.

归纳

解分式方程①的基本思路是将分式方程化为整式方程，具体做法是“去分母”，即方程两边乘最简公分母. 这也是解分式方程的一般方法.

巩固运用14.10

解下列方程：

(1) $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-2}$；　　(2) $\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$；

(3) $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$.

下面我们再讨论一个分式方程

$$\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}. \quad ②$$

为去分母，在方程两边乘最简公分母 $(x-5)(x+5)$，

得整式方程

$$x+5=10.$$

解得

$$x=5.$$

$x=5$ 是原分式方程的解吗？

将 $x=5$ 代入原分式方程检验，发现这时分母 $x-5$ 和 x^2-25 的值都为 0，相应的分式无意义．因此，$x=5$ 虽是整式方程 $x+5=10$ 的解，但不是原分式方程 $\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$ 的解．实际上，这个分式方程无解．

思考

上面两个分式方程中，为什么 $\frac{90}{30+v}=\frac{60}{30-v}$ ①去分母后所得整式方程的解就是①的解，而 $\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$ ②去分母后所得整式方程的解却不是②的解呢？

解分式方程去分母时，方程两边要乘同一个含未知数的式子（最简公分母）．方程①两边乘 $(30+v)(30-v)$，得到整式方程，它的解是 $v=6$．当 $v=6$ 时，$(30+v)(30-v)\neq 0$，这就是说，去分母时，①两边乘了同一个不为 0 的式子，因此所得整式方程的解与①的解相同．

方程②两边乘 $(x-5)(x+5)$，得到整式方程，它的解是 $x=5$．当 $x=5$ 时，$(x-5)(x+5)=0$，这就是说，去分母

时，②两边乘了同一个等于 0 的式子，这时所得整式方程的解使②出现分母为 0 的现象，因此这样的解不是②的解.

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为 0，因此应做如下检验：

将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

例 1 解方程 $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$.

解： 方程两边乘 $x(x-3)$，得

$$2x=3x-9.$$

解得

$$x=9.$$

检验：当 $x=9$ 时，$x(x-3)\neq 0$.

所以，原分式方程的解为 $x=9$.

例 2 解方程 $\frac{x}{x-1}-1=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

解： 方程两边乘 $(x-1)(x+2)$，得

$$x(x+2)-(x-1)(x+2)=3.$$

解得

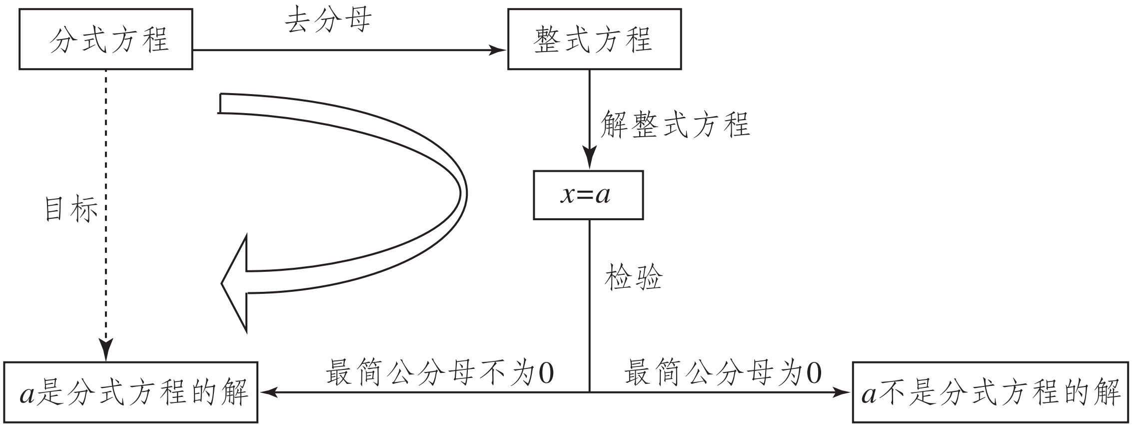
$$x=1.$$

检验：当 $x=1$ 时，$(x-1)(x+2)=0$，因此 $x=1$ 不是原分式方程的解.

所以，原分式方程无解.

归纳

解分式方程的一般步骤如下：



巩固运用14.11

解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2}{x+3}$；　　(2) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x}{3x+3}+1$；

(3) $\dfrac{x-3}{x-2}+1=\dfrac{3}{2-x}$；　　(4) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-1}$；

(5) $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4}{x^2-1}$；　　(6) $\dfrac{5}{x^2+x}-\dfrac{1}{x^2-x}=0$.

解决实际问题时，有时需要列、解分式方程.

例 3　两个工程队共同参与一个田径场的改造工程，甲队单独施工 1 个月完成总工程的$\dfrac{1}{3}$，这时增加了乙队，两队

又共同工作了半个月，总工程全部完成．哪个队的施工速度快？

分析： 甲队 1 个月完成总工程的$\frac{1}{3}$，设乙队单独施工 1 个月能完成总工程的$\frac{1}{x}$，那么甲队半个月完成总工程的$\frac{1}{6}$，乙队半个月完成总工程的$\frac{1}{2x}$，两队半个月完成总工程的$\frac{1}{6}+\frac{1}{2x}$，根据甲、乙两个工程队施工量的总和等于总工程量可以列出方程．

解： 设乙队单独施工 1 个月能完成总工程的$\frac{1}{x}$．记总工程量为 1，根据工程的实际进度，得

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2x}=1.$$

方程两边乘 $6x$，得

$$2x+x+3=6x.$$

解得

$$x=1.$$

检验：当 $x=1$ 时，$6x\neq 0$．

所以，原分式方程的解为 $x=1$．

由上可知，若乙队单独施工 1 个月可以完成全部任务，对比甲队 1 个月完成任务的$\frac{1}{3}$，可知乙队的施工速度快．

例 4 某次列车平均提速 v km/h．用相同的时间，列车

提速前行驶 s km，提速后比提速前多行驶 50 km，提速前列车的平均速度为多少？

表达问题时，用字母不仅可以表示未知数（量），也可以表示已知数（量）.

分析：这里的字母 v，s 表示已知数据，设提速前列车的平均速度为 x km/h，那么提速前列车行驶 s km所用时间为 $\frac{s}{x}$ h，提速后列车的平均速度为 $(x+v)$km/h，提速后列车运行 $(s+50)$km 所用时间为 $\frac{s+50}{x+v}$ h. 根据行驶时间的等量关系可以列出方程.

解：设提速前这次列车的平均速度为 x km/h，则提速前它行驶 s km 所用时间为 $\frac{s}{x}$ h；提速后列车的平均速度为 $(x+v)$km/h，提速后它行驶 $(s+50)$km 所用时间为 $\frac{s+50}{x+v}$ h.

根据行驶时间的等量关系，得

$$\frac{s}{x}=\frac{s+50}{x+v}. \qquad ①$$

方程两边乘 $x(x+v)$，得

$$s(x+v)=x(s+50).$$

解得

$$x=\frac{sv}{50}.$$

检验：由 v，s 都是正数，得 $x=\frac{sv}{50}$时，$x(x+v)\neq0$.

所以，原分式方程的解为 $x=\frac{sv}{50}$.

答：提速前列车的平均速度为$\frac{sv}{50}$ km/h.

在上面例题中，出现了用一些字母表示已知数据的形式，这在分析问题寻找规律时经常出现. 方程①是以 x 为未知数的分式方程，其中 v，s 是已知数，根据它们所表示的实际意义可知，它们是正数.

巩固运用14.12

1. 某地突然停电，该地供电局组织电工进行抢修，供电局距离抢修工地 15 km. 抢修车装载着所需材料先从供电局出发，15 min 后，电工乘车从同一地点出发，结果他们同时到达抢修工地. 已知电工所乘车的速度是抢修车速度的 1.5 倍，求这两辆车的速度.
2. A，B 两种机器人都被用来搬运化工原料. A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 30 kg，A 型机器人搬运 900 kg 所用时间与 B 型机器人搬运 600 kg 所用时间相等. 两种机器人每小时分别搬运多少化工原料?
3. 张明 3 h 清点完一批图书的一半，李强加入清点另一半图书的工作，两人合作 1.2 h 清点完另一半图书. 李强单独清点这批图书需要几小时?

4. 甲、乙两个学生参加跳绳比赛，相同时间内甲跳 180 个，乙跳 210 个. 已知乙每分比甲多跳 20 个，甲、乙每分各跳多少个?

数学活动

探究比例的性质

找一组都不为 0 的数 a，b，c，d，使得分式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$成立（即 a，b，c，d 成比例）. 由这组数值计算下面各组中的两个分式的值，看看它们之间有什么关系.

（1）$\frac{a}{c}$ 和 $\frac{b}{d}$；

（2）$\frac{b}{a}$ 和 $\frac{d}{c}$；

（3）$\frac{a+b}{b}$ 和 $\frac{c+d}{d}$；

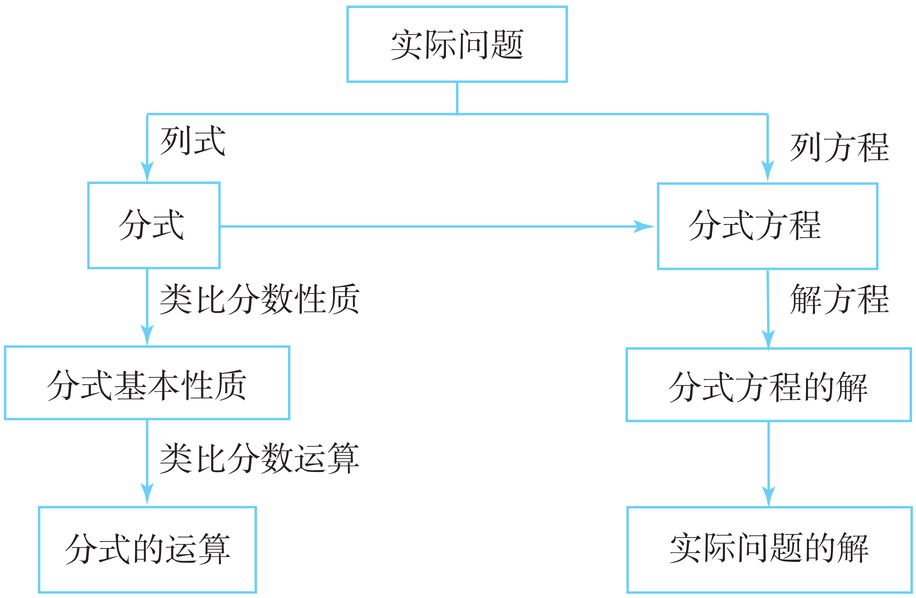
（4）$\frac{a+b}{a-b}$ 和 $\frac{c+d}{c-d}$ （$a\neq b$，$c\neq d$）.

多找几组这样的数 a，b，c，d 试一试.

试猜想各组中的两个分式之间的关系，并证明你的猜想.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 分式与分数具有类似的形式，也具有类似的性质和运算. 如何用式子形式表示分式的基本性质和运算法则？通过比较分数和分式的基本性质和运算法则，你有什么认识？类比的方法在本章的学习中起什么作用？

2. 分式怎样约分和通分？依据是什么？

3. n 是正整数时，$a^{-n}(a\neq 0)$ 表示什么意思？整数指数幂有哪些运算性质？

4. 解分式方程的基本思路是什么？怎样使分式方程化为整式方程？为什么解分式方程时要检验？

5. 方程是一种刻画实际问题中数量关系的重要数学模型，你能结合利用分式方程解决实际问题的实例，谈谈你的体会吗？

复习题 14

复习巩固

1. 下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{x}{3},\quad \frac{1}{n},\quad \frac{1}{a+5},\quad \frac{a+5}{15},\quad \frac{z}{x^2y},\quad \frac{2ab^2}{(a+b)^2}.$$

2. 计算：

(1) $\frac{s-2t}{3s}\cdot\frac{6s^2}{s+2t}$； (2) $\frac{x-y}{x+y}\div(x-y)^2$；

(3) $\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a+1}$； (4) $\frac{u-2v}{u+2v}-\frac{2}{u^2-4v^2}$；

(5) $(x^{-2}y^3)^{-3}$； (6) $\left(\frac{-3x}{y^3z}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\frac{2m}{3n}\cdot\left(\frac{3n}{p}\right)^2\div\frac{mn}{p^2}$； (2) $a^2b^3\cdot(ab^2)^{-2}$；

(3) $\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$； (4) $\left(\frac{pq}{2r}\right)^3\div\frac{2p}{r^2}+\frac{1}{2q}$；

(5) $1\div\left(2x+\frac{1-x^2}{x}\right)$；

(6) $\frac{a-b}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)$.

4. 解下列方程：

(1) $\frac{5x+2}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}$； (2) $\frac{2x}{2x-5}-\frac{2}{2x+5}=1$.

5. x 满足什么条件时下列分式有意义？

(1) $\frac{x-2}{2x+1}-\frac{1}{x-2}$;　　(2) $\frac{3x}{x+2}\div\frac{x-2}{2x-3}$.

6. 什么情况下 $2(x+1)^{-1}$ 与 $3(x-2)^{-1}$ 的值相等?

综合运用

7. 一块麦田有 m hm²，甲收割完这块麦田需 n h，乙比甲少用 0.5 h 就能收割完这块麦田. 两人一起收割完这块麦田需要多少小时?

8. 甲、乙两人分别从距目的地 6 km 和 10 km 的两地同时出发，甲、乙的速度比是 3∶4，结果甲比乙提前 20 min 到达目的地. 求甲、乙的速度.

9. 某工厂现在平均每天比原计划多生产 50 台机器，现在生产 600 台机器所需时间与原计划生产 450 台机器所需时间相同. 现在平均每天生产多少台机器?

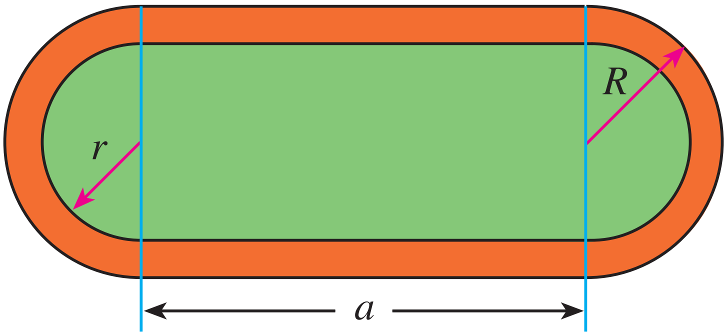
10. 一辆汽车开往距离出发地 180 km 的目的地，出发后第一小时内按原计划的速度匀速行驶，一小时后以原来速度的 1.5 倍匀速行驶，并比原计划提前 40 min 到达目的地. 求前一小时的行驶速度.

拓广探索

11. 一个分数的分母比它的分子大 5，若这个分数的分子加上 14，分母减去 1，所得到的分数为原分数的倒数. 求这个数.

12. 如图，运动场两端的半圆形跑道外径为 R，内径为 r，中间为直跑道，整个跑道总面积为 S. 试用

含 S，R，r 的式子表示直跑道的长 a.



（第 12 题）

第十五章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系．现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题．例如，在长跑比赛中以什么速度冲刺能超过前面的人？如果某地明年空气质量良好（二级以上）的天数要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数至少是多少？……这些问题中就蕴含了不等关系．对于这样的问题，我们常常把要比较的对象数量化，分析其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）而得出结论．这样的思路与利用方程（组）研究相等关系是类似的．

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，讨论不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用这些知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用．

15.1 不等式

15.1.1 不等式及其解集

问题 1 聪聪和慧慧玩跷跷板，聪聪在左，慧慧在右，两人到支点的距离相等．书包的质量为 2 kg，慧慧的身体质量为 26 kg．在两人都不用力的前提下，如果聪聪背着书包，当聪聪的质量为多少千克时，跷跷板会出现左低右高的情况？如果慧慧背着书包，当聪聪的质量为多少千克时，跷跷板会出现左低右高的情况？

分析： 设聪聪的质量为 p kg，

（1）如果聪聪背着书包，当跷跷板左低右高时，则

$$p+2>26; \quad ①$$

（2）如果慧慧背着书包，当跷跷板左低右高时，则

$$p>26+2. \quad ②$$

问题 2　某校有 250 名学生打算参加社会实践活动，学校决定派 20 名老师进行陪同．若一辆汽车满额为 40 人，学校至少需要安排多少辆这样的汽车？

分析： 设学校至少安排 x 辆这样的汽车，则

$$40x>250+20. \quad ③$$

像①②③这样用符号“$>$”或“$<$”表示大小关系的式子，叫做**不等式**（inequality）．像 $a+2\neq a-2$ 这样用符号“$\neq$”表示不等关系的式子也是不等式．

有些不等式中不含未知数，例如 $3<4$，$-1>-2$．有些不等式中含有未知数，例如①和②式中字母 p 表示未知数．

例 1　用不等式表示下列语句：

（1）a 是正数；

（2）x 与 5 的和小于 7；

（3）y 的 4 倍减 3 大于 8；

（4）使分式 $\dfrac{3}{x+1}$ 有意义的 x 的值．

分析： 列不等式的关键是把文字语言表示的不等关系转化为符号表示的不等式．（1）中的不等关系不明确，要先将“是正数”翻译成“大于 0”．

解：（1）$a>0$；

（2）$x+5<7$；

（3）$4y-3>8$；

（4）$x+1\neq 0$．

巩固运用15.1

1. 用“>”或“<”填空：

   (1) $7+3$____$4+3$；

   (2) $7+(-3)$____$4+(-3)$；

   (3) 7×3____4×3；

   (4) $7\times(-3)$____$4\times(-3)$.

2. 用不等式表示下列语句：

   (1) a 与 5 的和大于 2；　　(2) a 与 2 的差是负数；

   (3) a 的 4 倍大于 8；　　(4) a 的一半小于 3.

3. 学校操场跑道一圈长 400 m. 李刚某天训练时跑了 t 圈，若他这一天的训练量在 2 500 m 以上，如何用不等式表示？

4. 一辆匀速行驶的汽车在 11:20 距离 A 地 50 km，要在 12:00 之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

再来看问题 1 和问题 2，虽然①式和②式表示了跷跷板左低右高的条件，③式表示了学校至少需要安排的车辆数满足的条件，但是我们希望更明确地得出 p 和 x 应取哪些值. 例如，对不等式①，当 $p=29$ 时，$p+2>26$；当 $p=25$ 时，$p+2>26$；当 $p=24$ 时，$p+2=26$；当 $p=19$ 时，$p+2<26$. 这就是说，当 p 取某些值（如 29，25）时，不等式 $p+2>26$ 成立；当 p 取某些值（如 24，19）时，不等式 $p+2>26$ 不成立. 与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**. 例如，29 和 25 是不等式 $p+2>26$

的解，而 24 和 19 不是不等式 $p+2>26$ 的解.

思考

除了 29 和 25，不等式 $p+2>26$ 还有其他解吗？如果有，这些解应满足什么条件？

可以发现，当 $p>24$ 时，不等式 $p+2>26$ 总成立；而当 $p<24$ 或 $p=24$ 时，不等式 $p+2>26$ 不成立. 这就是说，任何一个大于 24 的数都是不等式 $p+2>26$ 的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于 24 的数都不是不等式 $p+2>26$ 的解. 因此，$p>24$ 表示了能使不等式 $p+2>26$ 成立的 p 的取值范围，它可以在数轴上表示（图 15.1-1).

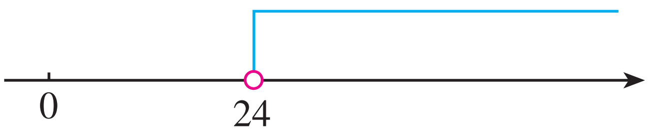


图 15.1-1

在表示 24 的点上画空心圆圈，表示不包含这一点.

由上可知，在问题 1 中，聪聪的身体质量是 24 kg 以上时，跷跷板会出现左低右高的情况.

由不等式②和③能得出怎样的结果？

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式

的**解集**（solution set）. 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.

巩固运用15.2

1. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

   -4，-2.5，0，1，2.5，3，3.2，4.8，8，12.

2. 直接说出下列不等式的解集：

   （1）$x+3>6$；（2）$2x<8$；

   （3）$x-2>0$；（4）$-5x<10$.

3. 在数轴上表示下列不等式：

   （1）$x>7$；（2）$x<-2$.

4. 学校计划购买盲人门球 5 个，盲人足球若干，总资金控制在 5 000 元以内. 若每个盲人门球 625 元，每个盲人足球 250 元，则学校最多能购买多少个盲人足球？

15.1.2　不等式的性质

对于某些简单的不等式，我们可以直接得出它们的解集. 例如，不等式 $x+3>6$ 的解集是 $x>3$，不等式 $2x<8$ 的解集是 $x<4$. 但是对于比较复杂的不等式，例如 $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需

要依据不等式的性质．为此，我们先来看看不等式有什么性质．

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为 0），结果仍相等．不等式是否也有类似的性质呢？

思考

用“>”或“<”填空，并总结其中的规律：

(1) $5>3$，$5+2\underline{\qquad}3+2$，$5-2\underline{\qquad}3-2$；

(2) $-1<3$，$-1+3\underline{\qquad}3+3$，$-1-3\underline{\qquad}3-3$；

(3) $6>2$，$6\times5\underline{\qquad}2\times5$，$6\times(-5)\underline{\qquad}2\times(-5)$；

(4) $-2<3$，$(-2)\times6\underline{\qquad}3\times6$，$(-2)\times(-6)\underline{\qquad}3\times(-6)$．

根据发现的规律填空：当不等式两边加或减同一个数（正数或负数）时，不等号的方向$\underline{\qquad\quad}$．当不等式两边乘同一个正数时，不等号的方向$\underline{\qquad\quad}$；而乘同一个负数时，不等号的方向$\underline{\qquad\quad}$．

换一些其他的数，验证这个发现．

一般地，不等式有以下性质．

不等式的性质 1 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.}$$

不等式的性质 2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).}$$

不等式的性质 3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).}$$

比较上面的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较等式的性质和不等式的性质，它们有什么异同?

例 2 设 $x>y$，用“$>$”或“$<$”填空：

(1) $x+1$____$y+1$； (2) $x-2$____$y-2$；

(3) $2x$ ____$2y$； (4) $-2x$____$-2y$.

分析：运用不等式的性质即可得出结论.

解：(1) $>$；(2) $>$；(3) $>$；(4) $<$.

巩固运用15.3

1. 填空：

(1) 若 $x+1>0$，两边都减去 1，得__________.

(依据：______________.)

(2) 若 $2x>-4$，两边都除以 3，得__________.

(依据：______________.)

(3) 若 $-3y<9$，两边都除以 -3，得________.

(依据：________.)

2. 设 $a>b$，用"$>$"或"$<$"填空：

(1) $a+2$____$b+2$；(2) $a-3$____$b-3$；

(3) $-4a$____$-4b$；(4) $\frac{a}{2}$____$\frac{b}{2}$；

(5) $2a+5$____$2b+5$；(6) $-3a+1$____$-3b+1$.

3. 用"$>$"或"$<$"填空：

(1) 已知 $a>-b$，则 $a+b$____0；

(2) 已知 $a<b$，则 $a-b$____0；

(3) 已知 $ac^2>bc^2$，则 a____b.

例 3 利用不等式的性质解下列不等式：

(1) $x-7>26$；(2) $3x<2x+1$；

(3) $\frac{2}{3}x>50$；(4) $-4x>3$.

分析：解不等式，就是要借助不等式的性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$ (a 为常数) 的形式.

解：(1) 根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$
$$x>33.$$

(2) 根据不等式的性质 1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x+1-2x,$$
$$x<1.$$

（3）根据不等式的性质 2，不等式两边乘$\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x>\frac{3}{2}\times 50,$$
$$x>75.$$

（4）根据不等式的性质 3，不等式两边除以-4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4}<\frac{3}{-4},$$
$$x<-\frac{3}{4}.$$

不等式的解集也可以在数轴上表示，如上例中不等式$x-7>26$的解集在数轴上的表示如图 15.1-2 所示.

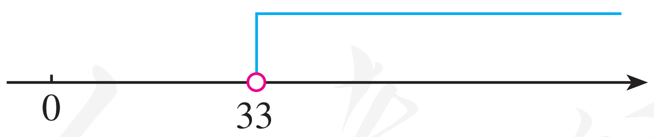


图 15.1-2

不等式$3x<2x+1$的解集在数轴上的表示如图 15.1-3 所示.

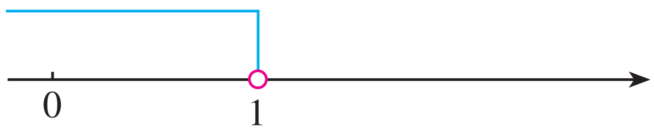


图 15.1-3

请你在数轴上表示例 3 中其他两个不等式的解集.

巩固运用15.4

用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$x+5>-1$；　　（2）$4x<3x-5$；

（3）$2x>10$；　　（4）$\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$；

（5）$-2x>-10$；　　（6）$-x-2<1$.

像 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系. 例如，据科学家测定，太阳表面的温度不低于 6 000 ℃，设太阳表面的温度为 t（单位：℃），则 $t\geqslant 6\ 000$ ℃. 又如，公路上有对汽车的限速标志（图 15.1-4），表示汽车在该路段行驶的速度不得超过 60 km/h，用 v（单位：km/h）表示汽车的速度，则 $v\leqslant 60$ km/h. 符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”. $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质.

图 15.1-4

符号“$\geqslant$”与“$>$”的意思有什么区别？“$\leqslant$”与“$<$”呢？

例 4　如图 15.1-5，某长方体形状的容器长 5 cm，宽 3 cm，高 10 cm. 容器内原来有水的高度为

3 cm，现准备向它继续注水．用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围．

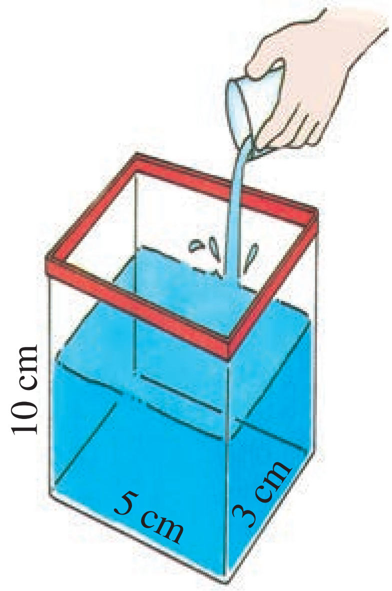


图 15.1-5

解： 新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$

$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 15.1-6 所示（在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数）.

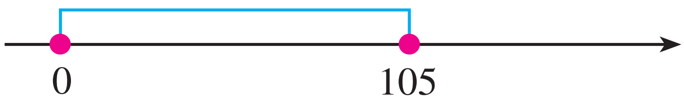


图 15.1-6

巩固运用15.5

1. 用不等式表示下列语句并写出解集，并在数轴上表示解集：

（1）x 的 2 倍大于或等于 1；

（2）x 与 3 的和不小于 6；

（3）y 与 1 的差不大于 0；

（4）y 的 14 倍小于或等于-7.

2. 某网球包装盒上标注着“网球直径尺寸（单位：mm）：65±2”，请用不等式表示网球直径尺寸的取值范围.

3. 一罐运动饮料净重约 300 g，罐上注有“蛋白质含量≥0.6%”，其中蛋白质的含量为多少克？

4. 某品牌小型播放器的单价在 30 元至 45 元之间（包括 30 元和 45 元），买 5 个这样的播放器需要多少钱？（用适当的不等式表示）

15.2 一元一次不等式

我们已经知道了什么是不等式以及不等式的性质. 本节我们将学习一元一次不等式及其解法，并用它解决一些实际问题.

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26，3x<2x+1，\frac{2}{3}x>50，-4x>3.$$

它们有哪些共同特征?

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1. 类似于一元一次方程，含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式，叫做**一元一次不等式**（linear inequality in one unknown）.

从上节我们知道，不等式

$$x-7>26$$

的解集是

$$x>33.$$

这个解集是通过“不等式两边都加 7，不等号的方向不

变”而得到的，事实上，这相当于由 $x-7>26$ 得 $x>26+7$. 这就是说，解不等式时也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程相类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

例 1 解不等式 $5x>2x+3$，并在数轴上表示解集.

解： 移项，得

$$5x-2x>3.$$

合并同类项，得

$$3x>3.$$

系数化为 1，得

$$x>1.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15.2-1 所示.

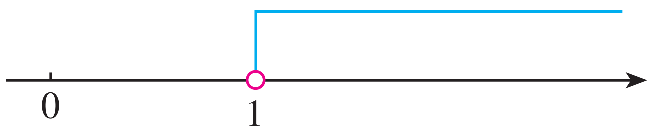


图 15.2-1

巩固运用15.6

解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+3>2$； (2) $-2x\geqslant x+9$；

(3) $5x+15<4x-1$； (4) $3x+7\geqslant x+1$；

(5) $8x+1\leqslant 4x+5$； (6) $3x-5<1+5x$.

例 2　解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$2(1+x)<3$；　　　　（2）$\dfrac{2+x}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{3}$.

解：（1）去括号，得

$$2+2x<3.$$

移项，得

$$2x<3-2.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为 1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15.2-2 所示.

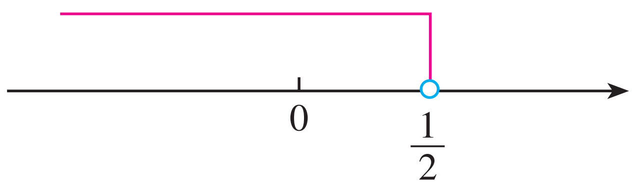


图 15.2-2

（2）去分母，得

$$3(2+x)\geqslant 2(2x-1).$$

去括号，得

$$6+3x\geqslant 4x-2.$$

移项，得

$$3x-4x\geqslant -2-6.$$

合并同类项，得

$$-x\geqslant -8.$$

系数化为 1，得

$$x \leqslant 8.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15.2-3 所示.

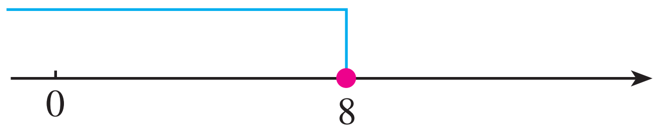


图 15.2-3

要特别注意，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

归纳

解一元一次方程，要根据等式的性质，将方程逐步化为 $x=a$ 的形式；而解一元一次不等式，则要根据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式.

巩固运用15.7

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+4)>2(4x+3)$；

(2) $6-4(x-4)\leqslant 2(x-1)$；

(3) $\dfrac{2x-1}{3}\leqslant\dfrac{3x-4}{6}$；

(4) $\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{2x-5}{3}$；

(5) $\dfrac{5x+1}{6}-2>\dfrac{x-5}{4}$；

(6) $\frac{y+2}{6}-\frac{2y-5}{3}\geqslant 1$.

2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？

(1) $2(x+1)$ 大于或等于 1；

(2) $4x$ 与 7 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；

(4) $3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

3. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较.

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 3 在长跑比赛中，张华跑在最前面，在离终点 100 m 时，他以 4 m/s 的速度向终点冲刺. 在他身后 10 m 处的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点（假设两人在冲刺过程中速度都保持不变）？

分析： 李明要在张华之前到达终点，从距离上看，他从张华开始冲刺到到达终点这段时间内，跑过的距离必须超过 110 m.

解： 设李明的冲刺速度为 x m/s，则

$$\frac{100}{4}x>110.$$

去分母，得

$$100x>440.$$

系数化为 1，得

$$x>4.4.$$

答：李明需以大于 4.4 m/s 的速度冲刺，才能够在张华之前到达终点.

巩固运用15.8

1. 小聪这学期第一次数学考试成绩得了 72 分，第二次数学考试成绩得了 86 分. 为了达到三次考试的平均成绩不少于 80 分的目标，他的第三次数学考试至少得多少分？
2. 一本 300 页的书，计划 10 天内读完. 前 5 天因各种原因只读完 100 页，从第 6 天起，平均每天至少读多少页才能按计划读完这本书？
3. 某种商品的进价为 800 元，标价为 1 200 元. 由于该商品积压，商场准备打折出售，但要保证利润不低于 5%，至多可打几折？

例 4 去年某市空气质量良好（二级以上）的天数与全年天数（365）之比达到 60%. 如果明年（365 天）这样的比值要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数要比去年至少增加多少？

分析：“明年这样的比值要超过 70%”指出了这个问题中蕴含

的不等关系，转化为不等式，即$\dfrac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.

解： 设明年空气质量良好的情况比去年增加了 x 天.

去年有 $365\times60\%$天空气质量良好，明年有（$x+365\times60\%$）天空气质量良好，并且

$$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%.$$

去分母，得

$$x+219>255.5.$$

移项，合并同类项，得

$$x>36.5.$$

由 x 应为正整数，得

$$x\geqslant37.$$

答： 明年空气质量良好的情况比去年至少要增加 37 天，才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

巩固运用15.9

1. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售. 两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？
2. 一部电梯的额定限载量为 1000 kg. 两人要用电梯把一批重物从底层搬到顶层，这两人的身体质量分别为 60 kg 和 70 kg，货物每箱的质量为 50 kg，问他们每次最多只能搬运重物多少箱.

3. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售总额超过 55 万元. 这批计算机至少有多少台?

4. 学校组织一批学生参加冬令营活动. 甲、乙两家旅行社的服务质量相同，且报价都是每人 200 元. 经过协商，甲旅行社表示可给每人七五折优惠；乙旅行社表示可先免去一人的旅游费用，其余八折优惠. 当学校至少有多少人参加时，选择甲旅行社支付的费用较少?

阅读与思考

选学

利用不等关系分析比赛

各种体育比赛不仅精彩纷呈，而且竞争激烈. 参赛者的比赛成绩往往互相联系，此消彼长. 对于比赛结果的分析，往往需要考虑问题中的不等关系，而这样的分析有时比解不等式更复杂，也更能锻炼逻辑思维能力. 一起来看下面的比赛问题.

射击比赛的问题： 某射击运动员在一次比赛中前 6 次射击共中 52 环. 如果他要打破 89 环（10 次射击）的纪录，第 7 次射击不能少于多少环?

思考：(1) 如果第 7 次射击成绩为 8 环，最后三次射击中要有几次命中 10 环才能破纪录？

(2) 如果第 7 次射击成绩为 10 环，最后三次射击中是否必须至少有一次命中 10 环才能破纪录？

分析：设第 7 次射击成绩为 x 环，由于最后三次射击最多共中 30 环，要破纪录必须满足

$$52+x+30>89.$$

解得

$$x>7.$$

这就是说，第 7 次射击不能少于 8 环才有可能破纪录.

(1) 如果第 7 次射击成绩为 8 环，那么前 7 次射击总成绩为 $52+8=60$（环），距 89 环还差 29 环. 这就是说，要打破纪录，最后三次射击的总成绩必须大于 29 环. 因此，最后三次成绩都必须在 10 环才能破纪录.

(2) 如果第 7 次射击成绩为 10 环，那么前 7 次射击总成绩为 $52+10=62$（环），距 89 环还差 27 环. 这就是说，要打破纪录，最后三次射击的总成绩必须大于 27 环. 假设最后三次射击的成绩没有一次是 10 环，那么三次射击的总成绩不大于 27 环，这样就不能打破纪录. 因此，最后三次射击中必须至少有一次命中 10 环才能破纪录.

15.3 一元一次不等式组

问题 用每分可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，那么将污水抽完所用时间的范围是什么？

设用 x min 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x > 1\,200, \quad ①$$

$$30x < 1\,500. \quad ②$$

类似于方程组，把这两个不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**（system of linear inequalities in one unknown），记作

$$\begin{cases} 30x>1\,200, \\ 30x<1\,500. \end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

类比方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.

由不等式①，解得

$$x>40.$$

由不等式②，解得

$$x<50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 15.3-1）.

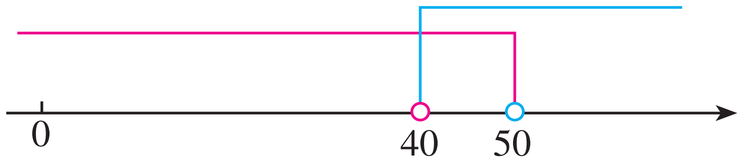


图 15.3-1

利用数轴体会：x 可取值的范围是两个不等式解集的公共部分.

从图 15.3-1 容易看出，x 取值的范围为

$$40<x<50.$$

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 min 而少于 50 min.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**. 解不等式组就是求它的解集.

例 1 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1, & ① \\ x+8<4x-1; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3\geqslant x+11, & ① \\ \dfrac{4x+2}{3}<2+x. & ② \end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 15.3-2）.

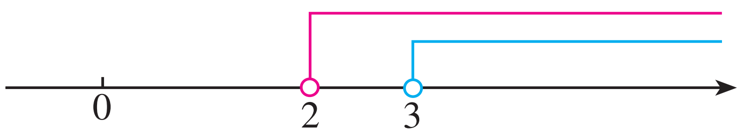


图 15.3-2

从图 15.3-2 可以找出两个不等式解集的公共部分，得不等式组的解集

$$x>3.$$

> 利用数轴可以确定不等式组的解集.

（2）解不等式①，得

$$x\geqslant 8.$$

解不等式②，得

$$x<4.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 15.3-3）.

图 15.3-3

从图 15.3-3 可以看到这两个不等式的解集没有公共部分，不等式组无解.

巩固运用15.10

1. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x>-3, \\ x\leqslant 4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x>-2, \\ x>-1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x<-2, \\ x<-5; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x<-1, \\ x\geqslant 2. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1\leqslant 3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} -2x-1>3, \\ 2x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-5>x+1,\\x+8<3x-2;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x+2\leqslant 4-x,\\1-2x\leqslant 2x-1;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x-3(x-2)\geqslant 4,\\\dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x+1}{2};\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+4)<2,\\\dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}.\end{cases}$

例 2　x 取哪些整数值时，不等式

$$5x+2>3(x-1)$$

与

$$\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$$

都成立？

分析： 求出这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值.

解： 解不等式组

$$\begin{cases}5x+2>3(x-1),\\\dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x,\end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以，x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分．利用数轴可以直观地表示不等式组的解集．

巩固运用15.11

1．解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 2x+7>3x-1, \\ \dfrac{x-2}{5}\geqslant 0; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 4(x-0.3)<0.5x+5.8, \\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}x>-\dfrac{1}{4}x+1. \end{cases}$

2．x 取哪些正整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

3．x 取哪些整数值时，$2\leqslant 2x-7<8$ 成立？

*4．七年级 50 名学生进行篮球训练．若每 5 人一组用 1 个篮球，则有些学生没有球；若每 6 人一组用 1 个篮球，则有一组人数不足 6 人．问用于篮球训练的篮球数是多少．

数学活动

统计资料表明，2010 年某市的城市建成区面积（简称建成区面积）为 344.48 km^2，城市建成区绿地面积（简称绿地面积）为 120.57 km^2，城市建成区绿地覆盖率（简称绿地率）为 35%. 2015 年该市建成区面积增加了 161.61 km^2 左右，绿地率超过了 37%.

根据上述资料，试用一元一次不等式解决以下问题：

这五年（2010—2015 年），该市增加的绿地面积超过了多少平方千米？

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题. 看看能不能用一元一次不等式解决这些问题.

小　结

一、本章知识结构图

实际问题（包含不等关系）

↓ 列不等式（组）

一元一次不等式或一元一次不等式组

↓ 解不等式（组）

一元一次不等式或一元一次不等式组的解集

↓ 检验

实际问题的答案

二、回顾与思考

1. 不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用. 在本章中，我们通过解决实际问题，主要学习了不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用它们解决一些数学问题和实际问题.

2. 总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较.

3. 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较. 结合例子说明：解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，而不等式的性质是变形的重要依据.

4. 如何解一元一次不等式组？结合例子说明，解不等式组就是求有关不等式的解集的公共部分.

5. 举例说明数轴在解不等式（组）中的作用.

6. 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程.

复习题 15

复习巩固

1. 用不等式表示下列语句：

(1) a 与 5 的和是正数；

(2) b 与 8 的差是负数；

(3) b 与 15 的和小于 27；

(4) b 与 12 的差大于 -5；

(5) c 的 4 倍大于或等于 8；

(6) c 的一半小于或等于 3；

(7) d 与 e 的和不小于 0；

(8) d 与 e 的差不大于 -2.

2. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 若 $a>b$，则 $a+3>b+3$；

(2) 若 $-3a>-3b$，则 $a>b$；

(3) 若 $a<b$，则 $6a+1<6b+1$.

3. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7)>27$；

(2) $12-4(3x-1)\leqslant 2(2x-16)$；

(3) $\dfrac{x+3}{5}<\dfrac{2x-5}{3}-1$；

(4) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-1}{2}\geqslant\dfrac{7}{12}$.

4. a 取什么值时，$15-7a$ 的值满足下列条件？

（1）大于 1；（2）小于 1；（3）等于 1.

5. 根据下列条件求 x 的正整数值：

（1）$x+2<6$；（2）$2x+5<10$；

（3）$\frac{x+3}{4}\geqslant\frac{2x-4}{3}$；（4）$\frac{1+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}-\frac{1}{2}$.

6. 解下列不等式组，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-4x;\end{cases}$

（4）$\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x,\\\frac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

7. $\frac{x+3}{5}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由.

8. x 取哪些整数值时，不等式 $1+3x>2(2x-1)$ 与 $3+x>\frac{1}{2}x+1$ 都成立？

9. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？

综合运用

10. 赵军说不等式 $a>2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a，就会出现 $1>2$ 这样的错误结论. 他的说法对吗?

11. 某次环保知识竞赛共有 20 道题，每一题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分. 小明要想得分超过 90 分，他至少要答对多少道题?

12. 一艘轮船从某江上游的 A 地匀速驶到下游的 B 地用了 10 h，从 B 地匀速返回 A 地用了不到 12 h，这段江水流速为 3 km/h，轮船在静水里的往返速度 v 不变. v 满足什么条件?

13. 老张与老李购买了相同数量的种兔. 一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\frac{2}{3}$. 一年前老张至少买了多少只种兔?

拓广探索

14. 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90% 收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按 95% 收费. 顾客到哪家商场购物花费少?

15. 一个两位数，其个位数字比十位数字大 2. 已知这个两位数大于 20 而小于 40，求这个两位数.

第十六章　三角形

三角形是一种基本的几何图形．从古埃及的金字塔到现代的建筑物，从巨大的钢架桥到微小的分子结构，到处都有三角形的形象．为什么在工程建筑、机械制造中经常采用三角形的结构呢？这与三角形的性质有关．

一个三角形有三个角、三条边．三个角之间有什么关系？三条边之间有什么关系？在小学我们通过测量得知三角形的内角和等于 180°，但测量常常有误差，三角形有无数多个，要说明任意一个三角形都符合这一规律，就不能只靠测量，而必须通过推理证明．本章我们就来证明这个结论．

三角形是最简单的多边形，也是认识其他图形的基础．本章将在学习与三角形有关的线段和角的基础上，学习多边形的有关知识，如借助三角形的内角和探究多边形的内角和．学习本章后，我们不仅可以进一步认识三角形，而且还可以了解一些几何中研究问题的基本思路和方法．

16.1 与三角形有关的线段

16.1.1 三角形的边

在本章引言中，我们提到许多三角形的实际例子.

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**（triangle）.

在图 16.1-1 中，线段 AB，BC，CA 是三角形的边. 点 A，B，C 是三角形的顶点. $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角.

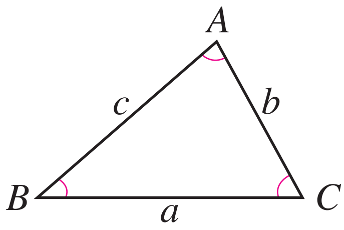


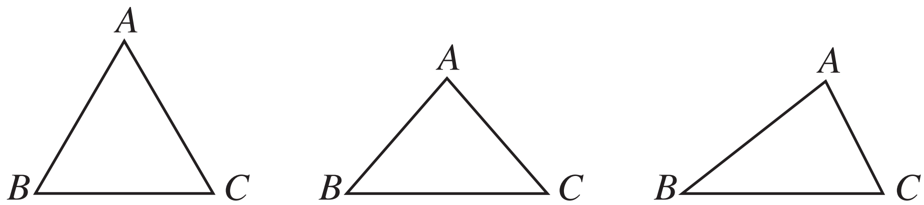
图 16.1-1

顶点是 A，B，C 的三角形，记作$\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a，b，c 来表示. 如图 16.1-1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

我们知道：三边都相等的三角形叫做等边三角形（图 16.1-2（1））；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（图 16.1-2（2））.

图 16.1-2（3）中的三角形是三边都不相等的三角形.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 16.1-2

思考

我们知道，按照三个内角的大小，可以将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形. 如何按照边的关系对三角形进行分类呢？说说你的想法，并与同学交流.

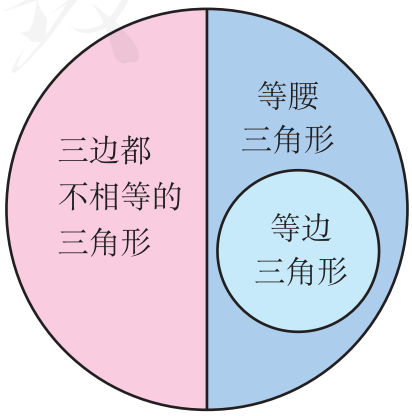
以“是否有边相等”，可以将三角形分为两类：三边都不相等的三角形和等腰三角形.

我们还知道，在等腰三角形中，相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形.

综上，三角形按边的相等关系分类如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{三边都不相等的三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$



三角形

下面探究三角形三边之间的大小关系.

探究

任意画一个$\triangle ABC$，从点 B 出发，沿三角形的边到点 C，有几条线路可以选择？各条线路的长有什么关系？能证明你的结论吗？

对于任意一个$\triangle ABC$，如果把其中任意两个顶点（例如 B，C）看成定点，由“两点之间，线段最短”可得

$$AB+AC>BC. \tag{①}$$

同理有

$$AC+BC>AB, \tag{②}$$

$$AB+BC>AC. \tag{③}$$

一般地，我们有

三角形两边的和大于第三边.

由不等式②③移项可得 $BC>AB-AC$，$BC>AC-AB$. 这就是说，**三角形两边的差小于第三边.**

例 用一条长为 18 cm 的细绳围成一个等腰三角形.

（1）如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是多少？

（2）能围成有一边的长是 4 cm 的等腰三角形吗？为什么？

解：（1）设底边长为 x cm，则腰长为 $2x$ cm.

$$x+2x+2x=18.$$

解得

$$x=3.6.$$

所以，三边长分别为 3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

（2）因为长为 4 cm 的边可能是腰，也可能是底边，所以需要分情况讨论.

如果 4 cm 长的边为底边，设腰长为 x cm，则

$$4+2x=18.$$

解得

$$x=7.$$

如果 4 cm 长的边为腰，设底边长为 x cm，则

$$2\times4+x=18.$$

解得

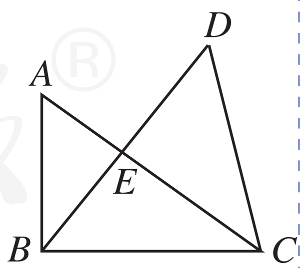
$$x=10.$$

因为 $4+4<10$，不符合三角形两边的和大于第三边，所以不能围成腰长是 4 cm 的等腰三角形.

由以上讨论可知，可以围成底边长是 4 cm 的等腰三角形.

巩固运用16.1

1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.



（第 1 题）

2. 如果三条线段中任意两条线段的和大于第三条线段，那么这三条线段能组成三角形. 下列长度的三条线段能否组成三角形？为什么？

   （1）3，4，8；（2）5，6，11；（3）5，6，10.

3. 长为 10，7，5，3 的四根木条，选其中三根组成三角形，有几种选法？为什么？

4. 一个等腰三角形的一边长为 6 cm，周长为 20 cm. 求其他两边的长.

5. （1）已知等腰三角形的一边长等于 5，一边长等于 6. 求它的周长.

（2）已知等腰三角形的一边长等于 4，一边长等于 9. 求它的周长.

16.1.2 三角形的高、中线与角平分线

与三角形有关的线段，除了三条边，还有我们已经学过的三角形的高. 如图 16.1-3，从△ABC 的顶点 A 向它所对的边 BC 所在直线画垂线，垂足为 D，所得线段 AD 叫做△ABC 的边 BC 上的**高**（altitude）.

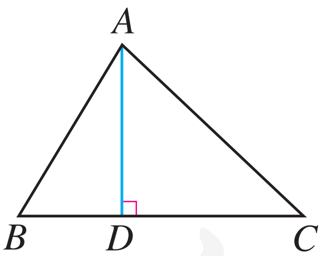


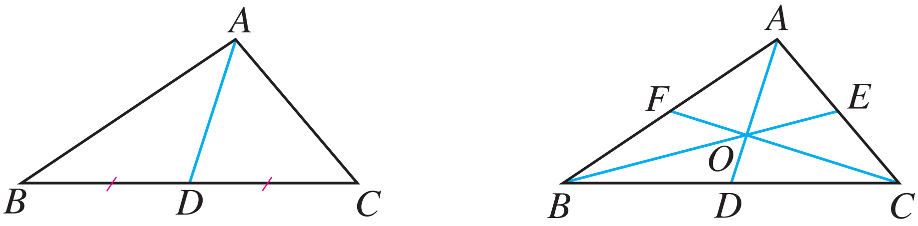
图 16.1-3

用同样方法，你能画出△ABC 的另两条边上的高吗？

我们再来看两种与三角形有关的线段.

如图 16.1-4（1），连接△ABC 的顶点 A 和它所对的边 BC 的中点 D，所得线段 AD 叫做△ABC 的边 BC 上的**中线**（median）.

用同样方法，你能画出△ABC 的另两条边上的中线吗？



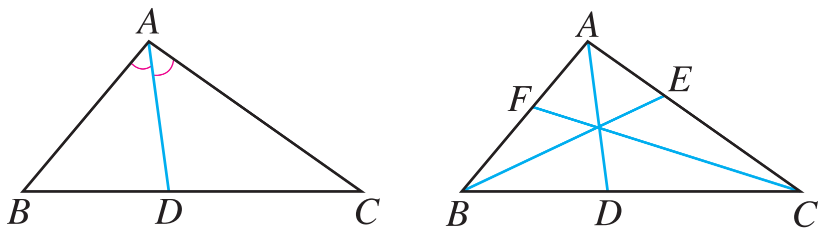
（1）　　　　（2）

图 16.1-4

如图 16.1-4（2），三角形的三条中线相交于一点．三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**．

> 平放一块质地均匀的三角形木板，从下向上顶住三条中线的交点，木板会保持平衡，这个平衡点就是这块三角形木板的重心．

如图 16.1-5（1），画$\angle A$ 的平分线 AD，与$\angle A$ 所对的边 BC 相交于点 D，所得线段 AD 叫做$\triangle ABC$ 的**角平分线**（angular bisector）．



（1）　　　　（2）

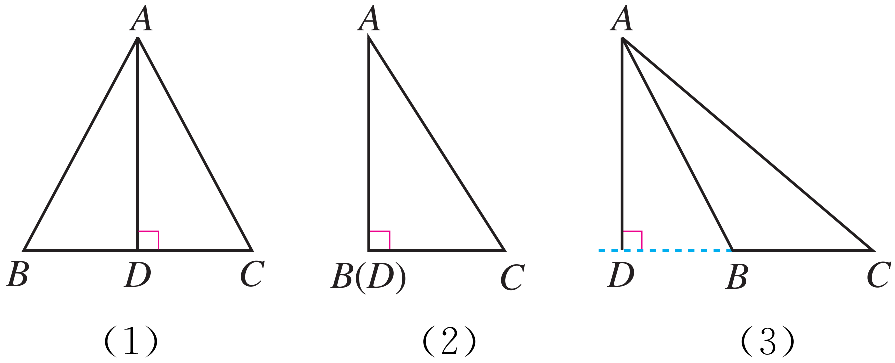
图 16.1-5

> 用同样方法，你能画出$\triangle ABC$ 的另两条角平分线吗？

如图 16.1-5（2），三角形的三条角平分线相交于一点．

巩固运用16.2

1. 如图，（1）（2）和（3）中的三个$\angle B$ 有什么不同？这三个三角形中，边 BC 上的高 AD 在各自三角形的什么位置？你能说出其中的规律吗？

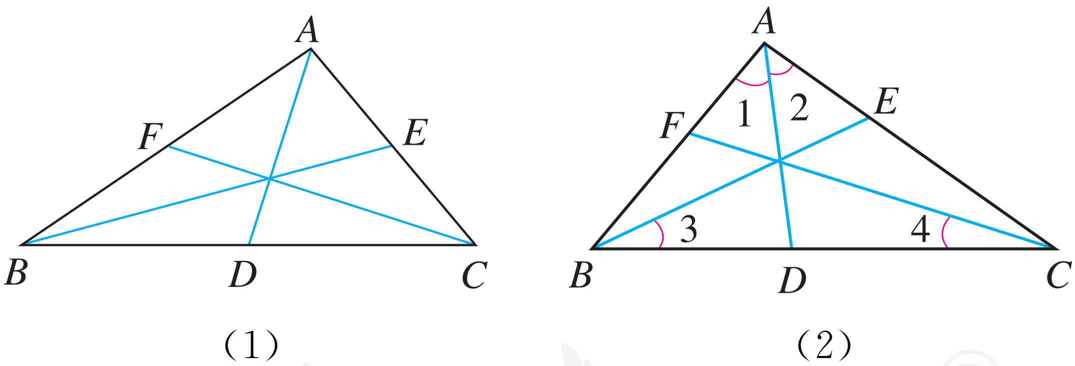


（第 1 题）

2. 填空：

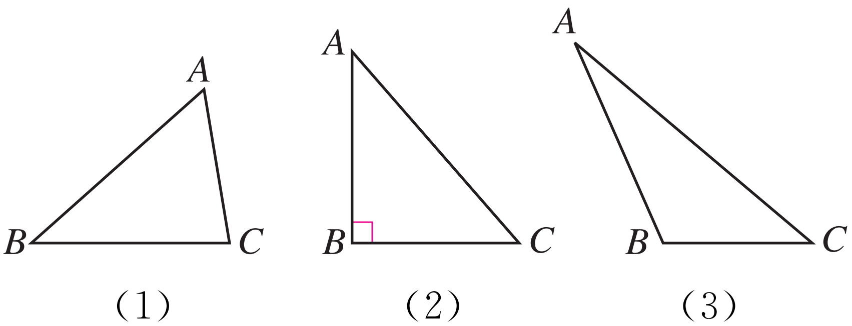
（1）如图（1），AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线，则 $AB=2$______，$BD=$______，$AE=\frac{1}{2}$______.

（2）如图（2），AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，则$\angle 1=$______，$\angle 3=\frac{1}{2}$______，$\angle ACB=2$______.



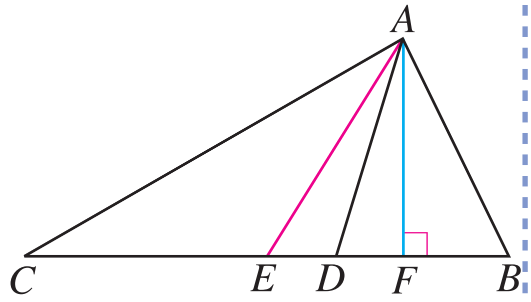
（第 2 题）

3. 对于下面每个三角形，过顶点 A 画出中线、角平分线和高.



（第 3 题）

4. 如图，在$\triangle ABC$中，AE是中线，AD是角平分线，AF是高. 填空：



（第 4 题）

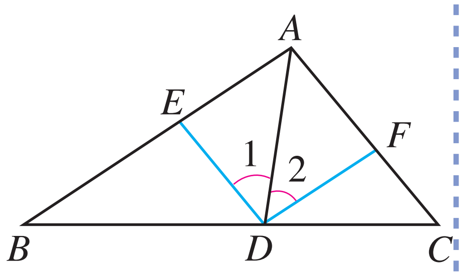
（1）$BE=$______$=\frac{1}{2}$______；

（2）$\angle BAD=$________$=\frac{1}{2}$________；

（3）$\angle AFB=$________$=90°$；

（4）$S_{\triangle ABC}=$________.

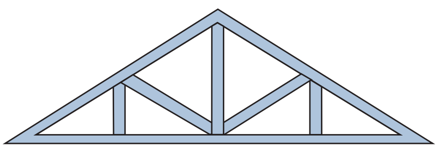
*5. 如图，AD是$\triangle ABC$的角平分线. $DE /\!/ AC$，DE与AB相交于点E，$DF /\!/ AB$，DF与AC相交于点F. 图中$\angle 1$与$\angle 2$有什么关系？为什么？



（第 5 题）

16.1.3　三角形的稳定性

工程建筑中经常采用三角形的结构，如屋顶钢架（图 16.1-6（1）），其中的道理是什么？盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条（图 16.1-6（2）），为什么要这样做呢？


（1）

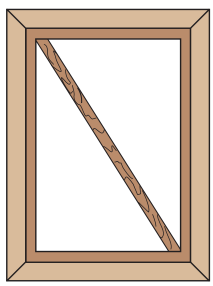

（2）

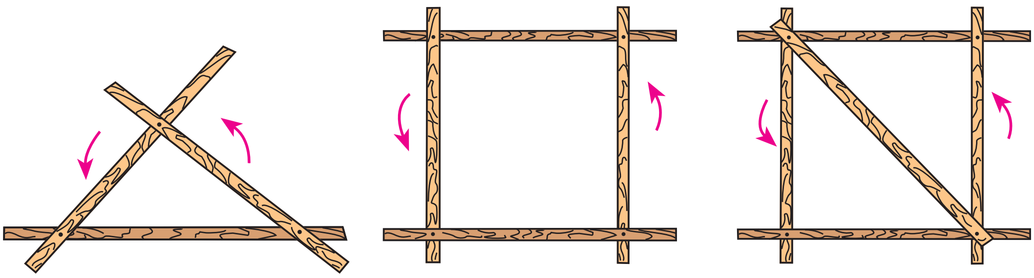
图 16.1-6

探究

如图 16.1-7（1），将三根木条用钉子钉成一个三角形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

如图 16.1-7（2），将四根木条用钉子钉成一个四边形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

如图 16.1-7（3），在四边形木架上再钉一根木条，将它的一对不相邻的顶点连接起来，然后再扭动它，这时木架的形状还会改变吗？为什么？



（1）　　（2）　　（3）

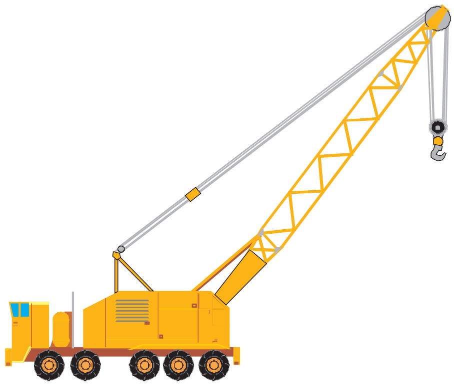
图 16.1-7

可以发现，三角形木架的形状不会改变，而四边形木架的形状会改变．这就是说，三角形是具有稳定性的图形，而四边形没有稳定性．

还可以发现，斜钉一根木条的四边形木架的形状不会改变．这是因为斜钉一根木条后，四边形变成两个三角形，由于三角形有稳定性，斜钉一根木条的窗框在未安装好之前也不会变形．

三角形的稳定性有广泛的应用，如钢架桥、起重机中采用了三角形的结构（图 16.1-8）．你能再举一些例子吗？

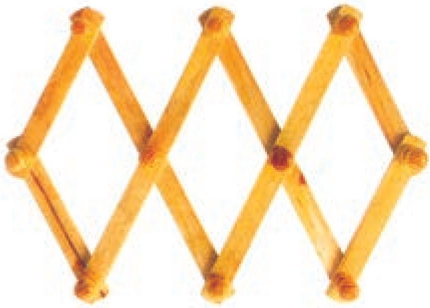
钢架桥



起重机

图 16.1-8

四边形的不稳定性也有广泛的应用，如活动挂架、伸缩门利用了四边形的不稳定性（图 16.1-9）.



活动挂架

伸缩门

图 16.1-9

巩固运用16.3

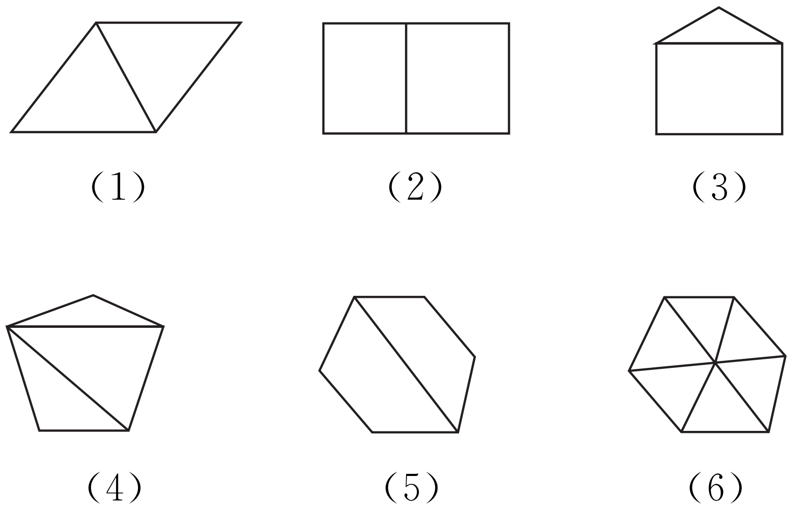
1. 选择题.

下列图形中有稳定性的是（　　）.

(A) 正方形　　(B) 长方形

(C) 直角三角形　　(D) 平行四边形

2. 下列图形中哪些具有稳定性？



（第 2 题）

16.2 与三角形有关的角

16.2.1 三角形的内角

我们在小学就已经知道，任意一个三角形的内角和等于 180°. 我们是通过度量或剪拼得出这一结论的.

通过度量或剪拼的方法，可以验证三角形的内角和等于 180°. 但是，由于测量常常有误差，这种“验证”不是“数学证明”，不能完全让人信服；又由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用上述方法一一验证所有三角形的内角和等于 180°. 所以，需要通过推理的方法去证明：任意一个三角形的内角和一定等于 180°.

探究

在纸上任意画一个三角形，将它的内角剪下拼合在一起，就得到一个平角. 从这个操作过程中，你能发现证明的思路吗？

在上面的拼合中，有不同的方法. 你用了图 16.2-1 中的哪种方法？

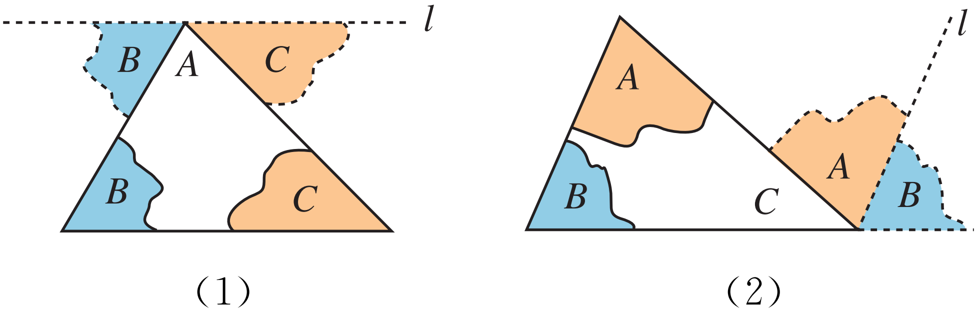


图 16.2-1

在图 16.2-1（1）中，$\angle B$ 和 $\angle C$ 分别拼在 $\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现一条过点 A 的直线 l，移动后的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 各有一条边在直线 l 上. 想一想，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 BC 有什么关系？由这个图你能想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

由上述拼合过程得到启发，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC（图 16.2-2），那么由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180°”这个结论.

已知：$\triangle ABC$（图 16.2-2）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

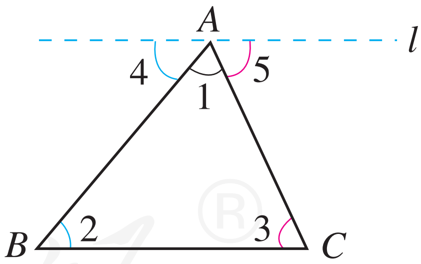


图 16.2-2

证明：如图 16.2-2，过点 A 作直线 l，使 $l /\!/ BC$.

∵ $l /\!/ BC$，

∴ $\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

同理 $\angle 3=\angle 5$.

∵ $\angle 1$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

∴ $\angle 1+\angle 4+\angle 5=180°$（平角定义）.

由图 16.2-1(2)，你能想出这个定理的其他证法吗？

$\therefore \quad \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）.

以上我们就证明了任意一个三角形的内角和都等于 180°，得到如下定理：

三角形内角和定理　三角形三个内角的和等于 180°.

例 1　如图 16.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle B=75^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

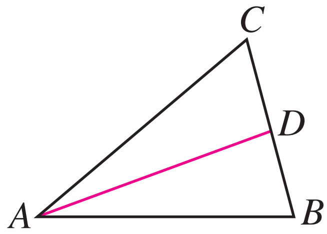


图 16.2-3

解： 由 $\angle BAC=40^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned}\angle ADB &=180^\circ-\angle B-\angle BAD\\ &=180^\circ-75^\circ-20^\circ=85^\circ.\end{aligned}$$

例 2　图 16.2-4 是 A，B，C 三岛的平面图，C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

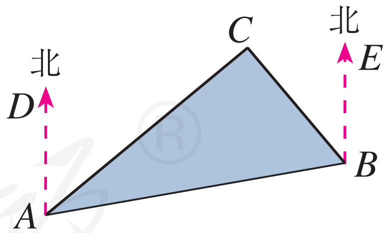


图 16.2-4

分析： A，B，C 三岛的连线构成 $\triangle ABC$，所求的 $\angle ACB$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角. 如果能求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$，就能求出 $\angle ACB$.

解： $\angle CAB = \angle BAD - \angle CAD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$.

由 $AD \parallel BE$，得

$\angle BAD + \angle ABE = 180^\circ$.

所以

$$\begin{aligned}\angle ABE &= 180^\circ - \angle BAD\\ &= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,\end{aligned}$$

$\angle ABC = \angle ABE - \angle EBC = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中，

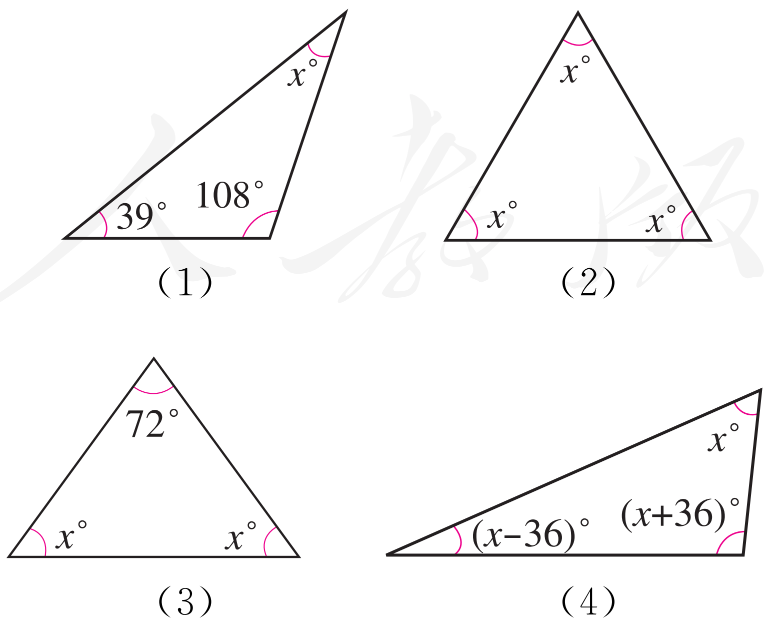
$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB\\ &= 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

你还能想出其他解法吗？

答： 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是 60°，从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 是 90°.

巩固运用16.4

1. 求出下列图形中的 x 的值：



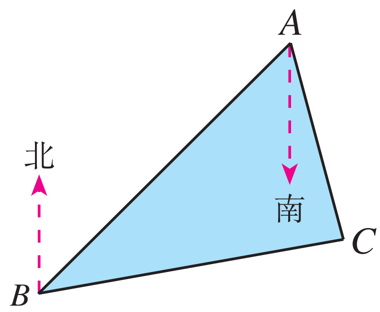
（第 1 题）

2. (1) 一个三角形最多有几个直角？为什么？

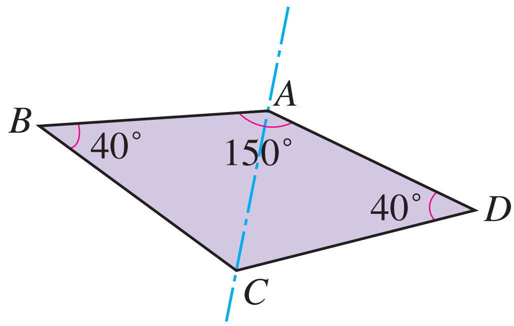
(2) 一个三角形最多有几个钝角？为什么？

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle A+10^\circ$，$\angle C=\angle B+10^\circ$. 求$\triangle ABC$的各内角的度数.

4. 如图，B处在A处的南偏西45°方向，C处在A处的南偏东15°方向，C处在B处的北偏东80°方向. 求$\angle ACB$的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

*5. 如图，一种滑翔伞的形状是左右对称的四边形$ABCD$，其中$\angle A=150^\circ$，$\angle B=\angle D=40^\circ$. 求$\angle C$的度数.

如图 16.2-5，在直角三角形ABC中，$\angle C=90^\circ$. 由三角形内角和定理，得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

即

$$\angle A+\angle B+90^\circ=180^\circ,$$

所以

$$\angle A+\angle B=90^\circ.$$

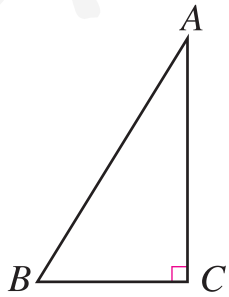


图 16.2-5

也就是说，**直角三角形的两个锐角互余**.

直角三角形可以用符号“Rt△”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt△ABC.

例 3 如图 16.2-6，$\angle C=\angle D=90^{\circ}$，$AD$，$BC$ 相交于点 E. $\angle CAE$ 与 $\angle DBE$ 有什么关系？为什么？

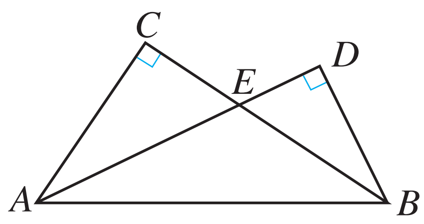


图 16.2-6

解： 在 Rt△ACE 中，

$$\angle CAE=90^{\circ}-\angle AEC.$$

在 Rt△BDE 中，

$$\angle DBE=90^{\circ}-\angle BED.$$

∵ $\angle AEC=\angle BED$，

∴ $\angle CAE=\angle DBE$.

思考

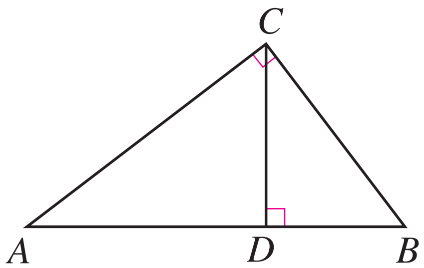
我们知道，如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形有两个角互余. 反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形吗？请你说说理由.

由三角形内角和定理可得：

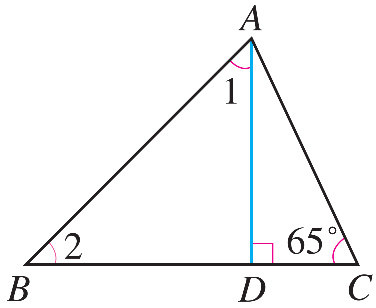
有两个角互余的三角形是直角三角形.

巩固运用16.5

1. 如图，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D. $\angle ACD$ 与 $\angle B$ 有什么关系？为什么？



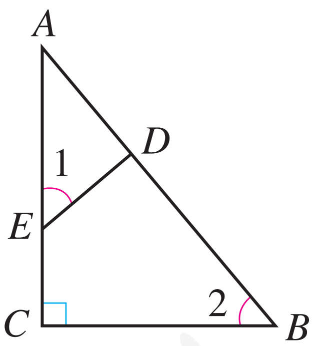
（第 1 题）



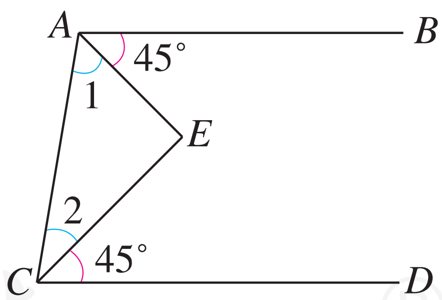
（第 2 题）

2. 如图，$AD\perp BC$，垂足为 D，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=65^\circ$. 求$\angle BAC$ 的度数.

3. 如图，$\angle C=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$. $\triangle ADE$ 是直角三角形吗？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AB\parallel CD$，$\angle BAE=\angle DCE=45^\circ$. 填空：

∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\angle 1+45^\circ+\angle 2+45^\circ=$________.

∴ $\angle 1+\angle 2=$________.

∴ $\angle E=$________.

16.2.2 三角形的外角

如图 16.2-7，把$\triangle ABC$ 的一边 BC 延长，得到$\angle ACD$. 像这样，三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做**三角形的外角**.

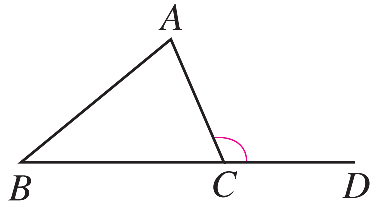


图 16.2-7

思考

如图 16.2-8，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=70°$，$\angle B=60°$，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角. 能由$\angle A$，$\angle B$ 求出$\angle ACD$ 吗？如果能，$\angle ACD$ 与$\angle A$，$\angle B$ 有什么关系？

任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？你能证明你的结论吗？

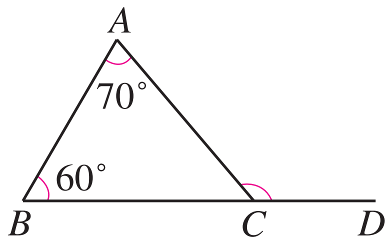


图 16.2-8

在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=180°-\angle A-\angle B=180°-70°-60°=50°$. 从而$\angle ACD=180°-\angle ACB=180°-50°=130°$，$\angle ACD=\angle A+\angle B$. 可以证明任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角都有这种关系. 下面我们来进行证明.

如图 16.2-7，在$\triangle ABC$ 中，

$$\angle ACB=180°-\angle A-\angle B.$$

从而

$$\begin{aligned}\angle ACD &= 180^\circ - \angle ACB \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle A - \angle B) \\ &= \angle A + \angle B.\end{aligned}$$

也就是说，由三角形内角和定理可以推出下面的推论：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论是由定理直接推出的结论. 和定理一样，推论可以作为进一步推理的依据.

例 4 如图 16.2-9，$\angle BAE$，$\angle CBF$，$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的三个外角，它们的和是多少？

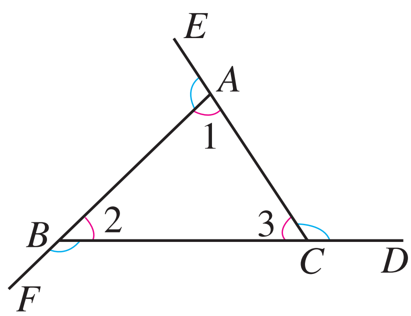


图 16.2-9

解： 由三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，得

$$\angle BAE = \angle 2 + \angle 3,$$
$$\angle CBF = \angle 1 + \angle 3,$$
$$\angle ACD = \angle 1 + \angle 2.$$

所以

$\angle BAE + \angle CBF + \angle ACD = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$.

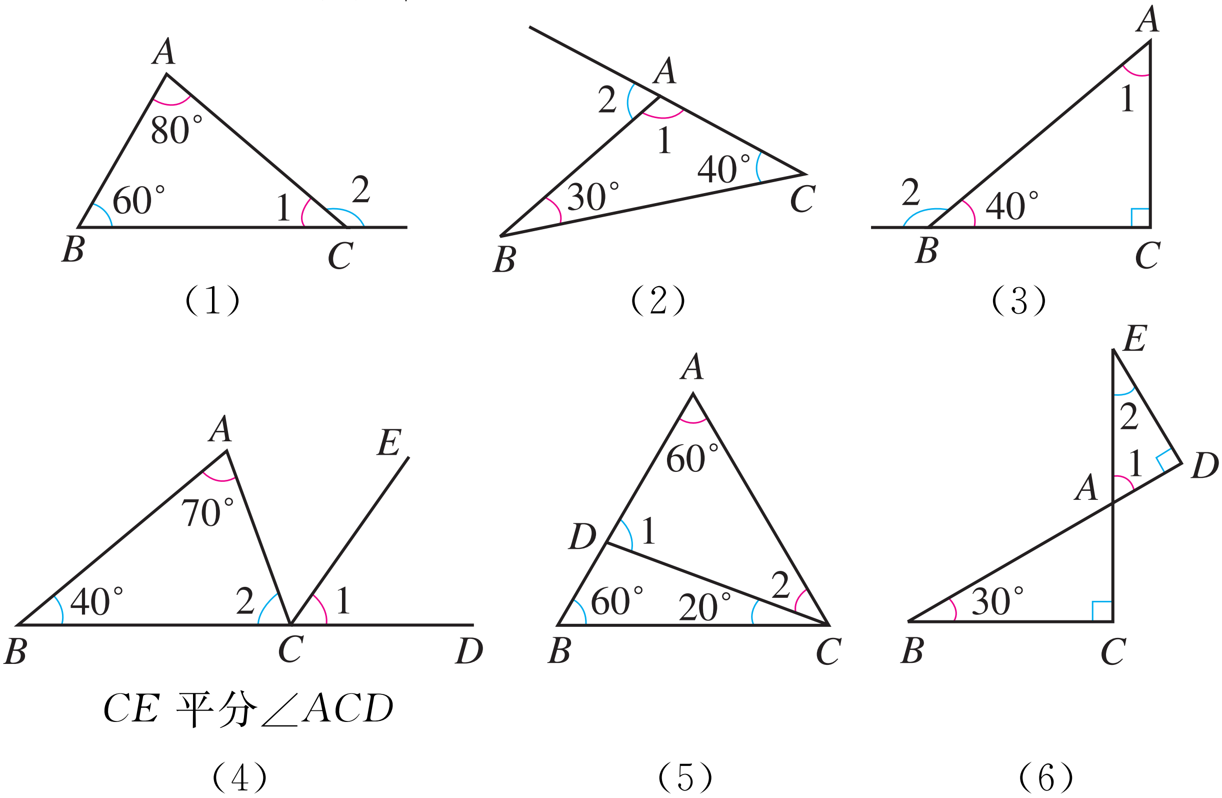
由 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$，得

$\angle BAE + \angle CBF + \angle ACD = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

你还有其他解法吗？

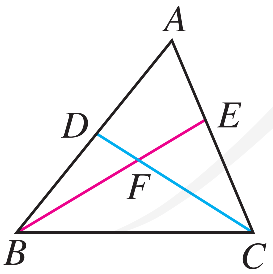
巩固运用16.6

1. 说出下列图形中∠1 和∠2 的度数：

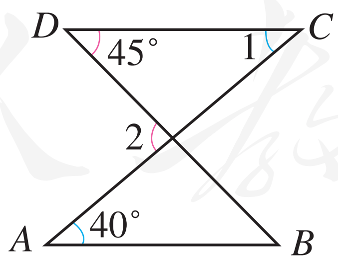


（第 1 题）

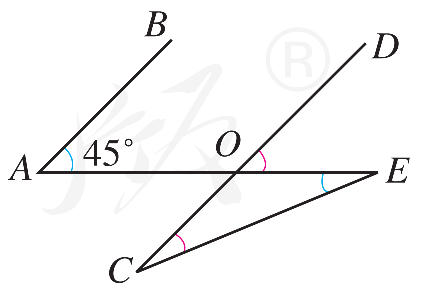
2. 如图，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，BE，CD 相交于点 F，$\angle A = 62°$，$\angle ACD = 35°$，$\angle ABE = 20°$. 求$\angle BDC$ 和$\angle BFD$ 的度数.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，$AB \parallel CD$，$\angle A = 40°$，$\angle D = 45°$. 求$\angle 1$ 和$\angle 2$ 的度数.

4. 如图，$AB \parallel CD$，$\angle A = 45°$，$\angle C = \angle E$. 求$\angle C$ 的度数.

为什么要证明

小明：我们观察任意一个三角形，量出它的内角，都能得出它的内角和等于 180°，为什么还要证明这个结论呢？

李老师：通过观察、试验等可以寻找规律，但是由于观察可能有误差，试验可能受干扰，考察对象可能不具有一般性等原因，一般说由观察、试验等所产生的“结论”未必正确．例如，让一个班的学生每人任意画一个三角形，再量出它的每个内角，计算三个内角的和，得到的结果未必全是 180°，可能有的会比 180°大些，有的会比 180°小些．

小明：如果观察细致，仪器精确，不产生误差，还需要证明吗？

李老师：仅通过观察、试验等就下结论有时也缺乏说服力．例如，即使不考虑误差等因素，当上面观察的所有结果全是 180°时，人们还会有疑问：“不同形状的三角形有无数个，我们画出并验证的只是其中有限个，其余的三角形的内角和是多少呢？能对所有的三角形都进行验证吗？”事实上，不管我们经历多长时间，画出多少个三角形，观察、试验的对象也是有限个．因此，要确认“三角形的内角和等于 180°”，就不能依靠度量的手段和观察、试验、验证的方法，而必须进行推理论证——对于一般的三角形，推出它的三个内角的和等于一个平角，从而得出“无论三角形的具体形状

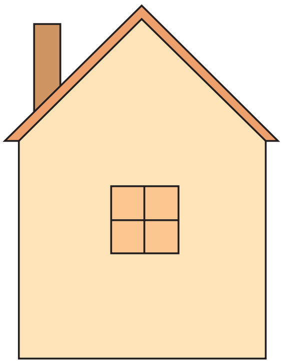
如何，它的内角和一定等于 180°”.

小明：现在我明白了，一个数学命题是否正确，需要经过理由充足、使人信服的推理论证才能得出结论. 观察、试验等是发现数学公式、定理的重要途径，而证明则是确认数学公式、定理的必要步骤.

16.3 多边形及其内角和

16.3.1 多边形

观察图 16.3-1 中的图片，其中的房屋结构、蜂巢结构等给我们以由一些线段围成的图形的形象．你能从图 16.3-1 中想象出几个由一些线段围成的图形吗？



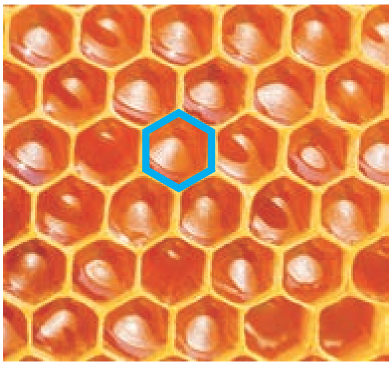


图 16.3-1

我们学过三角形．类似地，在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做**多边形**（polygon）．

组成多边形的线段叫做多边形的边．三角形是最简单的多边形．除三角形以外，如果一个多边形由 n 条边组成，那么这个多边形就叫做 n 边形．如图 16.3-2，螺母底面的边缘可以设计为六边形，也可以设计为八边形．

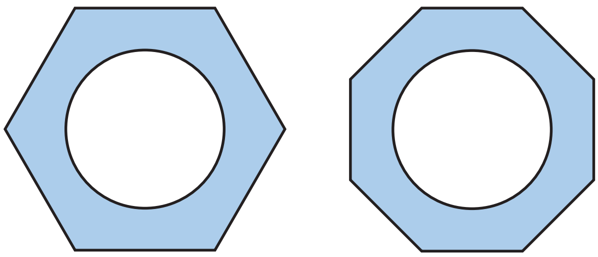


图 16.3-2

多边形相邻两边的公共

端点叫做多边形的顶点．多边形用表示它的各个顶点的字母来表示．图 16.3-3 中的五边形，可以按照顶点的顺序，记作五边形 $ABCDE$.

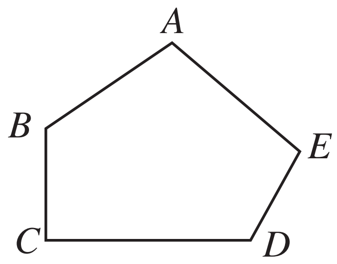


图 16.3-3

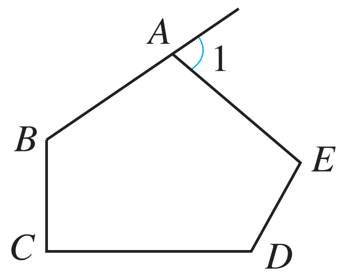


图 16.3-4

多边形相邻两边组成的角叫做多边形的内角．图 16.3-3 中的 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 是五边形 $ABCDE$ 的 5 个内角．多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角．图 16.3-4 中的$\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角.

连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的**对角线**（diagonal）．在图 16.3-5 中，AC，AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线.

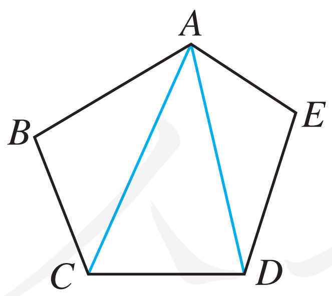
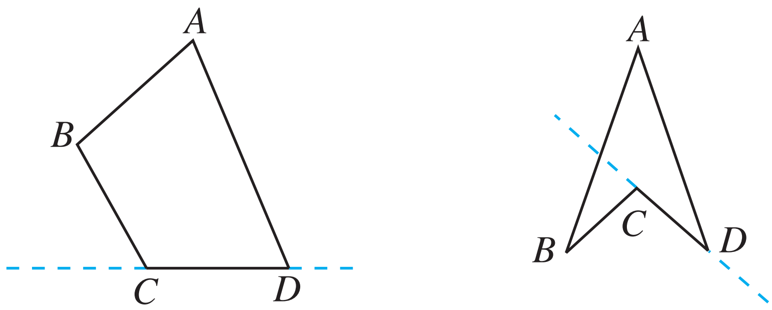


图 16.3-5

五边形 $ABCDE$ 共有几条对角线？请画出它的其他对角线.

如图 16.3-6（1），画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD）所在直线，整个四边形都在这条直线的同一侧，这样的四边形叫做凸四边形．而图 16.3-6（2）中的四边形 $ABCD$ 就不是凸四边形，因为画出边 CD（或 BC）所在直

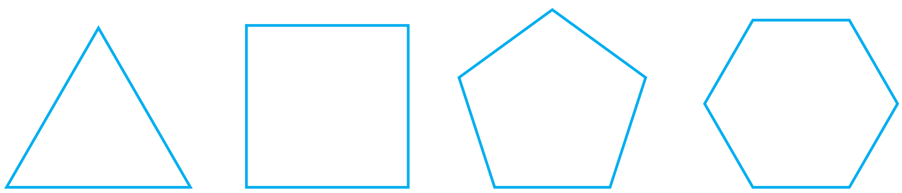
线，整个四边形不都在这条直线的同一侧．类似地，画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形．本节只讨论凸多边形．



（1）　（2）

图 16.3-6

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相等．像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）．图 16.3-7 是正多边形的一些例子．



正三角形　正方形　正五边形　正六边形

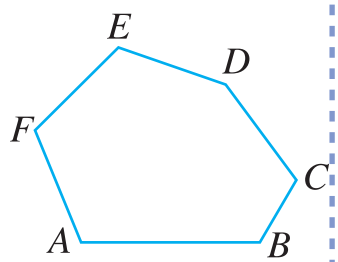
图 16.3-7

巩固运用16.7

1．（1）图中的多边形是几边形？写出它的边和内角．

（2）过顶点 A 画出这个多边形的一条对角线．

（3）画出这个多边形的一个外角．



（第 1 题）

2. 画出下列多边形的全部对角线：

（第 2 题）

3. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？

16.3.2 多边形的内角和

思考

我们知道，三角形的内角和等于 180°，正方形、长方形的内角和都等于 360°. 那么，任意一个四边形的内角和是否也等于 360°呢？你能利用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°吗？

要用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°，只要将四边形分成几个三角形即可.

如图 16.3-8，在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，则四边形 $ABCD$ 被分为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 两个三角形.

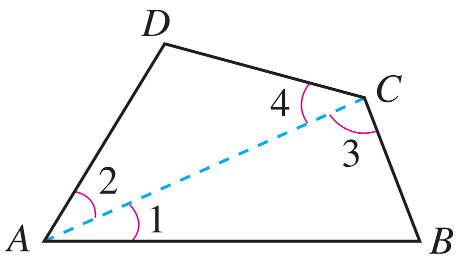


图 16.3-8

由此可得

$\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D$

$=\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle 3+\angle 4+\angle D$

$=(\angle 1+\angle B+\angle 3)+(\angle 2+\angle 4+\angle D)$.

$\because\quad \angle 1+\angle B+\angle 3=180^\circ$,

$\angle 2+\angle 4+\angle D=180^\circ$,

$\therefore\quad \angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D=180^\circ+180^\circ=360^\circ$.

即四边形的内角和等于 360°.

类比上面的过程，你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少吗？

观察图 16.3-9，填空：

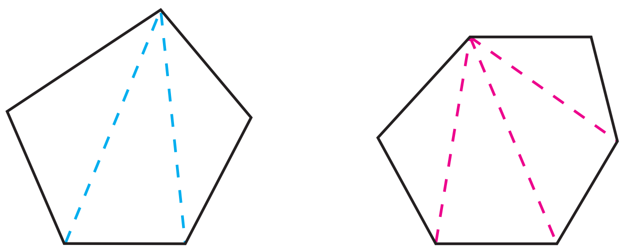


图 16.3-9

从五边形的一个顶点出发，可以画______条对角线，它们将五边形分为______个三角形，五边形的内角和等于 $180^\circ\times$______.

从六边形的一个顶点出发，可以画______条对角线，它们将六边形分为______个三角形，六边形的内角和等于 $180^\circ\times$______.

通过以上过程，你能发现多边形的内角和与边数的关系吗？

一般地，从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对

角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于 $180^\circ\times(n-2)$.

这样就得出了多边形内角和公式：

n 边形内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$.

把一个多边形分成几个三角形，还有其他分法吗？由新的分法，能得出多边形内角和公式吗？

例 1 如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

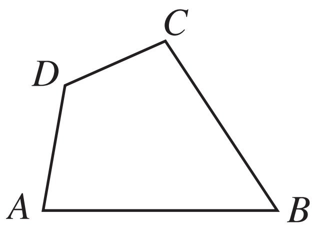


图 16.3-10

解： 如图 16.3-10，在四边形 $ABCD$ 中，

$$\angle A+\angle C=180^\circ.$$

$$\because\quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(4-2)\times180^\circ=360^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle B+\angle D=360^\circ-(\angle A+\angle C)=360^\circ-180^\circ=180^\circ.$$

这就是说，如果四边形的一组对角互补，那么另一组对角也互补.

例 2 (1) 一个多边形的内角和等于 $1\,080^\circ$，它是几边形？

(2) 一个多边形的各内角都等于 144°，它是几边形？

解： (1) 设这个多边形的边数是 n，则这个多边形的内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$，所以

$$(n-2)\times180^\circ=1\,080^\circ.$$

解得

$$n=8.$$

所以这个多边形是八边形.

(2) 设这个多边形的边数是 n，则这个多边形的内角和等于 $(n-2)\times180°$，所以

$$(n-2)\times180°=144°\times n.$$

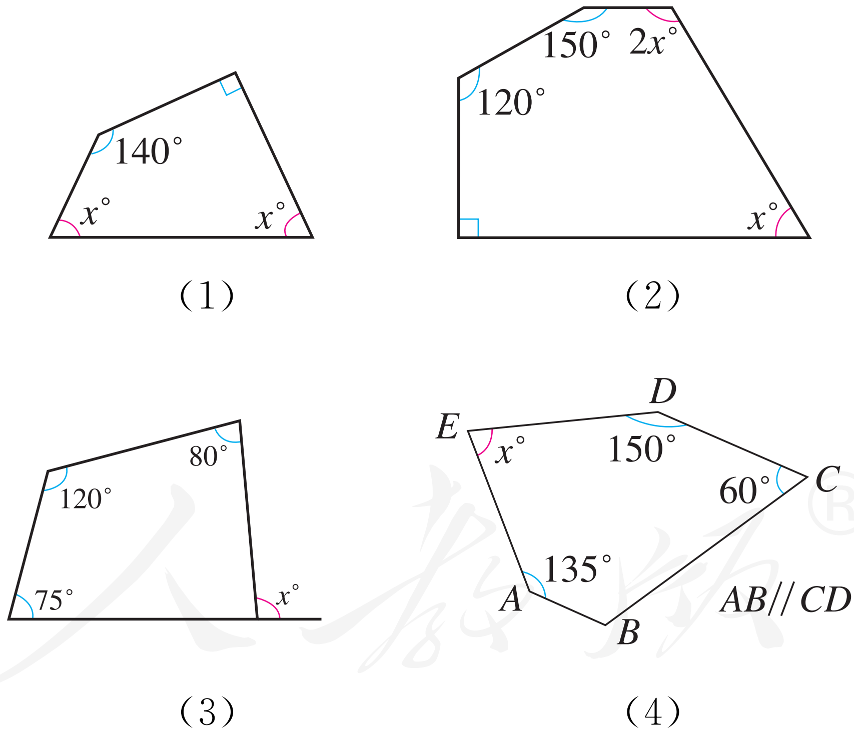
解得

$$n=10.$$

所以这个多边形是十边形.

巩固运用16.8

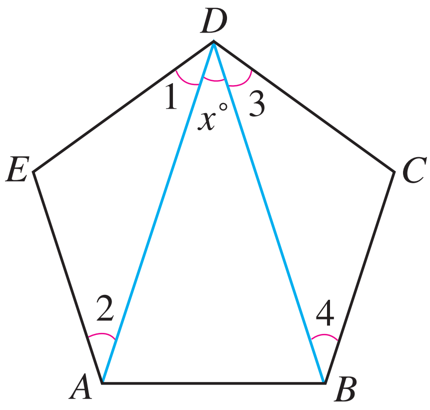
1. 求出下列图形中 x 的值：



(第 1 题)

2. 计算正五边形和正十一边形的每个内角的度数.
3. 一个多边形的内角和等于 1 260°，它是几边形？
4. 一个多边形的各内角都等于 120°，它是几边形？

*5. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求 x 的值.



（第 5 题）

上面我们研究了多边形的内角和，下面我们研究多边形的外角和. 在多边形的每个顶点处各取一个外角，这些外角的和叫做多边形的外角和. 如图 16.3-11，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$ 分别是六边形 $ABCDEF$ 的每个顶点处的一个外角，$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6$ 是六边形 $ABCDEF$ 的外角和.

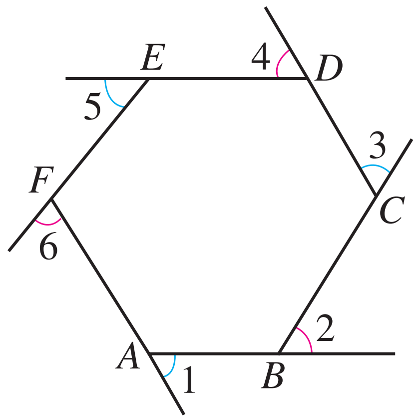


图 16.3-11

探究

由 16.2 节例 4 可以知道，三角形的外角和等于 360°. 四边形的外角和等于多少？n 边形呢？

四边形的每一个内角与它相邻的内角互补. 我们由此出发求四边形的外角和.

如图 16.3-12，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 分别是四边形 $ABCD$ 的每个顶点处的一个外角.

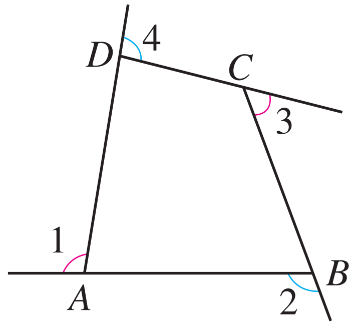


图 16.3-12

$$
\begin{aligned}
&\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4\\
=&(180^\circ-\angle BAD)+(180^\circ-\angle ABC)+(180^\circ-\angle BCD)+\\
&(180^\circ-\angle CDA)\\
=&4\times 180^\circ-(\angle BAD+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA)\\
=&4\times 180^\circ-360^\circ\\
=&360^\circ.
\end{aligned}
$$

即四边形的外角和等于 360°.

类比上面的过程，可以求出 n 边形的外角和.

如图 16.3-13，$\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle n$ 分别是多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处的一个外角.

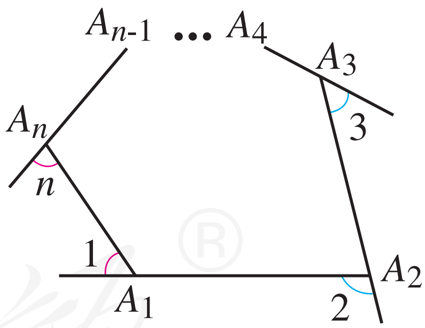


图 16.3-13

$$
\begin{aligned}
&\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle n\\
=&(180^\circ-\angle A_2A_1A_n)+(180^\circ-\\
&\angle A_1A_2A_3)+\cdots+(180^\circ-\\
&\angle A_{n-1}A_nA_1)\\
=&n\times 180^\circ-(\angle A_2A_1A_n+\angle A_1A_2A_3+\cdots+\\
&\angle A_{n-1}A_nA_1)\\
=&n\times 180^\circ-(n-2)\times 180^\circ\\
=&360^\circ.
\end{aligned}
$$

即 n 边形的外角和等于 $360°$.

由此可得：

多边形的外角和等于 $360°$.

你也可以像以下这样理解为什么多边形的外角和等于 $360°$.

如图 16.3-14，从多边形的一个顶点 A 出发，沿多边形的各边走过各顶点，再回到点 A，然后转向出发时的方向. 在行程中所转的各个角的和，就是多边形的外角和. 由于走了一周，所转的各个角的和等于一个周角，所以多边形的外角和等于 $360°$.

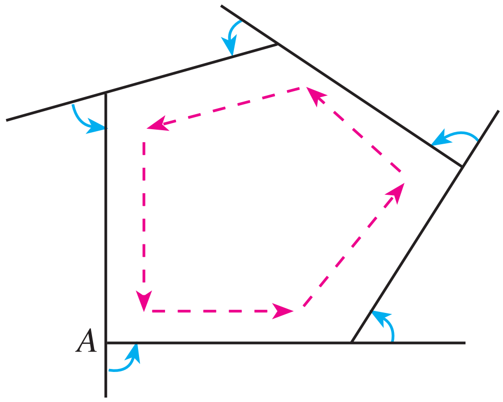


图 16.3-14

例 3 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？

解： 设这个多边形的边数是 n，则这个多边形的内角和等于 $(n-2)\times180°$，外角和等于 $360°$，所以

$$(n-2)\times180°=2\times360°.$$

解得

$$n=6.$$

所以这个多边形是六边形.

巩固运用16.9

1. 填表：

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和						
外角和						

2. 一个多边形的每一个外角都等于 $72°$，它是几边形？它的每一个内角是多少度？

3. （1）一个多边形的内角和与外角和相等，它是几边形？

（2）一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形？

数学活动

有些地板的拼合图案如图 1 所示，它是用正方形的地砖铺成的. 用地砖铺地，用瓷砖贴墙，都要求砖与砖严丝合缝，不留空隙，把地面或墙面全部覆盖. 从数学

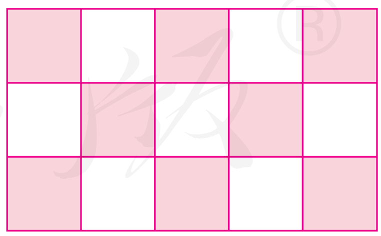


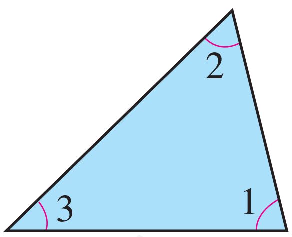
图 1

角度看，这些工作就是用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖，通常把这类问题叫做用多边形覆盖平面（或平面镶嵌）的问题.

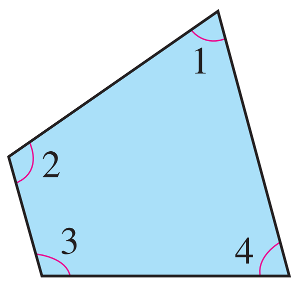
下面我们来探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并思考为什么会出现这种结果.

（1）分别剪一些边长相同的正三角形、正方形、正五边形、正六边形，如果用其中一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图案？如果用其中两种正多边形镶嵌，哪两种正多边形能镶嵌成一个平面图案？

（2）任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案.



三角形



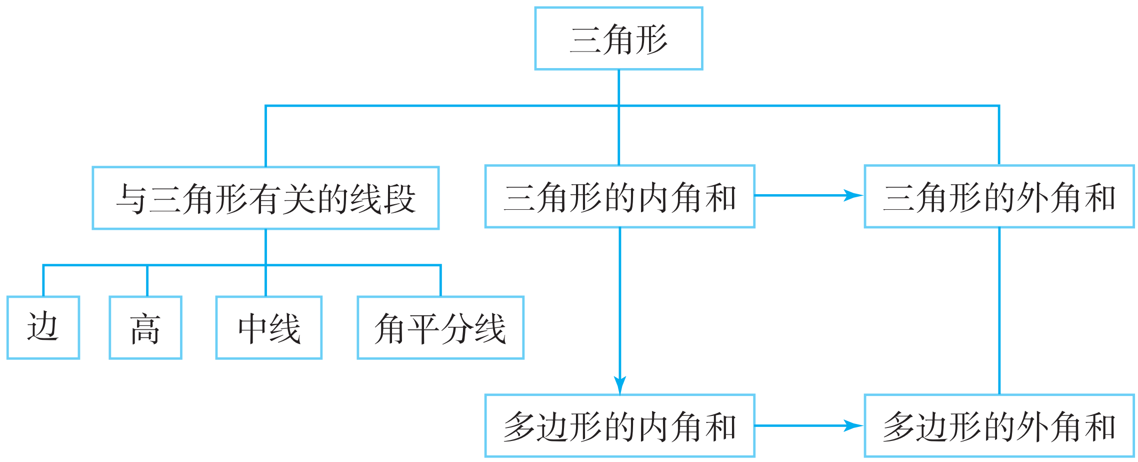
四边形

（3）任意剪出一些形状、大小相同的四边形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案.

你还可以搜集一些其他用多边形镶嵌的平面图案，或者设计一些地板的平面镶嵌图，并与同学互相交流.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 三角形的三边之间有怎样的关系？得出这个结论的依据是什么？

2. 三角形的三个内角之间有怎样的关系？如何证明这个结论？

3. 直角三角形的两个锐角有怎样的关系？三角形的一个外角与和它不相邻的两个内角有怎样的关系？这些结论能由三角形内角和定理得出吗？

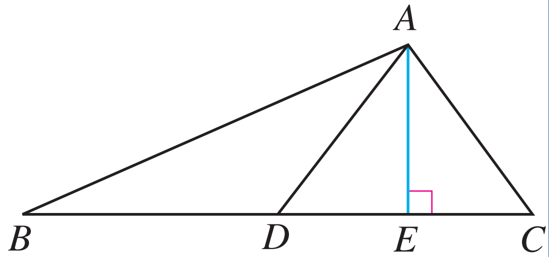
4. n 边形的 n 个内角有怎样的关系？如何推出这个结论？

5. n 边形的外角和与 n 有关吗？为什么？

复习题 16

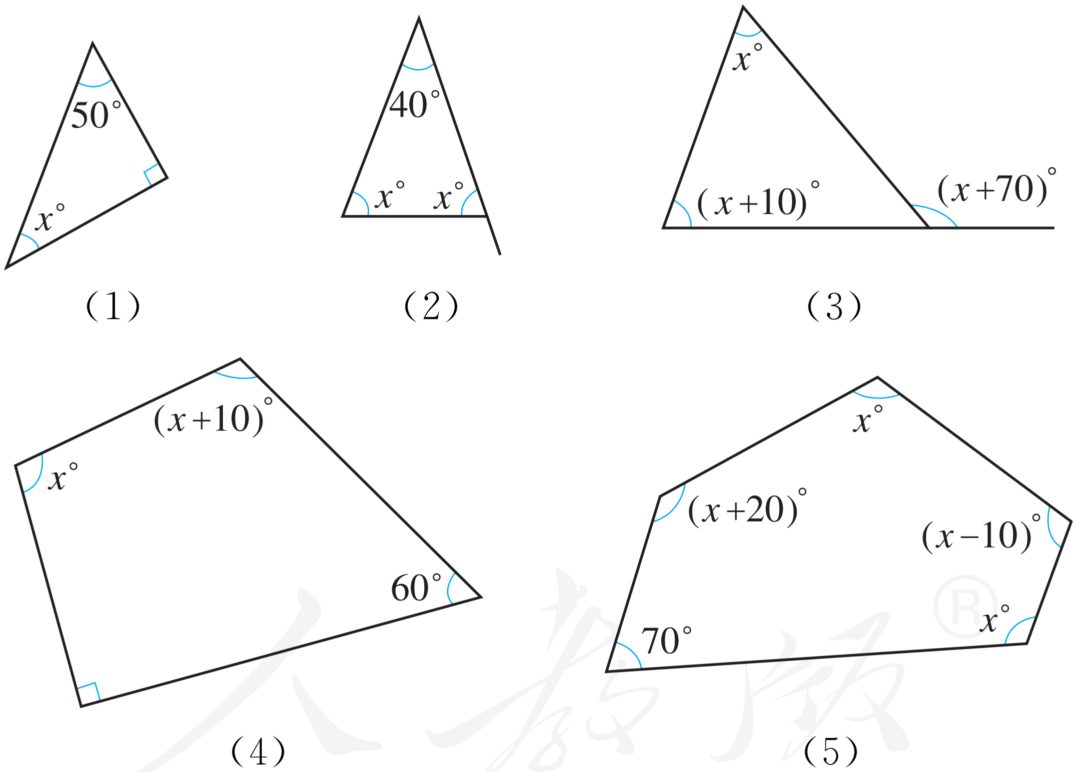
复习巩固

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD，AE分别是边BC上的中线和高，$AE=2\text{ cm}$，$S_{\triangle ABD}=3\text{ cm}^2$．求$BC$和$DC$的长．



（第 1 题）

2. 求出下列图形中x的值．



（第 2 题）

3. 填表：

多边形的边数	7		20	
内角和		$15\times180^\circ$		$23\times180^\circ$
外角和				

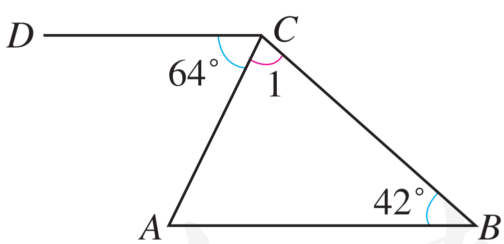
4. 从八边形的一个顶点出发，可以画几条对角线？它们将八边形分成几个三角形？这些三角形的内角和与八边形的内角和有什么关系？

5. 一个多边形的内角和比四边形的内角和多 540°，并且这个多边形的各内角都相等. 这个多边形的每个内角等于多少度？

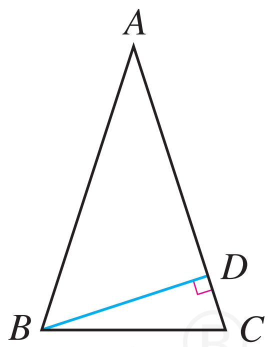
综合运用

6. 现有两条线段 a 和 b，a 长 10 cm，b 长 3 cm. 如果要再找一条线段 c，用这三条线段组成一个三角形，那么对线段 c 的长度有什么要求？

7. 如图，$\angle B=42^{\circ}$，$\angle A+10^{\circ}=\angle 1$，$\angle ACD=64^{\circ}$. 求证 $AB \parallel CD$.



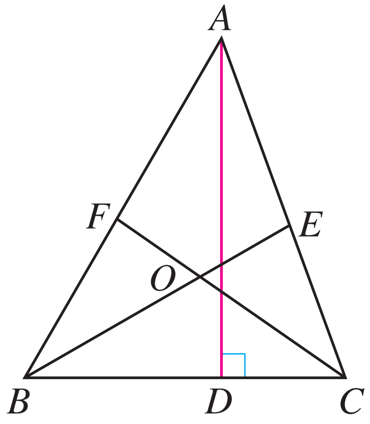
（第 7 题）



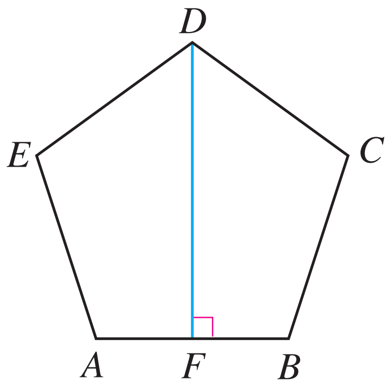
（第 8 题）

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$BD$ 是边 AC 上的高. 求 $\angle DBC$ 的度数.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是高，BE，CF 是角平分线，它们相交于点 O，$\angle BAC=50^{\circ}$，$\angle ACB=70^{\circ}$. 求 $\angle DAC$ 和 $\angle BOC$ 的度数.



（第 9 题）



（第 10 题）

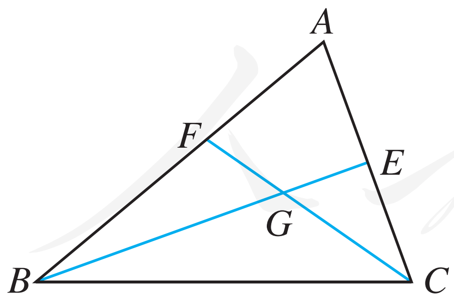
10. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，$DF \perp AB$，垂足为 F. 求$\angle CDF$ 的度数.

拓广探索

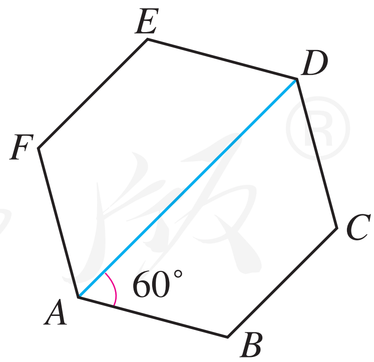
11. 如图，$\triangle ABC$ 的$\angle ABC$ 和$\angle ACB$ 的平分线 BE，CF 相交于点G. 求证：

（1）$\angle BGC = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$；

（2）$\angle BGC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB = 60°$. AB 与 DE 有怎样的位置关系？BC 与 EF 有这种关系吗？这些结论是怎样得出的？

第十七章　全等三角形

在我们的周围，经常可以看到形状、大小完全相同的图形. 这样的图形叫做全等形. 研究全等形的性质和判定两个图形全等的方法，是几何学的一个重要内容. 本章将以三角形为例，对这些问题进行研究.

上一章我们已经用推理论证得到了三角形内角和定理等重要结论. 在本章中，推理论证将发挥更大的作用. 我们将通过证明三角形全等来证明线段相等或角相等，利用全等三角形证明角的平分线的性质. 通过本章的学习，你对三角形的认识会更加丰富，推理论证能力会进一步提高.

17.1 全等三角形

如图 17.1-1，对开的大门、四方联邮票、设计图案中都有形状、大小相同的图形．你能再举出一些类似的例子吗？

图 17.1-1

探究

把一块三角尺按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角尺的形状、大小完全一样吗？把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？由同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合．能够完全重合的两个图形叫做**全等形**（congruent figures）．

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles).

探究

把三角形纸板 ABC 按在一张白纸上，画下图形 $\triangle ABC$，然后对三角形纸板进行如下操作，并画出操作后得到的三角形.

(1) 如图 17.1-2 (1)，把三角形纸板 ABC 沿直线 BC 平移，得到 $\triangle DEF$.

(2) 如图 17.1-2 (2)，把三角形纸板 ABC 沿直线 BC 翻折 $180°$，得到 $\triangle DBC$.

(3) 如图 17.1-2 (3)，把三角形纸板 ABC 绕点 A 旋转，得到 $\triangle ADE$.

三个图中的两个三角形全等吗？

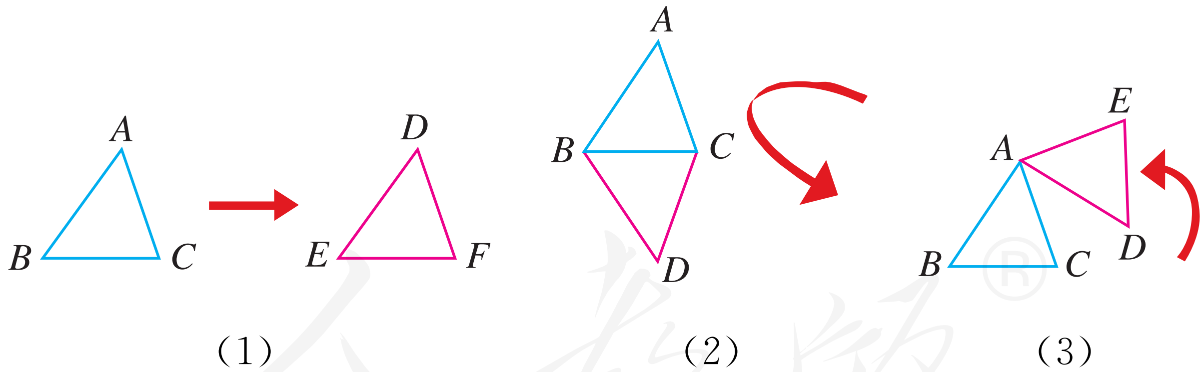


图 17.1-2

一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做**对应顶点**，重合的边叫做**对应边**，重合的角叫做**对应角**. 例如，图 17.1-2（1）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角.

全等用符号“$\cong$”表示，读作“全等于”.

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如，图 17.1-2（2）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

思考

在图 17.1-2（1）中，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，对应边有什么关系？对应角呢？

由重合的两条线段是相等的线段，可以得到：

全等三角形的对应边相等.

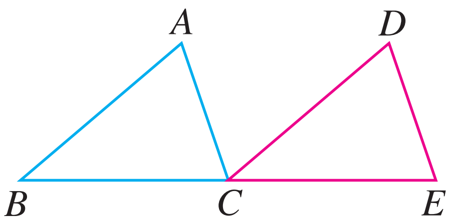
由重合的两个角是相等的角，可以得到：

全等三角形的对应角相等.

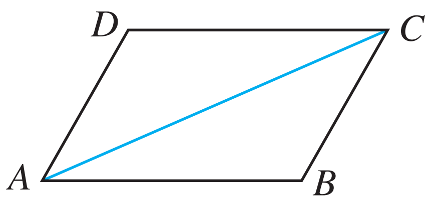
巩固运用17.1

1. 说出图 17.1-2（2）、图 17.1-2（3）中两个全等三角形的对应边、对应角.

2. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DCE$，$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle DCE$ 是对应角. 说出这两个三角形中其他对应角和对应边.



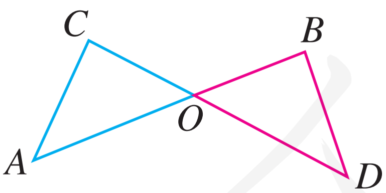
（第 2 题）



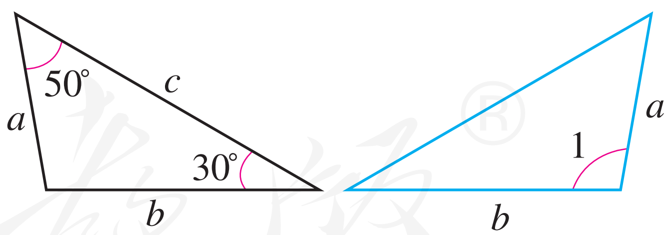
（第 3 题）

3. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边. 说出其他对应边和对应角.

4. 如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，点 C 和点 B，点 A 和点 D 是对应顶点. 说出这两个三角形中相等的边和角.



（第 4 题）



（第 5 题）

*5. 如图是两个全等三角形，图中的字母表示三角形的边长，则 $\angle 1$ 等于多少度？

17.2 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，根据全等三角形的定义，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边分别相等，三个角分别相等，即

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A',$$
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（图 17.2-1）.

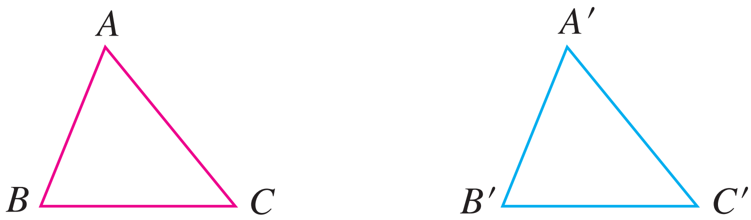


图 17.2-1

一定要满足三条边分别相等，三个角也分别相等，才能保证两个三角形全等吗？在上述六个条件中，有些条件是相关的. 能否在这六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢？

本节我们就来讨论这个问题.

思考

当两个三角形满足上述六个条件中的一个时，它们全等吗？

一个条件包括一条边或一个角相等. 如图 17.2-2，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$BC = B'C'$，但显然 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等. 如图 17.2-3，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle B = \angle B'$，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 也不全等.

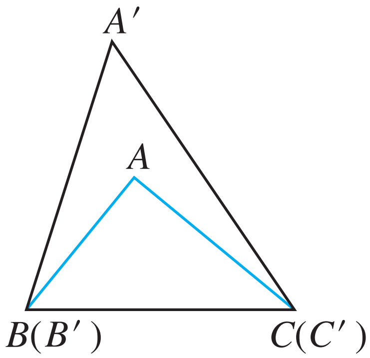


图 17.2-2

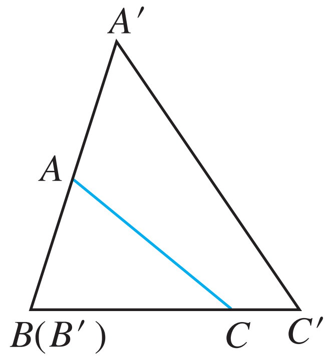


图 17.2-3

这就是说，当两个三角形满足一条边或一个角相等时，这两个三角形不一定全等.

思考

当两个三角形满足上述六个条件中的两个时，它们全等吗？

两个条件包括两条边、两个角或一条边一个角分别相等. 例如，图 17.2-4 中的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足 $AB = A'B'$，$BC = B'C'$，但它们不全等. 事实上，当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足两个角或一条边一个角分别相等时，

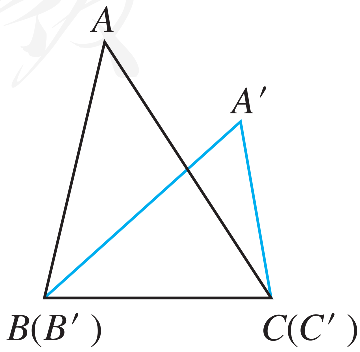


图 17.2-4

它们也不一定全等.

这就是说，当两个三角形满足两条边、两个角或一条边一个角分别相等时，这两个三角形不一定全等.

巩固运用17.2

1. 举例说明当两个三角形满足两个角分别相等时，它们不一定全等.
2. 举例说明当两个三角形满足一条边和一个角分别相等时，它们不一定全等.

当两个三角形满足上述六个条件中的三个时，它们全等吗？下面，我们分情况进行讨论.

17.2.1　三角形全等的判定（一）

首先，我们研究两个三角形的三条边分别相等的情况.

思考

如果两个三角形的三条边分别相等，那么这两个三角形全等吗？

如图 17.2-5，先在纸上任意画一个$\triangle ABC$，再从一根细绳上剪下三段，使三段长分别与$\triangle ABC$三条边的长相等，然后把这三段细绳首尾相接连在一起，就得到了一个新的三角形 $A'B'C'$. 把$\triangle ABC$放到$\triangle A'B'C'$的上面，它们能够完

全重合吗？由此你能发现什么规律？

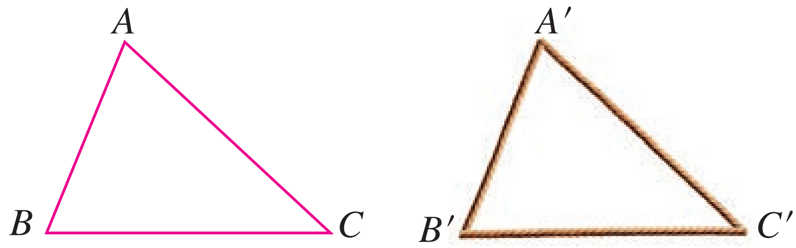


图 17.2-5

一般地，我们有下面的基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

也就是说，三角形三条边的长度确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了.

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了. 其中的道理可以用上面的结论来说明.

例 1 一个体育馆的屋顶有如图 17.2-6 所示的三角形钢架. 已知 $AB=AC$，AD 是连接点 A 与 BC 中点 D 的支架. 求证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

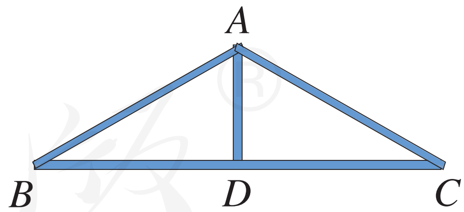


图 17.2-6

分析：要证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，只需看这两个三角形的三条边是否分别相等.

证明：$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

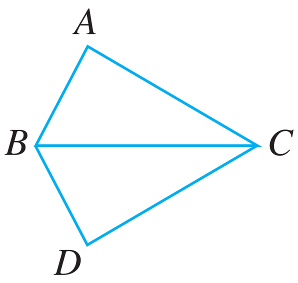
$$\begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（SSS）.

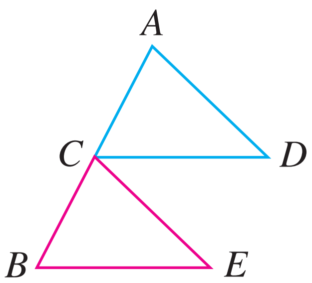
AD既是$\triangle ABD$的边又是$\triangle ACD$的边，我们称它为这两个三角形的公共边.

巩固运用17.3

1. 如图，若$AB=DB$，则只需添加一个条件________，就可用“边边边”证明$\triangle ABC \cong \triangle DBC$.



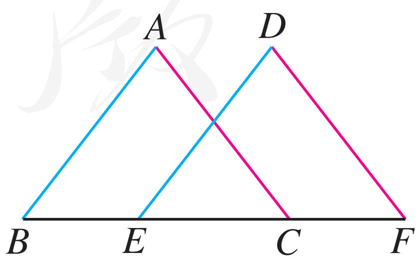
（第 1 题）



（第 2 题）

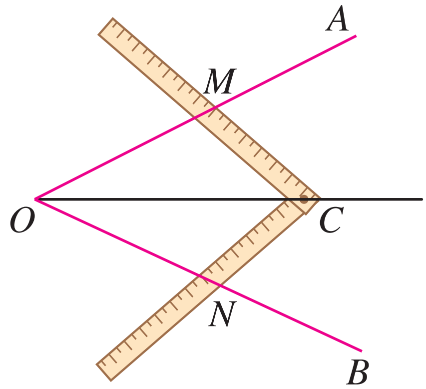
2. 如图，C是AB的中点，$AD=CE$，$CD=BE$. 求证$\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

3. 如图，点B，E，C，F在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证$\angle A=\angle D$.



（第 3 题）

4. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 M，N 重合. 过角尺顶点 C 的射线 OC 便是$\angle AOB$ 的平分线. 为什么？



（第 4 题）

17.2.2 三角形全等的判定（二）

接下来，我们研究两个三角形有两条边和一个角分别相等的情况.

思考

如果两个三角形的两条边和它们的夹角分别相等，那么这两个三角形全等吗？

如图 17.2-7，先在硬纸板上任意画一个$\triangle ABC$，把它剪下来. 再把剪下的三角形纸板按在一张白纸上，画出一个角$\angle DA'E$，使得$\angle DA'E=\angle A$. 在射线 $A'D$ 上截取 $A'B'=AB$，在射线 $A'E$ 上截取 $A'C'=AC$. 连接 $B'C'$，这样就得到了$\triangle A'B'C'$. 把$\triangle ABC$ 放到$\triangle A'B'C'$上，它们能够完全

重合吗？由此你能发现什么规律？

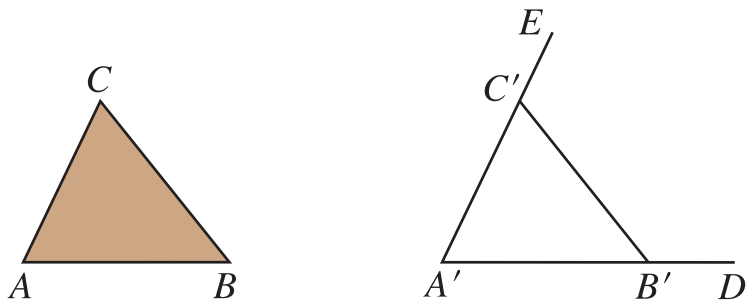


图 17.2-7

一般地，我们有下面的基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）.

也就是说，三角形的两条边的长度和它们的夹角的大小确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 2 如图 17.2-8，有一个池塘，要测池塘两端 A，B 的距离，可先在平地上取一个点 C，从点 C 不经过池塘可以直接到达点 A 和 B. 连接 AC 并延长到点 D，使 $CD=CA$. 连接 BC 并延长到点 E，使 $CE=CB$. 连接 DE，那么量出 DE 的长就是 A，B 的距离. 为什么？

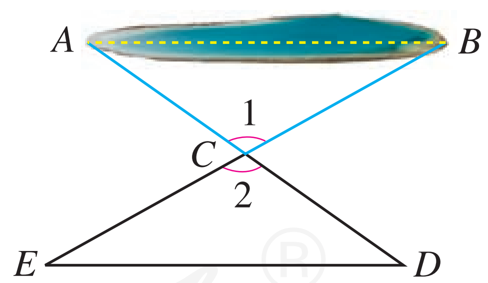


图 17.2-8

分析： 如果能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$，就可以得出 $AB=DE$. 由题意可知，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 具备“边角边”的条件.

证明： 在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ CB=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS).

$\therefore$ $AB=DE$.

想一想，$\angle 1=\angle 2$ 的根据是什么？$AB=DE$ 的根据是什么？

从例 2 可以看出，因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以证明线段相等或者角相等时，常常通过证明它们是全等三角形的对应边或对应角来解决.

思考

如果两个三角形的两条边和其中一条边的对角分别相等，那么这两个三角形全等吗？

如图 17.2-9，把一长一短的两根木棍的一端固定在一起，摆出$\triangle ABC$. 固定住长木棍，转动短木棍，得到$\triangle ABD$. 这个实验说明了什么？

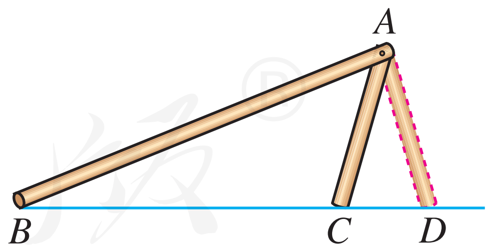
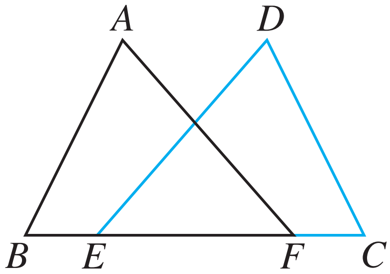


图 17.2-9

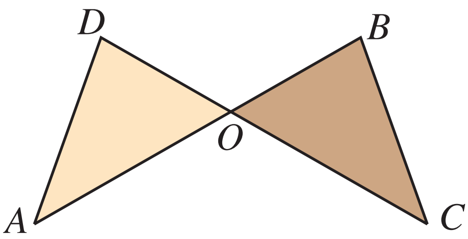
图 17.2-9 中的$\triangle ABC$ 与$\triangle ABD$ 满足两边和其中一边的对角分别相等，即 $AB=AB$，$AC=AD$，$\angle B=\angle B$，但$\triangle ABC$ 与$\triangle ABD$ 不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

巩固运用17.4

1. 如图，点 E，F 在 BC 上，$\angle A=\angle D$，$AB=DC$，$AF=DE$. 求证 $\triangle ABF\cong\triangle DCE$.



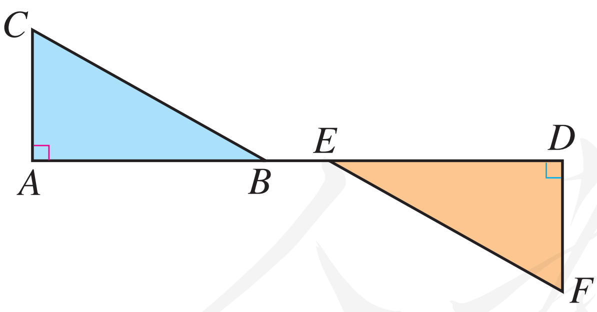
（第 1 题）



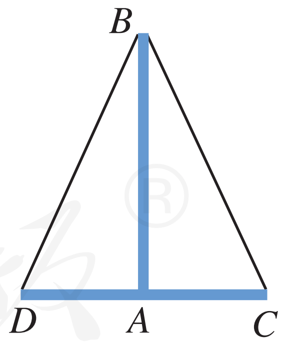
（第 2 题）

2. 如图，AB 与 CD 相交于点 O，$AO=CO$，$DO=BO$. 求证 $\triangle AOD\cong\triangle COB$.

3. 如图，点 A，B，E，D 在同一条直线上，$CA\perp AD$，$FD\perp AD$，垂足分别为 A，D，且 $CA=FD$，$AE=BD$. 求证 $\triangle CAB\cong\triangle FDE$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，两车从南北方向的路段 AB 的 A 端出发，分别向东、向西行进相同的距离，到达 C，D 两地. 此时 C，D 到 B 的距离相等吗？为什么？

17.2.3 三角形全等的判定（三）

我们再来看两个三角形有两个角和一条边分别相等的情况. 首先，我们研究一下两个三角形的两个角及其夹边分别相等的情况.

思考

如果两个三角形的两个角和它们的夹边分别相等，那么这两个三角形全等吗？

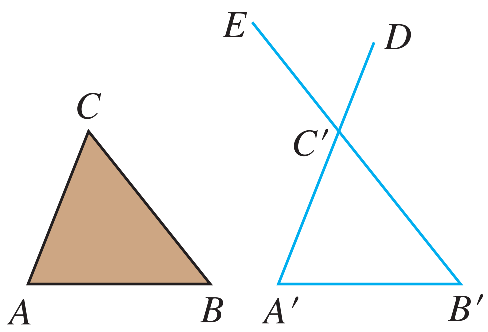


图 17.2-10

如图 17.2-10，先在硬纸板上任意画一个△ABC，把它剪下来. 再把剪下的三角形纸板按在一张白纸上，画一条线段 $A'B'$，使得 $A'B'=AB$，然后在 $A'B'$ 的同旁画两个角 $\angle DA'B'$ 和 $\angle EB'A'$，使得 $\angle DA'B'=\angle A$，$\angle EB'A'=\angle B$. 设 $A'D$ 与 $B'E$ 相交于点 C'，这样就得到了△$A'B'C'$. 把△ABC 放到△$A'B'C'$ 上，它们能够完全重合吗？由此你能发现什么规律？

一般地，我们有下面的基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和它们的夹边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 3　如图 17.2-11，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AD=AE$.

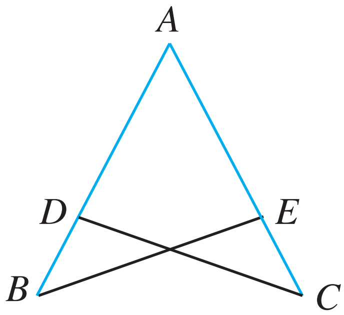


图 17.2-11

分析： 证明 $\triangle ACD\cong\triangle ABE$，就可以得出 $AD=AE$.

证明： 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\ (\text{公共角}),\\ AC=AB,\\ \angle C=\angle B,\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle ABE$ (ASA).

$\therefore\ AD=AE$.

巩固运用17.5

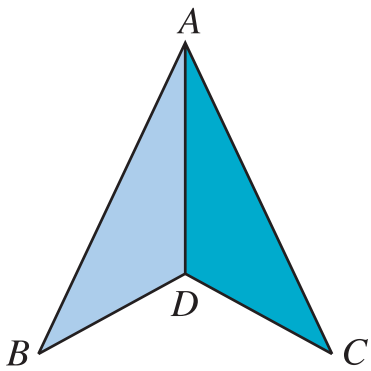
1. 选择题.

一个三角形工件，现已破碎成如图所示的三部分. 工人师傅以第③块为参考就能制作一个同样的工件，他这样做的依据是（　　）.

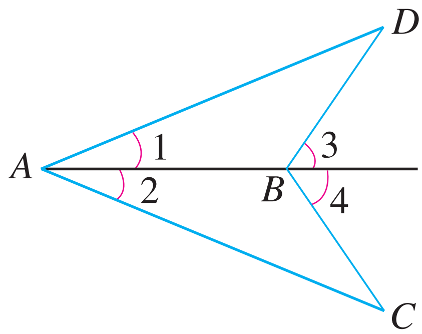
（A）SSS　（B）SAS　（C）AAS　（D）ASA

（第 1 题）

2. 如图，$\angle BAD=\angle CAD$，$\angle ADB=\angle ADC$. 求证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



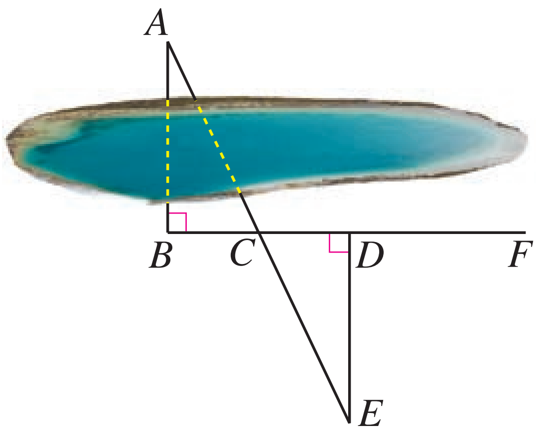
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证 $AD=AC$.

4. 如图，要测量池塘两岸相对的两点 A，B 的距离，可以在池塘外取 AB 的垂线 BF 上的两点 C，D，使 $BC=CD$，再画出 BF 的垂线 ED，使 E 与 A，C 在一条直线上，这时测得 ED 的长就是 AB 的长. 为什么？



（第 4 题）

17.2.4　三角形全等的判定（四）

接下来，我们考察两个三角形的两个角和其中一个角的对边分别相等的情况.

思考

如果两个三角形的两个角和其中一个角的对边分别相等，那么这两个三角形全等吗？

事实上，这样的两个三角形是全等的．下面我们证明这个结论．

如图 17.2-12，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$．求证$\triangle ABC\cong\triangle DEF$．

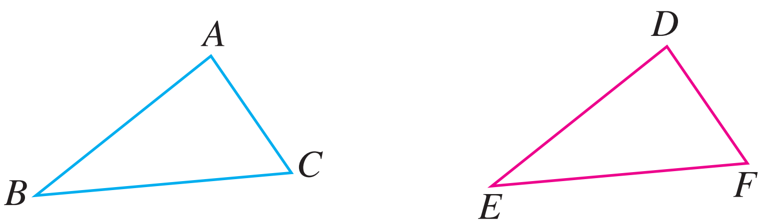


图 17.2-12

分析： 如果能证明$\angle C=\angle F$，就可以利用"角边角"证明$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 全等．由三角形内角和定理可以证明$\angle C=\angle F$．

证明： 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

$\therefore\quad \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$．

同理　$\angle F=180^\circ-\angle D-\angle E$．

又　$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

$\therefore\quad \angle C=\angle F$．

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle C=\angle F,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（ASA）.

因此，我们可以得到下面的结论：

两角和其中一个角的对边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和其中一个角的对边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 4 如图 17.2-13，$AC \perp CB$，$DB \perp CB$，垂足分别为 C，B，$\angle A = \angle D$. 求证 $AC = DB$.

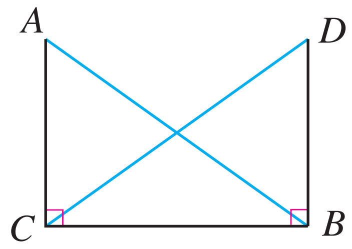


图 17.2-13

证明： ∵ $AC \perp CB$，$DB \perp CB$，

∴ $\angle ACB = \angle DBC = 90^\circ$.

在$\triangle ACB$ 和$\triangle DBC$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle ACB = \angle DBC, \\ CB = BC \text{（公共边）}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ACB \cong \triangle DBC$（AAS）.

∴ $AC = DB$.

思考

三个角分别相等的两个三角形全等吗？你能举例子说明你的结论吗？

如图 17.2-14，两个大小不等的三角尺都有一个 90°角，两个 45°角. 这说明三个角分别相等的两个三角形不一定全等.

图 17.2-14

思考

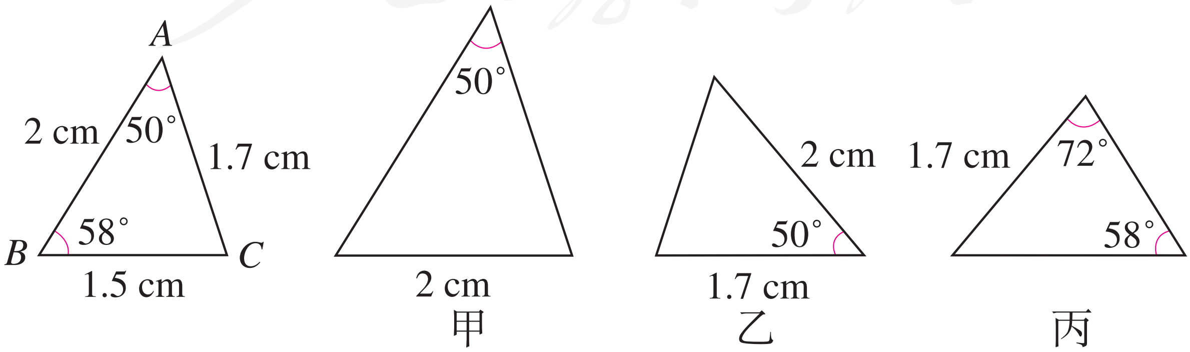
你学了几种判定两个三角形全等的方法？能做一个小结吗？

巩固运用17.6

1. （1）在两个直角三角形中，如果斜边和一锐角分别相等，那么这两个三角形全等吗？为什么？

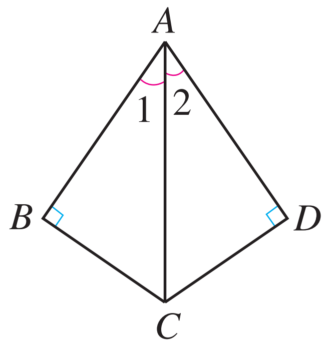
   （2）在两个直角三角形中，如果一直角边和它的对角分别相等，那么这两个三角形全等吗？

2. 如图，甲、乙、丙 3 个三角形中与$\triangle ABC$ 全等的三角形是________（填“甲”“乙”或“丙”）.

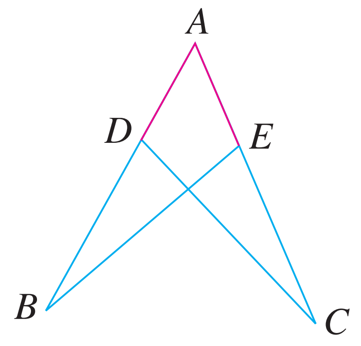


（第 2 题）

3. 如图，$AB \perp BC$，$AD \perp DC$，垂足分别为 B，D，$\angle 1=\angle 2$. 求证$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$\angle B=\angle C$，$AD=AE$. 求证 $\triangle AEB \cong \triangle ADC$.

17.2.5 直角三角形全等的判定

由三角形全等的条件可知，如果两个直角三角形的一直角边及其相对（或相邻）的锐角分别相等，或斜边和一锐角分别相等，或两直角边分别相等，那么这两个直角三角形就全等了.

思考

如果两个直角三角形的斜边和一条直角边分别相等，那么这两个三角形全等吗？

如图 17.2-15，先在硬纸板上任意画一个 Rt$\triangle ABC$，使得$\angle C=90°$. 把它剪下来，再把剪下的直角三角形纸板按在一张白纸上，画一个角$\angle MC'N$，使得$\angle MC'N=90°$. 在射线 $C'M$ 上截取 $C'B'=CB$. 然后把一根细绳的一端固定在点 B'处，以 AB 长为半径转动细绳，则细绳的另一端与射线 $C'N$ 相交于点 A'. 连接 $A'B'$，就得到了 Rt$\triangle A'B'C'$. 把 Rt$\triangle ABC$ 放到 Rt$\triangle A'B'C'$的上面，它们能够完全重合吗？由此你能发现什么规律？

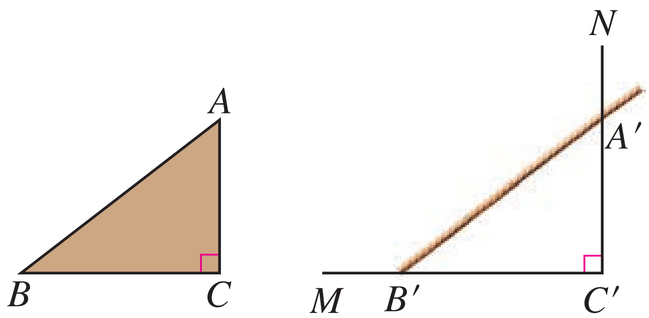


图 17.2-15

一般地，我们有下面的基本事实，用它可以判定两个直角三角形全等：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 5 如图 17.2-16，$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，垂足分别为 C，D，$AC=BD$. 求证 $BC=AD$.

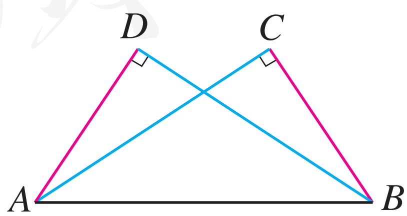


图 17.2-16

证明：$\because$ $AC\perp BC$，$BD\perp AD$，

$\therefore$ $\angle C=\angle D=90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle BAD$ 中，

$$\begin{cases} AB = BA, \\ AC = BD, \end{cases}$$

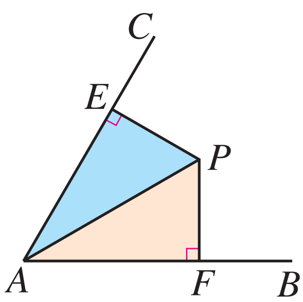
$\therefore$ $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle BAD$（HL）.

$\therefore$ $BC = AD$.

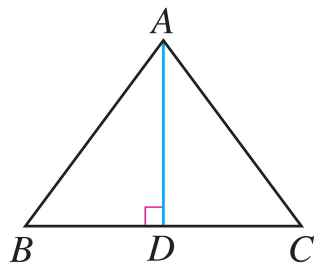
巩固运用17.7

1. 如图，$PE \perp AC$，$PF \perp AB$，垂足分别为 E，F，且 $PE = PF$，则$\triangle PAE \cong \triangle PAF$ 的理由是（　　）.

（A）HL　　（B）AAS　　（C）SSS　　（D）ASA



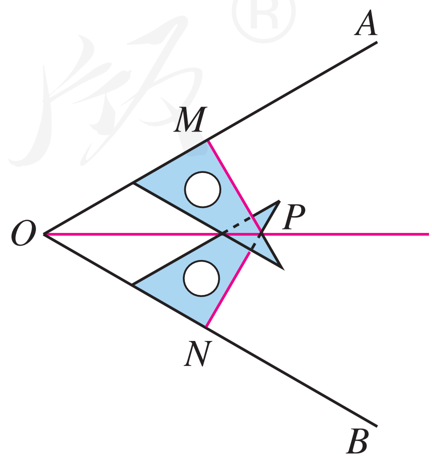
（第 1 题）



（第 2 题）

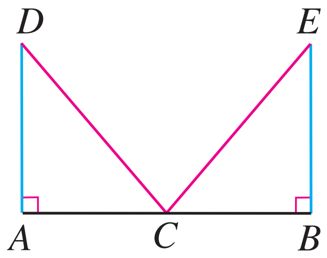
2. 如图，$AD \perp BC$，垂足为 D，$AB = AC$. 求证 $BD = CD$.

3. 如图，用三角尺可按下面方法画角平分线：在已知的$\angle AOB$ 的两边上，分别取 $OM = ON$，再分别过点 M，N 作 OA，OB 的垂线，交点为 P，画射线 OP，则 OP 平分$\angle AOB$. 为什么？



（第 3 题）

4. 如图，C 是路段 AB 的中点，两人从 C 同时出发，以相同的速度分别沿两条直线行走，同一时刻分别到达 D，E 两地，$DA \perp AB$，$EB \perp AB$，垂足分别为 A，B. D，E 与路段 AB 的距离相等吗？为什么？



（第 4 题）

阅读与思考

全等与全等三角形

小明：全等是“一模一样”“完全相等”的意思吗？

老师：不考虑图形的位置时，可以这么理解. 在几何学中，我们把形状和大小完全相同的图形叫做全等形. 全等形还有其他的定义方式，如教科书是利用“能够完全重合”定义全等形的.

小明：全等是几何学中的重要概念吗？

老师：是的. 几何学是研究图形的形状、大小和位置关系的学科，全等涉及其中的两个方面. 在今后的学习中，你会发现几何中许多问题都源自全等问题，许多重要概念都是在全等概念的基础上产生的.

小明：为什么我们重点学习全等三角形呢？

老师：我们已经知道三角形是最简单的多边形，而且任意多边形都可以分解为若干个三角形，所以我们以全等三角

形作为载体学习全等的知识，由此还可以方便地推广到其他多边形的全等问题．小明，你能说说我们是从哪两个方面研究全等三角形的吗？

小明：全等三角形的性质和三角形全等的判定．

老师：是的，这也是研究一般的全等形的两个主要方面．利用全等三角形的性质，可以证明线段相等或角相等；利用三角形全等的判定方法，可以证明两个三角形是全等三角形．在实际应用中，我们常把它们结合起来使用，如先证明三角形全等，再进一步得出它们的对应边或对应角相等．

17.3 角的平分线的性质

下面，我们利用全等三角形的知识来研究角的平分线的性质.

思考

如图 17.3-1，将$\angle AOB$ 对折，再折出一个直角三角形（使第一条折痕为斜边），然后展开. 观察两次折叠形成的三条折痕，你能得出什么结论？

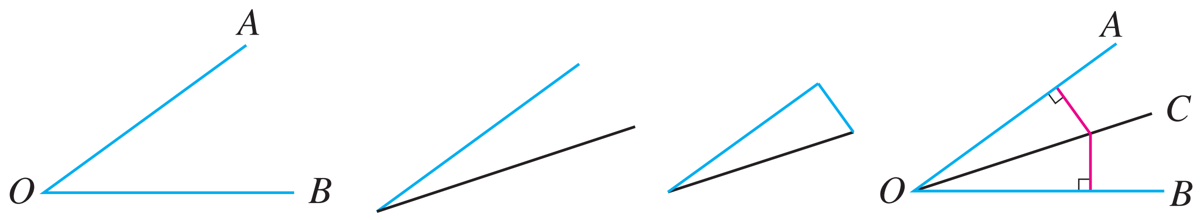


图 17.3-1

可以看出，第一条折痕是$\angle AOB$ 的平分线OC，第二次折叠形成的两条折痕是角的平分线上一点到$\angle AOB$ 两边的距离，这两个距离相等.

由此，我们猜想角的平分线有以下性质：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

下面，我们利用三角形全等证明这个性质. 首先，要分清其中的“已知”和“求证”. 显然，已知为“一个点在一个角的平分线上”，要证的结论为“这个点到这个角两边的

距离相等”．为了更直观、清楚地表达题意，我们通常在证明之前画出图形，并用符号表示已知和求证．

如图 17.3-2，$\angle AOC=\angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D，E．求证 $PD=PE$．

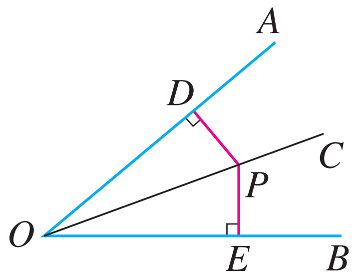


图 17.3-2

证明：$\because$ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$．

在$\triangle PDO$ 和$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases}\angle PDO=\angle PEO,\\ \angle AOC=\angle BOC,\\ OP=OP,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle PDO\cong\triangle PEO$（AAS）．

$\therefore$ $PD=PE$．

一般情况下，我们要证明一个几何命题时，可以按照类似的步骤进行，即

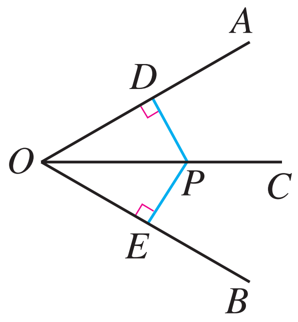
1．明确命题中的已知和求证；

2．根据题意，画出图形，并用数学符号表示已知和求证；

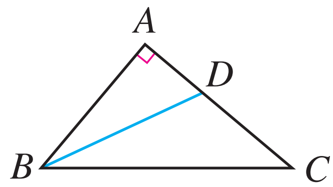
3．经过分析，找出由已知推出要证的结论的途径，写出证明过程．

巩固运用17.8

1. 如图，OC 平分 $\angle AOB$，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为 D，E。若 $PD = 2$ cm，则 $PE =$ ____ cm.



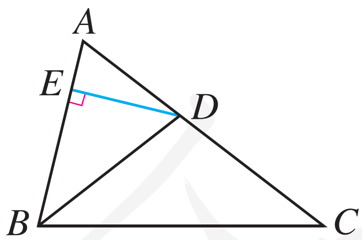
（第 1 题）



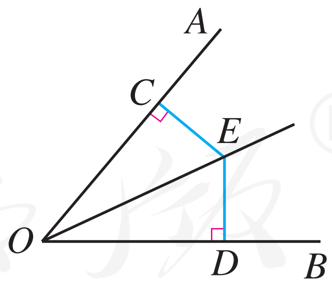
（第 2 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90^\circ$，BD 平分 $\angle ABC$，$AD = 10$ cm，则点 D 到 BC 的距离等于 ____ cm.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE \perp AB$，垂足为 E，且 $AB = 12$ cm，$BC = 18$ cm，$DE = 7$ cm，则 $S_{\triangle ABC} =$ ______ cm^2.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，E 是 $\angle AOB$ 的平分线上的一点，$EC \perp OA$，$ED \perp OB$，垂足分别为 C，D。求证 $OC = OD$.

思考

如图 17.3-3，某地要举办一个文化博览会，主办方想在园区的 S 区内建一个免费接驳公交车车站，使这个车站到园区内两条主干道的距离相等，并且距离两条主干道的交叉处 500 m. 这个车站应建于何处？

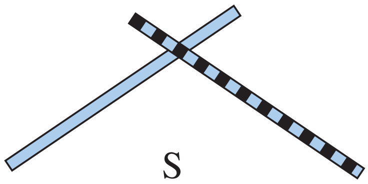


图 17.3-3

我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等. 到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

下面我们来证明这个结论.

如图 17.3-4，射线 OC 在 $\angle AOB$ 的内部，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为 D，E，$PD=PE$. 求证：OC 是 $\angle AOB$ 的平分线.

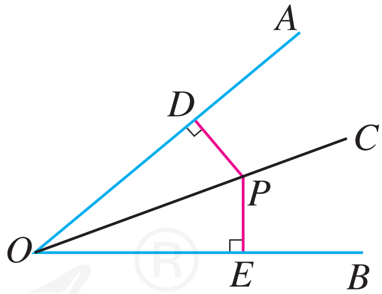


图 17.3-4

证明：$\because$ $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$.

在 Rt$\triangle PDO$ 和 Rt$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases} PD=PE, \\ OP=OP, \end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle PDO \cong$ Rt$\triangle PEO$（HL）.

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOC$.

∴ OC 是$\angle AOB$ 的平分线.

根据上述结论，就知道这个公交车车站应建于何处了.

例 如图 17.3-5，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E，F，$BE=CF$. 求证：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线.

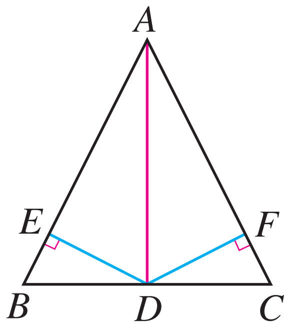


图 17.3-5

证明： ∵ D 是 BC 的中点，

∴ $BD=CD$.

∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ $\angle DEB=\angle DFC=90°$.

在 Rt$\triangle DEB$ 和 Rt$\triangle DFC$ 中，

$$\begin{cases} BD=CD, \\ BE=CF, \end{cases}$$

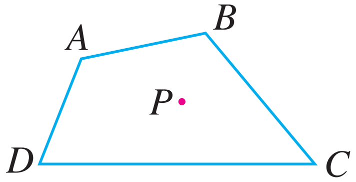
∴ Rt$\triangle DEB\cong$Rt$\triangle DFC$（HL）.

∴ $DE=DF$.

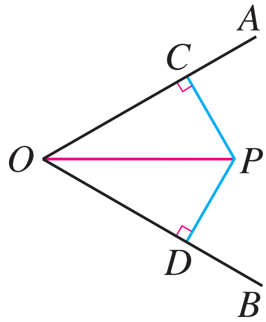
∴ 点 D 在$\angle BAC$ 的平分线上，即 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线.

巩固运用17.9

1. 如图，P 是四边形 $ABCD$ 内一点，且点 P 到 AB，BC，CD 的距离相等，则点 P 是哪两个角的平分线的交点？



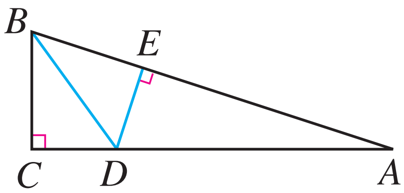
（第 1 题）



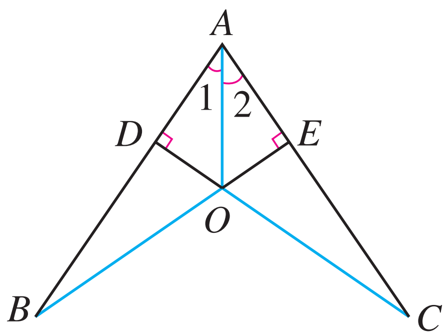
（第 2 题）

2. 如图，P 是$\angle AOB$ 内一点，$PC \perp OA$，$PD \perp OB$，垂足分别为 C，D，且 $PC = PD$. 若$\angle AOP = 30^\circ$，求$\angle AOB$ 的度数.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，点 D 在边 AC 上，$DE \perp AB$，垂足为 E，$DC = DE$，$\angle CBD = 36^\circ$，则$\angle A =$ ________°.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$CD \perp AB$，$BE \perp AC$，垂足分别为 D，E，BE，CD 相交于点 O，$OB = OC$. 求证$\angle 1 = \angle 2$.

数学活动

图 1 是两个根据全等形设计的图案. 仔细观察一下，每个图案中有哪些全等形? 有哪些全等三角形?

注意一下你的身边，哪些是全等形? 哪些是全等三角形? 各找几个例子与同学交流.

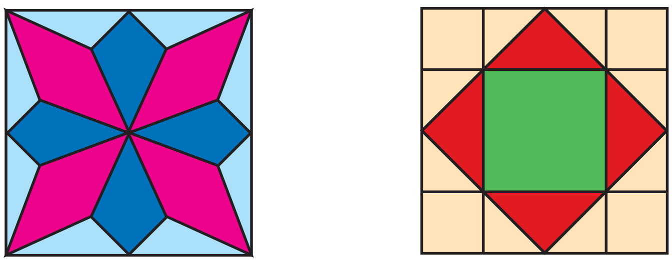
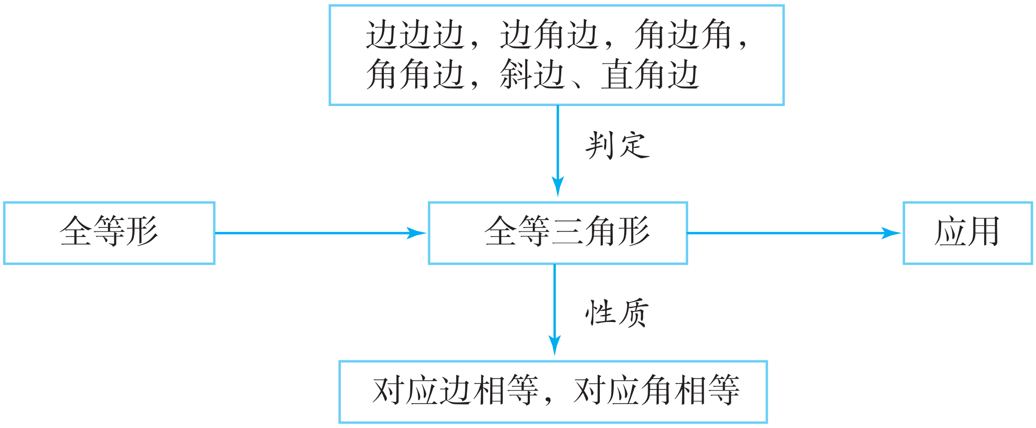


图 1

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 什么样的两个图形叫做全等形？

2. 如果两个图形全等，那么它们的对应元素都相等．全等三角形有什么性质？

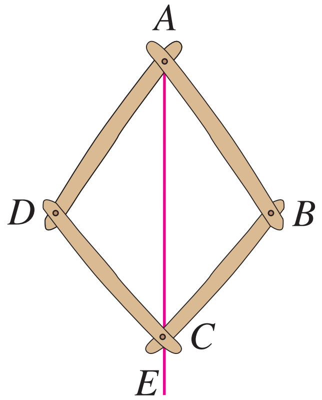
3. 从三角形的“三条边分别相等、三个角分别相等”中任选三个作为条件来判定两个三角形是否全等时，哪些是能够判定的？两个直角三角形全等的条件是什么？

4. 学习本章后，你对角的平分线有了哪些新的认识？你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗？

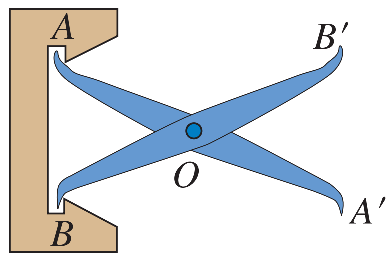
复习题 17

复习巩固

1. 如图是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是这个角的平分线. 你能说明它的道理吗？

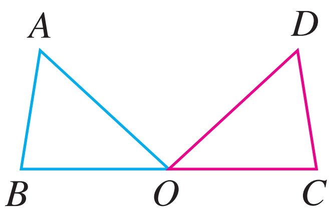


（第 1 题）

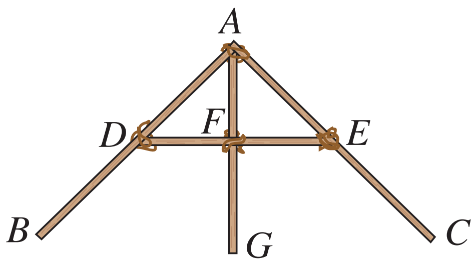


（第 2 题）

2. 如图，把两根钢条的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）. 在图中，要测量工件内槽宽 AB，只要测量哪些量？为什么？
3. 如图，点 O 是 BC 的中点，$\angle AOB=\angle DOC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AO=DO$.



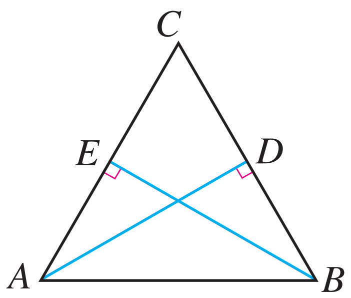
（第 3 题）



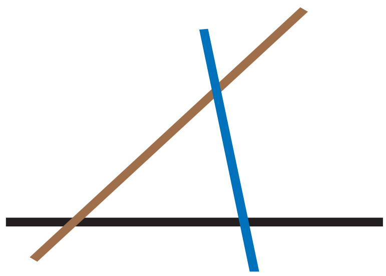
（第 4 题）

4. 如图是用竹篾扎成的风筝骨架. 竹条 AB，AC 的长度均为 60 cm，在 AB，AC 的中点 D，E 处固定的竹条 DE 的长度为 42 cm. 若 F 是竹条 DE 的中点，则通过 A，F 两点固定的竹条 AG 与 DE 垂直吗？为什么？

5. 如图，从 C 地看 A，B 两地的视角 $\angle C$ 是锐角，从 C 地到 A，B 两地的距离相等. A 地到路段 BC 的距离 AD 与 B 地到路段 AC 的距离 BE 相等吗？为什么？



（第 5 题）



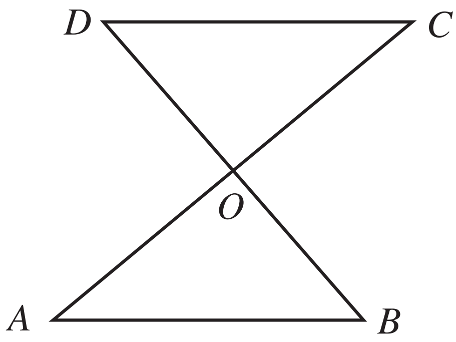
（第 6 题）

6. 如图，为了促进当地旅游发展，某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村. 说一说要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建.

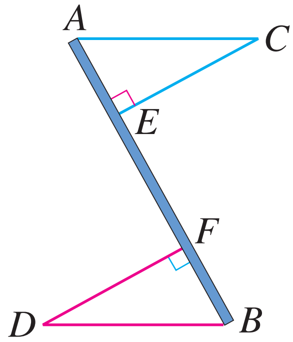
综合运用

7. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证 $DC /\!/ AB$.

8. 如图，两车从路段 AB 的两端同时出发，沿平行路线以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地. C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？

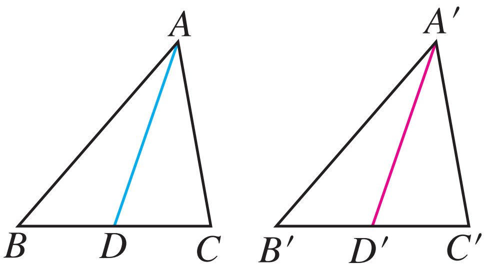


（第 7 题）

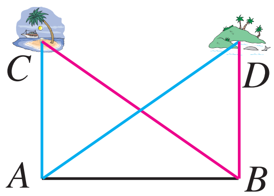


（第 8 题）

9. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的对应边上的中线. AD 与 $A'D'$ 有什么关系？证明你的结论.



（第 9 题）

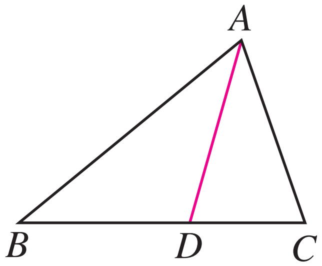


（第 10 题）

10. 如图，海岸上有 A，B 两个观测点，点 B 在点 A 的正东方，海岛 C 在观测点 A 的正北方，海岛 D 在观测点 B 的正北方. 如果从观测点 A 看海岛 C，D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C，D 的视角 $\angle CBD$ 相等，那么海岛 C，D 到观测点 A，B 所在海岸的距离 CA，DB 相等. 请你说明理由.

拓广探索

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线. 求证：$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = AB : AC$.



（第 11 题）

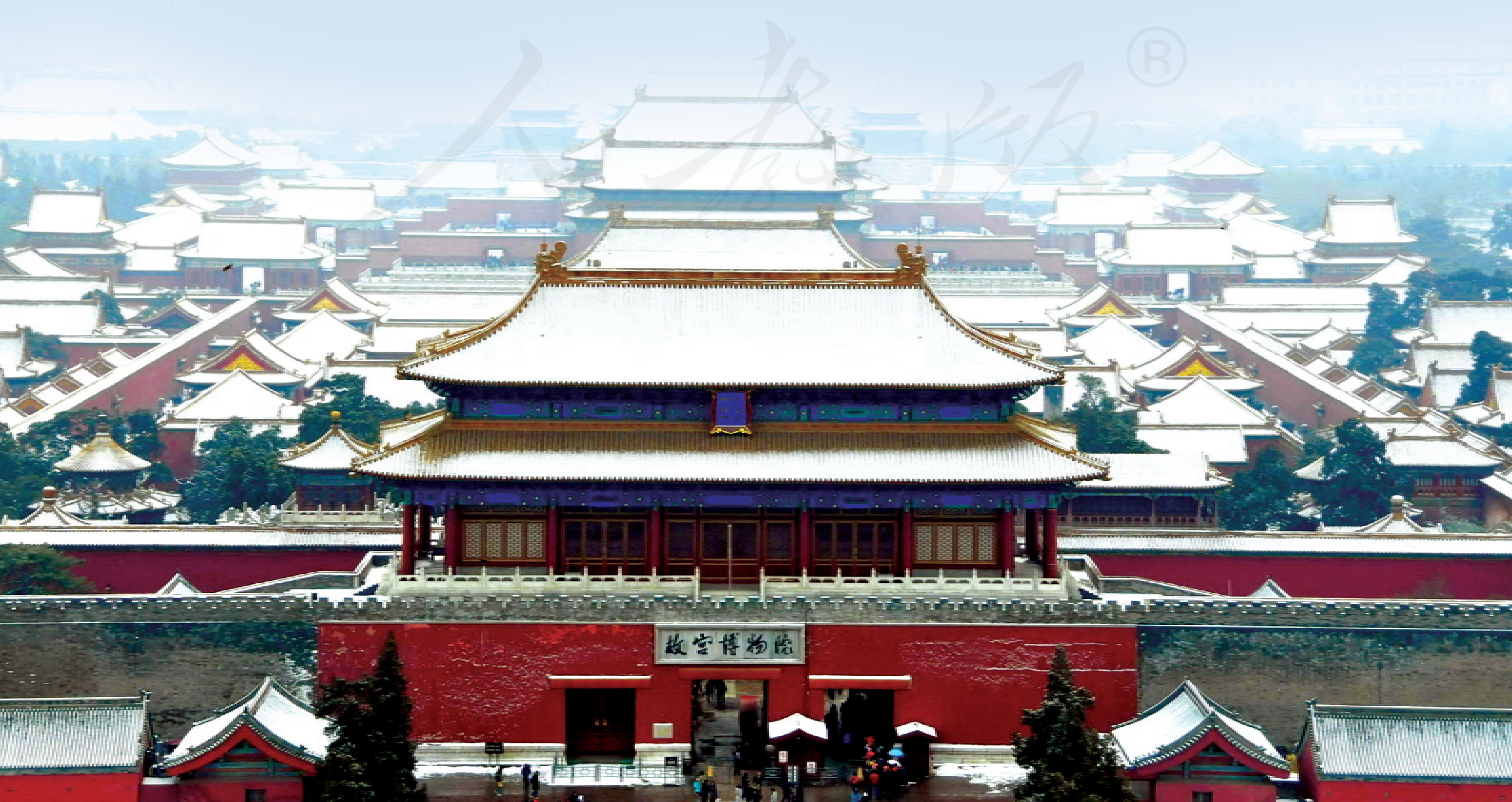
12. 证明：如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线分别相等，那么这两个三角形全等.

第十八章　轴对称

我们生活在一个充满对称的世界中：许多建筑都设计成对称形，艺术作品的创作往往也从对称角度考虑，自然界的许多动植物也按对称形生长，中国的方块字中有些也具有对称性……对称给我们带来多少美的感受！

轴对称是一种重要的对称．本章我们将从生活中的对称出发，学习几何图形的轴对称，并利用轴对称来研究等腰三角形，进而通过推理论证得到等腰三角形、等边三角形的性质和判定方法，由此可以体会图形变化在几何研究中的作用．

让我们一起探索轴对称的奥秘吧！



18.1 轴对称

18.1.1　轴对称

对称现象无处不在，从天安门到京剧脸谱，从立交桥到交通标志，甚至日常生活用品中，人们都可以找到对称的例子（图 18.1-1）.

图 18.1-1

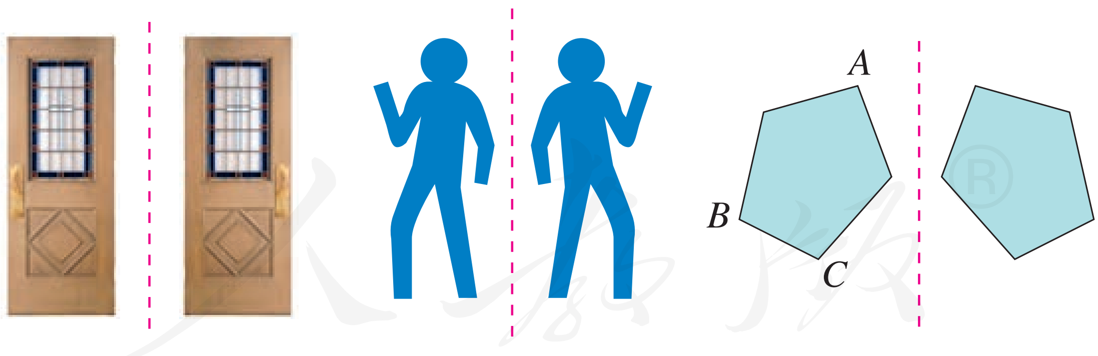
如图 18.1-2，把一张纸对折，剪出一个图案（折痕处不要完全剪断），再打开这张对折的纸，就得到了美丽的窗花．观察得到的窗花，你能发现它们有什么共同的特点吗？

图 18.1-2

像窗花一样，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做**轴对称图形**（axisymmetric figure），这条直线就是它的**对称轴**（axis of symmetry）. 这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称. 你能举出一些轴对称图形的例子吗？

思考

下面的每对图形有什么共同特点？



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 18.1-3

把图 18.1-3 中的每一对图形沿着虚线折叠，左边的图形能与右边的图形重合.

像这样，把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线（成轴）对称**，这条直线叫做**对称轴**，折叠后重合的点是对应点，叫做**对称点**（symmetric points）. 你能再举出一些两个图形成轴对称的例子吗？

请你标出图 18.1-3（3）中点 A，B，C 的对称点 A'，B'，C'.

思考

成轴对称的两个图形全等吗？如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形全等吗？这两个图形对称吗？

把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形. 把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条轴对称.

思考

如图 18.1-4，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，点 A'，B'，C' 分别是点 A，B，C 的对称点，线段 AA'，BB'，CC' 与直线 MN 有什么关系？

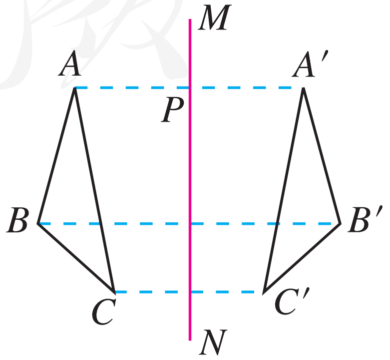


图 18.1-4

在图 18.1-4 中，点 A，A'是对称点，设 AA'与对称轴 MN 相交于点 P，将$\triangle ABC$ 或$\triangle A'B'C'$沿 MN 折叠后，点 A 与 A'重合. 于是有

$$AP=A'P,\ \angle MPA=\angle MPA'=90^\circ.$$

对于其他的对应点，如点 B 与 B'，点 C 与 C'也有类似的情况. 因此，对称轴所在直线经过对称点所连线段的中点，并且垂直于这条线段.

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的**垂直平分线**（perpendicular bisector）. 这样，我们就得到图形轴对称的性质：

如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

类似地，**轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.** 例如图 18.1-5 中，l 垂直平分 AA'，l 垂直平分 BB'.

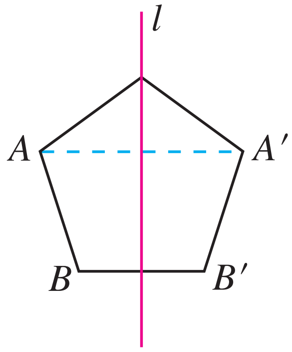
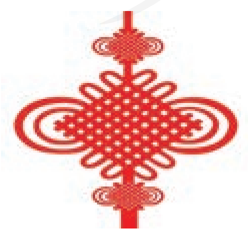
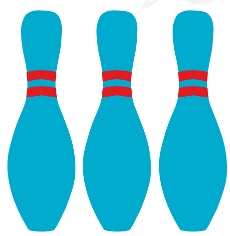


图 18.1-5

巩固运用18.1

1. 如图所示的每个图形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴.


（1）


（2）


（3）


（4）

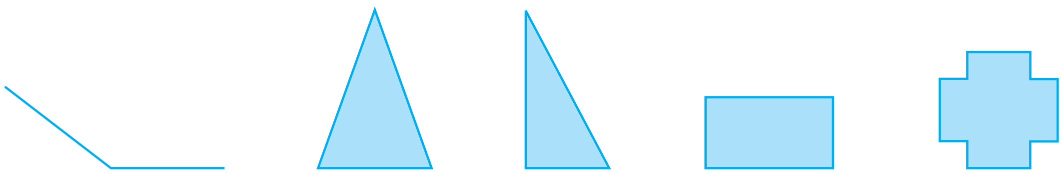
（第 1 题）

2. 如图所示的每幅图形中的两个图案是轴对称的吗？如果是，指出它们的对称轴，并找出一对对称点.

（1）　　（2）　　（3）

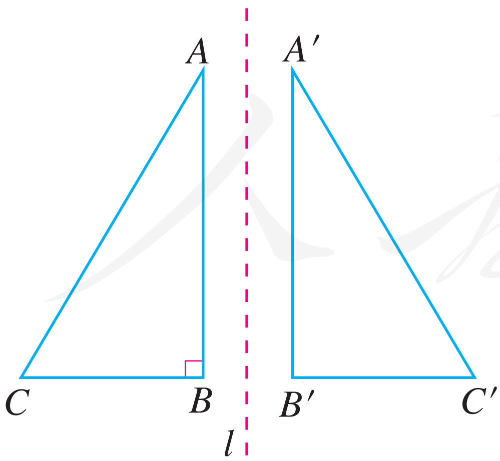
（第 2 题）

3. 下列各图形是轴对称图形吗？如果是，画出它们的一条对称轴.

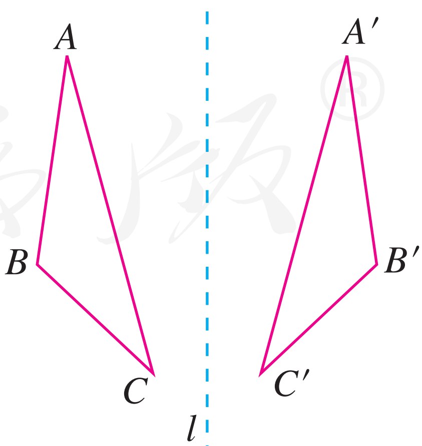


（第 3 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，$\angle B = 90°$，$A'B' = 6$ cm. 求 $\angle A'B'C'$ 的度数和 AB 的长.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，这两个三角形全等吗？一般地，如果两个三角形全等，那么它们一定关于某条直线对称吗？

18.1.2　线段的垂直平分线的性质

探究

如图 18.1-6，直线 l 垂直平分线段 AB，P_1，P_2，P_3，…是 l 上的点，分别量一量点 P_1，P_2，P_3，…到点 A 与点 B 的距离，你有什么发现？

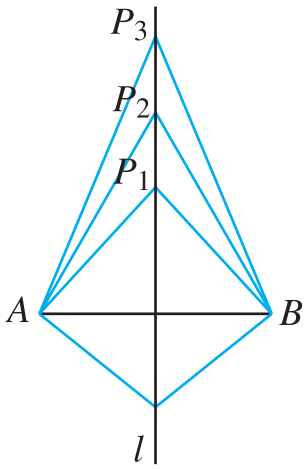


图 18.1-6

可以发现，点 P_1，P_2，P_3，…到点 A 的距离与它们到点 B 的距离分别相等. 如果把线段 AB 沿直线 l 对折，线段 P_1A 与 P_1B、线段 P_2A 与 P_2B、线段 P_3A 与 P_3B……都是重合的，因此它们也分别相等.

由此我们可以得出线段的垂直平分线的性质：

线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

利用判定两个三角形全等的方法，也可以证明这个性质.

如图 18.1-7，直线 $l \perp AB$，垂足为 C，$AC=CB$，点 P 在 l 上. 求证 $PA=PB$.

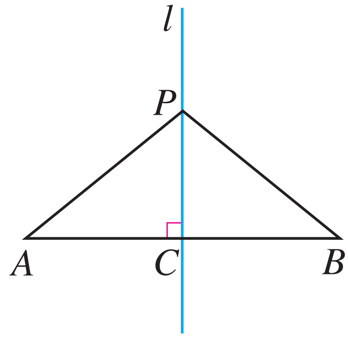


图 18.1-7

证明： $\because$ $l \perp AB$，

$\therefore$ $\angle PCA=\angle PCB$.

又 $AC=CB$，$PC=PC$，

$\therefore$ $\triangle PCA \cong \triangle PCB$（SAS）.

$\therefore$ $PA=PB$.

反过来，如果 $PA=PB$，那么点 P 是否在线段 AB 的垂直平分线上呢？

如图 18.1-8，$PA=PB$，过点 P 作 PC 垂直于 AB，垂足为 C，那么根据判定直角三角形全等的“斜边、直角边”的方法，可以得到 $\triangle PCA \cong \triangle PCB$，从而得到 $AC=BC$，所以 PC 是线段 AB 的垂直平分线.

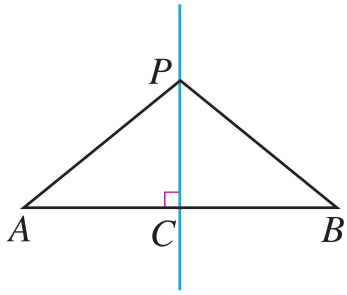


图 18.1-8

由上面的推证可以得到：

与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

从上面两个结论可以看出：在线段 AB 的垂直平分线 l 上的点与 A，B 的距离都相等；反过来，与 A，B 的距离相等的点都在 l 上. 所以，直线 l 可以看成与两点 A，B 的距离相等的所有点的集合.

例 1 如图 18.1-9，在$\triangle ABC$中，边AB，AC的垂直平分线相交于点P，连接PA，PB，PC. 求证：点P在BC的垂直平分线上.

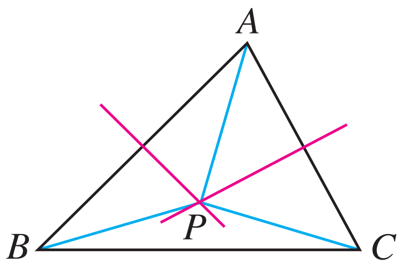


图 18.1-9

证明：$\because$ 点P在AB的垂直平分线上，

$\therefore$ $PA=PB$.

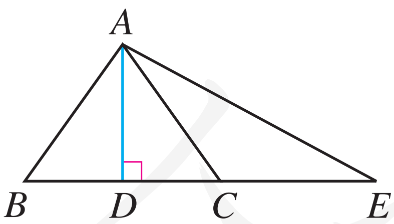
同理 $PA=PC$.

$\therefore$ $PB=PC$.

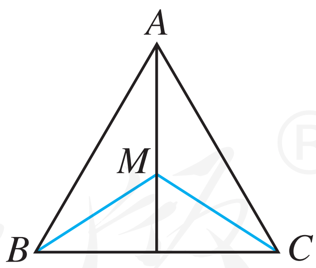
$\therefore$ 点P在BC的垂直平分线上.

巩固运用18.2

1. 如图，$AD\perp BC$，$BD=DC$，点C在AE的垂直平分线上. AB，AC，CE的长度有什么关系？$AB+BD$与DE有什么关系？



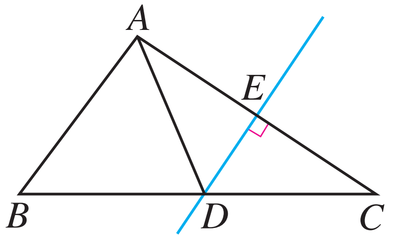
（第 1 题）



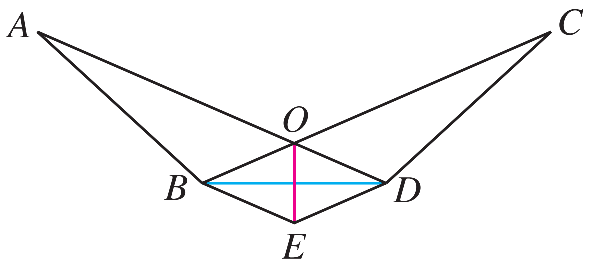
（第 2 题）

2. 如图，$AB=AC$，$MB=MC$. 直线AM是线段BC的垂直平分线吗？

3. 如图，在$\triangle ABC$中，DE是AC的垂直平分线，$AE=3$ cm，$\triangle ABD$的周长为 13 cm. 求$\triangle ABC$的周长.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AD 与 BC 相交于点 O，$OA=OC$，$\angle A=\angle C$，$BE=DE$. 求证：OE 垂直平分 BD.

思考

有时我们感觉两个平面图形是轴对称的，如何验证呢？不折叠图形，你能准确地画出轴对称图形的对称轴吗？

如果两个图形成轴对称，其对称轴就是任何一对对应点所连线段的垂直平分线. 因此，我们只要找到一对对应点，画出连接它们的线段的垂直平分线，就可以得到这两个图形的对称轴.

例 2 如图 18.1-10（1），点 A 和点 B 关于某条直线成轴对称，你能画出这条直线吗？

分析： 我们只要连接点 A 和点 B，画出线段 AB 的垂直平分线，就可以得到点 A 和点 B 的对称轴.

画法： 如图 18.1-10（2）.

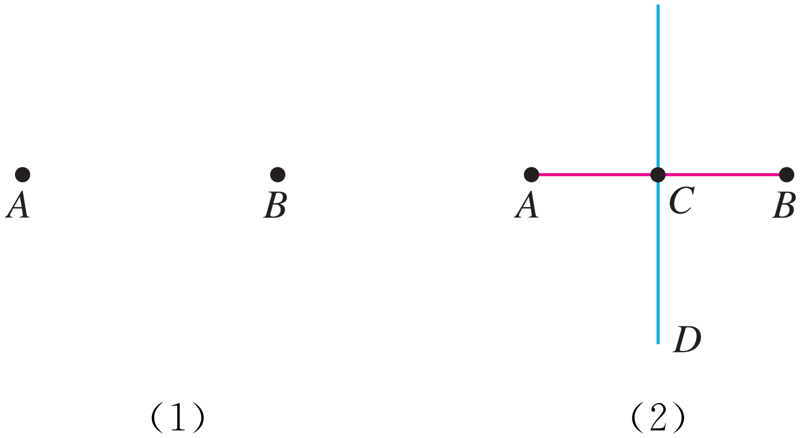


图 18.1-10

(1) 画出 AB 的中点 C；

(2) 画出 AB 的垂线 CD.

CD 就是所求的直线.

同样地，对于轴对称图形，只要找到任意一组对应点，画出对应点所连线段的垂直平分线，就得到此图形的对称轴.

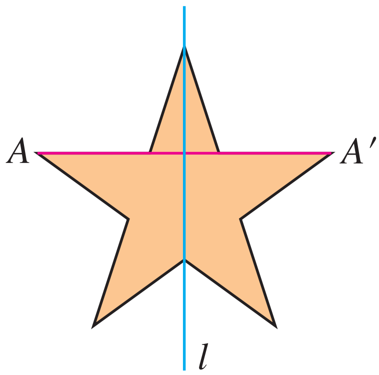


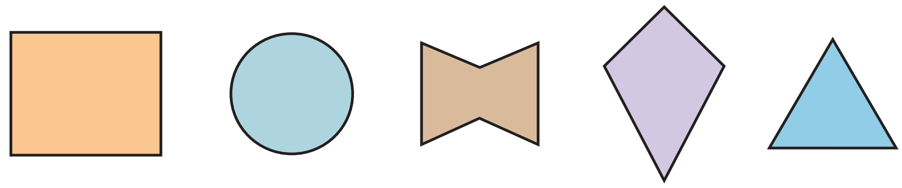
图 18.1-11

例如，对于图 18.1-11 中的五角星，我们可以找出它的一对对应点 A 和 A'，连接 AA'，画出线段 AA'的垂直平分线 l，则 l 就是这个五角星的一条对称轴.

类似地，你能画出这个五角星的其他对称轴吗？

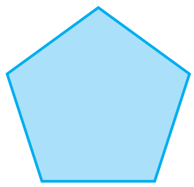
巩固运用18.3

1. 画出下列各图形的一条对称轴，和同学比较一下，你们画出的对称轴一样吗？

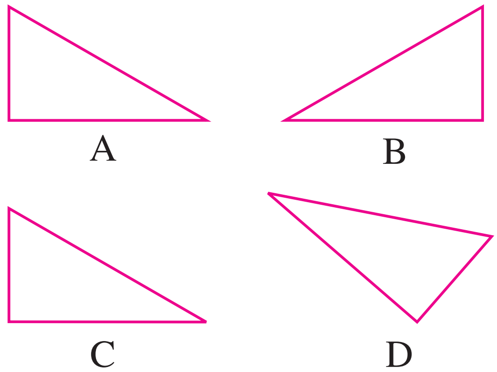


（第 1 题）

2. 如图，画出正五边形的一条对称轴.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，与图形 A 成轴对称的是哪个图形？画出它们的对称轴.

*4. 如图，某地由于居民增多，要在公路 l 上增加一个公共汽车站，A，B 是路边两个新建小区. 这个公共汽车站建在什么位置，能使两个小区到车站的路程一样长？

（第 4 题）

*18.1.3 画轴对称图形

如图 18.1-12，在一张半透明的纸的左边部分，画一只左脚印. 把这张纸对折后描图，打开对折的纸，就能得到相应的右脚印. 这时，右脚印和左脚印成轴对称，折痕所在直线就是它们的对称轴，并且连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

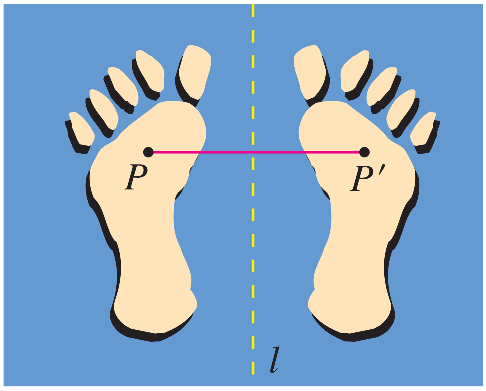


图 18.1-12

归纳

由一个平面图形可以得到与它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同；新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点；连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

思考

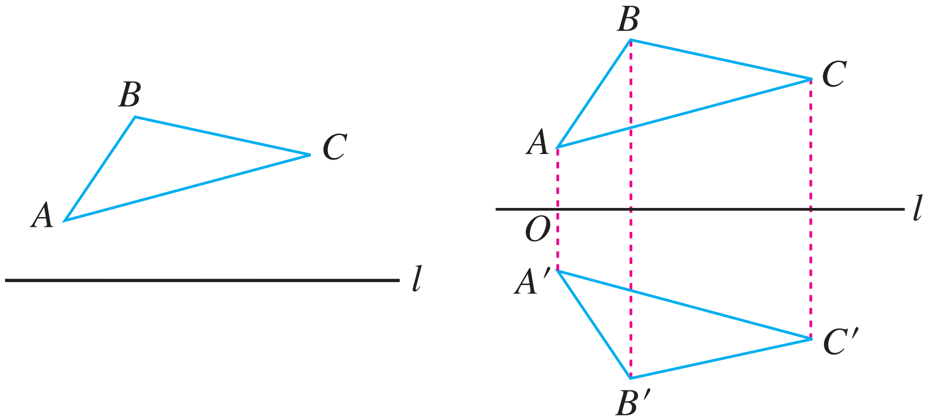
如果有一个图形和一条直线，如何画出与这个图形关于这条直线对称的图形呢？

例 3 如图 18.1-13（1），已知△ABC 和直线 l，画出

* 本小节为低视力学生选学内容.

与△ABC 关于直线 l 对称的图形.

分析：△ABC 可以由三个顶点的位置确定，只要能分别画出这三个顶点关于直线 l 的对称点，连接这些对称点，就能得到要画的图形.



（1）　　　　（2）

图 18.1-13

画法：（1）如图 18.1-13（2），过点 A 画直线 l 的垂线，垂足为 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，A'就是点 A 关于直线 l 的对称点；

（2）同理，分别画出点 B，C 关于直线 l 的对称点 B'，C'；

（3）连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，则△$A'B'C'$即所求.

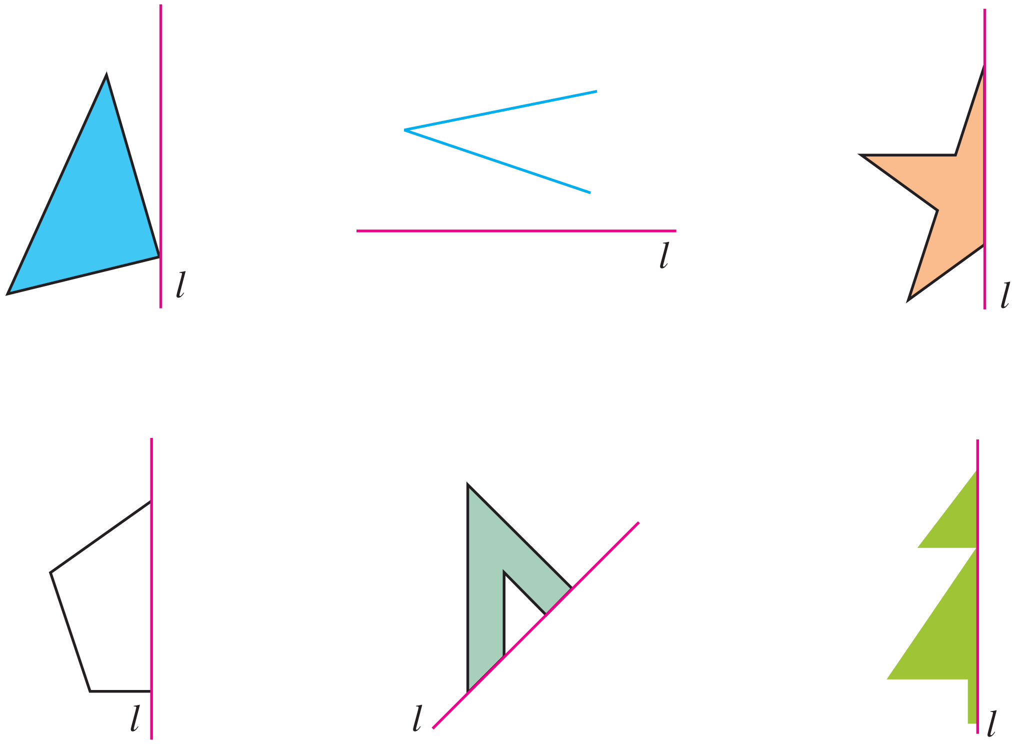
> 画好后，你也可以通过折叠的方法验证一下.

归纳

几何图形都可以看作由点组成. 对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形.

巩固运用18.4

1. 如图，把下列图形补成关于直线 l 对称的图形.



（第 1 题）

2. 用纸片剪一个三角形，分别沿它一边的中线、高、角平分线对折，看看哪些部分能够重合，哪些部分不能重合.

18.1.4　平面直角坐标系中的轴对称

下面，我们探究在直角坐标系中，分别以 x 轴和 y 轴为对称轴时，一对对称点的坐标之间的关系.

思考

图 18.1-14 是一幅老北京城的示意图，其中西直门和东直门是关于中轴线对称的. 如果以天安门为原点，分别以长安街和中轴线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，根据如图所示的东直门的坐标，你能说出西直门的坐标吗？

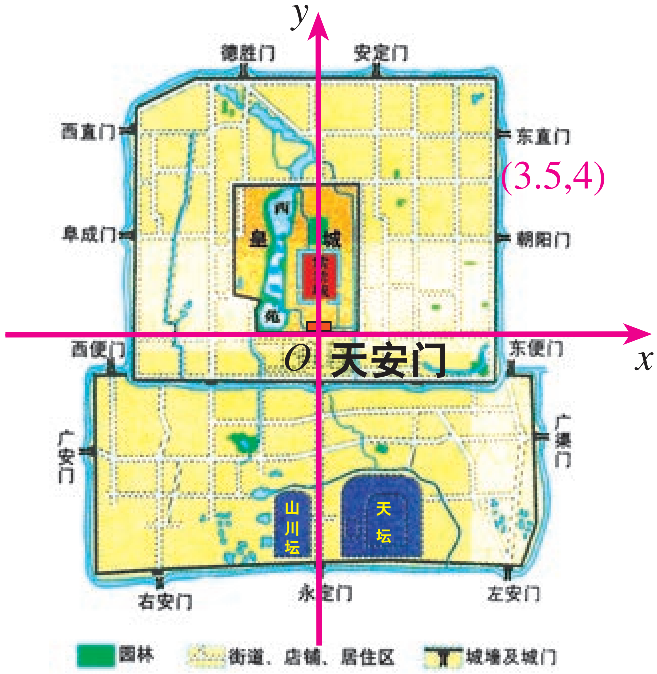


图 18.1-14

在如图 18.1-15 的平面直角坐标系中，画出点 $A(2,-3)$，$B(-1,2)$，$C(-3,-4)$，$D(4,0)$ 及其关于坐标轴的对称点. 并将这些已知点的坐标及其关于坐标轴的对称点的坐标填入下表.

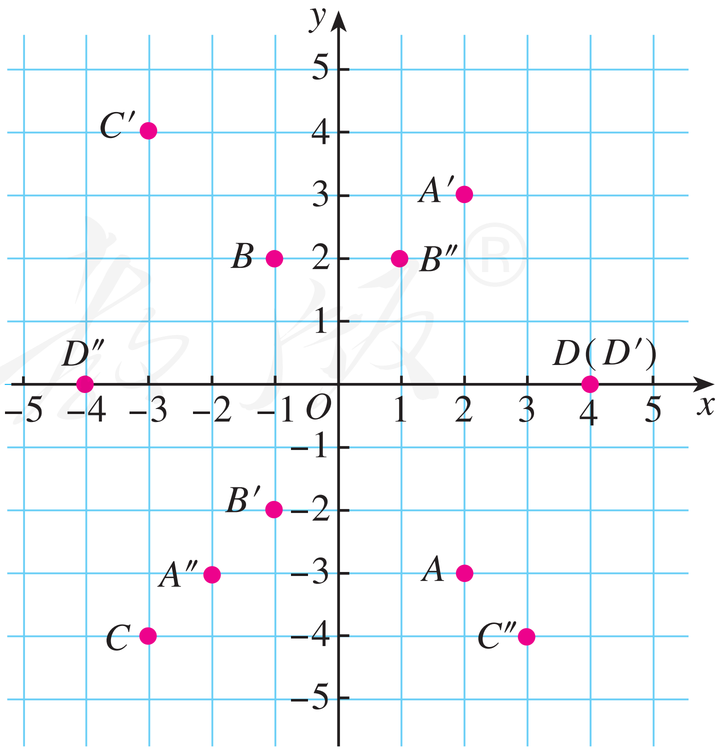


图 18.1-15

已知点	$A(2, -3)$	$B(-1, 2)$	$C(-3, -4)$	$D(4, 0)$
关于 x 轴的对称点	$A'(2, 3)$	$B'(-1, -2)$	$C'(-3, 4)$	$D'(4, 0)$
关于 y 轴的对称点	$A''(-2, -3)$	$B''(1, 2)$	$C''(3, -4)$	$D''(-4, 0)$

请你看看每对对称点的坐标有怎样的规律，再和同学讨论一下.

归纳

点 (x, y) 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x, -y)$；

点 (x, y) 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x, y)$.

利用上述规律，我们可以很容易地写出与一个点关于 x 轴或 y 轴对称的点的坐标.

例 4 如图 18.1-16，四边形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标分别为 $A(-4, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, 4)$，$D(-4, 3)$，四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称，写出四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标.

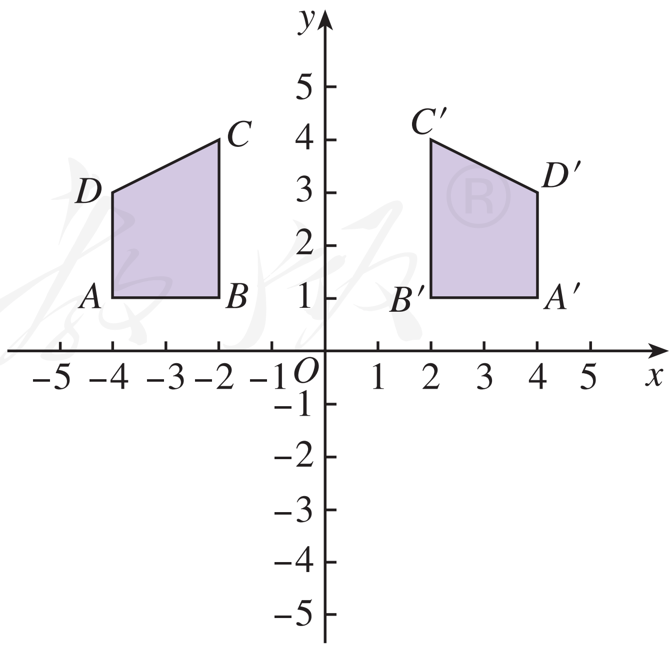


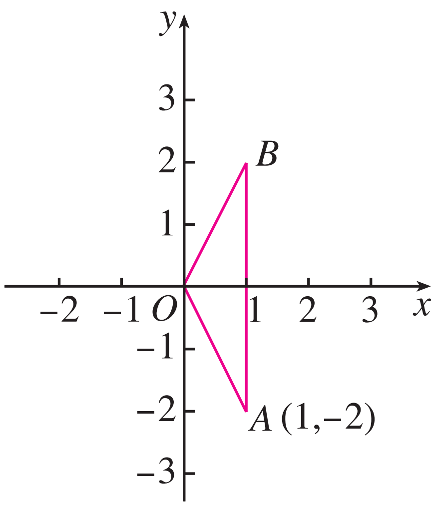
图 18.1-16

解： 点 (x, y) 关于 y 轴对称的点的坐标为

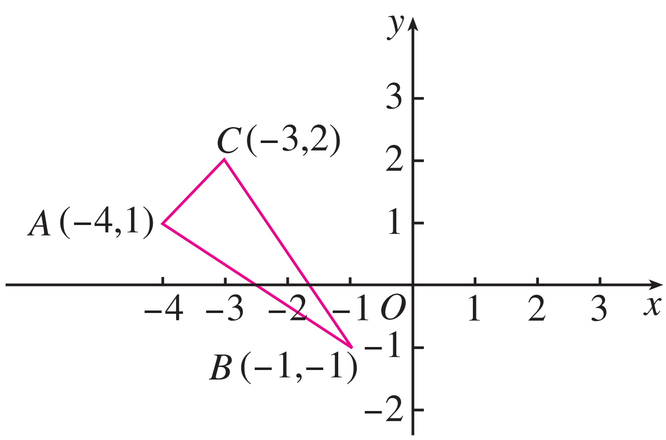
$(-x, y)$，因此四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为 $A'(4, 1)$，$B'(2, 1)$，$C'(2, 4)$，$D'(4, 3)$.

巩固运用18.5

1. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标：
   $(-2, 6)$，$(1, -2)$，$(-1, 3)$，$(-4, -2)$，$(1, 0)$.
2. 如图，$\triangle ABO$关于 x 轴对称，点 A 的坐标为 $(1, -2)$，写出点 B 的坐标.

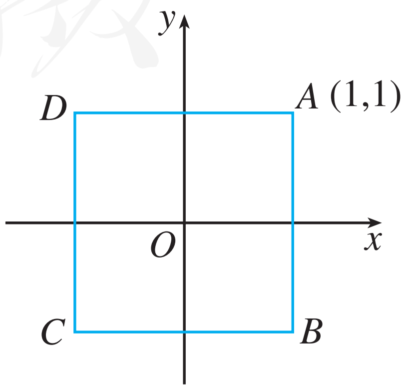


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别写出与 $\triangle ABC$ 各个顶点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标.
4. 如图，以正方形 $ABCD$ 的中心为原点建立平面直角坐标系，x 轴与 AD 平行，点 A 的坐标为 $(1, 1)$. 写出点 B，C，D 的坐标.



（第 4 题）

阅读与思考

最短路径问题

前面我们研究过一些关于“两点的所有连线中，线段最短”“连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短”等的问题，我们称它们为最短路径问题．同学们通过讨论下面的问题，可以体会如何运用所学知识选择最短路径．

问题 如图 1，牧马人从 A 地出发，到一条笔直的河边 l 饮马，然后到 B 地．牧马人到河边的什么地方饮马，可使所走的路径最短？

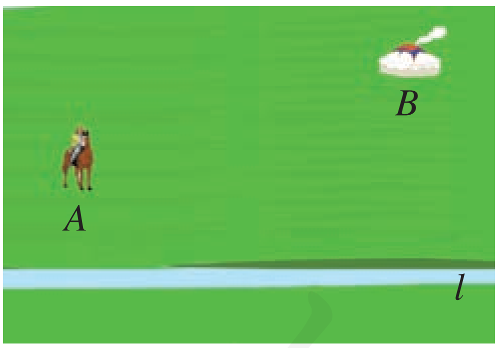


图 1

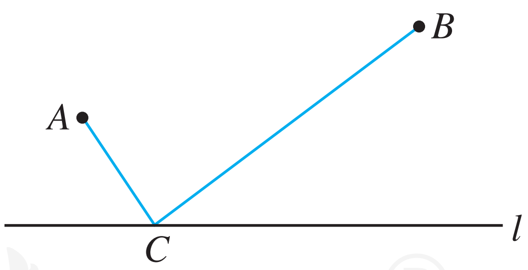


图 2

如果把河边 l 近似地看成一条直线（图 2），C 为直线 l 上的一个动点，那么，上面的问题可以转化为：当点 C 在 l 的什么位置时，AC 与 CB 的和最小．由这个问题，我们可以联想到下面的问题：

如图 3，点 A，B 分别是直线 l 异侧的两个点，如何在 l 上找到一个点，使得这个点到点 A，B 的距离的和最短？

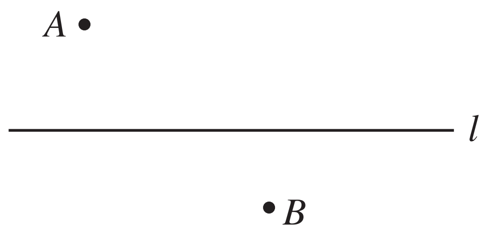


图 3

利用已经学过的知识，可以很容易地解决上面的问题，即：连接 AB，与直线 l 相交于一点，根据“两点之间，线段最短”，可知这个交点即为所求.

现在，要解决的问题是：点 A，B 分别是直线 l 同侧的两个点，如何在 l 上找到一个点，使得这个点到点 A，B 的距离的和最短？

如果我们能把点 B 移到 l 的另一侧 B' 处，同时对直线 l 上的任一点 C，都保持 CB 与 CB' 的长度相等，就可以把问题转化为“图 3”的情况，从而使新问题得到解决. 你能利用轴对称的有关知识，找到符合条件的点 B' 吗？

如图 4，画出点 B 关于 l 的对称点 B'，利用轴对称的性质，可以得到 $CB'=CB$. 这样，问题就转化为：当点 C 在 l 的什么位置时，AC 与 CB' 的和最小？

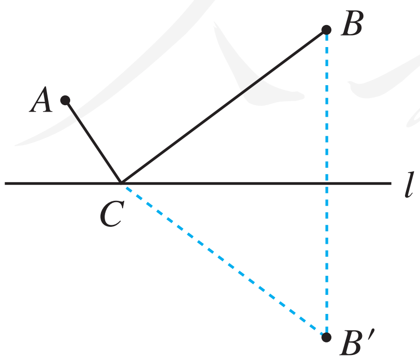


图 4

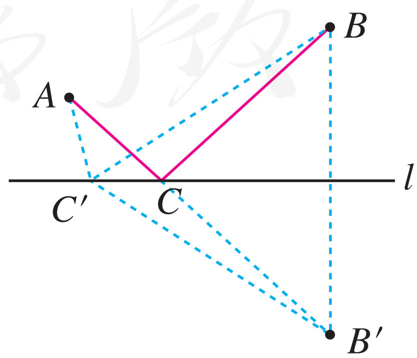


图 5

如图 5，在连接 A，B' 两点的线中，线段 AB' 最短. 因此，线段 AB' 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求.

为了证明点 C 的位置即为所求，我们不妨在直线上另外任取一点 C'（图 5），连接 AC'，BC'，$B'C'$，证明 $AC+CB<AC'+C'B$. 你能完成这个证明吗？

18.2 等腰三角形

18.2.1 等腰三角形

我们知道，有两边相等的三角形是**等腰三角形**（isosceles triangle）. 下面，我们利用轴对称的知识来研究等腰三角形的性质.

探究

如图 18.2-1，把一张长方形的纸按图中虚线向下对折，并剪去阴影部分，再把它展开，得到的$\triangle ABC$有什么特点？

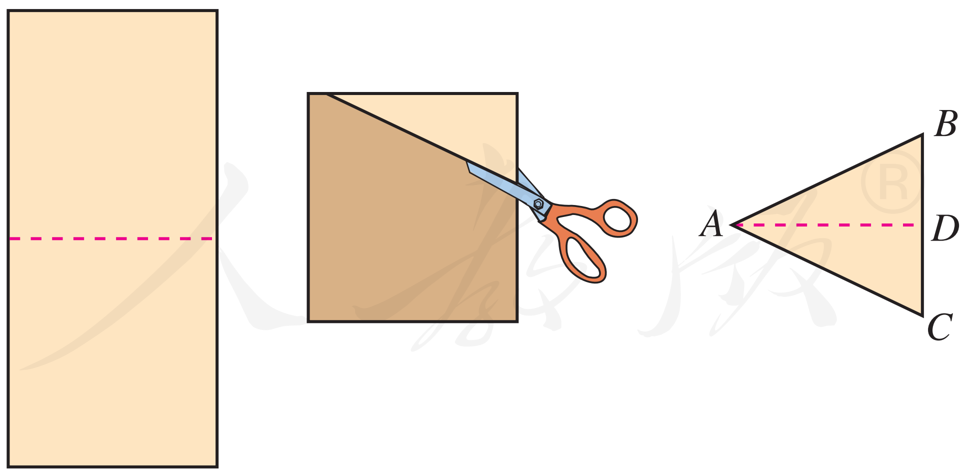


图 18.2-1

在上述过程中，剪刀剪过的两条边是相等的，即$\triangle ABC$中$AB=AC$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形.

探究

把剪出的等腰三角形ABC沿折痕对折，找出其中重合的线段和角.

由这些重合的线段和角，你能发现等腰三角形的性质吗？说一说你的猜想.

在一张白纸上任意画一个等腰三角形，把它剪下来，请你试着折一折. 你的猜想仍然成立吗？

我们可以发现等腰三角形的性质：

性质1　等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）；

性质2　等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简写成“三线合一”）.

由上面的操作过程获得启发，我们可以利用三角形的全等证明这些性质.

如图18.2-2，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，作底边BC的中线AD.

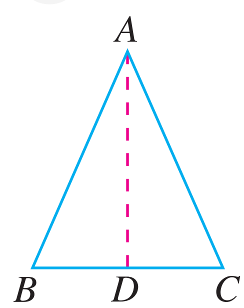


图 18.2-2

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle BAD \cong \triangle CAD$（SSS）.

$\therefore \quad \angle B = \angle C$.

这样，我们就证明了性质 1.

由 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$，还可得出 $\angle BAD = \angle CAD$，$\angle BDA = \angle CDA$，从而 $AD \perp BC$. 这也就证明了等腰三角形 ABC 底边上的中线 AD 平分顶角 $\angle A$ 并垂直于底边 BC.

用类似的方法，还可以证明等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边，底边上的高平分顶角并且平分底边. 这也就证明了性质 2.

从以上证明也可以得出，等腰三角形底边上的中线的左右两部分经翻折可以重合，等腰三角形是轴对称图形，底边上的中线（顶角平分线、底边上的高）所在直线就是它的对称轴.

例 1 如图 18.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 D 在 AC 上，且 $BD = BC = AD$. 求 $\triangle ABC$ 各角的度数.

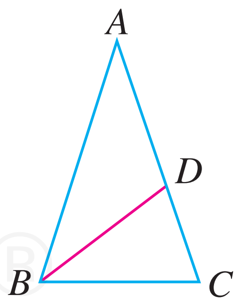


图 18.2-3

解： $\because \quad AB = AC$，$BD = BC = AD$，

$\therefore \quad \angle ABC = \angle C = \angle BDC$，

$\angle A = \angle ABD$（等边对等角）.

设 $\angle A = x$，则

$$\angle BDC = \angle A + \angle ABD = 2x,$$

从而

$$\angle ABC = \angle C = \angle BDC = 2x.$$

于是在 $\triangle ABC$ 中，有

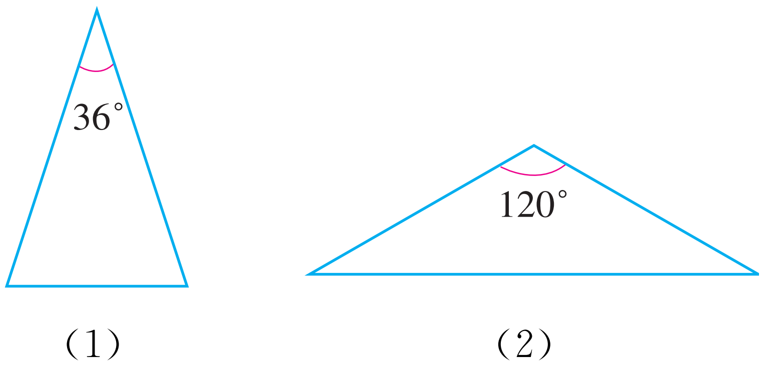
$$\angle A+\angle ABC+\angle C=x+2x+2x=180^\circ.$$

解得 $x=36^\circ$.

所以，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=36^\circ$，$\angle ABC=\angle C=72^\circ$.

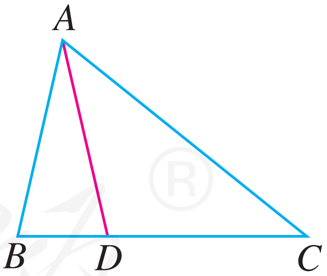
巩固运用18.6

1. 如图，在下列等腰三角形中，分别求出它们的底角的度数.



（第 1 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AD=DC$，$\angle BAD=26^\circ$. 求$\angle B$ 和$\angle C$ 的度数.

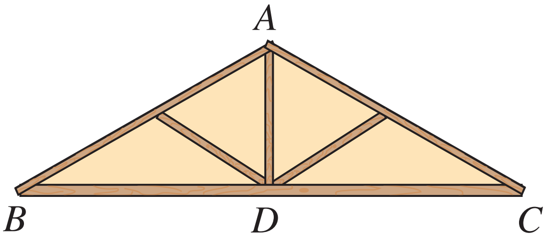


（第 2 题）

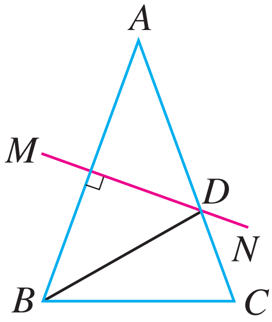
3. （1）等腰三角形的一个角是 110°，它的另外两个角是多少度？

   （2）等腰三角形的一个角是 80°，它的另外两个角是多少度？

4. 如图，厂房屋顶钢架外框是等腰三角形，其中 $AB=AC$，立柱 $AD\perp BC$，垂足为 D，且顶角$\angle BAC=120^\circ$. $\angle B$，$\angle C$，$\angle BAD$，$\angle CAD$ 各是多少度？



（第 4 题）



（第 5 题）

*5. 如图，$AB=AC$，$\angle A=40^\circ$，AB 的垂直平分线 MN 与 AC 相交于点 D. 求 $\angle DBC$ 的度数.

思考

我们知道，如果一个三角形有两条边相等，那么它们所对的角相等. 反过来，如果一个三角形有两个角相等，那么它们所对的边有什么关系？

如图 18.2-4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1=\angle 2, \\ \angle B=\angle C, \\ AD=AD, \end{cases}$$

∴ $\triangle BAD \cong \triangle CAD$（AAS）.

∴ $AB=AC$.

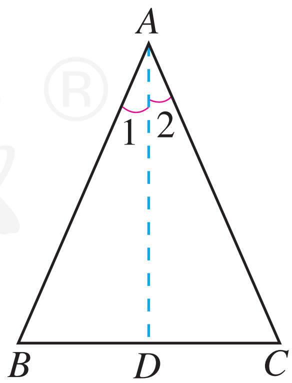


图 18.2-4

由上面推证，我们可以得到等腰三角形的判定方法：

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）.

例 2 求证：如果三角形一个外角的平分线平行于三角形的一边，那么这个三角形是等腰三角形.

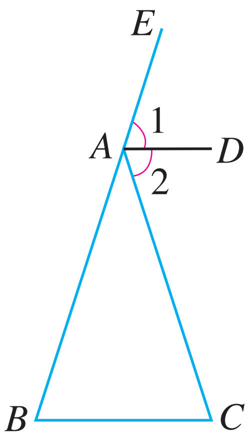


图 18.2-5

已知：$\angle CAE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，$\angle 1=\angle 2$，$AD \parallel BC$（图 18.2-5）.

求证：$AB=AC$.

分析： 要证明 $AB=AC$，可先证明 $\angle B=\angle C$. 因为 $\angle 1=\angle 2$，所以可以设法找出 $\angle B$，$\angle C$ 与 $\angle 1$，$\angle 2$ 的关系.

证明： $\because$ $AD \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle B$（________________），

$\angle 2=\angle C$（________________）.

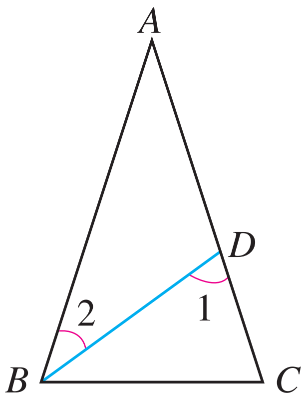
又 $\angle 1=\angle 2$（已知），

$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

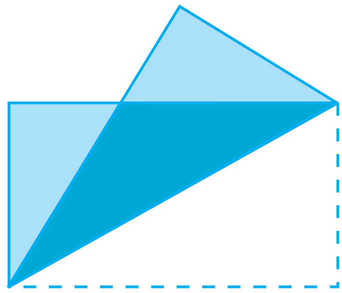
$\therefore$ $AB=AC$（________________）.

巩固运用18.7

1. 如图，$\angle A=36^\circ$，$\angle DBC=36^\circ$，$\angle C=72^\circ$. 分别计算 $\angle 1$，$\angle 2$ 的度数，并说明图中有哪些等腰三角形.
2. 如图，把一张长方形的纸沿对角线折叠，重合部分是一个等腰三角形吗？为什么？

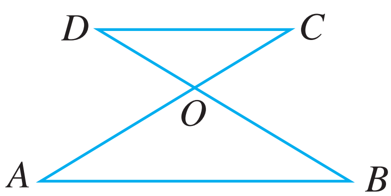


（第 1 题）

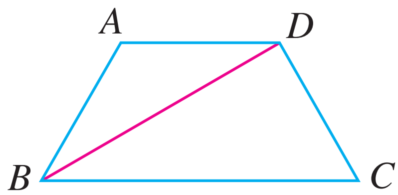


（第 2 题）

3. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，且 $AB \parallel DC$，$OA = OB$. 求证 $OC = OD$.



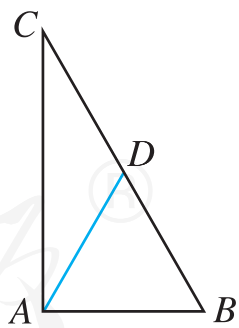
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AD \parallel BC$，BD 平分 $\angle ABC$. 求证 $AB = AD$.

*5. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AD = \frac{1}{2} BC$. 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.



（第 5 题）

18.2.2 等边三角形

我们知道，**等边三角形**（equilateral triangle）是三边都相等的特殊的等腰三角形.

思考

把等腰三角形的性质用于等边三角形，能得到什么结论？一个三角形的三个内角满足什么条件才是等边三角形？

由等腰三角形的性质和判定方法，可以得到：

请你自己证明这些结论.

等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60°.

三个角都相等的三角形是等边三角形.

有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

例 3 如图 18.2-6，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE \parallel BC$，分别与 AB，AC 相交于点 D，E. 求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

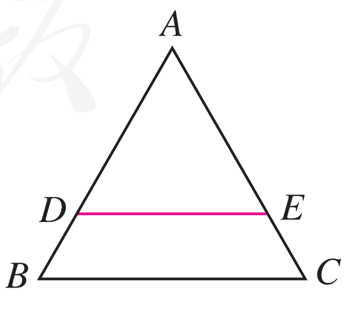


图 18.2-6

证明：$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore$ $\angle A = \angle B = \angle C$.

$\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$.

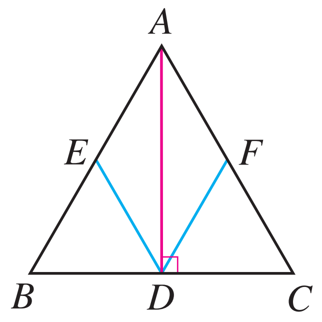
$\therefore\quad \angle A=\angle ADE=\angle AED.$

$\therefore\quad \triangle ADE$ 是等边三角形.

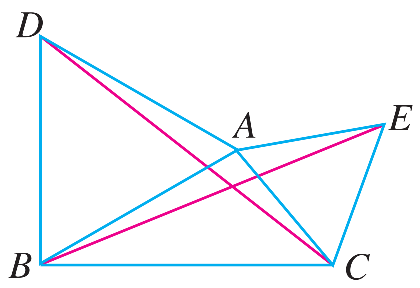
想一想，本题还有其他证法吗？

巩固运用18.8

1. 试画出等边三角形的三条对称轴. 你能发现什么？
2. 如图，在等边三角形 ABC 中，AD 是 BC 上的高，$\angle BDE=\angle CDF=60^{\circ}$. 图中有哪些与 BD 相等的线段？

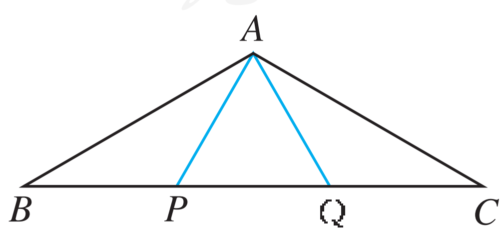


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\triangle ABD$，$\triangle AEC$ 都是等边三角形. 求证 $BE=DC$.
4. 如图，P，Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，并且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.



（第 4 题）

探究

如图 18.2-7，将两个含 30° 角的全等的三角尺摆放在一起．你能借助这个图形，找到 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 BC 与斜边 AB 之间的数量关系吗？

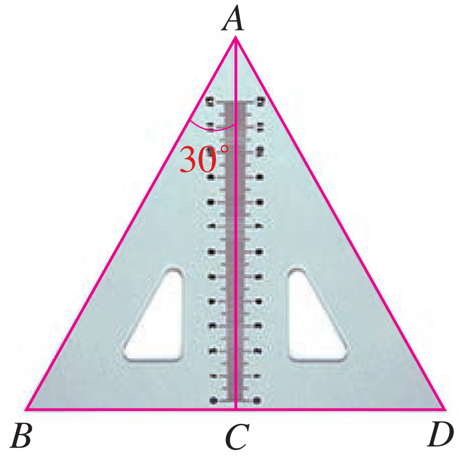


图 18.2-7

$\triangle ADC$ 是 $\triangle ABC$ 的轴对称图形，因此 $AB=AD$，$\angle BAD=2\times 30^\circ=60^\circ$，从而 $\triangle ABD$ 是一个等边三角形．再由 $AC\perp BD$，可得 $BC=CD=\frac{1}{2}AB$．于是我们得到：

你还能用其他方法证明吗？

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半．

例 4 图 18.2-8 是屋架设计图的一部分，点 D 是斜梁 AB 的中点，立柱 BC，DE 垂直于横梁 AC，$AB=7.4$ m，$\angle A=30^\circ$．立柱 BC，DE 要多长？

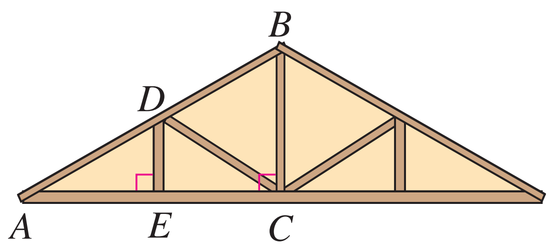


图 18.2-8

解：$\because$ $DE \perp AC$，$BC \perp AC$，$\angle A = 30^\circ$，

$\therefore$ $BC = \frac{1}{2}AB$，$DE = \frac{1}{2}AD$.

$\therefore$ $BC = \frac{1}{2} \times 7.4 = 3.7(\mathrm{m})$.

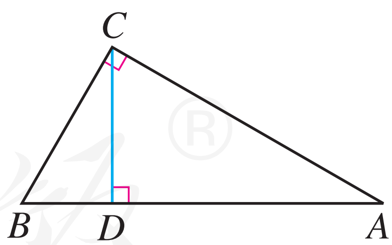
又 $AD = \frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 3.7 = 1.85(\mathrm{m})$.

答：立柱 BC 的长是 3.7 m，DE 的长是 1.85 m.

巩固运用18.9

1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle A = 30^\circ$，AB 等于 10 cm. 求 BC 的长.
2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle B = 2\angle A$. $\angle B$ 和 $\angle A$ 各是多少度？边 AB 与 BC 之间有什么关系？
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，CD 是高，$\angle BCD = 30^\circ$，BC 等于 2 cm. 求 AB 的长.
4. 等腰三角形的底角等于 30°，底边长为 6 cm. 求腰上的高的长.



（第 3 题）

数学活动[*]

活动 1　美术字与轴对称

在美术字中，有些汉字、英文字母和阿拉伯数字是轴对称的．如图 1，画出这些汉字、英文字母和数字的对称轴，或者把它们补齐．

图 1

你能再写出几个轴对称的美术字吗？画出它们的对称轴，并与同学交流．

[*] 本数学活动为低视力学生选学内容．

活动 2　利用轴对称设计图案

利用轴对称，我们可以由一个基本图形得到与它成轴对称的另一个图形，重复这个过程，可以得到美丽的图案（图 2，图 3）.

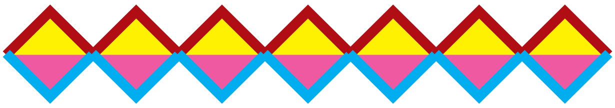


图 2

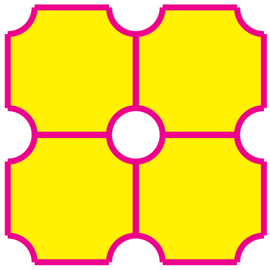


图 3

自己动手在一张半透明的纸上画一个图形，将这张纸折叠，描图，再打开纸，看看你得到了什么？改变折痕的位置并重复几次，你又得到了什么？与同学交流一下.

有时，将平移和轴对称结合起来，可以设计出更丰富的图案，许多镶边和背景的图案就是这样设计的（图 4）.

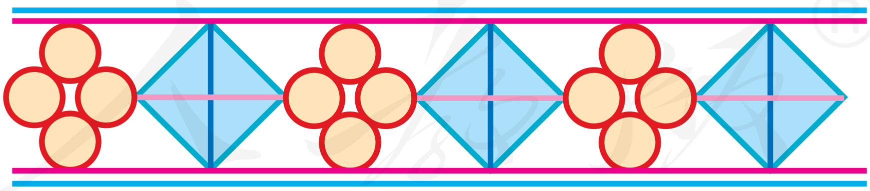
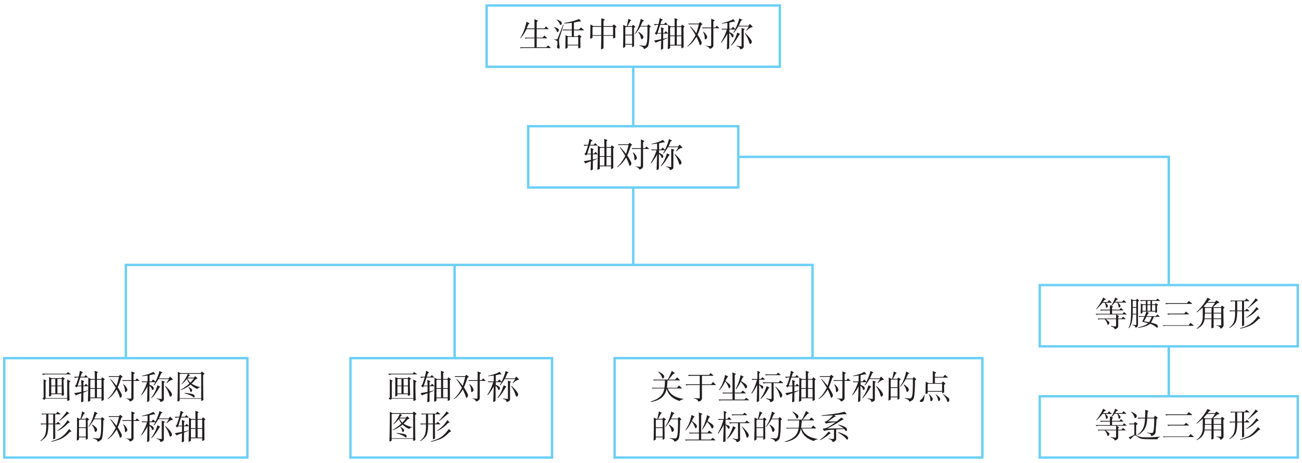


图 4

展开你的想象，从一个或几个图形出发，利用轴对称或与平移进行组合，设计一些图案，并与同学交流.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 在现实世界中存在着大量的轴对称现象，你能举出一些例子吗？成轴对称的图形有什么特点？

2. 在我们学过的几何图形中，有哪些是轴对称图形？它们的对称轴与这个图形有怎样的位置关系？

3. 对于成轴对称的两个图形，对应点所连线段与对称轴有什么关系？

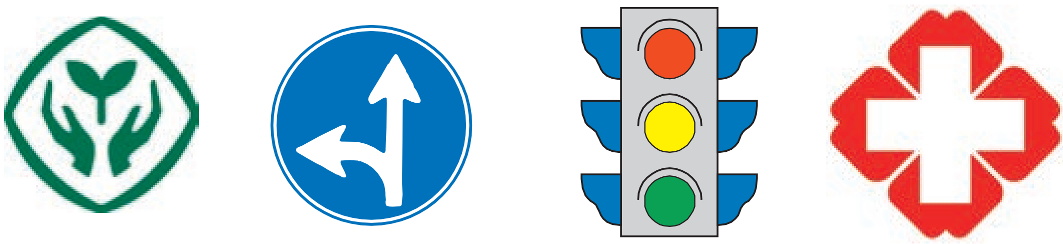
4. 在平面直角坐标系中，如果两个图形关于 x 轴或 y 轴对称，那么对称点的坐标有什么关系？请举例说明.

5. 利用等腰三角形的轴对称性，我们发现了它的哪些性质？你能通过全等三角形加以证明吗？等边三角形作为特殊的等腰三角形，有哪些特殊性质？

复习题 18

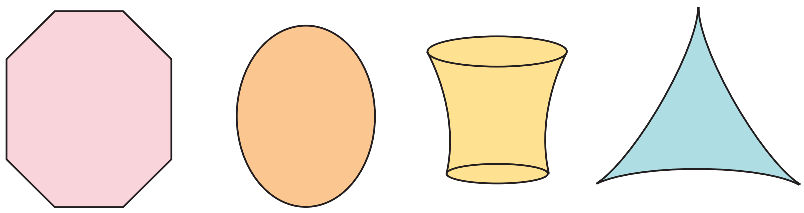
复习巩固

1. 下列图形是轴对称图形吗？如果是，找出它们的对称轴.



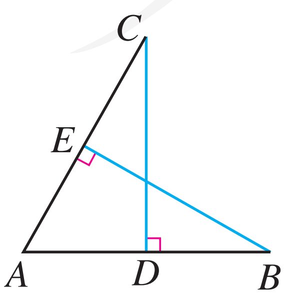
（第 1 题）

2. 画出下列轴对称图形的对称轴.

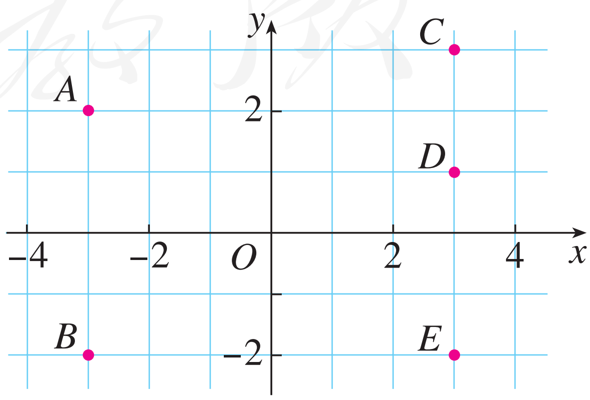


（第 2 题）

3. 如图，D，E 分别是 AB，AC 的中点，$CD \perp AB$，$BE \perp AC$，垂足分别为 D，E. 求证 $AC = AB$.（提示：连接 BC.）



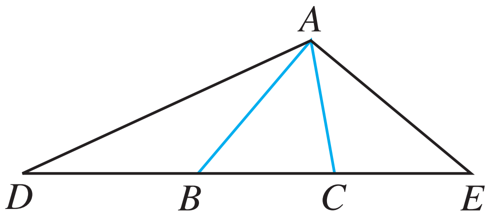
（第 3 题）



（第 4 题）

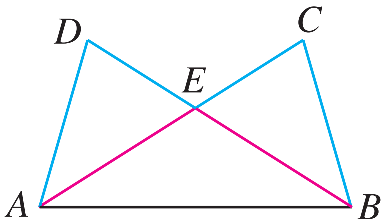
4. 如图所示的点 A，B，C，D，E 中，哪两个点关于 x 轴对称？哪两个点关于 y 轴对称？点 C 和点 E 关于 x 轴对称吗？为什么？

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50^\circ$，$\angle ACB=80^\circ$，延长 CB 至 D，使 $DB=BA$，延长 BC 至 E，使 $CE=CA$，连接 AD，AE．求 $\angle D$，$\angle E$，$\angle DAE$ 的度数．

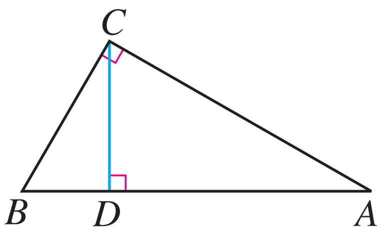


（第 5 题）

6. 如图，$AD=BC$，$AC=BD$．求证：$\triangle EAB$ 是等腰三角形．



（第 6 题）

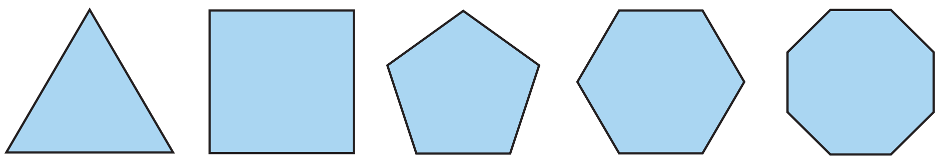


（第 7 题）

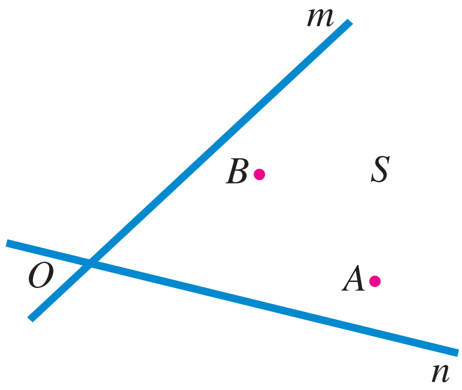
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CD 是高，$\angle A=30^\circ$．求证 $BD=\frac{1}{4}AB$．

综合运用

8. 试确定如图所示的正多边形的对称轴的条数．一般地，一个正 n 边形有多少条对称轴？

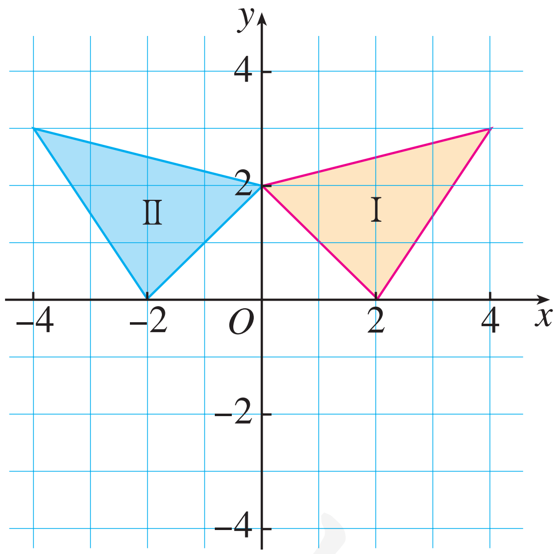

（第 8 题）

9. 如图，电信部门要在 S 区修建一座电视信号发射塔．按照设计要求，发射塔到两个城镇 A，B 的距离必须相等，到两条高速公路 m 和 n 的距离也必须相等．发射塔应修建在什么位置？

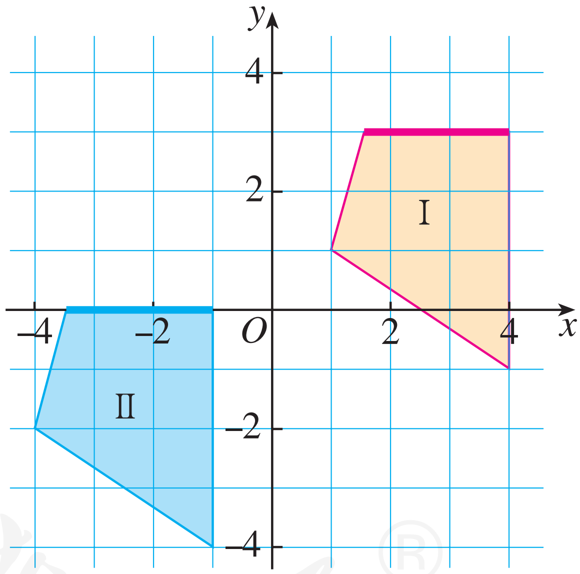


（第 9 题）

10. 如图，从图形Ⅰ到图形Ⅱ是进行了平移还是轴对称？如果是轴对称，找出对称轴；如果是平移，是怎样的平移？



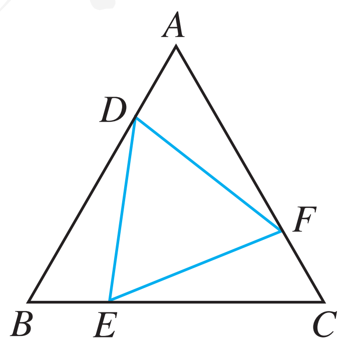
（1）



（2）

（第 10 题）

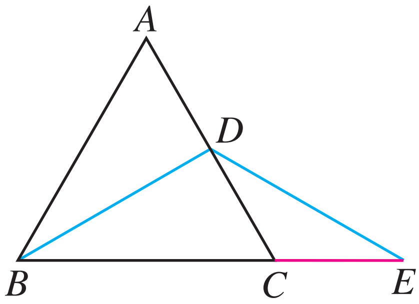
11. 如图，在等边三角形 ABC 的三边上，分别取点 D，E，F，使 $AD=BE=CF$．求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形．



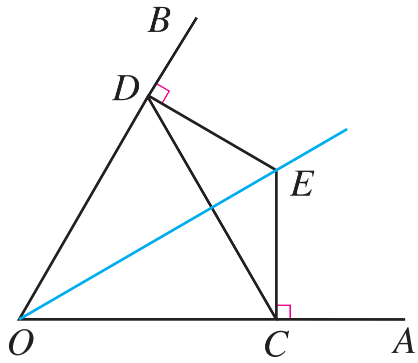
（第 11 题）

拓广探索

12. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是中线，延长 BC 至 E，使 $CE=CD$. 求证 $DB=DE$.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，点 E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$EC \perp OA$，$ED \perp OB$，垂足分别为 C，D.

（1）$\angle ECD$ 和 $\angle EDC$ 相等吗?

（2）OC 和 OD 相等吗?

（3）OE 是线段 CD 的垂直平分线吗?

部分中英文词汇索引

SHUXUE

人教版®

中国环境标志

CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-37988-5

9 787107 379885 >

定价：15.55 元