ISBN 978-7-5564-3761-0

普通高中教科书

数学

必修

第二册

湖北教育出版社

普通高中教科书

数学

SHUXUE

必修

第二册

湖北教育出版社

普 通 高 中 教 科 书

数 学

SHUXUE

必修

第二册

主　　编　　彭双阶

湖北教育出版社

主　　编： 彭双阶

副 主 编： 徐胜林　胡典顺　郭熙汉

本册主编： 胡典顺

主要编者： 殷希群　彭树德　徐　惠　胡典顺　徐胜林
郭熙汉　高保中

致高中生

shuxue

高中数学是一门非常重要的课程. 数学以其卓越的智力成就被人们尊称为“科学的皇后”. 数学是人类最高超的智慧活动，是人类心灵最独特的创造，是形成人类文化的主要力量，是人类文明的核心部分，是认识世界和创造世界的一把关键钥匙.

我们需要数学，因为作为人类文明发展标志的数学，是人类文化的重要组成部分. 数学既是一种睿智的文化、一种思想的体操，更是现代科技进步中理性文化的核心.

我们需要数学，因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用. 数学素养是现代社会公民应该具备的一种必备品格.

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会现象的特殊语言和有力工具，是自然科学、技术科学的基础，在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越强大的作用.

我们需要数学，因为数学已经渗透到现代社会和人们日常生活的各个方面. 学好数学是提升生活质量、优化生活品质的重要保证.

本套教科书以《普通高中数学课程标准（2017 年版）》为依据来编写，遵循了现代数学教与学的规律，着眼于 21 世纪现代生活和未来发展，力求提升同学们的数学核心素养，更快地适应未来社会的发展.

教科书是教与学的一种重要资源. 在使用本套教科书的同时，我们还应该多关注现实生活，关注社会进步和科技发展，用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界. 现代社会是信息社会，又是终身学习的社会. 在这个大数据时代，我们可以根据实际条件，选择利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率. 积极参与数学活动，勤于思考，敢于质疑，乐于合作交流，克难奋进，砥砺前行，养成良好的数学学习习惯，让数学学习变得更加生动活泼、富有情趣.

亲爱的同学们，插上快乐的翅膀，带着青春的梦想，在浩瀚的数学海洋扬帆奋进吧！

Mulu

目 录

第 1 章 函数的概念与性质

第 2 章 幂函数、指数函数、对数函数

Mulu

第 3 章 三角函数

第 4 章 函数的应用

第1章 函数的概念与性质

喷泉水柱画出美妙的抛物线

在我们周围，变化无处不在：在市场经济中，商品的价格随着商品供应量的变化而变化；河流的水位随着河水流量的变化而变化；金属的强度随着温度的变化而变化；汽车刹车时滑行的距离随着汽车速度的变化而变化．用数学的方法描述变化现象有其重要的意义．例如，当我们用数学模型刻画某种传染病感染人数的变化规律时，就能预测未来被感染的人数，进而提出有效的防治对策．当掌握了行星的运动规律时，科学家就可以计算人造卫星的轨道，从而使卫星到达人们要它去的目的地．

反映变化现象中变化规律的数学工具就是我们在初中所学过的函数，但初中所学的内容只是对函数的一个初步认识．为了全面、系统地掌握函数理论，以便能够更好地刻画各种变化现象的变化规律，就必须对函数概念做更深入的剖析，并研究函数所具有的基本性质．

在本章，我们将用集合与对应的观点来审视函数的基本概念，并研究一般函数所具有的一些基本性质．从数学角度去描述世界是一个十分复杂的过程，学习本章时应注重体验如何用函数去描述自然界和社会生活中的变化现象．

1.1 函　数

1.1.1 函数的概念

我们在初中已经学习了函数的概念：

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数，x 是自变量.

用集合的观点来看，自变量 x 的取值范围是一个非空数集 A，y 的变化范围是一个非空数集 B. 函数就是从集合 A 到集合 B 的一个特殊对应.

为了说明这一观点，我们分析下列函数.

（1）质量为 m_1，m_2 的物体之间的万有引力 y 与物体间的距离 x 有如下关系

$$y=\lambda\frac{m_1m_2}{x^2}, \qquad ①$$

其中 λ 为万有引力常数.

如果令 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{y|y>0\}$，则对于任意的 $x\in A$，依据①式，有唯一的 $y\in B$ 与 x 对应.

（2）据北京市人民政府网站公布，2003 年 5 月 1 日至 5 日北京已确诊的 SARS 病例累计如下表：

日期	1	2	3	4	5
累计确诊病例	1 553	1 636	1 741	1 803	1 897

如果令 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1\,553, 1\,636, 1\,741, 1\,803, 1\,897\}$，则对于任意的 $x\in A$，依上表均有唯一的 $y\in B$ 与 x 对应.

（3）图 1-1 是某气象站温度记录仪记录的某日 8 时到 16 时的温度曲线.

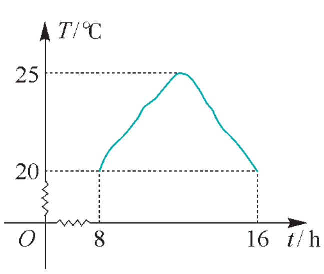


图 1-1

如果令 $A=\{t|8\leqslant t\leqslant 16\}$，$B=\{T|20\leqslant T\leqslant 25\}$，则对于任意的 $t\in A$，依图 1-1 有唯一的 $T\in B$ 与 t 对应.

从上面几例我们看到，函数实质上是两个变量所在集合按某种关系的一种对应. 为此我们把函数的概念概述如下：

设 A，B 是两个非空的数集，如果按照某个对应关系 f，使得对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与它对应，那么就称对应 $f: A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**(function)，记作

$$y=f(x)\quad (x\in A).$$

其中，x 叫作**自变量**(argument)，集合 A 叫作函数的**定义域**(domain)；与 x 的值相对应的 y 的值叫作**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫作函数的**值域**(range). 显然，值域 $\{f(x)\mid x\in A\}\subseteq B$.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域中取定一个确定的值 a 时，对应的函数值用符号 $f(a)$ 表示. 例如，若 $f(x)=x^2-2x$，则有 $f(-5)=(-5)^2-2\times(-5)=35$，$f(100)=100^2-2\times100=9\,800$，$f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)=a^2-1$ 等.

函数是一种对应，但对应不一定是函数. 如图 1-2 所示的六个对应中，只有(1)(2)(3)这样的对应是函数，而(4)(5)(6)这样的对应均不是函数.

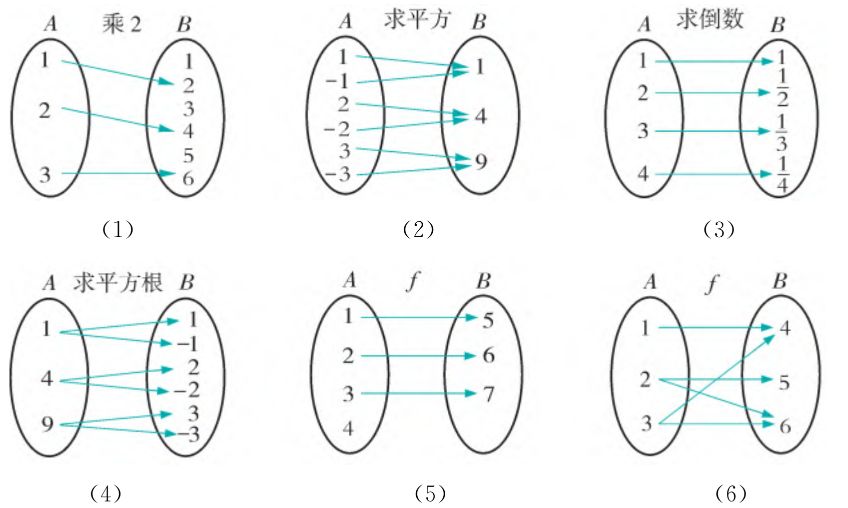


图 1-2

你能分别列举一个是函数的对应和一个不是函数的对应吗?

函数的定义域通常是指定的或由问题的实际意义确定的. 如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合.

由函数的定义我们知道，一个函数由两个要素所确定，即定义域和对应关系. 一般来说，如果一个函数的定义域和对应关系确定了，则其值域也随之确定.

若两个函数的定义域相同，对应关系也相同，则称这两个函数是同一函数. 否则，我们说它们是不同的函数.

例如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 的定义域和对应关系都相同，因此,这两个函数是同一函数. 又如，物理学中的玻意耳定律：一定质量的理想气体，在一定的温度下，其体积 V 与压强 p 满足关系式

$$p=\frac{c}{V}\quad(c\text{ 为常数}),$$

就是一个函数. 虽然我们常说 p 与 V 成反比，但它其实并不是

反比例函数 $y=\frac{c}{x}$(c 为非零常数). 这是因为前者的定义域为 $(0, +\infty)$,后者的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. 它们是两个不同的函数.

例1 求函数 $f(x)=\sqrt{3x+2}+\frac{1}{x-2}$ 的定义域.

解 使根式 $\sqrt{3x+2}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x \middle| x\geqslant -\frac{2}{3}\right\}$,使分式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|x\neq 2\}$.

所以,这个函数的定义域是

$$\left\{x \middle| x\geqslant -\frac{2}{3}\right\}\cap\{x|x\neq 2\},$$

即
$$\left[-\frac{2}{3}, 2\right)\cup(2, +\infty).$$

例2 某机构在 2017 年预测,在未来 10 年中,某省经济总量将以每年 7.5%左右的增长率增长. 设该省 2017 年末的经济总量为 a,按 7.5%的增长率计算,将未来第 x 年末该省的经济总量 y 表示成 x 的函数,并指明这个函数的定义域.

解 所求函数是

$$y=a(1+7.5\%)^x, \ x\in\{1, 2, 3, \cdots, 10\}.$$

这个函数的定义域为 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$.

例3 某地为了鼓励居民节约用电,采用分段计费的方法计算用户的电费:每月用电不超过 100 度时,按每度 0.57 元计算;每月用电超过 100 度时,其中 100 度仍按原标准收费,超过部分按每度 0.80 元计费.

(1) 设月用电 x 度时,应交电费 y 元,写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2) 小赵家第一季度缴纳的电费情况如下:

月份	1	2	3	合计
计费金额/元	87.4	66.6	45.6	199.6

问:小赵家第一季度共用电多少度?

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时,月电费=月用电量×标准电价,可得

$$y=0.57x;$$

当 $x>100$ 时，月电费＝100 度的电费＋超过 100 度部分的电费，可得

$$y=0.57\times100+0.80\times(x-100)=0.80x-23.$$

所以

$$y=\begin{cases}0.57x, & x\in[0,\ 100],\\ 0.80x-23, & x\in(100,\ +\infty).\end{cases}\qquad (*)$$

（2）因为一月份电费超过 57 元，所以按关系式 $0.80x-23$ 计算，即 $0.80x-23=87.4$，算出一月份用电 138 度；同样，二月份电费也超过 57 元，所以也按关系式 $0.80x-23$ 计算，即 $0.80x-23=66.6$，算出二月份用电 112 度；而三月份电费不超过 57 元，按第一个函数关系式计算，有 $0.57x=45.6$，算出三月份用电 80 度.

所以，小赵家第一季度共用电

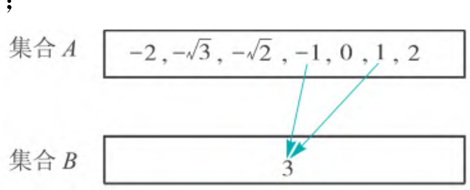
$$138+112+80=330(\text{度}).$$

一般来说，像（*）式这样的函数，对于自变量 x 不同的取值范围，有着不同的对应关系，函数关系式是分两段或几段给出的，这样的函数通常叫作**分段函数**. 分段函数是一个函数，而不是几个函数，分段函数的定义域是各段函数的定义域的并集，值域也是各段函数的值域的并集.

练习

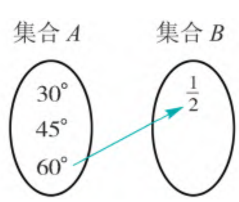
1. 对于集合 A 中每个元素，按如下给出的对应关系，在集合 B 中写出对应的数值，并用带箭头的线段将对应元素连接.

（1）平方后乘 2 加 1；



（第 1(1)题图）

（2）求余弦.



（第 1(2)题图）

2. 下列四组函数中，表示同一函数的是(　　).

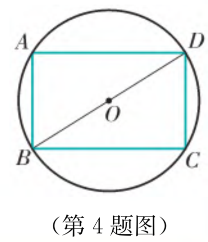
(A) $f(x)=1$，$g(x)=x^0$　　(B) $f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}-1$

(C) $f(x)=x^2$，$g(x)=(\sqrt{x})^4$　　(D) $f(x)=x^3$，$g(x)=\sqrt[3]{x^9}$

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$.

4. 如图，把截面半径为 25 cm 的圆形木头锯成矩形木料(矩形内接于圆)，如果矩形的一边长为 x cm，面积为 y cm^2，把 y 表示成 x 的函数.



(第 4 题图)

习题 1.1.1

1. 下列从集合 A 到集合 B 的对应中，

①$A=\{x|x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y|y\in\mathbf{Z}\}$，对应关系 $f:y=\dfrac{x}{3}$；

②$A=\{x|x>0\}$，$B=\{y|y\in\mathbf{R}\}$，对应关系 $f:y^2=3x$；

③$A=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y\in\mathbf{R}\}$，对应关系 $f:x^2+y^2=25$.

y 不是 x 的函数的所有序号是______.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，当 $x\neq0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$等于(　　).

(A) $f(x)$　　(B) $f(-x)$

(C) $\dfrac{1}{f(x)}$　　(D) $\dfrac{1}{f(-x)}$

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x+2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-x-1}}$.

4. (1) 已知一次函数 $f(x)=ax+b$ 满足 $f(1)=0$，$f(2)=-\dfrac{1}{2}$，求 $f(5)$的值；

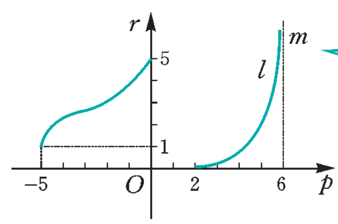
(2) 已知二次函数 $f(x)=x^2+px+q$ 满足 $f(1)=f(2)=0$，求 $f(-1)$的值.

5. 如图给出了函数 $r=f(p)$的图象，

(1) $f(p)$的定义域是什么？

(2) $f(p)$的值域是什么？

(3) r 的哪些值能与 p 的唯一一个值对应？



图中，曲线 l 与直线 m 无限接近，但永不相交.

(第 5 题图)

6.《中华人民共和国个人所得税法》规定，居民个人全月综合所得，减除专项扣除、专项附加扣除和依法确定的其他扣除后的余额，不超过 5 000 元的部分不必纳税，超过5 000元的部分为全月应纳税所得额. 征收个人所得税的税率(部分)如下表所示：

个人所得税税率表(综合所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 3 000 元的	3
2	超过 3 000 元至 12 000 元的部分	10
3	超过 12 000 元至 25 000 元的部分	20
4	超过 25 000 元至 35 000 元的部分	25

请将居民个人全月应纳所得税额 y(单位：元)表示为个人全月应纳税所得额 x(单位：元)的函数.

1.1.2 函数的表示方法

函数 $y=f(x)(x\in A)$ 中的 f 表示对应关系，在不同的函数中对应关系 f 的表示方式可以不一样. 下面对 1.1.1 节开始时给出的三个具体函数分析如下：

在(1)中是用等式表示两个变量间的对应关系，像这样用等式来表示两个变量间的关系的方法叫作**解析法**(analytic method)，这个等式叫作**函数的解析式**. 用解析式表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易由自变量的值求出其对应的函数值，便于研究函数的性质.

在(2)中是用表格表示两个变量间的对应关系，像这样列出表格来表示两个变量间的关系的方法叫作**列表法**(tabulation method). 列表法表示函数关系的优点是：不必通过计算就知道当自变量取某些值时对应的函数值.

在(3)中是用图象表示两个变量间的对应关系，像这种用图象表示两个变量间的关系的方法叫作**图象法**(graphics method). 图象法表示函数关系的优点是：能直观形象地表示出函数的变化情况，便于直观地研究函数的性质.

例1 下面叙述了两件事：

(1) 小张驾车离开旅馆，在加油站加油时发现公文包遗留在旅馆房间里，于是返回旅馆取了公文包再驾车离开.

(2) 小张驾车离开旅馆，一路匀速行驶，只在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间.

小张离开旅馆的距离与时间的函数关系可用图象法表示. 请在图 1-3 中选择与事件相吻合的图象，并对剩下的那个图象

加以解释.

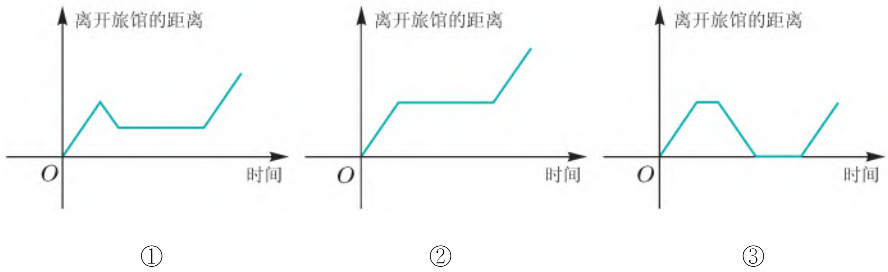


图 1-3

试对图①给出另外的解释.

解 (1)与图③吻合，(2)与图②吻合.

对于图①，可解释为：小张驾车离开旅馆不久，发现公文包不见了，调头回旅馆寻找. 路上遇到交通堵塞，又发现公文包掉在驾驶室的座位下，再次掉头后继续向前行驶.

例2 音调的高低是由产生音调的振动频率决定的. 我们的耳朵能听出一个音调比上一个音调高八度，是因为该音调的振动频率是上一个音调的振动频率的 2 倍. 如果我们用 $n=0$ 表示振动频率为 264 赫兹(次/秒)的音调，$n=1$ 表示比 $n=0$ 高八度的音调，$n=2$ 表示比 $n=1$ 高八度的音调，$n=3$ 表示比 $n=2$ 高八度的音调. 对于 $n\in\{0,1,2,3\}$，试分别用列表法和解析法将振动频率 υ 表示为音调 n 的函数.

解 用列表法表示如下表：

n	0	1	2	3
υ	264	264×2	264×2^2	264×2^3

用解析法表示是

$$\upsilon=264\times2^n,\ n\in\{0,1,2,3\}.$$

值得指出的是，函数的三种常用表示方法都来自于实际的需要. 当我们试图用函数去描述一个实际问题时，要根据不同情况选择适当的表示方法.

练习

1. 请举出几个生活中的函数实例，并用合适的方法表示它们.
2. 画出下列函数的图象：

   (1) $f(x)=2x$，$x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant2$；　　(2) $f(x)=3x-5$，$x\in(2,4)$.
3. 国内投寄信函(外埠)，邮资按下列规则计算：重量在 100 克及以内的，每重 20 克(不足 20 克，按 20 克计)邮资为 1.20 元；100 克以上部分，每增加 100 克(不足 100 克，按 100 克计)加收 2.00 元. 设一封质量为 x (单位：克)的信函应付邮资为 y(单位：元)，试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式，并画出这个函数的图象.

习题 1.1.2

1. 画出下列函数的图象：

（1）$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$　　（2）$G(n)=3n+1$，$n\in\{1, 2, 3\}$.

2. 画出下列函数的图象：

（1）$y=1-|x|$；　　（2）$y=|x-1|+2|x-2|$；

（3）$y=|x^2-2x-3|$；　　（4）$y=x^2-2|x|-3$.

3. 小丽粉刷卧室共花去 10 小时，她累计完成工作量的百分数如下：

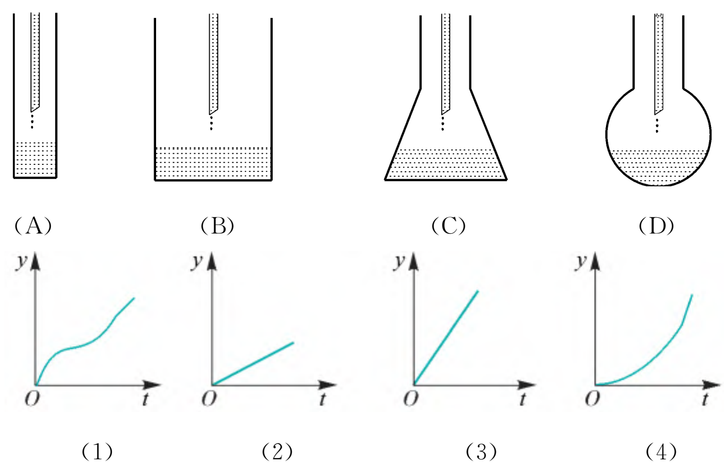
时间 t/小时	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
完成的百分数	5%	20%	35%	50%	50%	65%	70%	80%	95%	100%

如果用 $T(t)$表示 t 小时后她完成工作量的百分数，$T(5)$是多少?

4. 某地的出租车按如下方法计费：起步价 10 元，可行 3 km(含 3 km)；超过3 km但不超过7 km(含 7 km)时，超过 3 km 的部分按 1.6 元/km 计价(不足 1 km，按 1 km计算)；超过7 km的部分按 2.4 元/km 计价(不足 1 km，按 1 km 计算). 试写出以行车里程 x(单位：km)为自变量，车费 y(单位：元)为函数值的函数解析式，并画出这个函数的图象.

5. 如图所示，水滴进玻璃容器(设单位时间内进水量相同)，水面的高度 y 随着时间 t 的变化而变化，请选择与容器匹配的图象.

(A) ——(　　)；(B) ——(　　)；(C) ——(　　)；(D) ——(　　).

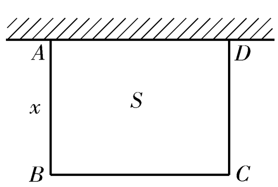


（第 5 题图）

6. 如图所示，用一段长为 l 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园 $ABCD$. 设 AB 的长为 x，矩形 $ABCD$ 的面积为 S.

（1）试求 S 关于 x 的函数解析式；

（2）画出函数 $S(x)$的图象.



（第 6 题图）

函数概念的形成与发展

函数是数学中最重要的基本概念之一，也是实践中被广泛应用的一个数学概念．函数同其他数学概念一样，有其萌芽、产生和发展的历史．

在16世纪，物体运动的研究已成了自然科学的中心课题，实际的需要和各门科学本身的发展使人们开始转入对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究．在笛卡儿1637年出版的《几何学》中，第一次涉及变量，不过当时没有使用变量这一术语，而称为“未知和未定量”．同时他也引入了函数的思想，指出y和x是变量的时候，y依赖x而变．英国数学家格雷果里在1667年曾给出了函数的定义，他在论文《论圆和双曲线的求积》中指出：函数是这样一个量，它是从一些其他的量经过一系列代数运算或任何其他可以想象的运算而得到的．这里的运算指的是五种代数运算以及求极限运算．这一定义被认为是函数的解析定义的开始，但是未能引起人们的重视．一般公认最早给出函数定义的是德国数学家莱布尼茨，他在1673年的一篇手稿中，把任何一个随着曲线上点的变动而变动的几何量，如切线、法线以及点的纵坐标都称为函数，并强调这条曲线是由一个方程式给出的．用函数表示几何量，被看作是“函数概念的几何起源”．这些都是函数比较模糊的原始定义．

随着人们对函数的研究日益深入，人们对函数概念进行了解析扩张．最早进行这一扩张的是瑞士数学家约翰·伯努利，他在1698年重新给出了函数的定义：由变量x和常量用任何方式构成的量都可以叫作x的函数．1748年，伯努利的学生欧拉又推进了一步，在他的著名的《无穷小分析引论》一书中把函数定义为“由一个变量与一些常量通过任何方式组成的一个解析表达式”．欧拉还曾引入了函数符号$f(x)$，并区分了显函数和隐函数、单值函数和多值函数、一元函数和多元函数等．

把函数看作一个解析表达式的，还有法国数学家达朗贝尔，他认为函数是由代数和微积分的步骤构成的解析表达式．在1797年，法国数学家拉格朗日把一元或多元函数定义为自

变量在其中可以按任何形式出现并且对计算有用的表达式，他认为函数是运算的一个组合．在18世纪占主导地位的观点是，把函数理解为一个解析表达式(有限或无限的)．

由于研究热传导的需要，1822年法国数学家傅立叶提出了任意函数可展开为三角级数，因此出现了对“任意函数”应如何理解的问题．法国数学家柯西在1821年写的《分析教程》中给出了函数的定义：在某些变量间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变量的值，其他变量的值也随之确定，则将最初的变量叫作自变量，其他各个变量叫作函数．这个定义把函数概念与曲线、连续、解析式等纠缠不清的关系予以澄清，也避免了数学意义欠严格的“变化”一词，而且说明函数是用一个式子或多个式子表示、甚至是否通过式子表示都无关紧要．

1837年，德国数学家狄利克雷给出了我们今天仍然使用着的定义：若对$x(a \leqslant x \leqslant b)$的每一个值，$y$总有完全确定的值与之对应，不管建立起这种对应关系的方式如何，都称y是x的函数．狄利克雷还给出了著名的函数：

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{为有理数}),\\ 0 & (x\text{为无理数}).\end{cases}$$

这个函数是难以用简单的包含自变量x的解析式表达的，但按照上述定义，$D(x)$的确是一个函数．人们称之为狄利克雷函数．后来，经过进一步锤炼，人们又用集合与对应的观点给出了本书中采用的定义．

我国数学教科书上使用的“函数”一词是转译词，是清代数学家李善兰在翻译《代数学》一书时把“function”译成“函数”的．

讨论题

1. 谈谈函数概念的发展过程对自己的数学学习有哪些有益的启示．
2. 在后面的学习中，我们会遇到二元函数．例如，对于三个变量x，y，z，若$z=3x^2+y^4$，则称z是x，y的二元函数．我们现在学习的函数$y=f(x)$叫作一元函数．讨论一下如何给二元函数下定义．

1.2 函数的基本性质

1.2.1 函数的单调性

当我们从一个自然现象或社会现象中得到函数 $y=f(x)$ $(x\in A)$时，常常需要考虑一些基本的问题．如 x 的值逐渐增大时，与它相应的 y 的值如何变化？是逐渐增大，逐渐减小，还是有时增大有时减小？例如人的体温 T 是时间 t 的函数，$T=f(t)$．当某个人患病时，体温逐渐上升，我们说他在发烧；当病情好转时，体温又降下来，我们说他退烧了．这里，T 随着时间变化的特点，就成为医生确定治疗方案的依据之一．

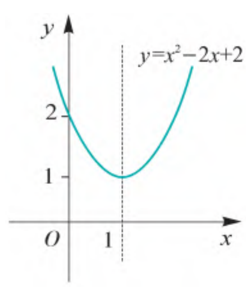


图 1-4

从这个例子可以看到，我们往往不能笼统地说 T 是上升还是下降，而是分成两个时间段来考虑．就如我们熟知的二次函数 $y=x^2-2x+2$，其图象如图 1-4 所示，它在直线 $x=1$ 的左侧部分呈下降趋势，即当 $x\leqslant 1$ 时 y 随自变量 x 的增大而减小；在直线 $x=1$ 的右侧部分呈上升趋势，即当 $x>1$ 时 y 随自变量 x 的增大而增大．也就是说，在研究函数的这种特征时，有必要考虑相应自变量的变化区间．

一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 I．如果对于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么，就说 $f(x)$在这个区间上是**增函数**(increasing function)．

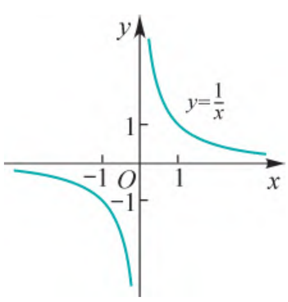


图 1-5

如果对于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么，就说 $f(x)$在这个区间上是**减函数**(decreasing function)．

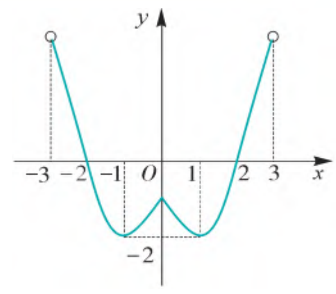
例如，$y=x^2-2x+2$ 在$[1,+\infty)$上是增函数，在$(-\infty,1]$上是减函数；$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$上是减函数，在$(0,+\infty)$上也是减函数，它的图象如图 1-5 所示．

如果函数 $y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，那么，就说这个函数 $y=f(x)$在这一区间上具有(严格的)**单调性**(monotonicity)，这一区间叫作函数 $y=f(x)$的**单调区间**(monotone interval)．如果这时 $y=f(x)$是增(减)函数，我们就称这个区间为函数 $y=f(x)$的单调增(减)区间．

在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的．

例1 函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-6 所示，请指出这个函数的单调区间，并指明其单调性.

解 图 1-6 中函数 $y=f(x)$ 的单调区间有 $(-3, -1)$，$[-1, 0)$，$[0, 1)$，$[1, 3)$. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-3, -1)$，$[0, 1)$ 上是减函数；在区间 $[-1, 0)$，$[1, 3)$ 上是增函数.



$y=f(x)$

图 1-6

要了解函数在某一区间上的单调性，除了从图象上进行观察外，有时还需要根据单调函数的定义进行证明.

例2 试画出函数 $f(x)=x^2+1$ 的图象，观察该函数在 $(-\infty, 0)$ 上的单调性，并证明你观察到的结果.

解 函数 $f(x)=x^2+1$ 的图象如图 1-7 所示，由图象知，函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数. 下面给出证明.

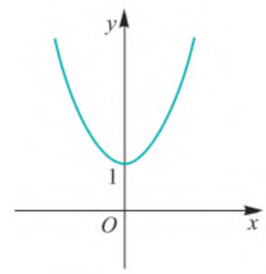


图 1-7

任取 x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)=x_1^2+1，f(x_2)=x_2^2+1，$$

所以

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)\\&=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2).\end{aligned}$$

因为 $x_1<0$，$x_2<0$，且 $x_1<x_2$，所以

$$x_1+x_2<0，x_1-x_2<0，$$
$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0.$$

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

例3 函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图象如图 1-8 所示，观察该函数的图象，写出其单调区间，并对区间 $[1, +\infty)$ 上的结论给出证明.

解 由图象知，函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1)$，$[1, +\infty)$ 上是增函数，在 $[-1, 0)$，$(0, 1)$ 上是减函数. 下面证明函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

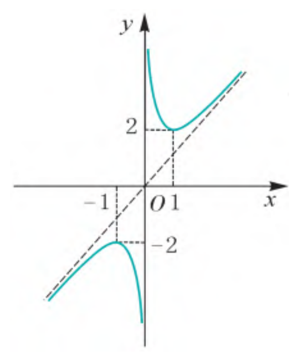


图 1-8

任取 x_1，$x_2\in[1, +\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$y_1=x_1+\frac{1}{x_1}，y_2=x_2+\frac{1}{x_2}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
y_1-y_2&=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\\
&=(x_1-x_2)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\\
&=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)\\
&=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}.
\end{aligned}
$$

因为 $x_1\geqslant1$，$x_2>1$，所以 $x_1x_2-1>0$，$x_1x_2>0$．又因为 $x_1-x_2<0$，所以

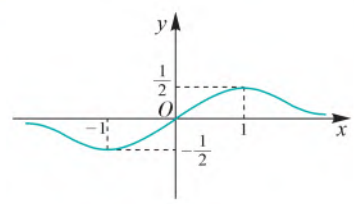
$$(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}<0.$$

于是 $y_1-y_2<0$，即 $y_1<y_2$．

所以函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数．

练习

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，根据图象写出函数的单调区间，并指出在每一个单调区间上函数是增函数还是减函数．



（第 1 题图）

2. 设函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则有（　　）．

（A）$a\geqslant\frac{1}{2}$　　（B）$a\leqslant\frac{1}{2}$　　（C）$a>\frac{1}{2}$　　（D）$a<\frac{1}{2}$

习题 1.2.1

1. “$a=1$”是“函数 $f(x)=|2x-a|$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数”的（　　）．

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2. 试画出函数 $y=1-\frac{1}{x+1}$ 的图象．观察该函数在 $(-\infty,-1)$ 上的单调性，并证明你观察到的结果．

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数．求证：对实数 a，b，若 $a+b>0$，则
$$f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b).$$

4. 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的增函数，试判断函数 $y=1-f(x)$ 在区间 I 上的增减性，并证明你的结论．

5. 夏季的某一天，某地区整个上午气温越来越高，中午时分一场暴风雨使天气骤然凉爽了许多，暴风雨过后，天气转暖，直到太阳落山才又开始转凉．以该天温度作为时间的函数，画出它的一个可能的图象．

1.2.2 函数的奇偶性

观察函数 $f(x)=2x^2$ 及 $f(x)=x^3$ 的图象(如图 1-9)：

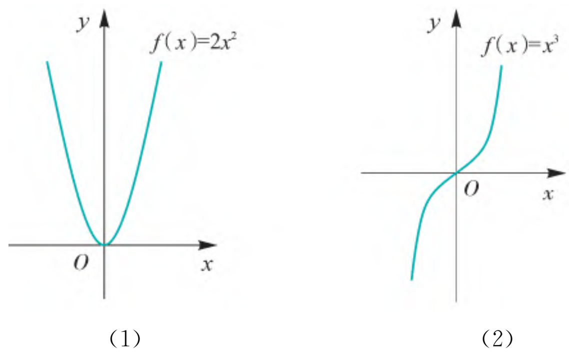


图 1-9

可以看到函数 $f(x)=2x^2$ 的图象关于 y 轴对称，函数 $f(x)=x^3$ 的图象关于原点中心对称.

如何描述这种对称呢?

考察函数 $f(x)=2x^2$，当自变量 x 取一对相反数时，其函数值是同一值. 例如

$f(-1)=2$，$f(1)=2$，即 $f(-1)=f(1)$；

$f(-2)=8$，$f(2)=8$，即 $f(-2)=f(2)$；

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$，即 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$；

……

由于 $2(-x)^2=2x^2$，所以 $f(-x)=f(x)$.

以上数量关系反映在图象上就是：如果点(x, y)是函数 $y=2x^2$ 的图象上任一点，那么，与它关于 y 轴对称的点$(-x, y)$也在函数 $y=2x^2$ 的图象上.

一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫作**偶函数**(even function).

例如，函数 $f(x)=2x^2$，$f(x)=x^2+1$，$f(x)=x^4-2$ 都是偶函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称，图象关于 y 轴对称的函数是偶函数.

同样，考察函数 $f(x)=x^3$，可以发现：当自变量 x 取一对相反数时，其函数值是一对相反数. 例如

$f(-1)=-1$，$f(1)=1$，即 $f(-1)=-f(1)$；

$f(-2)=-8$，$f(2)=8$，即 $f(-2)=-f(2)$；

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$，即 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-f\left(\frac{1}{3}\right)$；

……

由于$(-x)^3=-x^3$，所以 $f(-x)=-f(x)$.

以上数量关系反映在图象上就是：如果点(x, y)是函数$y=x^3$的图象上任一点，那么与它关于原点对称的点$(-x, -y)$也在函数 $y=x^3$ 的图象上.

一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫作**奇函数**(odd function).

例如，函数 $f(x)=x^3$，$f(x)=-2x$，$f(x)=\frac{3}{x}$都是奇函数.

奇函数的图象关于原点中心对称，图象关于原点中心对称的函数是奇函数.

如果函数 $f(x)$是奇函数或偶函数，那么我们就说函数$f(x)$具有奇偶性.

例1 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x^3+2x$；　　(2) $f(x)=2x^4+3x^2$；

(3) $f(x)=|2x+3|-|2x-3|$.

解 (1) 因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^3+2(-x)\\&=-x^3-2x=-(x^3+2x),\end{aligned}$$

即
$$f(-x)=-f(x),$$
所以，函数 $f(x)=x^3+2x$ 是奇函数.

(2) 因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2=2x^4+3x^2,$$

即
$$f(-x)=f(x),$$
所以，函数 $f(x)=2x^4+3x^2$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=|2(-x)+3|-|2(-x)-3|\\&=|3-2x|-|-2x-3|\\&=|2x-3|-|2x+3|\\&=-(|2x+3|-|2x-3|),\end{aligned}$$

即
$$f(-x)=-f(x),$$
所以，函数 $f(x)=|2x+3|-|2x-3|$是奇函数.

应该指出的是，有些函数是奇函数，有些函数是偶函数；

同时也有些函数既不是奇函数也不是偶函数，如函数 $f(x)=x^2+2x+5$，函数 $g(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$等.

例2 已知函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，求证：$y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数.

证明 设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,+\infty)$，且 $-x_1>-x_2$.

又已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，于是有

$$f(-x_1)>f(-x_2). \quad ①$$

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以

$$f(-x_1)=-f(x_1), \quad ②$$

$$f(-x_2)=-f(x_2). \quad ③$$

将②③式代入①式，得

$$-f(x_1)>-f(x_2),$$

从而有

$$f(x_1)<f(x_2).$$

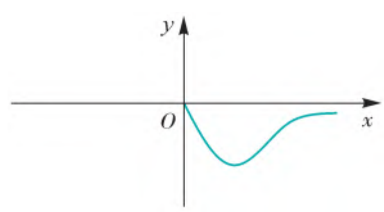
因此，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数.

练习

1. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=|x|$；　　(2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

2. 已知奇函数 $y=f(x)$ 在 y 轴右边部分的图象如图所示，根据奇函数的性质，画出它在 y 轴左边部分的图象.



(第 2 题图)

3. 是否存在这样的函数，它既是奇函数又是偶函数?

习题 1.2.2

1. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$;

(3) $f(x)=2x+\sqrt{x}$;

(4) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(-\infty, 0), \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x\in(0, +\infty). \end{cases}$

2. 求证：定义域相同的两个奇函数的和仍为奇函数.

3. 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，判断 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数还是减函数，并说明理由.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数且 $f(x)<0$. 试问：$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数？试证明你的结论.

1.2.3 函数的最大值与最小值

我们知道，天气预报告诉人们的是一天的最高气温与最低气温. 如果将一天中的气温表示为时间的函数，则天气预报预测了这个函数的最大值与最小值. 在汛期，水文站报告的是当天的最高水位. 如果将一天的水位表示为时间的函数，则水文站报告的是这个函数的最大值. 在经济生活中，人们常常需要考虑成本最小、利润最大等问题. 这些事例表明，在用一个函数去描述自然现象与经济现象时，函数的最大值与最小值是人们常常关注的问题. 下面的实例具体说明了函数的最大值与最小值的实际意义.

某蔬菜基地种植西红柿. 由历年行情经验得知，从 2 月 1 日起的 250 天内，西红柿的种植成本 y(单位：元/100 kg)与上市时间 t(单位:天)的关系是

$$y=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,\quad t\in[0, 250],$$

其图象如图 1-10 所示. 试问：西红柿的种植成本何时最低？何时最高？

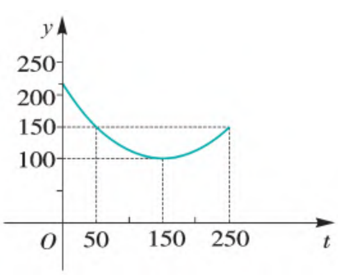


图 1-10

对于上述问题，从图 1-10 可以看出，当 $t=150$ 时，西红柿的种植成本最低；当 $t=0$ 时，西红柿的种植成本最高.

这里的种植成本的最低(高)值，就是函数的最小(大)值.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，$x_0\in I$. 如果对于任意的 $x\in I$，均有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**最大值**(maximum)；如果对于任意的 $x\in I$，均有 $f(x)\geqslant$

$f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的**最小值**(minimum).

从图象上看，函数的最大值就是图象上最高处点的纵坐标，函数的最小值就是图象上最低处点的纵坐标.

当然，函数不一定都有最大(小)值．如 $y=x^3(x\in \mathbf{R})$在定义域内就没有最大值，也没有最小值.

例1 求函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，$x\in[0,2]$的最大值和最小值.

解 $f(x)=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$，$x\in[0,2]$，其图象如图1-11中的实线部分.

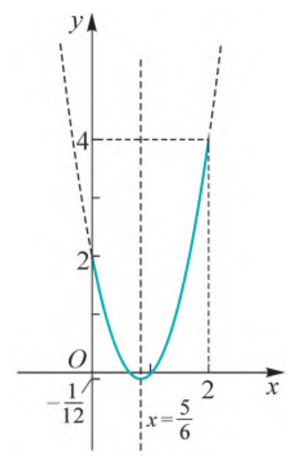


图 1-11

二次函数 $f(x)$的对称轴为 $x=\frac{5}{6}$，因为$\frac{5}{6}\in[0,2]$，所以,当 $x=\frac{5}{6}$时,函数 $f(x)$取得最小值$-\frac{1}{12}$.

当 $x=0$ 时，函数值 $f(0)=2$；当 $x=2$ 时，函数值 $f(2)=4$．所以函数 $f(x)$的最大值为 4.

即函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，$x\in[0,2]$的最大值为 4，最小值为$-\frac{1}{12}$.

例2 已知函数 $y=x^2+ax+3$ 在$[-1,1]$上的最小值为-3，求实数 a 的值.

解 函数 $y=x^2+ax+3$ 可变形为

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{12-a^2}{4},$$

其对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$．由函数的图象可知：

(1) 当$-\frac{a}{2}\leqslant-1$，即 $a\geqslant2$ 时，函数 $y=x^2+ax+3$ 在$[-1,1]$上单调递增，所以,在 $x=-1$ 时，y 取得最小值 $4-a$.

根据题设，$4-a=-3$，得 $a=7$.

(2) 当$-\frac{a}{2}\in(-1,1)$，即$-2<a<2$ 时，函数 $y=x^2+ax+3$ 在$\left[-1,-\frac{a}{2}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{a}{2},1\right]$上单调递增,所以,在 $x=-\frac{a}{2}$时,y 取得最小值$\frac{12-a^2}{4}$.

根据题设，$\frac{12-a^2}{4}=-3$，则 $a^2=24$，解得 $a=\pm2\sqrt{6}$．因

为$\pm 2\sqrt{6}\notin(-2,\ 2)$，故舍去.

（3）当$-\frac{a}{2}\geqslant 1$，即$a\leqslant -2$时，函数$y=x^2+ax+3$在$[-1,\ 1]$上单调递减，所以，当$x=1$时，y取得最小值$4+a$.

根据题设，$4+a=-3$，得$a=-7$.

综上可知，符合题意的a的值为± 7.

信息技术链接

用 GeoGebra 作函数的图象

GeoGebra 是一款由美国佛罗里达州亚特兰大学的 Markus Hohenwarter 教授在 2002 年所设计的结合了“几何”“代数”和“微积分”的免费数学动态教育软件. GeoGebra 名字的来源是 Geometry(几何学)和 Algebra(代数学)的组合，同学们可以在 GeoGebra 官方网站上下载这款软件. 利用 GeoGebra 作函数的图象非常方便，下面以一次函数$y=2x+5$为例，对其使用方法进行说明.

打开 GeoGebra，按下述步骤进行操作：

1. 建立坐标系. 点击鼠标右键，选择菜单中的“坐标轴”选项(如图 1).

图 1

2. 建立函数方程. 在底下“输入”框中输入函数表达式$y=2x+5$，按“Enter”键结束，就可以得到函数$y=2x+5$的图象(如图 2).

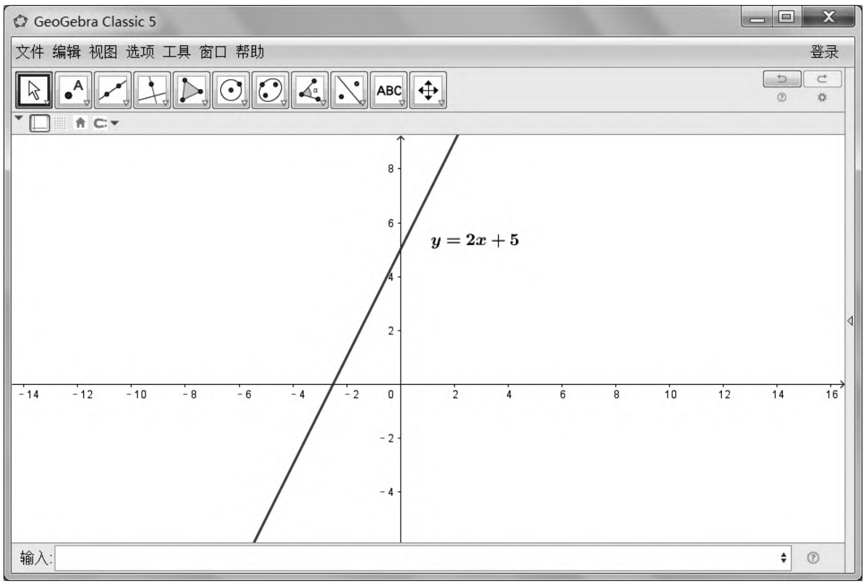


图 2

请同学们自己作一个一元二次函数的图象.

练习

1. 已知函数 $f(x)=-x^2+5x+3$，$x\in[3,+\infty)$，画出其图象并求其最大值.
2. 如果 $f(x)$ 为奇函数，在 $[3, 7]$ 上 $f(x)$ 是增函数且最小值为 5，那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上的单调性如何？-5 是 $f(x)$ 在 $[-7, -3]$ 上的最大值还是最小值？

习题 1.2.3

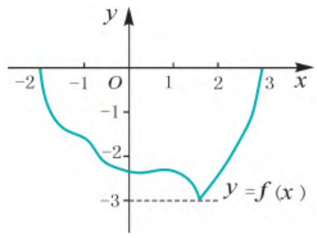
1. 求函数 $f(x)=x^2-3x+2$，$x\in[-1, 1]$ 的最大值和最小值.
2. 求函数 $y=|x-3|-|x+1|$ 的最大值和最小值.
3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，又 $F(x)=af(x)+bg(x)+2(a,b\in\mathbf{R})$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最大值是 5，求 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值.
4. 已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在区间 $[0, 1]$ 上有最大值 2，求实数 a 的值.
5. 已知等腰梯形 $ABCD$ 内接于半径为 R 的圆，它的下底 AB 是圆的直径，上底 CD 的端点在圆周上，腰长为多少时，梯形的周长最大？最大值是多少？

复习题

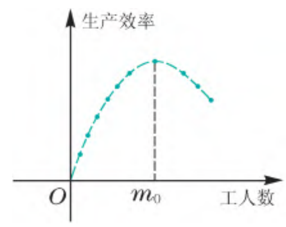
A 组

1. 说明如图所示的函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域、最大值与最小值.

2. 画出函数 $y=2x^2+|x-1|$ 的图象.



（第 1 题图）



（第 3 题图）

3. 如图所示是某一条生产线的生产效率关于工人数的函数的图象．描述该条生产线的生产效率情况，并指明 m_0 的实际意义.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx(ab\neq 0)$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，求 $f(x_1+x_2)$ 的值.

5. 求函数 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的最小值.

6. 已知函数 $f(x)=2ax+1$ 在 $[-1,1]$ 上的值恒大于 0，求实数 a 的取值范围.

7. 求证：函数 $y=x+\dfrac{3}{x}$ 在 $(0,\sqrt{3}]$ 上递减，在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上递增.

8. 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1(x\in\mathbf{R})$，试讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

9. 函数 $y=x^2-3x+4$ 在闭区间 $[0,m]$ 上有最大值 4，最小值 $\dfrac{7}{4}$，求实数 m 的取值范围.

B 组

1. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$．若 x_0 是关于 x 的方程 $2ax+b=0$ 的实数根，则下列命题中为假命题的是（　　）.

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0)$　　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0)$　　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$

2. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,5)$ 上单调递减，且对任意实数 t，都有 $f(5+t)=f(5-t)$，试比较 $f(-1)$，$f(9)$ 及 $f(13)$ 的大小.

3. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 2，试求实数 a 的值.

4. 已知 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x^4+2x^2+2$，是否存在实数 λ，使得 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数，在 $(-1,0)$ 上是增函数？

5. 某自来水厂的蓄水池中有 400 吨水，水厂每小时可向蓄水池中注水 80 吨，同时蓄水池又向居民小区供水，$t(0\leqslant t\leqslant 24)$ 小时内供水总量为 $120\sqrt{6t}$ 吨．多少小时后蓄水池中的水量最少？

6. 根据市场调查，某商品在最近的 40 天内的价格 $f(t)$ 与时间 t（单位：天）满足关系

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t+11 & (0\leqslant t<20,\ t\in\mathbf{N}),\\ -t+41 & (20\leqslant t\leqslant 40,\ t\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

销售量 $g(t)$ 与时间 t 满足关系

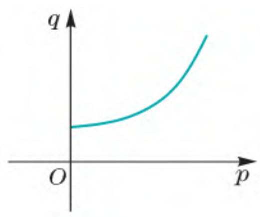
$$g(t)=-\frac{1}{3}t+\frac{43}{3} \quad (0\leqslant t\leqslant 40,\ t\in\mathbf{N}).$$

求这种商品日销售额的最大值.

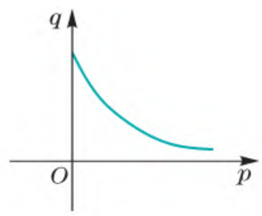
思考与实践

1. 举出几个实际生活中的函数例子，并说明这些函数的定义域和值域各是什么.

2. 经济学家感兴趣的问题之一是制造或售出的某一产品的数量 q 如何依赖于其价格 p. 他们认为数量 q 是价格 p 的函数. 因为制造商与客户对于价格的改变有不同的反应，因此存在两个关于 p 和 q 的函数. 供应曲线表示制造商愿意提供的产品数量如何依赖于产品的售出价格. 需求曲线表示客户所需要的产品数量如何依赖于其价格. 下面两图，一为供应曲线，一为需求曲线. 哪个是供应曲线？哪个是需求曲线？为什么？



(1)



(2)

（第 2 题图）

第2章 幂函数、指数函数、对数函数

悬链线建筑

许多不同的变化现象呈现着相似的变化规律. 例如，自由落体运动、万有引力的变化等可以用幂函数模型模拟；世界人口的变化、放射性物质质量的变化等都具有指数规律；测定古生物的年代、酸雨的 pH、声音大小的分贝值、地震的震级等要用到对数函数. 大量的事例表明，当我们用函数模型去描述变化现象时，幂函数、指数函数、对数函数扮演着重要的角色.

幂函数、指数函数、对数函数是三类重要的基本初等函数. 了解它们的图象、掌握其基本性质是我们用函数模型去刻画现实世界的需要，也是后续学习的基础.

在本章，我们将对这三类函数做较为详尽的研究，并初步了解建立实际问题的函数模型的基本方法.

2.1 幂函数

2.1.1 指数幂的概念及其运算性质

我们已经知道，对于正整数 n，a^n 表示 n 个 a 连乘，即

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n个a},$$

当指数 m，n 是正整数，a，b 是任意实数时，它满足如下运算性质：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^m=a^m b^m.$$

指数 m，n 的值能否扩充到更大范围呢？如果指数 m，n 是 0、负整数、有理数、实数，上面的运算性质是否依然成立？下面我们分别来讨论.

先看指数为 0 的情形，我们规定

$$a^0=1\quad(a\neq 0).$$

再看指数为负整数的情形，即若 n 为正整数，a^{-n} 应怎样定义. 我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq 0).$$

按上述规定后，将指数推广到零与负整数，三条运算性质仍然成立.

总之，当 m，$n\in\mathbf{Z}$，$ab\neq 0$ 时，我们有

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^m=a^m b^m.$$

接下来探讨指数为有理数的情形.

先看 $a^{\frac{1}{n}}(n\in\mathbf{N}^*)$ 应如何定义. 要想保持运算性质成立，应该有

$$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a^1=a,$$

所以，$a^{\frac{1}{n}}$ 应该是方程

$$x^n=a$$

的实数根．问题是这个方程有实数根吗？

先看 $n=2$ 的情况．方程 $x^2=a$ 是一个二次方程，当 $a>0$ 时它有两个根．例如 $x^2=2$ 的一个根是$\sqrt{2}$，另一个根是$-\sqrt{2}$．

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫作 a 的 **n 次方根**，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$．

显然，只要 $a>0$，方程 $x^n=a$ 总有一个正根，称之为算术根．这样，当$a>0$时，定义 $a^{\frac{1}{n}}$ 为原方程的唯一的算术根，并且用$\sqrt[n]{a}$这个记号来表示它．

当 $a=0$ 时，方程 $x^n=0$ 总有实数根 $x=0$，我们不妨规定 $\sqrt[n]{0}=0$．

当 $a<0$ 时，由于任意实数的偶数次方一定不会是负数，所以，当 n 为偶数时，$x^n=a$ 没有实数根，更谈不上算术根，此时$\sqrt[n]{a}$这个记号没有意义．但是，当 n 为奇数时情况就完全不同了，我们知道$(-3)^3=-27$，因此 $x^3=-27$ 有一个实数根$x=-3=-\sqrt[3]{27}$．推广到负数 a，应规定$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}$．

因此，我们有如下规定：

> $a>0$ 时，$\sqrt[n]{a}$表示 $x^n=a$ 的唯一正根；
> $a=0$ 时，$\sqrt[n]{a}=0$；
> $a<0$ 时，若 n 为偶数，$\sqrt[n]{a}$无意义；
> 若 n 为奇数，$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}$．

我们把式子$\sqrt[n]{a}$叫作**根式**（radical），这里 n 叫作**根指数**（radical exponent），a 叫作**被开方数**（radicand）．

当 $a>0$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$ 时，我们定义

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

$\sqrt[n]{a}$就是 a 的一个 n 次方根．

因此，在引入零指数、负整数指数、正分数和负分数指数以后，指数的概念被推广到了有理数范围．

对于有理数 r，s，我们可以证明下面的运算性质成立：

> （1）$a^ra^s=a^{r+s}$　（$a>0$）；
> （2）$(a^r)^s=a^{rs}$　（$a>0$）；
> （3）$(ab)^r=a^rb^r$　（$a>0$，$b>0$）．

例1 求值：$(-32)^{\frac{1}{5}}$；$8^{\frac{2}{3}}$；$(\sqrt{5}-2)^{-1}$；$\left(\frac{1}{900}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

解 $(-32)^{\frac{1}{5}}=-32^{\frac{1}{5}}=-(2^5)^{\frac{1}{5}}=-2^{5\times\frac{1}{5}}=-2^1=-2.$

$8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4.$

$$(\sqrt{5}-2)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2.$$

$$\left(\frac{1}{900}\right)^{-\frac{3}{2}}=900^{\frac{3}{2}}=(30^2)^{\frac{3}{2}}=30^{2\times\frac{3}{2}}=30^3=27\ 000.$$

例2 利用分数指数幂化简：

(1) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}\quad(a>0)$；

(2) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}\quad(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$.

解 (1) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}=\dfrac{aa^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{10}}}=a^{1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}=a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}.$

(2) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}=(xy^2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=(x^{1+\frac{3}{2}}y^{2+\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$=(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}}y^{\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}}=y\sqrt[6]{x^5y}.$

请同学们借助计算器计算如下两行数的前面若干项，

$$2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.414},\ 2^{1.414\,2},\ \cdots$$
$$2^{1.5},\ 2^{1.42},\ 2^{1.415},\ 2^{1.414\,3},\ \cdots$$

并研究这两行数随着项数的增大具有怎样的变化规律.

> 第一行数的指数分别是$\sqrt{2}$的不足近似值，第二行数的指数分别是$\sqrt{2}$的过剩近似值.

通过计算可以看到，第一行数随着项数的增大而增大，第二行数随着项数的增大而减小. 并且

$$2^{1.5}-2^{1.4}>2^{1.42}-2^{1.41}>2^{1.415}-2^{1.414}>2^{1.414\,3}-2^{1.414\,2}>\cdots,$$

上述差均大于零. 随着项数的增大，这两行数对应项的差越来越小，并且无限逼近零，即这两行数随着项数的增大无限逼近同一个实数 x_0. 由于这两行数的指数均是$\sqrt{2}$的近似值，底数均是 2，从而可知 $2^{\sqrt{2}}$表示一个实数.

对于无理指数幂，我们可以计算其近似值，并可达到事先的精度要求. 例如，要求 $2^{\sqrt{2}}$的近似值，使误差不超过0.01. 由于

$$2^{1.4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.5};$$
$$2^{1.41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.42};$$
$$2^{1.414}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.415};$$
$$\cdots\cdots$$

又因为 $2^{1.414}\approx2.664\ 749\ 65$，$2^{1.415}\approx2.666\ 597\ 35$，所以取

$2^{\sqrt{2}}\approx 2.66$就满足误差要求.

一般地，无理数指数幂 $a^{\alpha}(a>0$，α 是无理数)是一个确定的实数.

有了无理指数幂的概念，我们就将指数幂的概念推广到了实数指数幂. 即对于实数 r，s，仍有下面的性质：

性质 1 $a^r a^s=a^{r+s}\quad(a>0)$；

性质 2 $(a^r)^s=a^{rs}\quad(a>0)$；

性质 3 $(ab)^r=a^r b^r\ (a>0,\ b>0)$.

练习

1. 用根式的形式表示下列各式$(a>0)$：$a^{\frac{2}{5}}$；$a^{\frac{3}{4}}$；$a^{-\frac{3}{4}}$；$a^{-\frac{2}{3}}$.
2. 用分数指数幂表示下列各式：

   (1) $\sqrt[3]{x^2}$；　(2) $\sqrt[4]{x^3}\ (x>0)$；　(3) $\sqrt[3]{(m-n)^2}$；　(4) $\dfrac{m^3}{\sqrt{m}}\ (m>0)$.
3. 求下列各式的值：

   (1) $0.064^{-\frac{1}{3}}$；　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$；　(3) $81^{0.75}$；　(4) $(0.001)^{-\frac{2}{3}}$；　(5) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$.

2.1.2 幂函数

我们知道，物体自由下落时的瞬时速度 $v=gt$，下落的路程 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 t 为下落的时间，g 为重力加速度.

质量分别为 m_1，m_2 的两个物体之间的万有引力 y 与物体间的距离 x 有如下关系 $y=\lambda\dfrac{m_1m_2}{x^2}$，其中 λ 为万有引力常数.

在以上三个函数关系式中，都出现了常数与一类函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)的乘积.

形如 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)的函数极为重要，我们有必要了解这类函数所具有的基本性质和图象特征.

一般地，我们将函数

$$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\text{ 是常数})$$

叫作**幂函数**(power function). 例如 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$都是幂函数.

下面研究幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象和性质.

请同学们观察图 2-1 中幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，

$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$的图象，并填写下表.

函数	定义域	值域	单调性	奇偶性
$y=x$				
$y=x^2$				
$y=x^3$				
$y=x^{\frac{1}{2}}$				
$y=x^{-1}$				

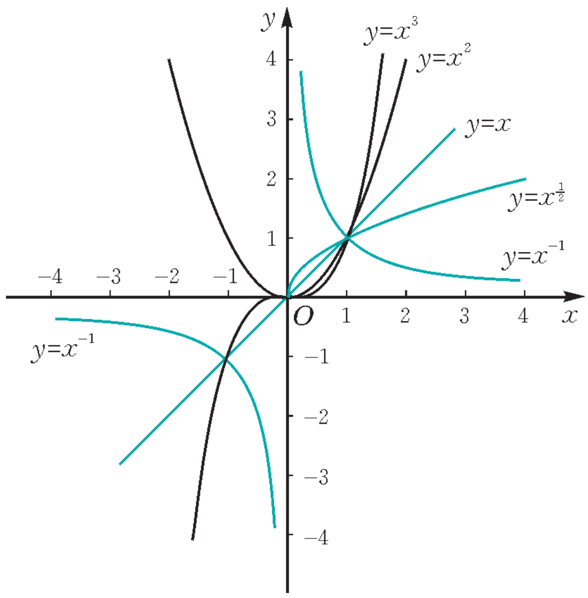
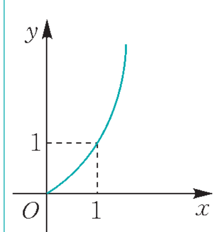
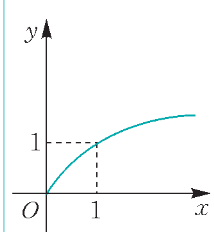
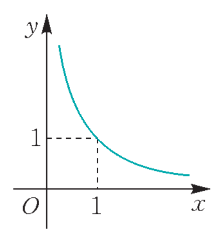


图 2-1

一般地，当 $\alpha\neq0$，1 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限内的图象和性质如下表：

	$\alpha>1$	$0<\alpha<1$	$\alpha<0$
图象			
性质	(1) 过点(0，0)，(1，1)		(1) 过点(1，1)
	(2) 在(0，$+\infty$)上是增函数		(2) 在(0，$+\infty$)上是减函数

例1 利用幂函数的性质，比较下列各组数中两个数的大小：

（1）$5.6^{\frac{1}{2}}$，$5.71^{\frac{1}{2}}$；　　（2）0.18^{-1}，0.29^{-1}.

解　（1）因为 $5.6^{\frac{1}{2}}$ 和 $5.71^{\frac{1}{2}}$ 可看作函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 当 x 取 5.6 和 5.71 时对应的两个函数值，而 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $5.6<5.71$，所以

$$5.6^{\frac{1}{2}}<5.71^{\frac{1}{2}}.$$

（2）因为 0.18^{-1} 和 0.29^{-1} 可看作函数 $y=x^{-1}$ 当 x 取 0.18 和 0.29 时对应的两个函数值，而 $y=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，又 $0.18<0.29$，所以

$$0.18^{-1}>0.29^{-1}.$$

例2 证明幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

证明　任取 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\\&=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\\&=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}.\end{aligned}$$

因为 $x_1-x_2<0$，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，故

$$f(x_1)<f(x_2),$$

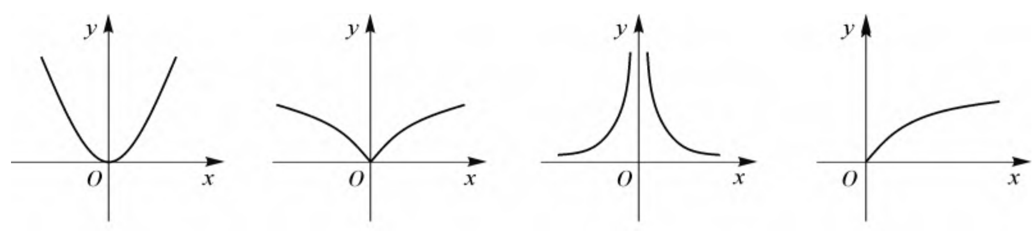
因此，幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

练习

1. 写出下列幂函数的定义域：

（1）$y=x^2$；　　（2）$y=x^{-1}$；　　（3）$y=x^{\frac{1}{2}}$；　　（4）$y=x^3$.

2. 函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的大致图象是（　　）.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

习题 2.1

1. 计算下列各式：

(1) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-0.5}-7.5\times(\sqrt{4})^{2}+81^{0.25}$；　(2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-(0.27)^{0}+(0.125)^{-\frac{1}{3}}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{-3}$；　(2) $y=(1+x)^{\frac{1}{3}}$；　(3) $y=(x+5)^{-1}$.

3. 比较下列各组中两个数的大小：

(1) 4.9^{3}，5.1^{3}；　(2) $16.5^{\frac{1}{2}}$，$16.04^{\frac{1}{2}}$；

(3) 0.45^{-1}，0.47^{-1}；　(4) $25.1^{0.5}$，$25.01^{0.5}$.

4. 证明幂函数 $f(x)=x^{3}$ 在$[0，+\infty)$上是增函数.

2.2 指数函数

我们首先来看下面的几个实际问题：

问题 1 设某森林 2017 年末的木材储量为 1，预计今后每年木材储量均比上一年增加 5%，由此可得，2017 年后第 x 年末的木材储量 y 与 x 具有函数关系式

$$y=1.05^{x}.$$

问题 2 天文学家将恒星按亮度(即肉眼视觉能辨别出来的明暗程度)由强到弱分为一等星、二等星、三等星等. 它们实际的物理光度有这样的比例关系：若一等星的光度为 1，则二等星的光度为 $100^{-\frac{1}{5}}$，三等星的光度为 $(100^{-\frac{1}{5}})^{2}$，四等星的光度为 $(100^{-\frac{1}{5}})^{3}$，依此类推，$x+1$ 等星的光度 y 与等级 x 具有函数关系式

$$y=(100^{-\frac{1}{5}})^{x}.$$

问题 3 考古中常用放射性碳(^{14}C)的含量测定一些古生物体距今多少年. 生物活体体内均有相同百分比含量的^{14}C，由于生物死亡后停止新陈代谢，^{14}C 不再进入体内，体内原有的^{14}C 不断衰减，因而含量有规律地减少. 设每经过 1 年残留的^{14}C是上一年的 a(a 是一个常数)倍. 由此可得，经过 x 年后，^{14}C 的残留量与原含量的比值 y 与 x 具有函数关系式

$$y=a^x.$$

只要把古生物体内[14]C 的残留量同原含量之比 y 测出，就可由 $y=a^x$ 推算出古生物体距今多少年.

在现实生活中，还有许多实际问题，如人口预测、经济预测、传染病人数预测、药物在人体内残留量的变化等，都可以建立类似的数学模型. 形如 $y=a^x$ 的函数是我们用来描述变化现象的常用函数.

一般地，函数

$$y=a^x \quad (a>0，且\ a\neq 1)$$

叫作**指数函数**(exponential function)，其中 x 是自变量. 指数函数的定义域为 **R**.

下面我们研究指数函数 $y=a^x(a>0，且\ a\neq1)$的图象和性质.

先研究指数函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 的图象和性质.

列出 x，y 的对应值表(用计算器算出对应的 y 值)，在同一平面直角坐标系中用描点法作图，如图 2-2 所示.

x	…	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	…
2^x	…	0.125	0.25	0.354	0.5	0.707	1	1.414	2	…
10^x	…	0.001	0.01	0.032	0.1	0.316	1	3.162	10	…

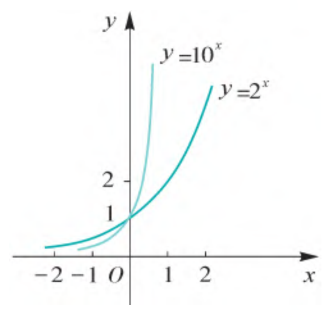


图 2-2

函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 的定义域都是 **R**. 由函数图象可知，图象都过点(0，1)，随着 x 的增加，y 的值都不断增加. 这就是说，在定义域 **R** 上，两个函数都是增函数.

再来研究指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图象和性质.

列出 x，y 的对应值表(用计算器算出对应的 y 值)，在同一平面直角坐标系中用描点法作图，如图 2-3 所示.

x	…	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	…
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	2	1.414	1	0.707	0.5	0.354	0.25	0.125	…
$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	…	10	3.162	1	0.316	0.1	0.032	0.01	0.001	…

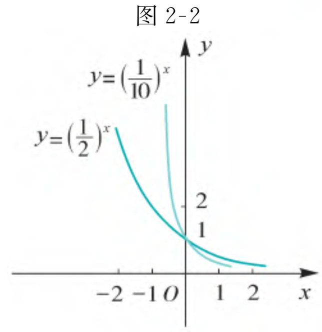
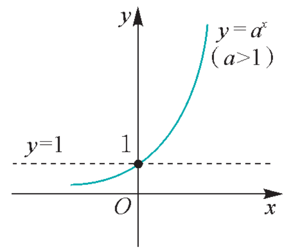
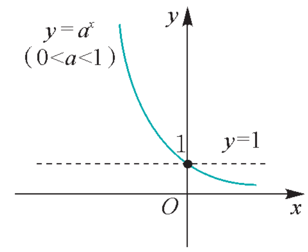


图 2-3

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的定义域都是 **R**. 由函数图象可知，图象都过点(0，1)，在定义域 **R** 上，两个函数都是减函数.

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象具有什么关系？

一般地，指数函数 $y=a^x(a>0，且\ a\neq1)$的图象和性质如下表：

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) 值域：$(0, +\infty)$	
	(2) 过点$(0, 1)$	
	(3) 在 **R** 上是增函数	(3) 在 **R** 上是减函数

仔细观察图 2-2，图 2-3，通过类比，探讨当 $1<a<b$（或 $0<a<b<1$）时，函数 $y=a^x$ 与 $y=b^x$ 的图象之间有什么关系.

例1 某种药物在 5 分钟内注入患者血液中，在这期间，血液中药物含量呈正比增加. 5 分钟后停止注射，以后血液中药物含量呈指数衰减. 设血液中药物含量 y 关于时间 t（单位：分钟）的函数是 $y=f(t)$，在图 2-4 中，图象(1)(2)与函数 $y=f(t)$的图象是否相吻合？如果不吻合，请画出函数$y=f(t)$的草图.

(1)　　(2)

图 2-4

解 图象(1)(2)与函数 $y=f(t)$的图象都不吻合. 因为图象(1)(2)后半段(5 分钟后的图象)都不呈指数衰减. 函数 $y=f(t)$的草图如图 2-5 所示.

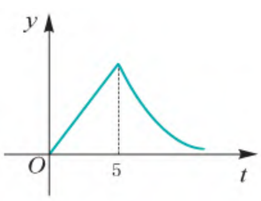


图 2-5

例2 利用指数函数的性质，比较下列各组中两个数的大小：

(1) $2^{0.11}$，$2^{0.12}$；

(2) $0.6^{0.4}$，1；

(3) $1.7^{0.8}$，$0.9^{2.8}$.

解 (1) 因为 $2^{0.11}$ 和 $2^{0.12}$ 可以看成指数函数 $y=2^x$ 当 x 取 0.11 和 0.12 时对应的两个函数值，而函数 $y=2^x$ 是增函数，又 $0.11<0.12$，所以

$$2^{0.11}<2^{0.12}.$$

(2) 因为函数 $y=0.6^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，又 $0.4>0$，所以 $0.6^{0.4}<0.6^0$，即

$$0.6^{0.4}<1.$$

(3) 因为函数 $y=1.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，函数 $y=0.9^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $1.7^{0.8}>1.7^0=1$，$0.9^{2.8}<0.9^0=1$，所以

$$1.7^{0.8}>0.9^{2.8}.$$

例3 指数函数 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 的图象如图 2-6 所示，试判断 1，a，b，c，d 这五个数的大小关系.

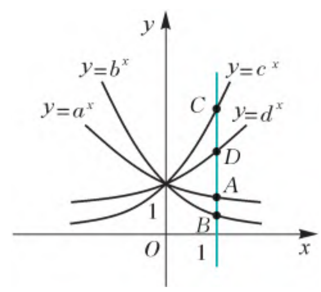


图 2-6

解 作直线 $x=1$，则该直线与上述四个函数的图象各有一个交点，分别为 $A(1,a)$，$B(1,b)$，$C(1,c)$，$D(1,d)$. 因此，由交点的高低以及指数函数的性质，可以判断出 1，a，b，c，d 的大小关系为

$$b<a<1<d<c.$$

例4 本章章头图所示的建筑物是一条倒立的悬链线. 如图 2-7 所示的悬链线是函数 $y=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$的图象，其中 e 是一个非常重要的无理数.（下面的计算中取 e=2.718.）

(1) 根据图中的信息求 a 的值；

(2) 为了做出图 2-7 中悬链线的模具，工人师傅需要分别在$x=0$，1，2，-1，-2 处垂直竖立如图 2-7 所示的五根支柱 OB，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，A_4B_4. 借助计算器计算 A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，A_4B_4 的长(保留两位小数).

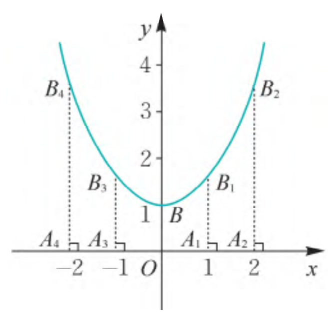


图 2-7

解 (1) 因为图象过点(0，1)，所以

$$1=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{0}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{0}{a}}),$$

解得

$$a=1.$$

(2)

$$A_1B_1=\frac{\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1}}{2}\approx 1.54,$$

$$A_2B_2=\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}}{2}\approx 3.76.$$

又因为 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$为偶函数，图象关于 y 轴对称，所以

$$A_3B_3=A_1B_1\approx 1.54,$$
$$A_4B_4=A_2B_2\approx 3.76.$$

练习

1. 比较下列各组中两个数的大小：

(1) 8.1^3，8.1^4；　　(2) $0.01^{-0.1}$，0.01^2.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=2^{\frac{1}{x-3}}$；　　(2) $y=\sqrt{3^x-3}$.

习题 2.2

1. 已知 m，n 满足下列不等式，试比较 m，n 的大小：

(1) $4^m<4^n$；　　(2) $0.5^m>0.5^n$；

(3) $a^m<a^n$　$(0<a<1)$；　　(4) $a^m>a^n$　$(a>1)$.

2. 比较下列各组中两个数的大小：

(1) $4.1^{\frac{2}{5}}$，$4.1^{\frac{3}{5}}$；　　(2) $0.7^{0.6}$，$0.7^{0.9}$；

(3) $0.9^{\frac{3}{4}}$，$1.2^{\frac{3}{4}}$；　　(4) $3^{0.99}$，0.99^3.

3. 根据条件，确定实数 x 的取值范围：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}$；　　(2) $(a^2+a+2)^x>(a^2+a+2)^{1-x}$.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$，求证：$f(-x)=-f(x)$.

5. 患者服用某种感冒药，记每次服药后体内药物的含量为 Q_0，随着时间 t(单位：小时)的变化，体内药物含量 $Q=Q_0\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$. 4 小时后患者体内药物的含量为多少？8 小时后患者体内药物的含量为多少？

信息技术链接

a 对指数函数 $y=a^x$ 的图象的影响

GeoGebra 具有“动态保持设定关系”的特性，利用它我们可以动态地观察函数图象的变化.

下面我们利用这个特性观察 a 对指数函数 $y=a^x$ 的图象的影响.

1. 建立直角坐标系.

2. 作参数 a. 点击工具栏中 按钮下的小三角创建滑动条 a，在绘图区点击鼠标左键后出现对话框(如图 1)，并在对话框中进行相应的设置后点击“确定”按钮.

图 1

3. 按以前学过的方法作函数 $y=a^x$ 的图象（如图 2）.

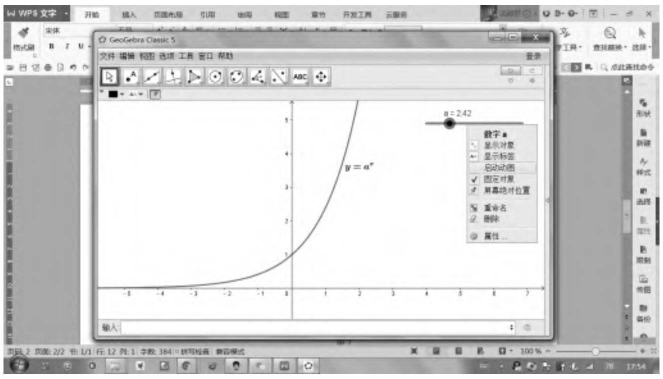


图 2

4. 研究 a 对指数函数 $y=a^x$ 的图象的影响. 将鼠标放在滑动条 a 处点击鼠标右键，选择“启动动画”选项(如图 2)，请同学们注意观察 a 对指数函数 $y=a^x$ 的图象的影响. 也可以手动拖动滑动条 a 上的黑色小圆点来控制参数 a 的变化方向与速度等.

5. 为了更好地观察参数 a 对函数图象的影响，我们可以对参数属性调整后再运行动画. 调整的方法是：将鼠标放在滑动条 a 处点击鼠标右键选择“属性”选项，在打开的对话框中重新设置选项卡中相应的参数值(如图 3).

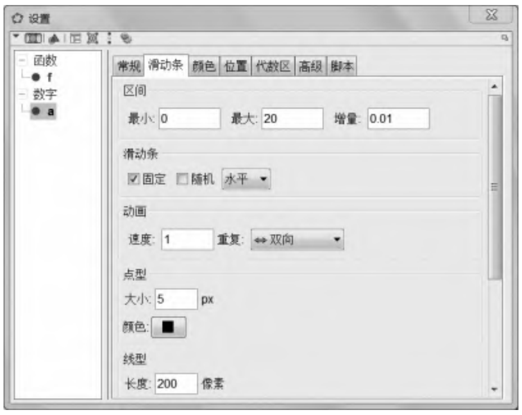


图 3

神奇的 e

在科学研究和科学计算时，人们常常与一个重要的无理数 e 不期而遇．当人们熟悉和学会运用它以后，就发现这个无理数对刻画自然现象与社会现象愈来愈重要．e 已成为数学中最重要的常数之一．在指数型增长问题中，我们更容易发现 e 的身影．

例如，放射性物质的质量 $N(t)$ 是时间 t 的函数，它所遵循的变化规律为

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

其中 N_0 是初始时刻（$t=0$）的质量，$\lambda>0$ 是一个常数．这个规律是如何得到的呢？

原来放射性物质随时随地都在衰变（即它的一部分原子变为另一种原子）．我们无法确定在某一时刻是哪一个原子衰变了，但是我们确实可以知道，在每一个瞬间，衰变的原子的个数与它在该瞬间全部原子个数之比是一个常数 $\lambda(\lambda>0)$．因此知道在时间的改变量 h 很小的条件下，时刻 x 的物质的质量与时刻 $(x+h)$ 的物质的质量之间有如下近似关系

$$\frac{N(x+h)-N(x)}{h}\approx-\lambda N(x). \qquad ①$$

设该物质开始时刻（即 $t=0$）的质量为 N_0，下面用①式来计算在时刻 t 的质量 $N(t)$．

由于时段 $[0,t]$ 的长度可能大于 h，所以我们不能直接用①式计算．为此，将区间 $[0,t]$ 划分成 n 等份，每一等份的长是 $\frac{t}{n}$．当 n 足够大时可保证 $\frac{t}{n}<h$．这样在①式中令 $x=0$，$h=\frac{t}{n}$，则有

$$N\left(\frac{t}{n}\right)\approx N_0-\lambda\cdot\frac{t}{n}N_0=\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)N_0,$$

同样再在①式中取 $x=\frac{t}{n}$，$h=\frac{t}{n}$，得

$$N\left(\frac{2t}{n}\right)\approx N\left(\frac{t}{n}\right)-\lambda\cdot\frac{t}{n}N\left(\frac{t}{n}\right)=\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)N\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$=\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)^{2}N_0,$$

依此类推，得 $N(t)\approx\left[\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda t}}\right]^{-\lambda t}N_0$.

为了简化记号，令 $m=\frac{n}{\lambda t}$，则上式化为

$$N(t)\approx\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}\right]^{-\lambda t}N_0. \qquad ②$$

在②式中，λ，t 是固定的，当 n 无限增大时，m 也无限增大，此时区间 $[0,t]$ 被分得越细，②式左右愈接近．因此关键看 $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$ 在 m 增大时的变化趋势如何．请看下表：

m	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$	m	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$
10	2.867 971 99	100 000	2.718 295 42
50	2.745 972 70	1 000 000	2.718 283 19
100	2.731 999 03	10 000 000	2.718 281 96
1 000	2.719 642 22	100 000 000	2.718 281 84
10 000	2.718 417 76	1 000 000 000	2.718 281 83

不难发现它越来越趋向一个常数 2.718 28…．这个常数是一个非常重要的无理数．欧拉对研究这个无理数有重大贡献，他还特别以自己姓氏的第一个字母“e”来记它．

利用 e，可得

$$N(t)=N_0e^{-\lambda t},$$

这就是放射性物质质量的变化规律．

e 是一个重要的无理数，它与数学中其他一些重要常数有密切的关系．有趣的是，下面的等式将包括 e 在内的五个重要常数巧妙地联系在一起：

$$e^{i\pi}+1=0.$$

其中，i 为虚数单位，我们将在以后学习到．

利用 e，我们可以说明为什么核废料丢弃多年后仍有危险性；利用 e 也易于描述现实中鹦鹉螺螺纹、螺旋星系等的几何关系；e 甚至与我们的音乐、装饰等艺术生活息息相关．

讨论题

查阅指数模型 $y=ae^{ht}$（a，h 为常数）的应用实例，体会 e 的作用．

2.3 对数函数

2.3.1 对数的概念及运算性质

我们看一看手中的计算器，就会发现面板上有“log”“ln”这两个符号，这就是我们将要学习的表示对数的符号. 对数的发明为简化计算做出了巨大的贡献.

在上一节中，我们谈到某森林的木材储量问题，其函数解析式为

$$y=1.05^x.$$

如果我们想知道经过多少年后该森林的木材储量增加一倍，则应解方程

$$1.05^x=2, \qquad ①$$

问题归结为求满足①式的 x.

在科学研究中，大量的问题归结为求关于 x 的方程

$$a^x=N \quad (a>0，且 a\neq1) \qquad ②$$

的解.

我们先研究方程②的解的个数. 由于指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$是单调函数，且值域为$(0，+\infty)$，因此方程②有且只有一个实数解. 为了便于解这类方程，我们将方程②的唯一实数解用一个新的符号表示，这就是对数符号.

一般地，如果 $a(a>0$，且 $a\neq1)$的 b 次幂等于 N，即 $a^b=N$，那么，数 b 叫作以 a 为底 N 的**对数**(logarithm)，记为

$$\log_a N=b,$$

其中 a 叫作对数的**底数**，N 叫作对数的**真数**.

例如，由 $3^4=81$ 可得：以 3 为底 81 的对数是 4，即

$$\log_3 81=4;$$

由 $10^{-2}=0.01$ 可得：以 10 为底 0.01 的对数是 -2，即

$$\log_{10} 0.01=-2;$$

由$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$可得：以$\frac{1}{2}$为底$\frac{1}{64}$的对数是 6，即

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}=6.$$

由对数的定义可以知道，

$$a^{\log_a N}=N \quad (a>0，且 a\neq 1).$$

对任何实数 b，都有 $N=a^b>0(a>0，且 a\neq 1)$，也就是说，不论 b 是什么实数，N 总是正数，所以零和负数没有对数.

由对数的定义可以证明

$$\log_a 1=0，\log_a a=1 \quad (a>0，且 a\neq 1).$$

你能证明吗？

我们将式子 $\log_a N=b$ 叫作**对数式**，而将相应的式子 $a^b=N$ 叫作**指数式**. 它们之间有以下关系：

$$a^b=N \Longleftrightarrow \log_a N=b \quad (a>0，且 a\neq 1).$$

例1 把下列指数式写成对数式：

(1) $4^{\frac{1}{2}}=2$；　　(2) $0.1^3=0.001$.

解 (1) $\log_4 2=\dfrac{1}{2}$.　　(2) $\log_{0.1}0.001=3$.

例2 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_{0.9}0.81=2$；　　(2) $\log_{10}1\,000=3$.

解 (1) $0.9^2=0.81$.　　(2) $10^3=1\,000$.

通常将以 10 为底，正数 N 的对数称为**常用对数**(common logarithm)，简记为 $\lg N$，即 $\log_{10}N=\lg N$. 例如，$\log_{10}3$ 简记为 $\lg 3$.

在科学技术中，常用到以无理数 $\mathrm{e}(\mathrm{e}=2.718\,28\cdots)$ 为底的对数. 通常将以 e 为底，正数 N 的对数称为**自然对数**(natural logarithm)，简记为 $\ln N$，即 $\log_{\mathrm{e}}N=\ln N$. 例如，$\log_{\mathrm{e}}7$ 简记为 $\ln 7$.

例3 求下列等式中 x 的值：

(1) $\log_{35}x=-1$；　　(2) $\ln \mathrm{e}^3=x$；

(3) $\log_x 64=3$.

解 (1) 因为 $\log_{35}x=-1$，即 $35^{-1}=x$，所以 $x=\dfrac{1}{35}$.

(2) 因为 $\ln \mathrm{e}^3=x$，即 $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^3$，所以 $x=3$.

(3) 因为 $\log_x 64=3$，即 $x^3=64$，即 $x=\sqrt[3]{64}$，所以 $x=4$.

练习

1. 把下列指数式写成对数式：

（1）$2^2=4$；（2）$2^5=32$；

（3）$2^{-1}=\frac{1}{2}$；（4）$9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式写成指数式：

（1）$\log_3 9=2$；（2）$\log_3 81=4$；

（3）$\ln 1=0$；（4）$\log_3 \frac{1}{27}=-3$.

3. 求下列各式的值：

（1）$\log_5 5$；（2）$\log_5 1$；

（3）$\lg 1\ 000$；（4）$\log_5 0.2$.

我们在指数的基础上建立了对数的概念，而指数运算具有如下性质：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$$

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

对数运算是指数运算的逆运算，下面我们来研究对数运算的性质.

设 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$.

性质 1 $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$.

证明 设 $\log_aM=p$，$\log_aN=q$，由对数的定义可得

$$M=a^p,\ N=a^q,$$

所以

$$MN=a^p\cdot a^q=a^{p+q},$$

由对数的定义可得 $\log_a(MN)=p+q$，即

$$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN.$$

性质 2 $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$.

同学们可以仿照性质 1 的证明来证明性质 2.

性质 3 $\log_aM^n=n\log_aM\quad(n\in\mathbf{R})$.

证明 设 $\log_aM=p$，由对数的定义得 $M=a^p$，则

$$M^n=(a^p)^n=a^{pn}.$$

由对数的定义可得 $\log_aM^n=np$，即

$$\log_aM^n=n\log_aM.$$

例4 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a \dfrac{xy}{z}$；（2）$\log_a \dfrac{y^2}{\sqrt{x}\,z^3}$.

解 （1）
$$\log_a \frac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z$$
$$=\log_a x+\log_a y-\log_a z.$$

（2）
$$\log_a \frac{y^2}{\sqrt{x}\,z^3}$$
$$=\log_a y^2-(\log_a \sqrt{x}+\log_a z^3)$$
$$=2\log_a y-\left(\frac{1}{2}\log_a x+3\log_a z\right)$$
$$=2\log_a y-\frac{1}{2}\log_a x-3\log_a z.$$

例5 求值：

（1）$\log_9 3+\log_9 27$；（2）$\log_9 3-\log_9 27$；

（3）$\log_2(4^7\times 2^5)$；（4）$\lg \sqrt[5]{100}$.

解 （1）$\log_9 3+\log_9 27=\log_9(3\times 27)=\log_9 81=2$.

（2）$\log_9 3-\log_9 27=\log_9 \dfrac{3}{27}=\log_9 \dfrac{1}{9}=-1$.

（3）$\log_2(4^7\times 2^5)=\log_2 2^{19}=19\log_2 2=19$.

（4）$\lg \sqrt[5]{100}=\lg 100^{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{5}\lg 100=\dfrac{1}{5}\lg 10^2=\dfrac{1}{5}\times 2=\dfrac{2}{5}$.

例6 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，$b>0$，且 $b\neq 1$，求证：
$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

证明 设 $\log_a N=p$，由对数的定义可得
$$a^p=N.$$
对上式两边取以 b 为底的对数得
$$\log_b a^p=\log_b N,$$
所以 $p\log_b a=\log_b N$，故 $p=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$，即
$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

上式称为对数的**换底公式**.

练习

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(x^2yz^3)$；　　(2) $\lg\dfrac{x^2z^3}{y}$；

(3) $\lg\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{y^3z^2}$；　　(4) $\lg\dfrac{x^5\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}$.

2. 计算：

(1) $\log_5 50-\log_5 2$；　　(2) $\lg 100^2$；

(3) $\log_3 5+\log_3\dfrac{27}{5}$；　　(4) $\log_3(\log_3 27)$.

3. 已知 $\lg 2=0.301\,0$，$\lg 3=0.477\,1$，求：

(1) $\lg\sqrt{6}$；　　(2) $\lg\dfrac{12}{25}$.

4. 求值：

(1) $\log_2 3\cdot\log_3 2$；　　(2) $\log_8 9\cdot\log_{27}32$；

(3) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3}+\dfrac{\log_3 64}{\log_3 4}$.

2.3.2 对数函数

前面研究指数函数时，我们讨论过考古中常用^{14}C 测定一些古生物体距今的年限. 这些生物体死亡后，经过 x 年，体内^{14}C 的残留量与原含量之比 y 与年数 x 之间的函数关系式是 $y=a^x$(每经过 1 年残留^{14}C是上一年^{14}C含量的 a 倍). 现在假设 y 已经测出，根据 y 的值如何推算出古生物体距今年限? 显然，对于任意的 $y>0$，由 $y=a^x$ 的单调性，应有唯一的 x 与 y 对应，因此，x 可以看成 y 的函数.

由对数的定义，这个函数解析式可以写为 $x=\log_a y$. 我们习惯用 x 表示自变量，y 表示函数，所以这个函数一般写为 $y=\log_a x$.

一般地，函数

$$y=\log_a x\quad(a>0,\ 且\ a\neq 1)$$

叫作**对数函数**(logarithmic function)，其中 x 是自变量. 对数函数的定义域是$(0,+\infty)$.

现在研究对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$的图象和性质.

先研究具体的对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，

$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图象和性质.

用描点法，我们在同一平面直角坐标系中得到 $y=\log_2 x$ 和 $y=\lg x$ 的图象，如图 2-8 所示；同样也能得到 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图象，如图 2-9 所示.

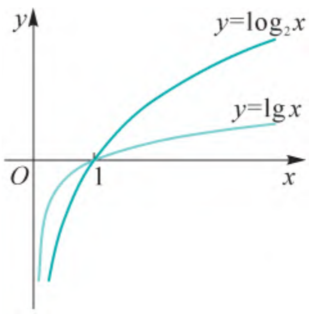


图 2-8

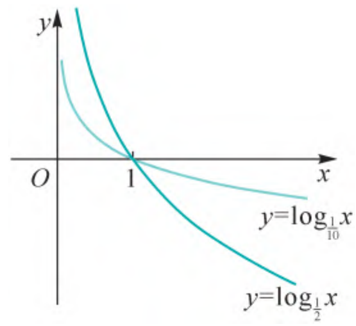


图 2-9

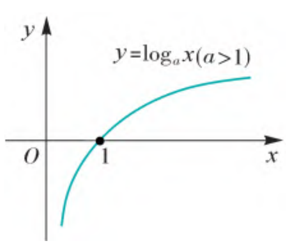
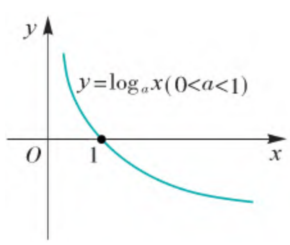
借助具有绘图功能的计算器或软件更容易得到它们的图象.

由图象可知，函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$ 的值域都是 **R**. 它们的图象都过点(1，0). 随着 x 的增加，y 的值不断增加. 这就是说，在定义域(0，$+\infty$)上，对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$都是增函数.

函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的值域都是 **R**，它们的图象都过点(1，0). 在定义域(0，$+\infty$)上，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 都是减函数.

函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象与 $y=\log_2 x$ 的图象有什么关系?

一般地，对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)在底数 $a>1$ 和$0<a<1$两种情况下的图象和性质如下表所示.

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) 值域：**R**	
	(2) 过点(1，0)	
	(3) 在(0，$+\infty$)上是增函数	(3) 在(0，$+\infty$)上是减函数

仔细观察图 2-8，图 2-9，通过类比，探讨当 $1<a<b$(或 $0<a<b<1$)时，函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_b x$ 的图象之间有什么关系.

例1 利用对数函数的性质比较下列对数与 0 的大小关系：

(1) $\log_3\dfrac{5}{4}$； (2) $\log_3\dfrac{3}{4}$； (3) $\log_{0.5}\dfrac{3}{4}$.

解 (1) 因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，又 $\frac{5}{4}>1$，所以

$$\log_3 \frac{5}{4}>\log_3 1,$$

即

$$\log_3 \frac{5}{4}>0.$$

(2) 因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，又 $\frac{3}{4}<1$，所以

$$\log_3 \frac{3}{4}<\log_3 1,$$

即

$$\log_3 \frac{3}{4}<0.$$

(3) 因为 $y=\log_{0.5} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，又 $\frac{3}{4}<1$，所以

$$\log_{0.5} \frac{3}{4}>\log_{0.5} 1,$$

即

$$\log_{0.5} \frac{3}{4}>0.$$

例2 2016 年底世界人口约为 74 亿，若今后每年人口增长率约为 1.2%，大约到哪一年底世界人口将达到 148 亿(精确到年)?

解 设 x 年后世界人口将达到 y 亿人，依题意得

$$y=74\times 1.012^x.$$

当 $y=148$ 时，有 $1.012^x=2$，解得

$$x=\log_{1.012} 2\approx 58.$$

即大约到 2074 年底世界人口将达到 148 亿.

在实际问题中，经常会遇到类似例 2 的指数增长模型：设原有量为 N，每次的增长率为 p，经过 x 次增长，该量增长到 y，则 $y=N(1+p)^x (x\in \mathbf{N}^*)$. 形如 $y=ka^x (k\in \mathbf{R}$，且 $k\neq 0$；$a>0$，且 $a\neq 1)$ 的函数是一种指数型函数，这是非常有用的函数模型.

例3 家用电器使用的氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层. 臭氧含量 Q 呈指数函数型变化，且满足关系式

$Q=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t}$，其中 Q_0 是臭氧的初始量，t 的单位是年.

（1）随着时间的增加，臭氧的含量是增加还是减少？

（2）多少年以后将会有一半的臭氧消失(精确到 1 年)？

解　（1）$Q=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t}$. 因为 $\mathrm{e}>1$，所以

$$\mathrm{e}^{-0.0025}<\mathrm{e}^0=1,$$

所以$(\mathrm{e}^{-0.0025})^t$ 随着 t 的增大而减小. 故随着时间的增加，臭氧的含量将会减少.

（2）令 $Q=\frac{1}{2}Q_0$，则有

$$\frac{1}{2}Q_0=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t},$$

所以

$$-0.0025t=\ln 0.5,$$

得

$$t\approx 277.$$

即约经过 277 年以后将会有一半臭氧消失.

我们已经学过指数函数与对数函数，下面我们来研究函数 $y=a^x$ 与 $x=\log_a y(a>0, a\neq 1)$之间的关系.

由对数的规定我们知道：

$$y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y.$$

这说明函数 $y=a^x$ 与 $x=\log_a y$ 是由同一个等式确定其对应关系的，如图 2-10 所示. 它们的区别是：在 $y=a^x$ 中，x 是自变量，y 是 x 的函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(0, +\infty)$；而在 $x=\log_a y$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数，其定义域为$(0, +\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$. 称$x=\log_a y$ 是$y=a^x$ 的反函数，$y=a^x$ 是 $x=\log_a y$ 的反函数，$y=a^x$ 与 $x=\log_a y$ 互为反函数.

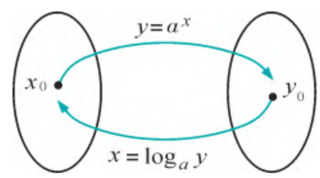


图 2-10

通常习惯用 x 表示自变量，将函数 $x=\log_a y$ 写成 $y=\log_a x$. 这样 $y=a^x$ 是 $y=\log_a x$ 的反函数，$y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数，即函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

练习

1. 判断下列对数与 0 的大小关系：

（1）$\log_{0.5}0.6$；　（2）$\log_{0.5}1.3$；　（3）$\log_{7.8}1.01$.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_7(x^2-1)$；　（2）$y=\frac{1}{\log_{0.3}x}$.

习题 2.3

1. 把下列各题的指数式写成对数式，对数式写成指数式：

(1) $3^x=1$；　　(2) $4^x=2$；

(3) $2^x=0.5$；　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}32=-5$；

(5) $\log_2 256=8$；　　(6) $\lg 0.001=-3$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{2+\log_{0.5}(x-1)}$；　　(2) $y=\sqrt{\log_2(1-x)}$.

3. 计算：

(1) $\lg 2+\lg 5-7\log_3 1$；

(2) $\lg 14-2\lg\dfrac{7}{3}+\lg 7-\lg 18$；

(3) $\dfrac{\lg 243}{\lg 9}$；

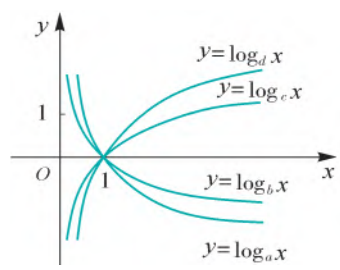
(4) $\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg 8-3\lg\sqrt{10}}{\lg 1.2}$.

4. 证明(其中 a，b，c 均大于 0，且不等于 1)：

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

(2) $(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)=1$.

5. 对数函数 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图象如图所示(a，b，c，d 均大于 0，且不等于 1)，试判断 a，b，c，d 的大小关系.



(第 5 题图)

6. 求下列不等式的解集：

(1) $\log_{0.5}(2x-1)<0$；

(2) $\log_7(4-x)>1$；

(3) $\log_2(3x+1)<\log_2(5x+7)$.

7. 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v(单位：m/s)和火箭燃料的质量 M(单位：kg)、火箭的质量 m(单位：kg)(除燃料外)之间的关系是 $v=2\,000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可达12 km/s?

2.4 几类函数的增长差异

我们已经研究了三类函数：$y=x^{\alpha}$，$y=a^{x}$，$y=\log_a x$．在$\alpha>0$，$a>1$的条件下，这三类函数在$(0,+\infty)$上都单调递增．

由图2-1我们看到，在$(1,+\infty)$上，$y=x^3$的图象比$y=x^2$的图象陡峭．随着x的增大，$y=x^3$的增长速度比$y=x^2$的增长速度快．一般地，对于两个幂函数$y=x^{\alpha_1}$，$y=x^{\alpha_2}$，当$\alpha_1>\alpha_2>0$时，在$(1,+\infty)$上，随着x的增大，$y=x^{\alpha_1}$的增长速度比$y=x^{\alpha_2}$的增长速度快．

由图2-2我们看到，在$(0,+\infty)$上，$y=10^x$的图象比$y=2^x$的图象陡峭，随着x的增大，$y=10^x$的增长速度比$y=2^x$的增长速度快．一般地，对于两个指数函数$y=a_1{}^x$，$y=a_2{}^x$，当$a_1>a_2>1$时，在$(0,+\infty)$上，随着x的增大，$y=a_1{}^x$的增长速度比$y=a_2{}^x$的增长速度快．

由图2-8我们看到，在$(1,+\infty)$上，$y=\log_2 x$的图象比$y=\lg x$的图象陡峭，随着x的增大，$y=\log_2 x$的增长速度比$y=\lg x$的增长速度快．一般地，对于两个对数函数$y=\log_{a_1}x$，$y=\log_{a_2}x$，当$1<a_1<a_2$时，在$(1,+\infty)$上，随着x的增大，$y=\log_{a_1}x$的增长速度比$y=\log_{a_2}x$的增长速度快．

下面我们以$y=x$，$y=2^x$，$y=\log_2 x$这几个具体的函数在$x\in[5,+\infty)$时的情形为例，比较几类函数的增长差异．

借助计算器算出x对应的y的数值，列表如下：

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
2^x	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	…
$\log_2 x$	2.322	2.585	2.807	3	3.170	3.322	3.459	3.585	3.700	3.807	3.907	…

从表中数据可以看到，当$x\geqslant5$时，随着x值的增加，三类函数的y的值一直在增加，但增长的速度并不相同．

	$y=x$的增加值	$y=2^x$的增加值	$y=\log_2 x$的增加值
x从5增加到6	1	32	0.263
x从6增加到7	1	64	0.222
x从7增加到8	1	128	0.193

续表

	$y=x$ 的增加值	$y=2^x$ 的增加值	$y=\log_2 x$ 的增加值
x 从 8 增加到 9	1	256	0.170
x 从 9 增加到 10	1	512	0.152
x 从 10 增加到 11	1	1 024	0.137
x 从 11 增加到 12	1	2 048	0.126
x 从 12 增加到 13	1	4 096	0.115
x 从 13 增加到 14	1	8 192	0.107
x 从 14 增加到 15	1	16 384	0.100
…	…	…	…

从上表可以看到，当 x 从 5 开始增加时，x 的值每增加 1 个单位，$y=2^x$ 的函数值 y 的增加由慢到快，图象上升且越来越陡；$y=\log_2 x$ 的函数值 y 的增加由快到慢，图象上升且越来越平坦；$y=x$ 的函数值 y 的增加速度是恒定的，但与函数$y=2^x$比较则要慢很多，图象相对指数函数 $y=2^x$ 而言也平缓得多. 这种增长差异从三类函数在第一象限的图象（图 2-11）上也可以得到清楚的体现.

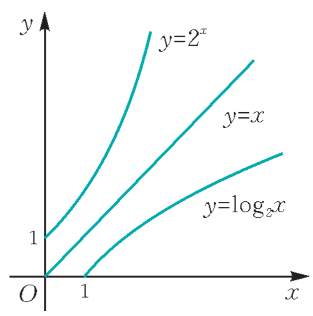


图 2-11

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调递增，而且增加得越来越快，指数曲线越来越陡峭，我们把这种增长方式称为“指数爆炸”，即当自变量的取值充分大以后，自变量的微小增大，可以使函数值增大得令人瞠目.

人们在研究某种大肠杆菌时发现，在理想的环境下（例如温度合适、养料足够），每个细菌 20 分钟分裂一次，一天 24 小时分裂 72 次. 这样一个细菌经过 24 小时后会分裂为 2^{72} 个. 这是一个多大的数呢？我们知道 $2^{10}=1\,024\approx10^3$，于是 $2\approx10^{\frac{3}{10}}$，$2^{72}\approx(10^{\frac{3}{10}})^{72}=10^{21.6}\approx10^{22}$. 目前世界人口还不到 100 亿，我们按 100 亿（100 亿$=10^{10}$）计算，这些大肠杆菌的

总数约为全世界人口总数的$\frac{10^{22}}{10^{10}}=10^{12}$倍，即一万亿倍．经估算，这些大肠杆菌的总体积和总质量都会超过一个地球，可见这是一个疯狂的增长速度．控制这种疯狂增长的办法就是降低它的分裂速度，这也是大自然调节生态平衡的一种方式．

由于世界上事物的增长速度差异极大，因此我们要用不同的尺度来度量它们．本节后面的阅读与讨论提供了两个例子．增长速度还与许多数学理论有关，这些知识还有待我们进一步学习．

信息技术链接

研究一次函数、指数函数、对数函数的增长差异

打开 GeoGebra，按照前面学过的方法构造参数 a，再依次作出一次函数 $y=ax$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象（如图 1），注意调整参数 a 的属性使它在正数范围内变化.

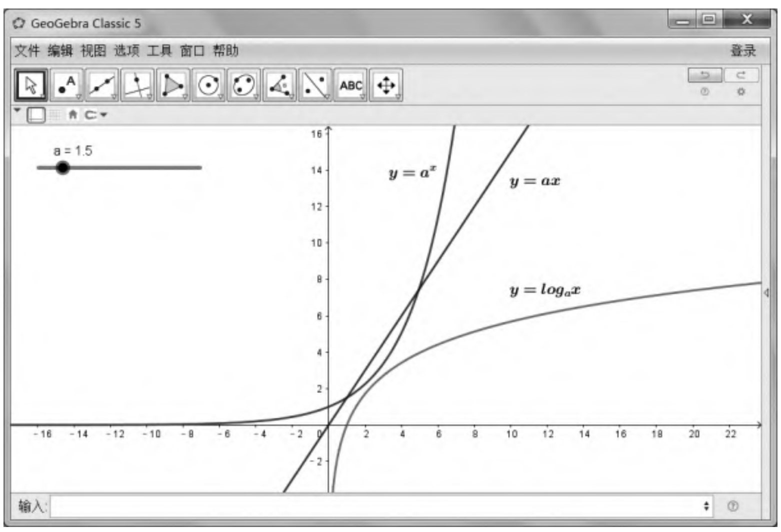


图 1

进行下面的实验：

1. 将鼠标放在滑动条处点击右键选择“属性”选项，打开的对话框可调整参数 a 的值，请同学们在不同参数值下比较三个函数图象在第一象限中的陡峭程度.

2. 也可以将鼠标放在滑动条处点击右键选择“启动动画”选项，或手动拖动滑动条上的黑色小圆点来改变 a 的值，从而比较三个函数图象在第一象限中的陡峭程度.

如何度量噪声和酸雨

环境问题日益引起人们关注. 我们常听说，马路上的噪声达到 80 分贝，这是什么意思? 原来人耳对声音十分敏感，能感受到的声音强度可以相差几百万倍. 声音强度可以用声音的功率 P 或压强 p 来表示，P 与 p 满足关系 $P=kp^2$(k 为常数). 如果有两个声源，其强度为 P_1，P_2 或 p_1，p_2，则$\frac{P_1}{P_2}$或$\frac{{p_1}^2}{{p_2}^2}$的值可以达到数百万，这样大的数使用起来很不方便.

利用幂函数、指数函数、对数函数的增长差异，当 y 的变化很急剧时，把 y 写成 $y=10^x$，即 $x=\lg y$，则 x 的变化就慢多了. 将这一特点用于噪声的度量问题，我们就不必用$\frac{P_1}{P_2}$或$\frac{p_1^2}{p_2^2}$，而是用

$$10\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\text{或 }20\lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

(单位为分贝，记作 dB)表示这两个声音强度之差. 这里之所以在 $\lg\frac{P_1}{P_2}$前面乘以 10，是因为大多数时候 $\lg\frac{P_1}{P_2}$为小数，这样使用起来不方便. 例如，设有两个扩音器，其中一个的功率是另一个的 2 倍，即$\frac{P_1}{P_2}=2$，而用分贝计算就是

$$10\lg 2\approx 3\ \text{dB},$$

即相差 3 分贝. 如果说相差 80 分贝，用声压计算，有

$$20\lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=80\ \text{dB}.$$

即 $\lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=4$，即 $p_1=10^4p_2$，即声压压强相差 1 万倍. 我们说马路上噪声达到 80 分贝，是以什么声源作为标准呢? 声压的标准(即计算分贝的起点)是 0.02 毫帕(0.02 mPa)，即一个大气压的一亿分之二.

再举一个 pH 的例子，即我们时常讨论的酸雨问题. 酸雨的酸度就是其中所含氢离子(H^+)的摩尔浓度，记作$[H^+]$.

氢离子多了，酸度就高了．氢离子的浓度是一个极小的数，但是变化范围极大，所以我们又要令 $y=10^x$，即用 $x=\lg y$ 作为其尺度，不过这里的 x 一般是负数．所以某种溶液的 pH 的定义是

$$\mathrm{pH}=-\lg[\mathrm{H}^+].$$

纯水是中性的，但其中也有 H^+，其浓度是 10^{-7}M（M 称为摩尔浓度）．所以纯水的 pH 是 7．酸雨中 H^+ 浓度高，所以其 pH 小于 7（请注意上式中的负号）．再举一些例子，正常情况下，葡萄酒的 pH 在 3～4 之间，胃液的 pH 在 0.9～1.8 之间，胆汁的 pH 约为 7.4．总之，pH 越小就表示酸性越强；反之，则碱性越强，如有些厨房清洁剂的 pH 为 13，有较强的碱性，如使用不当，会损伤人的皮肤．

上面讲到的函数增长速度的尺度表明，我们生活在一个需要用不同尺度来度量的世界上，pH 和 dB 就都是用的对数尺度．指数函数和对数函数就在我们身边．

讨论题

当反映一事物的某种状态的变量 x 的取值范围为 $1\leqslant x\leqslant 10^{10}$ 时，我们应怎样度量这种状态才方便？

复习题

A 组

1. 用分数指数幂表示下列各式：

(1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}$ $(a>0)$；

(2) $\sqrt[5]{a^3b^4}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt[6]{a}}$ $(a>0)$；

(4) $x^2\sqrt[4]{\dfrac{z^3}{y^2}}$ $(y>0,\ z>0)$．

2. 计算：

(1) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right]^{-\frac{1}{2}}-(-2)^{-4}+4^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$；

(3) $2\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{4}$；

(4) $\log_5 3+\log_5 \frac{1}{3}+3\log_2 4$;

(5) $1+\log_{0.6}\sqrt{0.36}+\lg 0.01$;

(6) $\lg 0.001^3+\log_3(27\times 81)$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{\frac{2}{3}}$；

(2) $y=\log_{0.5}(4x-3)$；

(3) $y=\frac{1}{\log_3(3x-2)}$；

(4) $y=\sqrt{2^x-1}$；

(5) $y=\sqrt{\ln x}$；

(6) $y=\log_a(\ln x+1)\quad(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

4. 已知 $m\neq 0$，$n>0$，a，b 都大于 0 且不等于 1，求证：$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$.

5. 设函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$，其中 a 是实数.

(1) 判断函数 $f(x)$的单调性；

(2) 试确定 a 的值，使函数 $f(x)$为奇函数.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)>f(-a)$，求实数 a 的取值范围.

7. 把物体放在空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1℃，空气的温度是 θ_0℃，t 分钟后物体的温度 θ℃可由公式

$$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$$

求得，这里 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数. 现有 62℃ 的物体，放在 15℃ 的空气中冷却，1 分钟以后物体的温度是 52℃，求上式中 k 的值. 开始冷却后，经过多长时间物体的温度分别冷却到 42℃，22℃，15.1℃(保留一位小数)？物体的温度会不会冷却到 12℃?

B 组

1. 已知 $3^x=0.03^y=10^{-2}$，求$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$的值.

2. 设 $0<a<1$，比较下列各组中两个数的大小：

(1) a^{1+a}，$a^{1+\frac{1}{a}}$；

(2) $\log_a(1+a)$，$\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

3. 设函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=x\lg x$. 求 $f(x)$的解析式.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1) 判断函数 $f(x)$的奇偶性；

(2) 证明函数 $f(x)$是 **R** 上的增函数；

(3) 解不等式 $f(x^2-x)>0$.

5. 下页表中给出了三个函数的部分函数值，一个函数形如 $y=ab^t$，另一个形如 $y=at^2$，第三个形如 $y=bt^3$，分别确定下表中的函数符合以上哪个形式.

t	$f(t)$	t	$g(t)$	t	$h(t)$
2.0	4.40	1.0	3.00	0.0	2.04
2.2	5.32	1.2	5.18	1.0	3.06
2.4	6.34	1.4	8.23	2.0	4.59
2.6	7.44	1.6	12.29	3.0	6.89
2.8	8.62	1.8	17.50	4.0	10.33
3.0	9.90	2.0	24.00	5.0	15.49

6. 已知函数 $f(x)=3^x$，实数 a 满足 $f(a+2)=18$.

（1）求 a 的值；

（2）设函数 $g(x)=3^{ax}-4^x$ 的定义域为$[0, 1]$，求它的值域.

7. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot x^3$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）求函数 $f(x)$的定义域；

（2）讨论函数 $f(x)$的奇偶性；

（3）求 a 的取值范围，使 $f(x)>0$ 在定义域上恒成立.

思考与实践

搜集在实际问题中建立幂函数、指数函数、对数函数的数学模型的案例，并进行总结交流.

第3章 三角函数

在日常生活中，你会发现一类具有某种特殊变化规律的现象．例如：单摆周而复始的运动；弹簧下挂着的小球，给它一个向下的拉力之后，小球就会重复地做上下振动；正常人的心电图上显示的波形在相同长度的横段内呈现重复性的变化；受日月引力的影响，海水有规律性地涨落．上述这些现象中的变化规律具有一个共同的特点——周而复始，我们称这种现象为周期现象．

正如我们可以用一次函数描述匀速直线运动，用二次函数描述自由落体运动，用指数函数描述物质的衰变、种群的繁殖、经济的增长等变化规律一样，我们可以用一类新的函数——三角函数来描述某些周期现象的变化规律．

在本章中，我们将学习三角函数的概念、图象以及基本性质，体会三角函数在解决周期性问题中的作用．同时，我们还要研究不同三角函数值之间的关系，并利用这些关系进行简单的三角恒等变换．

3.1 任意角与弧度制

3.1.1 任意角

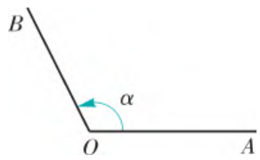


图 3-1

本书约定："0°～360°"这一说法包含0°，但不包含360°.

在初中，我们知道角可以看成平面内一条射线绕着端点旋转到另一位置所形成的图形. 如图 3-1，射线 OA 绕点 O 旋转到 OB 的位置就形成了一个角，记作$\angle AOB$ 或 α，其中射线 OA，OB 分别叫作角的始边和终边，点 O 叫作角的顶点. 若研究的范围局限在 0°～360°之间，显然不能满足实际生活的需要，如跳水运动员"转体 720 度"，大小就超过了 360°，"用扳手拧螺钉"所形成的角有逆时针和顺时针的方向之别，所以无论是从旋转量还是从旋转方向出发，角的概念都必须进行推广.

我们规定：一条射线围绕端点按逆时针方向旋转所形成的角叫作**正角**，按顺时针方向旋转所形成的角叫作**负角**，不做旋转形成的角叫作**零角**. 这样，逆时针旋转可以形成 0°～360°、360°～720°、720°～1 080°等范围的角，顺时针旋转可以形成 −360°～0°、−720°～−360°、−1 080°～−720°等范围的角；不旋转形成 0°的角. 角的概念经这样推广后就形成了任意角，它包括正角、负角和零角.

今后我们常在平面直角坐标系中讨论角，并**使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 角的终边(除端点外)在第几象限，我们就说这个角是第几象限角.**

例如：在图 3-2(1)中，60°，150°，−150°，−60°分别是第一象限角、第二象限角、第三象限角、第四象限角；而 0°，±90°，±180°，±270°，±360°，±1 080°等角的终边不在任何象限内，它们可以看作是终边落在坐标轴上的角.

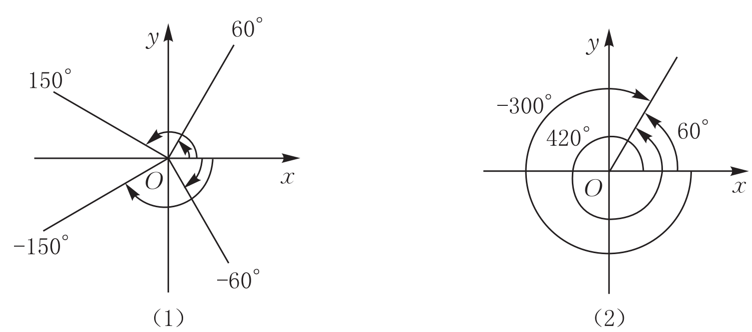


图 3-2

观察图 3-2(2)，$60°$，$420°$，$-300°$不仅都是第一象限角，而且其终边相同. 那么，终边相同的角，其大小有何关系呢？如 $420°$，$-300°$角的终边都与 $60°$角的终边相同，其大小关系为 $420°=360°+60°$，$-300°=-360°+60°$，即这两个角都可以表示成 $60°$与 $k(k\in\mathbf{Z})$个周角的和. 设 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $420°$，$-300°$的角都是 S 的元素，$60°$角也是 S 的元素(此时 $k=0$). 容易看出，所有与 $60°$角终边相同的角(连同 $60°$角在内)都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 $60°$角终边相同.

一般地，**所有与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)所组成的集合为**

$$S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

即任意一个与角 α 终边相同的角都可以表示成周角的整数倍与 α 的和.

例1 在 $0°\sim360°$范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角：

(1) $1\,000°$；

(2) $-960°$.

解 (1) 因为 $1\,000°=2\times360°+280°$，所以，在 $0°\sim360°$范围内与 $1\,000°$角终边相同的角是 $280°$角，它是第四象限角.

(2) 因为$-960°=-3\times360°+120°$，所以，在 $0°\sim360°$范围内与$-960°$角终边相同的角是 $120°$角，它是第二象限角.

例2 写出与$-345°$角终边相同的角的集合，并求出其中满足不等式$-720°\leqslant\alpha<720°$的角 α.

解 与$-345°$角终边相同的角的集合是

$$M=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-345°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

当 $k=-1$ 时，$\alpha=(-1)\times360°-345°=-705°$；

当 $k=0$ 时，$\alpha=0\times360°-345°=-345°$；

当 $k=1$ 时，$\alpha=1\times360°-345°=15°$；

当 $k=2$ 时，$\alpha=2\times360°-345°=375°$.

所以 M 中满足不等式$-720°\leqslant\alpha<720°$的角 α 有

$$-705°,\ -345°,\ 15°,\ 375°.$$

例3 写出终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合.

解 终边落在 $y=x(x\geqslant 0)$ 上的角的集合为

$$S_1=\{\alpha \mid \alpha=k_1\cdot 360^\circ+45^\circ,\ k_1\in \mathbf{Z}\};$$

终边落在 $y=x(x\leqslant 0)$ 上的角的集合为

$$S_2=\{\alpha \mid \alpha=k_2\cdot 360^\circ+225^\circ,\ k_2\in \mathbf{Z}\}.$$

所以，终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合为

$$\begin{aligned} S&=S_1\cup S_2\\ &=\{\alpha \mid \alpha=k_1\cdot 360^\circ+45^\circ,\ k_1\in \mathbf{Z}\}\cup\\ &\quad\{\alpha \mid \alpha=k_2\cdot 360^\circ+225^\circ,\ k_2\in \mathbf{Z}\}\\ &=\{\alpha \mid \alpha=2k_1\cdot 180^\circ+45^\circ,\ k_1\in \mathbf{Z}\}\cup\\ &\quad\{\alpha \mid \alpha=(2k_2+1)\cdot 180^\circ+45^\circ,\ k_2\in \mathbf{Z}\}\\ &=\{\alpha \mid \alpha=n\cdot 180^\circ+45^\circ,\ n\in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

终边落在 x 轴、y 轴上的角的集合分别如何表示？终边落在第一象限的角的集合又如何表示？

练习

1. 在平面直角坐标系中，下列各命题正确的是（　　）.
   (A) 第一象限角都是锐角　　(B) 小于 90° 的角都是锐角
   (C) 终边相同的角一定相等　　(D) 相等角的终边必相同
2. 时间经过了 5 小时 25 分钟，这时分针转过的角的大小为________.
3. 判断 $1\,563^\circ$ 和 $-1\,190^\circ30'$ 各是第几象限角.

习题 3.1.1

1. 在平面直角坐标系中，终边落在第二象限的角的集合为（　　）.
   (A) $\{\beta \mid 90^\circ<\beta<180^\circ\}$
   (B) $\{\beta \mid k\cdot 360^\circ+90^\circ<\beta<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
   (C) $\{\beta \mid k\cdot 360^\circ+90^\circ\leqslant\beta\leqslant k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
   (D) $\{\beta \mid k\cdot 180^\circ+90^\circ<\beta<k\cdot 180^\circ+180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
2. 终边落在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上的角的集合是__________________.
3. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中满足不等式 $-720^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的角 β 写出来：
   (1) 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度；
   (2) 当钟表上显示的时间从零点到 8 点 5 分时，时针转过的角度.
4. 已知 α 是第二象限角，试探讨 2α，$\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限.

3.1.2 弧度制

在表示长度时，我们常常根据实际需要采用不同的单位制，如千米、海里、英尺等. 类似地，表示角的大小也可以有不同的单位制，除了角度制以外，我们常常会用到弧度制.

我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫作 1 **弧度**(radian)的角，其大小记作 1 rad，读作 1 弧度. 这种用弧度作单位度量角的单位制叫作**弧度制**(radian measure).

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

这里，α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

角度制与弧度制可以互化. 在角度制里，一个周角是 360°，而在弧度制里，它的弧度数等于 $2\pi=6.283\,185\cdots$，所以有

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad},$$
$$180^\circ=\pi\ \text{rad},$$
$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\,45\ \text{rad},$$
$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ=57^\circ 18'.$$

今后用弧度制表示角时，“弧度”二字或“rad”通常省略不写，而只写该角所对应的弧度数. 例如，角 $\alpha=3$ 就表示 α 是 3 rad 的角，$\sin\frac{\pi}{4}$ 就表示 $\frac{\pi}{4}$ rad 的角的正弦，所以 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

下面给出一些常见特殊角的度数与弧度数的对照表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

度数与弧度数的换算，也可以用计算器进行.

例1 (1) 把 $157°30'$ 化为弧度；

(2) 把 $-\frac{5\pi}{12}$ 化为度.

解 (1) $157°30'=157.5°=\frac{\pi}{180}\times157.5=\frac{7\pi}{8}$.

(2) $-\frac{5\pi}{12}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-75°$.

角的概念推广后，在弧度制下，角的集合就与实数集 **R** 之间建立起一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应(如图 3-3).

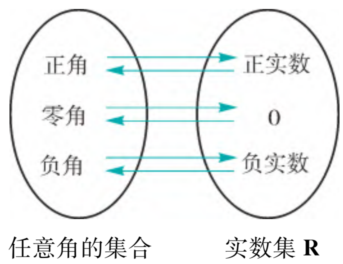


图 3-3

例2 利用弧度制推导下列关于扇形的公式：

(1) $l=\alpha R$； (2) $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$； (3) $S=\frac{1}{2}lR$.

其中 R 是半径，l 是弧长，$\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 为圆心角，S 为扇形的面积.

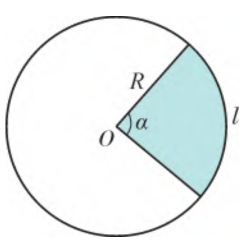


图 3-4

解 (1) 由公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 及 $r=R$ 可得

$$l=\alpha R.$$

(2) 如图 3-4，因为圆心角为 1 弧度的扇形的面积为

$$\frac{1}{2\pi}\cdot(\pi R^2)=\frac{1}{2}R^2,$$

所以扇形的面积

$$S=\alpha\cdot\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2}\alpha R^2.$$

(3) 由(2)知 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$，将 $l=\alpha R$ 代入，即得

$$S=\frac{1}{2}lR.$$

练习

1. 把下列角度化成弧度：

(1) 75°；　　(2) -120°；　　(3) $1\,200^\circ$.

2. 把下列弧度化成角度：

(1) $\frac{3\pi}{4}$；　　(2) $\frac{7\pi}{4}$；　　(3) $-\frac{7\pi}{3}$.

3. 已知 120°的圆心角所对的弧长等于 4π cm，求圆的半径.

4. 已知扇形的弧长为 20 cm，半径为 15 cm，求扇形的面积.

习题 3.1.2

1. (1) $\alpha=-2$，则 α 的终边在(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(2) 下列各组角中终边相同的是(　　). (其中 $k\in\mathbf{Z}$)

(A) $(2k+1)\pi$ 与$(4k\pm1)\pi$

(B) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ 与 $k\pi-\frac{\pi}{3}$

(C) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{2}$

2. (1) 在集合 $M=\{\alpha\mid\alpha=k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\}$中，满足 $-4\pi\leqslant\alpha<-2\pi$ 的角有________；

(2) 2 弧度的圆心角所对弦长是 2，这个圆心角所夹扇形的面积是________.

3. 把下列各角化成 $0\sim2\pi$ 的角与 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的和的形式：

(1) $\frac{27}{4}\pi$；　　(2) $\frac{29}{6}\pi$；　　(3) $-\frac{7\pi}{4}$.

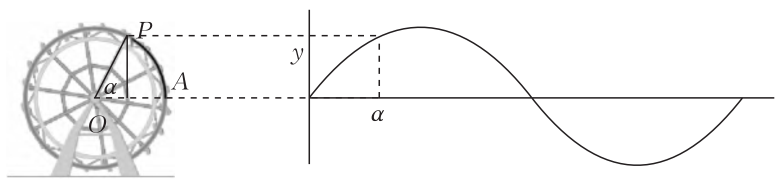
4. 在直径为 10 cm 的轮子上有一长为 6 cm 的弦，P 是该弦的中点，轮子以 5 rad/s 的速度旋转，求点 P 在 5 s 内转过的弧长.

5. 装修某一房屋，设计师在客厅设计一个扇形天窗，已知扇形天窗的周长为定值 $c\ (c>0)$，当扇形的圆心角设计为多少弧度时，透光最好？

3.2 任意角的三角函数

3.2.1 任意角的三角函数

如果你曾经坐过摩天轮，那么你一定知道这种运动实际上是一种循环往复的重复运动，也就是说，它是一种周期性运动．如图 3-5(1)，某人从起点 A 开始旋转到点 P 时，转过的角度设为α(rad)，人的位置 P 相对于摩天轮中心所在的水平线的位移设为 y，则对于任意的 α，都有唯一确定的 y 与之对应，故位移 y 是 α 的函数；当人从起点位置 A 旋转一周回到起点位置 A 时，其图象如图 3-5(2)所示，若继续旋转，则图象将重复出现．



(1)　　(2)

图 3-5

如果我们将摩天轮看成一个半径为 1 的圆 O，并以点 O 为原点，直线 OA 为 x 轴建立平面直角坐标系(如图 3-6)，则点 A 的坐标为 $A(1, 0)$，人所在的位置可以看成一个点 $P(x, y)$，角 α 是以 OA 为始边、OP 为终边的任意角．这时，我们可以把前面所说的“y 是 α 的函数”定义为正弦函数；同理我们还可以定义余弦函数和正切函数．

在平面直角坐标系中，我们称以原点为圆心，以单位长度为半径的圆为单位圆(unit circle)．

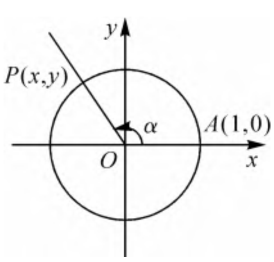


图 3-6

设 α 是任意角，它的始边是射线 OA，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$，那么

(1) y 叫作 α 的**正弦**(sine)，记作 $\sin\alpha$，

即
$$\sin\alpha=y;$$

(2) x 叫作 α 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos\alpha$，

即
$$\cos\alpha=x;$$

(3) 比值$\dfrac{y}{x}$叫作 α 的**正切**(tangent)，记作 $\tan\alpha$，

即
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}\ (x\neq 0).$$

当 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，α 的终边在 y 轴上，终边上任意一点 P 的横坐标 x 都等于 0，所以 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ 无意义. 除此以外，对于确定的角 α，上面的 y，x，$\frac{y}{x}$ 都是唯一确定的. 这就是说，正弦、余弦、正切分别建立了一个角的集合到单位圆上点的坐标或坐标的比值所成集合的对应关系.

因此，正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，分别称为**正弦函数**、**余弦函数**、**正切函数**，统称为**三角函数**(trigonometric function). 正弦函数与余弦函数的定义域为 $\mathbf{R}$；正切函数的定义域为 $\left\{x \mid x\in\mathbf{R}\text{且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

例1 求下列各角的正弦、余弦和正切值：

(1) $\frac{2\pi}{3}$；　　　　(2) $-\frac{5\pi}{6}$.

解 (1) 如图 3-7(1)，作 $\angle AOP=\frac{2\pi}{3}$，易知其终边与单位圆的交点为 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

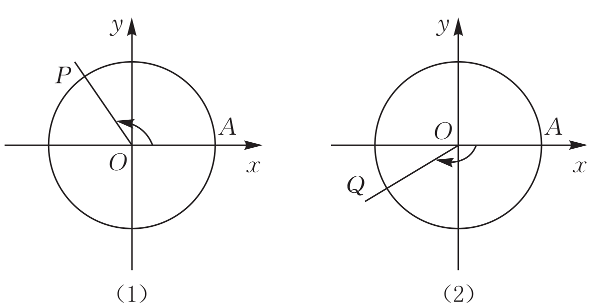


图 3-7

(2) 如图 3-7(2)，作 $\angle AOQ=-\frac{5\pi}{6}$，易知其终边与单位圆的交点为 $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，故

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2},\quad \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

> 若角 α 的终边经过点 $M(3,-4)$，你能求出 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值吗？

由三角函数的定义，以及各象限内点的坐标的符号，可知当

角 α 在不同象限内时，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值有正负之分. 请在图 3-8 中的括号内填上 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值在各象限内的符号.

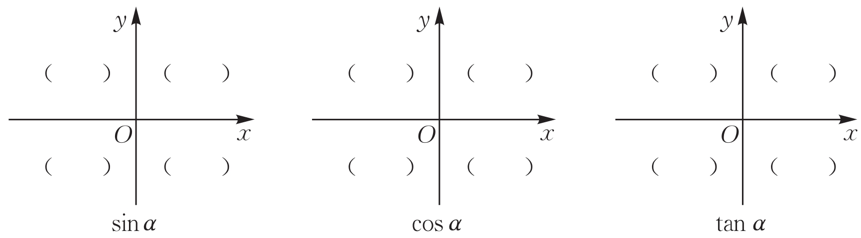


图 3-8

例2 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin(-465^\circ)$；　(2) $\cos 120^\circ$；　(3) $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$.

解 (1) 因为 $-465^\circ=-360^\circ+(-105^\circ)$，所以 -465° 是第三象限角，所以 $\sin(-465^\circ)<0$.

(2) 120° 是第二象限角，所以 $\cos 120^\circ<0$.

(3) 因为 $-\dfrac{11\pi}{3}=-4\pi+\dfrac{\pi}{3}$，所以 $-\dfrac{11\pi}{3}$ 是第一象限角，所以 $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)>0$.

例3 设角 α 是第三象限角，试确定下列各式的符号：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha$；　(2) $\tan\alpha-\sin\alpha$.

解 (1) 因为角 α 是第三象限角，所以 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 均为负值，故 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 为负值.

(2) 因为角 α 是第三象限角，所以 $\tan\alpha$ 为正值，$\sin\alpha$ 为负值，故 $\tan\alpha-\sin\alpha$ 为正值.

练习

1. 分别写出终边通过下列点的角的正弦、余弦和正切值：

(1) $P_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　(2) $P_2(-5,-3)$.

2. 分别求下列各角的正弦、余弦和正切值：

(1) $\dfrac{\pi}{2}$；　(2) π；　(3) $\dfrac{3\pi}{2}$；　(4) 2π.

3. 确定下列各角的正弦、余弦和正切值的符号：

(1) 885°；　(2) -395°；　(3) $-\dfrac{25\pi}{3}$.

4. 若 $\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，试确定角 θ 的终边所在的象限.

从定义出发，我们还可以得到三角函数的一种几何表示.

如图 3-9，设任意角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆相交于点 $P(x, y)$.

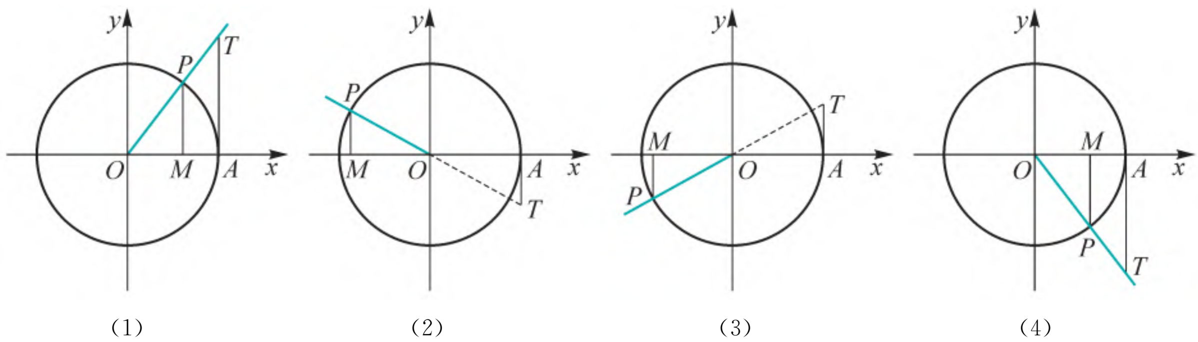


图 3-9

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 M. 过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线，设它与角 α 的终边或其反向延长线相交于点 T. 显然，线段 OM 的长度为 $|x|$，线段 MP 的长度为 $|y|$.

当角 α 的终边不在坐标轴上时，我们可以把线段 OM、线段 MP 都看作带有方向的线段，并称之为有向线段 OM、有向线段 MP. 同时，我们还可以作如下规定：

（1）$OM=x$. 当有向线段 OM 与 x 轴同向时，OM 为正值；当有向线段 OM 与 x 轴反向时，OM 为负值；当 $x=0$ 时，$OM=0$. 我们称 OM 为有向线段 OM 的数量.

（2）$MP=y$. 当有向线段 MP 与 y 轴同向时，MP 为正值；当有向线段 MP 与 y 轴反向时，MP 为负值；当 $y=0$ 时，$MP=0$. 我们称 MP 为有向线段 MP 的数量.

于是，根据正弦函数、余弦函数的定义，有

$$\sin\alpha=MP,$$
$$\cos\alpha=OM.$$

我们把单位圆中的有向线段 MP、有向线段 OM 分别叫作角 α 的**正弦线**、**余弦线**，其数量 MP，OM 就是角 α 的正弦值、余弦值.

类似地，我们也可以把有向线段 OA 看作与 x 轴同向，数量等于 1. 当 α 是第一、三象限角时，把有向线段 AT 看作与 y 轴同向，AT 具有正值，当 α 是第二、四象限角时，把有向线段 AT 看作与 y 轴反向，具有负值. 在这种规定下，我们称 AT 为有向线段 AT 的数量. 因为 $\triangle OMP \backsim \triangle OAT$，所以

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=AT.$$

我们把有向线段 AT 叫作角 α 的**正切线**，其数量 AT 就是角 α 的正切值.

特别地，当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线变成了一个点；当角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变成了一个点，正切线不存在.

例4 分别作出角 $\frac{\pi}{3}$ 和 $-\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线、余弦线和正切线.

解 如图 3-10(1)，设角 $\frac{\pi}{3}$ 的终边与单位圆相交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，过点 $A(1,0)$ 作圆的切线交 OP 的延长线于点 T，则

$$\sin\frac{\pi}{3}=MP,\ \cos\frac{\pi}{3}=OM,\ \tan\frac{\pi}{3}=AT.$$

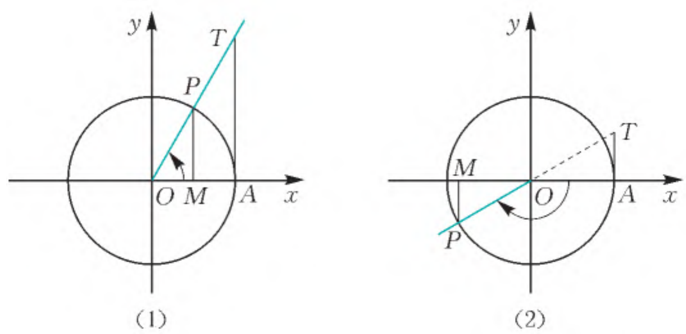


图 3-10

如图 3-10(2)，设角 $-\frac{5}{6}\pi$ 的终边与单位圆相交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，过点 $A(1,0)$ 作圆的切线交 OP 的反向延长线于点 T，则

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=MP,\ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=OM,\ \tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=AT.$$

练习

1. 学习三角函数时，一些特殊的三角函数值是常常要用到的，如下表：

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

从上表可以发现，当 $\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=(-1)^k$，$\tan\alpha=0$. 你还能得出其他的结论吗?

2. 作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线：

(1) $\frac{2}{3}\pi$；　　(2) $-\frac{\pi}{3}$.

3. 已知 α 为锐角，请利用单位圆和三角函数线证明：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$；　　(2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

习题 3.2.1

1. 已知角 α 的终边落在直线 $y=-3x$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.
2. 求下列各式的值：

   (1) $3\cos 270°+4\sin 90°+5\tan 180°$；

   (2) $\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$.
3. 在坐标平面内，O 为原点，P 是 x 轴非负半轴上一点，且 $|OP|=5$. 现将 OP 按逆时针方向旋转 $\frac{5\pi}{3}$ 到 OP'，求点 P' 的坐标.
4. (1) 已知角 α 的正弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边(　　).

   (A) 在 x 轴上　　(B) 在 y 轴上

   (C) 在直线 $y=x$ 上　　(D) 在直线 $y=-x$ 上

   (2) 已知角 α 的正切线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边(　　).

   (A) 在 x 轴上　　(B) 在 y 轴上

   (C) 在直线 $y=x$ 上　　(D) 在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上
5. 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边：

   (1) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$；　　(2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$；　　(3) $\tan\alpha=2$.
6. 求满足不等式 $\cos\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 的角 α 的取值范围.

3.2.2 同角三角函数的基本关系

在平面直角坐标系中，角 α 的始边和终边分别与单位圆相交于点 $A(1, 0)$ 和 $P(x, y)$，如图 3-11 所示，则根据三角函数的定义可知：$\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$. 又 $x^2+y^2=1$，容易得到

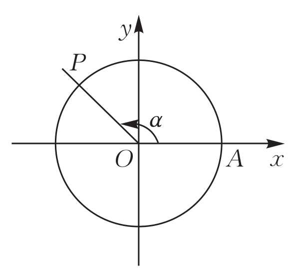


图 3-11

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

上面这两个等式是同角三角函数之间的基本关系式，它们都是三角恒等式，第二个式子中，$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，这时式子两边都有意义．以后说到三角恒等式时，除另有说明外，都是使式子两边有意义情况下的恒等式．

例1　（1）已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，α 是第四象限角，求 $\sin\alpha$；

（2）已知 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，求 $\tan\alpha$．

解　（1）因为 α 是第四象限角，所以 $\sin\alpha<0$．

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 可得

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}.$$

（2）因为 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}<0$，$\sin\alpha\neq-1$，所以角 α 是第三象限角或第四象限角．

当角 α 是第三象限角时，$\cos\alpha<0$．

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=-\frac{15}{17},$$

所以 $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{8}{15}.$$

当角 α 是第四象限角时，$\cos\alpha>0$．

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17},$$

所以 $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{8}{15}.$$

请同学们思考一下：在已知 $\tan\alpha$ 的条件下，如何求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$？

例2　化简：$\tan^2\theta-\sin^2\theta-\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta$．

解
$$\begin{aligned}&\tan^2\theta-\sin^2\theta-\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta\\=&\tan^2\theta(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta\\=&\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta-\sin^2\theta\\=&\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta-\sin^2\theta\\=&\sin^2\theta-\sin^2\theta=0.\end{aligned}$$

例3 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证法 1 由 $\cos\alpha\neq0$，知 $\sin\alpha\neq-1$，所以 $1+\sin\alpha\neq0$，于是

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}\\
&=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}\\
&=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}\\
&=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\\
&=\text{右边},
\end{aligned}$$

所以原式成立.

证法 2 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\\
=&\frac{\cos\alpha\cos\alpha-(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}\\
=&\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}\\
=&\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}=0,
\end{aligned}$$

所以原式成立.

证法 3 因为

$$\begin{aligned}
&(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)\\
=&1-\sin^2\alpha\\
=&\cos^2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha,
\end{aligned}$$

又 $1-\sin\alpha\neq0$，$\cos\alpha\neq0$，所以

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

练习

1. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{9}{41}(90^\circ<\alpha<180^\circ)$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.

2. 化简：

(1) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}$； (2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

3. 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$； (2) $\dfrac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha$.

习题 3.2.2

1. 若 $\sin\alpha=m\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则 $\tan\alpha=($　　$)$.

(A) $\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　(B) $-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

(C) $\pm\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

2. 化简：

(1) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\cos\theta}$，其中 θ 为第二象限角；

(2) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}$.

3. 求证：

(1) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；

(2) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$；

(3) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

4. 已知 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，求 $3\cos^2\theta+\cos^4\theta-2\sin\theta+1$ 的值.

5. 已知 $\tan\alpha=-2$，求 $\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha+\dfrac{2}{5}\cos^2\alpha$ 的值.

6. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，并且 α 是第二象限角，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

7. 已知 $\tan\alpha=-3$，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$；

(2) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

3.2.3 三角函数的诱导公式

如果我们已经知道锐角的三角函数值，那么对于任意角，能否将它的三角函数值转化为锐角的三角函数值来计算呢？

由三角函数的定义可知，终边相同的角的同一三角函数值相等．由此可以得到一组公式：

$$\begin{aligned}&\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\\&\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,\quad(k\in\mathbf{Z})\\&\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\textbf{（公式 1）}$$

利用公式 1 可以将求任意角的三角函数值转化为求 $0\sim2\pi$ 内角的三角函数值．为了进一步将 $0\sim2\pi$ 内角的三角函数值转化为锐角的三角函数值，还需要研究 $\pi\pm\alpha$，$2\pi-\alpha$ 等角的三角函数值与角 α 的三角函数值之间的关系．

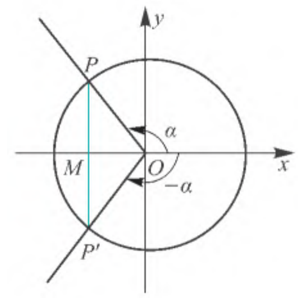


图 3-12

如图 3-12，设角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x,y)$，角 $-\alpha$ 的终边与单位圆的交点为 P'．显然点 P 与点 P' 关于 x 轴对称，故点 P' 的坐标为 $(x,-y)$．根据三角函数的定义，可得

$$\sin\alpha=y,\ \sin(-\alpha)=-y;$$
$$\cos\alpha=x,\ \cos(-\alpha)=x;$$
$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\ \tan(-\alpha)=\frac{-y}{x}.$$

由公式 2 你能否推导出 $2\pi-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系？

由角 α 的任意性，上述结论对任意角成立，从而有

$$\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\&\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\&\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\text{（公式 2）}$$

同理，如图 3-13，设角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x,y)$．由于角 $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于原点对称，所以角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆的交点（设为 P'）与点 P 关于原点对称，故点 P' 的坐标为 $(-x,-y)$．根据三角函数的定义，可得

$$\sin\alpha=y,\ \sin(\pi+\alpha)=-y;$$
$$\cos\alpha=x,\ \cos(\pi+\alpha)=-x;$$
$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\ \tan(\pi+\alpha)=\frac{-y}{-x}.$$

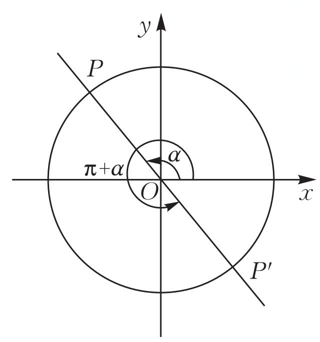


图 3-13

由角 α 的任意性，上述结论对任意角都成立，从而有

$$\begin{aligned}&\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\&\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\text{（公式 3）}$$

由公式 2 和公式 3 可以得到

$$\begin{aligned}&\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\&\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\text{（公式 4）}$$

公式 1 至公式 4 可以概括如下：

$\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的三角函数值，等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号．

例1 求下列三角函数值：

(1) $\sin(-1\ 650°)$；

(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$；

(3) $\tan(-29°45')$.

解 (1) $\sin(-1\ 650°)=\sin(-5\times360°+150°)$

$=\sin 150°=\sin(180°-30°)$

$=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)=\cos\left(-4\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\tan(-29°45')$

$=-\tan 29°45'\approx-0.571\ 5$.

例2 化简：$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\tan(-\alpha-2\pi)}{\tan(\pi-\alpha)\cos^3(-\alpha-\pi)}$.

解 原式$=\frac{(-\sin\alpha)^2(-\cos\alpha)\tan(-\alpha)}{(-\tan\alpha)\cos^3(\pi+\alpha)}$

$=\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{(-\tan\alpha)(-\cos^3\alpha)}=\tan^2\alpha$.

在初中我们还知道，在三角形 ABC 中，若角 C 为直角，则

$$\sin A=\cos B，\cos A=\sin B.$$

如果设 $B=\alpha$，则 $A=\frac{\pi}{2}-\alpha$，故以上两式可表示为

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha，$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha，$$

其中 α 为锐角．那么这个结论能否将角 α 推广到任意角呢？

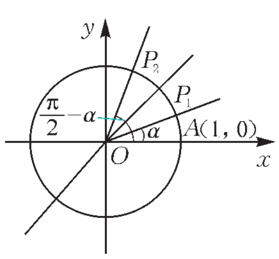


图 3-14

如图 3-14，设角 α 为任意角，我们先借助单位圆探究 α 的终边 OP_1 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边 OP_2 的位置关系．

因为 $0+\alpha$ 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 这两个角可以看作是分别以角 0 的终

边、角$\frac{\pi}{2}$的终边按不同的方向旋转同样大小的角而形成的，而角 0 的终边、角$\frac{\pi}{2}$的终边关于直线 $y=x$ 对称，所以角 α 与角$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边(即 OP_1 与 OP_2)也关于直线 $y=x$ 对称. 若 P_1 的坐标为(x, y)，则 P_2 的坐标为(y, x)，于是我们有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x,\ \cos\alpha=x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=y,\ \sin\alpha=y.$$

从而得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$
（**公式 5**）

由于$\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}-(-\alpha)$，所以由公式 5 和公式 2 可得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$
（**公式 6**）

公式 5 和公式 6 可以概括为：**$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的正弦(余弦)函数值等于 α 的余弦(正弦)函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.**

公式 1 至公式 6 常常叫作**诱导公式**(induction formula).

例3 求证：$\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$.

证明 因为

$$\begin{aligned}&\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\=&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\\=&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\=&1,\end{aligned}$$

所以 $\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$.

例4 设 $n\in \mathbf{Z}$，化简：$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)$.

解 $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

当 n 为偶数时，原式$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$；

当 n 为奇数时，原式$=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

所以 $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)=(-1)^n\cos\alpha$.

练习

1. 求下列三角函数值：

（1）$\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$；　（2）$\cos\frac{31\pi}{6}$；　（3）$\tan(-855^\circ)$.

2. 证明下列各式：

（1）$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$；　（2）$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$；

（3）$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$；　（4）$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

3. 设 $\pi<x<2\pi$，请将下表补充完整.

x	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$	
$\sin x$				
$\cos x$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$		1		

习题 3.2.3

1. （1）当 n 为整数时，化简$\frac{\sin(n\pi+\alpha)}{\cos(n\pi+\alpha)}$所得的结果是（　　）.

（A）$\tan n\alpha$　（B）$-\tan n\alpha$　（C）$\tan\alpha$　（D）$-\tan\alpha$

（2）已知 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{3}{5}$，且 α 是第四象限角，则 $\sin(-2\pi+\alpha)=$（　　）.

（A）$-\frac{4}{5}$　（B）$\frac{4}{5}$　（C）$\pm\frac{4}{5}$　（D）$\frac{3}{5}$

(3) 已知 $\tan 1\,317°=a$，则 $\sin 303°+\cos 303°$的值是(　　).

(A) $\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$　　(B) $-\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$　　(C) $\dfrac{a-1}{\sqrt{1+a^2}}$　　(D) $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$

2. 化简：

(1) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=$________；

(2) $\tan 10°+\tan 170°+\sin 66°-\sin 114°=$________.

3. 化简：

(1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi+\alpha)\tan(\pi+\alpha)}{\tan(-\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}$；

(2) $\cos^2(-\alpha)-\dfrac{\tan(2\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(-\alpha)}+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

4. 化简：

(1) $\sin\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)\quad(k\in\mathbf{Z})$；

(2) $\sin(k\pi+\alpha)+\cos(k\pi+\alpha)\quad(k\in\mathbf{Z})$.

5. 已知 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)+4$($a$，$b$，$\alpha$，$\beta$ 均为非零实数)，$f(1\,999)=5$，求 $f(2\,000)$的值.

6. 利用诱导公式，研究 $k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\alpha(k\in\mathbf{Z})$与 α 的正、余弦函数值之间的关系.

3.3 三角函数的图象与性质

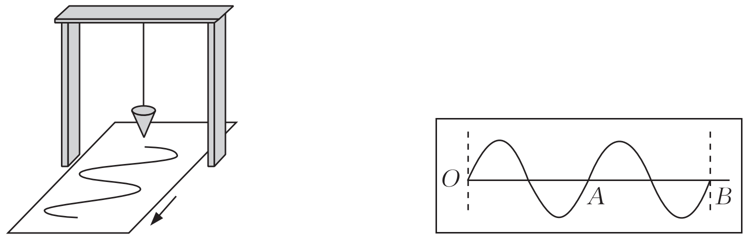
由三角函数的定义我们知道，对于任意给定的实数 x(正切函数中 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$)，都有唯一确定的一个值 $\sin x$(或 $\cos x$，或 $\tan x$)与之对应，由这个对应关系确定的正弦函数(或余弦函数，或正切函数)可以记作 $y=\sin x$(或 $y=\cos x$，或 $y=\tan x$). 下面我们来研究这些函数的图象和性质.

3.3.1 正弦函数的图象与性质

我们先来做一个简单的物理实验.

如图 3-15(1)，将一根较长的细绳挂在架子上，下端连一个“沙漏”，就做成了一个简易的单摆. 在沙漏的下方放一块纸板，将沙漏拉离平衡位置使之摆动，同时匀速拉动纸板，这

样就可以在纸板上留下一条曲线，它是简谐振动的图象，物理学中称之为正弦曲线(或余弦曲线)，它反映的是沙漏离开平衡位置的位移 s 随时间 t 的变化情况．图 3-15(2)所示是某次实验留下的一条曲线．



(1)　　　　(2)

图 3-15

通过上述实验，我们对正弦曲线和余弦曲线有了较为直观的印象．下面我们借助正弦线画出比较精确的正弦函数图象．

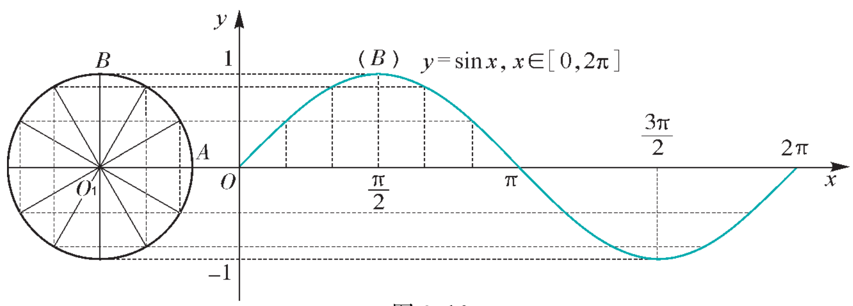


图 3-16

如图 3-16，在平面直角坐标系的 x 轴的负半轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心，作单位圆．

从$\odot O_1$ 与 x 轴的交点 A 起把$\odot O_1$ 分成 12 等份．

可以是任意等份，但所分的份数宜取 4 的倍数．份数越多，画出的图象越精确．

过$\odot O_1$ 上的各分点作 x 轴的垂线，可以得到对应于 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π 等角的正弦线．

相应地，把 x 轴上从 0 到 2π 这一段分成 12 等份；把角 x 的正弦线向右平移，使它的起点与 x 轴上表示数 x 的点重合；再用光滑曲线把这些正弦线的终点从左到右依次连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[0，2\pi]$上的图象．

因为终边相同的角有相同的三角函数值，所以函数

$$y=\sin x,\ x\in[2k\pi,\ 2(k+1)\pi]\quad(k\in\mathbf{Z})$$

的图象与函数

$$y=\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$$

的图象形状完全一致．因此，我们只要把函数 $y=\sin x$ 在$[0，2\pi]$上的图象向左、右平行移动(每次移动 2π 个单位长度)，就可以得到正弦函数

$$y=\sin x,\ x\in\mathbf{R}$$

的图象(如图 3-17).

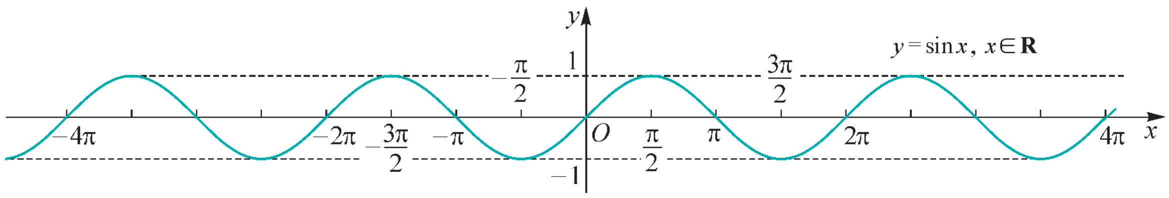


图 3-17

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象叫作**正弦曲线**(sine curve).

> 可以用计算机画这个函数的图象，作图过程可用“GeoGebra”在计算机上实现.

正弦函数有以下主要性质：

(1) 周期性

正弦函数值是按照一定规律不断重复地取得的，当角 x 每增加 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，正弦值重复出现，即

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \quad (k\in\mathbf{Z}).$$

我们称函数的这种性质为周期性.

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得定义域内的每一个 x 值，都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数 $f(x)$叫作**周期函数**(periodic function)，非零常数 T 叫作这个函数的**周期**(period).

例如，2π，4π，…及-2π，-4π，…都是正弦函数的周期. 事实上，每一个常数 $2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$都是正弦函数的周期.

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫作 $f(x)$的**最小正周期**. 从图象上可以看出，2π 是正弦函数的**最小正周期**.

> 本书后面所涉及的周期，若没有特别说明，一般都是指函数的最小正周期.

例 1 函数 $y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象如图 3-18 所示，观察其图象，说出它的周期，并用定义加以说明.

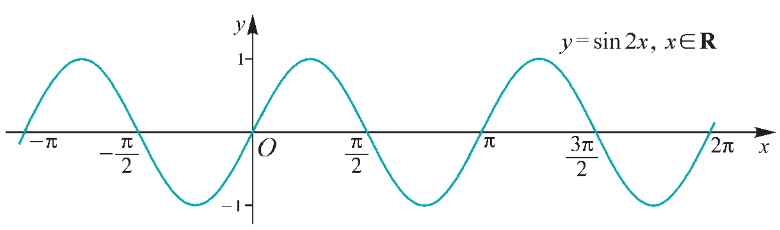


图 3-18

解 观察图象发现，π 是函数 $y=\sin 2x$ 的周期.

下面用定义说明.

因为 2π 是 $y=\sin x$ 的周期，所以

$$\sin(2x+2\pi)=\sin 2x \quad (x\in\mathbf{R}),$$

即
$$\sin 2(x+\pi)=\sin 2x \quad (x\in\mathbf{R}),$$

故函数 $y=f(x)=\sin 2x$ 满足

$$f(x+\pi)=f(x)\quad (x\in\mathbf{R}),$$

所以 π 是函数 $y=\sin 2x$ 的周期.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$.

由图 3-16 可以看出，在函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象上，起着关键作用的点有以下五个：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

事实上，描出这五个点后，函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了. 这种近似地作正弦曲线的方法也称为“五点(作图)法”.

例2 用“五点法”画出函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的简图.

解 按照五个关键点列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点：在平面直角坐标系中将五个点 $(0,\ 1)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)$，$(\pi,\ 1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$，$(2\pi,\ 1)$ 描出来.

连线：用光滑曲线将五个点顺次连接起来，即得到 $y=1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的简图(如图 3-19).

图 3-19 中，$y=1+\sin x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的平行移动得到？$y=-1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象呢？

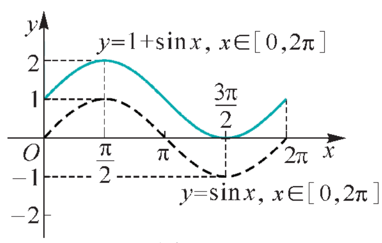


图 3-19

练习

1. 等式 $\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{5\pi}{9}\right)=\sin\frac{2\pi}{9}$ 是否成立？若这个等式成立，能否说 $\frac{5\pi}{9}$ 是正弦函数 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 的一个周期？为什么？
2. 画出下列函数的简图，观察简图，说出它的周期，并加以验证：
   (1) $y=3\sin x$，$x\in\mathbf{R}$；　(2) $y=\sin 3x$，$x\in\mathbf{R}$.

（2）奇偶性

由诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$ 可知，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 是奇函数，正弦曲线关于原点 O 成中心对称.

（3）单调性

观察在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的正弦曲线，可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1. 由此可知，正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数.

结合正弦函数的周期性可知，正弦函数在每一个区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数，其值从 -1 增大到 1；在每一个区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都是减函数，其值从 1 减小到 -1. 所以，这两类区间的每一个都是正弦函数的单调区间.

（4）最大值、最小值

由正弦曲线容易得出，正弦函数的最大值是 1，最小值是 -1，其值域为 $[-1,\ 1]$.

观察在半开半闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的正弦曲线，可以看出：

当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$；

当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

由正弦函数的周期性可知：当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数取得最大值 1；当且仅当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数取得最小值 -1.

例3 利用函数的单调性，指出下列各式大于 0 还是小于 0：

（1）$\sin\left(-\frac{4\pi}{19}\right)-\sin\left(-\frac{3\pi}{13}\right)$；

（2）$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)-\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$.

解　（1）因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{13}<-\frac{4\pi}{19}<\frac{\pi}{2}$，且函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{13}\right)<\sin\left(-\frac{4\pi}{19}\right),$$

故
$$\sin\left(-\frac{4\pi}{19}\right)-\sin\left(-\frac{3\pi}{13}\right)>0.$$

（2）
$$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8},$$
$$\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin\frac{2\pi}{7},$$

且 $0<\frac{\pi}{8}<\frac{2\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$，又 $y=\sin x$ 在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)<\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right),$$

即
$$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)-\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)<0.$$

例 4　求下列函数的最大值和最小值，并求函数取得最大值、最小值时自变量 x 的集合：

（1）$y=\sin x+1$，$x\in\mathbf{R}$；

（2）$y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$.

解　（1）函数 $y=\sin x+1$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 $1+1=2$，最小值是 $-1+1=0$.

使函数 $y=\sin x+1$ 取得最大值时 x 的集合，就是使函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值时 x 的集合，即

$$\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

同理，使函数 $y=\sin x+1$ 取得最小值时 x 的集合是

$$\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

（2）函数 $y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 1，最小值是 -1.

令 $z=2x$，则函数 $y=\sin z$，$z\in\mathbf{R}$ 取得最大值时 z 的值是

$$z=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

由 $2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

这就是说，使函数 $y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值时 x 的集合是

$$\left\{x \middle| x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

同理，使函数 $y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最小值时 x 的集合是

$$\left\{x \middle| x=k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

练习

1. 求函数 $y=2\sin x+3$ 的最大值和最小值，并求函数取得最大值、最小值时 x 的集合.
2. 利用函数的单调性，比较下列各组中两个三角函数值的大小：
   (1) $\sin 250°$与 $\sin 260°$；　　(2) $\sin(-515°)$与 $\sin(-530°)$.
3. 试写出函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 x 轴交点的横坐标的集合.

习题 3.3.1

1. 函数 $y=\sin\left(\frac{k}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期不大于 2，则正整数 k 的最小值应为(　　).
   (A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 13
2. (1) 已知 $f(x)$是周期为 5 的周期函数，且 $f(1)=2\,007$，求 $f(11)$；
   (2) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$是奇函数，且 $f(1)=2$，$f(x+3)=f(x)$，求 $f(8)$.
3. (1) 若函数 $f(x)=a\sin x-b(a>0)$的最大值为 1，最小值为 -7，求实数 a，b 的值；
   (2) 若函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+1$，且 $f(1)=5$，求 $f(-1)$的值.
4. 利用正弦函数的单调性，比较下列各组数的大小：
   (1) $\sin 760°$与 $\sin(-770°)$；　　(2) $\sin\left(-\frac{47}{10}\pi\right)$与 $\sin\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$.
5. 画出下列函数的图象，并说明它与函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象有何关系：
   (1) $y=1-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；　　(2) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$x\in[0,2\pi]$.
6. 画出下列函数的图象，并求出函数的单调区间和最大(小)值：
   (1) $y=\sin\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
7. 我们知道，原点 O 是正弦曲线 $y=\sin x$ 的对称中心. 回答下列问题：
   (1) 除原点 O 外，正弦曲线还有其他对称中心吗？
   (2) 正弦曲线是轴对称图形吗？如果是，求出对称轴的方程.

3.3.2 余弦函数的图象与性质

由诱导公式

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), x\in\mathbf{R}$$

可知，$y=\cos x$ 的图象就是函数

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), x\in\mathbf{R}$$

的图象，也就是说余弦函数 $y=\cos x$ 的图象可以通过将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左平行移动$\frac{\pi}{2}$个单位得到(如图 3-20).

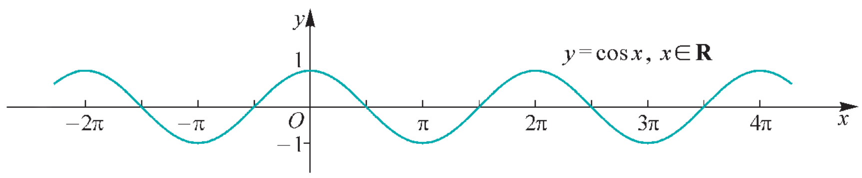


图 3-20

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象叫作**余弦曲线**(cosine curve).

从图 3-20 可以看出，在函数 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象上，起着关键作用的点有以下五个：$(0, 1)$，$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$(\pi, -1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$，$(2\pi, 1)$. 事实上，描出这五个点后，函数 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象的形状就基本上确定了.

例 1 用“五点法”画出函数 $y=-\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$的简图.

解 按五个关键点列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点：在平面直角坐标系中，描出五个点$(0, -1)$，$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$(\pi, 1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$，$(2\pi, -1)$.

连线：用光滑曲线把五个点$(0, -1)$，$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$(\pi, 1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$，$(2\pi, -1)$顺次连接起来，即得 $y=-\cos x$，$x\in$

$[0, 2\pi]$的图象(如图 3-21).

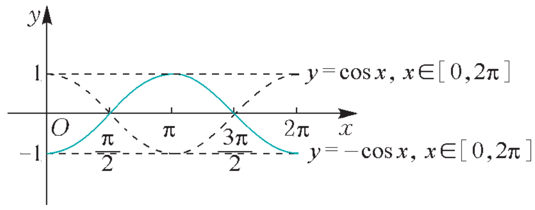


图 3-21

图 3-21 中的两条曲线有什么位置关系?

余弦函数有以下主要性质:

(1) 周期性

余弦函数值是按一定规律不断重复地取得的,当角 x 每增加 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,余弦值重复出现,即 $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $(k\in\mathbf{Z})$,因此余弦函数具有周期性,2π 是余弦函数的周期.

函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的周期是多少?

(2) 奇偶性

由诱导公式 $\cos(-x)=\cos x$ 可知,余弦函数 $y=\cos x$,$x\in\mathbf{R}$ 是偶函数,余弦曲线关于 y 轴成轴对称.

(3) 单调性

观察 $y=\cos x$,$x\in[-\pi, \pi]$的图象可知,当 x 由 $-\pi$ 增大到 0 时,曲线逐渐上升,$\cos x$ 的值由 -1 增大到 1;当 x 由 0 增大到 π 时,曲线逐渐下降,$\cos x$ 的值由 1 减小到 -1. 由此可知,余弦函数在闭区间 $[-\pi, 0]$ 上是增函数,在闭区间$[0, \pi]$上是减函数.

结合余弦函数的周期性可知,余弦函数在每一个区间$[2k\pi-\pi, 2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是增函数,其值从 -1 增大到 1;在每一个区间$[2k\pi, 2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是减函数,其值从 1 减小到 -1. 所以,这两类区间的每一个都是余弦函数的单调区间.

(4) 最大值、最小值

余弦函数的值域是$[-1, 1]$. 当且仅当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,余弦函数取得最大值 1;当且仅当 $x=(2k-1)\pi(k\in\mathbf{Z})$时,余弦函数取得最小值 -1.

例2 求下列函数的最大值和最小值,并求使函数取得最大值、最小值时自变量 x 的取值集合:

(1) $y=\cos x+1$,$x\in\mathbf{R}$;

(2) $y=3+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,$x\in\mathbf{R}$.

解 (1) 函数 $y=\cos x+1$,$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 $1+1=2$,

最小值是$-1+1=0$.

使函数 $y=\cos x+1$ 取得最大值时 x 的值，就是使函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值时 x 的值，即 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以，所求集合为$\{x\,|\,x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

使函数 $y=\cos x+1$ 取得最小值时 x 的值，就是使函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最小值时 x 的值，即 $x=(2k-1)\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以，所求集合为$\{x\,|\,x=(2k-1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 因为$-1\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，故当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，

$$y_{\max}=5,$$

此时，$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，所以，所求集合为

$$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\};$$

当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 时，

$$y_{\min}=1,$$

此时，$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以所求集合为

$$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

例3 求函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的单调递减区间.

解 设 $u=2x-\frac{\pi}{5}$，由于 $\cos u$ 在每个区间$[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上是减函数，而 $u=2x-\frac{\pi}{5}$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上是增函数，所以函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$的单调递减区间可由下面的不等式确定：

$$2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{5}\leqslant2k\pi+\pi\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

解得
$$k\pi+\frac{\pi}{10}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{5}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

因此，函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$的单调递减区间为

$$\left[k\pi+\frac{\pi}{10},\ k\pi+\frac{3\pi}{5}\right]\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

练习

1. 画出下列函数的图象，观察图象，说出它们的周期，并加以验证：

（1）$y=\cos 3x$，$x\in\mathbf{R}$；

（2）$y=3\cos\dfrac{x}{4}$，$x\in\mathbf{R}$.

2. 求函数 $y=a\cos x+b(a>0)$的最大值和最小值.

3. 利用函数的单调性，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

（1）$\cos\dfrac{15\pi}{8}$与$\cos\dfrac{14\pi}{9}$；

（2）$\cos 515^\circ$与$\cos 530^\circ$.

习题 3.3.2

1. （1）cos 1 与 sin 1 的大小关系是________________；

（2）若集合 $M=\left\{\theta\,\middle|\,\sin\theta\geqslant\dfrac{1}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}$，$N=\left\{\theta\,\middle|\,\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}$，则 $M\cap N=$__________.

2. 写出函数 $y=\cos\dfrac{x}{3}$的图象与 x 轴交点的横坐标的集合.

3. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=\cos\dfrac{x}{2}$；

（2）$y=3\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

4. 求下列函数的最大值和最小值以及使函数取得最大值、最小值时自变量 x 的取值集合：

（1）$y=\log_{\frac{1}{3}}(2-\cos x)$；

（2）$y=11-8\cos x-2\sin^2 x$.

3.3.3 正切函数的图象与性质

由正切函数的定义可知，正切函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}，且\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$. 由诱导公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$ 可知，正切函数是周期函数，π 是它的一个周期. 因此可以先作出它在一个周期$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内的图象.

可用单位圆上的正切线来画出函数

$$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

的图象(如图 3-22).

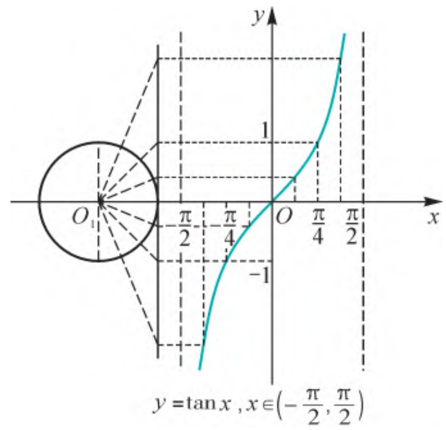


图 3-22

根据正切函数的周期性，我们可以把上述图象向左、向右平移(每次移动 π 个单位长度)，得到正切函数

$$y=\tan x\quad\left(x\in\mathbf{R},\ 且\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$$

的图象(如图 3-23)，并把它叫作**正切曲线**(tangent curve).

图 3-23 也可以利用“GeoGebra”在计算机上作出.

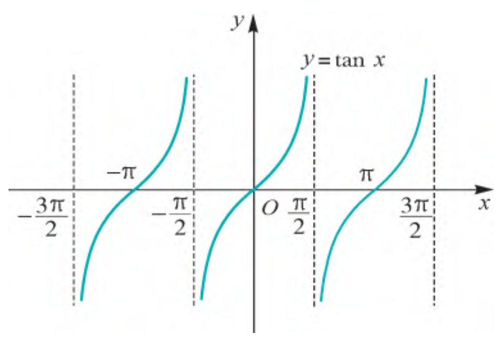


图 3-23

从图 3-23 可以看出，正切曲线是由相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$所隔开的无穷多支曲线组成的.

正切函数还有以下性质：

(1) 奇偶性

由诱导公式 $\tan(-x)=-\tan x$ 可知，正切函数 $y=\tan x$ 是奇函数，正切曲线关于原点 O 对称.

(2) 单调性

从图 3-23 可以看出，正切函数在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，根据正切函数的周期性，可知正切函数在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$上都单调递增.

（3）值域

从图 3-23 可以看出，对任意的整数 k，当 x 从小于 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 的方向无限接近于 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\tan x$ 为正且无限增大；当 x 从大于 $-\frac{\pi}{2}+k\pi$ 的方向无限接近于 $-\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\tan x$ 为负且无限减小．这就是说，$\tan x$ 可取任何实数值，即正切函数的值域是实数集 **R**.

能否说正切函数 $y=\tan x$ 在整个定义域内是增函数？

例 1 研究函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域、周期性、单调性，并求出使函数值为零的自变量 x 的集合.

解 要使函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 有意义，则有

$$2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

即 $x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$．所以函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

因为 $y=\tan x$ 的周期为 π，所以

$$3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$3\tan\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$.

函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{\omega}$.

设 $t=2x+\frac{\pi}{4}$，则函数 $y=3\tan t$ 在每一个开区间

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

上单调递增．当 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<t<\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，即有

$$-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},$$

于是，函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在每一个开区间 $\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则

$$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

故使函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的值为零的 x 的集合是

$$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

练习

1. 写出满足下列条件的 x 的取值集合：

   (1) $\tan x>0$；　(2) $\tan x=0$；　(3) $\tan x<0$.

2. 验证$\frac{3\pi}{7}$是函数 $y=\tan\frac{7x}{3}$的一个周期.

3. 不求值，利用正切函数的性质，指出下列各组函数值的差哪些大于 0，哪些小于 0?

   (1) $\tan 128°-\tan 134°$；

   (2) $\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)-\tan\left(-\frac{19\pi}{5}\right)$.

习题 3.3.3

1. 求函数 $y=\lg(1-\tan x)$的定义域.

2. 判断下列命题是否正确：

   (1) 函数 $y=\tan x$ 在定义域内是增函数；

   (2) 直线 $y=a$ （a 为常数）与正切曲线 $y=\tan 3x$ 相交时，相邻两交点间的距离是 $\frac{\pi}{3}$.

3. 利用函数的单调性，比较下列各组中两个正切函数值的大小：

   (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$；

   (2) $\tan\frac{7\pi}{8}$与 $\tan\frac{\pi}{6}$.

4. 求使不等式 $\tan x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$成立的 x 的取值集合.

5. 写出函数 $y=\tan\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标的集合.

3.4 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

从物理学中我们知道：交变电流中电流 I 与时间 t 的变化关系是

$$I=I_m\sin \omega t \quad (t\geqslant 0),$$

其中 I_m 表示最大电流，$\frac{|\omega|}{2\pi}$ 表示频率；

单摆中的小球做微小的摆动时，其离开平衡位置的位移 s 与时间 t 的函数关系是

$$s=A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\varphi\right) \quad (t\geqslant 0),$$

其中 A 表示振幅，g 表示重力加速度，l 表示摆线长，φ 表示初相位；

另外，音叉发出的纯音振动规律也可以用三角函数表示为

$$y=A\sin \omega x,$$

其中 x 表示时间，y 表示纯音振动时音叉相对于平衡位置的偏离，$\frac{|\omega|}{2\pi}$ 表示该纯音振动的频率(对应着音高)，A 表示该纯音振动的振幅(对应着音强).

这说明函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi) \quad (A,\ \omega,\ \varphi \text{ 都是常数})$$

是描述许多周期现象的重要数学模型. 因此，了解这一函数的图象以及其中 A，ω，φ 对图象的影响有着重要的实际意义.

下面我们以函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象为例讨论函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (x\in\mathbf{R})$$

的图象的画法，A，ω，φ 对函数图象的影响，以及 A，ω，φ 的物理意义.

我们可以用“GeoGebra”在计算机上画出上述函数的图象，并可以观察到 A，ω，φ 对函数图象的影响.

参见本节后的“信息技术链接”，并交流观察后的结果.

我们也可以用“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ 的

简图后分析它与函数 $y=\sin x$ 的图象之间的关系.

(1) 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

先将两个函数图象上的五个关键点的坐标进行对比：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

$x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

观察上表可知，对于同一个 y 值，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点的横坐标总是比 $y=\sin x$ 图象上对应点的横坐标小 $\frac{\pi}{3}$，所以只需将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位即可得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象(如图 3-24).

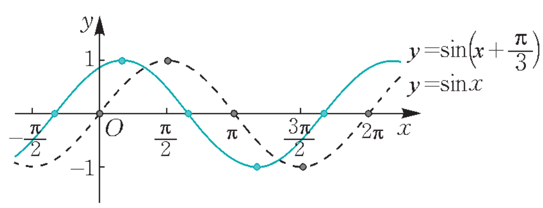


图 3-24

(2) 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

先将两个函数图象上的五个关键点的坐标进行对比：

$x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

观察上表可知，对于同一个 y 值，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上点的横坐标总是等于 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上对应点的横坐标的$\frac{1}{2}$倍. 所以只需把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)，就得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象(如图 3-25).

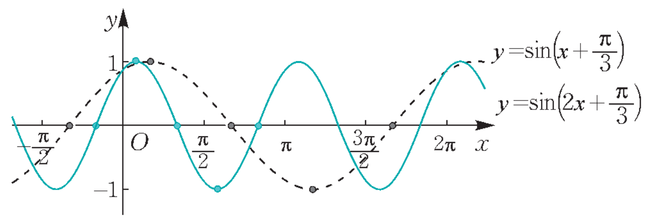


图 3-25

(3) 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$与 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象之间的关系.

先将两个函数图象上的五个关键点的坐标进行对比：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

观察上表可知，对于同一个 x 值，$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的纵坐标总是 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上对应点的纵坐标的 3 倍，所以只需将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的纵坐标都扩大为原来的 3 倍(横坐标不变)，就可得到$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象(如图 3-26).

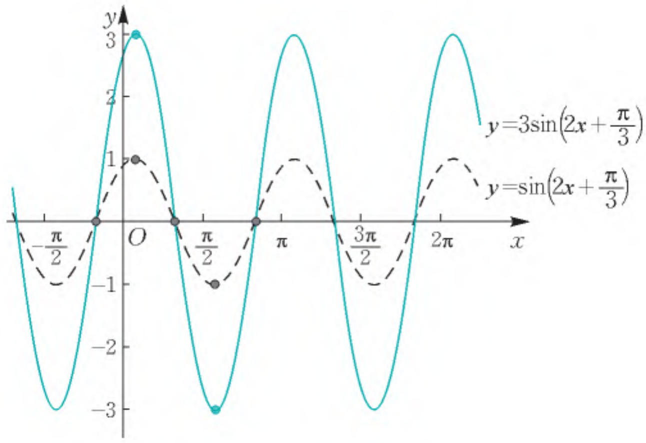


图 3-26

> 怎样由 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象？

综上所述，先将 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，而纵坐标不变，得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的纵坐标都扩大为原来的 3 倍，而横坐标不变，这时所得到的图形就是函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

> 在将 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的过程中，如果交换前两次变换的顺序，则过程有何不同？一般地，对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0, \omega>0)$，情况又如何呢？

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$的图象，可以通过下面的方法得到：先画出函数 $y=\sin x$ 的图象；再把正弦曲线向左(右)平移$|\varphi|$个单位长度，得到函数$y=\sin(x+\varphi)$的图象；然后使曲线上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象；最后把曲线上各点的纵坐标变为原来的 A 倍，横坐标不变．这时的曲线就是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

当用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in[0，+\infty)，A>0，\omega>0)$描述物理中振子的简谐振动时，$A$ 就表示这个振子离开平衡位置的最大距离，通常把它叫作这个振动的**振幅**(amplitude of vibration)；往复振动一次所需要的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，叫作这个振动的**周期**；单位时间内重复振动的次数 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，叫作这个振动的**频率**(frequency)；$\omega x+\varphi$ 叫作**相位**(phase)，$x=0$ 时的相位 φ 叫作**初相**(initial phase)．在另一些物理现象中，也有类似的术语及其具体含义.

例1 音叉因振动而产生声音，振动时其位移 y 是时间 t 的正弦型函数．若振动的振幅是 0.001，频率是 300 周/秒，初相是 0，求函数 y 的解析式．

解 这是一个简谐振动．设所求函数 y 的解析式形如

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)\ (A>0,\ \omega>0).$$

由已知条件知

（1）振幅 $A=0.001$；

（2）频率 $f=300$，则周期 $T=\dfrac{1}{300}$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=600\pi$；

（3）初相 $\varphi=0$.

故所求函数的解析式为

$$y=0.001\sin 600\pi t.$$

信息技术链接

A，ω，φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

请同学们运行 GeoGebra 并创建相应的滑动条，按照前面学过的方法依次作出参数 A，ω，φ 及函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象（如图 1），并进行下述实验，动态地研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质．

1．选中参数 A 后，鼠标放在滑动条 A 的黑色圆点上，按住左键并拖动圆点，观察 A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响．

2．选中参数 ω 后，鼠标放在滑动条 ω 的黑色圆点上，按住左键并拖动圆点，观察 ω 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响．

3．选中参数 φ 后，鼠标放在滑动条 φ 的黑色圆点上，按住左键并拖动圆点，观察 φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响．

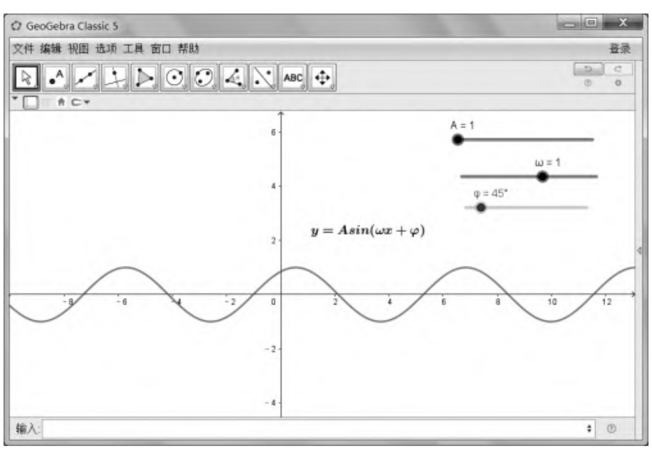


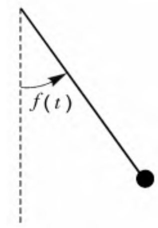
图 1

练习

1. 用“五点法”作函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的简图.

2. 指出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象通过怎样的变换而得到.

3. 如图所示，单摆与竖直位置所成的角 f(弧度)为时间 t(秒)的函数，其解析式为 $f(t)=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$，则



（第 3 题图）

（1）初相是多少弧度？

（2）频率是多少？

（3）经过多长时间单摆完成 5 次完整摆动？

习题 3.4

1. 函数 $y=\frac{1}{5}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的周期为________，振幅为________，频率为________，初相为________.

2. 若电流 I(单位：A)与时间 t(单位：s)的函数解析式为 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$，为了使 t 在任意一段$\frac{1}{100}$ s 的时间内电流 I 总能取得最小值和最大值，那么正整数 ω 的最小值是多少？

3. 画出函数 $y=5\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\pi\right)$($x\in\mathbf{R}$)的图象，并说明它是由 $y=\sin x$ 的图象通过怎样的变换而得到的.

4. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$($A>0$，$\omega>0$)图象上一个最高点的坐标是$(2,\sqrt{3})$，由这个最高点到相邻的最低点，图象交 x 轴于点$(6,0)$，求这个函数的解析式.

5. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$($A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)的图象的一个最高点为$\left(\frac{\pi}{6},3\right)$，要使函数的解析式为 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，还应给出一个什么条件？

3.5 三角函数模型的简单应用

利用三角函数的性质，可以对实际生活中的某些周期现象作出进一步的研究．下面我们通过实例来说明．

例1 弹簧下挂着的小球上下振动．开始时小球在平衡位置上方 2 cm 处(如图 3-27)，小球的最高点和最低点与平衡位置的距离都是 4 cm，每经过 π s 小球往复振动一次．若小球离开平衡位置的位移 y 与振动的时间 x 满足关系式

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\quad\left(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right).$$

求此函数的表达式．

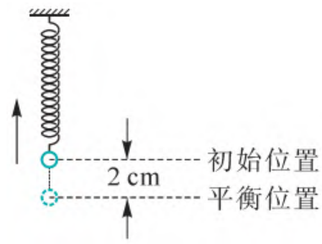


图 3-27

解 由题设条件知 $A=4$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

又当 $x=0$ 时 $y=2$，将它们代入 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 得

$$2=4\sin(2\times0+\varphi),$$

即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

于是我们得到此函数的表达式为

$$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

例2 当我们所处的北半球处于冬季时，新西兰的惠灵顿市恰好是盛夏，所以北半球的人们愿意冬天去那里旅游．为了发展旅游业，旅游机构想为惠灵顿市的气温变化作出一个数学模型，以确定最佳旅游时间．为此，他们收集到如下一份惠灵顿机场的月平均气温情况的统计表．

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度/℃	17.8	17.9	16.6	14.4	12.0	10.2	9.5	9.9	11.3	12.9	14.5	16.4

现在需要解答如下两个问题：

(1) 依据这个统计表为惠灵顿市的气温变化作出一个函数

模型；

(2) 自然气温不低于 14℃时惠灵顿市的气候最适宜于旅游，依据上述函数模型确定惠灵顿市的最佳旅游时间.

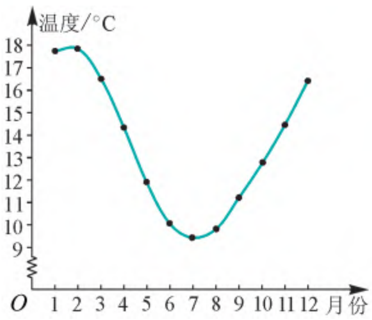


图 3-28

解 (1) 我们以月份为横坐标，温度为纵坐标作出统计表的散点图，然后用光滑曲线连接这些点，得到如图 3-28所示的曲线.

观察图象可知：大约在二月份，即 $x=2$ 时温度达到最高，于是我们可以考虑用函数

$$y=A\cos[\omega(x-2)]+B$$

来描述惠灵顿市的气温变化，这里 $A>0$.

由于气温变化以 12 个月为周期，所以由 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，得 $\omega=\frac{\pi}{6}$，于是有

$$y=A\cos\frac{(x-2)\pi}{6}+B.$$

由余弦函数 $y=\cos t$ 的最大值为 1，最小值为 -1 知道，$y=A\cos\frac{(x-2)\pi}{6}+B$ 的最大值是 $A+B$，最小值是 $-A+B$.

从表中看出，最大值是 17.9，最小值是 9.5. 所以有

$$2A=17.9-9.5=8.4,$$
$$2B=17.9+9.5=27.4,$$

即 $$A=4.2,\ B=13.7.$$

这样我们得到惠灵顿市的一个气温变化模型

$$y=4.2\cos\frac{(x-2)\pi}{6}+13.7.$$

从余弦函数的性质来看，最小值应在 $\frac{(x-2)\pi}{6}=\pi$，即 $x=8$（八月）时达到，但是从表上看却在 $x=7$ 时达到. 这里出现一点偏差是很自然的，因为决定气温的不只有太阳光照射这一个因素，还有诸如洋流、地形等因素.

(2) 如图 3-29，作出函数 $y=4.2\cos\frac{(x-2)\pi}{6}+13.7$ 的图象. 利用计算器可算得直线 $y=14$ 与该图象交点的横坐标为 $x_1\approx4.8$，$x_2\approx11.1$. 这说明，在一年的十一月初到次年的四月末，惠灵顿市的气温最为宜人，是最佳旅游时间.

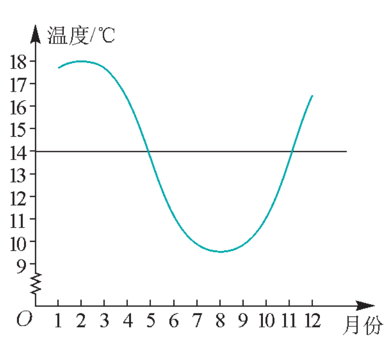


图 3-29

例3 某海边城市临海建有一个小型货港，由于受潮汐影响，货港一天中各时刻的水位高低相差很大，货轮由于吨位大小不同，吃水深度(船底与水平面的距离)各不一样，因此船舶进港装卸货物要根据水位高低合理安排.

下面是该港口在某季节每天的相应时刻 x 与水深 y(单位:m)的关系表：

x	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00
y	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0

(1) 选用一个函数来近似描述这个港口的水深 y 与时刻 x 的函数关系；

(2) 一般情况下，船舶航行时，船底离海底的距离为 5 m 或 5 m 以上时认为是安全的(船舶停靠时，船底只需不碰海底即可)，某船吃水深度为 6.5 m. 如果该船想在同一天内安全进出港，它至多能在港内停留多长时间(忽略进出港所需的时间)?

解 (1) 以 x 为横坐标，y 为纵坐标，作出其散点图(如图 3-30).

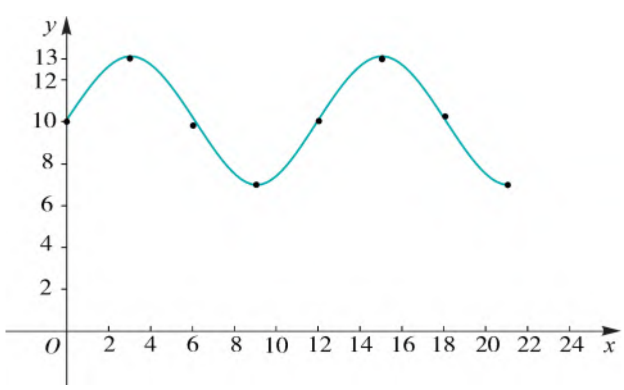


图 3-30

观察可知，y 与 x 的函数关系可以看作是

$$y=A\sin\omega x+h,$$

且 $T=12$，$A=3$，$h=10$，从而 $\omega=\frac{\pi}{6}$. 因此 y 与 x 的函数关系为

$$y=3\sin\frac{\pi}{6}x+10.$$

(2) 由题意，该船进出港时，水深不应小于

$$5+6.5=11.5(\text{m}).$$

令 $3\sin\dfrac{\pi}{6}x+10\geqslant 11.5$，得 $\sin\dfrac{\pi}{6}x\geqslant\dfrac{1}{2}$. 所以

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

所以
$$12k+1\leqslant x\leqslant 12k+5\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

在同一天内，$k=0$ 或 1，所以

$$1\leqslant x\leqslant 5 \text{ 或 } 13\leqslant x\leqslant 17.$$

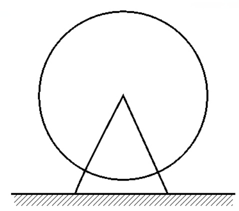
所以，该船最早能在 1:00 进港，最晚在 17:00 出港，在港口内最多停留 16 小时.

习题 3.5

1. 有一游乐大风车轮如图所示：游乐大风车轮最高点离地面 13.7 m，直径为 12.2 m，大风车轮以顺时针方向每分钟匀速转动 2 周. 某人登上大风车轮，10 秒后到达最高点.

(1) 试选用一个函数来近似地描述该人离地面的高度 H(单位：m)与登上大风车轮后的时间 t(单位：s)的关系 $f(t)$；

(2) 当登上大风车轮多少秒后，该人到达大风车轮最低点？



(第 1 题图)

2. 下表是某城市 1986—2015 年月平均气温(单位：℃)的情况，请根据这些数据找出一个描述该城市一年气温变化的函数模型.

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温	−5.9	−3.3	2.2	9.3	15.1	20.3	22.8	22.2	18.2	11.9	4.3	−2.4

3. 请以小组为单位，搜集国内一个城市气温变化的数据，为该城市作一个气温预报模型.

3.6 三角恒等变换

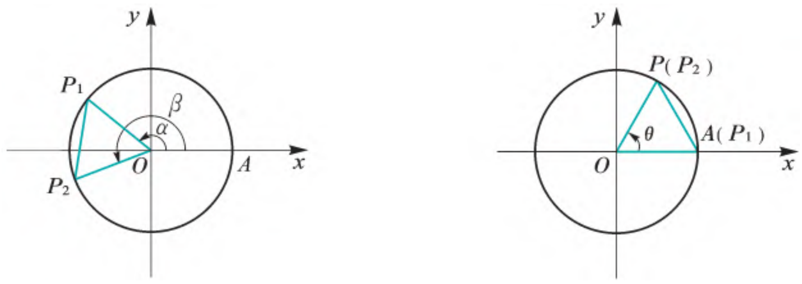
3.6.1 两角和与差的正弦、余弦、正切

为了建立两角和与差的正弦、余弦和正切公式，我们先从推导两角差的余弦公式入手.

如图 3-31(1)，P_1，P_2 分别为角 α，β 的终边与单位圆的交

点，故

$$P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ P_2(\cos\beta,\ \sin\beta).$$



(1)　　　　(2)

图 3-31

若将$\triangle P_1OP_2$绕O点顺时针旋转，使点P_1与点$A(1,\ 0)$重合，点P_2与点$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$重合，如图 3-31(2)所示.

则　$\beta=\alpha+\theta+2k\pi$ 或 $\alpha=\beta+\theta+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$，

故　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta$，

又$|PA|=|P_1P_2|$，根据两点间距离公式得

$$\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2},$$

化简得　$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，

即　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\quad(C_{\alpha-\beta})$　①

我们将①式称为两角差的余弦公式.

在直角坐标系中，已知$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则根据勾股定理可得A，B两点间的距离公式为$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

此处①式简记为$C_{\alpha-\beta}$，后面还有类似的简记符号.

例 1　利用特殊角的三角函数值求值：

(1) $\cos 15^\circ$；

(2) $\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\cos 55^\circ$.

解　(1)

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\&=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

(2)因为$\cos 10^\circ=\sin 80^\circ$，$\cos 55^\circ=\sin 35^\circ$，所以

$$\begin{aligned}&\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\cos 55^\circ\\=&\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\sin 80^\circ\sin 35^\circ\\=&\cos(80^\circ-35^\circ)\\=&\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

例2 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，且 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

解 因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}.$$

又 $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

故有

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\left(-\frac{5}{13}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)\\&=\frac{25-144}{169}=-\frac{119}{169}.\end{aligned}$$

练习

1. $\sin 14^\circ\cos 16^\circ+\sin 76^\circ\cos 74^\circ$的值是(　　).

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D)$-\frac{1}{2}$

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$，求 $\cos(\alpha-30^\circ)$的值.

因为公式 $C_{\alpha-\beta}$中的 α，β 是任意的，所以 α，β 可以换成其他任意一个角. 据此我们只需将其中的 β 换成 $-\beta$，可得

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\qquad(C_{\alpha+\beta})\qquad ②$$

对于 $\sin(\alpha\pm\beta)$，我们可以根据前面介绍的$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的诱导公式进行推导. 因为

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right].$$

将 $C_{\alpha-\beta}$中的 α 换成$\frac{\pi}{2}-\alpha$，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad (S_{\alpha+\beta})$ ③

能否用②式推导出③式？

将③式中的 β 换成 $-\beta$，又可得到

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

即 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (S_{\alpha-\beta})$ ④

我们将②式称为两角和的余弦公式. ③，④两式分别称为两角和与两角差的正弦公式.

例3 化简：

（1）$\sin 105^\circ$；

（2）$\cos 285^\circ\cos 15^\circ+\sin 255^\circ\sin 15^\circ$；

（3）$\sin 7^\circ\cos 17^\circ-\sin 83^\circ\cos 287^\circ$.

解 （1）
$$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$$
$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

（2）
$$\cos 285^\circ\cos 15^\circ+\sin 255^\circ\sin 15^\circ$$
$$=\cos(360^\circ-75^\circ)\cos 15^\circ+\sin(180^\circ+75^\circ)\sin 15^\circ$$
$$=\cos 75^\circ\cos 15^\circ-\sin 75^\circ\sin 15^\circ$$
$$=\cos(75^\circ+15^\circ)=\cos 90^\circ=0.$$

（3）
$$\sin 7^\circ\cos 17^\circ-\sin 83^\circ\cos 287^\circ$$
$$=\sin 7^\circ\cos 17^\circ-\cos 7^\circ\cos(360^\circ-73^\circ)$$
$$=\sin 7^\circ\cos 17^\circ-\cos 7^\circ\cos 73^\circ$$
$$=\sin 7^\circ\cos 17^\circ-\cos 7^\circ\sin 17^\circ$$
$$=\sin(7^\circ-17^\circ)=\sin(-10^\circ)=-\sin 10^\circ.$$

例4 将下列各式化成 $A\sin(\alpha+\theta)$ 的形式：

（1）$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$；

（2）$\sin\alpha-\cos\alpha$.

解 （1）**方法 1** 因为 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$
$$=\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha$$
$$=\sin(30^\circ+\alpha).$$

方法 2 因为 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha$$
$$=\cos(60^\circ-\alpha)$$
$$=\sin[90^\circ-(60^\circ-\alpha)]$$
$$=\sin(30^\circ+\alpha).$$

（2） $\sin\alpha-\cos\alpha$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right),$$
$$=\sqrt{2}(\sin\alpha\cdot\cos 45^\circ-\cos\alpha\cdot\sin 45^\circ)$$
$$=\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ).$$

按照例 4 的方法，你能将 $a\sin x+b\cos x(ab\neq 0)$ 化为 $A\sin(x+\theta)$ 的形式吗？

练习

1. 求 $\sin 75^\circ\cos 75^\circ$ 的值.

2. 求证：

（1） $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$； （2） $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

3. 化简：

（1） $\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\varphi\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\varphi\right)$； （2） $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta+\sin(\beta-\alpha)\sin\beta$.

由公式 $S_{\alpha+\beta}$ 和公式 $C_{\alpha+\beta}$ 可知

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

将分子和分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.\quad(T_{\alpha+\beta})\qquad ⑤$$

在⑤式中以 $-\beta$ 换 β，则有

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\quad(T_{\alpha-\beta})\qquad ⑥$$

我们把⑤式称为两角和的正切公式，⑥式称为两角差的正

切公式.

例5 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

（1）求 $\tan(\alpha-\beta)$的值；

（2）求 $\alpha+\beta$的值.

解 （1）利用公式 $T_{\alpha-\beta}$，有

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+2}{1+\frac{1}{3}\times(-2)}=7.$$

（2）由公式 $T_{\alpha+\beta}$知

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+(-2)}{1-\frac{1}{3}\times(-2)}=-1.\ (*)$$

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$，结合(*)式得

$$\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi.$$

例6 求值：

（1）$\tan 15^\circ$；

（2）$\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$.

解 （1）

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ&=\tan(45^\circ-30^\circ)\\&=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\\&=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}&=\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 75^\circ}\\&=\tan(75^\circ+45^\circ)\\&=\tan 120^\circ\\&=\tan(180^\circ-60^\circ)\\&=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 7 在△ABC中，求证：

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

证明 因为 $A+B=\pi-C$，所以

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C,$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(\tan A+\tan B)+\tan C\\
&=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)+\tan C\\
&=-\tan C(1-\tan A\tan B)+\tan C\\
&=-\tan C+\tan A\tan B\tan C+\tan C\\
&=\tan A\tan B\tan C=\text{右边},
\end{aligned}$$

所以 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

> 若 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)，你能否推导出 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$？

练习

1. 求值：

 (1) $\tan 15^\circ+\tan 75^\circ$； (2) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$.

2. 若 A,B 为锐角三角形的两个锐角，则 $\tan A\tan B$ 的值（ ）.

 (A) 不大于 1 (B) 小于 1 (C) 等于 1 (D) 大于 1

习题 3.6.1

1. 若 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求 $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$ 的值.

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值，并求 $\alpha-\beta$ 的值.

3. 已知 $\cos(\alpha+30^\circ)=\dfrac{5}{13}$，$0^\circ<\alpha<60^\circ$，求 $\cos\alpha$ 的值.（提示：$\alpha=(\alpha+30^\circ)-30^\circ$.）

4. 已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$，$\alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\sin 2\beta$ 的值.（提示：$2\alpha=(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$.）

5. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+\tan\alpha)}$ 的值.

6. (1) 已知 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$，求 $(1+\tan A)(1+\tan B)$ 的值；

 (2) 求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdot\cdots\cdot(1+\tan 44^\circ)$ 的值.

3.6.2 二倍角的正弦、余弦、正切

在公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$中，令 $\alpha=\beta$ 可以得到

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \quad (S_{2\alpha}) \quad ①$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \quad (C_{2\alpha}) \quad ②$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \quad (T_{2\alpha}) \quad ③$$

上面这些公式我们称之为三角函数的**二倍角公式**.

在实际应用中，可以对三角公式进行变形，以适应不同的要求. 如对于公式②，若利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，还可以变为如下形式：

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$
$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

下面我们通过例子进一步理解和应用二倍角公式.

例1 已知 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ 及 $\tan 2\theta$ 的值.

解 因为 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，所以 θ 为第二象限角或第三象限角.

当 θ 为第二象限角时，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4},$$

所以

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25},$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\frac{24}{7}，\text{或 } \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{24}{7}.$$

当 θ 为第三象限角时，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，同样可得

$$\sin 2\theta=\frac{24}{25}，\ \cos 2\theta=\frac{7}{25}，\ \tan 2\theta=\frac{24}{7}.$$

例2 求值：

(1) $\sin 15^\circ \sin 255^\circ$； (2) $\dfrac{1-\tan^2 75^\circ}{1+\tan^2 75^\circ}$.

解 (1) $\sin 15^\circ \sin 255^\circ=\sin 15^\circ \sin(180^\circ+75^\circ)$

$=-\sin 15^\circ \sin 75^\circ$

$=-\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

$=-\dfrac{1}{2}(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)$

$=-\dfrac{1}{2}\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{4}$.

(2) $\dfrac{1-\tan^2 75^\circ}{1+\tan^2 75^\circ}=\dfrac{\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ}{\cos^2 75^\circ+\sin^2 75^\circ}$

$=\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ=\cos 150^\circ$

$=-\cos 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

练习

1. 利用二倍角公式计算下列各式的值：

(1) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$； (2) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$；

(3) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$； (4) $\dfrac{\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$.

2. 求 $8\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{16}$的值.

3. 求证：$(1+\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta-1)=\sin 2\theta$.

例3 已知$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求证：$\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}=-\cos\alpha$.

证明 将 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 代入，得

$\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha-\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha-\dfrac{1}{2}(1-\cos^2\alpha)}$

$=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|$

$=-\cos\alpha$.

若将 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 或 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 代入，则过程是否更简单？

例4 在半径为 R 的圆内作一个内接矩形，当矩形的长和宽各为多少时，它的面积最大?

解 如图 3-32 所示，矩形 $ABCD$ 为圆内接矩形，连接 AC，则 $AC=2R$. 令 $\angle CAB=\theta$，则有 $AB=AC\cdot\cos\theta$，$BC=AC\cdot\sin\theta$. 所以矩形 $ABCD$ 的面积为

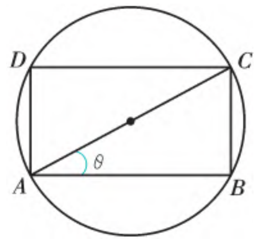


图 3-32

$$\begin{aligned}S&=AB\cdot BC\\&=2R\cos\theta\cdot 2R\sin\theta\\&=4R^2\sin\theta\cos\theta\\&=2R^2\sin 2\theta\leqslant 2R^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $\theta=45^\circ$，即内接矩形为正方形时，S 最大，这时长和宽均为 $\sqrt{2}R$.

例5 试用 $\tan\alpha$ 表示 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$.

解法 1 令 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m$，则

$$\begin{cases}\sin\alpha=m\cos\alpha,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{m^2}{1+m^2},\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+m^2}.\end{cases}$$

所以 $$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1-m^2}{1+m^2}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

又已知 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，所以

$$\sin 2\alpha=\tan 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

解法 2 $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

练习

1. 求$\dfrac{1}{\sin 50^\circ}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}$的值.

2. 若$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，求$\sin 2\theta$的值.

习题 3.6.2

1. 设$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求$\sin 2\alpha$的值.

2. 已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，并且$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$. 求$\tan 2(\alpha-\beta)$的值.

3. 求证：

（1）$\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{2}{\tan 2\theta}=\tan\theta$；

（2）$\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$.

4. （1）已知等腰三角形一个底角的正弦值等于$\dfrac{5}{13}$，求这个三角形的顶角的正弦、余弦和正切值；

（2）直角三角形的面积为 12，一个锐角为β，求它的外接圆面积；当β等于多少度时，外接圆的面积最小.

5. 已知$x+y=3-\cos 4\theta$，$x-y=4\sin 2\theta$，求证：$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$.

3.6.3 简单的三角恒等变换

三角函数式的求值、化简和证明的过程，实际上就是对三角函数式恒等变换的过程.

例 1 利用二倍角的余弦公式

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

导出用$\cos\alpha$表示$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$的公式.

解 在$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$中，用$\dfrac{\alpha}{2}$代替$\alpha$，则有

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

变形易得

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\qquad ①$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.\qquad ②$$

由②÷①得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\qquad ③$$

其中①，②，③中的“±”号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限确定.

我们称①，②，③为“半角公式”，分别简记为$C_{\frac{\alpha}{2}}$，$S_{\frac{\alpha}{2}}$，$T_{\frac{\alpha}{2}}$. “半角”是相对的，如α也是2α的半角.

例2 （1）在前面介绍的三角公式中，哪些含有$\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$？请利用这些公式将积$\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$化成三角函数的和差形式；

（2）将(1)中的积换成$\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$，请回答与(1)相同的问题.

解 （1）两角和与差的正弦公式中含有积$\sin\alpha\cos\beta$与$\cos\alpha\sin\beta$，即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\qquad ④$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\qquad ⑤$$

由④+⑤得

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),$$

即

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\qquad ⑥$$

同理

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].\qquad ⑦$$

这样，乘积$\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$就转化成$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$的和差形式了.

（2）两角和与差的余弦公式中含有$\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$，即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\qquad ⑧$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\qquad ⑨$$

由⑧，⑨容易得到

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\qquad ⑩$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].\qquad ⑪$$

这样，乘积$\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$就转化成$\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$的和差形式了.

我们称⑥，⑦，⑩，⑪为三角函数的“积化和差”公式.

例3 求证：

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}, \qquad ⑫$$

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}, \qquad ⑬$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}, \qquad ⑭$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}. \qquad ⑮$$

我们称⑫，⑬，⑭，⑮为三角函数的“和差化积”公式.

证明 在⑥式中，令$\begin{cases}\alpha+\beta=\theta,\\ \alpha-\beta=\varphi,\end{cases}$则

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\theta+\varphi}{2},\\ \beta=\dfrac{\theta-\varphi}{2},\end{cases}$$

这样由⑥可得 $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$.

同理可证⑬，⑭，⑮成立.

例4 在产生三相交变电流的三个线圈中，电流与时间的函数关系分别是

$$I_A=I\sin\omega t,\quad I_B=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right),\quad I_C=I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right).$$

I_A，I_B，I_C 是有相同频率的三个正弦电流.

（1）求证 I_A+I_B 是与 I_A，I_B 同频率的正弦电流；

（2）求证 $I_A+I_B+I_C=0$.

证明 （1）因为

$$I_A+I_B=I\sin\omega t+I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=I\sin\omega t+I\sin\omega t\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+I\cos\omega t\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$=I\sin\omega t+I\sin\omega t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+I\cos\omega t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot I\sin\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot I\cos\omega t$$

$$=I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right),$$

所以 I_A+I_B 仍是与 I_A，I_B 频率相同的正弦电流.

(2) $I_A+I_B+I_C=(I_A+I_B)+I_C$

$$=I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+I\sin\left[\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]$$

$$=I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)-I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=0.$$

练习

1. 求证：$\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

2. 如果将两个最大电流均为 I(单位：A)，频率均为 100π(单位：rad/s)的正弦电流进行叠加，则叠加后的正弦电流的频率是多少？电流的最大值是多少？

习题 3.6.3

1. 若 $\cos(x-y)=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos x(\cos x-\cos y)+\sin x(\sin x-\sin y)$的值.

2. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}(1+m)$，$\sqrt{3}(\tan\alpha\tan\beta+m)+\tan\beta=0$，$\alpha$，$\beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{a-3}{a+5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4-2a}{a+5}$，其中 α 为第二象限角，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的值.

4. 求证：$\dfrac{(\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)}{\sin 2x}=\tan\dfrac{x}{2}$.

5. 已知 θ 是第三象限角，且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

数学也需要实验

你知道美妙的音乐是怎样产生的吗？其实我们所听到的一切美妙的音乐都是由许许多多的简谐振动 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 合成的. 乐音的构成表明，不同频率的简谐振动可以合成多种多样的振动. 这一事实的重要性早在 18 世纪就为当时的数学家和物理学家认识到了. 由简谐振动合成复杂的振动在物理上、工程上都有实际的应用价值. 例如在现代通信技术中，图 1 所示的振动是十分重要的，我们称它为方波.

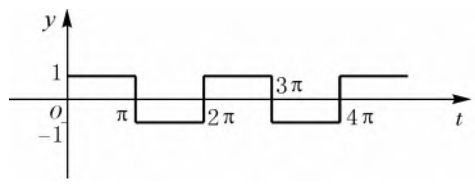


图 1

怎样生成这种方波呢？早在 19 世纪初，人们就发现了它是由一些简谐振动十分有规律地合成的，可以用函数表示为：

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right). \qquad ①$$

这里的“…”表示再往下是

$$\frac{1}{7}\sin 7t,\ \frac{1}{9}\sin 9t,\cdots,\ \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t,\ \cdots,$$

如果只有有限多个简谐振动，作加法相对容易些. 现在①中有无穷多个 $\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t$，$k\in\mathbf{N}$，我们试着加三个、四个……就会发现，加的项数越多，结果就越接近方波. 用数学术语来说，其“极限”是方波. 极限理论虽然十分重要，认识它却比较困难. 但是像①这样的情况在实际应用中十分常见，因此，我们设想能否用实验方法来验证这个式子.

下面我们用 GeoGebra 来画出

$$f_1(t)=\frac{4}{\pi}\sin t,$$

$$f_3(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t\right),$$

$$f_5(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t\right)$$

的图象，$f_1(t)$，$f_3(t)$，$f_5(t)$的图象分别如图 2、图 3、图 4 所示.

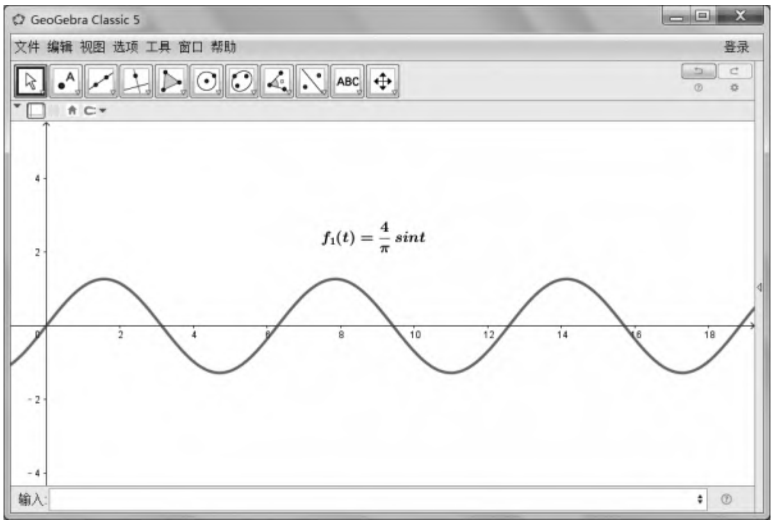


图 2

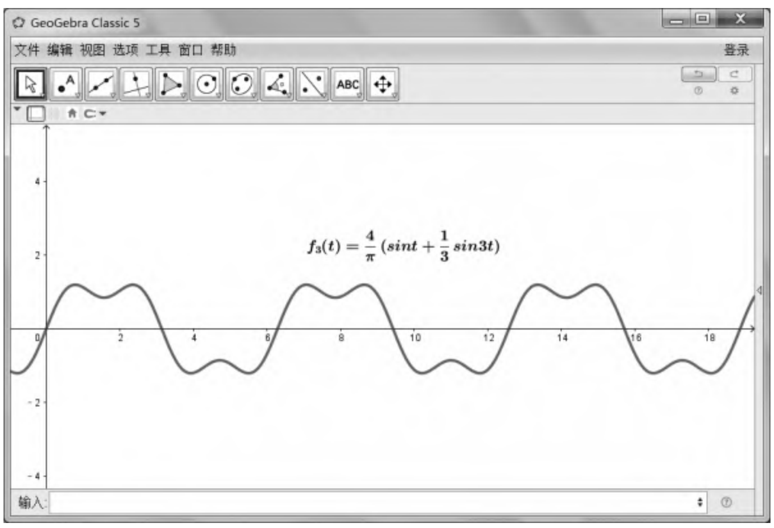


图 3

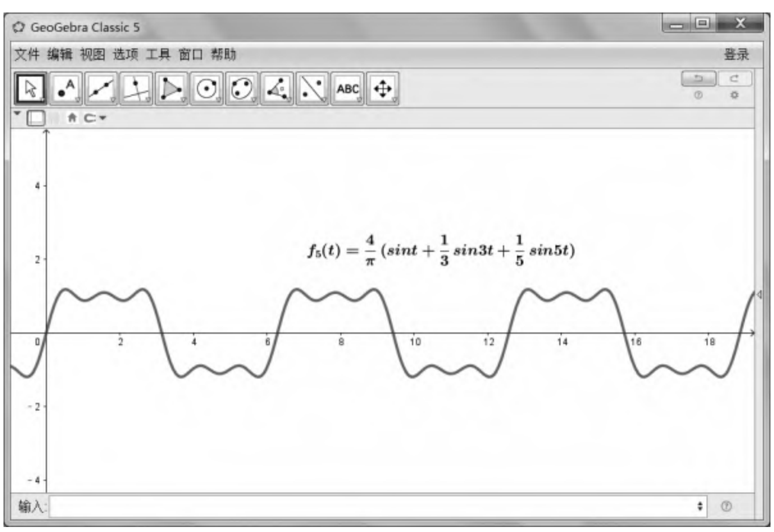


图 4

同学们可以看到，$f_5(t)$的图象比 $f_3(t)$的图象更接近于图 1. 利用 GeoGebra 作图，我们可以发现，随着 n 的增大，

$$f_{2n+1}(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)t\right]$$

的图象越来越接近图 1.

这就是一种数学实验，或称数字实验. 数学实验是新时代重要的科学研究方法，数学的发展会越来越多地需要数学实验.

复习题

A 组

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-2\pi\leqslant\beta<4\pi$ 的元素 β 写出来.

(1) $\frac{\pi}{3}$；　(2) $-\frac{5\pi}{6}$；　(3) $\frac{7\pi}{6}$.

2. 已知 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角？

3. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，求下列各式的值：

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$；

(2) $\tan(\alpha-7\pi)$.

4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求下列各式的值：

(1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)$；

(2) $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=a$，求下列各式的值(用 a 表示)：

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$；

(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

6. 求证：

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$.

7. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=3-6\cos x$；

(2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

8. 已知函数 $y=a-b\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)(b>0)$的最大值是 5，最小值是 1，求函数 $y=5-2b\sin\frac{x}{a}$的最大值.

9. 写出函数 $y=\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的振幅、周期、初相，并说明如何由正弦曲线得出它的图象.

10. x 取什么值时，$\sin x<\cos x$？x 取什么值时，$\sin x>\cos x$？

11. 化简：$2\sqrt{1-\sin 8}+\sqrt{2\cos 8+2}$.

12. 求函数 $f(x)=\cos^2 x+\cos x\ \sin x$ 的值域.

13. 求证：$3+\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha=8\sin^4\alpha$.

14. 求$\dfrac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\ \sin 8^\circ}$的值.

15. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

16. 如图，弹簧下挂着的小球做上下振动，时间 t(单位：s)与小球相对于平衡位置(即静止时的位置)的位移 h(单位：cm)之间的函数解析式是

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,\ +\infty).$$

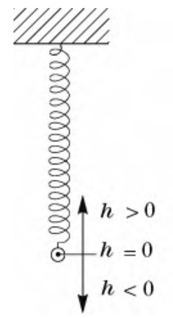
以 t 为横坐标，h 为纵坐标，画出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图，并且回答下列问题：

(1) 小球开始振动(即 $t=0$)时的位置在哪里？

(2) 小球最高、最低点与平衡位置的距离分别是多少？

(3) 经过多长时间小球往复振动一次(即周期是多少)？

(4) 小球 1 s 能往复振动多少次？



(第 16 题图)

B 组

1. 已知一个扇形的圆心角是 2，且圆心角所对的弦长是 2，这个圆心角所对的弧长是多少？

2. 函数 $y=f(x)$满足下列条件：

①在定义域内的一个区间上是增函数，在它的补集区间上是减函数(定义域就是全集 I)；

②在定义域内有最大值与最小值.

请写出两个符合上述条件的三角函数，并指出单调区间，求出最大值与最小值.

3. 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$；

(2) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$.

4. 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

5. (1) 比较下列各组中两个值的大小：

①$\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$和 $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；

②$\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$和 $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$；

③$\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$和 $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$；

④$\sin\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$和 $\cos\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

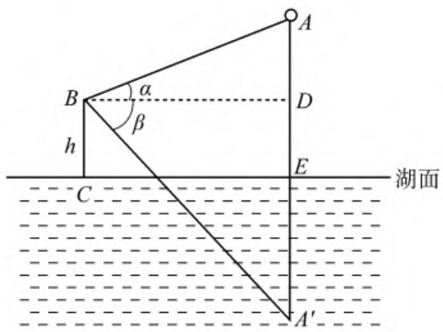
(2) 在第(1)题的基础上，猜测当 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin(\cos\alpha)$和 $\cos(\sin\alpha)$的大小关系，并加以证明.

6. 求函数 $y=\log_{\frac{1}{\pi}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调区间.

7. 设 A，B 为锐角，且 $\cos 2B=3\sin^2 A$，$\sin 2B=\frac{3}{2}\sin 2A$，求证 $\cos(A+2B)=0$，并由此求 $A+2B$ 的值.

8. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\ \pi)$，请用多种方法求 $\tan\theta$ 的值.

9. 在湖面上高 h 处，测得空中一气球的仰角为 α，而湖中气球的影像的俯角为 β. 试证明：气球离湖面的高度为$\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$.（不考虑水的折射）



（第 9 题图）

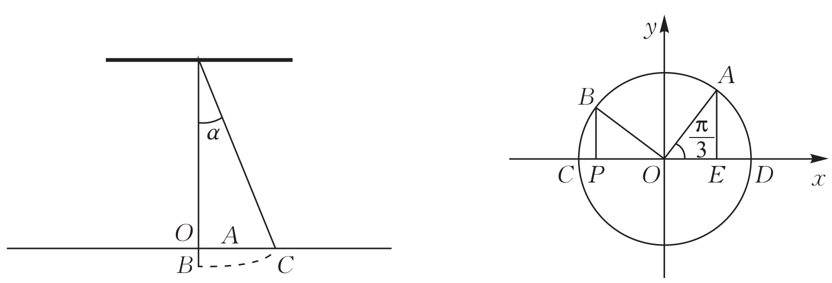
思考与实践

1. 一根长为 l(单位:cm)的线，一端固定，另一端悬挂一个小球，小球摆动时，离开平衡位置的位移 s(单位：cm)与时间 t(单位：s)的函数关系是

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty),$$

其中 g 表示重力加速度，那么这个函数关系式是怎样推导出来的呢？其物理背景又如何呢？

这个问题的物理背景实际上是一个单摆振动的位移问题. 我们先看一个单摆模型：如图(1)所示的是一个单摆模型，其中摆线为胡琴丝弦，且 $l>100$，小球为直径小于 2 cm 的钢球，摆球在竖直平面上来回摆动，摆角 $\alpha<5°$. 当摆球从平衡位置摆到最右边时，其位移 $A=l\cdot\alpha$，又 $\alpha<5°$，故 $\alpha\approx\sin\alpha$(α 的单位为弧度时)，所以 $A\approx l\cdot\sin\alpha=OC$，故摆球的往复运动也可以近似地看作一段线段上的往复运动.



(1)　　(2)

（第 1 题图）

如图(2)，$\angle AOx=\frac{\pi}{3}$，过点 A 向 x 轴作垂线，垂足为点 E，则$\angle AOx$ 的余弦线为 OE，所以，若圆周上任意一点 B 从点 A 出发逆时针方向作圆周运动一周时，则它在 x 轴上的射影 P 也随之从

点 E 出发在线段 CD 上完成一次全振动 $E\to O\to C\to O\to E\to D\to E$，也就是说单摆小球在线段 CD 上的往复运动可以与点 B 在以平衡位置 O 为圆心，以 OC 长为半径的圆周上的运动相对应. 假设 $t=0$ 时，小球在点 E 处，圆周的半径为 3，那么你能推导出点 P 离开平衡位置的位移吗？请试一试吧！

2. 根据年鉴或其他参考资料，找出你们所关注的城市过去一年不同日期的日出(或日落)时间，并将这些数据分别制成表.

(1) 在同一坐标系中，以日期为 x 轴，日出(或日落)的时间为 y 轴，分别画出散点图，并用光滑曲线去拟合这些数据，然后找出一个适当的函数模型；

(2) 根据日出(或日落)的函数模型，找出一个刻画不同日期白昼的长短变化的函数模型；

(3) 一个城市所在的经度和纬度是如何影响日出(或日落)时间的？搜集其他相关数据或提供相关理论证据支持你的结论.

第4章 函数的应用

天眼

函数概念的形成来自于我们对客观世界中变化现象的深刻认识．研究函数的目的之一，就是希望以它为工具去刻画变化规律，并能用它解决一些与我们生活密切相关的问题．例如：有些实际问题可归结为求某个方程的根，还有一些实际问题的解决依赖于我们对方程根的分布情况的分析．然而，能用求根公式求解的方程只有少数几类，大量的方程无法用初等数学的知识求根．当我们用函数的观点去认识方程时，就能得到判断方程根的分布、求方程的近似解的一些重要方法，从而达到解决实际问题的目的．

在本章，我们将学会用函数思想去解决方程根的分布问题，掌握一种求方程的近似解的基本方法——二分法．初步领略用函数思想、数学建模思想去解决实际问题的方法和策略，加深对函数的重要性的认识和应用意识．我们还将接触一些生活中的数学模型，主要涉及指数函数、对数函数和幂函数等初等函数的应用，从而扩展视野，增强认识世界的能力．

4.1 二分法与求方程的近似解

4.1.1 函数的零点

我们知道，在一些实际问题中常遇到解方程问题，如解方程 $x^2-3x+1=0$，$3x+2=0$ 等．对于一般的一元方程，我们可记为

$$f(x)=0. \qquad ①$$

求方程①的根实际上就是找到这样的实数 x_0，使得 $f(x_0)=0$.

用函数的观点考察方程①，令 $y=f(x)$，则求方程①的根，就是找到使函数值为零的自变量 x 的值.

为此，我们先引入函数的零点的概念.

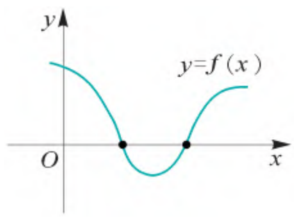


图 4-1

对于函数 $y=f(x)(x\in A)$，若 $x_0\in A$，且 $f(x_0)=0$，则称 x_0 为函数 $y=f(x)(x\in A)$的一个**零点**(zero point).

反之，若 x_0 是函数 $y=f(x)(x\in A)$的零点，则 x_0 是方程 $f(x)=0$ 在集合 A 中的一个根．又由函数的图象可知，函数的零点实际上就是函数的图象与 x 轴的交点的横坐标，如图 4-1 所示.

这样，求方程的根可以转化为求对应函数的零点，也就是求函数的图象与 x 轴的交点的横坐标．这种转化很重要，它为我们讨论方程的解的分布、求方程的近似解等问题开辟了道路.

例如函数 $f(t)=-3t^2+12t+10$ 的零点就是函数 $f(t)=-3t^2+12t+10$ 的图象与横轴交点的横坐标，也就是方程 $-3t^2+12t+10=0$ 的两根

$$t_1=2-\frac{\sqrt{66}}{3}\approx-0.70\,801,$$

$$t_2=2+\frac{\sqrt{66}}{3}\approx4.70\,801.$$

零点附近左右的函数值有时是异号的．例如，函数 $f(t)=-3t^2+12t+10$ 的零点 $t_1=2-\frac{\sqrt{66}}{3}$附近，$f(-1)=-5<0$，$f(0)=10>0$；$t_2=2+\frac{\sqrt{66}}{3}$附近，$f(4)=10>0$，$f(5)=-5<$

0，这样的零点 t_1，t_2 叫作变号零点.

零点附近左右的函数值有时是不变号的. 例如，函数 $f(x)=x^2-2x+1$ 的零点 1 附近，$f(0)=1>0$，$f(2)=1>0$，且对零点 1 附近的所有 x 均有 $f(x)\geqslant 0$，这样的零点 1 叫作不变号零点.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的图象是 $[a,\ b]$ 上的一条连续不断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内至少有一个零点，即存在 $c\in(a,\ b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

这个定理称为**零点存在性定理**. 它通过讨论函数在区间两端点处的函数值的正负，来判定函数在此区间上零点存在的可能性. 当然，此定理中的条件只是零点存在的一个充分条件，不是必要条件.

例1 求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点个数.

解 因为 $f(1)=-4<0$，$f(3)=\ln 3>0$，由零点存在性定理可得 $f(x)$ 在 $(1,\ 3)$ 内至少有一个零点，又 $f(x)$ 在定义域 $(0,\ +\infty)$ 上是增函数，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点.

例2 已知关于 x 的方程 $x^2-\frac{3}{2}x-k=0$ 在 $(-1,\ 1)$ 上有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

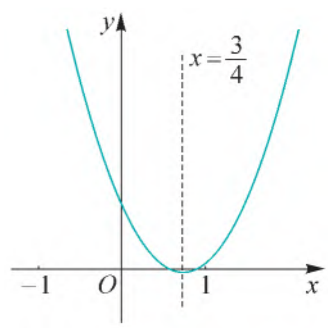


图 4-2

解法 1 设函数 $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x-k$，其图象为抛物线，对称轴为 $x=\frac{3}{4}$，结合题意知，其图象草图如图 4-2. 观察图象知，方程在 $(-1,\ 1)$ 上有两个不相等的实数根当且仅当

$$\begin{cases} \Delta=\frac{9}{4}+4k>0, \\ f(1)=1-\frac{3}{2}-k>0, \\ f(-1)=1+\frac{3}{2}-k>0, \end{cases}$$

解得

$$-\frac{9}{16}<k<-\frac{1}{2}.$$

所以，k 的取值范围是 $\left(-\frac{9}{16},\ -\frac{1}{2}\right)$.

解法 2 方程 $x^2-\frac{3}{2}x=k$ 在 $(-1,\ 1)$ 上有两个不相等的

实数根，当且仅当方程组

$$\begin{cases} y=x^2-\dfrac{3}{2}x & x\in(-1,\ 1), \\ y=k \end{cases}$$

有两个解，即当且仅当函数 $y=x^2-\frac{3}{2}x$，$x\in(-1,\ 1)$与函数 $y=k$ 的图象有两个交点(交点的横坐标就是原方程的根).

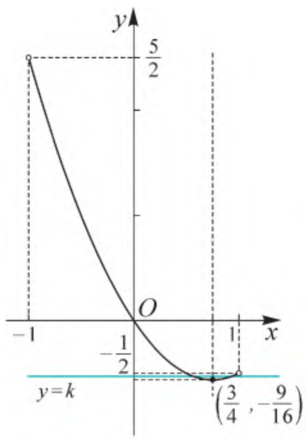


图 4-3

画出它们的图象(如图 4-3)，由图象可以看出，当$-\frac{9}{16}<k<-\frac{1}{2}$时，两个图象有两个交点，即原方程在$(-1,\ 1)$上有两个不相等的实数根.

所以，k 的取值范围是$\left(-\frac{9}{16},\ -\frac{1}{2}\right)$.

一般来说，在讨论方程 $f(x)=g(x)$的根的个数时，可转化为方程组$\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x) \end{cases}$的解的个数，从而等价于函数 $y=f(x)$的图象与函数 $y=g(x)$的图象的交点个数.

练习

1. 已知关于 x 的方程 $5^x=5-a$ 有负实数根，求实数 a 的取值范围.
2. 确定方程 $x+\lg x=3$ 的实数根的个数.
3. 关于 x 的方程 $2kx^2-2x-3k-2=0$ 有两个实数根，一个小于 1，另一个大于 1，求实数 k 的取值范围.

习题 4.1.1

1. 请判断命题“$\exists x_0\in(0,\ +\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$”的真假.
2. 已知函数 $f(x)=kx-4$. 如果关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在 $[-1,\ 2]$上有实数根，求实数 k 的取值范围.
3. 若关于 x 的方程 $3x^2-5x+a=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，且满足 $-2<x_1<0$，$1<x_2<3$，求实数 a 的取值范围.
4. 二次函数 $y=f(x)$满足 $f(3+x)=f(3-x)$，且 $f(x)=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，求 x_1+x_2 的值.
5. 关于 x 的方程 $2x^2-3x-a=0$ 在$(-1,\ 1)$上有实数根，求实数 a 的取值范围.

4.1.2 二分法与求方程的近似解

零点存在性定理仅解决了函数变号零点的存在性，进一步要找到零点较精确的位置，可借助“二分法”来实现.

二分法(bisection)的基本思想是：把零点所在的区间二等分，则零点落在其中一个小区间上. 继续再将此小区间二等分，则零点落在其中一个更小的区间上. 如此不断二等分下去，就找到了零点所在的较精确的范围.

如图 4-4 所示，函数 $y=f(x)$,$x\in[a_0, b_0]$的图象是一条连续的曲线，且 $f(a_0)$与 $f(b_0)$异号，则函数 $y=f(x)$在区间$[a_0, b_0]$上至少有一个零点.

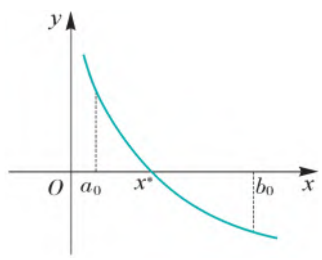


图 4-4

下面把区间$[a_0, b_0]$二等分，取中点 $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$. 若$f(x_0)=0$，则 x_0 是函数 $f(x)$的零点；若$f(a_0)$与$f(x_0)$异号，则函数 $f(x)$在区间$[a_0, x_0]$上有零点；若$f(b_0)$与 $f(x_0)$异号，则函数 $f(x)$在区间$[x_0, b_0]$上有零点. 记零点所在的新区间为$[a_1, b_1]$，其长度是区间$[a_0, b_0]$的长度的一半.

为了缩小零点所在的范围，可对压缩了的区间$[a_1, b_1]$继续施行同样的办法，即用中点 $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$将区间$[a_1, b_1]$再二等分，然后通过 $f(x_1)$的符号判定零点在 x_1 的哪一侧，从而又可确定一个新的零点所在的区间$[a_2, b_2]$，其长度是区间$[a_1, b_1]$的长度的一半.

如此反复二分下去，即可得出一系列的零点所在的区间

$$[a_0, b_0]\supseteq[a_1, b_1]\supseteq[a_2, b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_k, b_k]\supseteq\cdots,$$

其中每个区间的长度都是前一个区间的长度的一半，因此,区间$[a_k, b_k]$的长度为

$$b_k-a_k=\frac{b_0-a_0}{2^k}.$$

于是可知:如果重复上述步骤,那么零点所在的范围会越来越小. 这样,在一定精确度下,我们可以在有限次重复相同步骤

后，将所得的零点所在区间$[a_k, b_k]$内的任意一点作为函数零点的近似值，特别地，可以将区间$[a_k, b_k]$的中点 $x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$ 作为零点的近似值.

在实际计算时，假设预先规定的精确度为 ε，只要二分的次数足够多(即 k 足够大)，便能得到零点所在的区间$[a_k, b_k]$，满足 $b_k-a_k=\frac{b_0-a_0}{2^k}<\varepsilon$，进而得到零点的近似值.

图 4-5 直观地显示了二分法的计算过程.

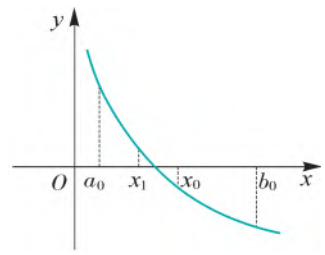


图 4-5

例 1 用二分法求方程 $x^2-10=0(x>0)$的近似解(精确度为 0.001).

解 这里 $\varepsilon=0.001$.

令 $f(x)=x^2-10$，则方程为 $f(x)=0$，易知

$$f(3)=9-10<0，f(4)=16-10>0，$$

则方程 $x^2-10=0$ 的解落在区间(3，4)内.

进一步缩小精确解的范围. 利用计算器可算得：

$$f(3.1)=-0.39，f(3.2)=0.24.$$

取 $a_0=3.1$，$b_0=3.2$，有$f(a_0)f(b_0)<0$. 列表计算(中间结果取四位小数)：

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$
0	3.100 0	3.200 0	0.100 0	−0.390 0	0.240 0	3.150 0
1	3.150 0	3.200 0	0.050 0	−0.077 5	0.240 0	3.175 0
2	3.150 0	3.175 0	0.025 0	−0.077 5	0.080 6	3.162 5
3	3.150 0	3.162 5	0.012 5	−0.077 5	0.001 4	3.156 3
4	3.156 3	3.162 5	0.006 2	−0.037 8	0.001 4	3.159 4
5	3.159 4	3.162 5	0.003 1	−0.018 2	0.001 4	3.161 0
6	3.161 0	3.162 5	0.001 5	−0.008 1	0.001 4	3.161 8
7	3.161 8	3.162 5	0.000 7			

由于$b_7-a_7=0.000\,7<0.001=\varepsilon$，计算停止，可以取 $x_7=\frac{a_7+b_7}{2}\approx3.162\,2$ 为方程的近似解.

从上表我们发现，如果仅算至第六步，此时 $b_6-a_6<2\varepsilon$，也可以得到所需的近似解，这样做可以吗？如果可以，是为什么呢？

如果说，对于一元二次方程还可以利用求根公式求出它的根，进而求出它的近似值，那么，对于下面的方程，一般只能通过相应函数的图象，利用二分法求得根的近似值.

例2 求方程 $2^x-3x-1\,000=0(x>0)$ 的近似解(精确度为 0.01).

解 这里 $\varepsilon=0.01$. 令

$$f(x)=2^x-3x-1\,000,$$

则方程为 $f(x)=0$. 作出函数 $y=2^x$ 和 $y=3x+1\,000$ 的图象，如图 4-6 所示. 可知方程 $2^x-3x-1\,000=0$ 在$(0,+\infty)$上有且只有一个实数解.

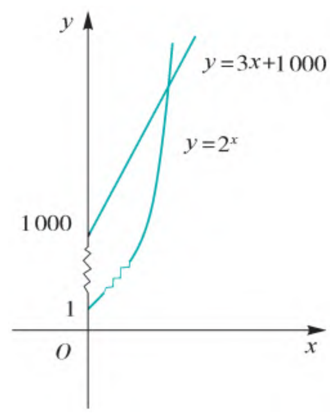


图 4-6

用计算器可算得

$$f(10)=-6,\ f(10.1)\approx 67.196.$$

取 $a_0=10$，$b_0=10.1$，列表计算(中间结果取三位小数)：

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$
0	10.000	10.100	0.100	−6.000	67.196	10.050
1	10.000	10.050	0.050	−6.000	29.961	10.025
2	10.000	10.025	0.025	−6.000	11.824	10.013
3	10.000	10.013	0.013	−6.000	3.230	10.007
4	10.000	10.007	0.007			

由于 $b_4-a_4=0.007<0.01=\varepsilon$，计算停止，可以取 $x_4=\dfrac{a_4+b_4}{2}\approx 10.004$为方程的近似解.

例3 求方程 $\lg x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$ 的近似解(精确度为 0.1).

解 这里 $\varepsilon=0.1$. 令

$$f(x)=\lg x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1,$$

则方程为 $f(x)=0$. 作出函数 $y=\lg x$ 和 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$ 的图象.

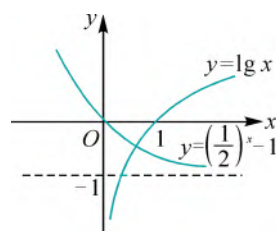


图 4-7

由图 4-7 可知，方程 $\lg x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$ 在$(0,+\infty)$上有且只有一个实数解.

又因为 $f\left(\dfrac{1}{10}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}<0$，$f(1)=\dfrac{1}{2}>0$，所以方程 $f(x)=0$ 的唯一实数解在区间$\left[\dfrac{1}{10},\ 1\right]$内.

取 $a_0=0$，$b_0=1$，列表计算：

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$
0	0	1	1	$-\infty$	0.5	0.5
1	0.5	1	0.5	-0.0081	0.5	0.75
2	0.5	0.75	0.25	-0.0081	0.2805	0.625
3	0.5	0.625	0.125	-0.0081	0.1475	0.5625
4	0.5	0.5625	0.0625			

由于 $b_4-a_4=0.0625<0.1=\varepsilon$，计算停止，可以取 $x_4=\frac{a_4+b_4}{2}=0.53125$ 为方程的近似解.

练习

1. 求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在(1，2)内的近似解(精确度为0.001).

习题 4.1.2

1. 利用二分法求方程 $x^2+3x-1=0$ 在 $(0，+\infty)$ 上的近似解(精确度为 0.001)，并与用求根公式所得的解进行比较.
2. 求方程 $\lg x-x+2=0$ 在(1，10)内的近似解(精确度为 0.001).

4.2 函数与数学模型

我们已经学习了函数的概念、函数的性质以及幂函数、指数函数、对数函数和三角函数等，下面举例说明如何运用函数模型去解决实际问题.

例 1 人体内的血糖是支持人的体能的重要因素. 图4-8分别给出了运动员在食用蔗糖和异麦芽酮糖后体内血糖含量 y(单位：mg/dL)随时间 t(单位：min)的变化曲线.

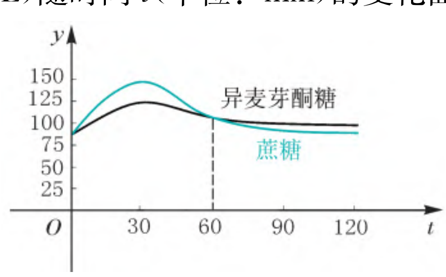


图 4-8

（1）若甲运动员服糖后 30 分钟参加比赛，比赛时间 30 分钟，他应服用哪种糖？

（2）若乙运动员服糖后 30 分钟参加比赛，比赛时间 90 分钟，他应服用哪种糖？

解 由图 4-8 可以看到，运动员服用蔗糖后，体内血糖含量迅速上升，约 30 分钟时达到最大值，然后迅速下降，在 60 分钟时与服用异麦芽酮糖的效果一样．运动员在服用异麦芽酮糖后，体内血糖含量逐渐上升，约 30 分钟时达到最大值，随后缓慢下降，60 分钟后始终比服用蔗糖的运动员体内血糖含量高．故甲运动员应服用蔗糖，乙运动员应服用异麦芽酮糖．

例2 对于固定的压力差，单位时间内通过管道的气体体积 R 是管道半径 r 的函数．下表是在同一压力差下测得的数据．

r/cm	1	2	3	4
R/(cm^3/s)	$\frac{400}{81}$	$\frac{400}{81}\times16$	400	$\frac{400}{81}\times256$

（1）写出一个 R 关于 r 的函数的解析式，使之与表中数据相吻合；

（2）在同样的压力差下，用(1)中得到的函数求 1 分钟通过半径为 5 cm 的管道的气体体积．

解 （1）经观测可知，函数

$$R=\frac{400}{81}r^4,\ r\in(0,+\infty)$$

与表中数据相吻合．

（2）当 $r=5$ 时，$R=\frac{400}{81}\times5^4$，即 1 秒钟通过半径为 5 cm 的管道的气体体积是 $\frac{400}{81}\times5^4$ cm^3，所以 1 分钟通过半径为 5 cm的管道的气体体积是

$$\frac{400}{81}\times5^4\times60\approx1.85\times10^5(\text{cm}^3).$$

例3 煤油在作为喷气发动机燃料之前需通过黏土去除其中的污染物．某种煤油中污染物含量为 p_0，测得这种煤油通过长为 x m 的圆形黏土管道后污染物的含量 p 如下表：

x/m	0	1	2	3
p	p_0	$0.8p_0$	$0.64p_0$	$0.512p_0$

(1) 写出一个 p 关于 x 的函数的解析式，使之与表中数据相吻合；

(2) 要使这种煤油中污染物的含量不超过原来的百分之五，利用(1)中得到的函数求圆形黏土管道至少要多长(精确到 1 m).

解 (1) 设 $p=f(x)$，则

$$f(0)=p_0,$$
$$f(1)=0.8p_0,$$
$$f(2)=(0.8)^2p_0,$$
$$f(3)=(0.8)^3p_0,$$

由此可知，$f(x)=(0.8)^xp_0$ 与表中数据相吻合.

(2) 由$(0.8)^xp_0\leqslant\frac{5}{100}p_0$，得

$$(0.8)^x\leqslant\frac{1}{20},$$

由对数函数的单调性可得

$$\lg(0.8)^x\leqslant\lg\frac{1}{20},$$
$$x\lg 0.8\leqslant-\lg 20.$$

所以

$$x\geqslant-\frac{\lg 20}{\lg 0.8}=-\frac{1+\lg 2}{\lg 8-1}\approx-\frac{1.3010}{0.9031-1}\approx 13.4.$$

故圆形黏土管道至少需要 14 m.

例4 某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某产品的数量分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件. 为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系. 模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$(其中 a，b，c 为常数). 已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件，请问：以 4 月份的产量为判断标准时，以上哪个函数作为模拟函数较好？并用你选用的函数预测 5 月份的产量.

解 设$y_1=f(x)=px^2+qx+r$ (p，q，r 为常数，且 $p\neq0$)；

$y_2=g(x)=ab^x+c$ (a，b，c 为常数).

由已知，得

$$\begin{cases}p+q+r=1,\\4p+2q+r=1.2,\\9p+3q+r=1.3,\end{cases}\quad\text{及}\quad\begin{cases}ab+c=1,\\ab^2+c=1.2,\\ab^3+c=1.3,\end{cases}$$

解得

$$p=-0.05,\ q=0.35,\ r=0.7;$$
$$a=-0.8,\ b=0.5,\ c=1.4.$$

所以

$$f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7,$$
$$g(x)=-0.8\times0.5^x+1.4,$$

所以

$$f(4)=1.3,\ g(4)=1.35,$$

显然 $g(4)$ 比 $f(4)$ 更接近于 1.37. 故选用 $g(x)=-0.8\times0.5^x+1.4$ 作为模拟函数较好.

5 月份的产量预计为 $g(5)=-0.8\times0.5^5+1.4=1.375$(万件).

像例 4 这类问题可以称为函数拟合问题. 一般是先画出对应的点组成的散点图(如图 4-9), 再根据散点图的性质判断应当选择哪种函数解析式, 然后根据部分已知数据求出所求式子中的待定常数, 最后再把表中的其他数据代入检验, 哪个函数最接近, 我们就取这个函数作为拟合函数.

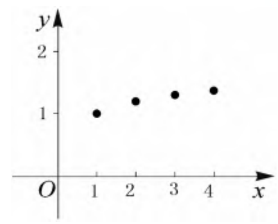


图 4-9

例5 一堆蔬菜上残留有农药, 需用水清洗. 现对清洗效果作如下假定: 用 1 个单位量的水一次可清除蔬菜上残留农药量的 $\frac{1}{2}$, 用水越多, 洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f(x)$.

(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;

(2) 试根据假定写出 $f(1)$ 的值, 并判断 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 现在有 3 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量较少?

解 (1) $f(0)=1$, 表示没有用水清洗时, 蔬菜上的农药量没有变化.

(2) $f(1)=\frac{1}{2}$; 在 $[0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递减.

(3) 设清洗前蔬菜上的农药量为 1, 那么 3 单位量的水清洗一次后, 残留的农药量为

$$w_1=1\times f(3)=\frac{1}{1+3^2}=\frac{1}{10};$$

如果用$\frac{3}{2}$单位量的水清洗一次，残留的农药量为

$$1\times f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4}{13},$$

此后再用$\frac{3}{2}$单位量的水清洗一次后，残留的农药量为

$$w_2=\frac{4}{13}\times f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{13}\times\frac{4}{13}=\frac{16}{169}.$$

由于$\frac{1}{10}>\frac{16}{169}$，所以 $w_1>w_2$.

因此把 3 单位的水平均分成 2 份后，清洗两次，残留的农药量较少.

例 6 为了在夏季降温和冬天供暖时减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层. 某栋建筑物要建造可使用 20 年的隔热层，每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C(单位：万元)与隔热层厚度 x(单位：cm)满足关系：$C(x)=\frac{k}{3x+5}(0\leqslant x\leqslant 10)$，若不建隔热层，每年能源消耗费用为 8 万元. 设 $f(x)$为隔热层建筑费用与 20 年的能源消耗费用之和.

(1) 求 k 的值及 $f(x)$的表达式；

(2) 隔热层修建多厚，总费用 $f(x)$达到最小？并求最小值.

解 (1) 设隔热层厚度为 x cm，由题设知，每年能源消耗费用为 $C(x)=\frac{k}{3x+5}$.

再由 $C(0)=8$，得 $k=40$，因此 $C(x)=\frac{40}{3x+5}$. 而建造费用为 $C_1(x)=6x$，最后得隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和为

$$\begin{aligned}f(x)&=20C(x)+C_1(x)\\&=20\times\frac{40}{3x+5}+6x\\&=\frac{800}{3x+5}+6x\quad(0\leqslant x\leqslant 10).\end{aligned}$$

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{800}{3x+5}+6x\\&=\frac{800}{3x+5}+2(3x+5)-10\end{aligned}$$

$$=2\left[\frac{400}{3x+5}+(3x+5)\right]-10.$$

因为 $0\leqslant x\leqslant 10$，所以

$$3x+5>0,\ \frac{400}{3x+5}>0,$$

由基本不等式可得

$$\frac{400}{3x+5}+(3x+5)\geqslant 2\sqrt{\frac{400}{3x+5}\cdot(3x+5)}=40,$$

当 $\frac{400}{3x+5}=3x+5$，即 $x=5$ 时等号成立.

所以

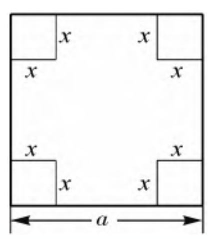
$$f(x)\geqslant 2\times 40-10=70.$$

故当 $x=5$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(5)=70$.

所以，当隔热层修建 5 cm 厚时，总费用达到最小，最小值为 70 万元.

练习

1. 一种产品今年的产量是 a 件，在今后 m 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$，写出年产量 y 关于经过年数 x 的函数解析式.
2. 如果镭按每百年 3.8%的速率衰变．现有 100 g 镭，1 000 年后还剩多少？
3. 如图，有一块边长为 a 的正方形铁皮，将其四个角各截去一个边长为 x 的小正方形，然后折成一个无盖的盒子．试将盒子的体积 V 表示为 x 的函数，并讨论这个函数的定义域.



（第 3 题图）

习题 4.2

1. 某城市现有人口 10 万人，如果按照每年 1.1%的比率增长，那么 14 年后人口是多少？
2. 某服装个体户在购进一批服装时，进价已按原价打了七五折．他打算对该批服装定一新标价，并注明按该价降价 20%销售，这样仍可获得 25%的利润．求这位个体户给这批服装定的新标价与原价之间的函数关系.

3. 一个圆柱形容器的底部直径为 d cm，高为 h cm. 现以 $v\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速度向容器内注入某种溶液，求容器内溶液的高度 x(单位:cm)与注入时间 t(单位:s)之间的函数解析式，并写出函数的定义域和值域.

4. 某种放射性物质的质量 N 随时间 t 的变化规律是 $N=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$，其中 N_0，λ 是正常数.
(1) 说明这个函数是增函数还是减函数；
(2) 把 t 表示为质量 N 的函数；
(3) 求当 $N=\dfrac{N_0}{2}$ 时，t 的值.

5. 某工厂甲、乙两地的两个分厂各生产某种机器 12 台和 6 台. 现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台. 已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的费用分别为 300 元和 500 元.
(1) 设从乙地调运 x 台至 A 地，求总费用 y 关于 x 的函数解析式；
(2) 若总运费不超过 9 000 元，共有几种调运方案?
(3) 求出总费用最低的调运方案及最低费用.

阅读与讨论

信息技术模拟函数模型并检验

在正常行驶的情况下，汽车与前面的车辆保持多大的距离是安全的呢? 安全刹车距离跟什么有关? 该刹车距离与速度、时间的关系如何? 刹车距离与很多因素相关，比如车速、车型、驾驶员的反应速度等. 表 1 列出的是某种车型在不同的速度下的安全刹车距离，根据表 1 中的数据，能否简化条件，建立安全刹车距离与速度的函数关系? 该型汽车行驶的时候，不同速度相对的安全距离又是多少呢?

表 1　不同速度下的刹车距离

速度/($\mathrm{km\cdot h^{-1}}$)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
安全刹车距离/m	3	7	13	21	29	39	50	63	77

我们先来了解几个常识性的概念. 当驾驶员发现紧急情况决定刹车，从看到现象到做出相应的刹车动作的这段时间称为反应时间. 从司机踩动制动器开始，使得制动器开始起作用到汽车完全停止行驶的距离，称为制动距离. 表 2 列出了根据实

际情况获得的数据.

表2 车速与刹车距离

车速		实际刹车距离/m	计算刹车距离/m
km/h	m/s		
10	2.78	3	1.96
20	5.56	7	5.62
30	8.33	13	10.96
40	11.11	21	18.02
50	13.89	29	26.78
60	16.67	39	37.24
70	19.44	50	49.35
80	22.22	63	63.20
90	25	77	78.75

将速度和刹车距离单位统一之后，将表2填入Excel表格中，然后选择“插入”—“$x-y$带平滑曲线的散点图”—“设置趋势线格式”，就可以在平面直角坐标系中作出用平滑曲线连接的这些点，接下来，右键点击“设置趋势线格式”，可以拟合函数，如果选择“幂函数”并勾选“显示表达式”，在散点图旁显示的函数如图1．如果我们选择“多项式函数”，则又可以得到用二次函数拟合的表达式，如图2，我们还可以尝试用其他函数拟合.

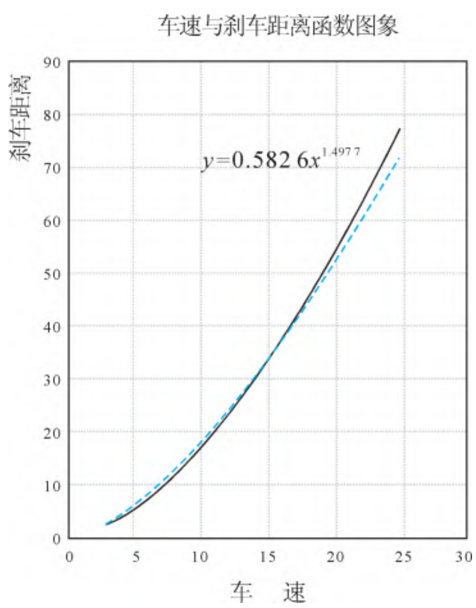


图1

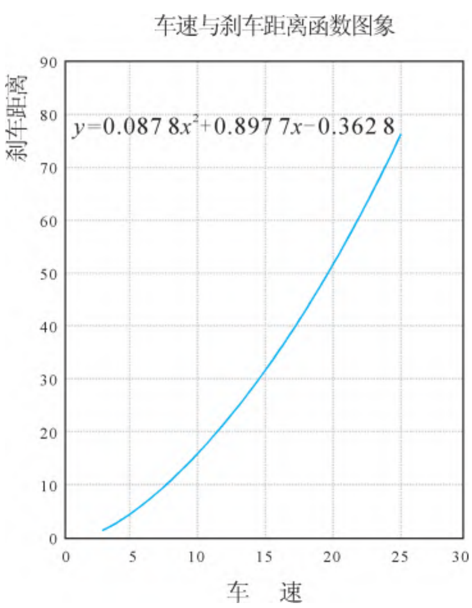


图2

观察图1和图2可知，利用二次函数拟合更符合客观实际．那么，能否利用物理知识和数学运算来从理论上分析并建立函数模型呢？

我们来思考一下，实际刹车距离d等于反应距离d_1和制

动距离 d_2 之和，即 $d=d_1+d_2$. 根据物理学知识(忽略摩擦等其他因素)：

(1) 反应距离 d_1 与车速 v 成正比，比例系数为司机的反应时间 t，即 $d_1=vt$；

(2) 刹车使用的最大制动力为 F，F 所做的功等于汽车动能的改变量，即 $F\cdot d_2=\frac{1}{2}mv^2$；

(3) F 与加速度 a 成正比，即 $F=ma$，a 为刹车加速度，m 是常数.

经过数学化简运算得

$$d=tv+\frac{1}{2a}v^2.$$

记 $\frac{1}{2a}=k$. 在拟合的过程中，依据表 2 中的速度和对应的刹车距离的测量值，如果有一个估计值 $\hat{k}$，这样就会得到对应的 d_i 的估计值 $\hat{d}_i(i=1, 2, \cdots, 9)$，$\hat{d}_i=tv_i+\hat{k}v_i^2$，为了使估计尽可能地精确，即要使估计值和测量值的偏差 $\sum\limits_{i=1}^{9}(d_i-\hat{d}_i)^2$ 最小，将该式展开可得到一个关于 $\hat{k}$ 的二次多项式

$$\left(\sum_{i=1}^{9}v_i^4\right)\hat{k}^2+\left[\sum_{i=1}^{9}2(tv_i-d_i)v_i^2\right]\hat{k}+\sum_{i=1}^{9}(d_i-tv_i)^2.$$

当该式达到最小值时，

$$\hat{k}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}(d_i-tv_i)v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{9}v_i^4}.$$

通常正常人的反应时间 t 满足 $0.15<t<0.4$，若取司机反应最慢的时间 $t=0.4$，同时代入表 2 中第二列、第三列的速度和距离 v_i，d_i，计算得 $\hat{k}=0.11$，所以近似认为 $\frac{1}{2a}=\hat{k}=0.11$. 从而得到刹车距离与速度的关系为

$$\hat{d}=0.4v+0.11v^2.$$

依据该模型可计算表 2 中的各速度下的刹车距离. 利用该式子我们可以计算在高速公路上速度为 120 km/h，即 33.33 m/s 时，刹车距离约为 135.53 m. 如果车速为 140 km/h，即 38.89 m/s 时，刹车距离约为 181.92 m. 可见高速公路上警告保持车距 200 m 是有依据的. 而且一旦发生交通事故，我们发现交警会通过丈量刹车车痕来确定出刹车距离，并能很快判断出是否超速. 通过上面的分析，你也会判断了吧？

讨论题

1. 谈谈对函数的重要性的认识.
2. 分组讨论建立函数模型的基本步骤.

课题学习

数学建模

——人口增长模型

根据下表提供的某国从1830—1910年人口的数据资料，建立数学模型，模拟该国人口增长的规律.

时间/年份	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910
人口数/百万人	3.930	5.309	7.241	9.639	12.867	17.070	23.193	31.444	38.559

分析：一个国家的人口增减与众多因素有关. 为使问题简化，我们作如下假设：该国的人口变化情况仅由人口的正常生育、死亡引起，而与其他因素无关，而且人口数量的变化是连续的. 在上述假设下，我们认为人口数量是时间的函数. 记时间为 t，t 时刻的人口数为 $f(t)$. 下面通过建立函数模型解决这一实际问题.

根据所提供的数据资料作出散点图(如图1)，然后寻找一条曲线(包括直线)，使之尽可能地与这些散点吻合，该曲线(包括直线)就被认为近似描述了该国人口的增长规律.

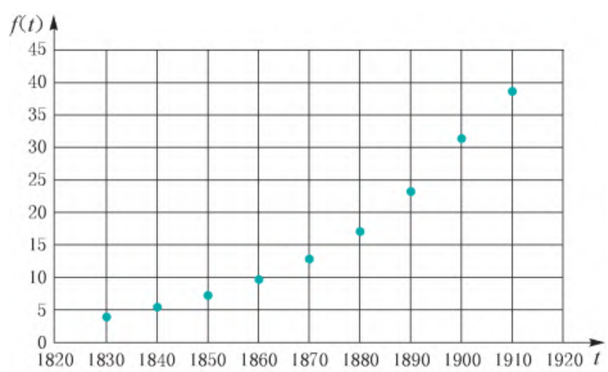


图1　数据散点图

观察散点图，从发展趋势上看，我们可以认为散点近似地分布在一条指数曲线上．早在1789年，英国经济学家马尔萨斯(T. R. Malthus, 1766—1834)就提出了自然状态下的人口增长模型：

$$N(t)=N_0 e^{r(t-t_0)},$$

其中 t 表示时间，N_0 表示 $t=t_0$ 时的人口数，r 表示人口的年平均增长率．

利用该模型，取1830，1890这两年的人口数确定函数的解析式．令 $e^r=a$，设过初始点(1830，3.930)的函数的解析式为

$$f(t)=3.930a^{t-1830}$$

把点(1890，23.193)的坐标代入，得 $a=1.030$，从而

$$f(t)=3.93\times(1.03)^{t-1830}, \quad ①$$

此即为人口增长的函数模型．

> 选择不同的初始点，得到的函数解析式可能会不一样．请你试一试．

实际问题中，若已知一系列数据，要想知道其分布曲线或走势，我们可以借助 Excel 里的工具来完成．上述问题在 Excel 里拟合的曲线如图2所示：

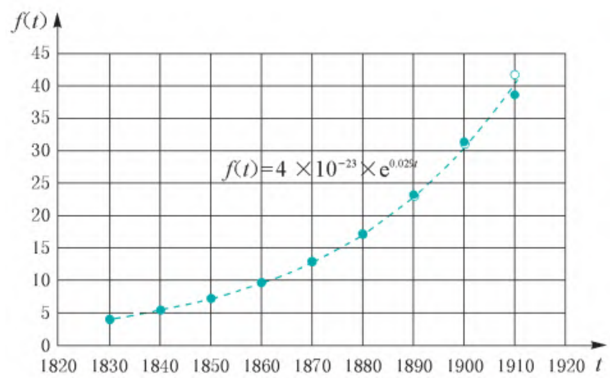


图2　数据拟合曲线

我们将理论得到的模型①与在 Excel 里拟合的曲线做了对比，如图3所示．可以看到，两条曲线的相似度较高．

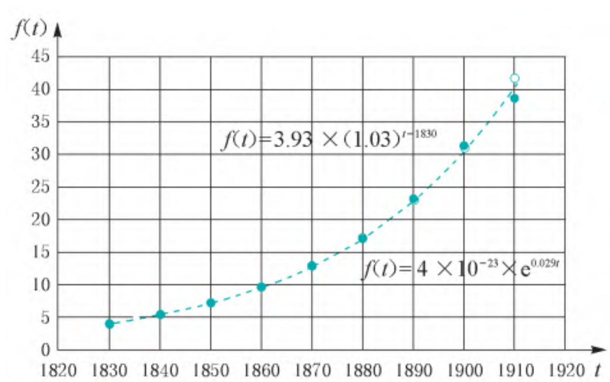


图3　理论模型和拟合模型对比

下表是该国 1920 年以后的人口实际数据. 将这些数据代入①式来检验上述模型.

时间/年份	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口数/百万人	50.156	62.649	75.996	91.973	105.712	122.776	131.670	142.698

例如，用数据(1950，91.973)检验这个函数模型，发现 $f(1950)=136.414$，这与实际人口 91.973 相差很大. 这说明，原有的指数模型已不适应后来的人口实际变化趋势. 由此提醒我们思考，是什么因素造成了这一较大误差呢？原来，马尔萨斯模型是在 18—19 世纪人均占用资源十分丰富的条件下提出的. 但 19 世纪后人均占有资源与以前相比有了较大差异，受自然资源和环境条件的影响，人口总数受到限制. 这时就要修正原有的马尔萨斯模型，建立新的人口模型，如罗杰斯蒂克(Logistic)模型曲线等. 有兴趣的同学可以参阅相关资料进行学习.

函数模型是描述客观世界中变量关系和规律的重要数学语言和工具. 应该指出，函数模型的建立是一项复杂的工作. 我们这里的结果并不精确，给出这个建模过程，目的是想让同学们了解数学建模的基本方法.

思考题

上述问题中，我们利用了现有的模型解决问题. 一些情况下，我们还需要根据已知数据建立恰当的函数模型，解释生活中的某种现象或对事物的发展趋势进行预测等. 请结合实例说明建立函数模型的一般过程.

复习题

A 组

1. 已知“$\forall x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$，$\tan x\leqslant m$”是真命题，求实数 m 的最小值.
2. 关于 x 的方程 $x^2-5x+a=0$ 的两根均大于 1，求实数 a 的取值范围.
3. 确定方程 $2^x=x^2$ 的根的个数.
4. 已知关于 x 的方程 $\log_2(x+3)-\log_2 x=a$ 的解在区间(3，4)上，求实数 a 的取值范围.
5. 求方程 $x^3+\lg x=18$ 的根的近似值(精确度为 0.1).

6. 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1，a_2，…，a_n 共 n 个数据．我们规定所测量的物理量的“最佳近似值” a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据差的平方和最小．依此规定，根据 a_1，a_2，a_3，…，a_n 这几个数据，求 a.

B 组

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$．求证：

（1）$f(x)$在其定义域上为增函数；

（2）满足等式 $f(x)=1$ 的实数 x 的值至多只有一个.

2. 当 a 为何值时，关于 x 的方程 $\lg(x-1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$分别有两个实数根、有一个实数根、没有实数根？

3. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists m_0\in\mathbf{R}$，使 $4^x+2^x\cdot m_0+1=0$ 成立．若 $\neg p$ 是假命题，求实数 m 的取值范围.

4. 已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-m$，若 $\forall x_1\in[-1,3]$，$\exists x_2\in[0,2]$，$f(x_1)\geqslant g(x_2)$，求实数 m 的取值范围.

5. 假设药的剂量为 640 mg，如果药量以每小时当前药量 20%的速度消散，把药量降到 100 mg 要多长时间？降到原来药量的 10%要多长时间？（精确到小数点后两位）

6. 为研究传播某种疾病的一种病毒侵入生物体后的繁殖规律及其药物控制，实验人员将一个病毒细胞注入一只小白鼠体内进行实验．经检测，在无药物控制的情况下，病毒细胞的个数每过一天增长为原来的两倍，且当病毒细胞在小白鼠内的个数超过 10^6 时，小白鼠就会死亡．现制造一种药物，经测定注射后可立即杀死该病毒细胞的 98%，然后排出体外．为了使小白鼠在实验过程中不死亡，最迟应在哪天第一次注射该种药物？（精确到 1 天）

思考与实践

1. 采取小组合作方式，进行社会调查，搜集方程的近似解在社会生活中的应用模型，并写出论文进行班级交流.

2. 对于一个实际问题，我们能采用哪些方法去建立该问题的函数模型？

3. 与你周围的同学组成一个小组，设计出收集数据的方案，建立一个“冰块随时间变化融为水”的函数模型，并以适当形式写出一个报告．在写出报告后，请在全班交流．交流形式可以是实习成果交流会、专题板报、作品展示等．如果你认为还有更加符合自己实际情况的问题，你也可以自己选择问题进行研究.

后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，依据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》，我们组织专家学者编写了这套普通高中数学教科书.

在本套教科书的编写过程中，我们得到了许多数学教育界前辈、数学课程专家、数学教育理论工作者、中学数学教研员和教师的大力支持和热情帮助，我们对他们的辛勤付出表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢华中师范大学数学与统计学学院对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持.

本套教科书是全体编写人员集体智慧的结晶. 除已列出的主要编写者外，参加本册教科书编写讨论的还有：刘运新、杨田、徐新斌、岑爱国、张鸿志、孔凡祥、乔安国、邵贵明、余晓娟、林子植、张琴、田杰等.

我们还要感谢使用本套教科书的师生们，期待你们在使用本套教科书的过程中，及时把意见和建议反馈给我们，以便我们进一步修改完善.

责任编辑 张 琴 田 杰
封面设计 牛 红 刘静文

普通高中教科书 数学 必修 第二册

出　版	湖北教育出版社	430070 武汉市雄楚大街 268 号
经　销	新 华 书 店	
网　址	http://www.hbedup.com	
印　刷	武汉中远印务有限公司	
开　本	890mm×1240mm 1/16	
印　张	9.25	
字　数	200 千字	
版　次	2019 年 11 月第 1 版	
印　次	2019 年 11 月第 1 次印刷	
书　号	ISBN 978-7-5564-3141-0	
定　价	8.65 元	