国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHU XUE

选择性必修

第二册

江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

普通高中教科书

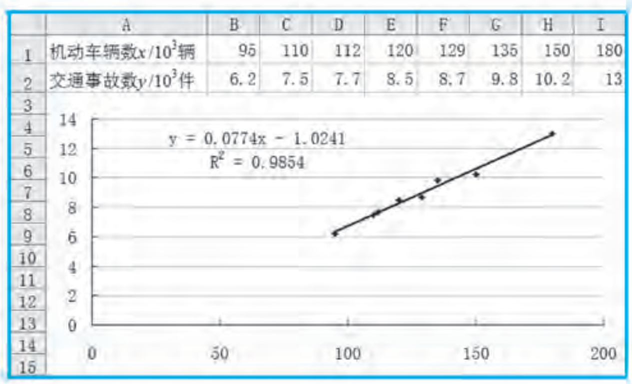
数学

SHU XUE

选择性必修

第二册

苏教版高中数学教材编写组 编著



江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

主　　编　单　墫　李善良

副 主 编　葛　军　徐稼红　石志群

本册主编　石志群

编写人员　陈光立　孙旭东　石志群　徐稼红　樊亚东　李善良

　　　　　葛　军　张松年　张乃达　单　墫

责任编辑　田　鹏

普通高中教科书
书　　名　数学(选择性必修第二册)
主　　编　单　墫　李善良
责任编辑　田　鹏
出版发行　江苏凤凰教育出版社(南京市湖南路1号A楼　邮编210009)
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　江苏省高淳印刷股份有限公司(电话：025-57889808)
厂　　址　南京市高淳区开发区双高路178号(邮编：211300)
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张　11.5
版　　次　2021年7月第1版
印　　次　2021年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5499-9164-8
定　　价　10.55元
盗版举报　025-83658579

苏教版图书若有印装错误可向出版社联系调换
质量热线：025-83658528　025-83658526

大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致　同　学

亲爱的同学,高中阶段的数学学习生活有趣吗?

我们知道,数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活,对我们的终身发展有较大的影响.

怎样学习数学?

第一,要学会发现问题、提出问题.面对各种情境(生活的、数学的、科学的),我们需要学会观察、实验、归纳,学会从特殊到一般、从具体到抽象、从模糊到清晰,大胆地提出数学问题.

第二,要尝试分析并解决所提出的问题.通过抽象、推理、建模、运算等多种活动,建立数学理论,并运用这些数学理论去解决问题.

第三,要学会回顾反思.在解决完问题之后,要思考:我们是如何解决这个问题的,从中可以得到哪些启发,还能提出哪些问题.

在数学学习过程中,我们要主动地学习数学基础知识、基本技能,自觉地感悟基本数学思想,不断积累数学活动经验,提升数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等核心素养,并逐步学会用数学眼光观察世界、用数学思维思考世界、用数学语言表达世界.

通过数学学习,我们会发现数学非常奇妙,非常有趣.数学将给我们以新奇和动力,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、本章回顾、本章测试等内容构成一个完整的体系. 它体现了教科书的基本要求，是所有学生应当掌握的内容，相信你一定能学好这部分内容.

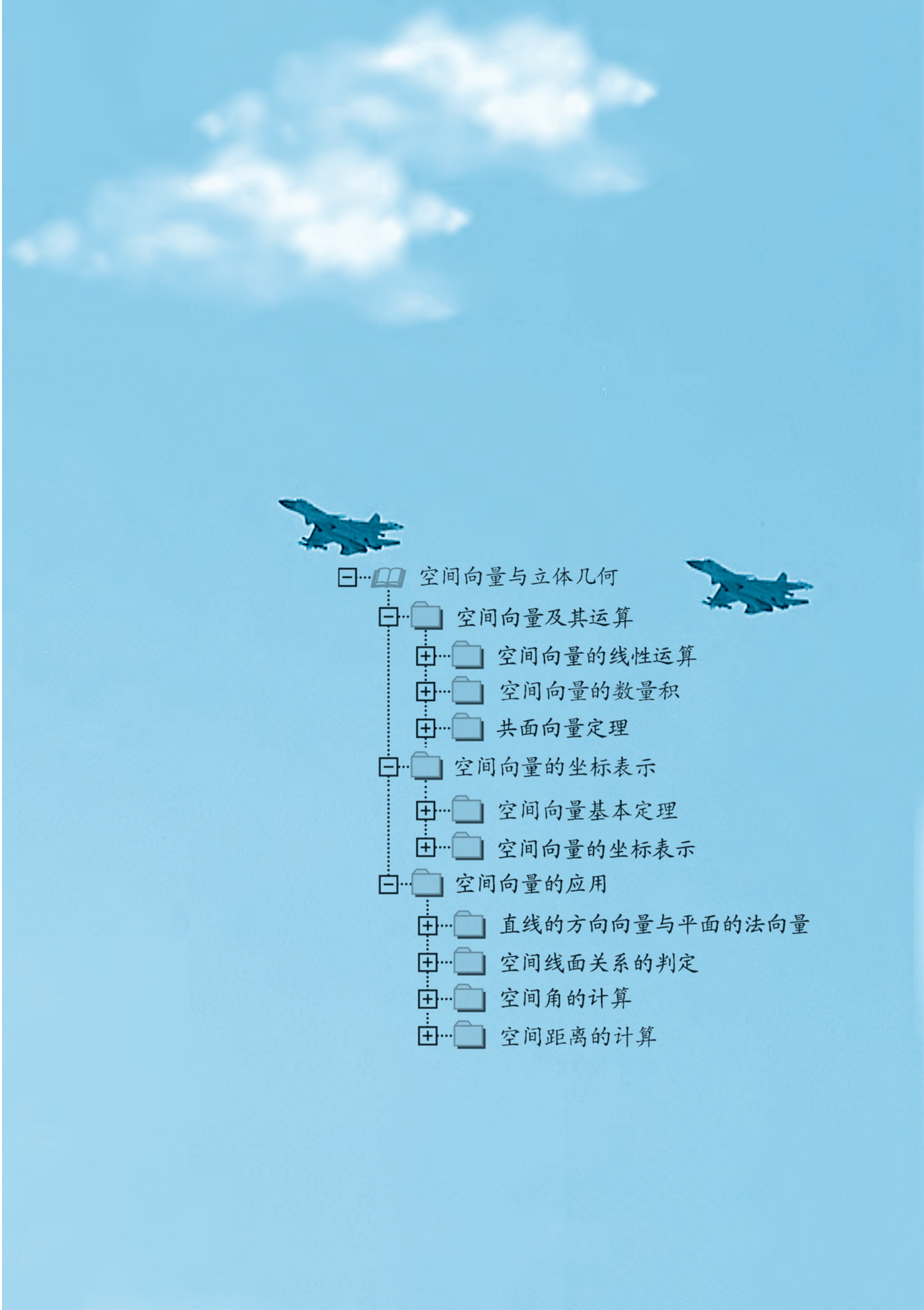
本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接、问题与探究、应用与建模，以及习题中的“思考·运用”“探究·拓展”等. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，相信你会更加喜欢数学.

目　录

本书部分常用符号

$O-xyz$	空间直角坐标系
$\overrightarrow{AB}$	以 A 为起点、B 为终点的向量
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	向量$\overrightarrow{AB}$的模(或长度)
$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$	空间的一个基底
$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$	单位正交基底
$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角
$m\subset\alpha$	直线 m 在平面 α 内
$m\cap n=B$	直线 m 和直线 n 相交于点 B
$l /\!/ \alpha$	直线 l 平行于平面 α
$l\perp\alpha$	直线 l 垂直于平面 α
A_n^m	从 n 个不同的元素中选出 m 个不同元素的排列数
$n!$	将 n 个不同的元素进行全排列的排列数
C_n^m	从 n 个不同的元素中选出 m 个不同元素的组合数
$P(X=x_i)$	随机变量 X 取值为 x_i 时对应的随机事件发生的概率
$X\sim B(n, p)$	随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布
$X\sim H(n, M, N)$	随机变量 X 服从参数为 n, M, N 的超几何分布
$\overline{A}$	随机事件 A 的对立事件
$P(A)$	随机事件 A 发生的概率
$P(B\mid A)$	随机事件 A 发生的条件下随机事件 B 发生的概率
$P(AB)$	随机事件 A, B 同时发生的概率
$E(X)$(或 μ)	随机变量 X 的均值或数学期望
$D(X)$(或 σ^2)	随机变量 X 的方差
$\sqrt{D(X)}$(或 σ)	随机变量 X 的标准差
$X\sim N(\mu, \sigma^2)$	随机变量 X 服从参数为 μ, σ^2 的正态分布
χ^2	χ^2 分布
$\overline{X}$	X 数据的均值

第 6 章　空间向量与立体几何



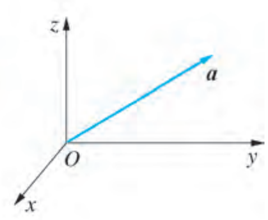
- 空间向量与立体几何
  - 空间向量及其运算
    - 空间向量的线性运算
    - 空间向量的数量积
    - 共面向量定理
  - 空间向量的坐标表示
    - 空间向量基本定理
    - 空间向量的坐标表示
  - 空间向量的应用
    - 直线的方向向量与平面的法向量
    - 空间线面关系的判定
    - 空间角的计算
    - 空间距离的计算

数无形时少直觉，形少数时难入微.

——华罗庚

在《数学(必修第二册)》中，我们学习了平面向量，研究了平面向量的运算、平面向量基本定理及平面向量的坐标表示，运用平面向量知识解决了数学和物理中的一些问题.

然而，在现实生活中，许多涉及大小和方向的问题不仅出现在平面中，也经常出现在空间中. 例如，吊车吊载物体，飞机降落，火箭发射……



- 空间向量是如何进行运算的?
- 怎样用向量解决空间图形的相关问题?

6.1 空间向量及其运算

在空间，我们把像位移、力、速度、加速度这样既有大小又有方向的量，叫作**空间向量**(space vector).

我们已经学习过平面向量的运算及其性质，那么，

- 空间向量如何进行运算？
- 空间向量具有什么性质？

6.1.1 空间向量的线性运算

与平面向量一样，空间向量也用有向线段表示. 凡是方向相同且长度相等的有向线段都表示相同的向量. 类比平面向量的运算，空间向量也有加法、减法和数乘运算.

如图 6－1－1，已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$. 由 O，A，B 三点确定一个平面或三点共线可以知道，空间任意两个向量都可以用同一平面内的两条有向线段来表示.

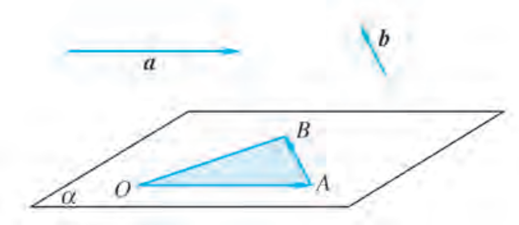


图 6－1－1

与平面向量的运算一样，空间向量的加法、减法与数乘运算的意义为(图 6－1－2)：

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda\in\mathbf{R}).$$

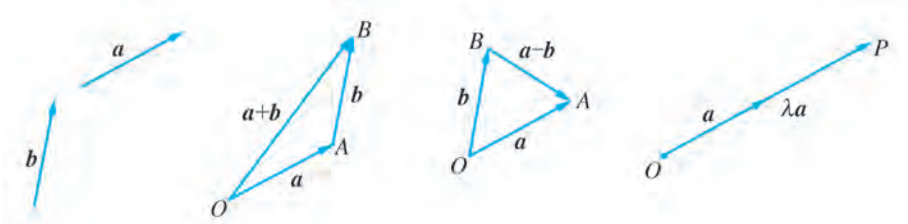


图 6－1－2

同样,空间向量的加法和数乘运算满足如下运算律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\ (\lambda\in\mathbf{R})$.

如图 6-1-3,我们可以借助空间四边形来验证空间向量的加法满足结合律.

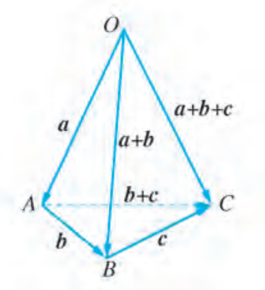


图 6-1-3

向量的加法、减法和数乘运算统称为向量的线性运算.

共线向量的方向相同或相反.

如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合,那么这些向量叫作**共线向量**或**平行向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$.

我们规定零向量与任意向量共线.

平面向量共线的充要条件在空间也是成立的,即有

共线向量定理 对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0})$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1 如图 6-1-4,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,M 是 BB_1 的中点,化简下列各式,并在图中标出化简得到的向量:

(1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA_1}$;

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$;

(3) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$.

解 (1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{CA_1}$.

(2) 因为 M 是 BB_1 的中点,

所以 $$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}.$$

又 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$,

所以 $$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}.$$

(3) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA_1}$.

向量$\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BA_1}$ 如图 6-1-4 所示.

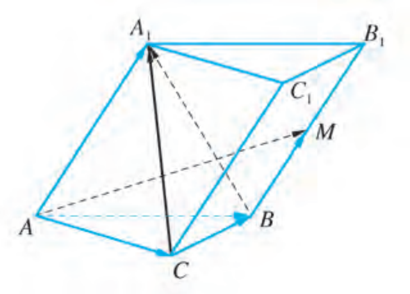


图 6-1-4

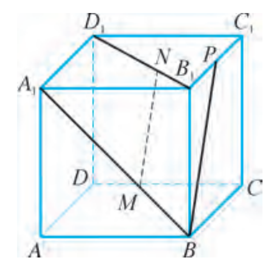


图 6-1-5

例 2 如图 6-1-5,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M, N 分别在线段 A_1B, D_1B_1 上,且 $BM=\frac{1}{3}BA_1$, $B_1N=\frac{1}{3}B_1D_1$, P 为棱 B_1C_1 的中点. 求证: $MN\parallel BP$.

证明 $$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}.$$

因为 $$BM=\frac{1}{3}BA_1,\ B_1N=\frac{1}{3}B_1D_1,$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1D_1}\\&=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1})+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1})\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1D_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}.\end{aligned}$$

又因为 P 为 B_1C_1 的中点,所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}&=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN},\end{aligned}$$

从而$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{MN}$为共线向量.

因为直线 MN 与 BP 不重合,所以 $MN\parallel BP$.

练 习

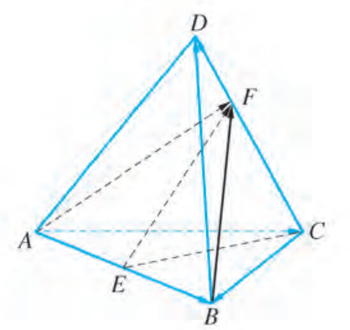
1. 化简:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$____________; (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$____________.

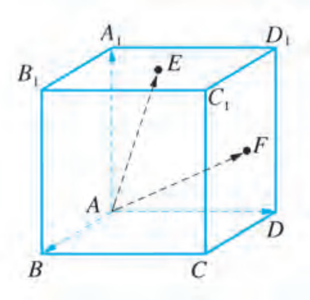
2. 如图,在空间四边形 $ABCD$ 中,E 是线段 AB 的中点,$CF=2FD$,连接 EF, CE, AF, BF. 化简下列各式,并在图中标出化简得到的向量:

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$; (2) $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AC}$;

(3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和侧面 CDD_1C_1 的中心，求下列各题中 m，n 的值：

(1) $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

(2) $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}$.

4. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{c}$，$E$ 为 PC 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{CE}$.

5. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是两个不共线的空间向量，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，且 A，B，D 三点共线，求实数 k 的值.

6.1.2 空间向量的数量积

前面，我们讨论了空间向量的线性运算，同样，空间向量也有数量积运算.

如图 6-1-6，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间两个非零向量，过空间任意一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫作**向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

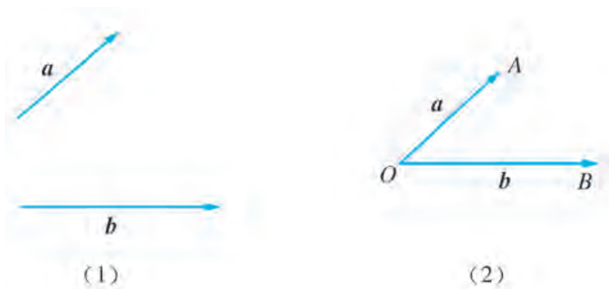


图 6-1-6

根据两个向量夹角的定义，容易知道

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle.$$

如果 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；如果$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$，那么向量

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；如果 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$，那么称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，并记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是空间两个非零向量，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle.$$

我们规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

由此可见，空间两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 可以由

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

求得.

根据定义，可以得到

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ 是两个非零向量}),$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2.$$

与平面向量一样，空间向量的数量积也满足下列运算律：

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\lambda \in \mathbf{R})$;

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

由空间向量的数量积的定义不难验证运算律(1)(2)的正确性.

对于运算律(3)，我们可以通过“投影向量”的概念进行证明.

对于空间任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，设向量 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$（图 6-1-7），过点 A 作 $AA_1 \perp OB$，垂足为 A_1. 上述由向量 $\boldsymbol{a}$ 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影，向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影向量**(projection vector).

对比平面向量中向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影的概念.

图 6-1-7

与平面向量的情形类似，我们有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA_1} \cdot \boldsymbol{b},$$

即向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

思 考

试运用上述空间向量向某个向量投影的概念，仿照平面向量的相关内容证明运算律(3).

例 3 如图 6－1－8，A，B 为平面 α 外两点，点 A，B 在平面 α 上的射影分别为点 A'，B'，$\boldsymbol{m}$ 为平面 α 内的向量.

求证：$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\boldsymbol{m}$.

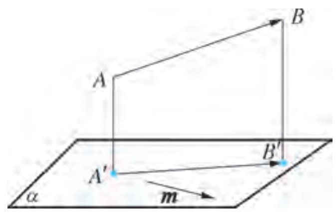


图 6－1－8

证明 由 $AA'\perp\alpha$，且 $\boldsymbol{m}$ 在 α 内可知

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\boldsymbol{m}=0.$$

同理

$$\overrightarrow{B'B}\cdot\boldsymbol{m}=0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}&=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B})\cdot\boldsymbol{m}\\&=\overrightarrow{AA'}\cdot\boldsymbol{m}+\overrightarrow{A'B'}\cdot\boldsymbol{m}+\overrightarrow{B'B}\cdot\boldsymbol{m}\\&=0+\overrightarrow{A'B'}\cdot\boldsymbol{m}+0\\&=\overrightarrow{A'B'}\cdot\boldsymbol{m}.\end{aligned}$$

故命题成立.

如图 6－1－9，设向量 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{CD}$，过 C，D 分别作平面 α 的垂线，垂足分别为 C_1，D_1，得向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$. 我们将上述由向量 $\boldsymbol{m}$ 得到向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{m}$ 向平面 α 投影，向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的**投影向量**.

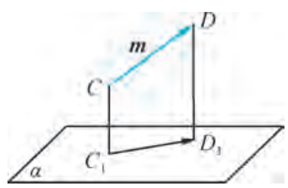


图 6－1－9

由例 3 可知，对于平面 α 内的任一向量 $\boldsymbol{n}$，有

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\boldsymbol{n},$$

也就是说，空间向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{n}$ 的数量积.

例 4 如图 6－1－10，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 CC_1 上任意一点.

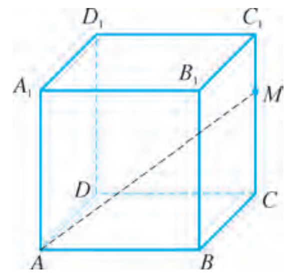


图 6－1－10

（1）确定向量 $\overrightarrow{AM}$ 在平面 ABC 上的投影向量，并求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$；

（2）确定向量 $\overrightarrow{AM}$ 在直线 BC 上的投影向量，并求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$.

解 （1）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，因此，$\overrightarrow{AC}$ 即为 $\overrightarrow{AM}$ 在平面 ABC 上的投影向量.

又因为 $\overrightarrow{BC}$ 在平面 ABC 内，所以

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}\times1\times\cos 45^\circ=1.$$

（2）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp BC$，且 $CC_1\perp BC$，因此，$\overrightarrow{BC}$ 即为 $\overrightarrow{AM}$ 在直线 BC 上的投影向量，从而

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|^2=1.$$

练 习

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ________.

2. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间两个非零向量，则

（1）当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ ________；

（2）当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ ________；

（3）当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ ________.

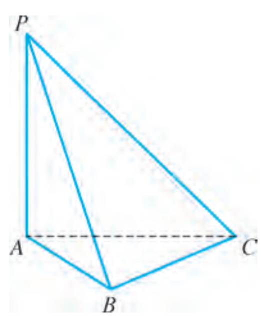
3. 证明空间向量数量积的运算律(2).

4. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，如果它们的夹角为 60°，那么 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$ ________.

5. 已知 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是空间两个单位向量，它们的夹角为 60°，设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$. 求：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； （2）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

6. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$CB\perp AB$，$AB=BC=a$，$PA=b$.



（第 6 题）

(1) 确定$\overrightarrow{PC}$在平面 ABC 上的投影向量，并求$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}$；
(2) 确定$\overrightarrow{PC}$在直线 AB 上的投影向量，并求$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

6.1.3　共面向量定理

如图 6-1-11，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD}$，而$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$ 在同一平面内，此时，我们称$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_1D_1}$，$\overrightarrow{AC}$ 是共面向量.

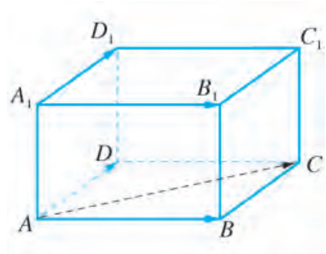


图 6-1-11

一般地，能平移到同一平面内的向量叫作**共面向量**(coplanar vectors). 显然，任意两个空间向量都是共面向量.

我们知道，空间向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即空间向量满足共线向量定理. 同样，空间向量也满足共面向量定理.

共面向量定理　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在有序实数组 (x, y)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

与平面向量一样，对于空间向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 成立，则称 $\boldsymbol{p}$ 由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性表示.

这就是说，向量 $\boldsymbol{p}$ 可以由两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性表示.

例 5　如图 6-1-12，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面相交于 AD，点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，$AN=\frac{1}{3}AE$. 求证：MN // 平面 CDE.

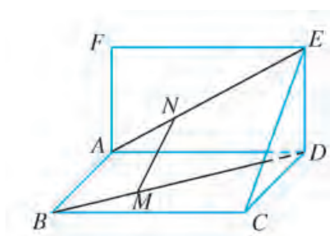


图 6-1-12

分析 要证明 $MN \parallel$ 平面 CDE，只要证明向量$\overrightarrow{MN}$可以用平面 CDE 内的两个不共线的向量$\overrightarrow{DE}$和$\overrightarrow{DC}$线性表示.

证明 如图 6-1-12，因为点 M 在 BD 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，

所以
$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

同理
$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}.$$

又
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB},$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\&=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$

又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线，根据共面向量定理，可知$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$共面.

因为 MN 不在平面 CDE 内，所以 $MN\parallel$ 平面 CDE.

在平面内，我们曾依据向量共线定理，推得判断三点共线的向量关系式. 那么，在空间中，如何用向量方法来判断四点共面呢?

例 6 在平面向量中有如下结论：

已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $x+y=1$，则 P，A，B 三点共线.

你能据此得到空间向量中类似的结论吗?

解 类比上述结论，猜想：已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不共面，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+y+z=1$，则 P，A，B，C 四点共面. 证明如下：

由 $x+y+z=1$，可得
$$x=1-y-z.$$

则
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\\&=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+z(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}),\end{aligned}$$

所以
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC},$$

即
$$\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}.$$

由 A，B，C 三点不共线，可知$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$不共线，所以$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$共面且有公共起点 A.

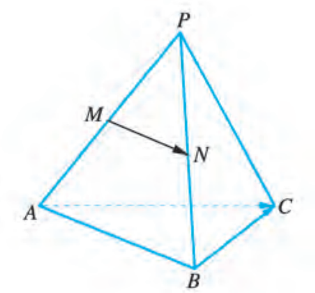
从而 P，A，B，C 四点共面.

思考

如果将 $x+y+z=1$ 整体代入，由$(x+y+z)\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ 出发，你能得到什么结论？

练习

1. 如图，在四面体 $PABC$ 中，点 M，N 分别为 PA，PB 的中点，问：$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$是否共面？



（第 1 题）

2. 给出下列四个命题：

① 若存在实数 x，y，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面；

② 若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，则存在实数 x，y，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$；

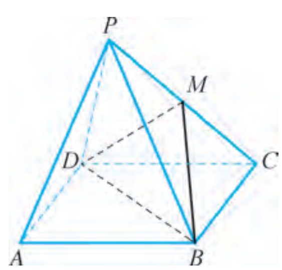
③ 若存在实数 x，y，使$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，则点 P，M，A，B 共面；

④ 若点 P，M，A，B 共面，则存在实数 x，y，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.

其中________是真命题.（填序号）

3. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{p}$，若存在实数组(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，满足 $\boldsymbol{p}=x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}+z_1\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{p}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}+z_2\boldsymbol{c}$，且 $x_1\neq x_2$，求证：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

4. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形，M 是 PC 的中点，求证：PA // 平面 BMD.



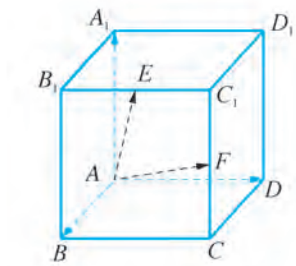
（第 4 题）

5. 已知 A，B，P 三点共线，O 为空间任意一点（O，A，B 不共线），且存在实数 α，β，使 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

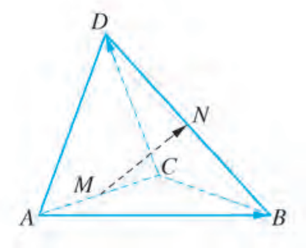
习题 6.1

感受·理解

1. 如图，在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 B_1C_1，CC_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$，试用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$.



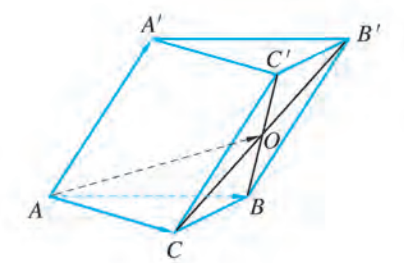
（第 1 题）



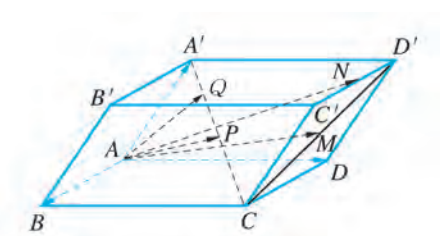
（第 2 题）

2. 如图，已知 M，N 分别是空间四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 的中点，求证：$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

3. 如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，BC' 与 $B'C$ 交于点 O，试用向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA'}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，点 P，M，N 分别是 CA'，CD'，$C'D'$ 的中点，点 Q 在 CA' 上，且 $CQ:QA'=4:1$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示下列向量：

（1）$\overrightarrow{AP}$；（2）$\overrightarrow{AM}$；（3）$\overrightarrow{AN}$；（4）$\overrightarrow{AQ}$.

5. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形，E 为棱 PC 上的点，且 $CE=2EP$，试用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 表示向量 $\overrightarrow{CE}$.

6. 已知 A，B，C 三点不共线，对于平面 ABC 外的任意一点 O，分别根据下列条件，判断点 M 是否与点 A，B，C 共面：

（1）$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$；

（2）$\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

7. 已知 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$. 求证：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

思考·运用

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E，F 分别是 BB_1，D_1B_1 的中点，

求证：

（1）$EF \parallel BD_1$；

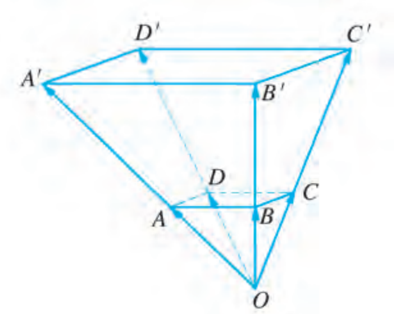
（2）$BD_1 \perp A_1D$.

9. 在空间四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB \perp CD$，$AC \perp BD$，求证：$AD \perp BC$.

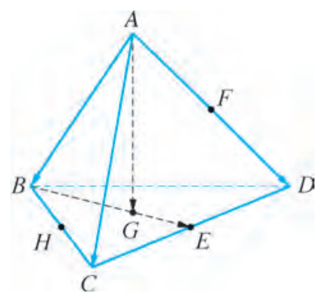
10. 如图，从$\square ABCD$ 所在平面外一点 O 作向量 $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC'}=k\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD'}=k\overrightarrow{OD}$. 求证：

（1）A'，B'，C'，D'四点共面；

（2）平面 $A'B'C'D'\parallel$平面 $ABCD$.



（第 10 题）



（第 11 题）

探究・拓展

11. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，已知 G 为$\triangle BCD$ 的重心，E，F，H 分别为边 CD，AD 和 BC 的中点，化简下列各式：

（1）$\overrightarrow{AG}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；

（2）$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$；

（3）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

12. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是空间三个不共线向量，求证：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在三个不全为零的实数 l，m，n，使 $l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

6.2 空间向量的坐标表示

空间向量是平面向量的推广，在平面向量中，向量可以用坐标表示，进而利用坐标运算来解决相关问题. 那么，

● 空间向量怎样用坐标表示呢？

6.2.1 空间向量基本定理

平面向量基本定理表明，平面内任一向量可以用该平面的两个不共线向量来线性表示. 对于空间向量，有类似的结论吗？

对于空间向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ 成立，则称 $\boldsymbol{p}$ 由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性表示.

空间向量基本定理 如果三个向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

证明 如图 6-2-1，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是三个不共面的向量，过空间一点 O 作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2,\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_3,\ \overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}.$$

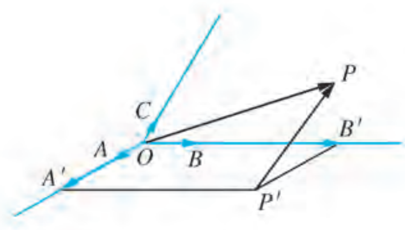
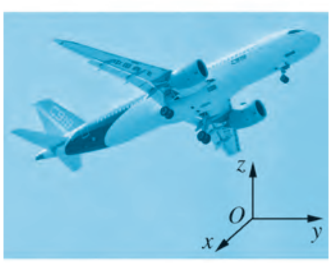


图 6-2-1



过点 P 作直线 $PP' \parallel OC$，交平面 OAB 于点 P'；在平面 OAB 内，过点 P' 作直线 $P'A' \parallel OB$，$P'B' \parallel OA$，分别交直线 OA，OB 于点 A'，B'. 根据向量共线的条件，存在三个确定的实数 x，y，z，使

$$\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1,$$

$$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{e}_2,$$

$$\overrightarrow{P'P}=z\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{e}_3,$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{P'P}\\&=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

下面证明唯一性.

假设存在实数组(x', y', z'),且$x'\neq x$,使

$$\boldsymbol{p}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3,$$

于是 $$x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3,$$

即 $$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2+(z-z')\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}.$$

因为 $$x\neq x',$$

所以 $$\boldsymbol{e}_1=-\frac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{e}_2-\frac{z-z'}{x-x'}\boldsymbol{e}_3,$$

从而$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$共面,这与已知$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$不共面矛盾.

因此,有序实数组(x, y, z)是唯一的.

空间向量基本定理告诉我们,如果三个向量$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$不共面,那么空间的每一个向量都可由向量$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$线性表示. 我们把$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$称为空间的一个**基底**,$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$叫作**基向量**.

如果空间一个基底的三个基向量两两互相垂直,那么这个基底叫作**正交基底**. 特别地,当一个正交基底的三个基向量都是单位向量时,称这个基底为**单位正交基底**,通常用$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$表示.

推论 设O, A, B, C是不共面的四点,则对空间任意一点P,都存在唯一的有序实数组(x, y, z),使得

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

因为O, A, B, C四点不共面,所以共起点的三个向量$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$不共面. 你能说明理由吗?

例 1 如图 6-2-2,在正方体$OADB$-$CA'D'B'$中,点E是AB与OD的交点,M是OD'与CE的交点,试分别用向量$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OD'}$和$\overrightarrow{OM}$.

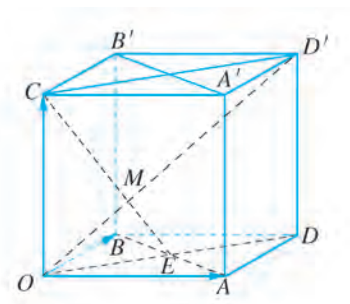


图 6-2-2

解 因为 $$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

所以 $$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

由 $\triangle OME \backsim \triangle D'MC$，可得$\dfrac{OM}{D'M}=\dfrac{OE}{D'C}$.

又 $$OE=\frac{1}{2}D'C,$$

则 $$OM=\frac{1}{2}D'M=\frac{1}{3}OD',$$

所以 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD'}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

练 习

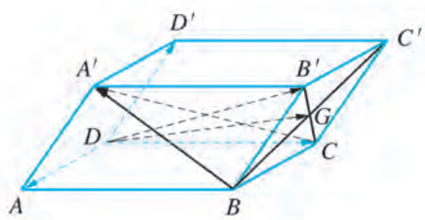
1. 若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为空间的一个基底，则下列各组向量中一定能构成空间的一个基底的是________.（填序号）

   ① $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$； ② $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

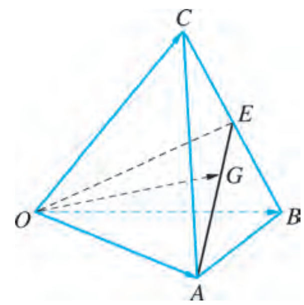
   ③ $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$； ④ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

2. 在空间四边形 $OABC$ 中，已知点 M，N 分别是 OA，BC 的中点，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{MN}$.

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{c}$，点 G 是侧面 $B'BCC'$ 的中心，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示下列向量：
   $\overrightarrow{DB'}$，$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{DG}$.



（第 3 题）



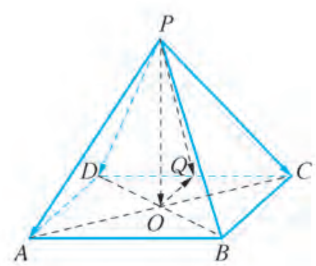
（第 4 题）

4. 如图，在空间四边形 $OABC$ 中，已知 E 是线段 BC 的中点，点 G 在 AE 上，且 $AG=2GE$，试用向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OG}$.

5. 如图，设 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，O 是平行四边形对角线 AC 和 BD 的交点，Q 是 CD 的中点，求下列各式中 x，y 的值.

   (1) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ}+x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PA}$；

   (2) $\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PO}+y\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PD}$.



（第 5 题）

6.2.2 空间向量的坐标表示

在平面向量中，我们借助平面直角坐标系得到了平面向量的坐标表示和坐标运算. 那么，如何建立坐标系，用坐标表示空间向量及其运算呢？

如图 6-2-3(1)，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. 以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们都叫作**坐标轴**. 这时我们说建立了一个**空间直角坐标系** $O-xyz$，点 O 叫作坐标原点，三条坐标轴中的每两条确定一个**坐标平面**，分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOx 平面.

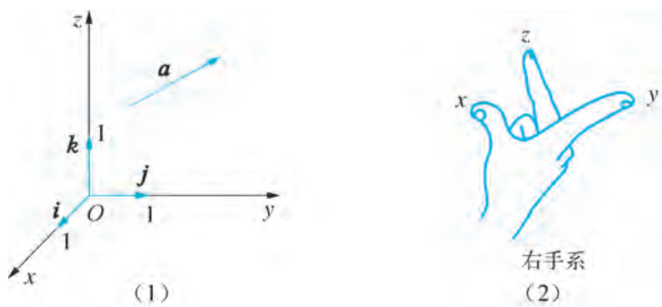


图 6-2-3

如图 6-2-3(2)，在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，若中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系.

本书建立的坐标系都是右手直角坐标系.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，对于空间任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，根据空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组(a_1, a_2, a_3)，使

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

有序实数组(a_1, a_2, a_3)叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的**坐标**，记作

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3).$$

事实上，记向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 上的投影向量分别为 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{a}_k\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即 $a_1=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}, a_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}, a_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$.

如图 6-2-4，在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，对于空间任意一点 P，我们称向量$\overrightarrow{OP}$为点 P 的位置向量. 于是，存在唯一的有序实数组(x, y, z)，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

因此，向量$\overrightarrow{OP}$的坐标为

$$\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z).$$

此时，我们把与向量$\overrightarrow{OP}$对应的有序实数组$(x,\ y,\ z)$叫作点 P 的**坐标**，记作 $P(x,\ y,\ z)$.

x，y，z 分别叫作点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

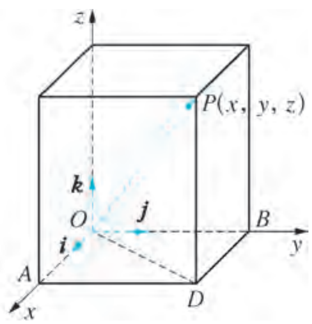


图 6-2-4

类似于平面向量的坐标运算，我们可以得到空间向量坐标运算的法则.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1),\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

空间向量平行的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1,\ z_2=\lambda z_1(\lambda\in\mathbf{R}).$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -3,\ 8)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 10,\ -4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\ -3,\ 8)+(3,\ 10,\ -4)=(1+3,\ -3+10,\ 8-4)=(4,\ 7,\ 4)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,\ -3,\ 8)-(3,\ 10,\ -4)=(1-3,\ -3-10,\ 8+4)=(-2,\ -13,\ 12)$，

$3\boldsymbol{a}=3(1,\ -3,\ 8)=(3\times1,\ 3\times(-3),\ 3\times8)=(3,\ -9,\ 24)$.

与平面向量一样，若 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

这就是说，**一个向量的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点坐标减去它的起点坐标.**

例 3 已知空间四点 $A(-2, 3, 1)$，$B(2, -5, 3)$，$C(10, 0, 10)$和 $D(8, 4, 9)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.

证明 依题意 $\overrightarrow{OA}=(-2, 3, 1)$，$\overrightarrow{OB}=(2, -5, 3)$，

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\ &= (2, -5, 3)-(-2, 3, 1)=(4, -8, 2).\end{aligned}$$

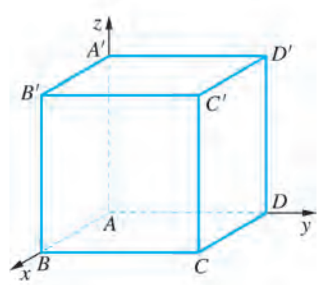
同理$\overrightarrow{DC}=(2, -4, 1)$，$\overrightarrow{AD}=(10, 1, 8)$，$\overrightarrow{BC}=(8, 5, 7)$.

由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，可知
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}.$$

考察向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$，由于$\frac{10}{8}\neq\frac{1}{5}$，故不存在实数 t，使得 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}$，即$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$不共线，所以四边形 $ABCD$ 是梯形.

练 习

1. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 2，建立如图所示的空间直角坐标系，写出正方体各顶点的坐标.



（第 1 题）

2. 已知$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$为一个单位正交基底，试写出下列向量的坐标：
   (1) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$； (2) $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$.
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3, -2, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 4, 0)$，$\boldsymbol{c}=(3, 0, 2)$，求 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.
4. 已知点 $A(3, 8, -5)$，$B(-2, 0, 8)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.
5. 判断下列各组中的两个向量是否平行：
   (1) $\boldsymbol{a}=(1, 3, -2)$，$\boldsymbol{b}=(-2, -6, 4)$；
   (2) $\boldsymbol{a}=(-2, 0, 5)$，$\boldsymbol{b}=(8, 0, 20)$.
6. 设 m，n 是实数，已知 $\boldsymbol{a}=(2, 2m-3, n+2)$，$\boldsymbol{b}=(4, 2m+1, 3n-2)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 m，n 的值.
7. 设 m，n 是实数，已知点 $A(2, -5, -1)$，$B(-1, -4, -2)$，$C(m+3, -3, n)$在同一直线上，求 $m+n$ 的值.

对于平面内两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，有
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

那么，对于空间两个非零向量，它们的数量积的坐标表示又是怎样的呢？

一般地，

设空间两个非零向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

证明 设$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$为空间的一个单位正交基底，则

$$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

对于单位正交基底$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$，有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+y_1y_2\boldsymbol{j}^2+z_1z_2\boldsymbol{k}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

由此可知，

两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，可以得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度公式：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

思　考

试用向量方法推导点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$间的距离公式

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

设空间两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，它们的夹角为$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$. 由向量数量积的定义，可得

$$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

由此，我们可以得到空间向量垂直的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例 4 已知点 $A(3, 1, 3)$，$B(1, 5, 0)$，求：

(1) 线段 AB 的中点坐标和 AB 的长度；

(2) 到 A，B 两点距离相等的点 $P(x, y, z)$的坐标 x，y，z 满足的条件.

解 (1) 设 M 是 AB 的中点，O 是坐标原点，则

$$\overrightarrow{OA}=(3, 1, 3),$$

$$\overrightarrow{OB}=(1, 5, 0).$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=\frac{1}{2}[(3,1,3)+(1,5,0)]=\left(2,3,\frac{3}{2}\right).$$

所以线段 AB 的中点坐标是$\left(2,3,\frac{3}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,5,0)-(3,1,3)=(-2,4,-3)$，所以线段 AB 的长度为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{29}.$$

(2) 设 $P(x,y,z)$到 A，B 两点的距离相等，则

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-0)^2}.$$

化简，得 $\quad 4x-8y+6z+7=0$，

这就是点 P 的坐标 x，y，z 满足的条件.

思　考

已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，试用向量方法推导线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

练　习

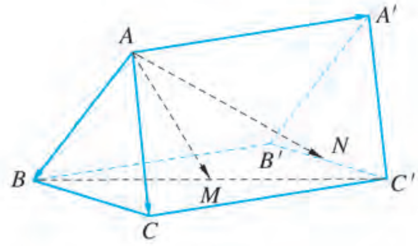
1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,3,7)$，$\boldsymbol{b}=(3,-1,0)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，并判断 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否垂直.
2. 若向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1,-2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,x,2)$ 垂直，则实数 x 的值为________.
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,-5,10)$，$\boldsymbol{c}=(1,-2,-2)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4$，求 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.
4. 已知点 $A(1,4,1)$，$B(-2,0,1)$，求$|\overrightarrow{AB}|$.
5. 写出与点 $C(1,-2,3)$距离等于 4 的点 M 的坐标 x，y，z 满足的关系式.

习题 6.2

感受・理解

1. 判断下列命题的真假：
   (1) 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行；
   (2) 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线是异面直线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定不共线；
   (3) 若三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两共面，则三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 一定共面；
   (4) 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是空间三个向量，则对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，总存在唯一的有序实数组(x,y,z)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.
2. 已知 P 是$\triangle ABC$ 所在平面外一点，M 是 PC 中点，且 $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AP}$，求 x，y，z 的值.
3. 如图，在三棱柱 ABC-$A'B'C'$中，已知$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，点 M，N

分别是 BC', $B'C'$ 的中点，试用基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.



（第 3 题）

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3, 2, 5)$, $\boldsymbol{b}=(1, 5, -1)$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

5. 已知 $A(3, 5, -7)$, $B(-2, 4, 3)$，M 是线段 AB 的中点，求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ 以及点 M 的坐标.

6. 判断下列各题中的两个向量是否平行：

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}=(6, -3, -6)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}=(0, 0, -3)$.

7. 设 m, n 为实数，已知 $\boldsymbol{a}=(-2, 3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(4, m, n)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 m, n 的值.

8. 求下列各题中两个向量夹角的大小：

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -3, \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(1, 0, 0)$；

(2) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\sqrt{6}\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，其中 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 是一个单位正交基底.

9. 设 x 为实数，已知 $\boldsymbol{a}=(2, -1, 3)$, $\boldsymbol{b}=(-4, 2, x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 x 的值.

思考 · 运用

10. 在三棱锥 $O-ABC$ 中，已知侧棱 OA, OB, OC 两两垂直，求证：底面 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

11. 设 m 为实数，已知 $A(m, 1+m, 2+m)$, $B(1-m, 3-2m, 3m)$ 是空间两个动点，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最小值.

12. 已知 $\overrightarrow{OA}=(1, 2, 3)$, $\overrightarrow{OB}=(2, 1, 2)$, $\overrightarrow{OC}=(1, 1, 2)$，点 M 在直线 OC 上运动. 当 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取最小值时，求点 M 的坐标.

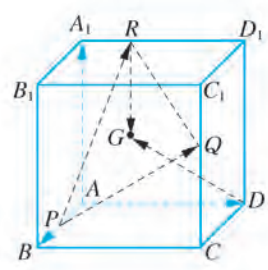
探究 · 拓展

13. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P, Q, R 分别在 AB, CC_1, D_1A_1 上，并满足 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{CQ}{QC_1}=\dfrac{D_1R}{RA_1}=\dfrac{a}{1-a}$ $(0<a<1)$. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$.

(1) 用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$；

(2) 设 $\triangle PQR$ 的重心为 G，用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 表示 $\overrightarrow{DG}$；

(3) 当 $\overrightarrow{RG}\perp\overrightarrow{DG}$ 时，求 a 的取值范围.



（第 13 题）

6.3 空间向量的应用

在平面向量中，我们借助向量研究了平面内两条直线平行、垂直等位置关系.

● 如何用向量刻画空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系？

6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量

为了用向量来研究空间的线面位置关系，首先要用向量来表示直线和平面的“方向”.

我们把直线 l 上的向量 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0})$以及与 $\boldsymbol{e}$ 共线的非零向量叫作直线 l 的**方向向量**(direction vector).

由于垂直于同一平面的直线是互相平行的，所以，我们可以考虑用平面的垂线的方向向量来刻画平面的“方向”.

如果表示非零向量 $\boldsymbol{n}$ 的有向线段所在直线垂直于平面 α，那么称向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 α，记作 $\boldsymbol{n}\perp\alpha$. 此时，我们把向量 $\boldsymbol{n}$ 叫作平面 α 的**法向量**(normal vector).

与平面垂直的直线叫作平面的法线. 因此，平面的法向量就是平面的法线的方向向量.

例 1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：$\overrightarrow{DB_1}$ 是平面 ACD_1 的法向量.

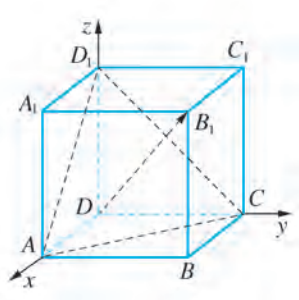


图 6-3-1

证明 不妨设正方体的棱长为 1，以$\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$为单位正交基底，建立如图 6-3-1 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$$A(1,0,0),\ C(0,1,0),\ D_1(0,0,1),\ B_1(1,1,1),$$

所以

$$\overrightarrow{DB_1}=(1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{AD_1}=(-1,\ 0,\ 1).$$

因为 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times1+1\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AC}$.

同理 $\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AD_1}$.

又因为 $AC\cap AD_1=A$，

所以 $\overrightarrow{DB_1}\perp$ 平面 ACD_1，

从而$\overrightarrow{DB_1}$ 是平面 ACD_1 的法向量.

在空间直角坐标系中，我们可以用待定系数法来求平面的法向量.

例如，在上面的例子中，我们可以设平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC},\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD_1},$$

从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0.$

因为 $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{AD_1}=(-1,\ 0,\ 1)$，

所以

$$-1\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=0,$$
$$-1\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0.$$

解方程组 $\begin{cases}x-y=0,\\x-z=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}y=x,\\z=x.\end{cases}$

不妨取 $x=1$，则 $y=z=1$.

所以 $\boldsymbol{n}=(1,\ 1,\ 1)$ 就是平面 ACD_1 的一个法向量.

例 2 在空间直角坐标系中，设平面 α 经过点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$，平面 α 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$，$M(x,\ y,\ z)$ 是平面α内任意一点，求 $x,\ y,\ z$ 满足的关系式.

解 由题意可得

$$\overrightarrow{PM}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0).$$

因为 $\boldsymbol{n}$ 是平面的法向量，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PM}$，

从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，

即 $(A, B, C)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$，

得到 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

所以满足题意的关系式为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

从上例中，我们不难发现，在空间直角坐标系中，平面可以用关于 x, y, z 的三元一次方程来表示.

思 考

已知直线上一点和直线的方向向量，这条直线就唯一确定. 已知平面内一点和平面的法向量，这个平面是否唯一确定？

练 习

1. 设 m 为实数，直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(2, -1, 2)$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{b}=(1, 1, m)$，若 $l_1\perp l_2$，则 m 的值为________.
2. 设 t 为实数，若直线 l 垂直于平面 α，且 l 的方向向量为 $(t, 2, 4)$，α 的法向量为 $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$，则 t 的值为________.
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，证明 $\overrightarrow{A_1D}$ 是平面 ABC_1D_1 的法向量.
4. 已知平面 α 内两个向量 $\boldsymbol{a}=(-1, 1, 0)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 0, 1)$，求平面 α 的一个法向量.
5. 已知点 $A(1, 1, 1)$，$B(1, 0, 0)$，$C(0, 1, -1)$.
   (1) 写出直线 BC 的一个方向向量；
   (2) 设平面 α 经过点 A，且 $\overrightarrow{BC}$ 是 α 的法向量，$M(x, y, z)$ 是平面 α 内任意一点，试写出 x, y, z 满足的关系式.

6.3.2 空间线面关系的判定

在“立体几何初步”一章中，我们运用几何的方法研究了空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系.

下面我们用向量的方法来研究空间线面的平行和垂直关系.

设空间两条直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$，两个平面 α_1, α_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$，则有下表：

	平 行	垂 直
l_1 与 l_2	$\boldsymbol{e}_1 /\!/ \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$
l_1 与 α_1	$\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{n}_1$	$\boldsymbol{e}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_1$
α_1 与 α_2	$\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$	$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$

例 3 证明：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线在这个平面内的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.（**三垂线定理**）

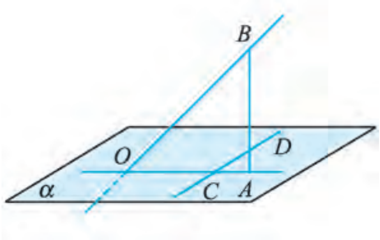


图 6-3-2

已知：如图 6-3-2，OB 是平面 α 的斜线，O 为斜足，$AB \perp \alpha$，A 为垂足，$CD \subset \alpha$，且 $CD \perp OA$.

求证：$CD \perp OB$.

分析 要证 $CD \perp OB$，只要证 $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{OB}$，即证 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

证明 因为 $CD \perp OA$，

所以 $$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

因为 $$AB \perp \alpha, CD \subset \alpha,$$

所以 $$AB \perp CD,$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

又因为 $$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

所以 $$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

故 $$CD \perp OB.$$

在“立体几何初步”一章中，我们通过操作、感知，得到了直线与平面垂直的判定定理，下面用向量的方法加以证明.

例 4 证明：如果一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面.（**直线与平面垂直的判定定理**）

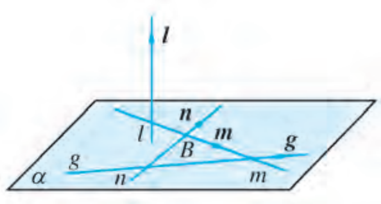


图 6-3-3

已知：如图 6-3-3，$m \subset \alpha$，$n \subset \alpha$，$m \cap n = B$，$l \perp m$，$l \perp n$.

求证：$l \perp \alpha$.

分析 根据定义，要证明直线与平面垂直，只要证明该直线垂直于平面内任意一条直线. 由于 m，n 是平面 α 内两条相交直线，所以平面内任意一个向量都可以用直线 m，n 上的非零向量线性表示. 向量的垂直关系可以通过它们的数量积为 0 来推得.

证明 如图 6-3-3，在 α 内任意作一条直线 g，在直线 l，m，n，g 上分别取非零向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{g}$.

因为直线 m 与 n 相交，所以向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 不共线. 由共面向量定理可知，存在唯一的有序实数组 (x, y)，使得

$$\boldsymbol{g} = x\boldsymbol{m} + y\boldsymbol{n},$$

所以 $$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{l} \cdot (x\boldsymbol{m} + y\boldsymbol{n}) = x\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m} + y\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n}.$$

因为 $$\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{m}, \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{n},$$

所以 $$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

由空间两条直线方向向量的数量积为 0 来判定这两条直线互相垂直是常用的方法.

可得 $$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0,$$

即 $$l\perp g.$$

因为 l 垂直于 α 内的任意一条直线,

所以 $$l\perp\alpha.$$

例 5 如图 6－3－4,已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直,点 M, N 分别在对角线 BD, AE 上,且 $BM=\frac{1}{3}BD$, $AN=\frac{1}{3}AE$. 求证:MN // 平面 CDE.

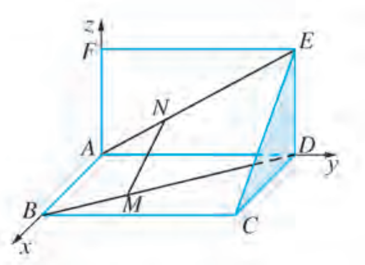


图 6－3－4

分析 在 6.1.3 节的例 5 中,我们曾用共面向量定理证明了 MN // 平面 CDE. 这里,我们将用坐标的方法加以证明,为此,只需证明向量 $\overrightarrow{MN}$ 垂直于平面 CDE 的法向量.

证明 因为矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直,所以 AB, AD, AF 互相垂直. 不妨设 AB, AD, AF 的长分别为 $3a$, $3b$, $3c$,以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\}$ 为正交基底,建立如图 6－3－4 所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. 则

$$B(3a, 0, 0), D(0, 3b, 0), F(0, 0, 3c), E(0, 3b, 3c),$$

所以 $$\overrightarrow{BD}=(-3a, 3b, 0), \overrightarrow{EA}=(0, -3b, -3c).$$

因为 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=(-a, b, 0)$, $\overrightarrow{NA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}=(0, -b, -c)$,

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM}&=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\&=(0, -b, -c)+(3a, 0, 0)+(-a, b, 0)\\&=(2a, 0, -c).\end{aligned}$$

又平面 CDE 的一个法向量是 $\overrightarrow{AD}=(0, 3b, 0)$,

由 $$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AD}=(2a, 0, -c)\cdot(0, 3b, 0)=0,$$

得到 $$\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{AD}.$$

直线的方向向量与平面的法向量垂直，这条直线可能与平面平行，也可能在该平面内.

因为 MN 不在平面 CDE 内，

所以 $$MN \parallel 平面\ CDE.$$

例 6 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E，F 分别为 BB_1，CD 的中点，求证：$D_1F \perp$ 平面 ADE.

分析 要证明 $D_1F \perp$ 平面 ADE，只要证明 D_1F 垂直于平面 ADE 内两条相交直线. 为此，可以建立适当的空间直角坐标系，通过向量的坐标运算，根据数量积是否等于 0 来判断垂直关系.

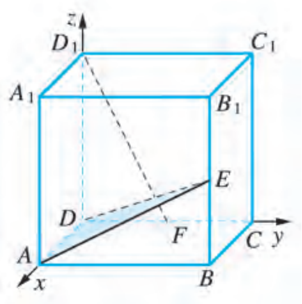


图 6-3-5

证明 不妨设正方体的棱长为 1，以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底，建立如图 6-3-5 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$$\overrightarrow{DA}=(1,0,0), \overrightarrow{DD_1}=(0,0,1),$$

$$\overrightarrow{DF}=\left(0,\frac{1}{2},0\right), \overrightarrow{DE}=\left(1,1,\frac{1}{2}\right).$$

因为

$$\overrightarrow{D_1F}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DD_1}=\left(0,\frac{1}{2},0\right)-(0,0,1)=\left(0,\frac{1}{2},-1\right),$$

所以 $$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{D_1F}=1\times0+0\times\frac{1}{2}+0\times(-1)=0,$$

可得 $$\overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{DA}.$$

因为 $$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DA}=\left(1,1,\frac{1}{2}\right)-(1,0,0)=\left(0,1,\frac{1}{2}\right),$$

所以 $$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=0\times0+1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)=0,$$

可得 $$\overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{AE}.$$

又因为 $$DA\cap AE=A,$$

所以 $$D_1F\perp 平面\ ADE.$$

在例 3 至例 6 中，空间的位置关系(平行或垂直)是通过直线的方向向量与平面的法向量的位置关系(平行或垂直)来判定的.

练 习

1. 填空：

(1) 若直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{b}=(2,3,2)$，则 l_1 与 l_2 的位置关系是__________.

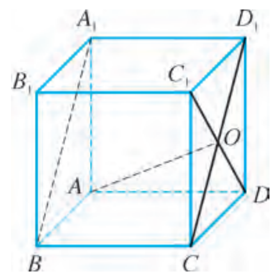
(2) 若 $\boldsymbol{\mu}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{v}=(-3,-6,6)$ 分别是平面 α，β 的法向量，则平面 α，β 的位置关系是________.

(3) 若直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{e}=(1,0,3)$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-2,0,\frac{2}{3}\right)$，则直线 l 与平面 α 的位置关系是________.

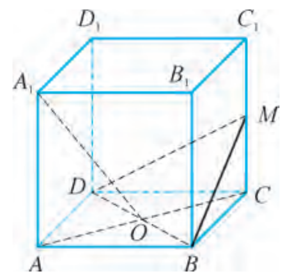
(4) 已知直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{e}=(-1,1,2)$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},\lambda,-1\right)(\lambda\in\mathbf{R})$. 若 $l\perp\alpha$，则 λ 的值为________.

(5) 设 $\boldsymbol{\mu}=(-1,2,4)$，$\boldsymbol{\nu}=(t,-1,-2)(t\in\mathbf{R})$ 分别是平面 α,β 的法向量. 若 $\alpha\parallel\beta$，则 $t=$________；若 $\alpha\perp\beta$，则 $t=$________.

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，CD_1 和 DC_1 相交于点 O，求证：$AO\perp A_1B$.



（第 2 题）



（第 6 题）

3. 用向量方法证明：经过一个平面的垂线的平面垂直于该平面.

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：$A_1B\perp AC_1$.

5. 证明：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.

6. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 AC 与 BD 的交点，M 是 CC_1 的中点. 求证：$A_1O\perp$ 平面 MBD.

7. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，直线 $m\subset\alpha$，且 $m\perp l$，求证：$m\perp\beta$.

6.3.3 空间角的计算

我们已经用直线的方向向量和平面的法向量分别刻画空间直线和平面的“方向”，下面我们用向量的方法来求空间直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角.

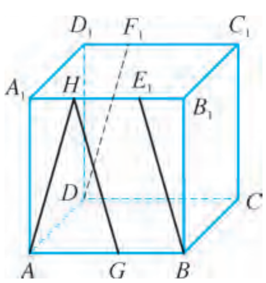


图 6－3－6

例 7 如图 6－3－6，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E_1，F_1 分别在 A_1B_1，C_1D_1 上，且 $E_1B_1=\frac{1}{4}A_1B_1$，$D_1F_1=\frac{1}{4}D_1C_1$，求 BE_1 与 DF_1 所成的角的大小.

分析 两条异面直线所成的角与它们的方向向量所成的角相等或互补. 可以先求出它们的方向向量的夹角，再确定两条异面直线所成的角.

解 设 $\overrightarrow{DD_1}=4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_1F_1}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

因为 $\qquad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{DD_1}=4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{B_1E_1}=-\boldsymbol{b}$，

所以

$$\overrightarrow{DF_1}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1F_1}=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{BE_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1E_1}=4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

故

$$|\overrightarrow{DF_1}|^2=|\overrightarrow{BE_1}|^2=(4\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{b}^2=17\boldsymbol{a}^2,$$

$$\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}=(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=16\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=15\boldsymbol{a}^2.$$

由

$$\cos\langle\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{DF_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{DF_1}|}=\frac{15}{17},$$

可得异面直线 BE_1 与 DF_1 所成的角约为 $28.07°$.

思 考

你能通过建立空间直角坐标系的方法来求解上例吗?

例 8 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,F 是 BC 的中点,点 E_1 在 D_1C_1 上,且 $D_1E_1=\frac{1}{4}D_1C_1$,试求直线 E_1F 与平面 D_1AC 所成角的大小.

分析 斜线与平面所成的角是锐角,可以通过直线的方向向量与平面的法向量的夹角来求得. 直线 E_1F 与平面 D_1AC 所成的角,就是直线 E_1F 与该平面的垂线所成角的余角. 为此,要先确定平面 D_1AC 的法向量.

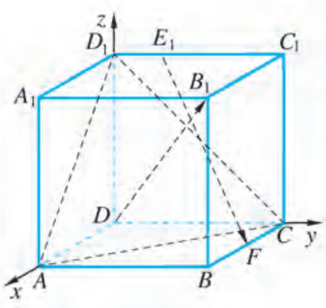


图 6-3-7

解 不妨设正方体的棱长为 1,以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底,建立如图 6-3-7 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则

$$B_1(1,1,1),\ E_1\left(0,\frac{1}{4},1\right),\ F\left(\frac{1}{2},1,0\right),$$

所以

$$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1),\ \overrightarrow{E_1F}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},-1\right).$$

$$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{E_1F}=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{4}+1\times(-1)=\frac{1}{4},$$

$$|\overrightarrow{DB_1}||\overrightarrow{E_1F}|=\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}+1}=\frac{\sqrt{87}}{4}.$$

设 $\overrightarrow{DB_1}$ 与 $\overrightarrow{E_1F}$ 所成的角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{E_1F}}{|\overrightarrow{DB_1}||\overrightarrow{E_1F}|}=\frac{\sqrt{87}}{87},$$

从而可得 $\theta\approx83.85°$.

因为 $\overrightarrow{E_1F}$ 是直线 E_1F 的方向向量,$\overrightarrow{DB_1}$ 是平面 D_1AC 的法向量,所以 E_1F 与平面 D_1AC 所成角是 θ 的余角,大小约为 $6.15°$.

思　考

把题设中的条件“F 是 BC 的中点”改为“$CF=\frac{1}{4}CB$”，你能得到什么结论？本例怎样用综合法求解？试对这两种方法加以比较.

在定义了平面的法向量之后，我们就可以用平面的法向量来求两个平面所成的角.

由于平面的法向量垂直于平面，这样，两个平面所成的二面角就可以转化为这两个平面的法向量所成的角. 因为二面角的平面角 θ 的取值范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant 180°$，所以二面角的平面角 θ 与这两个平面的法向量的夹角相等或互补(图 6－3－8).

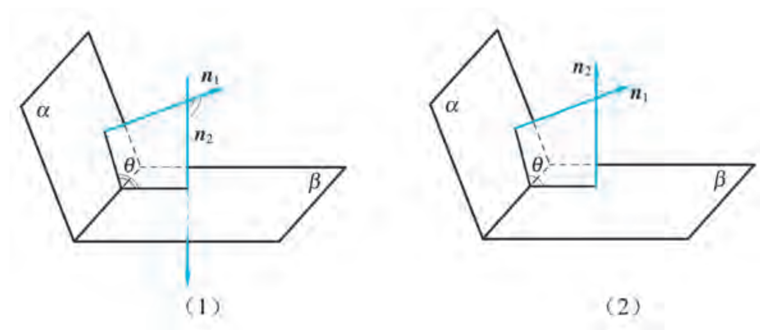


图 6－3－8

例 9　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 A_1-BD-C_1 的大小.

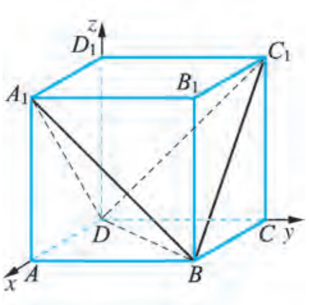


图 6－3－9

解　不妨设正方体的棱长为 1，以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底，建立如图 6－3－9 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$$\overrightarrow{DB}=(1,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{DC_1}=(0,\ 1,\ 1).$$

设平面 C_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n_1}=(x,\ y,\ z)$，

则
$$\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\ \boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,$$

即
$$x+y=0,\ y+z=0.$$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$.

所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ -1,\ 1)$ 是平面 C_1BD 的一个法向量.

同理，$\boldsymbol{n}_2=(-1,\ 1,\ 1)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量.

因为
$$|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{3},\ |\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{3},$$

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-1-1+1=-1,$$

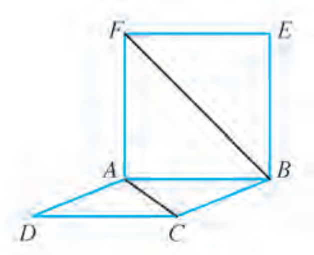
所以 $$\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = -\frac{1}{3}.$$

由此可知向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角约为 $109.47°$.

所求二面角的平面角与这个夹角相等或互补. 根据图形可知，二面角 A_1-BD-C_1 的大小约为 $70.53°$.

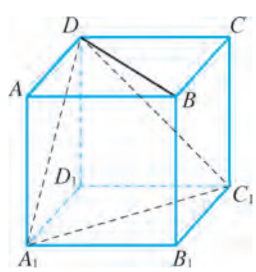
在例 7、例 8 和例 9 中，空间角的计算问题是转化为计算直线的方向向量与平面的法向量所成的角来解决的.

练　习

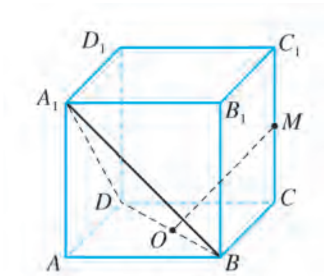


（第 2 题）

1. 若向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,\sqrt{3})$ 是直线 l 的方向向量，向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ 是平面 α 的法向量，则直线 l 与平面 α 所成的角为________.
2. 如图，设正方形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 的边长都为 1，若 $FA\perp$ 平面 $ABCD$，则异面直线 AC 与 BF 所成角的大小为________.
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB 的中点，求对角线 DB_1 与 CM 所成角的余弦值.
4. 已知平面的一条斜线和它在平面内的射影的夹角为 $45°$，平面内一条直线和这条斜线在平面内的射影的夹角为 $45°$，求斜线和平面内这条直线所成的角.
5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求 BD 与平面 A_1C_1D 所成角的余弦值.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是正方形 $ABCD$ 的中心，M 是 CC_1 的中点.

   (1) 求证：$\overrightarrow{OM}$ 是平面 A_1BD 的法向量；

   (2) 求二面角 $A-A_1B-D$ 的大小.

6.3.4　空间距离的计算

我们知道，空间两条平行直线间的距离、一条直线到与它平行的平面的距离、两个平行平面间的距离可以转化为点到直线的距离或点到平面的距离.

下面我们用向量的方法分别研究点到直线的距离及点到平面的距离.

先考察点到平面的距离.

如图 6-3-10，P 是平面 α 外一点，$PO\perp\alpha$，垂足为 O，A 为平

面 α 内任意一点，设 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，则

$$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=|\overrightarrow{AP}|\,|\boldsymbol{n}|\cos\theta,$$

其中 $\theta=\langle\overrightarrow{AP},\ \boldsymbol{n}\rangle$.

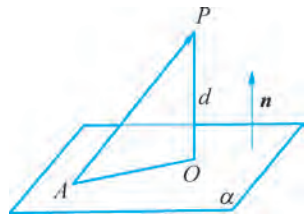


图 6－3－10

从而 $$|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}.$$

因为 $|\overrightarrow{AP}|\cos\theta$ 的绝对值即为点 P 到平面 α 的距离 d，所以

$$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

例 10 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求点 B 到平面 B_1CD_1 的距离.

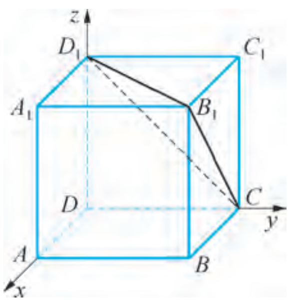


图 6－3－11

解 以 $\{\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底，建立如图 6－3－11 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$$B(1,\ 1,\ 0),\ C(0,\ 1,\ 0),\ B_1(1,\ 1,\ 1),\ D_1(0,\ 0,\ 1).$$

所以

$$\overrightarrow{D_1B_1}=(1,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{CB_1}=(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{BC}=(-1,\ 0,\ 0).$$

设平面 B_1CD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,$$

即 $$x+y=0,\ x+z=0.$$

令 $x=-1$，则 $y=1$，$z=1$.

所以 $\boldsymbol{n}=(-1,\ 1,\ 1)$ 是平面 B_1CD_1 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{3}$，所以点 B 到平面 B_1CD_1 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

思　考

本题还有其他解法吗?

下面，再考察点到直线的距离.

如图 6－3－12(1)，P 为直线 l 外一点，A 是 l 上任意一点，在点

设 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{e}+\mu\overrightarrow{AP}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 的方向向量. 根据 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}=0$，求出 λ，μ 的一组值，就得到 $\boldsymbol{n}$.

P 和直线 l 所确定的平面内，取一个与直线 l 垂直的向量 $\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=|\overrightarrow{AP}||\boldsymbol{n}|\cos\theta$，其中 $\theta=\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle$，从而点 P 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

我们还可以借助直线 l 的方向向量来求点到直线的距离.

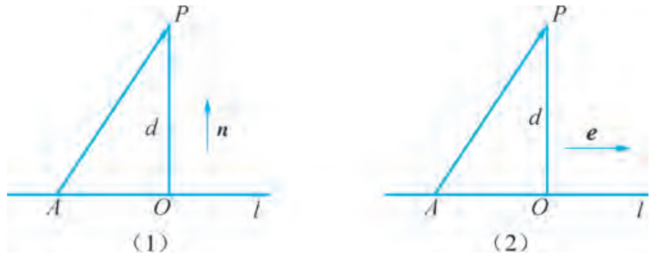


图 6－3－12

如图 6－3－12(2)，P 是直线 l 外一点，$PO\perp l$，O 为垂足，A 是 l 上任意一点，设 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 的方向向量，记 $\varphi=\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{e}\rangle$，则

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{e}}{|\overrightarrow{AP}||\boldsymbol{e}|},$$

故点 P 到直线 l 的距离为

$$d=|\overrightarrow{AP}|\sin\varphi.$$

例 11 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别是 BC 和 CD 的中点.

(1) 求证：$EF /\!/ B_1D_1$；

(2) 求两条平行线 EF 和 B_1D_1 间的距离.

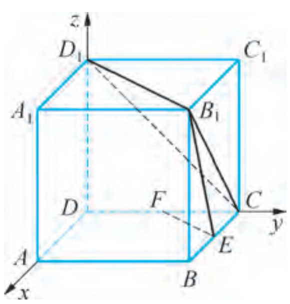


图 6－3－13

解 以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底，建立如图 6－3－13 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$D_1(0,0,1)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 因为 $\overrightarrow{FE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{D_1B_1}=(1,1,0)=2\overrightarrow{FE}$，

所以
$$\overrightarrow{FE} /\!/ \overrightarrow{D_1B_1}.$$
故
$$EF /\!/ B_1D_1.$$

(2) 因为 $EF /\!/ B_1D_1$，所以点 E 到直线 B_1D_1 的距离即为两条平行线 EF 和 B_1D_1 间的距离.

方法 1 设在平面 EB_1D_1 内与直线 B_1D_1 垂直的向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{B_1D_1}$ 可得 $x+y=0$.

由 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{B_1D_1}$，$\overrightarrow{B_1E}$共面可知，存在实数 m，p，使得

$$\boldsymbol{n}=m\overrightarrow{B_1D_1}+p\overrightarrow{B_1E}.$$

因为$\overrightarrow{B_1D_1}=(-1, -1, 0)$，$\overrightarrow{B_1E}=\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$，

所以
$$\begin{aligned}(x, y, z)&=m(-1, -1, 0)+p\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)\\&=\left(-m-\frac{1}{2}p, -m, -p\right),\end{aligned}$$

即
$$\begin{cases}x=-m-\frac{1}{2}p,\\ y=-m,\\ z=-p.\end{cases}$$

所以
$$x=y+\frac{1}{2}z.$$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=4$，即 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 4)$.

故点 E 到直线 B_1D_1 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{EB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\frac{9}{2}\right|}{\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

即两条平行线 EF 和 B_1D_1 间的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

方法 2 连接 EB_1，则 $\overrightarrow{EB_1}=\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

记 $\theta=\langle\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{EB_1}\rangle$，

因为
$$\overrightarrow{D_1B_1}\cdot\overrightarrow{EB_1}=\frac{1}{2}, |\overrightarrow{D_1B_1}|=\sqrt{2}, |\overrightarrow{EB_1}|=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

所以
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{D_1B_1}\cdot\overrightarrow{EB_1}}{|\overrightarrow{D_1B_1}||\overrightarrow{EB_1}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}, \sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

我们还可以结合平面几何知识求解：设 M，N 分别是 EF，B_1D_1 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1\right)$. 易证$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{B_1D_1}$，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 就是所求的距离.

故点 E 到直线 B_1D_1的距离为

$$d=|\overrightarrow{EB_1}|\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

即两条平行线 EF 和 B_1D_1间的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

通过例 10 和例 11 我们可以归纳出用向量方法研究空间距离问

题的一般步骤：

第一步，确定法向量；

第二步，选择参考向量；

第三步，确定参考向量到法向量的投影向量；

第四步，求投影向量的长度.

练　习

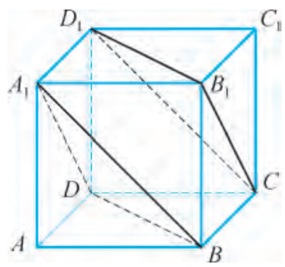
1. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 两条平行直线 A_1D 和 B_1C 间的距离为________；

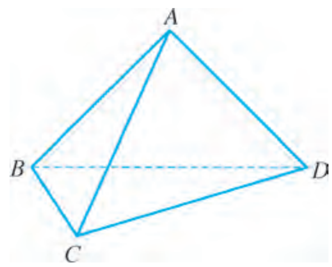
(2) 两个平行平面 A_1DB 和 D_1CB_1 间的距离为________；

(3) 点 A 到平面 A_1DB 的距离为________；

(4) 点 A 到直线 D_1C 的距离为________.



（第 1 题）



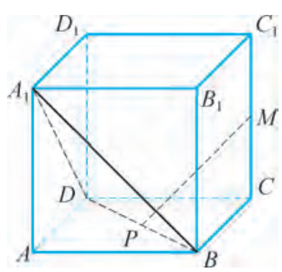
（第 2 题）

2. 如图，将边长为$\sqrt{2}$的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成直二面角，求点 D 到平面 ABC 的距离.

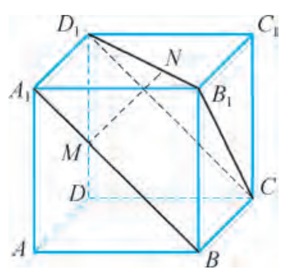
3. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是正方形 $ABCD$ 的中心，M 是 CC_1 的中点.

(1) 求点 A_1 到直线 MP 的距离；

(2) 求点 C 到平面 A_1DB 的距离.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1M=\frac{1}{3}A_1B$，$B_1N=\frac{1}{3}B_1D_1$.

(1) 求证：$A_1B \parallel$ 平面 B_1D_1C；

(2) 求证：$\overrightarrow{MN}$是平面 B_1D_1C 的法向量；

(3) 求 A_1B 和平面 B_1D_1C 的距离.

链 接

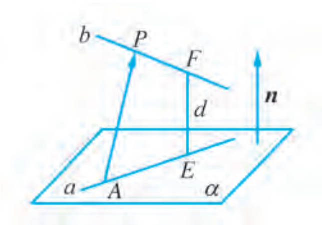


图 6－3－14

运用空间向量求异面直线间的距离

如图 6－3－14，设 A，P 分别为异面直线 a，b 上的点，$\boldsymbol{n}$ 是与直线 a，b 都垂直的向量，从而异面直线 a，b 间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|},$$

即为向量$\overrightarrow{AP}$在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量的模.

习题 6.3

感受·理解

1. 已知点 $A(1,1,1)$，$B(0,2,0)$，$C(2,3,1)$.

(1) 写出直线 BC 的一个方向向量；

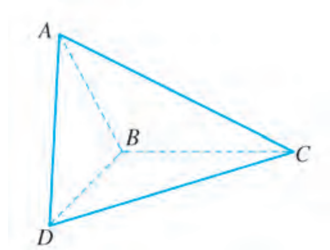
(2) 写出平面 ABC 的一个法向量.

2. 如图，已知$\triangle ABC$ 和$\triangle DBC$ 所在的平面互相垂直，$AB=BC=BD$，$\angle ABC=\angle DBC=120^{\circ}$，求：

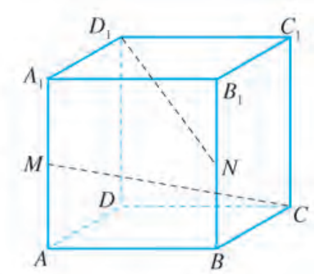
(1) AD 与 BC 所成的角；

(2) AD 与平面 BCD 所成的角；

(3) 二面角 $A-BD-C$ 的大小.



（第 2 题）



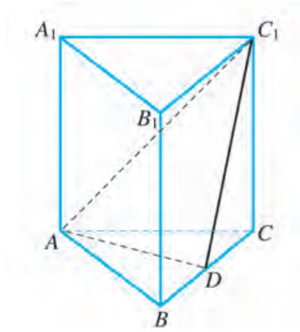
（第 3 题）

3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 A_1A，B_1B 的中点，求直线 CM 与 D_1N 所成的角.

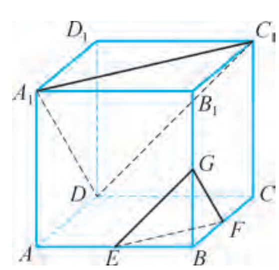
4. 如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都等于 2，点 D 是 BC 上一点，$AD\perp C_1D$.

(1) 求证：平面 $ADC_1\perp$平面 BCC_1B_1；

(2) 求点 A_1 到平面 AC_1D 的距离.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F，G 分别为 AB，BC，BB_1 的中点.

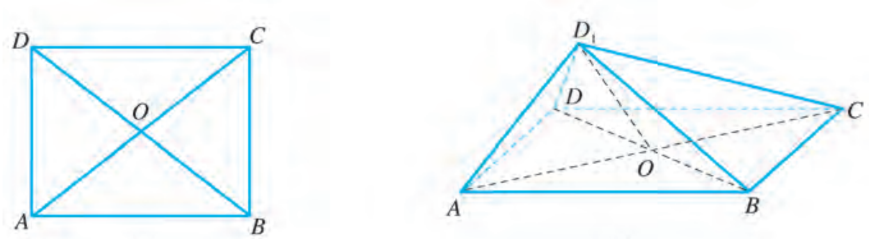
(1) 求证：平面 A_1DC_1 // 平面 EFG；

(2) 求平面 A_1DC_1 与平面 EFG 间的距离.

思考・运用

6. 已知平面的一条斜线和它在平面内的射影的夹角为 θ_1，平面内的一条直线和这条斜线在平面内的射影的夹角为 θ_2. 设斜线和平面内这条直线的夹角为 θ，求证：$\cos\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$.

7. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，$AB = 4$，$AD = 3$. 沿 AC 把 $\triangle ACD$ 折起，使二面角 D_1-AC-B 为直二面角，求二面角 D_1-BC-A 的大小.



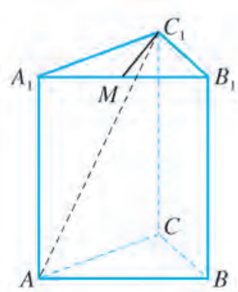
(1)　　(2)

（第 7 题）

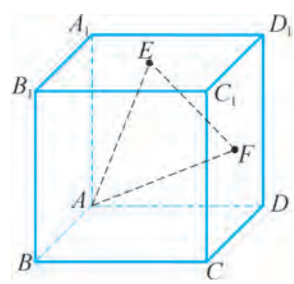
8. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为 $\sqrt{2}a$，M 是 A_1B_1 的中点.

(1) 求证：$\overrightarrow{MC_1}$ 是平面 ABB_1A_1 的一个法向量；

(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和侧面 CDD_1C_1 的中心.

(1) 求 $\cos\angle EAF$；

(2) 求直线 AE 与平面 CDD_1C_1 所成角的正弦值；

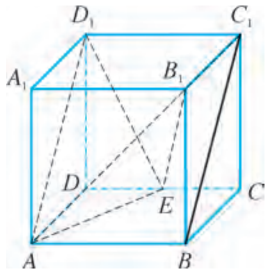
(3) 求点 C 到平面 AEF 的距离.

10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 CD 的中点.

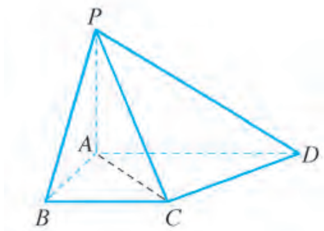
(1) 求证：$EB_1 \perp AD_1$；

(2) 求 D_1E 与 AC_1 所成的角；

(3) 求证：BC_1 // 平面 AD_1E，并求直线 BC_1 和平面 AD_1E 的距离.



（第 10 题）



（第 11 题）

探究·拓展

11. 如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面$ABCD$，PB 与底面$ABCD$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2$，$PA=BC=1$.

(1) 求证：平面 $PAC\perp$平面 PCD.

(2) 在棱 PD 上是否存在一点E，使 $CE /\!/$ 平面 PAB？若存在，请确定点 E 的位置；若不存在，试说明理由.

(3) 求点 P 到直线CD 的距离.

12. 已知点 $A(-2,\ 3,\ -3)$，$B(4,\ 5,\ 9)$.

(1) 设平面 α 经过线段AB 的中点，且与直线 AB 垂直，$M(x,\ y,\ z)$是平面 α 内任意一点，求 x，y，z 满足的关系式；

(2) 求到 A，B 两点距离相等的点 $P(x,\ y,\ z)$的坐标 x，y，z 满足的关系式；

(3) 比较(1)(2)的结论，你发现了什么？

问题与探究

平 面 方 程

我们知道，在平面直角坐标系中，方程 $x+y=1$ 表示直线. 那么，在空间直角坐标系中，方程 $x+y+z=1$ 表示什么图形呢？

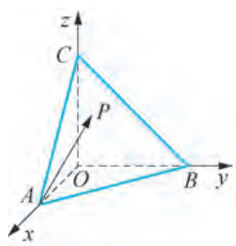


图 1

如图 1，已知空间三点 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$，点 $P(x, y, z)$ 是空间任意一点，试探究点 A，B，C，P 共面的充要条件.

分析 设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 ABC 的一个法向量，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{AB}=(-1, 1, 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1, 0, 1)$，容易验证 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$ 垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，所以 $\boldsymbol{n}$ 是平面 ABC 的一个法向量. 由此可得

$P\in$ 平面 ABC

$\Leftrightarrow$ 直线 $AP\subset$ 平面 ABC

$\Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\Leftrightarrow (1, 1, 1)\cdot(x-1, y, z)=x-1+y+z=0$

$\Leftrightarrow x+y+z=1$.

因此，$x+y+z=1$ 是平面 ABC 上的点满足的条件，也就是平面 ABC 的方程.

请仿照上面的方法，解决下面的问题：

(1) 求过点 $A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, c)$ 的平面 ABC 的方程，其中 a，b，c 均是不等于 0 的常数.

(2) 已知 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 是平面 α 的一个法向量，且平面 α 经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，试求平面 α 的方程.

(3) 已知平面 α 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，证明 (A, B, C) 是平面 α 的法向量.

(4) 求证：点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

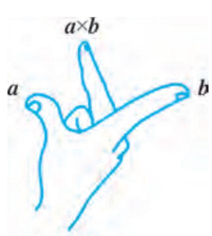
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

阅 读

向量的向量积

两个空间向量除了数量积运算外，还有一种称为向量积的运算.

1. 向量积的定义



右手系

两个空间向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模是：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向是：垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 按照这个顺序成右手系. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 向量的向量积也称为外积或叉积.

向量积的几何意义：两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

2. 向量积的性质

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

3. 向量积的运算律

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为实数).

4. 向量积的坐标表示

在空间直角坐标系 O-xyz 中，分别取与 x 轴、y 轴、z 轴方向相同的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 作为基向量.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则

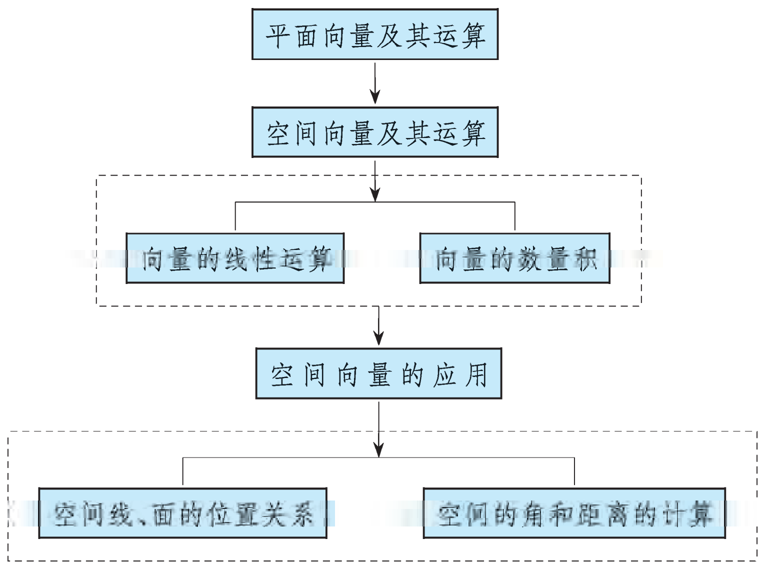
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}.$$

你能根据向量积的定义来求平面的法向量吗?

本章回顾

本 章 概 览

本章在平面向量的基础上，学习了空间向量及其运算，并运用向量的方法解决了有关空间直线、平面的平行、垂直以及夹角、距离等问题.

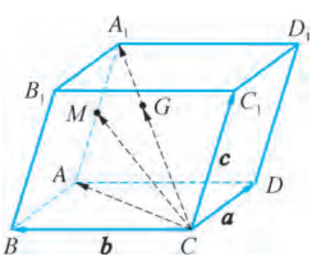


空间向量为我们处理立体几何问题提供了新的视角，它是解决三维空间中图形的位置关系与度量问题的有效工具. 我们要体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想象力.

向量方法是解决问题的一种重要方法，坐标法是研究向量问题的有力工具. 利用空间向量的坐标表示，可以把向量问题转化为代数运算，从而沟通了几何与代数的联系，体现了数形结合的重要数学思想.

复 习 题

感受 · 理解



（第 1 题）

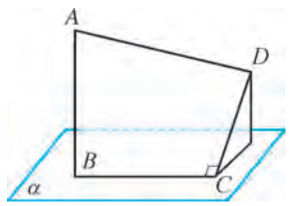
1. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是棱 AA_1 的中点，点 G 在对角线 A_1C 上，且 $CG : GA_1 = 2 : 1$. 设 $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1} = \boldsymbol{c}$，用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CA_1}$，$\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{CG}$.

2. 已知 E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，用向量法证明：

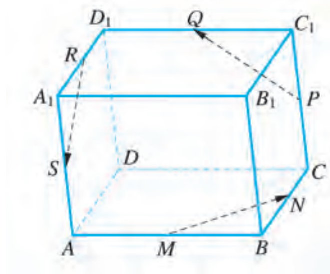
(1) E，F，G，H 四点共面；　　(2) $BD /\!/$ 平面 $EFGH$.

3. 已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外任一点 O，满足条件 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$，判断点 P 与 A，B，C 是否共面.

4. 如图，线段 $AB \perp$ 平面 α，BC 在 α 内，$CD \perp BC$，CD 与平面 α 成 30° 角，点 D 与点 A 在 α 的同侧. 已知 $AB = BC = CD = 2$，求 AD 的长.



（第 4 题）



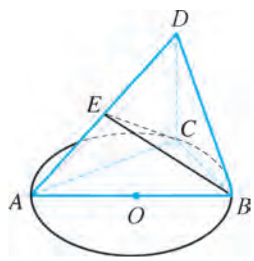
（第 5 题）

5. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P，Q，R，S 分别是各棱的中点，求证：向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{RS}$ 共面.

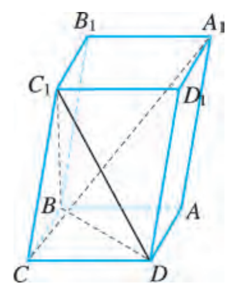
6. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，AB 为 $\odot O$ 的直径，$AB = 10$，$BC = 6$，$CD = 8$，且 $CD \perp$ 平面 ABC，E 为 AD 的中点.

(1) 求证：平面 $BCE \perp$ 平面 ABD；(2) 求异面直线 BE 与 AC 所成的角；

(3) 求点 A 到平面 BCE 的距离.



（第 6 题）



（第 7 题）

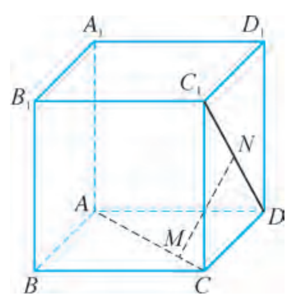
7. 如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = \theta$.

(1) 求证：$C_1C \perp BD$；

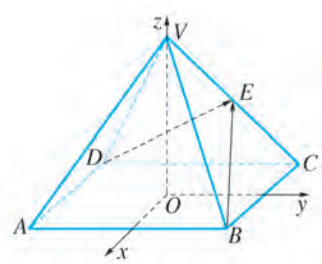
(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，$A_1C \perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

思考·运用

8. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，MN 是异面直线 AC 与 C_1D 的公垂线段，试确定点 M 在 AC 上及点 N 在 C_1D 上的位置，并求异面直线 AC 与 C_1D 间的距离.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，以正四棱锥 $V-ABCD$ 的底面中心 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，其中 $Ox \parallel BC$，$Oy \parallel AB$，E 为 VC 的中点，正四棱锥的底面边长为 $2a$，高为 h.

(1) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle$;

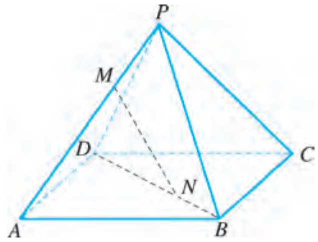
(2) 当$\angle BED$是二面角$B-VC-D$的平面角时,求$\angle BED$.

10. 如图,在正四棱锥$P-ABCD$中,$PA=AB=2$,点M,N分别在PA,BD上,且$\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{1}{3}$.

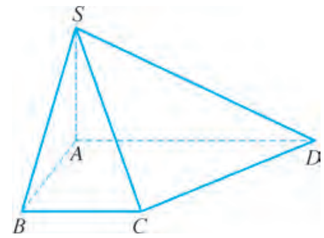
(1) 求证:$MN\perp AD$;

(2) 求MN与PC所成的角;

(3) 求证MN // 平面PBC,并求直线MN和平面PBC的距离.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图,已知四棱锥$S-ABCD$的底面$ABCD$是直角梯形,AD // BC,$AD=2$,$\angle ABC=90°$,$SA\perp$平面$ABCD$,$SA=AB=BC=1$. 求:

(1) 四棱锥$S-ABCD$的体积;

(2) 平面SCD与平面SBA所成的二面角的余弦值;

(3) 点S到直线CD的距离.

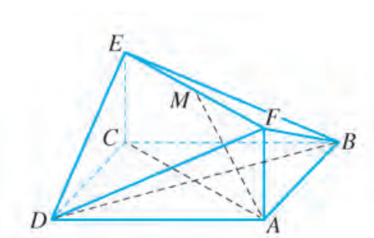
探究・拓展

12. 如图,已知正方形$ABCD$和矩形$ACEF$所在的平面互相垂直,$AB=\sqrt{2}$,$AF=1$,M是线段EF的中点.

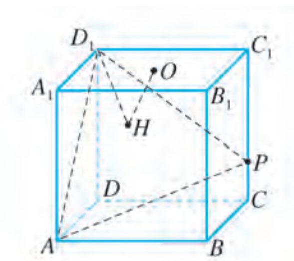
(1) 求证AM // 平面BDE,并求直线AM和平面BDE的距离;

(2) 求二面角$A-DF-B$的大小;

(3) 试在线段AC上确定一点P,使PF与BC所成的角是$60°$.



(第 12 题)



(第 13 题)

13. 如图,在棱长为 4 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,点O为正方形$A_1B_1C_1D_1$的中心,点P在棱CC_1上,且$CC_1=4CP$.

(1) 求直线AP与平面BCC_1B_1所成角的余弦值.

(2) 设点O在平面AD_1P上的射影为点H,求证:$D_1H\perp AP$.

(3) 求点C_1到平面AD_1P的距离.

(4) 在线段A_1B_1上是否存在点Q,使得$DQ\perp$平面AD_1P? 若存在,请确定点Q的位置;若不存在,试说明理由.

本章测试

一、填空题

1. 若 $\overrightarrow{AB}=(2,3,6)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$________.

2. 若 $\boldsymbol{a}=(3,2,4)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,1)$，则 $3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 的坐标为____________.

3. 若 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是一个单位正交基底，且向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(0,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$，那么 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

5. 设 k 为实数，已知 $\boldsymbol{a}=(1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{p}=k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{p}\,/\!/\,\boldsymbol{q}$，则 k 的值为________.

6. 若单位向量 $\boldsymbol{e}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,0,1)$ 都垂直，则向量 $\boldsymbol{e}$ 的坐标为________________.

二、选择题

7. 已知点 $A(3,-1,0)$，若向量 $\overrightarrow{AB}=(2,5,-3)$，则点 B 的坐标是(　　).

A. $(1,-6,3)$　　B. $(5,4,-3)$

C. $(-1,6,-3)$　　D. $(2,5,-3)$

8. 已知 A,B,C 三点不共线，O 为平面 ABC 外一点，下列条件中能确定 M,A,B,C 四点共面的是(　　).

A. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　　B. $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

9. 在空间直角坐标系中，若三点 $A(1,-1,a)$，$B(2,a,0)$，$C(1,a,-2)$ 满足 $(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{BC}$，则实数 a 的值为(　　).

A. $\frac{9}{2}$　　B. 1

C. $-\frac{9}{2}$　　D. $-\frac{7}{2}$

10. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$，若 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{8}{9}$，则实数 λ 的值为(　　).

A. 2　　B. -2

C. -2 或 $\frac{2}{55}$　　D. 2 或 $-\frac{2}{55}$

三、解答题

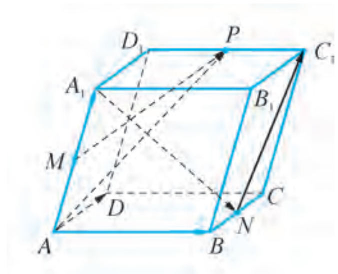
11. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,2)$.

(1) 求 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$；

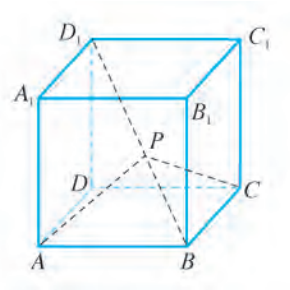
(2) 当 $(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$ 时，求实数 k 的值.

12. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，$M,N,P$ 分别是棱 AA_1，BC，C_1D_1 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示以下各向量：

(1) $\overrightarrow{AP}$；(2) $\overrightarrow{A_1N}$；(3) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$.



（第 12 题）



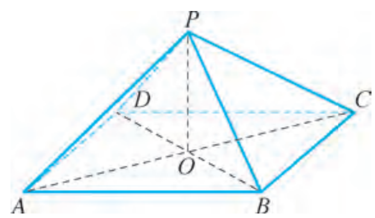
（第 13 题）

13. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 P 是对角线 BD_1 上异于 B，D_1 的点，记 $\dfrac{D_1P}{D_1B}=t$. 当 $\angle APC$ 为钝角时，求实数 t 的取值范围.

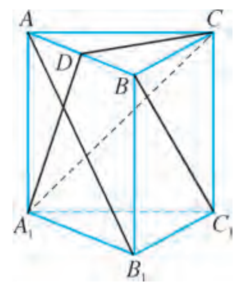
14. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面正方形的对角线 AC，BD 交于点 O，$AB=2$，$OP=1$. 求：

(1) 二面角 $B-PD-C$ 的大小；

(2) 点 B 到平面 CDP 的距离.



（第 14 题）



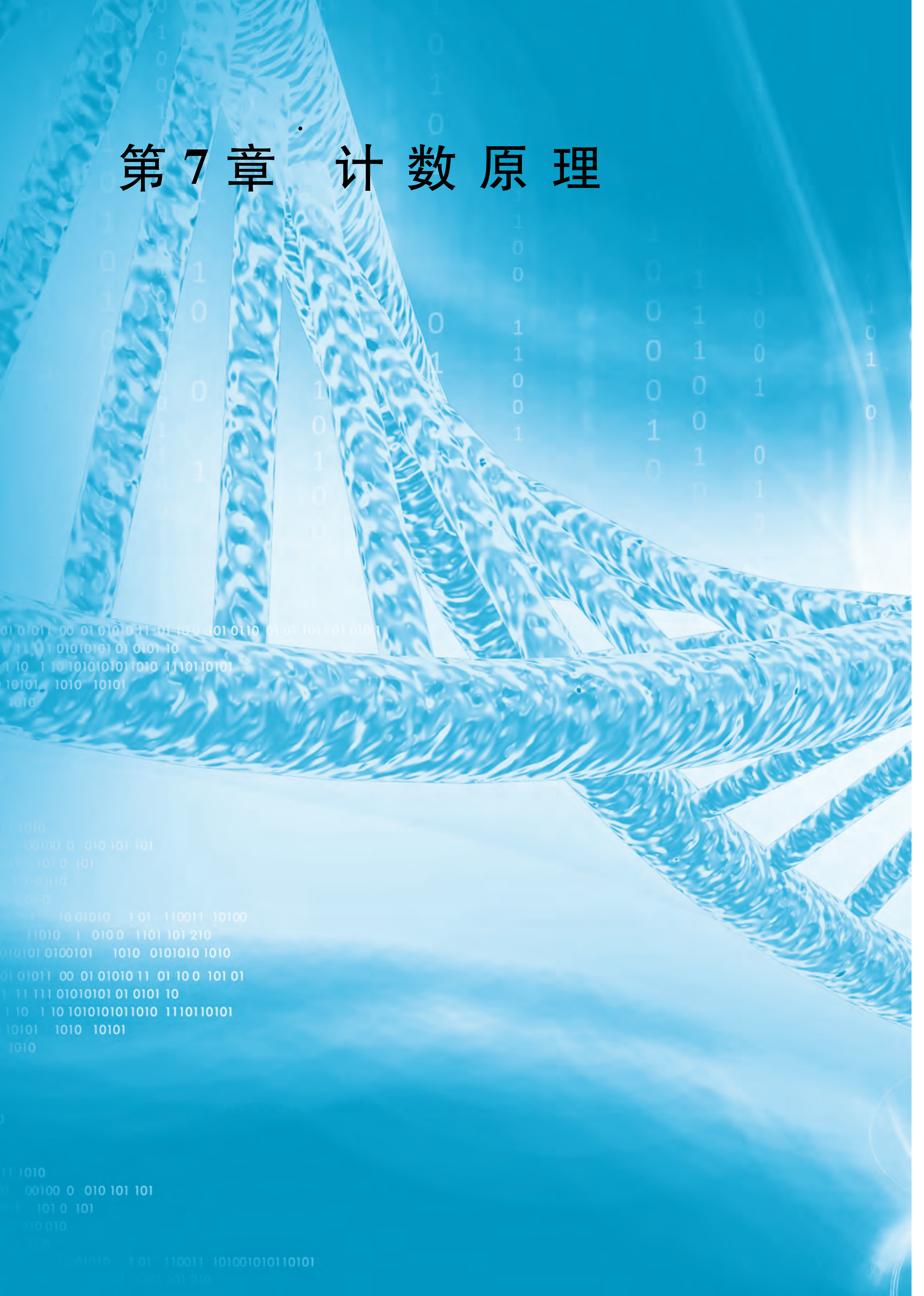
（第 15 题）

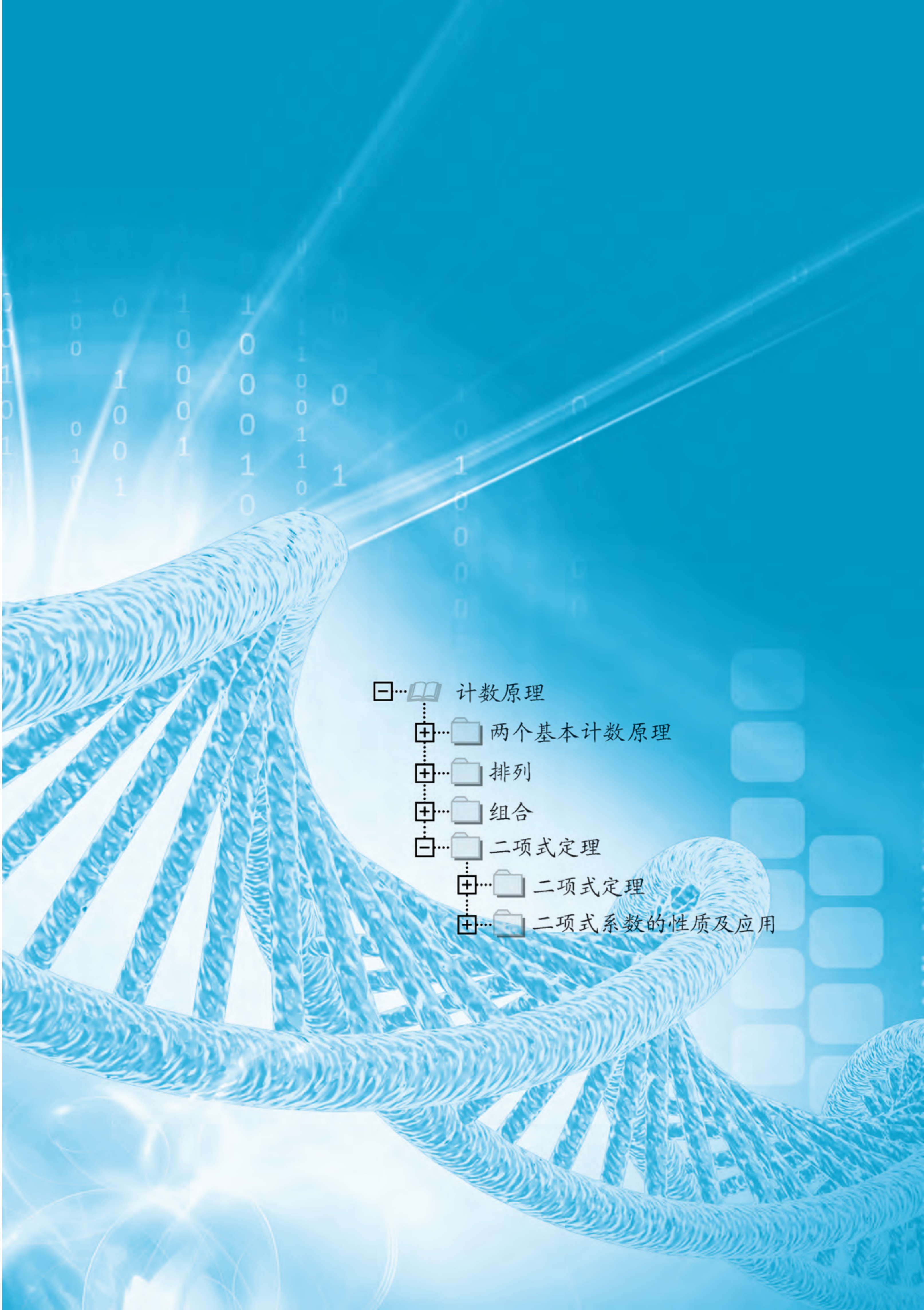
15. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=BC=BB_1$，D 为 AB 的中点. 试用向量的方法证明：

(1) $BC_1\perp AB_1$；

(2) BC_1 // 平面 A_1CD.

第 7 章　计 数 原 理





计数原理

- 两个基本计数原理
- 排列
- 组合
- 二项式定理
  - 二项式定理
  - 二项式系数的性质及应用

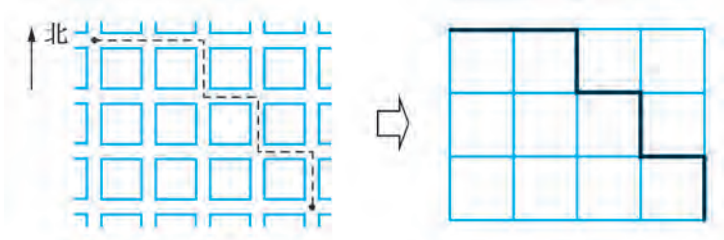
有待探索的自然界是有规律的. 相信基本规律是简明单纯的.

——爱因斯坦

在生活中，与计数有关的问题是普遍存在的，如电话号码的编排、密码的设定、体育赛事的设计、集成电路的布线安排，以及生物遗传的可能，等等.

在某时间段内，某市的汽车号牌后 5 个号码选号规则为：从 24 个英文字母(O，I 容易和 0，1 混淆，一般不用)中任选 1 个，从 10 个阿拉伯数字中任选 4 个，并按照适当的顺序排列而成，那么在这个时间段内，该市所有可能的汽车号牌号码有多少个?

下图是某城市的局部街道. 某同学的家位于西北角，学校位于东南角. 问：从该同学家经过东西 4 条街、南北 5 条街到学校(最短距离)，有多少种不同的走法?



上述两个问题都涉及计数的问题. 通过列举或树形图，可以解决问题. 但是，当数值较大或情况比较复杂时，计数就比较困难. 本章将构建适当的数学模型来分析和解决上述计数问题，并借助构建的模型研究二项展开式的相关知识. 那么，

- 构建怎样的数学模型来刻画和解决计数问题?

7.1 两个基本计数原理

考察下面两个问题：

(1) 如图 7－1－1(1)，从甲地到乙地有 3 条公路、2 条铁路，那么从甲地到乙地，共有多少种不同的方法？

(2) 如图 7－1－1(2)，从甲地到乙地有 3 条道路，从乙地到丙地有 2 条道路，那么从甲地经乙地到丙地，共有多少种不同的方法？

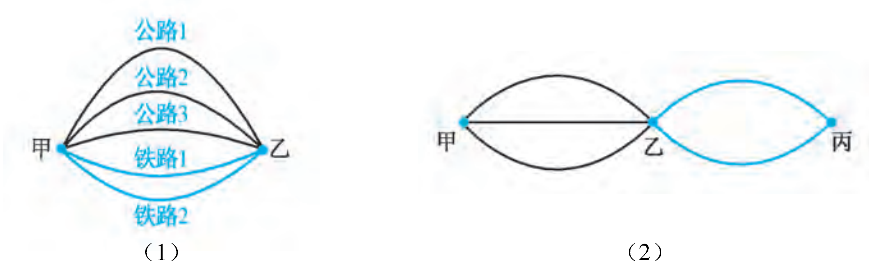


图 7－1－1

- 上述两个问题有什么区别？
- 由这两个问题分别可以得到怎样的数学模型？

先考察问题(1).

公路有 3 条，走任意一条公路都能完成从甲地到乙地这件事；而铁路有 2 条，走任意一条铁路也都能完成从甲地到乙地这件事. 所以，从甲地到乙地共有

$$3+2=5$$

种不同的方法.

再考察问题(2).

必须经过先从甲地到乙地，再从乙地到丙地两个步骤，才能完成从甲地经乙地到丙地这件事(图 7－1－2).

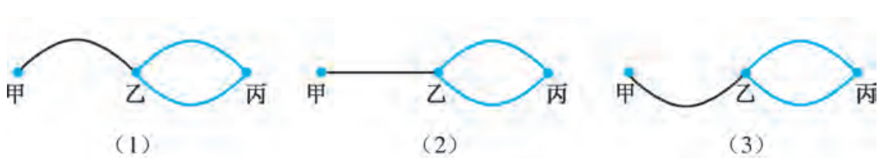


图 7－1－2

从甲地到乙地有 3 种不同的方法，从乙地到丙地有 2 种不同的方法. 所以，从甲地经乙地到丙地共有

$$3\times 2=6$$

种不同的方法.

由上述分析可知，在问题(1)中，任选一种方法都能达到完成这件事的目的. 在问题(2)中，必须依次连续完成两个步骤，才能达到完成这件事的目的.

一般地，我们有：

分类计数原理又称为加法原理.

分类计数原理　如果完成一件事，有 n 类方式，在第 1 类方式中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方式中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

分步计数原理又称为乘法原理.

分步计数原理　如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

例 1　某班共有男生 28 名、女生 20 名，从该班选出学生代表参加校学生代表大会.

(1) 若学校分配给该班 1 名代表，则有多少种不同的选法？

(2) 若学校分配给该班 2 名代表，且男、女生代表各 1 名，则有多少种不同的选法？

解　(1) 选出 1 名代表有两类方式：

第一类　从男生中选出 1 名代表，有 28 种不同的选法；

第二类　从女生中选出 1 名代表，有 20 种不同的选法.

根据分类计数原理，共有不同的选法种数是

$$28 + 20 = 48.$$

(2) 选出男、女生代表各 1 名，可以分成两个步骤完成：

第一步　选 1 名男生代表，有 28 种不同的选法；

第二步　选 1 名女生代表，有 20 种不同的选法.

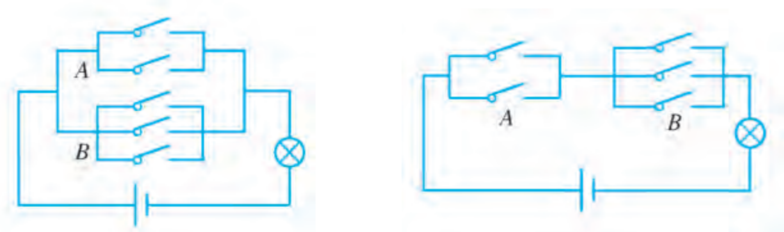
根据分步计数原理，选出男、女生代表各 1 名，共有不同的选法种数是

$$28 \times 20 = 560.$$

答　选出 1 名代表有 48 种不同的选法；选出男、女生代表各 1 名，有 560 种不同的选法.

例 2 (1) 在图 7－1－3(1)的电路中，仅合上 1 只开关接通电路，有多少种不同的方法?

(2) 在图 7－1－3(2)的电路中，仅合上 2 只开关接通电路，有多少种不同的方法?



(1) (2)

图 7－1－3

解 (1)在图 7－1－3(1)中，按要求接通电路，只要在 A 中的 2 只开关或 B 中的 3 只开关中合上 1 只即可. 根据分类计数原理，共有

$$2+3=5$$

种不同的方法.

(2) 在图 7－1－3(2)中，按要求接通电路必须分两步进行：第一步，合上 A 中的 1 只开关；第二步，合上 B 中的 1 只开关. 根据分步计数原理，共有

$$2\times3=6$$

种不同的方法.

答 在图 7－1－3(1)的电路中，仅合上 1 只开关接通电路，有 5 种不同的方法；在图 7－1－3(2)的电路中，仅合上 2 只开关接通电路，有 6 种不同的方法.

例 3 3 名同学每人从 5 本不同的电子书中任选 1 本，共有多少种不同的选法?

分析 3 名同学选电子书，要分每名同学依次选电子书的 3 步进行. 每名同学选电子书都有 5 种不同的选法.

解 第一名同学选 1 本电子书有 5 种不同的选法，第二、第三名同学各选 1 本电子书，仍各有 5 种不同的选法. 因此，根据分步计数原理，3 名同学每人各选 1 本电子书的不同选法种数是

$$5\times5\times5=125.$$

答 共有 125 种不同的选法.

例 4 为了确保电子邮箱的安全，在注册时，通常要设置电子邮箱密码. 在某网站设置的邮箱中，

(1) 若密码为 4 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个，则这样的密码共有多少个？

(2) 若密码为 4～6 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个，则这样的密码共有多少个？

解 (1) 设置 1 个 4 位密码要分 4 步进行，每一步确定一位数字，每一位上都可以从 0～9 这 10 个数字中任取 1 个，有 10 种取法. 根据分步计数原理，4 位密码的个数是

$$10\times10\times10\times10=10\,000.$$

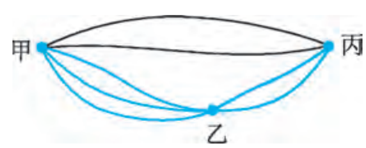
(2) 设置的密码为 4～6 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个，这样的密码共有 3 类. 其中 4 位密码、5 位密码、6 位密码的个数分别为 10^4，10^5，10^6. 根据分类计数原理，设置由数字 0～9 组成的 4～6 位密码的个数是

$$10^4+10^5+10^6=1\,110\,000.$$

答 满足条件的密码的个数分别为 10 000 和 1 110 000.

练 习

1. 已知某种新产品的编号由 1 个英文字母和 1 个数字组合而成，且英文字母在前. 其中英文字母可以是 A，B，C，D，E，F 这 6 个字母中的 1 个，数字可以是 1，2，…，9 这 9 个数字中的 1 个. 问：共有多少种不同的编号？
2. 某人有 4 枚明朝不同年代的古币和 6 枚清朝不同年代的古币.
   (1) 若从中任意取出 1 枚，则有多少种不同的取法？
   (2) 若从中任意取出明、清古币各 1 枚，则有多少种不同的取法？
3. 从甲地到乙地，可以乘飞机，也可以乘火车，还可以乘长途汽车. 每天飞机有 2 班，火车有 4 班，长途汽车有 10 班. 一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的方法？
4. 手表厂为了生产更多款式新颖的手表，给统一的机芯设计了 4 种形状的外壳、2 种颜色的表面及 3 种形式的数字. 问：共有几种不同的款式？
5. 如图，从甲地到乙地有 3 条公路，从乙地到丙地有 2 条公路，从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路. 问：
   (1) 从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法？
   (2) 从甲地到丙地共有多少种不同的走法？



(第 5 题)

6. 若 4 名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组，每人选报 1 项，则不同的报名方式有( ).

   A. 3^4 种　　B. 4^3 种　　C. $3\times2\times1$ 种　　D. $4\times3\times2$ 种

习题 7.1

感受 · 理解

1. 在读书节上，1 名学生要从 7 本不同的科技类图书、8 本不同的历史类图书和 6 本不同的文艺类图书中任选 1 本，共有多少种不同的选法？

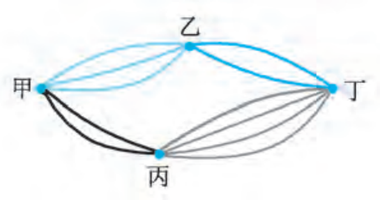
2. 在校本课程目录中，1 名学生在科技类课程中发现了 4 门有趣的课程，在文艺类课程中发现了 6 门有趣的课程. 如果这名学生决定在科技类课程和文艺类课程中各选 1 门有趣的课程作为新学期的选修课，那么这名学生有多少种不同的选择？

3. 某校“数学俱乐部”有高一学生 10 人，高二学生 8 人，高三学生 7 人.

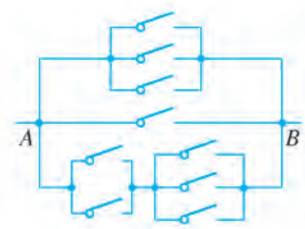
(1) 从中选出 1 人担任总干事，有多少种不同的选法？

(2) 从每一个年级各选 1 人担任本年级的组长，有多少种不同的选法？

4. 如图，从甲地到乙地有 3 条路，从乙地到丁地有 2 条路；从甲地到丙地有 2 条路，从丙地到丁地有 4 条路. 问：从甲地到丁地共有多少种不同的走法？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，一条电路从 A 处到 B 处接通时，可以有多少条不同的线路（每条线路仅含 1 条通路）？

6. (1) 从甲、乙、丙、丁 4 幅不同的画中选出 2 幅，分别挂在书房和客厅，用树形图表示出不同挂法的所有可能情况；

(2) 某农场要在 3 块不同类型的土地上，分别试种 A，B，C 3 个不同品种的小麦，用树形图表示出不同试种方法的所有可能情况.

7. 已知一个两位数中的每个数字都从 1，2，3，4 中任意选取.

(1) 如果两位数中的数字不允许重复使用，那么能得到多少个不同的两位数？

(2) 如果两位数中的数字允许重复使用，那么能得到多少个不同的两位数？

8. (1) 乘积 $(a+b+c+d)(m+n)(x+y+z)$ 展开后共有多少项？

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j$ 展开后共有多少项？

思考 · 运用

9. 以正方形的 4 个顶点中某一顶点为起点、另一个顶点为终点作向量，可以作出多少个不相等的向量？

10. (1) 如果 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，那么在平面直角坐标系内，集合 $\{(x, y) \mid x, y \in A\}$ 中有多少个不同的点？

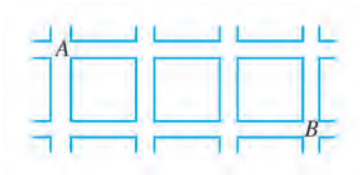
(2) 如果 $k \in \{1, 3, 5, 7\}$，$b \in \{2, 4, 6, 8\}$，那么在平面直角坐标系内，方程 $y = kx + b$ 所表示的不同的直线共有多少条？

11. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 有多少个子集？

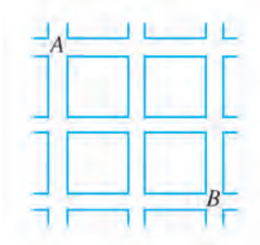
探究·拓展

12. (1) 如图(1),从 A 处沿街道走到 B 处,使路程最短的不同走法有多少种?

(2) 如图(2),从 A 处沿街道走到 B 处,使路程最短的不同走法有多少种?



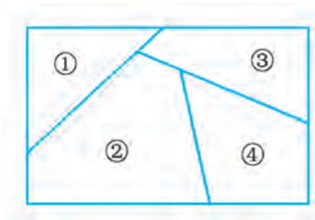
(1)



(2)

(第 12 题)

13. 用 4 种不同的颜色给如图所示的地图上色,要求相邻两块涂不同的颜色,共有多少种不同的涂法?



(第 13 题)

7.2 排　　列

考察下面两个问题：

（1）高二(1)班准备从甲、乙、丙这 3 名学生中选出 2 人分别担任班长和副班长，有多少种不同的选法？

（2）从 1，2，3 这 3 个数字中取出 2 个数字组成两位数，这样的两位数共有多少个？

● 上面两个问题有什么共同特征？可以用怎样的数学模型来刻画？

先考察问题(1)中的所有可能的选法.

从 3 名学生中选出 2 人担任班长和副班长，可以分成两个步骤完成：

第一步：从甲、乙、丙 3 名学生中选出 1 人担任班长；

第二步：从余下的 2 人中选出 1 人担任副班长.

所有可能的情况用树形图表示(图 7－2－1)：

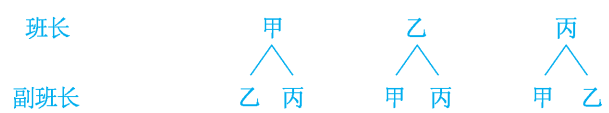


图 7－2－1

即共有 6 种不同的选法：甲乙，甲丙，乙甲，乙丙，丙甲，丙乙.

事实上，这 6 种选法分别是从甲、乙、丙这 3 名学生中选 2 名学生，并按一定的顺序排成一列(班长排在第 1 位，副班长排在第 2 位)而得到的.

类似地，问题(2)中的每个两位数都是从 3 个不同的数字中取 2 个数字，按一定的顺序排成了一列.

如无特别说明，取出的 m 个元素都是不重复的.

一般地，从 n 个不同的元素中取出 m $(m \leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**(arrangement).

例 1　(1) 写出从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 2 个字母的所有排列；

(2) 写出从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 3 个字母的所有排列.

解　(1) 把 a，b，c，d 中的任意一个字母排在第 1 个位置上，有 4 种排法；第 1 个位置上的字母排好后，第 2 个位置上的字母就有 3 种排法.

如果第 1 个位置是 a，那么第 2 个位置可以是 b，c 或 d，有 3 个排列，即 ab，ac，ad.

同理，第 1 个位置更换为 b，c 或 d，也分别各有 3 个排列，如图 7－2－2 所示.

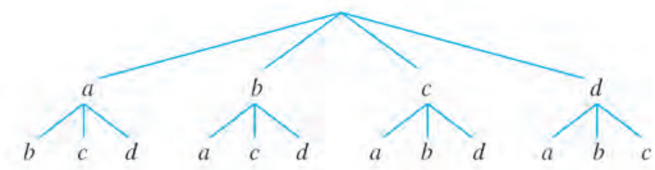


图 7－2－2

因此，共计有 12 个不同的排列，它们是

$$ab，ac，ad，ba，bc，bd，$$
$$ca，cb，cd，da，db，dc.$$

(2) 根据(1)，从 4 个字母中取出 2 个字母的排列有 12 个，在每一种这样的排列后面排上其余 2 个字母中的任何一个，就得到取出 3 个字母的所有排列，如图 7－2－3 所示.

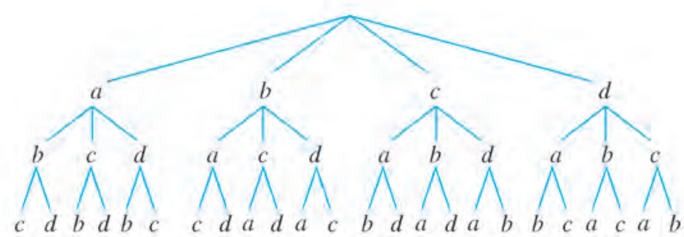


图 7－2－3

因此，共计有 24 个不同的排列，它们是

abc与acb是相同的排列吗?

$$abc，abd，acb，acd，adb，adc，$$
$$bac，bad，bca，bcd，bda，bdc，$$
$$cab，cad，cba，cbd，cda，cdb，$$
$$dab，dac，dba，dbc，dca，dcb.$$

思考

你能写出 a，b，c，d 这 4 个字母都取出的所有排列吗？

练习

1. 写出从 a，b，c 这 3 个字母中取出 2 个字母的所有排列.

2. 用红、黄、蓝 3 面小旗(3 面小旗都要用)竖挂在绳上表示信号，不同的顺序表示不同的信号，试写出所有的信号.

3. a，b，c 排成一行，其中 b 不排在第 2 位，写出所有满足条件的排列.

4. 从 0，1，2，3 这 4 个数字中选出 3 个不同的数字组成 1 个三位数，试写出所有满足条件的三位数.

从例 1(2)的树形图中可以看出，处理排列问题可分步进行. 例如，例 1(2)将构成排列的过程分为 3 个步骤，从第 1 位到第 3 位依次选填：

第 1 位可从这 4 个字母中任取 1 个来填，有 4 种不同的方法；

第 2 位从剩下的 3 个字母中任取 1 个来填，有 3 种不同的方法；

第 3 位从剩下的 2 个字母中任取 1 个来填，有 2 种不同的方法(图 7－2－4).

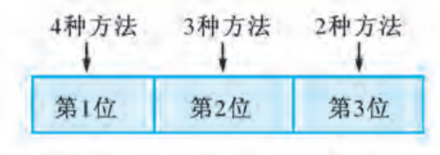


图 7－2－4

根据分步计数原理可知，从 4 个字母中任取 3 个字母的所有排列的个数为 $4\times3\times2=24$.

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，用符号 A_n^m 表示，如例 1(2)中的排列数可以表示为 $\mathrm{A}_4^3=24$.

思　考

“排列”与“排列数”有何区别与联系？

一般地，为了求出从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的排列数，可以把这 m 个元素所排列的位置划分为第 1 位、第 2 位……第 m 位(图 7－2－5).

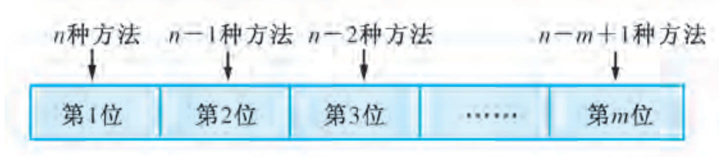


图 7－2－5

第一步　第 1 位从 n 个元素中任取 1 个来填，有 n 种不同的方法；

第二步　第 2 位只能在余下的 $n-1$ 个元素中任取 1 个来填，有 $n-1$ 种不同的方法；

第三步　第 3 位只能在余下的 $n-2$ 个元素中任取 1 个来填，有 $n-2$ 种不同的方法；

……

第 m 步　第 m 位只能在余下的 $n-(m-1)$ 个元素中任取 1 个来填，有 $n-m+1$ 种不同的方法.

根据分步计数原理，我们得到**排列数公式**

排列数 A_n^m 是 m 个连续正整数的积，其中最大的因数为 n.

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1),$$

其中 $n,m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n$.

n 个不同元素全部取出的一个排列，叫作 n 个不同元素的一个**全排列**. 在排列数公式中，当 $m=n$ 时，即有

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1,$$

$n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$ 称为 n 的**阶乘**(factorial)，通常用 $n!$ 表示，即

$$A_n^n=n!.$$

例 2 计算：

(1) A_5^3；　(2) A_5^5；

(3) A_{10}^4；　(4) A_{35}^4.

解 (1) $A_5^3=5\times4\times3=60$.

(2) $A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$.

(3) $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5\ 040$.

(4) $A_{35}^4=35\times34\times33\times32=1\ 256\ 640$.

例 3 求证：$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}(n>m)$.

证明 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\times\cdots\times2\times1}{(n-m)\times\cdots\times2\times1}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

为了使上述结论在 $m=n$ 时也成立，我们规定 $0!=1$.

由此可知，排列数公式还可以写成

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 4 求证：$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}\ (n\geqslant m\geqslant2)$.

证法 1 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!}=nA_{n-1}^{m-1}$.

证法 2 $nA_{n-1}^{m-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!}=\dfrac{n!}{(n-m)!}=A_n^m$.

你能写出其他类似的恒等式吗?

证法 3 考虑从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的排列.

一方面,其所有排列的个数为 A_n^m.

另一方面,这样的排列也可以分成两步来完成:第一步,从 n 个不同元素中取出 1 个元素,排在首位,有 n 种方法;第二步,从余下的 $n-1$ 个元素中取出 $m-1$ 个元素,排在其余位置上,有 A_{n-1}^{m-1} 种方法. 那么,所有排列的个数为 nA_{n-1}^{m-1}.

因此, $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$.

练 习

1. 计算:

(1) A_{12}^4; (2) A_6^6; (3) $A_9^4-A_9^3$; (4) $\dfrac{A_7^5}{A_5^5}$.

2. 计算下表中的阶乘数,并填入表中:

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

3. 用排列数符号 A_n^m 表示下列各式:

(1) $10\times9\times8\times7\times6=$ ________;

(2) $24\times23\times22\times\cdots\times3\times2\times1=$ ________;

(3) $k(k-1)(k-2)(k-3)=$ ________ $(k\in\mathbf{N}$ 且 $k\geqslant4)$.

4. 下列各式中,不等于 $n!$ 的是( ).

A. A_n^n B. $\dfrac{1}{n+1}A_{n+1}^{n+1}$ C. A_{n+1}^n D. nA_{n-1}^{n-1}

5. 求证:

(1) $A_7^4+4A_7^3=A_8^4$; (2) $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$.

例 5 从 5 名同学中选 3 名排成一列,共有多少种不同的排法?

解 从 5 名同学中选 3 名排成一列,对应于从 5 个不同元素中取出 3 个元素的一个排列. 因此,不同排法的种数是

$$A_5^3=5\times4\times3=60.$$

答 共有 60 种不同的排法.

思 考

例 5 与 7.1 节例 3 这两个问题有什么区别?

例 6 某足球联赛共有 12 支球队参加,每队都要与其余各队在主、客场分别比赛 1 次,共要进行多少场比赛?

主客场比赛可看成比赛双方的不同排列. 一个排列对应一场比赛.

分析 由于任何两队间进行 1 次主场比赛与 1 次客场比赛,所以 1 场比赛相当于从 12 个不同元素中任取 2 个元素的 1 个排列.

解 因为 1 场比赛对应于从 12 个不同元素中任取 2 个元素的 1 个排列,所以总共进行的比赛场次是

$$A_{12}^2 = 12 \times 11 = 132.$$

答 共要进行 132 场比赛.

例 7 用 0～9 这 10 个数字能组成多少个没有重复数字的三位数?

解法 1 由于百位上的数字不能是 0，因此，为了得到这个三位数，可以分两步完成(图 7－2－6)：

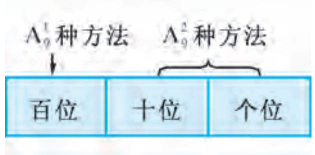


图 7－2－6

第一步 排百位上的数字，可从 1～9 这 9 个数字中任选 1 个，有 A_9^1 种选法；

第二步 排十位和个位上的数字，可以从余下的 9 个数字中任选 2 个，有 A_9^2 种选法.

根据分步计数原理，所求的三位数的个数是

$$A_9^1 A_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648.$$

解法 2 考虑到 0 是一个特殊元素，因此，符合条件的三位数可以分成 3 类(图 7－2－7)：

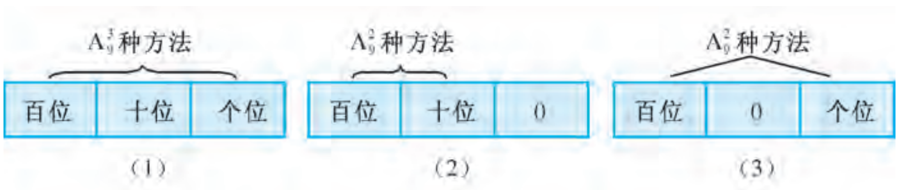


图 7－2－7

第一类 每一位数字都不是 0 的三位数有 A_9^3 个；

第二类 个位数字是 0 的三位数有 A_9^2 个；

第三类 十位数字是 0 的三位数有 A_9^2 个.

根据分类计数原理，符合条件的三位数的个数是

$$A_9^3 + A_9^2 + A_9^2 = 9 \times 8 \times 7 + 9 \times 8 + 9 \times 8 = 648.$$

解法 3 从 0～9 这 10 个数字中任取 3 个数字的排列数为 A_{10}^3，其中 0 在首位的排列数为 A_9^2，这些排列不能构成三位数. 因此，所求的三位数的个数是

$$A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \times 9 \times 8 - 9 \times 8 = 648.$$

答 可以组成 648 个没有重复数字的三位数.

思 考

在上面的 648 个数中，有多少个数是奇数？

练 习

1. 从 5 名教师中挑选 2 人，分别担任两个班的班主任，有多少种不同的安排方案？
2. 有 4 种不同的蔬菜，从中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验，有多少种不同的种植方法？
3. 如图，按 5 粒不同弹子的排列顺序制造弹子锁，能生产多少种不同的锁？

（第 3 题）

4. 从 0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数字中取出 4 个数字，试问：

（1）有多少个没有重复数字的排列？

（2）能组成多少个没有重复数字的四位数？

习题 7.2

感受·理解

1. （1）写出从 a,b,c,d,e 这 5 个字母中取出 2 个字母的所有排列；

（2）写出从 a,b,c,d,e 这 5 个字母中取出 2 个字母的排列中，a 不在首位的所有排列.

2. （1）已知 $A_{10}^{m}=10\times9\times\cdots\times5$，那么 $m=$________；

（2）已知 $A_n^2=56$，那么 $n=$________；

（3）已知 $A_n^2=7A_{n-4}^2$，那么 $n=$________.

3. 计算：

（1）$4A_4^2+5A_5^3$；（2）$A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4$；

（3）$\dfrac{2A_{12}^7A_5^3}{A_{12}^{12}}$；（4）$\dfrac{A_{10}^3A_7^7}{10!}$.

4. 12 名选手参加校园歌手大奖赛，比赛设一等奖、二等奖、三等奖各 1 名. 问：一共有多少种不同的获奖情况？

5. 按序给出 a,b 两类元素，a 类中的元素排序为甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸，b 类中的元素排序为子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 在 a，b 两类中各取 1 个元素组成 1 个排列，求 a 类中选取的元素排在首位，b 类中选取的元素排在末位的排列的个数.

a 类的 10 个元素叫作天干，b 类的 12 个元素叫作地支. 两者按固定顺序相配，形成古代纪年历法.

6. （1）一天有 6 节课，安排 6 门学科，这一天的课程表有几种排法？

（2）上午有 4 节课，一个教师要上 3 个班级的课，每个班 1 节课，若不能连上 3 节，则这个教师的课有几种排法？

7. 有红、黄、蓝小旗各 1 面，信号兵从中选择 1 面、2 面或 3 面，将其从上到下挂在竖直旗杆上表示信号. 若不同的顺序表示不同的信号，则一共可以表示多少种不同的信号？

思考·运用

8. 求证：$A_n^n = A_n^m A_{n-m}^{n-m}$.

9. 证明 $(n+1)!-n!=n\cdot n!$，并用它来化简 $1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+10\times10!$.

10. 学校要安排一场文艺晚会的 11 个节目的演出顺序，除第一个节目和最后一个节目已确定外，4 个音乐节目要求排在第二、五、七、十的位置，3 个舞蹈节目要求排在第三、六、九的位置，2 个曲艺节目要求排在第四、八的位置，共有多少种不同的排法？

探究·拓展

11. (1) 由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字的五位数？可以组成多少个没有重复数字的正整数？

(2) 由数字 1，2，3，4 可以组成多少个没有重复数字且比 1 300 大的正整数？

12. (1) 如果使用 2 个大写的英文字母后接 4 个阿拉伯数字的方式构成汽车号牌号码（英文字母中的 I 和 O 避而不用，以免与数字中的 1 和 0 混淆），那么可能的汽车号牌号码有多少个？

(2) 调查你所在地区的车牌号码（或电话号码）构成方式的变迁，并指出新的构成方式有什么优点.

7.3 组　合

考察下面两个问题：

(1) 高二(1)班准备从甲、乙、丙这 3 名学生中选 2 名学生代表，有多少种不同的选法？

(2) 从 1，2，3 这 3 个数字中取出 2 个数字，能构成多少个不同的集合？

● 这两个问题与上一节中相应的排列问题有何区别？有何联系？

与排列问题不同的是，这两个问题都与所选的元素的顺序无关．如问题(1)中，甲、乙两同学当选代表就与他们的顺序无关，只要选出的元素相同就是同样的结果．

上节中相应的排列问题还可以这样解决：第一步，从 3 个元素中选出 2 个元素构成一组；第二步，将这组中的 2 个元素按一定的顺序排成一列．上面的问题其实就是第一个步骤的结果．这就是本节将要研究的组合问题．

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**(combination)．

怎样才能无重复无遗漏地把所有的组合写出来呢？

例 1　写出从 a，b，c 这 3 个元素中，每次取出 2 个元素的所有组合．

解　先画一个示意图(图 7-3-1)：

图 7-3-1

由此即可写出所有的组合：

$$ab,\ ac,\ bc.$$

如无特别说明，取出若干个元素都是指无重复地选取．

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示．

由例 1 我们得到 $C_3^2=3$．如果不写出所有的组合，那么怎样才能得到组合的种数呢？

我们已经知道，组合是选择的结果，排列是选择后再排序的结果.

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，可分为两步：

第一步　求出从这 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m；

第二步　求每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_m^m.

根据分步计数原理，得到 $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$，因此，我们得到**组合数公式**

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

这里 $n, m \in \mathbf{N}^*$，并且 $m \leqslant n$. 因为

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

所以，上面的组合数公式还可以写成

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

我们以从 4 个不同元素 a, b, c, d 中取出 3 个元素为例，从表 7-3-1中可以看出组合与排列的关系.

表 7-3-1

所有组合	所有排列					
$a\ b\ c$	$a\,b\,c$	$a\,c\,b$	$b\,a\,c$	$b\,c\,a$	$c\,a\,b$	$c\,b\,a$
$a\ b\ d$	$a\,b\,d$	$a\,d\,b$	$b\,a\,d$	$b\,d\,a$	$d\,a\,b$	$d\,b\,a$
$a\ c\ d$	$a\,c\,d$	$a\,d\,c$	$c\,a\,d$	$c\,d\,a$	$d\,a\,c$	$d\,c\,a$
$b\ c\ d$	$b\,c\,d$	$b\,d\,c$	$c\,b\,d$	$c\,d\,b$	$d\,b\,c$	$d\,c\,b$

例 2 计算：

(1) C_9^2；　(2) C_8^5；　(3) C_{35}^7.

解 (1) $C_9^2 = \dfrac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36.$

(2) $C_8^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56.$

(3) $C_{35}^7 = \dfrac{35 \times 34 \times \cdots \times 29}{7 \times 6 \times \cdots \times 1} = 6\,724\,520.$

练　习

1. 下列问题是排列问题，还是组合问题？

(1) 从 9 名学生中选出 4 名参加一场联欢会，共有多少种不同的选法？

(2) 从 2，3，5，7，11 这 5 个质数中，每次取 2 个数分别作为分子和分母构成一个分数，共有多少个不同的分数？

(3) 已知空间有 8 个点，其中任何 4 点都不共面，则从这 8 个点中任意选取 4 点作为顶点构成一个四面体，共可以构成多少个四面体？

2. 甲、乙、丙、丁 4 支足球队举行单循环赛，

(1) 列出所有各场比赛的双方；

(2) 列出所有冠亚军的可能情况.

3. 计算：

(1) C_{15}^{3}；　(2) C_{200}^{3}；　(3) C_{200}^{197}；　(4) $C_8^3+C_8^4$.

4. 6 个朋友聚会，每两人握手 1 次，一共握手多少次？

5. (1) 平面内有 10 个点，以其中 2 个点为端点的线段共有多少条？

(2) 平面内有 10 个点，以其中 2 个点为端点的有向线段共有多少条？

6. 化简：$C_{n+1}^{n}C_{n}^{n-2}$.

7. 填空：

(1) 从 5 人中选派 3 人去参加某个会议，不同的选法共有________种；

(2) 从5 件不同的礼物中选出 3 件分别送给 3 名同学，不同的方法共有______种；

(3) 设集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 个元素，从这两个集合中各取出 1 个元素，不同的方法共有________种.

8. 在桥牌比赛中，发给 4 名参赛者每人 13 张牌，一名参赛者可能得到多少种不同的牌？（用排列数记号或组合数记号表示）

例 3　在歌手大奖赛的文化素质测试中，选手需从 5 道试题中任意选答 3 题，问：

(1) 有几种不同的选题方法？

(2) 若有 1 道题是必答题，有几种不同的选题方法？

分析　由题意可知，所选的试题与顺序无关，所以这是一个组合问题.

解　(1) 所求不同的选题方法数，就是从 5 个不同元素里每次取出 3 个元素的组合数，

$$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3!}=10(\text{种}).$$

(2) 因为已有 1 道题必选，所以只要在另外 4 道题中选 2 道，不同的选题方法有

$$C_4^2=\frac{4\times3}{2!}=6(\text{种}).$$

对于(1)，还可以换一个角度考虑：从 5 道试题中剔去 2 题，将剩下的 3 题取出，这样共有 C_5^2 种不同的选题方法. 由此可见，$C_5^3=C_5^2$.

注意到(2)与(1)的关系：C_5^3 种方法中包括含必答题与不含必答题两类，方法数分别为 C_4^2 和 C_4^3. 由此可见，$C_5^3=C_4^2+C_4^3$.

一般地，我们可以得到组合数的两个重要性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$
$$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m.$$

为了使第一个性质在 $m=n$ 时也能成立，我们规定 $C_n^0=1$.

例 4 在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件不合格品. 从这 100 件产品中任意抽出 3 件，问：

(1) 一共有多少种不同的抽法？

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是不合格品的抽法有多少种？

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法有多少种？

解 (1) 所求的不同抽法的种数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数，即

$$C_{100}^3=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161\ 700.$$

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是不合格品，分 2 个步骤进行.

第一步，从 2 件不合格品中抽出 1 件不合格品，抽法有 C_2^1 种；

第二步，从 98 件合格品中抽出 2 件合格品，抽法有 C_{98}^2 种.

根据分步计数原理，抽出的 3 件中恰好有 1 件是不合格品的抽法种数是

$$C_2^1C_{98}^2=2\times 4\ 753=9\ 506.$$

(3) 方法 1 抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品，包括两种情况：恰好有 1 件不合格品，恰好有 2 件不合格品.

由(2)知恰好有 1 件是不合格品的抽法有 $C_2^1C_{98}^2$ 种. 同理，恰好有 2 件是不合格品的抽法有 $C_2^2C_{98}^1$ 种.

根据分类计数原理，抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法的种数是

$$C_2^1C_{98}^2+C_2^2C_{98}^1=9\ 506+98=9\ 604.$$

方法 2 抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法种数，也就是从 100 件中抽出 3 件的抽法种数减去 3 件中全是合格品的抽法种数，即

$$C_{100}^3-C_{98}^3=161\ 700-152\ 096=9\ 604.$$

答 不同的抽法分别有 161 700，9 506 和 9 604 种.

思　考

在例 4 中，若“抽出的 3 件中至多有 1 件是不合格品”，应如何求解？

例 5　房间里有 5 盏电灯，分别由 5 个开关控制，至少开 1 盏灯用以照明，有多少种不同的方法？

解法 1　因为开灯照明，与开灯的先后顺序无关，而只与开灯的多少有关，所以可分成开 1 盏、2 盏……5 盏灯五种情况.

开 1 盏灯有 C_5^1 种方法，开 2 盏灯有 C_5^2 种方法……5 盏灯全开有 C_5^5 种方法. 根据分类计数原理，不同的开灯方法有

$$C_5^1+C_5^2+\cdots+C_5^5=31(\text{种}).$$

解法 2　因为对任何 1 盏电灯都有“开”或“不开”两种处理方法，所以开灯照明这件事可分成对每盏灯逐个处理的 5 个步骤来进行.

根据分步计数原理，5 盏电灯就有 $2\times2\times2\times2\times2=2^5$ 种处理方法，其中 1 盏都不开的情况应除外. 所以不同的开灯方法有

$$2\times2\times2\times2\times2-1=2^5-1=31(\text{种}).$$

答　至少开 1 盏灯用以照明，有 31 种不同的方法.

思　考

比较例 5 中的两种解法，你能推测出什么结论？能做进一步的推广吗？

练　习

1. 计算：

(1) C_{50}^{48}；

(2) $C_{99}^2+C_{99}^3$；

(3) $C_4^1+C_4^2+C_5^3$.

2. 若 $C_n^6=C_n^5$，则 $n=$ ________，$C_n^{10}=$ ________.

3. 求证：$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$.

4. 已知 A,B,C,D 4 个点，其中任意 3 个点不在同一条直线上，从中取出两点作直线，共能作出多少条直线？

5. 学校开设了 6 门选修课，问：

(1) 某学生从中选 3 门，共有多少种不同的选法？

(2) 某学生从中至少选 2 门，共有多少种不同的选法？

(3) 某学生从中至多选 4 门，共有多少种不同的选法？

6. 一个口袋内装有 7 只不同的白球和 1 只黑球.

(1) 从口袋内取出 3 只球，共有多少种不同的取法？

(2) 从口袋内取出 3 只球，其中必有 1 只黑球，有多少种不同的取法？

(3) 从口袋内取出 3 只球，其中没有黑球，有多少种不同的取法？

解决计数问题，关键是设计完成一件事情的合理过程，建立适当的模型，灵活运用两个基本计数原理. 具体地说，要分清需要完成的事情与顺序是否有关，要优先考虑特殊的元素或特殊的位置，还要多角度思考问题，用多种方法验证计算结果.

例 6 高二(1)班有 30 名男生、20 名女生. 从 50 名学生中选 3 名男生、2 名女生分别担任班长、副班长、学习委员、宣传委员、体育委员，共有多少种不同的选法?

解 完成这件事情可分 3 步进行：

第一步 从 30 名男生中选 3 名男生，有 C_{30}^{3}种方法；

第二步 从 20 名女生中选 2 名女生，有 C_{20}^{2}种方法；

第三步 将选出的 5 名学生进行分工，即全排列，有 A_{5}^{5} 种方法.

根据分步计数原理，共有

$$C_{30}^{3}C_{20}^{2}A_{5}^{5}=92\ 568\ 000$$

种选法.

“先选后排”是解决这类计算问题的常用方法.

答 共有 92 568 000 种不同的选法.

思 考

如果分两步解决上面问题，即先从 30 名男生中选 3 名担任 3 种不同职务，再从 20 名女生中选 2 名担任 2 种不同职务，那么结果为 $A_{30}^{3}A_{20}^{2}$. 这样做对吗? 为什么?

例 7 从 0,1,2,…,9 这 10 个数字中选出 5 个不同的数字组成五位数，其中大于 13 000 的共有多少个?

解法 1 满足条件的五位数有两类：

第一类 万位数大于 1，这样的五位数共有 $8A_{9}^{4}$个；

第二类 万位数为 1，千位数不小于 3，这样的五位数共有 $7A_{8}^{3}$个.

根据分类计数原理，大于 13 000 的五位数共有

$$8A_{9}^{4}+7A_{8}^{3}=26\ 544\ (\text{个}).$$

解法 2 由 0,1,2,…,9 这 10 个数字中不同的 5 个数字组成的五位数共有 $9A_{9}^{4}$个，其中不大于 13 000 的五位数的万位数都是 1，且千位数小于 3，这样的数共有 $2A_{8}^{3}$个，所以满足条件的五位数共有

$$9A_{9}^{4}-2A_{8}^{3}=26\ 544\ (\text{个}).$$

答 大于 13 000 的五位数共有 26 544 个.

思 考

在例 7 中，大于 13 500 的数共有多少个?

练 习

1. 文娱晚会中，学生的节目有 9 个，教师的节目有 2 个，如果教师的节目不排在最后 1 个，那么有多少种排法?

2. 从 1,3,5,7,9 中任取 3 个数字,从 2,4,6,8 中任取 2 个数字,一共可以组成多少个没有重复数字的五位数?

3. 将 4 位司机、4 位售票员分配到 4 辆不同班次的公共汽车上,每一辆汽车分别有 1 位司机和 1 位售票员,共有多少种不同的分配方案?

4. 电视台有 8 个节目准备分 2 天播出,每天播出 4 个,其中某电视剧和某专题报道必须在第一天播出,某谈话节目必须在第二天播出,共有多少种不同的播出方案?

习题 7.3

感受 · 理解

1. 若 $C_{28}^{x}=C_{28}^{3x-8}$,则 x 的值为________.

2. 用组合数公式证明:

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$;

(2) $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$.

3. 圆上有 10 个点,问:

(1) 从中任取两点作弦,一共可画多少条弦?

(2) 从中任取三点作三角形,一共可画多少个三角形?

4. (1) 空间有 8 个点,其中任何 4 点不共面,过每 3 个点作 1 个平面,一共可以作多少个平面?

(2) 空间有 10 个点,其中任何 4 点不共面,以每 4 个点为顶点作 1 个四面体,一共可以作多少个四面体?

5. 凸五边形有多少条对角线? 凸 n 边形呢?

6. 已知一个集合有 6 个元素,那么该集合的非空真子集共有多少个?

7. 在 200 件产品中,有 3 件不合格品,从中任取 5 件,问:

(1) "恰有 2 件不合格品"的取法有多少种?

(2) "没有不合格品"的取法有多少种?

(3) "至少有 1 件不合格品"的取法有多少种?

8. 某旅行团要从 8 个景点中选 2 个作为当天的旅游地,满足下列条件的选法各有多少种?

(1) 甲、乙 2 个景点至少选 1 个;

(2) 甲、乙 2 个景点至多选 1 个;

(3) 甲、乙 2 个景点必须选 1 个且只能选 1 个.

9. 某次足球赛共 12 支球队参加,分三个阶段进行.

① 小组赛:经抽签分成甲、乙两组,每组 6 队进行单循环比赛,以积分和净胜球数取前两名;

② 半决赛:甲组第一名与乙组第二名,乙组第一名与甲组第二名进行主、客场交叉淘汰赛(每两队主、客场各赛 1 场),决出胜者;

③ 决赛:两个胜队参加,比赛 1 场,决出胜负.

问:全部赛程共需比赛多少场?

思考·运用

10. 利用组合数的性质进行计算：

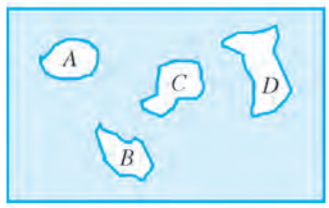
(1) $C_m^5 - C_{m+1}^5 + C_m^4 =$ ________；

(2) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 =$ ________.

11. (1) 4 个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的 4 个盒子中，一共有多少种不同的放法？

(2) 4 个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的 4 个盒子中，恰有 1 个空盒的放法共有多少种？

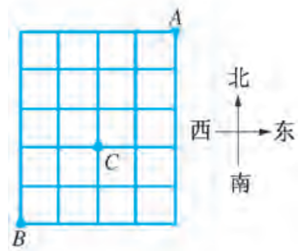
12. 如图，湖面上有 4 个相邻的小岛 A,B,C,D，现要建 3 座桥梁，将这 4 个小岛连接起来，共有多少种不同的方案？



（第 12 题）

探究·拓展

13. 如图，某地有南北街道 5 条、东西街道 6 条. 一邮递员从该地东北角的邮局 A 出发，送信到西南角的 B 地，且途经 C 地，要求所走路程最短，共有多少种不同的走法？



（第 13 题）

14. (阅读题) DNA 是形成所有生物体中染色体的一种双股螺旋线状分子，由称为碱基的化学成分组成. 它看上去就像是两条长长的平行螺旋状链，两条链上的碱基之间由氢键相结合. 在 DNA 中只有 4 种类型的碱基，分别用 A,C,G 和 T 表示，DNA 中的碱基能够以任意顺序出现. 两条链之间能形成氢键的碱基或者是A－T，或者是 C－G，不会出现其他的联系. 因此，如果我们知道了两条链中一条链上碱基的顺序，那么我们也就知道了另一条链上碱基的顺序. 由氢键联系着的两个碱基称为碱基对.

一个典型的细菌基因是一段有着 1 500 个碱基对的 DNA，试计算该细菌基因可能的种数.

7.4 二项式定理

由多项式的乘法法则可以知道：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

● 你能写出 $(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式吗？

7.4.1 二项式定理

为了确定 $(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式，我们必须明确展开式中的项是如何产生的. 为此，我们先看 $n=2$，3 的情形：

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ba+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

上面展开式中的每一项都是从两个括号中各取 1 个字母的乘积.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=(a^2+ab+ba+b^2)(a+b)\\&=a^3+a^2b+a^2b+ab^2+ba^2+b^2a+b^2a+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

由上述过程可以看出，$(a+b)^3$ 展开式中的每一项都是从 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 的每个括号中各取 1 个字母的乘积.

一般地，由

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{个}(a+b)}$$

可知，$(a+b)^n$ 展开式是从每个括号中各取 1 个字母的一切可能乘积的和，它的每一项都具有 $a^{n-r}b^r(r=0,1,2,\cdots,n)$ 的形式.

对于某个 $r(r=0,1,2,\cdots,n)$，对应的项 $a^{n-r}b^r$ 是由 $n-r$ 个 $(a+b)$ 中选 a，r 个 $(a+b)$ 中选 b 得到的. 由于 b 选定后，a 的选法也随之确定，因此，$a^{n-r}b^r$ 的系数就是在 $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ 的 n 个括号中选 r 个取 b 的方法种数.

具体地，在这 n 个括号中，

每个都不取 b 的情况有 1 种，即 C_n^0 种，所以 a^n 的系数是 C_n^0；

恰有 1 个取 b 的情况有 C_n^1 种，所以 $a^{n-1}b$ 的系数是 C_n^1；

恰有 2 个取 b 的情况有 C_n^2 种，所以 $a^{n-2}b^2$ 的系数是 C_n^2；

……

恰有 r 个取 b 的情况有 C_n^r 种，所以 $a^{n-r}b^r$ 的系数是 C_n^r；

……

都取 b 的情况有 C_n^n 种，所以 b^n 的系数是 C_n^n.

因此，

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \cdots + C_n^ra^{n-r}b^r + \cdots + C_n^nb^n \ (n \in \mathbf{N}^*).$$

这个公式叫作**二项式定理**(binomial theorem)，右边的多项式叫作 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，它一共有 $n+1$ 项，其中 $C_n^ra^{n-r}b^r$ 叫作二项展开式的**第 $r+1$ 项**(也称**通项**)，用 T_{r+1} 表示，即

$$T_{r+1} = C_n^ra^{n-r}b^r.$$

$C_n^r(r=0,1,\cdots,n)$叫作第 $r+1$ 项的**二项式系数**.

思　考

对于 $(a+b)^n$，在合并同类项之前，其展开式共有多少项？

例 1 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(a-b)^6$；

(2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$.

解 (1)
$$\begin{aligned}(a-b)^6 &= [a+(-b)]^6\\ &= C_6^0a^6 + C_6^1a^5(-b) + C_6^2a^4(-b)^2 + C_6^3a^3(-b)^3\\ &\quad + C_6^4a^2(-b)^4 + C_6^5a(-b)^5 + C_6^6(-b)^6\\ &= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 &= 1 + C_4^1\left(\frac{1}{x}\right) + C_4^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4\left(\frac{1}{x}\right)^4\\ &= 1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

例 2 在 $(1+2x)^7$ 的展开式中，求：

(1) 第 4 项的二项式系数；

(2) 含 x^3 的项的系数.

解 (1) 由二项式定理可知，在 $(1+2x)^7$ 的展开式中，第 4 项的二项式系数为

$$C_7^3=35.$$

展开式中某一项的系数与该项的二项式系数是两个不同的概念.

(2) 由二项式定理可知，在$(1+2x)^7$ 的展开式中，第 $r+1$ 项为

$$\begin{aligned}T_{r+1}&=C_7^r\cdot 1^{7-r}\cdot(2x)^r\\&=C_7^r\cdot 2^r\cdot x^r.\end{aligned}$$

当 $r=3$ 时，$(1+2x)^7$ 展开式中含 x^3 的项的系数为

$$C_7^3\cdot 2^3=280.$$

例 3 求 $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项.

解 设二项展开式中的常数项为第 $r+1$ 项，即

$$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=(-1)^r C_6^r\cdot\frac{1}{2^r}\cdot x^{6-2r}.$$

根据题意，得

$$6-2r=0,$$

$$r=3.$$

因此，二项展开式中的常数项为

$$T_4=-\frac{C_6^3}{8}=-\frac{5}{2}.$$

练　习

1. 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(1+x)^5$；

(2) $(2-x)^4$.

2. $(x-2y)^7$ 的展开式中第 3 项的二项式系数是(　　).

A. C_7^2　　B. C_7^3　　C. $4C_7^2$　　D. $16C_7^5$

3. $(x-1)^{10}$ 的展开式中含 x^5 的项的系数是(　　).

A. C_{10}^6　　B. $-C_{10}^6$　　C. C_{10}^5　　D. $-C_{10}^5$

4. 写出 $(x^3+2x)^9$ 的展开式的第 k 项($1\leqslant k\leqslant 10, k\in\mathbf{N}^*$).

5. 求 $(1-2x)^6$ 的展开式中含 x^2 的项.

6. 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项.

7.4.2 二项式系数的性质及应用

当 n 依次取 $0,1,2,3,\cdots$ 时，观察 $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathrm{C}_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & \mathrm{C}_1^0 & & \mathrm{C}_1^1 & & & & & \\
 & & & & \mathrm{C}_2^0 & & \mathrm{C}_2^1 & & \mathrm{C}_2^2 & & & & \\
 & & & \mathrm{C}_3^0 & & \mathrm{C}_3^1 & & \mathrm{C}_3^2 & & \mathrm{C}_3^3 & & & \\
 & & \mathrm{C}_4^0 & & \mathrm{C}_4^1 & & \mathrm{C}_4^2 & & \mathrm{C}_4^3 & & \mathrm{C}_4^4 & & \\
 & \mathrm{C}_5^0 & & \mathrm{C}_5^1 & & \mathrm{C}_5^2 & & \mathrm{C}_5^3 & & \mathrm{C}_5^4 & & \mathrm{C}_5^5 & \\
\mathrm{C}_6^0 & & \mathrm{C}_6^1 & & \mathrm{C}_6^2 & & \mathrm{C}_6^3 & & \mathrm{C}_6^4 & & \mathrm{C}_6^5 & & \mathrm{C}_6^6 \\
 & & & & & & \cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(a+b)^0 \ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ 1 \\
(a+b)^1 \ \cdots\ \cdots\ \cdots\ 1\quad 1 \\
(a+b)^2 \ \cdots\ \cdots\ 1\quad 2\quad 1 \\
(a+b)^3 \ \cdots\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
(a+b)^4 \ \cdots\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
(a+b)^5 \ \ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
(a+b)^6 \ 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots
\end{array}$$

图 7－4－1

二项式系数有什么特点？

图 7－4－1 左侧是根据二项式定理得到的，右侧是算出组合数的值后所得的结果. 由此我们发现：

（1）每一行中的二项式系数是“对称”的，即第 1 项与最后一项的二项式系数相等，第 2 项与倒数第 2 项的二项式系数相等……

（2）图中每行两端都是 1，而且除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和（图 7－4－2）.

这个表称为杨辉三角. 有关介绍见第 83 页“阅读”.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 2^0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 2^1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 2^2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & & 2^3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \cdots & \cdots & & 2^4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \cdots & & 2^5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \cdots & 2^6
\end{array}$$

图 7－4－2

（3）图中每行的二项式系数从两端向中间逐渐增大.

（4）第 1 行为 $1=2^0$，第 2 行的两数之和为 2，第 3 行的三数之和为 2^2……第 7 行的各数之和为 2^6（图 7－4－2）.

一般地，$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n 有如下性质：

（1）$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$；

（2）$\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$；

（3）当 $r<\dfrac{n-1}{2}$ 时，$\mathrm{C}_n^r<\mathrm{C}_n^{r+1}$；当 $r>\dfrac{n-1}{2}$ 时，$\mathrm{C}_n^{r+1}<\mathrm{C}_n^r$；

（4）$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

当 n 为偶数时，二项式系数中，以 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；当 n 为奇数时，二项式系数中，以 $\mathrm{C}_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $\mathrm{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$（两者相等）最大.

（1）（2）证明从略. 下面给出（3）（4）的证明.

证明 （3）当 $r<\dfrac{n-1}{2}$ 时，要证明 $\mathrm{C}_n^r<\mathrm{C}_n^{r+1}$，只要证

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}<\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!},$$

即要证

$$\frac{1}{n-r}<\frac{1}{r+1},$$

即要证

$$r<\frac{n-1}{2},$$

而 $r<\frac{n-1}{2}$是已知条件,故结论得证.

同理,当 $r>\frac{n-1}{2}$ 时,$C_n^{r+1}<C_n^r$ 也成立.

(4) 在二项式定理中,令 $a=b=1$,就有

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n,$$

这表明$(a+b)^n$ 展开式各项的二项式系数的和等于 2^n.

例 4 证明:在$(a+b)^n$ 的展开式中,奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

证明 在二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$$

中,令 $a=1,b=-1$,得

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n,$$

即

$$0=(C_n^0+C_n^2+\cdots)-(C_n^1+C_n^3+\cdots),$$

所以

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots.$$

即在$(a+b)^n$ 的展开式中,奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

例 5 用二项式定理证明:$99^{10}-1$ 能被 1 000 整除.

证明 $99^{10}-1$

$$\begin{aligned}&=(100-1)^{10}-1\\&=C_{10}^0100^{10}-C_{10}^1100^9+\cdots+C_{10}^8100^2-C_{10}^9100+C_{10}^{10}-1\\&=C_{10}^0100^{10}-C_{10}^1100^9+\cdots+C_{10}^8100^2-1\,000.\end{aligned}$$

因为上式的每一项都能被 1 000 整除，所以 $99^{10}-1$ 能被 1 000 整除.

练　习

1. 填空：

(1) $(x+y)^{10}$ 的展开式中二项式系数的最大值是________；

(2) $C_{64}^{1}+C_{64}^{3}+\cdots+C_{64}^{63}=$ ________；

(3) 3^8 被 5 除所得的余数是________.

2. $C_{12}^{5}+C_{12}^{6}$ 等于(　　).

A. C_{13}^{5}　　　　B. C_{13}^{6}

C. C_{13}^{11}　　　　D. C_{12}^{7}

3. 求证：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m-1}+C_{n-1}^{m}+C_{n-1}^{m-1}$.

4. 求证：$1+2C_n^1+4C_n^2+\cdots+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^nC_n^n=3^n$.

5. 求证：当 n 为偶数时，$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

习题 7.4

感受・理解

1. 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(a+2b)^5$；

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7$.

2. 化简：$C_m^7-C_{m+1}^8+C_m^8$.

3. 化简：

(1) $(1+x)^6-(1-x)^6$；

(2) $(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5$；

(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$.

4. 已知 $0<p<1$.

(1) 写出 $[p+(1-p)]^n$ 的展开式；

(2) 化简 $C_3^0p^3+C_3^1p^2(1-p)+C_3^2p(1-p)^2+C_3^3(1-p)^3$.

5. (1) 求 $(1-2x)^{15}$ 展开式中的前 4 项；

(2) 求 $(2a^3-3b^2)^{10}$ 展开式中的第 8 项；

(3) 求 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 展开式中的第 7 项.

6. (1) 求 $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ 展开式中含 $\dfrac{1}{x^5}$ 的项；

(2) 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$ 展开式中的常数项.

7. 已知 $\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式中的第 4 项是常数项，求 n 的值.

8. 求证：$2^n-C_n^1\cdot2^{n-1}+C_n^2\cdot2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot2+(-1)^n=1$.

思考・运用

9. 用二项式定理证明：$(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除($n\in\mathbf{N}^*$).

10. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，求这两项的二项式系数.

11. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，前 3 项的系数成等差数列，求展开式中 x 的一次项.

12. 求 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ $(x\neq-1$，且 $x\neq 0)$ 的展开式中 x^3 的系数.

13. 设 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，求下列各式的值：

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$；

(2) $a_1+a_2+a_3+a_4$；

(3) $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$.

探究・拓展

14. 从函数角度看，C_n^r 可以看成以 r 为自变量的函数 $f(r)$，其定义域是 $\{r \mid r\in\mathbf{N},\ r\leqslant n\}$.

(1) 画出函数 $\varphi(r)=\mathrm{C}_7^r$ $(r=0,1,2,\cdots,7)$ 的图象；

(2) 求证：$f(r)=\dfrac{n-r+1}{r}f(r-1)$；

(3) 试利用(2)的结论来证明：当 n 为偶数时，$(a+b)^n$ 的展开式最中间一项的二项式系数最大；当 n 为奇数时，$(a+b)^n$ 的展开式最中间两项的二项式系数相等且最大.

问题与探究

算 两 次

我们曾用组合模型发现了组合恒等式：

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

这里所使用的方法，实际上是将一个量用两种方法分别算一次，由结果相同得到等式，这是一种非常有用的思想方法，叫作“算两次”. 对此，我们并不陌生，如列方程时就要从不同的侧面列出表示同一个量的代数式，几何中常用的等积法也是“算两次”的典范. 再如，我们还可以用这种方法，结合二项式定理得到很多组合恒等式，如由等式

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

可知左边 x^n 的系数为 C_{2n}^n，而右边

$$\begin{aligned}&(1+x)^n(1+x)^n\\=&(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n)(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n),\end{aligned}$$

其中 x^n 的系数为

$$\begin{aligned}&C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \cdots + C_n^nC_n^0\\=&(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2.\end{aligned}$$

由 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ 恒成立，可得

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

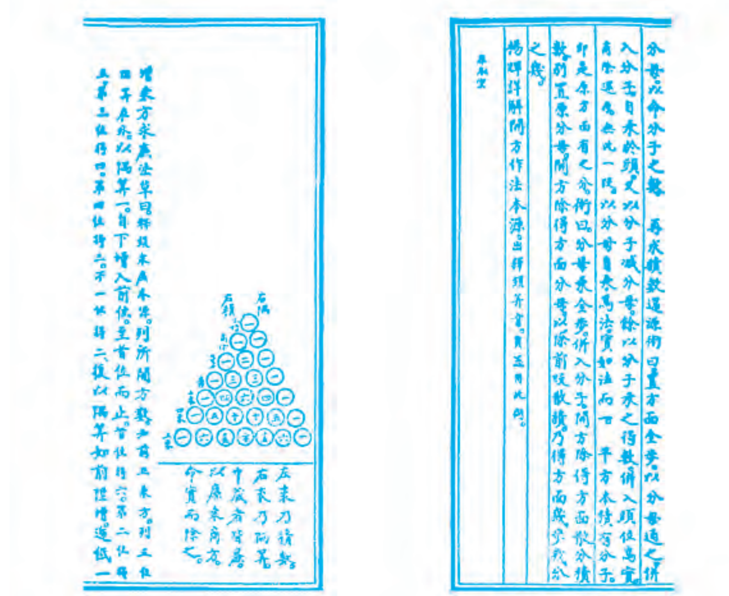
(1) 你能用“算两次”的方法证明等式 $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ 吗？

(2) 你能通过“算两次”独立发现新的组合恒等式吗？

阅 读

杨 辉 三 角

我国北宋数学家贾宪(约11世纪)有一部著作《黄帝九章算法细草》,其中有“开方作法本源”图.贾宪的书已失传,杨辉(约13世纪)在《详解九章算法》一书中征引了贾宪的材料,说明“出释锁算书,贾宪用此术”.“开方作法本源”图现称为“杨辉三角”(或“贾宪三角”),它实际上是一张二项式系数表,我国数学家发现这张表不晚于11世纪.



(1) (2)

图1

如图1(1),“开方作法本源”图中每一横行即是二项式某次幂展开式中的各项系数,即

$(x+a)^0=1$,

$(x+a)^1=x+a$,

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$,

$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$,

$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$,

$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$,

$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$.

二项展开式的系数对于开方是极为重要的.从《九章算术》的开平方术、开立方术和刘徽注中可知,古代数学家已经知道

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

两式的代数意义.贾宪把这些公式扩充到$(x+a)^6$的展开式,并指出各项系数所遵循的规律.

“左衺乃积数,右衺乃隅算”,“衺”字本是“衺”字,衺是古“邪”字,通“斜”.就是说,左边斜线上的数字(一、一、一……)是各次开方积

（常数 a^n）的系数，右边斜线上的数字（一、一、一……）是各项开方的“隅算”（x^n）的系数．第三句“中藏者皆廉”是说图中各横行中的“二”，“三、三”，“四、六、四”等分别是二次方、三次方、四次方时除“积”“隅”以外各项的系数（“廉”）．“以廉乘商方”是说用各次廉乘商（一位得数）的相应次方．“命实而除之”是说从被开方数“实”中减去最后所得的廉与商的乘积．

元朝数学家朱世杰《四元玉鉴》（1303）卷首的“古法七乘方图”也给出二项式系数，如图 2 所示．

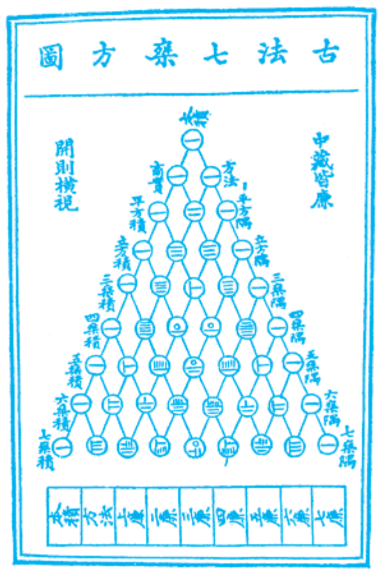


图 2

法国数学家帕斯卡（B. Pascal，1623—1662）在他的著作《算术三角形专论》中，给出了图 3．所以，欧洲把这种二项式系数表称为帕斯卡三角形．这表明，我国发现杨辉三角要比欧洲早五百年左右．

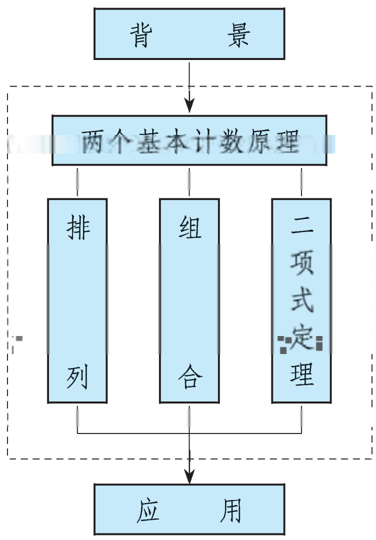
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

图 3

本章回顾

本 章 概 览

本章用排列和组合两个模型刻画了两类计数问题，以分类计数原理和分步计数原理为工具，研究了解决排列、组合问题的方法，运用排列、组合知识解决了相关的应用问题. 根据多项式乘法的运算法则得到了二项式定理，并研究了二项式定理的一些简单应用.



两个基本计数原理是处理计数问题的理论基础. 解决计数问题时，要善于设计完成一件事情的合理的过程，建立适当的模型，灵活运用两个基本计数原理，并注意区分排列与组合是两类不同的问题.

排列、组合、二项式定理等知识，不仅能帮助我们解决社会生活中的计数问题，而且在数学的其他领域也有着广泛的应用，它们是概率论和数理统计的基础.

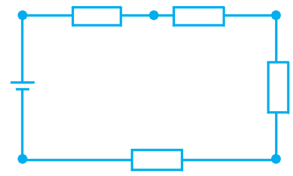
复 习 题

感受・理解

1. 已知两条异面直线 a，b 上分别有 5 个点和 8 个点，用这 13 个点可确定多少个不同的平面？

2. 从集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中分别取 2 个不同的数作为对数的底数与真数，一共可得到多少个不同的对数值？

3. 如图，某电子器件由 4 个电阻串联而成形成回路，它共有 5 个焊接点. 如果焊接点脱落，那么整个电路就会不通. 问：焊接点脱落的可能情况共有多少种？



（第 3 题）

4. 3 张卡片的正、反两面分别写有数字 1，2；3，4；5，6. 将这 3 张卡片排成一排，可构成多少个不同的三位数？

5. 由 10 个元素组成的集合有多少个子集？

6. 由 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字可以组成多少个没有重复数字的奇数？

7. 求下列各展开式中的指定项：

(1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 展开式中的第 4 项；

(2) $(2x+5)^4$ 展开式中的第 3 项.

8. 求证：$3^{2n}+C_n^1\cdot 3^{2n-2}+C_n^2\cdot 3^{2n-4}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 3^2+1=10^n$.

9. 证明 $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$，并利用这一结果化简：

(1) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{9}{10!}$；

(2) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$.

思考·运用

10. 甲、乙、丙 3 人排成一行，其中甲不排在第 1 位，乙不排在第 2 位，丙不排在第 3 位，共有多少种不同的排法？

11. 将 3 位教师分到 6 个班级任教，每位教师教 2 个班，共有多少种不同的分法？

12. 设 $(3x-1)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7$，求：

(1) $a_0+a_2+a_4+a_6$；

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7$；

(3) $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|+|a_7|$.

13. 已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中，第 5 项与第 3 项的二项式系数之比为 14∶3，求展开式中的常数项.

14. 求 $(x^2+3x+2)^5$ 展开式中含 x 项的系数.

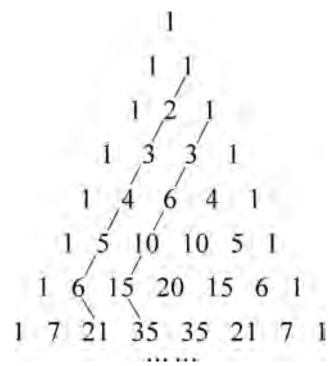
15. 设实数 $x>0$，试判别 $(1+x)^{10}$ 与 $1+10x+45x^2$ 的大小关系，并说明理由.

16. 有 10 只不同的试验产品，其中有 4 只不合格品、6 只合格品. 现每次取 1 只测试，直到 4 只不合格品全部测出为止. 问：最后 1 只不合格品正好在第 5 次测试时被发现的不同情形有多少种？

探究·拓展

17. （探究题）根据杨辉三角，我们可以得到很多与组合数有关的性质.

例如，在下图中，



$$C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2,$$

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2=C_{n+1}^3,$$

……

（1）根据你发现的规律，猜想：

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=\underline{\qquad\qquad}(n>r),$$

并证明你的结论；

（2）你还能发现有关组合数的哪些性质？

本章测试

一、填空题

1. 从 3 名女同学和 2 名男同学中，选出 1 人主持某次主题班会，不同的选法种数为________.

2. 若 $C_n^3=C_n^7$，则 n 的值是________.

3. 在 $(1+2x)^5$ 的展开式中含 x^2 的项的系数为________.

4. 2 位同学分别从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门，且 2 人选修的课程不同，则不同的选法共有________种.

5. 若 $(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{21}x^{21}$，则 $a_{10}+a_{11}$ 的值是__________.

6. 今有 2 只红球、3 只黄球，同色球不加以区分，将这 5 只球排成一列，有________种不同的方法(用数字作答).

二、选择题

7. $89\times90\times91\times\cdots\times100$ 可以表示为(　　).

A. A_{100}^{10}　　B. A_{100}^{11}

C. A_{100}^{12}　　D. A_{100}^{13}

8. 从 7 本书中任意选取 2 本，不同的选法种数为(　　).

A. 84　　B. 42

C. 30　　D. 21

9. 若 $\left(x-\dfrac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式中的常数项为 60，则常数 a 的值为(　　).

A. 4　　B. 2

C. 8　　D. 6

10. 由 1，2，3，4，5，6 组成没有重复数字且 1，3 不相邻的六位数的个数是(　　).

A. 36　　B. 72

C. 480　　D. 600

三、解答题

11. 某校足球队有高一学生 6 人，高二学生 5 人，高三学生 8 人.

(1) 若每个年级各选 1 名学生担任召集人，则有多少种不同的选法？

(2) 若选派 2 人外出参观学习，要求这 2 人来自不同年级，则有多少种不同的选法？

12. 由 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字，

(1) 可以组成多少个无重复数字的四位数？

(2) 可以组成多少个无重复数字且能被 25 整除的四位数？

13. 甲组有 5 名男生，3 名女生；乙组有 6 名男生，2 名女生. 若从甲、乙两组中各选出 2 名学生，则选出的 4 人中恰有 1 名女生的不同选法共有多少种？

14. 已知 $f(x)=(1+x)^m+(1+x)^n$ $(m\in\mathbf{N}^*,n\in\mathbf{N}^*)$，$f(x)$ 的展开式中含 x 的项的系数为 11，那么当 m，n 为何值时，含 x^2 的项的系数取得最小值？

15. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$（$n\geqslant 3$，$n\in\mathbf{N}^{*}$）的展开式中，第 2，3，4 项的二项式系数依次成等差数列.

（1）证明展开式中没有常数项；

（2）求展开式中所有的有理项.

第 8 章　概　　率

- 概率
  - 条件概率
    - 条件概率
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式*
  - 离散型随机变量及其分布列
    - 随机变量及其分布列
    - 离散型随机变量的数字特征
    - 二项分布
    - 超几何分布
  - 正态分布

在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律.

——恩格斯

某企业生产了 100 000 根金属棒，每根标准长度为 6 cm，质量检测标准为允许有 0.5%的误差.

为了解这批金属棒的合格率，需要进行检测. 一种方法是对所有产品都进行检测，但因金属棒太多，这种检测方法工作量太大，成本太高. 根据必修部分学习的知识，解决这类问题通常的做法是抽取样本进行检测.

为此，我们可以考虑以下方案.

方案 1：用有放回抽样，或无放回抽样获取样本，再用样本中次品的频率估计本批产品的次品率.

方案 2：多次实施方案 1，运用频率的稳定性对次品率做出更为精确的估计.

方案 3：根据大量重复检测下的次品率的分布规律来检测产品质量.

● 上述三个方案分别可以构建哪些概率模型?

8.1 条件概率

为研究引言中的问题，我们先从数量较小的情形入手. 考察下面的问题：

袋中放有形状、大小完全相同的 3 个红球和 2 个白球，从中先后取一个球. 事件 A：第一次取出球的颜色为红色；事件 B：第二次取出球的颜色为白色.

(1) 如果第一次取一个球，记下其颜色后放回袋中，接着第二次取一个球，那么事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率有没有影响?

(2) 如果第一次取一个球，不放回，接着第二次取一个球，那么事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率有没有影响?

● 上述两个问题有什么区别与联系?

8.1.1 条件概率

两个事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

根据必修教材的内容可知，上面的问题(1)中，事件 A 与事件 B 相互独立. 而问题(2)中，事件 A 与事件 B 是不独立的，那么

● 事件 A 发生时，事件 B 发生的概率是多少?

将三个红球分别编号为 1,2,3，两个白球分别编号为 a，b，则随机试验“第一次取一个球，不放回，接着第二次取一个球”的样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,2),(1,3),(1,a),(1,b),(2,1),(2,3),\\&(2,a),(2,b),(3,1),(3,2),(3,a),(3,b),(a,1),\\&(a,2),(a,3),(a,b),(b,1),(b,2),(b,3),(b,a)\}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}A=\{&(1,2),(1,3),(1,a),(1,b),(2,1),(2,3),\\&(2,a),(2,b),(3,1),(3,2),(3,a),(3,b)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=\{&(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b),(a,b),\\&(b,a)\},\end{aligned}$$

$$AB=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}.$$

由图 8-1-1 可以看出，事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，实际上是以 A 为样本空间，事件 AB 发生的概率. 下面以古典概型为例加以说明.

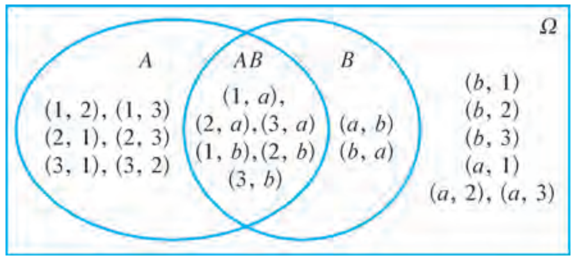


图 8-1-1

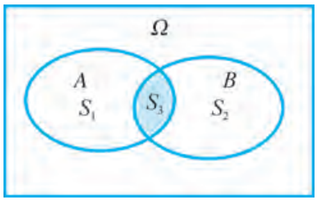


图 8-1-2

设古典概型的样本空间为 Ω，事件 $A\overline{B}$ 所含样本点的集合为 S_1，事件 $B\overline{A}$ 所含样本点的集合为 S_2，事件 AB 所含样本点的集合为 S_3（图 8-1-2），则有

$n(M)$ 表示集合 M 中所含元素的个数.

$$P(A)=\frac{n(S_1+S_3)}{n(\Omega)}=\frac{n(S_1)+n(S_3)}{n(\Omega)},$$

$$P(AB)=\frac{n(S_3)}{n(\Omega)}.$$

因此，事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率是

$$\frac{n(S_3)}{n(S_1)+n(S_3)}=\frac{\frac{n(S_3)}{n(\Omega)}}{\frac{n(S_1)+n(S_3)}{n(\Omega)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

一般地，设 A，B 为两个事件，$P(A)>0$，我们称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**（conditional probability），记为 $P(B\mid A)$，读作“A 发生的条件下 B 发生的概率”，即

在竖线“|”之后的部分表示条件.

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0).$$

由上述公式可知

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A).$$

通常将此公式称为概率的乘法公式.

条件概率有如下性质：

(1) $P(\Omega\mid A)=1$；

(2) $P(\varnothing\mid A)=0$；

(3) 若 B_1，B_2 互斥，则 $P((B_1+B_2)\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)$.

思　考

试用条件概率说明两个随机事件的独立性.

例 1　抛掷一颗质地均匀的骰子，样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件 $A=\{2, 3, 5\}$，$B=\{1, 2, 4, 5, 6\}$，求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(A \mid B)$.

解　由已知得 $AB=\{2, 5\}$，由古典概型可知

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{5}{6},\ P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

所以

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{5}.$$

例 2　在一个盒子中有大小一样的 20 个球，其中有 10 个红球和 10 个白球. 现无放回地依次从中摸出 1 个球，求第一次摸出红球且第二次摸出白球的概率.

解　记“第一次摸出红球”为事件 A，“第二次摸出白球”为事件 B，则

$$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},\ P(B \mid A)=\frac{10}{19}.$$

由概率的乘法公式得

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(B \mid A)P(A)\\&=\frac{10}{19}\times\frac{1}{2}\approx 0.263\,2.\end{aligned}$$

答　第一次摸出红球且第二次摸出白球的概率约为 0.263 2.

例 1、例 2 表明，乘法公式 $P(AB)=P(B \mid A)P(A)$ 既可以用于求条件概率，也可以用于求两个事件同时发生的概率.

练　习

1. 抛掷一颗质地均匀的骰子，样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 3, 5, 6\}$，求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(A \mid B)$.
2. 在一个袋子里有大小一样的 10 个球，其中有 6 个红球和 4 个白球. 现无放回地依次从中摸出 1 个球，求第一次摸出红球且第二次摸出白球的概率.
3. 设 $A \subseteq B$，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.7$，求 $P(B \mid A)$ 和 $P(A \mid B)$ 的值.
4. 某个班级 45 名学生中，有男生 25 名，女生 20 名，男生中有 16 名团员，女生中有 12 名团员. 在该班中随机选取 1 名学生，如果选到的是团员，那么选到的是男生的概率是多少？

8.1.2 全概率公式

考察下面的问题：

甲袋中有 3 个白球和 2 个红球，乙袋中有 2 个白球和 3 个红球. 先随机取一只袋，再从该袋中随机取一个球.

● 该球为红球的概率是多少？

随机取一只袋，设取到的是甲袋为事件 A_1，取到的是乙袋为事件 A_2. 再从袋中随机取一个球，取出的球是红球为事件 B，则事件 B 有两类：取出的是甲袋且从中取出的是红球，取出的是乙袋且从中取出的是红球，即 $B=A_1B+A_2B$.（如图 8－1－3）

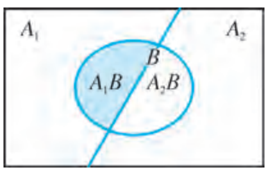


图 8－1－3

因为 A_1B 与 A_2B 互斥，所以

$$P(B)=P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B).$$

由概率的乘法公式可得

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2).$$

因为

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\ P(B\mid A_1)=\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{2}{5},$$

$$P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(B\mid A_2)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5},$$

所以

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}.$$

一般地，

> 若事件 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 两两互斥，且它们的和 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$P(A_i)>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则对于 Ω 中的任意事件 B，有
>
> $$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$
>
> 这个公式称为**全概率公式**（total probability formula）.

例 3 某批麦种中，一等麦种占 98%，二等麦种占 2%，一、二等麦种种植后所结的穗含有 50 粒以上麦粒的概率分别为 0.5，0.15. 求用这批种子种植后所结的穗含有 50 粒以上麦粒的概率.

解 用 B 表示事件“任取一粒麦种，其种植后所结的穗含有 50 粒以上的麦粒”，用 $A_i(i=1,\ 2)$ 表示事件“任取一粒麦种，结果为第 i

等麦种”，显然 A_1 与 A_2 互斥，且A_1+A_2 为样本空间 Ω.

由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)\\ &= 0.98\times 0.5+0.02\times 0.15 = 0.493.\end{aligned}$$

答 用这批种子种植后所结的穗含有 50 粒以上麦粒的概率为 0.493.

在上述例 3 中，事件 B、事件 A_1 及事件 A_2 的完整表述分别如下.

事件 B：“任取一粒麦种，结果为一等麦种或二等麦种，且种植后所结的穗含有 50 粒以上的麦粒；”

事件 A_1：“任取一粒麦种，结果为一等麦种，且种植后所结的穗含有 50 粒及以上或不足 50 粒的麦粒；”

事件 A_2：“任取一粒麦种，结果为二等麦种，且种植后所结的穗含有 50 粒及以上或不足 50 粒的麦粒.”

例 4 设甲袋中有 3 个白球和 4 个红球，乙袋中有 1 个白球和 2 个红球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取 2 个球. 求从乙袋中取出的是 2 个红球的概率.

解 记事件 A_1：从甲袋中取出 2 个红球，A_2：从甲袋中取出 2 个白球，A_3：从甲袋中取出 1 个白球和 1 个红球，B：从乙袋中取出 2 个红球.

显然，A_1，A_2，A_3 两两互斥，且 $A_1+A_2+A_3$ 正好为“从甲袋中任取 2 个球”的样本空间 Ω. 由全概率公式，得

将“从甲袋中取 2 个球”分解为 A_1，A_2，A_3 后，使“再从乙袋中任取 2 个球”的前提得以确定.

$$\begin{aligned}P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)\\ &= \frac{C_4^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{14}.\end{aligned}$$

答 从乙袋中取出的是 2 个红球的概率为$\frac{5}{14}$.

练　习

1. 某厂用甲、乙两台机器生产同样的零件，它们的产量各占 45%，55%. 而各自的产品中废品率分别为 3%，2%. 求该厂这种零件的废品率.
2. 有三个罐子，1 号罐子中装有 2 个红球、1 个黑球，2 号罐子中装有 3 个红球、1 个黑球，3 号罐子中装有 2 个红球、2 个黑球. 现从中随机取一个罐子，再在该罐子中随机取出一个球，求取得的球是红球的概率.

8.1.3 贝叶斯公式[※]

对于上节的节首问题，考察下面的问题：

● 在取到的球是红球的条件下，这个红球取自甲袋的概率是多少？

随机取一只袋，设取到的是甲袋为事件 A_1，取到的是乙袋为事件 A_2. 再从袋中随机取一个球，取出的球是红球为事件 B，则本题即要求 $P(A_1|B)$. 根据上节内容可知，易于求得 $P(A_1)$，$P(B|A_1)$ 及 $P(B)$. 由概率的乘法公式可得 $P(A_1|B)$ 与 $P(B|A_1)$ 之间有下面的关系：

$$P(B \mid A_1)P(A_1)=P(A_1B)=P(A_1 \mid B)P(B).$$

由此得

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}.$$

一般地，若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=\Omega$，$P(A_i)>0$，$i=1$，$2$，…，$n$，则对于 Ω 中的任意事件 B，$P(B)>0$，有

$$P(A_i \mid B)P(B)=P(B \mid A_i)P(A_i).$$

因此

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}.$$

再由全概率公式得

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

这个公式称为**贝叶斯公式**.

例 5 某品牌锄草机由甲、乙、丙三个工厂生产，其中甲厂占 25%，乙厂占 35%，丙厂占 40%，且各厂的次品率分别为 5%，4%，2%. 如果某人已经买到一台次品锄草机，问：该次品锄草机由哪个厂出产的可能性较大？

解 设事件 A_1：锄草机是甲厂生产的，事件 A_2：锄草机是乙厂

※ 本节为选学内容.

生产的，事件 A_3：锄草机是丙厂生产的，事件 B：买到一台次品锄草机．由题意知

$$P(A_1)=0.25,\ P(A_2)=0.35,\ P(A_3)=0.4,$$

$$P(B\mid A_1)=0.05,\ P(B\mid A_2)=0.04,\ P(B\mid A_3)=0.02.$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0345.$$

由贝叶斯公式知

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\frac{0.25\times 0.05}{0.0345}\approx 0.3623.$$

同理可得

$$P(A_2\mid B)\approx 0.4058,$$

$$P(A_3\mid B)\approx 0.2319.$$

答　该次品锄草机由乙厂出产的可能性较大．

练　习

1. 设某公路上经过的货车与客车的数量之比是 1∶2，货车中途停车修车的概率为 0.02，客车中途停车修车的概率为 0.01．今有一辆汽车中途停车修理，求该车是货车的概率．
2. 在 8.1.2 节的练习第 2 题中，求在取得红球的条件下，该球取自 1 号罐子的概率．

习题 8.1

感受·理解

1. 已经连续抛掷质地均匀的硬币 9 次，都出现了正面向上的结果，那么，第 10 次随机地抛掷这枚硬币，其反面向上的概率是否会大于$\frac{1}{2}$？
2. 一个盒子中装有 a 个黑球和 b 个白球，现从中先后有放回地任取 2 个球，每次取 1 个．设 A 表示事件“第一次取得黑球”，B 表示事件“第二次取得黑球”，试计算 $P(A)$与 $P(A|B)$的值，并判断 A 与 B 是否为独立事件．
3. 电路中，电压超过额定值的概率为 p_1，在电压超过额定值的情况下，电气设备被烧坏的概率为 p_2．求电压超过额定值且电气设备被烧坏的概率．
4. 某种动物活到 20 岁的概率是 0.8，活到 25 岁的概率是 0.4．问：现龄 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？
5. 某机构对某品牌机电产品进行了质量调查，下面是消费者关于质量投诉的数据：

	擦伤	凹痕	外观	合计
保质期内	18%	13%	32%	63%
保质期后	12%	22%	3%	37%
合　　计	30%	35%	35%	100%

(1) 如果该品牌机电产品收到一个消费者投诉，那么投诉的原因不是凹痕的概率是多少？

(2) 如果该品牌机电产品收到一个消费者投诉，且投诉发生在保质期内，那么投诉的原因是产品外观的概率是多少？

(3) 已知投诉发生在保质期后，投诉的原因是产品外观的概率是多少？

(4) 若事件 A：投诉的原因是产品外观，事件 B：投诉发生在保质期内，则 A 和 B 是独立事件吗？

6. 某工厂有 4 个车间生产同一种计算机配件，4 个车间的产量分别占总产量的 15%，20%，30%和 35%. 已知这 4 个车间的次品率依次为 0.04，0.03，0.02，0.01，现在从该厂生产的这种产品中任取 1 件，恰好抽到次品的概率是多少？

7. 盒中有 4 个红球、5 个黑球. 随机地从中抽取一个球，观察其颜色后放回，并加上 3 个与取出的球同色的球，再第二次从盒中随机地取出一个球，求第二次取出的是黑球的概率.

思考・运用

8. 一批产品共 8 件，其中正品 6 件，次品 2 件. 现不放回地从中取产品 2 次，每次取 1 件，求第 2 次取到正品的概率. 如果抽取次数改为 3 次，那么第 3 次取得正品的概率是多少？由此，你有怎样的发现？

9. 某单位入口处有一台摄像机用于记录进入该入口的人员. 下面是在系统测试中对不同气候条件下检测到的人数与未检测到的人数的统计表：

	晴天	阴天	雨天	下雪	刮风
检测到的人数	21	228	226	7	185
未检测到的人数	0	6	6	3	10
合　　计	21	234	232	10	195

(1) 在阴天条件下，监控系统检测到进入者的概率是多少？

(2) 已知监控系统漏检了一个进入者，气候条件是下雪天的概率是多少？

10. 甲袋中有 3 个白球和 2 个红球，乙袋中有 2 个白球和 3 个红球，丙袋中有 4 个白球和 4 个红球. 先随机取一只袋，再从该袋中先后随机取 2 个球.

(1) 求第一次取出的球是红球的概率；

(2) 求第一次取出的球是红球的前提下，第二次取出的球是白球的概率.

探究・拓展

11. 假设某种细胞分裂(每次分裂都是一个细胞分裂成两个)和死亡的概率相同. 如果一个种群从这样一个细胞开始变化,那么这个种群最终灭绝的概率是多少?

12. (探究题)盒子里放着三张卡片,一张卡片两面都是红色,一张卡片两面都是黑色,剩下的一张卡片一面是红色一面是黑色. 现在随机抽出一张卡片,并展示它一面的颜色. 假设这一面的颜色是红色,那么剩下一面的颜色也是红色的概率是多少?

考察下面的解法:

随意从三张卡片中抽出一张,抽到任何一张都是等概率的. 如果抽出的卡片有一面是红色,那么这张卡片有可能是两面全是红色的那张,也可能是一面红一面黑的那张,因此抽到的是两面全红的那张卡片的概率是$\frac{1}{2}$.

好像很简单,但请再换个问题研究一下:如果展示出来的那一面是黑色,由上面的思路可得抽到两面全是黑色的卡片的概率也是$\frac{1}{2}$. 所以,不管我们看到的是什么颜色,抽到两面同色的卡片的概率都是$\frac{1}{2}$. 这意味着虽然三张卡片中只有两张是同色的卡片,但随机抽到其中任何一张的概率都是$\frac{1}{2}$.

肯定有什么地方出错了.

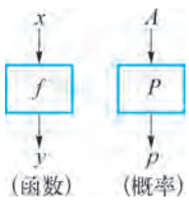
请问:上述解法中,哪里出现错误了呢?

8.2 离散型随机变量及其分布列

在必修部分我们已经知道，对于每一个随机事件，都存在唯一的概率值与之对应. 这表明随机事件的概率构成一个从事件到实数的对应关系，这种对应关系类似于函数的概念.

● 能否运用函数思想研究概率问题?

8.2.1 随机变量及其分布列



随机事件是样本空间的子集，如果在样本空间与实数集之间建立某种对应，那么就能方便我们表示和研究随机事件.

● 如何建立样本空间与实数集之间的对应关系?

样本空间是以样本点为元素的集合，很多情况下的样本点容易与实数建立对应关系，例如：

在一块地里种下 10 棵树苗，用实数 $m(m=0, 1, 2, \cdots, 10)$ 表示“成活树苗的棵数”；

抛掷两颗骰子，观察向上的点数，样本空间为 $\Omega=\{(x, y) \mid x, y=1, 2, \cdots, 6\}$，用 $x+y$ 表示“两颗骰子向上的点数之和”，那么样本点 (x, y) 就与实数 $x+y$ 对应；

接听一个电话，用 $t(t \in (0, +\infty))$ 表示“通话时长”.

当随机试验的样本点不涉及实数时，我们可以通过适当的方式，为每个样本点指定一个实数，例如：

抛掷一枚硬币，将试验结果“正面向上”用 1 表示，“反面向上”用 0 表示；

抽查学生的某项体育测试成绩，将成绩等级为优、良、中、及格、不及格分别用数值 5，4，3，2，1 来表示.

由此可以看出，通过引入一个取值依赖于样本点的变量 X，来建立样本点和实数的对应关系，从而实现了样本点的数量化. 由于随机试验中样本点的出现具有随机性，所以变量 X 的取值也具有随机性.

随机变量就是建立在 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的单值对应，样本空间 Ω 相当于函数的定义域，不同的是 Ω 未必是数集.

一般地，对于随机试验样本空间 Ω 中的每个样本点 ω，都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称 X 为**随机变量**(random variable). 通常用大写英文字母 X，Y，Z(或小写希腊字母 ξ，η，ζ)等表示随机变量，而用小写英文字母 x，y，z(加上适当下标)等表示随机变量的取值.

例 1　下列变量中哪些是随机变量？如果是随机变量，那么可能的取值有哪些？

(1) 一实验箱中装有标号为 1，2，3，3，4 的 5 只白鼠，从中任取 1 只，记取到的白鼠的标号为 X；

(2) 明天的降雨量 L(单位：mm)；

(3) 先后抛掷一枚质地均匀的硬币两次，正面向上的次数 X.

解　(1) 根据条件可知，X 是随机变量，可能的取值是 1，2，3，4.

(2) 降雨量具有一定的随机性，所以 L 是随机变量，可能的取值有无数多个，可以是 $[0, +\infty)$ 内的某个数.

(3) 用 H 表示“正面向上”，T 表示“反面向上”，则样本空间为 {HH，HT，TH，TT}. 正面向上(即出现 H)的次数 X 是随机变量，取值是 0，1，2.

植树成活的树苗数、抛掷骰子向上的点数……像这种取值为离散的数值的随机变量称为**离散型随机变量**(discrete random variable). 而接听电话的时长、降雨量……取值为连续的实数区间，具有这种特点的随机变量称为**连续型随机变量**(continuous random variable).

引入随机变量后，随机事件就可以用随机变量来表示了. 在例 1(1)中，随机事件“从装有标号为 1，2，3，3，4 的 5 只白鼠的实验箱中任取 1 只，取到 1 号白鼠”可以表示为 $\{X=1\}$，而随机事件 $\{X<3\}$ 表示“从装有标号为 1，2，3，3，4 的 5 只白鼠的实验箱中任取 1 只，取到 1 号或 2 号白鼠”，也就是说，复杂的随机事件也可以用随机变量的取值来表示.

练　习

1. 下列变量是不是随机变量？在随机变量中，哪些是离散型随机变量，哪些是连续型随机变量？

(1) 某人上班途中共有 5 个红绿灯路口，此人某天上班遇到红灯的次数.

(2) 某地区今后每一年的人口的出生数.

(3) 某单位全体员工体检时每人的血清转氨酶测定值.

(4) 某水库某一时刻的水位.

(5) 某车间生产的 100 件产品中有 2 件次品，其余都是正品. 从这 100 件产品中随机抽出 1 件，如果是次品，抽样结束，如果是正品，则将抽出的产品放回；再从 100 件产品中抽出 1 件，如果是次品，抽样结束，如果是正品，则将抽出的产品放回……重复这样的操作，直到取出的产品是次品时终止操作. 到终止操作时抽样的次数.

2. 下列结论中，正确的是(　　).

A. 随机事件的个数与随机变量一一对应　　B. 随机变量与区间一一对应

C. 随机变量的取值是实数　　D. 随机变量与自然数一一对应

既然随机事件可以用随机变量表示，那么随机事件发生的概率就可以用随机变量的取值的概率表示了.

例如，随机试验“抛掷一枚硬币”，结果有两个：正面向上和反面向上，引入随机变量 X，用 $X=0$ 表示“反面向上”，$X=1$ 表示“正面向上”. 于是，事件“抛掷一枚硬币，反面向上”可以表示为 $\{X=0\}$，其概率可以表示为 $P(\{X=0\})=\frac{1}{2}$；事件“抛掷一枚硬币，正面向上”可以表示为 $\{X=1\}$，其概率可以表示为 $P(\{X=1\})=\frac{1}{2}$. 通常将 $P(\{X=0\})$，$P(\{X=1\})$ 分别简记为 $P(X=0)$，$P(X=1)$. 这一结果也可以用表 8-2-1 来描述.

表 8-2-1

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

一般地，随机变量 X 有 n 个不同的取值，它们分别是 x_1，x_2，…，x_n，且

$$P(X=x_i)=p_i，i=1，2，\cdots，n， \qquad ①$$

称①为随机变量 X 的**概率分布列**，简称为 X 的分布列. ①也可以用表 8-2-2 的形式来表示.

表 8-2-2

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

我们将表 8-2-2 称为随机变量 X 的**概率分布表**. 它和①都叫作随机变量 X 的**概率分布**.

显然，这里的 $p_i(i=1，2，\cdots，n)$满足条件

$$p_i \geqslant 0，$$

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

随机变量的概率分布给出了随机试验所有基本事件对应的概率.

例 2 求例 1(3)中的随机变量 X 的概率分布.

解 根据题意，可得图 8-2-1.

故随机变量 X 的概率分布如表 8-2-3 所示.

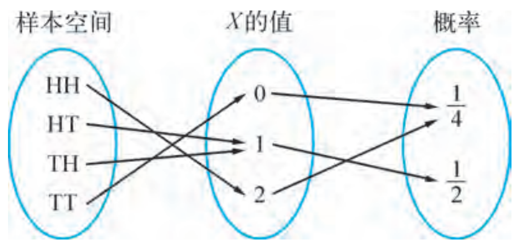


图 8-2-1

表 8-2-3

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

例 3 从装有 6 个白球和 4 个红球的口袋中任取 1 个球，用 X 表示"取到的白球个数"，则 X 的取值为 0 或 1，即

$$X=\begin{cases}0，取到的球为红球，\\1，取到的球为白球，\end{cases}$$

求随机变量 X 的概率分布.

解 由题意知

$$P(X=0)=\frac{4}{6+4}=\frac{2}{5}，P(X=1)=\frac{6}{6+4}=\frac{3}{5}，$$

故随机变量 X 的概率分布如表 8-2-4 所示.

表 8-2-4

X	0	1
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

在例 3 中，随机变量 X 只取两个可能值 0 和 1. 像这样的例子还有很多，例如：在射击中，只考虑"命中"与"不命中"；对产品进行检验时，只关心"合格"与"不合格". 我们把这一类概率分布称为 **0-1 分布**或**两点分布**，并记为 $X\sim 0-1$ 分布或 $X\sim$ 两点分布. 此处"$\sim$"表示"服从".

例 4 同时掷两颗质地均匀的骰子，观察朝上一面出现的点数. 设两颗骰子出现的点数分别为 X_1，X_2，记 $X=\max\{X_1，X_2\}$.

(1) 求 X 的概率分布；

(2) 求 $P(2<X<5)$.

解 (1) 由题意知，掷两颗骰子出现的点数有 36 种等可能的结果：(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(2，1)，…，

(6, 5), (6, 6),故 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6,详见表 8-2-5.

表 8-2-5

X 的值	样　本　点	样本点的个数
1	(1, 1)	1
2	(2, 2) (2, 1) (1, 2)	3
3	(3, 3) (3, 2) (3, 1) (2, 3) (1, 3)	5
4	(4, 4) (4, 3) (4, 2) (4, 1) (3, 4) (2, 4) (1, 4)	7
5	(5, 5) (5, 4) (5, 3) (5, 2) (5, 1) (4, 5) (3, 5) (2, 5) (1, 5)	9
6	(6, 6) (6, 5) (6, 4) (6, 3) (6, 2) (6, 1) (5, 6) (4, 6) (3, 6) (2, 6) (1, 6)	11

由古典概型可知 X 的概率分布如表 8-2-6 所示.

表 8-2-6

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$(2)\ P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{1}{3}.$$

思　考

在例 4 中,记 $Y=\min\{X_1, X_2\}$,求 Y 的概率分布.

练　习

1. 一种新型节能灯使用寿命低于 1 000 h 的概率为 0.1,定义随机变量

$$X=\begin{cases}0, 寿命<1\,000\ \text{h};\\ 1, 寿命\geqslant 1\,000\ \text{h}.\end{cases}$$

试写出随机变量 X 的概率分布列.

2. 已知随机变量 X 的概率分布如下:

X	-1	-0.5	0	1.8	3
P	0.1	0.2	0.1	0.3	a

求:(1) a;　(2) $P(X<0)$;
(3) $P(-0.5\leqslant X<3)$;　(4) $P(X<-2)$;
(5) $P(X>1)$;　(6) $P(X<5)$.

习题 8.2(1)

感受·理解

1. 下列随机试验的结果能否用随机变量表示?若能,请写出各随机变量可能的取值,并说明这些值所表示的随机试验的结果.

(1) 抛掷两颗骰子,所得点数之差;

（2）某篮球运动员 10 次定点投篮中命中的次数；

（3）早上 6:00～7:00 通过某路口的车辆数.

2. 任意抽取一瓶标有 2 500 ml 的某种饮料，其实际量与规定量之差为 X，X 是不是随机变量？若是，其取值的集合是什么？

3. 用随机变量表示随机现象：明天降雨或不降雨.

4. 在掷一枚图钉的随机试验中，令

$$X=\begin{cases}1，\text{钉尖向上}；\\0，\text{钉尖向下}.\end{cases}$$

若钉尖向上的概率为 p，试写出随机变量 X 的分布列.

5. 在某项体能测试中，跑 1 km 所用时间不超过 4 min 为优秀. 某同学跑 1 km 所用时间为 X.

（1）X 是不是随机变量？

（2）若只关心该同学能否取得优秀成绩，应该如何定义随机变量？

6. 对飞机进行射击，按照受损伤影响的不同，飞机的机身可分为两个部分. 要击落飞机，必须在第一部分命中一次或在第二部分命中三次. 设炮弹击中飞机时，命中第一部分的概率是 0.3，命中第二部分的概率是 0.7，射击进行到击落飞机为止. 写出每次射击均命中的情况下，击落飞机的命中次数的分布列.

思考・运用

7. 某同学会做老师给出的 6 道题中的 4 道. 现从这 6 道题中任选 3 道让该同学做，规定至少做出 2 道才能及格，试求：

（1）选做的 3 道题中该同学会做的题目数的分布列；

（2）该同学能及格的概率.

8. 一批产品中有 23%的次品，现从中随机抽样（不放回），直到抽出 1 件次品为止. 令 Y 表示直到抽出 1 件次品时已经抽出的产品个数，且 Y 的概率分布由下面的公式给出：

$$P(y)=0.23\cdot 0.77^{y-1}，\ y=1，2，3，\cdots.$$

（1）求 $P(1)$，并解释这个结果；

（2）求 $P(5)$，并解释这个结果；

（3）求 $P(Y\geqslant 2)$，并解释这个结果.

8.2.2　离散型随机变量的数字特征

随机变量的概率分布完整地描述了随机变量的取值规律，但在实际问题中往往不容易求出精确的分布规律. 而对于很多此类问题，并不需要了解这个规律的全貌，只要知道能揭示其分布特征的某些重要数字就够了. 例如，可以用学生成绩的样本平均数刻画班级学生的学习水平，可以用水稻单产样本的方差（标准差）刻画水稻产量的稳定程度. 这里的平均数、方差（标准差）都是样本的数字特征. 那么，

● 离散型随机变量有哪些数字特征呢？

1. 离散型随机变量的均值

某种福利彩票每张面值 2 元，购买者可从 0，1，2，…，9 这十个数字中选择 3 个数字(可以重复). 当所选 3 个数字与随机摇出的开奖号码数字及顺序均相同时，可以获得 500 元奖金. 如果你长期购买这种彩票，那么你的收益状况如何？

购买彩票是爱心奉献，这里的“收益”不是指投资收益.

要了解长期收益情况，也就是要确定在购买很多次这种彩票的前提下，平均每张彩票的收益金额.

因为从 0，1，2，…，9 这 10 个数字中抽取 3 个数字(可以重复抽取)，共有 1 000 种抽法，所以购买一张彩票的获奖概率为$\frac{1}{1\,000}$.

根据条件可知，若设随机变量 X 为购买一张彩票时的中奖金额，则其概率分布如表 8-2-7 所示.

表 8-2-7

X	0	500
P	0.999	0.001

也就是说，在购买很多张彩票的前提下，平均来说，每 1 000 张彩票中有且只有 1 张中奖，即中奖总金额为 500 元. 因此，平均每张彩票的中奖金额为$\frac{500}{1\,000}=0.5$ 元. 我们将 0.5 称为购买一张彩票的收益均值或数学期望.

这里的 0.5 也可以由下面的式子

$$0\times0.999+500\times0.001$$

求得.

一般地，随机变量 X 的概率分布如表 8-2-8 所示，

表 8-2-8

X	x_1	x_2	…	x_n
概率 p	p_1	p_2	…	p_n

其中 $p_i\geqslant0$，$i=1，2，…，n$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，我们将

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

称为随机变量 X 的**均值**(mean)或**数学期望**(mathematical expectation)，记为 $E(X)$或 μ.

例 1 根据气象预报，某地区下个月有小洪水的概率为 0.25，有大洪水的概率为 0.01. 设工地上有一台大型设备，为保护设备有以下三种方案.

方案 1：运走设备，此时需花费 3 800 元.

方案 2：建一保护围墙，需花费 2 000 元. 但围墙无法防止大洪水，当大洪水来临，设备受损，损失费为 60 000 元.

方案 3：不采取措施，希望不发生洪水. 此时大洪水来临损失 60 000 元，小洪水来临损失 10 000 元.

试从方案的花费与期望损失的和最小的角度比较哪一种方案较好.

解　对于方案 1，花费为 3 800 元，损失为 0 元，花费与期望损失之和为 3 800 元.

对于方案 2，花费为 2 000 元，损失费的概率分布如表 8－2－9 所示，

表 8－2－9

损失费/元	60 000	0
概　率	0.01	0.99

期望损失为 $60\,000\times0.01+0\times0.99=600$(元)，所以花费与期望损失之和为 $2\,000+600=2\,600$(元).

对于方案 3，花费为 0 元，损失费的概率分布如表 8－2－10 所示，

表 8－2－10

损失费/元	60 000	10 000	0
概　率	0.01	0.25	0.74

期望损失为 $60\,000\times0.01+10\,000\times0.25+0\times0.74=3\,100$(元)，所以花费与期望损失之和为 3 100 元.

比较三种方案，我们发现第二种方案的花费与期望损失的和最小，故方案 2 较好.

例 2　在一个人数很多的地区普查某种疾病，由以往经验知道，该地区居民得此病的概率为 0.1%. 现有 1 000 人去验血，给出下面两种化验方法.

方法 1：对 1 000 人逐一进行化验.

方法 2：将 1 000 人分为 100 组，每组 10 人. 对于每个组，先将 10 人的血各取出部分，并混合在一起进行一次化验，如果结果呈阴性，那么可断定这 10 人均无此疾病；如果结果呈阳性，那么再逐一化验.

试问：哪种方法较好？

解　第 1 种方法的化验次数为 1 000.

第 2 种方法：如果某组的混合血液化验结果呈阴性，就可以断定这 10 人均无此疾病，那么对这 10 人只化验 1 次；

如果结果呈阳性，那么必须对这 10 人再逐一化验，这时共需进行

11 次化验. 因为对所有人来说，化验结果呈阳性的概率均为 0.001，而且这些人的化验结果是相互独立的，所以每个人的化验次数 X 的概率分布如表 8-2-11 所示.

表 8-2-11

X	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
P	$(1-0.001)^{10}$	$1-(1-0.001)^{10}$

因为每个人化验次数 X 的均值为

$$E(X)=\frac{1}{10}\times(1-0.001)^{10}+\frac{11}{10}\times[1-(1-0.001)^{10}],$$

所以 1 000 人的化验次数的均值为

$$1\,000\times\left\{\frac{1}{10}\times(1-0.001)^{10}+\frac{11}{10}\times[1-(1-0.001)^{10}]\right\}$$
$$=1\,100-1\,000\times0.999^{10}\approx110.$$

因此，方法 2 远好于方法 1.

练　习

1. 某公司计划一项投资，风险评估专家给出了其收益 X(单位：百万元)的概率分布为

X	1	1.5	2	4	10
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求该项投资收益的均值.

2. 由相关专家组成的研究小组对某地台风到来时紧急撤离计划进行了研究，估计 13～18 h 疏散居民的概率分布为

估计的疏散时间的概率分布

疏散时间（最接近的时间）	13	14	15	16	17	18
概　　率	0.04	0.25	0.40	0.18	0.10	0.03

求疏散时间的均值.

3. 从甲、乙两名射击运动员中选择一名参加比赛，现统计了这两名运动员在训练中命中环数 X，Y 的概率分布如下表，问：哪名运动员的平均成绩较好？

X	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6
Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

2. 离散型随机变量的方差与标准差

甲、乙两名工人生产同一种产品，在相同的条件下，他们生产100件产品所出的不合格品数分别用 X_1，X_2 表示，X_1，X_2 的概率分布如表 8-2-12 所示.

表 8-2-12

X_1	0	1	2	3
p_k	0.6	0.2	0.1	0.1
X_2	0	1	2	3
p_k	0.5	0.3	0.2	0

从均值看，$E(X_1)$，$E(X_2)$都是 0.7，那么甲、乙两名工人哪个的技术稳定性更好一些?

我们知道，当样本平均数相差不大时，可以利用样本方差考察样本数据与样本平均数的偏离程度. 能否用一个类似于样本方差的量来刻画随机变量的波动程度呢?

一般地，若离散型随机变量 X 的概率分布如表 8-2-13 所示，

表 8-2-13

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

其中，$p_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n, p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，则 $(x_i-\mu)^2(\mu=E(X))$ 描述了 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 相对于均值 μ 的偏离程度，故

$$(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n$$

(其中 $p_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n, p_1+p_2+\cdots+p_n=1$) 刻画了随机变量 X 与其均值 μ 的平均偏离程度，我们将其称为离散型随机变量 X 的**方差**，记为 $D(X)$或 σ^2. 即

$$D(X)=\sigma^2=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n.$$

方差也可用公式 $D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$ 计算，有兴趣的同学可以尝试证明.

随机变量 X 的方差也称为 X 的概率分布的方差，X 的方差 $D(X)$的算术平方根称为 X 的**标准差**，即

$$\sigma=\sqrt{D(X)}.$$

思　考

随机变量的方差和样本方差有何区别和联系?

随机变量的方差和标准差都反映了随机变量的取值偏离于均值的平均程度. 方差或标准差越小，随机变量偏离于均值的平均程度就越小.

对于前面的问题，通过计算可以求出 X_1, X_2 的标准差分别为 1.005，0.781，这说明乙的技术稳定性比甲的好一些.

例 3 已知随机变量 X 的概率分布如表 8-2-14 所示，求 X 的方差 $D(X)$ 和标准差 σ.

表 8-2-14

X	0	1
P	$1-p$	p

解 因为 $\mu = 0\times(1-p)+1\times p = p$,

所以 $D(X) = (0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p = p(1-p)$,

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)}.$$

例 4 设有甲、乙两地生产的两批原棉，它们的纤维长度 X，Y 的概率分布如表 8-2-15、表 8-2-16 所示.

表 8-2-15

X	25	24	23	22	21	20
P	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

表 8-2-16

Y	25	24	23	22	21	20
P	0.05	0.2	0.25	0.3	0.1	0.1

试问：这两批原棉的质量哪一批较好？

解 两批原棉纤维长度的均值分别为

$$E(X) = 25\times0.1+24\times0.2+23\times0.3+22\times0.1+21\times0.1+20\times0.2 = 22.5,$$

$$E(Y) = 25\times0.05+24\times0.2+23\times0.25+22\times0.3+21\times0.1+20\times0.1 = 22.5.$$

这两批原棉的纤维平均长度相等.

两批原棉纤维长度的方差分别为

$$D(X) = (25-22.5)^2\times0.1+(24-22.5)^2\times0.2+(23-22.5)^2\times0.3+(22-22.5)^2\times0.1+(21-22.5)^2\times0.1+(20-22.5)^2\times0.2 = 2.65,$$

$$D(Y)=(25-22.5)^2\times0.05+(24-22.5)^2\times0.2+(23-22.5)^2\times0.25+(22-22.5)^2\times0.3+(21-22.5)^2\times0.1+(20-22.5)^2\times0.1=1.75.$$

这说明乙地原棉纤维更加齐整，故乙地原棉的质量比甲地原棉的要好一些.

练　习

1. 某种生丝的级别及相应的概率为

级　别	1	2	3	4	5	6	7	8	9
概　率	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.16	0.12	0.08	0.04

试求该生丝的级别 X 的方差与标准差.

2. 随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{1}{50}\ (k=2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100).$$

试求 $E(X)$，$D(X)$.

习题 8.2(2)

感受・理解

1. 设随机变量 X 的概率分布如下表，求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

2. 随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

试求 $E(X)$，$D(X)$.

3. 随机变量 $X\sim0-1$ 分布，证明 $D(X)\leqslant\frac{1}{4}$.

4. 抛掷一颗质地均匀的骰子，设 X 表示掷出的点数，求 X 的方差.

5. 袋中有形状、大小完全相同的 3 个球，编号分别为 1，2，3. 从袋中取出 2 个球，以 X 表示取出的 2 个球中的最大号码.

(1) 写出 X 的分布列；

(2) 求 X 的均值与方差.

6. 某学校共有 1 032 名学生. 为鼓励学生自主阅读，学校举办“有奖阅读”活动：每个学期，在全体学生中设一等奖 4 名，每名奖 500 分；二等奖 8 名，每名奖 100 分；三等奖 20 名，每名奖 60 分；四等奖 1 000 名，每名奖 4 分. 学生可以利用获得的“奖分”去兑换他们喜欢的文具、书籍. 求该学校每名学生获得奖分的均值.

思考·运用

7. 对第 1 题中的随机变量 X，分别求：

(1) $E(X+2)$，$E(3X)$，$E(X^2)$；

(2) $D(X+2)$，$D(3X)$，$D(X^2)$；

(3) 分别考察它们与 $E(X)$，$D(X)$之间的关系，你能得到随机变量的均值和方差的哪些性质？

8. 将第 5 题改为“有放回地从袋中取两次，每次取 1 个球”，其他条件相同.

(1) 写出 X 的分布列；

(2) 求 X 的均值与方差.

探究·拓展

9. 已知随机变量 X 满足 $P(X=n)=\frac{1}{2^n}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，求 $E(X)$.

8.2.3 二项分布

▲瑞士数学家雅·伯努利（J. Bernoulli，1654—1705），对微积分、微分方程、变分法和概率论都做出了重要贡献. n 次独立重复试验就是由他首先研究的，故又称伯努利概型.

射击手射击 1 次，击中目标的概率为 $p(p>0)$. 现连续射击 3 次，记击中目标的次数为 X，则 X 为随机变量，其取值为 0，1，2，3.

● 随机变量 X 的概率分布是什么？

分析 1 求 X 的概率分布，即要求出概率 $P(X=k)(k=0, 1, 2, 3)$，即事件“连续射击 3 次，结果恰有 k 次击中目标$(k=0, 1, 2, 3)$”的概率.

为直观起见，我们用图 8－2－2 的树形图来表示射击 3 次这一试验的过程和结果. 其中 A_i 表示事件“第 i 次射击，结果击中目标”$(i=1, 2, 3)$，$P(A_i)=p$，$P(\overline{A_i})=1-p$(记为 q).

因为 A_1，A_2，A_3 相互独立，从而 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

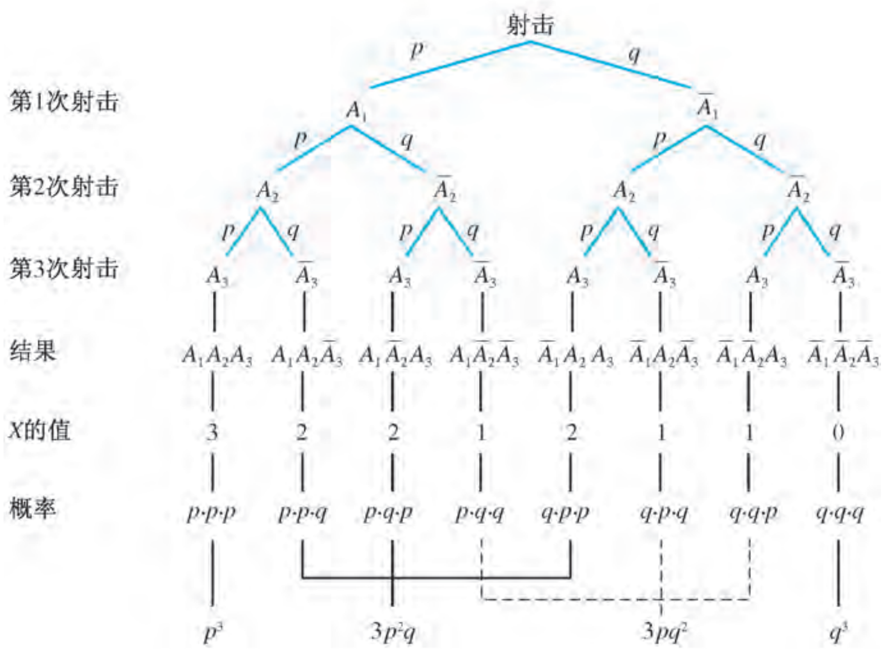


图 8－2－2

由树形图可见，随机变量 X 的概率分布如表 8 - 2 - 17 所示.

表 8 - 2 - 17

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

比较分析 1 和分析 2，体会引入随机变量的重要性.

分析 2　在 $X=k$ 时，根据试验的独立性，事件"射击 1 次，击中目标"在某指定的 k 次发生时，其余的 $(3-k)$ 次则不发生，其概率为 p^kq^{3-k}. 而 3 次试验中发生"射击 1 次，击中目标"k 次的方式有 C_3^k 种，故有

$$P(X=k)=C_3^kp^kq^{3-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

因此，随机变量 X 的概率分布如表 8 - 2 - 18 所示.

表 8 - 2 - 18

X	0	1	2	3
P	$C_3^0q^3$	$C_3^1pq^2$	$C_3^2p^2q$	$C_3^3p^3$

我们把只包含两个可能结果的试验叫作**伯努利试验**(Bernoulli trials). 将一个伯努利试验独立地重复进行 n 次所组成的随机试验称为 **n 重伯努利试验**. 上述问题就是一个 3 重伯努利试验.

在 n 重伯努利试验中，每次试验事件 A 发生的概率均为 $p(0<p<1)$，即 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$. 由于试验的独立性，n 次试验中，事件 A 在某指定的 k 次发生，而在其余$(n-k)$次不发生的概率为 p^kq^{n-k}. 又由于在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的方式有 C_n^k 种，所以在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率为

$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(n)$ 等于 1 吗?

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

它恰好是 $(q+p)^n$ 的二项展开式中的第 $k+1$ 项.

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},$$

其中 $0<p<1$，$p+q=1$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则称 X 服从参数为 n，p 的**二项分布**(binomial distribution)，记作 $X\sim B(n,\ p)$. 其概率分布如表 8 - 2 - 19 所示.

表 8 - 2 - 19

X	0	1	2	$\cdots$	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1pq^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^np^nq^0$

例 1 求随机抛掷 100 次均匀硬币，正好出现 50 次正面的概率.

分析 将一枚均匀硬币随机抛掷 100 次，相当于做了 100 次独立重复试验，每次试验有 2 个可能结果.

解 设 X 为抛掷 100 次均匀硬币出现正面的次数，依题意，随机变量 $X\sim B(100,\ 0.5)$，则

$$P(X=50)=\mathrm{C}_{100}^{50}p^{50}q^{100-50}=\mathrm{C}_{100}^{50}\,0.5^{100}\approx 8\%.$$

答 随机抛掷 100 次均匀硬币，正好出现 50 次正面的概率约为 8%.

思 考

“随机抛掷 100 次均匀硬币正好出现 50 次反面”的概率是多少？

例 2 设某保险公司吸收 10 000 人参加人身意外保险，该公司规定：每人每年付给公司 120 元，若意外死亡，公司将赔偿 10 000 元. 如果已知每人每年意外死亡的概率为 0.006，那么该公司会赔本吗？

解 设这 10 000 人中意外死亡的人数为 X，依题意，随机变量 $X\sim B(10\,000,\ 0.006)$：

$$P(X=k)=\mathrm{C}_{10\,000}^{k}0.006^{k}(1-0.006)^{10\,000-k}.$$

死亡人数为 X 人时，公司要赔偿 X 万元，此时公司的利润为 $(120-X)$万元. 由上述分布，公司赔本的概率为

$$\begin{aligned}P(120-X<0)&=1-P(X\leqslant 120)=1-\sum_{k=0}^{120}P(X=k)\\&=1-\sum_{k=0}^{120}(\mathrm{C}_{10\,000}^{k}0.006^{k}\cdot 0.994^{10\,000-k})\\&\approx 0,\end{aligned}$$

这说明，公司几乎不会赔本.

答 公司几乎不会赔本.

例 3 从批量较大的成品中随机取出 10 件产品进行质量检查，已知这批产品的不合格品率为 0.05，随机变量 X 表示这 10 件产品中的不合格品数，求随机变量 X 的数学期望和方差、标准差.

解 由于批量较大，可以认为随机变量 $X\sim B(10,\ 0.05)$，

$$P(X=k)=p_k=\mathrm{C}_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10.$$

随机变量 X 的概率分布如表 8-2-20 所示.

表 8 - 2 - 20

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$C_{10}^{0}p^{0}(1-p)^{10}$	$C_{10}^{1}p^{1}(1-p)^{9}$	$C_{10}^{2}p^{2}(1-p)^{8}$	$C_{10}^{3}p^{3}(1-p)^{7}$	$C_{10}^{4}p^{4}(1-p)^{6}$	$C_{10}^{5}p^{5}(1-p)^{5}$
X	6	7	8	9	10	
p_k	$C_{10}^{6}p^{6}(1-p)^{4}$	$C_{10}^{7}p^{7}(1-p)^{3}$	$C_{10}^{8}p^{8}(1-p)^{2}$	$C_{10}^{9}p^{9}(1-p)^{1}$	$C_{10}^{10}p^{10}(1-p)^{0}$	

故

$$E(X)=\mu=\sum_{k=0}^{10}kp_k=0.5.$$

由 $D(X)=\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$ 得

$$\sigma^2=0^2\times C_{10}^{0}0.05^{0}\times0.95^{10}+1^2\times C_{10}^{1}0.05^{1}\times0.95^{9}+\cdots+10^2\times C_{10}^{10}0.05^{10}\times0.95^{0}-0.5^2\approx0.725-0.25=0.475,$$

标准差

$$\sigma\approx0.6892.$$

答　随机变量 X 的数学期望为 0.5，方差约为 0.475，标准差约为 0.689 2.

一般地，当 $X\sim B(n,\ p)$ 时，

$$E(X)=np,$$
$$D(X)=np(1-p),$$
$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}.$$

思　考

例 2 中的保险公司年平均收益为多少？

信息技术

● EXCEL

在 Excel 中，计算二项分布的函数是“BINOMDIST”，选择“插入/函数/统计”，可依提示输入相应的参数，或在单元格内直接输入“=BINOMDIST (120, 10000, 0.006, 1)”，就可得到例 2 中 $P(X\leqslant120)$ 的值(图 8 - 2 - 3).

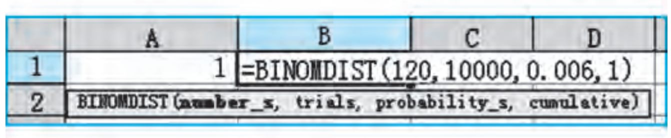
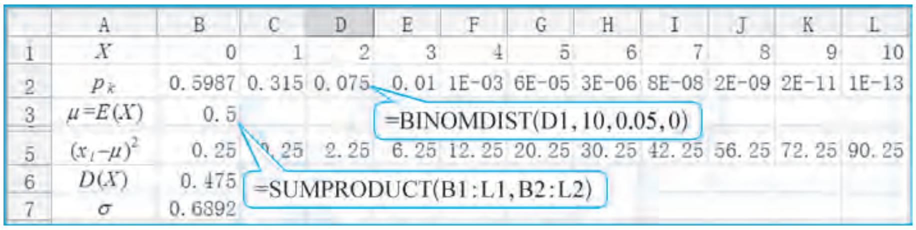


图 8 - 2 - 3

函数 BINOMDIST 中最后一个参数 cumulative 为一逻辑值，用于确定函数的形式. 若 cumulative 为 1，则函数 BINOMDIST 返回累积分布函数，即至多 number_s 次成功的概率；若 cumulative 为 0，则函数 BINOMDIST 返回概率密度函数，即 number_s 次成功的概率.

用函数“BINOMDIST()”得到随机变量的二项分布表，进而求得该随机变量的均值和方差. 图 8－2－4 是例 3 的计算过程，其中函数“SUMPRODUCT()”用于计算相应数组或区域乘积的和.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	p_k	0.5987	0.315	0.075	0.01	1E-03	6E-05	3E-06	8E-08	2E-09	2E-11	1E-13
3	$\mu=E(X)$	0.5										
5	$(x_i-\mu)^2$	0.25	0.25	2.25	6.25	12.25	20.25	30.25	42.25	56.25	72.25	90.25
6	$D(X)$	0.475										
7	σ	0.6892										

图 8－2－4

● GGB

在 GGB 的输入框或运算区内输入“二项分布[100，0.5，50，false]”，就可得到例 1 中 $P(X=50)$ 的值（图 8－2－5）.

图 8－2－5

练 习

1. 一次测验中有 10 道判断题，随意作答，答对不少于 8 题的概率是多少？

2. 如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 $\frac{1}{100}$，那么平均来看，进行多少次试验事件 A 会发生一次？

3. 假设一批集成芯片中次品的概率是 0.1，随机挑选的 20 个芯片中，最多 3 个样品是次品的概率是多少？

4. 假设在 10 次交通事故中有 6 次主要是因为超速引起的，求在 8 次交通事故中有 6 次主要是因为超速引起的概率.

5. 设随机变量 X 的概率分布如下表所示，试求 X 的均值和标准差.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

6. 某商家有一台电话交换机，其中 5 个分机专供与顾客通话. 设每个分机在 1 h 内平均占线 20 min，并且各个分机是否占线是相互独立的，求任一时刻占线的分机数目 X 的均值与方差.

习题 8.2(3)

感受·理解

1. 已知某种节能灯的使用寿命至少为 8 000 h 的概率为 0.9，在 20 只此种节能灯中，求：

(1) 有 18 只使用寿命至少为 8 000 h 的概率；

(2) 至少有 15 只使用寿命至少为 8 000 h 的概率；

(3) 至少有 2 只达不到使用寿命至少为 8 000 h 的概率.

2. 某种元件经受住打击测试的概率为$\frac{3}{4}$，求 4 个此种元件中有 2 个经受住打击的概率.

3. 甲、乙、丙 3 人独立地破译某个密码，每人译出此密码的概率均为 0.25. 设随机变量 X 表示译出密码的人数，求 $E(X)$，$D(X)$和 σ.

4. 某人每次射击命中目标的概率为 0.8，现连续射击 3 次，求击中目标的次数 X 的均值和方差.

思考·运用

5. 假定某射手每次射击命中目标的概率为$\frac{2}{3}$. 现有 3 发子弹，该射手一旦射中目标，就停止射击，否则就一直独立地射击到子弹用完. 设耗用子弹数为 X，求：

(1) X 的概率分布；

(2) 均值 $E(X)$；

(3) 标准差 $\sqrt{D(X)}$.

6. 飞机的几个发动机之间是独立工作的，并且每个发动机出现故障的概率均为 0.004. 假设飞机安全飞行的条件是至少有一半的发动机能正常工作. 问：一架有 4 个发动机的飞机是否比有 2 个发动机的飞机更安全？

8.2.4　超几何分布

一批产品共 100 件，其中有 5 件不合格品，从中有放回地随机抽取 10 件产品，则不合格品数 X 服从二项分布.

● 如果从中不放回地随机抽取 10 件产品，则不合格品数 X 服从何种分布？

从 100 件产品中随机抽取 10 件有 C_{100}^{10} 个等可能的结果. $\{X=2\}$ 表示随机事件“取到 2 件不合格品和 8 件合格品”，依据分步计数原理知有 $C_5^2C_{95}^8$ 个等可能的结果，根据古典概型，得

$$P(X=2)=\frac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}.$$

类似地，可以求得 X 取其他值时对应的随机事件的概率，从而得到不合格品数 X 的概率分布如表 8－2－21 所示.

表 8-2-21

X	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{C_5^0C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^1C_{95}^{9}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^2C_{95}^{8}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^3C_{95}^{7}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^4C_{95}^{6}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^5C_{95}^{5}}{C_{100}^{10}}$

对一般情形，一批产品共 N 件，其中有 M 件不合格品，随机取出的 n 件产品中，不合格品数 X 的概率分布如表 8-2-22 所示.

表 8-2-22

X	0	1	2	…	l
P	$\dfrac{C_M^0C_{N-M}^{n}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^2C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^lC_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$

其中 $l=\min\{n, M\}$.

一般地，若一个随机变量 X 的分布列为

$$P(X=r)=\frac{C_M^rC_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}, \qquad ①$$

其中 $r=0, 1, 2, 3, \cdots, l$, $l=\min\{n, M\}$，则称 X 服从**超几何分布**(hypergeometric distribution)，记为 $X\sim H(n, M, N)$，并将 $P(X=r)=\dfrac{C_M^rC_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}$ 记为$H(r; n, M, N)$.

例 1 生产方发出了一批产品，产品共 50 箱，其中误混了 2 箱不合格产品. 采购方接收该批产品的标准是：从该批产品中任取 5 箱产品进行检测，若至多有 1 箱不合格产品，则接收该批产品. 问：该批产品被接收的概率是多少?

解 用 X 表示“5 箱中不合格产品的箱数”，则 $X\sim H(5, 2, 50)$. 这批产品被接收的条件是 5 箱中没有不合格产品或只有 1 箱不合格产品，所以被接收的概率为 $P(X\leqslant 1)$，即

$$P(X\leqslant 1)=\frac{C_2^0C_{48}^5}{C_{50}^5}+\frac{C_2^1C_{48}^4}{C_{50}^5}=\frac{243}{245}\approx 0.991\,84.$$

答 该批产品被接收的概率约是 0.991 84.

例 2 高三(1)班的联欢会上设计了一项游戏：在一个口袋中装有 10 个红球和 20 个白球，这些球除颜色外完全相同. 一次从中摸出 5 个球，摸到 4 个红球和 1 个白球的就获一等奖，用随机变量 X 表示取到的红球数.

(1) 求获一等奖的概率;

(2) 求 $E(X)$.

解　(1) 随机变量 X 服从超几何分布 $H(5, 10, 30)$.

由公式①得

$$H(4; 5, 10, 30)=\frac{C_{10}^{4}C_{20}^{5-4}}{C_{30}^{5}}=\frac{700}{23\ 751}\approx 0.029\ 5.$$

故获一等奖的概率约为 0.029 5.

(2) X 的概率分布如表 8－2－23 所示.

表 8－2－23

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2\ 584}{23\ 751}$	$\frac{8\ 075}{23\ 751}$	$\frac{8\ 550}{23\ 751}$	$\frac{3\ 800}{23\ 751}$	$\frac{700}{23\ 751}$	$\frac{42}{23\ 751}$

因此,随机变量 X 的均值为

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{2\ 584}{23\ 751}+1\times\frac{8\ 075}{23\ 751}+2\times\frac{8\ 550}{23\ 751}+\\&\quad 3\times\frac{3\ 800}{23\ 751}+4\times\frac{700}{23\ 751}+5\times\frac{42}{23\ 751}\\&=\frac{5}{3}\approx 1.666\ 7.\end{aligned}$$

答　获得一等奖的概率约为 0.029 5,随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 约为 1.666 7.

一般地,当 $X\sim H(n, M, N)$ 时,

$$E(X)=\sum_{k=0}^{l}kP_k=\frac{nM}{N},$$

其中 $l=\min\{n, M\}$.

思　考

如果一批产品的数额(即 N)很大,能否将超几何分布近似地看作二项分布?取 $N=1\ 000, M=20, n=10$,分别以超几何分布和二项分布作为模型,用计算机(器)计算,并考察差异的大小.

信息技术

在 Excel 中,可以直接使用超几何分布函数进行计算.例如,按"插入/函数/统计"选择超几何分布函数"HYPGEOMDIST",然后依次输入 r, n, M, N 的值,或直接在单元格内输入"=HYPGEOMDIST (4; 5, 10, 30)",即可得到例 2 中获一等奖的概率约为 0.029 472 443.

练　习

1. 一个班级有 30 名学生,其中 10 名女生.现从中任选 3 名学生当班委,设随机变量 X 表示 3 名班委中女生的人数,随机变量 Y 表示 3 名班委中男生的人数,试求 X 与 Y 的概率分布.

2. 设 50 件商品中有 15 件一等品，其余为二等品. 现从中随机选购 2 件，用随机变量 X 表示所购 2 件商品中一等品的件数，写出 X 的概率分布.

3. 已知 1 500 件产品中有 100 件不合格品，从中抽取 15 件进行检查，用随机变量 X 表示取出的 15 件产品中不合格品的件数. 求：

(1) X 的分布列；

(2) X 的均值 $E(X)$.

习题 8.2(4)

感受·理解

1. 已知 15 件同类型的零件中有 2 件不合格品，从中任取 3 件，用随机变量 X 表示取出的 3 件中不合格品的件数. 求：

(1) X 的概率分布；

(2) X 的均值 $E(X)$.

2. 某公司有 50 件货物，其中包含 20% 的次品，对这批货物的检验程序为：随机选取 5 件，如果次品数不超过 2 件就通过. 求这批货物通过的概率.

3. 某班有 50 名学生，其中 15 人选修 A 课程，另外 35 人选修 B 课程，从班级中任选两名学生，求他们是选修不同课程的学生的概率.

4. 环保部门就违规排泄污染物问题，对 20 家工厂进行检查，其中 3 家有违规行为. 现从这 20 家工厂中随机抽取 5 家进行检查，求：

(1) 没有发现工厂有违规行为的概率；

(2) 发现 2 家工厂有违规行为的概率.

思考·运用

5. 1 000 只灯泡中含有 $n(2 \leqslant n \leqslant 992)$ 只不合格品，从中一次任取 10 只，记恰含有 2 只不合格品的概率为 $f(n)$.

(1) 求 $f(n)$ 的表达式；

(2) 当 n 为何值时，$f(n)$ 取得最大值？

探究·拓展

6. 栖息于某地区的动物个体总数是未知的，为了得到对栖息在该地区的动物总数的大致估计，生态学家常常进行如下试验：先在这个地区捕捉一些动物（如 m 只），标上记号后放掉它们. 过一段时间，当这些有标记的动物充分散布到整个地区后，再捉一批（如 n 只），其中有标记的动物共 p 只，试估计该地区动物总数.

8.3 正态分布

二项分布、超几何分布是刻画离散型随机变量分布的数学模型，在实际应用中，还有许多随机变量可以取某一区间中的一切值. 这类随机变量就是连续型随机变量. 例如，在必修“统计”一章中给出的金属棒长度的样本数据如下：

6.02	6.01	6.04	5.94	5.97	5.96	5.98	6.01	5.98	6.02
6.00	6.03	6.07	5.97	6.01	6.00	6.03	5.95	6.00	6.00
6.05	5.93	6.02	5.99	6.00	5.95	6.00	5.97	5.96	5.97
6.03	6.01	6.00	5.99	6.04	6.00	6.02	5.99	6.03	5.98

● 测量一次，你能确定测量的结果在区间(5.97，6.03)上的概率吗？

要解决这样的问题，就要了解随机试验所得数据的分布规律. 为此，将这组数据以 0.02 为组距进行分组，可得频率直方图(图 8-3-1)：

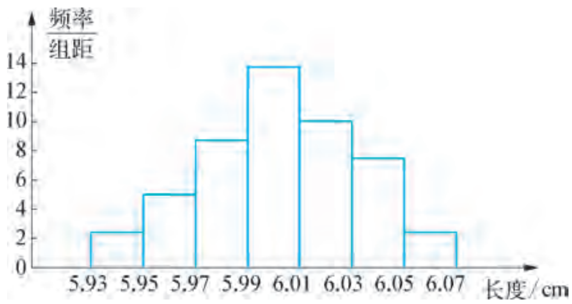


图 8-3-1

这个直方图大体呈中间高、两边低、左右大致对称的特点. 如果增加更多的测量数据，那么这种趋势会更加明显.

可以设想，如果数据无限增多且组距无限缩小，那么频率直方图上的折线将趋于一条光滑的曲线，我们将此曲线称为**概率密度曲线**(图 8-3-2).

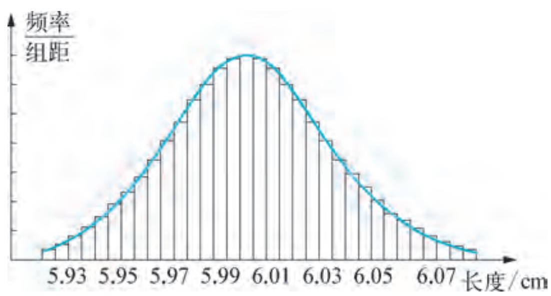


图 8-3-2

从图 8-3-2 可以看出，曲线存在一条过曲线峰顶的对称轴，数据的平均值就在曲线峰顶在 x 轴上的垂直投影处，在平均值附近的值相对较多，而远离平均值的值相对较少，即很小或很大的数据值所占的比例差不多且很小.

函数 $P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象与上述曲线非常吻合，我们将该函数的图象称为**正态密度曲线**. 这里有两个参数 μ 和 σ，其中 $\sigma>0$，$\mu\in\mathbf{R}$.

如图 8-3-3，不同的 μ 和 σ 对应着不同的正态密度曲线.

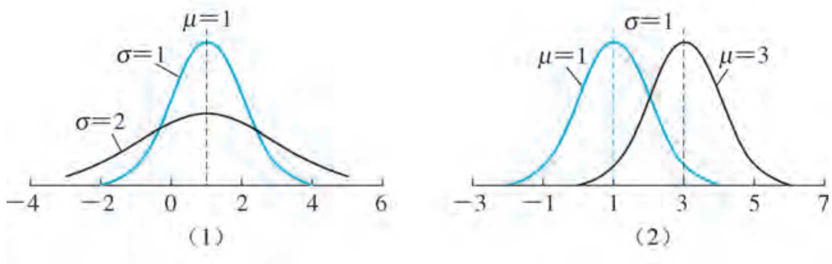


图 8-3-3

正态密度曲线具有如下特征：

(1) 当 $x<\mu$ 时，曲线上升；当 $x>\mu$ 时，曲线下降；当曲线向左右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线.

(2) 曲线关于直线 $x=\mu$ 对称.

(3) σ 越大，曲线越扁平；σ 越小，曲线越尖陡.

(4) 在曲线下方和 x 轴上方范围内的区域面积为 1.

> 正态分布在统计学上的应用始于拉普拉斯和高斯. 1893 年，英国数学家皮尔逊(K. Pearson，1857—1936)首先使用“正态分布”这一名称.

设 X 是一个随机变量，若对任给区间 $(a, b]$，$P(a<X\leqslant b)$ 是正态密度曲线下方和 x 轴上 $(a, b]$ 上方所围成的图形的面积(图 8-3-4)，则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的**正态分布**(normal distribution)，简记为 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$.

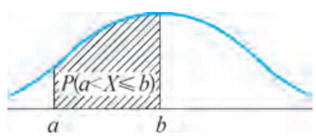


图 8-3-4

现实世界中的很多随机变量遵循正态分布. 例如，反复测量某一个物理量，其测量误差 X 通常服从正态分布；某一地区同性别同年龄组儿童的体重 W 近似地服从正态分布；某一地区成年人的身高近似地服从正态分布；某地每年 1 月份的平均气温 T 也可认为近似地服从正态分布.

若 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则随机变量 X 在 μ 的附近取值的概率很大，在离 μ 很远处取值的概率很小.

具体地，如图 8-3-5，随机变量 X 取值

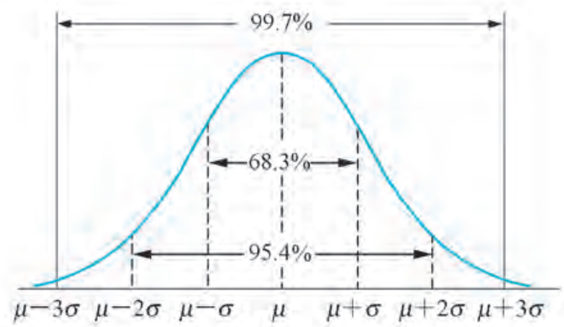


图 8－3－5

落在区间 $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ 内的概率约为 68.3%；

落在区间 $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ 内的概率约为 95.4%；

落在区间 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 内的概率约为 99.7%.

事实上，μ 就是随机变量 X 的均值，σ^2 就是随机变量 X 的方差，它们分别反映 X 取值的平均大小和稳定程度.

对于节首问题，由于随机的测量误差，使得测量的长度 L 服从均值约为 6 的正态分布，再用样本方差估计总体方差，得 $\sigma \approx 0.031$，故随机测量一次，其测量的长度在区间 $(5.97, 6.03)$ 上的概率约为 68.3%.

我们将正态分布 $N(0, 1)$ 称为标准正态分布(图 8－3－6，其中 A 栏为 x 的取值，B 栏为 $P(x)$ 的值)，通过查标准正态分布表(见附录)可以确定服从标准正态分布的随机变量的有关概率.

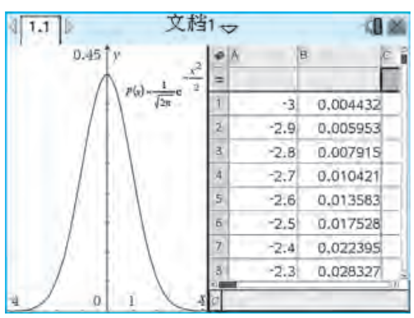


图 8－3－6

例 1　已知随机变量 $Z \sim N(0, 1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(Z \leqslant 1.52)$；　　(2) $P(Z > 1.52)$；

(3) $P(0.57 < Z \leqslant 2.3)$；　　(4) $P(Z \leqslant -1.49)$.

解　(1) $P(Z \leqslant 1.52) = 0.9357$ (图 8－3－7(1)).

(2) $P(Z > 1.52) = 1 - P(Z \leqslant 1.52)$

$= 1 - 0.9357 = 0.0643$.

(3) $P(0.57 < Z \leqslant 2.3) = P(Z \leqslant 2.3) - P(Z \leqslant 0.57)$

$= 0.9893 - 0.7157$

$= 0.2736$ (图 8－3－7(2)).

标准正态分布表是针对 $Z \geqslant 0$ 设计的，若 $Z < 0$，则须转换再查. 查表前，可画个草图，以帮助查表.

(4) $P(Z\leqslant -1.49)=P(Z\geqslant 1.49)=1-P(Z\leqslant 1.49)$

$=1-0.9319=0.0681$(图 8-3-7(3)).

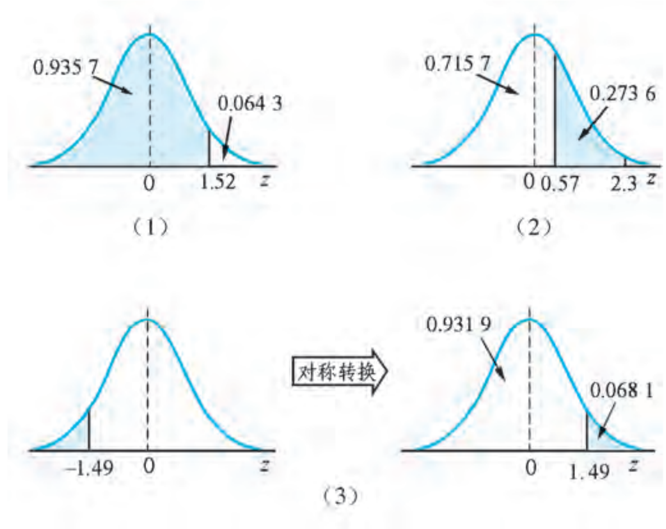


图 8-3-7

例 2 某批待出口的水果罐头，每罐净重 X(单位：g)服从正态分布$N(184, 2.5^2)$，求：

(1) 随机抽取 1 罐，其净重超过 184.5 g 的概率；

(2) 随机抽取 1 罐，其净重在 179 g 与 189 g 之间的概率.

当 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\mu\neq 0$ 或 $\sigma^2\neq 1$) 时，$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从标准正态分布.

解 (1) $P(X>184.5)=P\left(\dfrac{X-184}{2.5}>\dfrac{184.5-184}{2.5}\right)$

$=P(Z>0.2)=1-P(Z\leqslant 0.2)$

$=1-0.5793=0.4207.$

(2) $P(179<X\leqslant 189)=P\left(\dfrac{179-184}{2.5}<\dfrac{X-184}{2.5}\leqslant\dfrac{189-184}{2.5}\right)$

$=P(-2<Z\leqslant 2)$

$=P(Z\leqslant 2)-P(Z\leqslant -2)$

$=P(Z\leqslant 2)-P(Z\geqslant 2)$

$=P(Z\leqslant 2)-[1-P(Z\leqslant 2)]$

$=2P(Z\leqslant 2)-1$

$=2\times 0.9772-1$

$=0.9544.$

答 随机抽取 1 罐，其净重超过 184.5 g 的概率是 0.420 7，净重在 179 g 与 189 g 之间的概率为 0.954 4.

在实际生活中遇到的很多随机现象，随机变量大体满足其取值以某个值为中心且左右对称这种特性，一般都可以尝试用正态分布来描述这个随机变量的取值规律.

数学家们发现，在多种微小因素影响下，如果没有一种影响占主导地位，那么这样的随机变量服从正态分布. 特别是在独立地大数量重复试验时，就平均而言，任何一个随机变量的分布都将趋近于正态分布.

信息技术

在 Excel 中，计算正态分布的函数是“NORMDIST”，选择“插入/函数/统计”，按提示输入相应的参数，或在单元格内直接输入“=NORMDIST(184.5，184，2.5，1)”，就可以得到 $P(X\leqslant 184.5)$ 的值(图 8-3-8).

	A	B
1	0.579259709	=NORMDIST(184.5,184,2.5,1)
2	NORMDIST(x, mean, standard_dev, cumulative)	

图 8-3-8

$P(X>184.5)$ 和 $P(179<X\leqslant 189)$ 可分别转化为 $1-P(X\leqslant 184.5)$ 和 $P(X\leqslant 189)-P(X\leqslant 179)$ 来计算(图 8-3-9).

	A	B
1	(1) P (X>184.5)	(2) P (179<X≤189)
2	=1-NORMDIST(184.5,184,2.5,1)	=NORMDIST(189,184,2.5,1)-NORMDIST(179,184,2.5,1)
3	0.420740290560897	0.954499736103641

图 8-3-9

练　习

1. 已知随机变量 $Z\sim N(0，1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(Z\leqslant 2.75)$；

(2) $P(Z<0.5)$；

(3) $P(Z>-1.5)$；

(4) $P(2<Z<2.9)$；

(5) $P(-2<Z\leqslant 2.9)$.

2. 已知随机变量 $\xi\sim N(2，2.5^2)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(0<\xi<1.90)$；

(2) $P(-1.83<\xi<0)$；

(3) $P(|\xi|<1)$.

3. 某金属元件的抗拉强度服从正态分布，均值为 10 000 kg/cm^2，标准差是 100 kg/cm^2. 测量记录精确到 50 kg/cm^2.

(1) 求抗拉强度超过 10 150 kg/cm^2 的元件的比例；

(2) 如果要求所有元件的抗拉强度在 9 800～10 200 kg/cm^2 的范围内，那么被报废的元件的比例是多少？

链 接

二项分布与正态分布

二项分布是离散型的，而正态分布是连续型的，它们是不同的概率分布. 但是，随着二项分布的试验次数的增加，便会发现它们之间的内在关系.

例如，抛掷20枚质地均匀的硬币，出现正面的次数的概率分布为试验次数为20、事件发生的概率为$\frac{1}{2}$的二项分布，其分布折线图如图8-3-10所示. 这个分布的均值为10，方差为5. 图8-3-11是均值为10、方差为5的正态分布曲线：

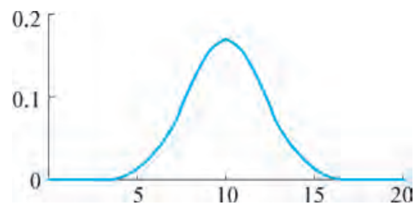


图8-3-10

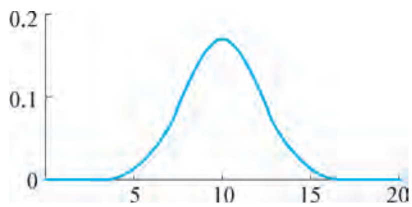


图8-3-11

从图中可以看到，两者极为相似. 如果将抛掷次数增加到100次时，二项分布折线图(图8-3-12)与均值、方差都相同的正态分布曲线(图8-3-13)就很难区分了.

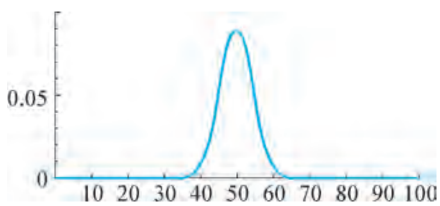


图8-3-12

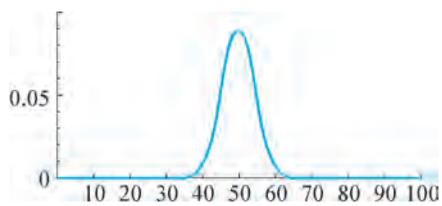


图8-3-13

因为二项分布的概率计算公式较为繁琐，所以在试验次数较大时，可以利用正态分布处理二项分布的相关概率计算问题.

习题 8.3

感受·理解

1. 已知随机变量 $\xi \sim N(0, 1)$，$\Phi(x) = P(\xi \leqslant x)$，判断下列等式是否成立：

(1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$；

(2) $P(|\xi| \leqslant x) = 1 - 2\Phi(x)$；

(3) $P(|\xi| < x) = 2\Phi(x) - 1$；

(4) $P(|\xi| > x) = 2[1 - \Phi(x)]$.

2. 已知随机变量 $X \sim N(2, 2.5^2)$，查标准正态分布表，计算：

(1) $P(X < 2.2)$；

(2) $P(X > 1.76)$；

(3) $P(X<-0.78)$;

(4) $P(|X|<1.55)$;

(5) $P(|X|>2.5)$;

(6) $P(-1.8<X<2)$.

3. 已知随机变量 $X\sim N(0,1)$,且 $P(-a<X\leqslant a)=0.6$, $a>0$,求 a 的值.

思考・运用

4. 在标准正态曲线下,求满足下列条件的 z 的值:

(1) 大于 z 的面积是 0.362 2;

(2) 小于 z 的面积是 0.113 1;

(3) 0 和 z 之间的面积是 0.483 8,其中 $z>0$;

(4) $-z$ 和 z 之间的面积是 0.950 0,其中 $z>0$.

5. 假设从你家到学校体育馆所要花费的时间服从均值为 40 min、标准差为 7 min 的正态分布. 如果你要从家到学校体育馆参加下午 2:00 开始的一项活动,要想做到有 95%的把握不迟到,那么最晚何时出发?

探究・拓展

6. 下面是一批检波器测量噪声(噪声电平)的 100 个观测值(单位: mV,真值为以下数据乘以 10),试作出这些数据的频率直方图,判断其是否服从正态分布,再估计噪声在区间[−2.5, 2.5]上的概率.

0.1	−1.0	1.9	−0.1	0.0	0.3	−1.2	0.0	−0.4	0.1
1.5	0.3	1.0	−1.3	0.5	−1.2	−3.4	−3.0	−0.5	1.9
0.2	0.1	0.7	1.3	2.4	−0.5	0.5	−3.5	0.4	0.7
2.0	−0.4	−1.3	−1.9	−0.5	−1.5	−0.1	−1.1	0.0	0.2
−2.3	0.5	0.7	−2.1	−0.6	−0.4	2.4	1.5	1.6	0.6
−0.1	0.5	−0.1	1.1	2.5	−2.6	−0.3	1.2	−0.8	−2.4
0.7	1.2	0.5	0.0	−0.5	−0.3	−1.8	0.2	−1.9	−0.8
−0.4	−1.1	2.9	−1.1	0.4	0.0	−0.4	−0.3	1.7	−1.5
−1.0	1.1	0.0	−1.1	0.9	1.7	−0.3	2.1	0.7	0.7
−0.6	2.3	2.0	−1.1	1.2	1.0	0.1	−0.5	−0.3	−0.2

问题与探究

你的彩票被扔掉了吗?

20世纪90年代,一家瑞典知名报纸以“你的彩票都被扔了!”为题发布了一则消息,引起了很大的骚动.该消息与当时的流行电视节目“宾戈乐透”有关.人们买乐透彩票寄给节目组,主持人在现场直播时从大邮袋中抽出一张彩票,宣布中奖.细心的记者发现,这个大邮袋中只有小部分寄来的彩票,因此得出结论:你的彩票被扔掉了!

节目组解释说:拿到现场的小部分彩票是从所有寄来的彩票中,用随机的方法抽出的,也就是说,抽奖过程分为两个步骤:先从所有彩票中随机抽出一部分,再当场从这部分彩票中随机抽出获奖彩票.这个过程仍然是公平的.

你能对节目组的说法给出数学证明吗?

阅　读

高斯与概率统计

高斯(C. F. Gauss, 1777—1855),德国伟大的数学家、统计学家和物理学家,近代数学奠基人之一.

高斯以他丰富的天文观察和土地测量的经验,发现观察值 x 与真正值 μ 的误差服从正态分布.他运用极大似然法及其他数学知识,推导出测量误差的概率分布公式.“误差分布曲线”这个术语就是高斯提出来的,后人为了纪念他,称这种分布曲线为高斯分布曲线,也就是今天的正态分布曲线.

法国数学家棣莫弗(De Moivre, 1667—1754)早于高斯给出此分布,甚至有人认为瑞士数学家丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli, 1700—1782)更早就发现了.

1801年元旦,一颗小行星(后来被命名为谷神星)被发现,当时它好像在向太阳靠近.天文学家虽然有40天的时间可以观察它,但不能计算它的轨道.高斯只做了3次观察就提出了一种计算轨道参数的方法,而且达到的精确度使得天文学家在1801年末和1802年初能够毫无困难地确定它的位置.高斯在这一计算中用到了他创造的最小二乘法(大约在1794年创造的),在天文学中这一成就立即得到公认.他在《天体运动理论》中叙述的这一方法今天仍在使用.后来,高斯在小行星“智神星”研究方面也获得类似的成功.

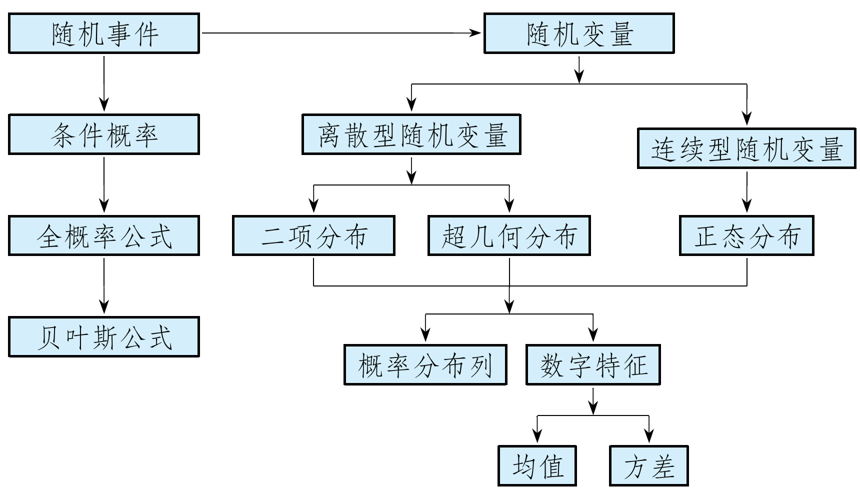
有人曾把高斯形容为“能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和深奥数学的天才”,而他自己却认为:假如别人和我一样深刻和持续地思考数学真理,他们会做出同样的发现.

查阅相关资料,了解高斯的数学成就,感受他的科学精神.

本章回顾

本 章 概 览

本章在古典概型的基础上，研究了条件概率、全概率公式和贝叶斯公式. 通过引入随机变量的概念，研究了几种类型的随机变量的概率分布，用随机变量的均值(数学期望)和方差(或标准差)，对随机变量的集中趋势和离散程度进行了刻画.



通过引入随机变量描述随机事件，使我们能够运用函数等数学知识来研究概率问题，为研究复杂的随机现象提供了工具. 二项分布、超几何分布和正态分布都是重要的概率模型，在社会、生活和科学研究中有着广泛的应用.

概率论是现代统计学的理论基础，是处理数据、进行统计推断的理论依据. 我们要善于运用概率的思想和理论，分析并处理现实世界中大量存在的随机现象.

复 习 题

感受 · 理解

1. 甲、乙两人射击，中靶的概率分别为 0.8，0.7. 若两人同时独立射击，则他们都击中靶的概率是(　　).

A. 0.56　　B. 0.48　　C. 0.75　　D. 0.6

2. 已知随机事件 A，B，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{2}$，求 $P(AB)$，$P(A\mid B)$.

3. 一个盒子中装有 4 只产品，其中 3 只一等品、1 只二等品. 从中抽取产品两次，每次任取一只，不放回抽样. 求在第一次取到一等品时，第二次取到一等品的概率.

4. 某种小麦在田间出现自然变异植株的概率为 0.004 5，今调查该种小麦 100 株，试计算获得 2 株和 2 株以上变异植株的概率.

5. 一批产品共 100 件，其中有 5 件不合格品. 从中任取 50 件，问：没有不合格品的概率是多少？恰有 1 件不合格品的概率是多少？

6. 某批产品中有 20%的不合格品，进行有放回地重复抽样检查，共取 5 个样品，其中不合格品数为 X，试确定 X 的概率分布.

7. 已知一个人由于输血而引起不良反应的概率为 0.001，求：

(1) 2 000 人中恰有 2 人引起不良反应的概率；

(2) 2 000 人中多于 1 人引起不良反应的概率；

(3) 2 000 人中引起不良反应的人数的均值与方差.

8. 对批量(即一批产品中所含产品的件数)很大的某种产品进行抽样质量检查时，采用一件一件地抽取进行检查. 若检查的 5 件产品中未发现不合格产品，则停止检查并认为该批产品合格；若检查的 5 件产品中发现不合格产品，则也停止检查并认为该批产品不合格. 假定该批产品的不合格率为 0.05，检查产品的件数为 X，问：

(1) 各次抽查是否可认为相互独立？为什么？

(2) 求 X 的概率分布及均值.

9. 如果两个商场的奖项设置分别为

A 商场：

奖项/元	概率
1 000	0.1
100	0.7
10	0.2

B 商场：

奖项/元	概率
250	0.5
150	0.3
10	0.2

虽然概率分布不同，但是均值都为 172 元，那么能否认为这两种奖项设置对顾客来说同等合算？

10. 设某工厂有两个车间生产同型号家用电器，第一车间的次品率为 0.15，第二车间的次品率为 0.12，两个车间的成品都混合堆放在一个仓库里. 假设第一车间和第二车间生产的成品比例为 2∶3，今有一客户从成品仓库中随机提取一台产品，求该产品合格的概率.

11. 设 $X \sim N(0,\ 1)$，求 $P(X \leqslant -1.4)$，$P(|X| > 2.1)$.

12. 设 $X \sim N(3,\ 2^2)$，求 $P(0 < X < 5)$，$P(|X| < 4)$.

思考·运用

13. 一部车床生产某种零件的不合格品率为 2%，若从这部车床生产的一组 5 个零件的随机样本中发现有 2 个或 2 个以上的不合格品，则停机维修. 试求停机维修的概率.

14. 盒中有 a 个红球和 b 个黑球，今随机地从中取出一个，观察其颜色后放回，并加上与取出的球同色的球 c 个，再从盒中第二次取出一个球，求第二次取出的是黑球的概率.

15. 抽样表明，某市新生儿体重 X(单位：kg)近似地服从正态分布 $N(3.4, \sigma^2)$，已知该市新生儿体重不足 2 kg 的占 3.1%. 试求该市新生儿体重超过 4 kg 的百分比.

探究·拓展

16. 在一种称为“幸运 35”的福利彩票中，规定从 01，02，…，35 这 35 个号码中任选 7 个不同的号码组成一注，并通过摇奖机从这 35 个号码中摇出 7 个不同的号码作为特等奖. 与特等奖号码仅 6 个相同的为一等奖，仅 5 个相同的为二等奖，仅 4 个相同的为三等奖，其他的情况不得奖. 为了便于计算，假定每个投注号只有 1 次中奖机会(只计奖金额最大的奖)，该期的每组号码均有人买，且彩票无重复号码. 若每注彩票为 2 元，特等奖奖金为 100 万元/注，一等奖奖金为1 万元/注，二等奖奖金为 100 元/注，三等奖奖金为 10 元/注，试求：

(1) 奖金额 X(元)的概率分布；

(2) 这一期彩票售完可以为福利事业筹集多少资金(不计发售彩票的费用)?

17. (操作题)用抛掷 1 枚一元硬币和 1 枚五角硬币来模拟孟德尔的豌豆实验，设 2 枚硬币的正面对应 DD，一元硬币的正面与五角硬币的反面对应 Dd，一元硬币的反面与五角硬币的正面对应 dD，2 枚硬币的反面对应 dd. 抛掷这 2 枚硬币 100 次，记下出现 DD，Dd，dD 和 dd 的次数，考察你的结果是否基本符合 1∶1∶1∶1 的比例.

本章测试

一、填空题

1. 袋中有大小相同的 4 个红球和 3 个白球，从袋中任意取出 1 个球(不放回)，直到取出的球是白球为止. 设取球的次数为 X，则随机变量 X 的所有可能取值为________________.

2. 若 $P(AB)=\frac{3}{10}$，$P(A)=\frac{3}{5}$，则 $P(B|A)=$__________.

3. 3 个同学猜同一个谜语，如果每人猜对的概率都是 $\frac{1}{3}$，并且各人猜对与否互不影响，那么他们同时猜对的概率为________.

4. 某人参加一次考试，共有 4 道试题，至少答对其中 3 道试题才能合格. 若他答每道题的正确率均为 0.5，并且答每道题之间相互独立，则他能合格的概率为________.

5. 若随机抛掷一颗质地均匀的正方体骰子 1 次，则所得点数 X 的均值是________.

6. 设 a 为实数，如果随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{i}{2a}(i=1, 2, 3)$，那么 $a=$________.

二、选择题

7. 设随机变量 X 的可能取值为 $1, 2, \cdots, n$，并且取 $1, 2, \cdots, n$ 是等可能的. 若 $P(X<4)=0.3$，则下面结论中正确的是(　　).

A. $n=3$　　B. $n=4$

C. $n=10$　　D. n 不能确定

8. 如果随机变量 $X\sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$，那么 $D(X)$ 等于(　　).

A. 1　　B. $\frac{4}{3}$

C. 2　　D. 6

9. 已知盒中有 10 个球(除颜色外其他属性都相同)，其中 6 个白球和 4 个黑球. 从盒中一次随机地取出 2 个球，其中至少有 1 个黑球的概率为(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{5}$

10. 如果随机变量 $X\sim N(2, \sigma^2)$，且 $P(X\leqslant 4)=0.8$，那么 $P(X\leqslant 0)$ 的值为(　　).

A. 0.2　　B. 0.32

C. 0.4　　D. 0.8

三、解答题

11. 在 1，2，3，…，9 这 9 个自然数中，任取 2 个不同的数.

(1) 求这 2 个数中恰有 1 个奇数的概率；

(2) 设 X 为所取的 2 个数中奇数的个数，求随机变量 X 的概率分布及均值.

12. 设某公路上经过的货车与客车的数量之比为 1∶2，货车与客车中途停车修理的概率分别为 0.002，0.001. 求该公路上行驶的汽车停车修理的概率.

13. 已知 10 道试题中有 4 道选择题，甲、乙两人依次不放回地抽取 1 道，求：

(1) 甲抽到选择题的概率；

(2) 在甲抽到选择题的情况下，乙抽到选择题的概率.

14. 甲、乙两人投篮命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$，并且他们投篮互不影响. 现每人分别投篮 2 次，求甲比乙进球数多的概率.

15. 甲、乙两名运动员进行羽毛球单打比赛，根据以往比赛的胜负情况知道，每一局甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 如果比赛采用“三局两胜(即有一方先胜 2 局即获胜，比赛结束)”或“五局三胜(即有一方先胜 3 局即获胜，比赛结束)”两种规则，求在哪种比赛规则下，甲胜的概率较大.

第 9 章　统　　计


统计
线性回归分析
变量的相关性
线性回归方程
独立性检验

有些人不喜欢统计学，但是我觉得它充满美感并对其感兴趣。不论何时，统计学都不是蛮不讲理的。在实际应用中，只要运用正确的方法，它就可以细致并严谨地解释问题。统计学处理复杂事件的能力是无与伦比的。

——弗朗西斯·高尔顿

公安人员在勘察案发现场时，总是非常仔细地搜寻犯罪嫌疑人的脚印，一个重要的原因就是可以根据脚印的长短来推测其身高。从直觉上看，成年人的身高与脚长（脚趾到脚跟的长度）存在着某种关系。

相关研究发现，我国成年人的身高与脚长有着下面的关系（单位：cm）：

$$身高=6.876\times脚长+误差.$$

例如，若犯罪嫌疑人留下的脚印长度为 25 cm，则根据这个公式推测犯罪嫌疑人身高约为 $6.876\times25=171.9$（cm），也就是说脚印长度为 25 cm 的人的身高在 171.9 cm 上下。

这类问题大量地存在于现实生活中：商品的销售量与广告宣传费之间的关系、吸烟与患呼吸道疾病之间的关系……

- 这是一种怎样的关系？
- 如何研究这些问题？

9.1 线性回归分析

人的脚长与身高之间具有某种关联. 但是，两个脚长一样的人，他们的身高并不一定相同. 也就是说，人的脚长与身高之间并不是确定的函数关系.

● 人的脚长与身高之间是一种怎样的关系呢?

9.1.1 变量的相关性

人的脚长与身高有关，一般来说，脚越长，个子越高，但不能用一个确定的函数来表示身高与脚长之间的关系；

农作物的产量与施肥量有关，一般来说，在一定范围内，施肥量越多，农作物的产量就越高，但不能用一个确定的函数来表示产量与施肥量之间的关系；

家庭的收入与支出有一定的关系，收入高的家庭往往支出也较多，但不能用一个函数来精确地表示家庭支出与收入之间的关系.

通常把上述问题中的脚长、施肥量、家庭收入等称为自变量，与之对应的身高、农作物的产量、家庭支出等称为相应的因变量.

● 上述问题中的自变量与因变量之间是一种怎样的关系?

对于上述三个问题，在多次重复观测中，自变量取一定值，因变量不一定取一个确定的值与之对应，而是有或多或少的差异. 这是因为作为因变量的事物，除受问题中的自变量的影响外，还受到其他许多因素的影响. 这些因素中有的是可知的，有的难以明确.

试举出具有相关关系的实例.

像这样，两个变量之间具有一定的联系，但又没有确定性函数关系，这种关系称为**相关关系**(correlativity).

例 1 试判断下列各个问题中两个变量之间是否具有相关关系:

(1) 商品的销售价格与其供应量；

(2) 汽车的耗油量与行驶速度；

(3) 真空中自由降落的小球的位移(单位: m)与时间(单位: s)；

(4) 空气中污染物浓度(单位: $\mu g/m^3$)与日降雨量(单位: cm).

解 (1)商品的销售价格与其供应量之间具有相关关系. 一般来说，在品质相当的情况下，供应量越大，价格就越低；供应量越小，价格就越高. 某些品牌商品限量供应，就是保持较高价位的销售策略.

(2) 汽车的耗油量与行驶速度之间具有相关关系. 通常情况下，

当速度很慢或速度很快时，耗油较多，而在中等车速（不同的汽车范围不一定一样）时，速度稍高，耗油反而较少.

（3）根据自由落体运动方程，自由降落的小球的位移与时间之间是函数关系.

（4）空气中污染物浓度与日降雨量之间具有相关关系. 通常情况下，降雨量越大，空气中污染物浓度就越低.

练 习

1. 试举几例具有相关关系的变量.

2. 判断下列两个变量之间是否具有相关关系：

（1）家庭月用电量与月平均气温；

（2）一天中的最高气温与最低气温；

（3）某企业生产的一种商品的销量与其广告费用；

（4）谷物的价格与牛肉的价格；

（5）在公式 $LW=12$ 中的 L 与 W.

3. 与同学一起测量脚长与身高，并用适当方式探究它们之间是否具有相关关系.

在分析上面几个问题时，我们都是用“直觉”与“经验”进行判断的，具有粗略、不够精确的特点. 如何进行更为科学、严密的推断呢？下面我们先考察一个具体问题.

全国城镇居民人均年可支配收入与人均年支出的部分数据（来源：《中国统计年鉴（2016）》）如表 9－1－1 所示.

表 9－1－1

年　份	1990	2000	2010	2011	2012	2013	2014	2015
人均年可支配收入/元	1 510	6 280	19 109	21 810	24 565	26 467	28 844	31 195
人均年支出/元	1 279	4 998	13 471	15 161	16 674	18 488	19 968	21 392

尽管不是函数关系，但仍可运用函数思想进行研究.

上述人均年支出与人均年可支配收入的大致关系也可用图来表示. 我们以横坐标 x 表示人均年可支配收入，纵坐标 y 表示人均年支出，建立平面直角坐标系，将表中数据构成的 8 个点在坐标系内标出，得到图 9－1－1. 今后我们称这类图为**散点图**（scatter plot）.

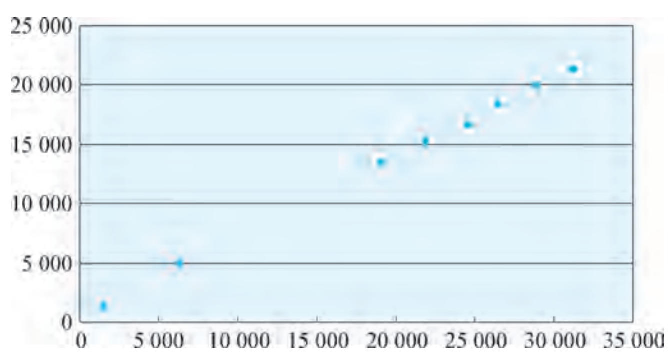


图 9－1－1

人均年可支配收入与年份之间是否具有线性相关关系？剔除前面两列数据后是否具有线性相关关系？这说明研究相关关系时应注意怎样的问题？

通过散点图可以看出，随着人均年可支配收入的增加，人均年支出也在提高，这 8 个点散布在一条直线附近，说明人均年支出 y 与人均年可支配收入 x 具有相关关系．我们将具有这种特性的相关关系称为**线性相关关系**．

这些散点呈从左下向右上方向发展的趋势，我们称这两个变量之间**正相关**．同理，如果具有相关关系的两个变量的散点图呈从左上逐渐向右下方向发展的趋势，则称这两个变量之间**负相关**．

思　考

观察下列散点图（图 9－1－2），并思考：这些描述样本数据的图反映出相应的变量之间是否具有相关关系？是正相关还是负相关？

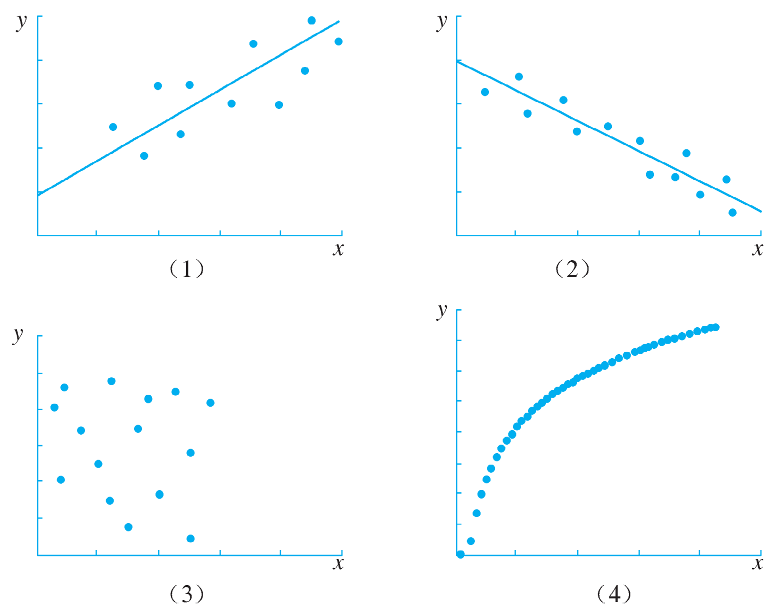


图 9－1－2

下面我们用向量的方法来研究数据的相关性．

根据向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 可知 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角．

对于向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

对于向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

一般地，对于向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}.$$

对于向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, b_1)$，$\boldsymbol{b}=(a_2, b_2)$，由 $\cos\theta=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ 知，$|\cos\theta|$ 越接近于 1，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 就越接近于 0 或 π，这时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 趋于共线.

对于两对数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，设点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，线段 A_1A_2 的中点为 $M(\overline{x}, \overline{y})$ $\left(\text{其中}\ \overline{x}=\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \overline{y}=\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

构造向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}=(x_1-\overline{x}, x_2-\overline{x})$，$\boldsymbol{b}=(y_1-\overline{y}, y_2-\overline{y})$，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，存在非零实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},$$

即

$$\begin{cases}y_1-\overline{y}=\lambda(x_1-\overline{x}),\\ y_2-\overline{y}=\lambda(x_2-\overline{x}).\end{cases}$$

这说明向量 $\overrightarrow{MA_1}$ 与 $\overrightarrow{MA_2}$ 共线，即 A_1，A_2，M 三点共线(图 9-1-3).

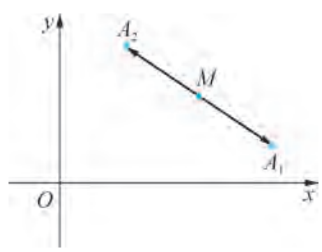


图 9-1-3

对于三对数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，设点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$，取点 $M(\overline{x}, \overline{y})$ $\left(\text{其中}\ \overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

构造向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}=(x_1-\overline{x}, x_2-\overline{x}, x_3-\overline{x})$，$\boldsymbol{b}=(y_1-\overline{y}, y_2-\overline{y}, y_3-\overline{y})$，并记 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\overline{y})^2}}.$$

当 $|\cos\theta|$ 越大(越接近于 1)时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 就越接近于 0 或 π，

这时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 趋于共线. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，存在非零实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},$$

即
$$\begin{cases} y_1-\overline{y}=\lambda(x_1-\overline{x}), \\ y_2-\overline{y}=\lambda(x_2-\overline{x}), \\ y_3-\overline{y}=\lambda(x_3-\overline{x}). \end{cases}$$

这说明，向量 $\overrightarrow{MA_1}$，$\overrightarrow{MA_2}$，$\overrightarrow{MA_3}$ 趋于共线，即 A_1，A_2，A_3，M 四点接近于共线（图 9-1-4）.

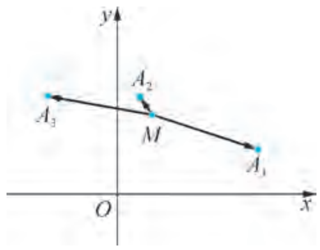


图 9-1-4

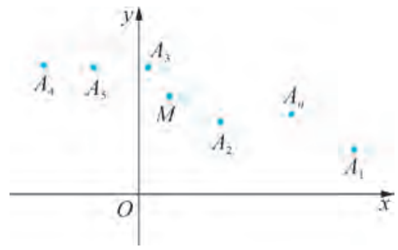


图 9-1-5

一般地，对于 n 对数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，设点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，…，$A_n(x_n, y_n)$，取点 $M(\overline{x}, \overline{y})$ $\left(其中 \overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$.

构造向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}=(x_1-\overline{x}, x_2-\overline{x}, \cdots, x_n-\overline{x})$，$\boldsymbol{b}=(y_1-\overline{y}, y_2-\overline{y}, \cdots, y_n-\overline{y})$，并记 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}. \qquad (*)$$

当 $|\cos\theta|$ 越大（越接近于 1）时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 就越接近于 0 或 π，这时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 趋于共线. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，存在非零实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},$$

即
$$\begin{cases} y_1-\overline{y}=\lambda(x_1-\overline{x}), \\ y_2-\overline{y}=\lambda(x_2-\overline{x}), \\ \cdots \\ y_n-\overline{y}=\lambda(x_n-\overline{x}). \end{cases}$$

这说明，向量 $\overrightarrow{MA_1}$，$\overrightarrow{MA_2}$，…，$\overrightarrow{MA_n}$ 趋于共线，即点 A_1，A_2，…，A_n，M 这 $n+1$ 个点接近于共线（图 9-1-5）.

我们将（$*$）式称为 n 对数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 的**相关系数**（correlation coefficient），记为 r.

这里的相关系数 r 是对线性相关关系而言的.

相关系数 r 可由下面的公式计算：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right]}}.$$

相关系数 r 具有下列性质：

(1) $-1\leqslant r\leqslant 1$；

(2) $r>0$ 时 y 与 x 呈正相关关系，$r<0$ 时 y 与 x 呈负相关关系；

(3) $|r|$ 越接近 1，y 与 x 相关的程度就越强，$|r|$ 越接近 0，y 与 x 相关的程度就越弱.

通常情况下，当 $|r|>0.5$ 时，认为线性相关关系显著；当 $|r|<0.3$ 时，认为几乎没有线性相关关系.

对于上面的人均年可支配收入与人均年支出的问题，计算得相关系数 $r\approx 0.9995$. 这说明，我国城镇居民的人均年支出与人均年可支配收入之间存在很强的正相关关系.

例 2 20 个工业企业某年的平均固定资产价值与总产值(单位：百万元)如表 9-1-2 所示.

表 9-1-2

企业编号	年平均固定资产价值	年总产值	企业编号	年平均固定资产价值	年总产值
1	36	32.0	11	50	45.5
2	43	40.2	12	70	65.0
3	50	47.5	13	62	56.0
4	40	41.5	14	58	55.0
5	55	51.0	15	52	55.0
6	58	53.4	16	63	57.0
7	38	33.8	17	64	54.2
8	45	42.8	18	53	56.5
9	47	45.6	19	54	50.2
10	42	40.8	20	56	49.2

设年平均固定资产价值为 x，年总产值为 y，单位均为百万元. 试画出散点图，计算相关系数.

解 散点图如图 9－1－6 所示.

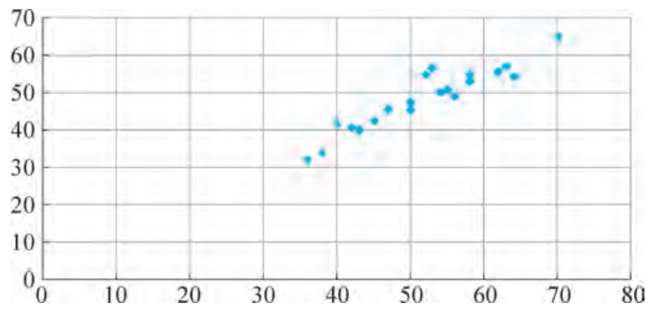


图 9－1－6

由表中数据可得

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 1\,036,\ \sum_{i=1}^{20} y_i = 972.2,\ \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 51\,752.3,$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i{}^2 = 55\,314,\ \sum_{i=1}^{20} y_i{}^2 = 48\,590.2.$$

根据 $r = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$，

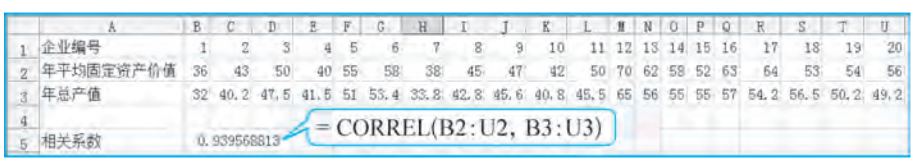
可得相关系数为 $$r \approx 0.939\,6.$$

因此，y 与 x 有着很强的正相关关系.

信息技术

● EXCEL

在 Excel 中，函数“CORREL( )”用于计算两组数据的相关系数. 如在例 2 中，在单元格内输入“CORREL(B2: U2, B3: U3)”，就可得到相关系数(图 9－1－7).

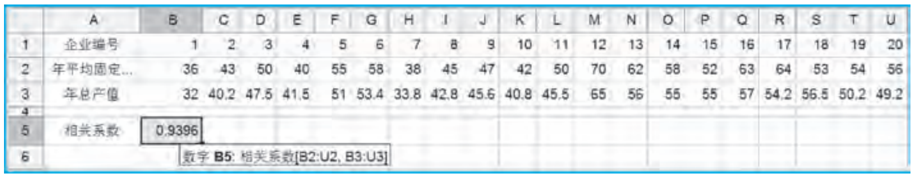


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	企业编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	年平均固定资产价值	36	43	50	40	55	58	38	45	47	42	50	70	62	58	52	63	64	53	54	56
3	年总产值	32	40.2	47.5	41.5	51	53.4	33.8	42.8	45.6	40.8	45.5	65	56	55	55	57	54.2	56.5	50.2	49.2
4																					
5	相关系数	0.939568813																			

图 9－1－7

● GGB

GGB 中的函数“相关系数[ ]”可用于计算两组数据的相关系数. 在输入框中输入“B5＝相关系数[B2: U2, B3:U3]”，即得例 2 中的相关系数(图 9－1－8).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	企业编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	年平均固定...	36	43	50	40	55	58	38	45	47	42	50	70	62	58	52	63	64	53	54	56
3	年总产值	32	40.2	47.5	41.5	51	53.4	33.8	42.8	45.6	40.8	45.5	65	56	55	55	57	54.2	56.5	50.2	49.2
4																					
5	相关系数	0.9396																			
6		数字 B5: 相关系数[B2:U2, B3:U3]																			

图 9－1－8

练　习

1. 下列几对变量，哪些有明显的正相关、明显的负相关、接近于 0 的相关系数？
 (1) 广告费与销售额；
 (2) 施肥量与粮食产量；
 (3) 汽车车速与司机的年龄；
 (4) 人的体重与身高.
2. 充气不足或过于膨胀会增加轮胎磨损，并减少行驶里程. 对一种新型轮胎在不同压力下的行驶里程进行测试，数据如下表：

压力 $x/(\mathrm{lb/in^2})$	里程 $y/10^3\mathrm{km}$	压力 $x/(\mathrm{lb/in^2})$	里程 $y/10^3\mathrm{km}$
30	29.5	33	37.6
30	30.2	34	37.7
31	32.1	34	36.1
31	34.5	35	33.6
32	36.3	35	34.2
32	35.0	36	26.8
33	38.2	36	27.4

 (1) 画出散点图；
 (2) 求出相关系数；
 (3) 将散点图与相关系数进行比照分析，并作出适当解释.
3. 统计表明，世界各国人均拥有电视机的数量与人均寿命有着较高的正相关的相关系数. 这是否说明：国家的人均寿命与人均拥有电视机的多少有关？运送一大批电视机到某人均寿命低的国家是否能延长该国人的寿命？

9.1.2　线性回归方程

我国城镇居民人均年支出与人均年可支配收入之间具有线性相关关系，那么，能否根据这种关系由人均年可支配收入预测对应的人均年支出呢？为了解决这个问题，就要找到一条反映它们之间的线性相关关系的直线.

● 怎样选择恰当的直线反映两个变量之间的线性相关关系？

从图 9－1－9 可以看出，这些点在一条直线附近，但并不都在这条直线上. 也就是说，上述直线并不能精确地反映 x 与 y 之间的关

系，y 的值不能由 x 确定，在此，我们将两者之间的关系表示为

$$y=a+bx+\varepsilon,$$

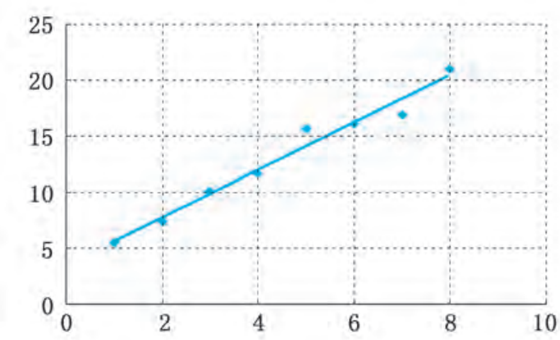


图 9－1－9

其中 $a+bx$ 是确定性函数，ε 称为**随机误差**（random error）.

随机误差产生的主要原因有：所用的确定性函数不恰当引起的误差；忽略了某些因素的影响；存在观测误差.

我们将 $y=a+bx+\varepsilon$ 称为**线性回归模型**（linear regression model）. 对于这样的线性回归模型，我们需要考虑下面两个问题：

Ⅰ 模型是否合理；

Ⅱ 在模型合理的情况下，如何估计 a，b.

对于问题Ⅰ，可用线性相关性检验的方法处理. 本书对相关性检验的方法不作要求，只要根据相关系数作出判断.

这里的 $|\varepsilon_i|$ 就是直线 $y=a+bx$ 上的点 $(x_i, a+bx_i)$ 到点 $P_i(x_i, y_i)$ 的距离.

对于问题Ⅱ，设有 n 对观测数据 $(x_i, y_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$，根据线性回归模型，对于每一个 x_i，对应的随机误差项 $\varepsilon_i=y_i-(a+bx_i)$，我们希望 $y=a+bx+\varepsilon$ 与 $y=a+bx$ 越"接近"越好，即 $|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_n|$ 越小越好.

由于 $|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_n|$ 是绝对值之和的形式，这对进一步的运算与推导带来很多不便，而 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$ 很小并不表示 $|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_n|$ 很小，因此，通常用"$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2$ 越小越好"来代替"$|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_n|$ 越小越好".

$\hat{a}$ 读作"a 估计".

于是，只要求出使 $Q(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2$ 取最小值时的 α，β 的值，分别将它们作为 a 和 b 的估计值，记为 $\hat{a}$，$\hat{b}$，其计算公式为

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$. 由此得到的直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 称为这

n 对数据的回归直线，此直线方程称为**线性回归方程**(equation of linear regression). 其中 $\hat{a}$ 称为回归截距，$\hat{b}$ 称为回归系数，$\hat{y}$ 称为回归值.

$\hat{a}$，$\hat{b}$ 的计算公式也可化为

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{x})^2}, \\ \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}. \end{cases} \tag{1'}$$

我们把上述方法称为“最小二乘法”，推导过程见“链接”.

根据表 9－1－1，可以求得我国城镇居民人均年可支配收入与人均年支出的线性回归方程中的

$$\hat{a} \approx 502.86，\hat{b} \approx 0.672\,2，$$

故线性回归方程为 $\hat{y} = 0.672\,2x + 502.86$.

回归直线如图 9－1－10 所示.

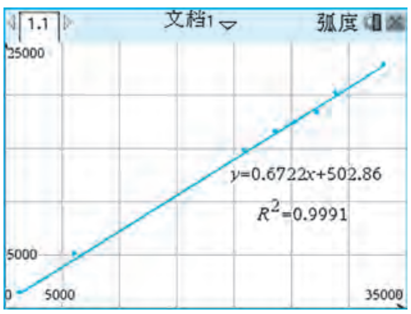


图 9－1－10

表 9－1－3 是我国城镇居民人均年支出的实际观测值与由线性回归方程求出的估计值的对照表：

表 9－1－3

年　份	1990	2000	2010	2011	2012	2013	2014	2015
观测值	1 279	4 998	13 471	15 161	16 674	18 488	19 968	21 392
估计值	1 518	4 724	13 348	15 164	17 015	18 294	19 892	21 472

查阅相关资料，获取当年我国农村居民人均可支配收入，并对人均支出进行估计.

从表 9－1－3 可以看出，由回归方程得到的估计值与实际观测值差异较小，比较可靠. 因此，我们可以用该回归方程根据城镇居民人均年可支配收入来对城镇居民人均年支出进行估计.

链　接

回归系数

运用最小二乘法求回归直线方程时，如何确定 a，b 的估计值 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 呢？通常有两种推导方法.

方法 1：(配方法)

为了求使 $Q(\alpha,\beta)$ 取最小值时的 α，β 的值，我们对 $Q(\alpha,\beta)$ 进行如下变换.

$$\begin{aligned}
Q(\alpha,\beta) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta x_i-\alpha)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-\overline{y})+[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]-\beta(x_i-\overline{x})\right\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]^2+\beta^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+ \\
&\quad 2[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})- \\
&\quad 2\beta[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})- \\
&\quad 2\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]^2+\beta^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2- \\
&\quad 2\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]^2+ \\
&\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\left[\beta^2-2\beta\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n[\overline{y}-(\beta\overline{x}+\alpha)]^2+ \\
&\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\left[\beta-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right]^2- \\
&\quad \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}
\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})=0$，

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$.

$$= n[\overline{y} - (\beta\overline{x} + \alpha)]^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot$$

$$\left[\beta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right]^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 -$$

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

上式中后两项与 α, β 无关，前两项为非负数，因此当且仅当前两项的值都为 0 时，$Q(\alpha, \beta)$ 取最小值，即有

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \\ \alpha = \overline{y} - \beta\overline{x}. \end{cases}$$

此时的 α, β 的值作为 a, b 的估计值，记为 $\hat{a}$, $\hat{b}$，即

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \\ \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}. \end{cases}$$

方法 2：（求导法）

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i - \alpha)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \beta x_i)^2 - 2(y_i - \beta x_i)\alpha + \alpha^2] \\ &= n\alpha^2 - 2\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)\right]\alpha + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2. \end{aligned}$$

将 β 视为常数，则当 $Q(\alpha, \beta)$ 关于 α 的导数为 0 时，$Q(\alpha, \beta)$ 取得最小值.

即当 $\alpha = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)}{n}$ 时，$Q(\alpha, \beta)$ 的最小值为

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)\right]^2}{n}.$$

这是一个关于β的二次函数，其关于β的导数为0时，取得最小值.即当

$$\beta=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

时，$Q(\alpha,\ \beta)$取得最小值，故取

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\\[2ex] \hat{a}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i)}{n}.\end{cases}$$

以下略.

例3　求例2中x，y的线性回归方程.

解　由表中数据可求得

$$\sum_{i=1}^{20}x_i=1\ 036,\ \sum_{i=1}^{20}y_i=972.2,$$

$$\sum_{i=1}^{20}x_i^2=55\ 314,\ \sum_{i=1}^{20}x_iy_i=51\ 752.3,$$

代入公式(1)，求得回归系数

$$\hat{b}=\frac{20\times51\ 752.3-1\ 036\times972.2}{20\times55\ 314-1\ 036^2}\approx0.844\ 3.$$

$$\hat{a}=\frac{972.2}{20}-0.844\ 3\times\frac{1\ 036}{20}\approx4.875\ 3.$$

因此，线性回归方程为

$$\hat{y}=4.875\ 3+0.844\ 3x.$$

例4　表9-1-4为某地近几年机动车辆数与交通事故数的统计资料，请判断机动车辆数与交通事故数之间是否具有线性相关关系.如果具有线性相关关系，求出线性回归方程；如果不具有线性相关关系，说明理由.

表9-1-4

机动车辆数 $x/10^3$ 辆	95	110	112	120	129	135	150	180
交通事故数 $y/10^3$ 件	6.2	7.5	7.7	8.5	8.7	9.8	10.2	13

解 计算相应的数据之和：

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 1\,031,\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 71.6,$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 137\,835,\ \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 671,\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 9\,611.7.$$

根据相关系数公式可得 $r=0.992\,7$，故两变量之间具有很强的线性相关关系. 再由公式(1)计算得

$$\hat{b} \approx 0.077\,4,\ \hat{a} \approx -1.024\,1.$$

因此，所求线性回归方程为

$$\hat{y} = -1.024\,1 + 0.077\,4x.$$

例 5 统计学家 K. Pearson 收集了大量父亲和儿子的身高数据，表 9－1－5 是从中随机抽取的 10 对父子的身高数据.

表 9－1－5

父亲的身高 x/cm	152.4	157.5	162.6	165.1	167.6	170.2	172.7	177.8	182.9	188.0
儿子的身高 y/cm	161.3	165.6	167.6	166.4	169.9	170.4	171.2	173.5	178.1	177.8

试估计父亲身高为 166 cm 时，他的儿子的身高.

解 根据表中数据画出散点图，如图 9－1－11 所示.

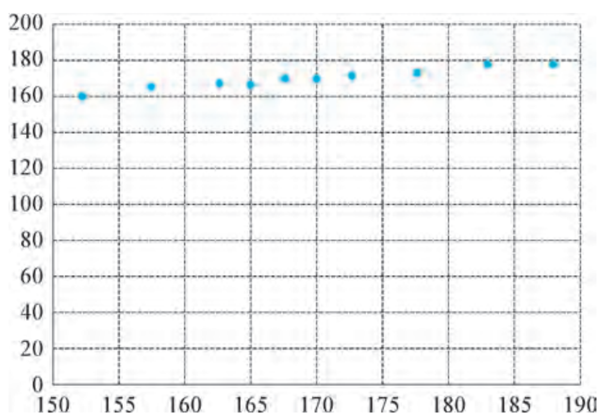


图 9－1－11

由表中数据可得

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1\,696.8,\ \sum_{i=1}^{10} y_i = 1701.8,\ \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 289\,021.12,$$

$$\sum_{i=1}^{10} {y_i}^2 = 289\,866.08,\ \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 289\,281.27.$$

根据线性相关系数公式可得 $r=0.980\,1$，说明父亲与儿子的身高之间具有很强的线性相关关系.

再由公式(1)计算得

$$\hat{b}\approx 0.4691,\ \hat{a}\approx 90.577,$$

故线性回归方程为 $\hat{y}=0.4691x+90.577$，当 $x=166$ 时，$\hat{y}=0.4691\times 166+90.577\approx 168$，即父亲身高为 166 cm 时，他的儿子的身高约为 168 cm.

思　考

上述结论是否说明，身高为 166 cm 的父亲，其儿子的身高就一定是 168 cm 呢?

英国著名统计学家高尔顿(F. Galton, 1822—1911)研究发现，高个子父亲有生高个子儿子的趋势，但一群高个子父亲的儿子们的平均身高要低于父亲们的平均身高. 类似地，矮个子父亲有生矮个子儿子的趋势，但一群矮个子父亲的儿子们的平均身高要高于父亲们的平均身高. 高尔顿将这种后代的身高向中间值靠近的趋势称为“回归现象”.

首先，这个结论是对当地、当时的父子身高而言的，对其他地区或该地区的不同年代，这个结论不一定成立；其次，父亲身高为166 cm时，他的儿子的身高不一定是 168 cm，因为人的身高还受到母亲的身高、生长的条件等多种因素的影响. 上述结果说明：对于当地、当时的父子而言，身高为 166 cm 的父亲们，其儿子的身高大多在168 cm 附近，且平均身高约为 168 cm. 因此，我们可以做出推断：父亲身高为 166 cm 时，他的儿子的身高一般在 168 cm 左右.

事实上，在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}$表示自变量 x 每增加 1 个单位时因变量 y 平均地增加$\hat{b}$，$\hat{y}$ 表示当自变量为 x 时因变量 y 的平均值.

信息技术

运用 Excel 可以方便地建立线性回归方程：

(1) 在工作表中输入数据，选中数据区，按“插入/图表/图表类型/散点图”作出散点图；

(2) 观察发现，散点近似在一条直线上. 右击数据系列以选定并显示快捷菜单，选择“添加趋势线”，在 6 种类型中选择“线性”，在“选项”中选定“显示公式”和“显示 R 平方值”复选框，最后得到图 9－1－12.

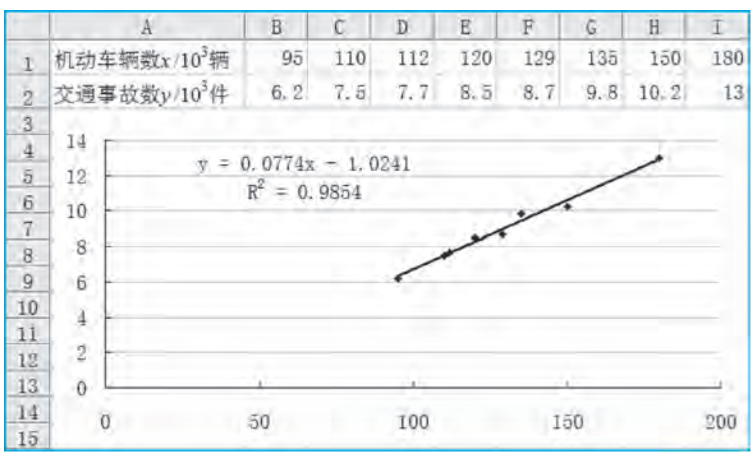


图 9－1－12

练 习

1. 为了探讨学生的物理成绩 y 与数学成绩 x 之间的关系，从某批学生中随机抽取 10 名学生的成绩 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 10)$，并已计算出 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 758$，$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 58\,732$，$\sum_{i=1}^{10} y_i = 774$，$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 59\,686$. 试求：

（1）物理成绩 y 关于数学成绩 x 的线性回归方程；

（2）当数学成绩为 92 分时，物理成绩 y 的线性回归估计值.

2. 某种产品的广告费支出 x 与销售额 y 之间有如下对应数据：

$x/10^6$ 元	2	4	5	6	8
$y/10^6$ 元	30	40	60	50	70

（1）画出散点图；

（2）求出线性回归方程.

3. 每立方米混凝土的水泥用量 x（单位：kg）与 28 天后混凝土的抗压强度 y（单位：$\mathrm{kg/cm^2}$）之间有如下对应数据：

x/kg	150	160	170	180	190	200
$y/(\mathrm{kg/cm^2})$	56.9	58.3	61.1	64.6	68.1	71.3
x/kg	210	220	230	240	250	260
$y/(\mathrm{kg/cm^2})$	74.1	77.4	80.2	82.6	86.4	89.7

（1）画出散点图；

（2）求出线性回归方程.

链 接

相 关 系 数

由前面的“链接”可知，当 $\beta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\alpha = \overline{y} - \beta\overline{x}$ 时，$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 取得最小值，且最小值

$$Q(\alpha, \beta)_{\min} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\left\{1-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}\right\}.$$

直观上看，我们可以感觉到 $Q(\alpha, \beta)$ 的最小值越接近于 0，线性回

归模型就越合理，即 $1-\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$ 越接近于 0 越好，也即

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}} \qquad (*)$$

的绝对值越接近于 1 越好.

这说明，(*)式可以表示 x 与 y 的线性相关的程度. 这就是这 n 对数据的**相关系数** r. $|r|$ 越接近于 1，x 与 y 的线性相关性越强；$|r|$ 越接近 0，x 与 y 的线性相关性越弱.

实习作业

选择适当课题，按下列步骤进行相关性研究：

(1) 收集数据 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,n$；

(2) 根据所收集的数据绘制散点图；

(3) 求相关系数；

(4) 求线性回归方程；

(5) 对所求出的回归方程做出解释.

习题 9.1

感受·理解

1. 某小吃店的日盈利 y(单位：百元)与当天平均气温 x(单位：℃)之间有如下数据：

x/℃	-2	-1	0	1	2
y/百元	5	4	2	2	1

甲、乙、丙 3 位同学对上述数据进行了分析，发现 y 与 x 之间具有线性相关关系，他们通过计算分别得到 3 个线性回归方程：① $\hat{y}=-x+2.8$；② $\hat{y}=-x+3$；③ $\hat{y}=-1.2x+2.6$. 其中正确的是______.(填序号)

2. 二手车车龄与其价格之间是正相关，还是负相关？为什么？(古董车除外)

3. 车重与其每千米耗油量之间的相关系数是正还是负？为什么？

4. 某工厂在某年里每月产品的总成本 y(单位：万元)与月产量 x(单位：万件)之间有如下一组数据：

x/万件	1.08	1.12	1.19	1.28	1.36	1.48	1.59	1.68	1.80	1.87	1.98	2.07
y/万元	2.25	2.37	2.40	2.55	2.64	2.75	2.92	3.03	3.14	3.26	3.36	3.50

(1) 画出散点图;

(2) 求相关系数;

(3) 求线性回归方程.

5. 某研究所研究耕种深度 x(单位: cm)与水稻每公顷产量 y(单位: t)的关系,所得数据资料如下表,试求每公顷水稻产量与耕种深度的相关系数和线性回归方程.

耕种深度 x/cm	8	10	12	14	16	18
每公顷产量 y/t	6.0	7.5	7.8	9.2	10.8	12.0

6. 为了解发动机的动力 x(单位: PH)与排气温度 y(单位: ℃)之间的关系,某部门进行相关试验,得到如下数据:

x/PH	y/℃	x/PH	y/℃
4 300	960	4 010	907
4 650	900	3 810	843
3 200	807	4 500	927
3 150	755	3 008	688
4 950	993		

(1) 求相关系数;

(2) 求线性回归方程;

(3) 估计当 $x = 3\,100$ 时对应 y 的值.

7. 为测定湖中水的清洁程度,将一有刻度线的玻璃片放入水中直至完全看不见刻度线,此时它与水表面的距离称为“Secchi 深度”. 为了测量湖水被水藻污染的程度,科学家要确定水中叶绿素的总浓度. 在某一湖中,从四月至九月每周四中午都测量 Secchi 深度和叶绿素的总浓度. 这两个变量间是正相关还是负相关? 简要说明理由.

思考・运用

8. 对下面这组数据:

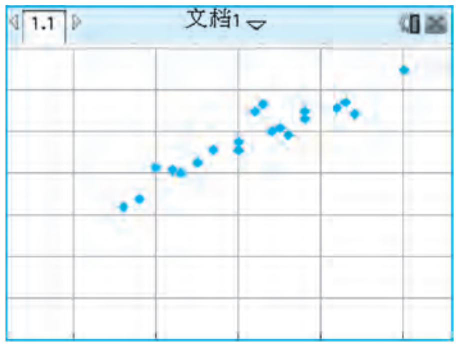
x	1	2	3	4	10	10
y	1	3	3	5	1	11

计算相关系数,大概在 0.5 左右. 对这组数据大部分点来说,x 与 y 之间有很强的线性相关关系. 是什么因素导致相关系数只有 0.5 左右?

9. 在彩色显像中,根据以往的经验,形成染料的光学密度 y 与析出银的光学密度 x 之间存在关系式 $y = a\mathrm{e}^{-\frac{b}{x}}(b>0)$. 现对 y 与 x 同时做 10 次观测,获得 10 对数据如下表,试根据表中数据,求出 a 与 b 的估计值.

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0.05	0.06	0.07	0.10	0.14	0.20	0.25	0.31	0.38	0.43
y	0.10	0.14	0.23	0.37	0.59	0.79	1.00	1.12	1.19	1.25

10. (操作题)用图形计算器绘制第 144 页例 2 中的散点图.



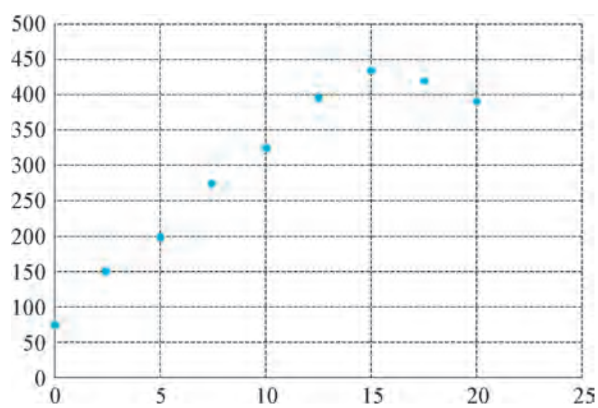
(第 10 题)

探究・拓展

11. 下表是研究某品种小麦的施肥量与小麦产量之间关系时所获得的数据:

亩施肥量 x/kg	0	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20
亩产量 y/kg	76	150	202.5	273.5	326.5	396	436	420	390

可以求得 y 与 x 的线性相关系数约为 0.937 5,y 与 x 具有很强的线性相关关系. 不过,从下面的散点图可以看出,当施肥量超过 15 kg 时,小麦产量在下降,这与经验判断一致:过量施肥会降低农作物产量.



(第 11 题)

(1) 施肥量在怎样的范围内,线性回归模型的拟合效果比较好?

(2) 感兴趣的同学可以查阅相关资料,尝试用二次函数模型进行拟合,并与线性回归模型比较,看哪种模型更加符合本题中的现实问题.

9.2 独立性检验

在日常生活中，人们常常关心两个分类变量(其“值”非数量，如性别变量)之间是否有关系. 例如，

某医疗机构为了解呼吸道疾病与吸烟是否有关，进行了一次抽样调查，共调查了 515 个成年人，其中吸烟者 220 人，不吸烟者 295 人. 调查结果是：吸烟的 220 人中，有 37 人患呼吸道疾病(以下简称患病)，183 人未患呼吸道疾病(以下简称未患病)；不吸烟的 295 人中，有 21 人患病，274 人未患病.

● 根据这些数据能否断定：患呼吸道疾病与吸烟有关?

为了研究这个问题，我们将上述数据用表 9 - 2 - 1 表示.

表 9 - 2 - 1

	患　病	未患病	合　计
吸　烟	37	183	220
不吸烟	21	274	295
合　计	58	457	515

列联表是一个描述两个分类变量分布的频数表.

形如表 9 - 2 - 1 的表格称为 2×2 列联表. 由此表可以粗略地估计出：在吸烟的人中，有 $\frac{37}{220}\approx16.82\%$ 的人患病；在不吸烟的人中，有 $\frac{21}{295}\approx7.12\%$ 的人患病. 因此，从直观上可以得到结论：吸烟者与不吸烟者患病的可能性存在差异.

上述结论给我们的印象是患病与吸烟有关，事实果真如此吗? 能有多大的把握认为“患病与吸烟有关”呢?

若将事件“某成年人吸烟”记为 A，事件“某成年人患病”记为 B，则事件“某成年人不吸烟”为 $\overline{A}$，事件“某成年人不患病”为 $\overline{B}$. 这样，回答“患病与吸烟是否有关?”其实就是需要回答“事件 A 与事件 B 是否独立?”.

为了回答这个问题，我们先做出判断“患病与吸烟没有关系”，即提出如下假设

H_0 称为原假设. H_0 不成立，即“患病与吸烟有关系”，称为备择假设.

$$H_0：患病与吸烟没有关系.$$

由两个事件相互独立的充要条件，又可将上述假设记为

$$H_0：P(AB)=P(A)P(B).$$

这里的 $P(A)$，$P(B)$和 $P(AB)$的值都不知道，我们可以用频率来代替概率，估计出 $P(A)$，$P(B)$和 $P(AB)$的值.

为了便于研究一般情况，我们将表 9-2-1 中的数据用字母代替，得到字母表示的 2×2 列联表(表 9-2-2).

表 9-2-2

	患　病	未患病	合　计
吸　烟	a	b	$a+b$
不吸烟	c	d	$c+d$
合　计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

若设 $n=a+b+c+d$，则有

$$P(A)\approx\frac{a+b}{n},$$

$$P(B)\approx\frac{a+c}{n},$$

故

$$P(AB)\approx\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}.$$

因此，在 H_0 成立的条件下，吸烟且患病的人数为

$$n\cdot P(AB)\approx n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}.$$

同理可得：吸烟但未患病的人数为

$$n\cdot P(A\overline{B})\approx n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n},$$

不吸烟但患病的人数为

$$n\cdot P(\overline{A}B)\approx n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n},$$

不吸烟且未患病的人数为

$$n\cdot P(\overline{A}\,\overline{B})\approx n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}.$$

如果实际观测值与在事件 A，B 相互独立的假设下的估计值相差不“大”，那么我们就可以认为这些差异是由随机误差造成的，假设 H_0 不能被所给数据否定. 否则，应认为假设 H_0 不能接受.

怎样描述实际观测值与估计值的差异呢？

为此，考虑实际观测值与在事件 A，B 独立的假设下的估计值的

差(表 9－2－3).

表 9－2－3

	患　病	未患病
吸　烟	$a-n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$	$b-n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$
不吸烟	$c-n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$	$d-n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$

为了避免正负相消及消除样本容量对差异大小的影响,可以将它们分别平方并除以对应的估计频数(即估计值),最后相加,得到

χ^2 读作"卡方".

$$\chi^2=\frac{\left(a-n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(b-n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{n\cdot\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}+\frac{\left(c-n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(d-n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{n\cdot\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}},$$

化简,得

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}. \tag{1}$$

统计学中通常采用统计量 χ^2 来刻画这个差异.

那么,如何根据 χ^2 统计量进行推断呢?统计学对随机变量 χ^2 的概率分布有明确的结论,其概率密度曲线如图 9－2－1 所示.

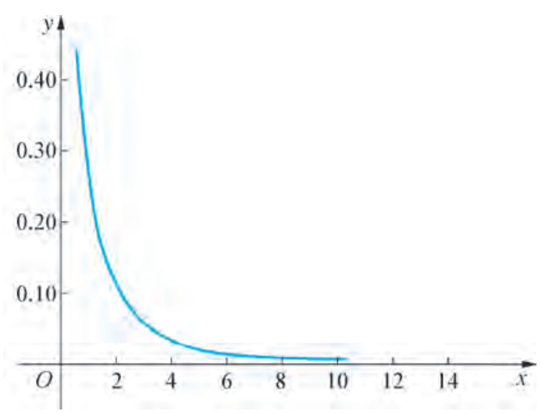


图 9－2－1

根据表 9－2－1 中的数据,利用公式(1)计算得 χ^2 的值为 11.863 4,这个值大不大呢?

统计学已有明确的结论：在 H_0 成立的情况下，随机事件“$\chi^2 \geqslant 6.635$”发生的概率约为 0.01，即

$$P(\chi^2 \geqslant 6.635) \approx 0.01. \tag{2}$$

也就是说，在 H_0 成立的情况下，对统计量 χ^2 进行多次观测，观测值超过 6.635 的概率约为 0.01.

现在的 $\chi^2 = 11.8634 > 6.635$，由(2)式可知，出现这样的观测值 χ^2 的概率不超过 0.01. 因此，我们有 99% 的把握认为 H_0 不成立，即有 99% 的把握认为“患呼吸道疾病与吸烟有关系”.

思　考

认为“患呼吸道疾病”与“吸烟”有关，是否指吸烟的成年人一定会患呼吸道疾病？

以上我们研究了吸烟与患呼吸道疾病是否有关的问题. 用这种方法还可以研究类似的问题，如花的颜色与花粉的形状是否有关、用药效果与用药方式是否有关等. 用 χ^2 统计量研究这类问题的方法称为**独立性检验**(test of independence).

上述进行独立性检验的思想是：要研究“患呼吸道疾病与吸烟有关”(备择假设)这一结论的可靠程度，先假设该结论不成立，即假设“患呼吸道疾病与吸烟没有关系”(原假设)成立，在该假设下构造 χ^2 统计量. 如果 χ^2 的观测值很大，那么在一定程度上说明该假设不合理. 根据 χ^2 的含义，可以通过(2)式评价该假设不合理的程度. 如果计算出 $\chi^2 > 6.635$，那么说明假设不合理的程度约为 99%，即“患呼吸道疾病与吸烟有关系”这一结论成立的可信程度约为 99%.

一般地，对于两个分类变量Ⅰ和Ⅱ，Ⅰ有两类取值，即类 A 和类 B(如吸烟与不吸烟)；Ⅱ也有两类取值，即类 1 和类 2(如患呼吸道疾病和未患呼吸道疾病). 我们得到如下列联表所示的抽样数据(表 9-2-4)：

表 9-2-4

		Ⅱ		
		类　1	类　2	合　计
Ⅰ	类 A	a	b	$a+b$
	类 B	c	d	$c+d$
合　计		$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

要推断“Ⅰ与Ⅱ有关系”，可按下面的步骤进行：

(1) 提出假设 H_0：Ⅰ与Ⅱ没有关系；

(2) 根据 2×2 列联表与公式(1)计算 χ^2 的值；

(3) 根据临界值(表 9-2-5)，做出判断.

表 9-2-5

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

例如：

(1) 若 $\chi^2>10.828$，则有 99.9%的把握认为“Ⅰ与Ⅱ有关系”；

(2) 若 $\chi^2>6.635$，则有 99% 的把握认为“Ⅰ与Ⅱ有关系”；

(3) 若 $\chi^2>2.706$，则有 90%的把握认为“Ⅰ与Ⅱ有关系”；

(4) 若 $\chi^2\leqslant2.706$，则认为没有充分的证据显示“Ⅰ与Ⅱ有关系”，但也不能得出结论“H_0 成立”，即Ⅰ与Ⅱ没有关系.

由《数学(必修第二册)》学习的内容可知，用样本估计总体时，由于抽样的随机性，结果并不唯一. 因此，由某个样本得到的推断有可能正确，也有可能错误. 利用 χ^2 进行独立性检验，可以对推断的正确性的概率做出估计，n 越大，这个估计越准确.

在实际应用中，通常要求 a，b，c，d 均不小于 5.

例 1 在 500 人身上试验某种血清预防感冒的作用，把他们 1 年中的感冒记录与另外 500 名未用血清的人的感冒记录进行比较，结果如表 9-2-6 所示. 问：该种血清对预防感冒是否有作用?

表 9-2-6

	未感冒	感冒	合计
使用血清	258	242	500
未使用血清	216	284	500
合计	474	526	1 000

解 提出假设

H_0：感冒与是否使用该种血清没有关系.

根据列联表中的数据，可以求得

$$\chi^2=\frac{1\,000\times(258\times284-242\times216)^2}{500\times500\times474\times526}\approx7.075.$$

因为当 H_0 成立时，$\chi^2\geqslant6.635$ 的概率约为 0.01，所以我们有 99%的把握认为，该种血清能起到预防感冒的作用.

在使用该血清的人中患感冒率为 48.4%，在未使用该血清的人中患感冒率为 56.8%，两者可能存在差异. 用独立性检验可以得到明确的结论.

探　究

用 χ^2 进行独立性检验时，当抽取的样本量很小时，其结论是否可靠？有兴趣的同学可以查阅有关资料来了解相关知识.

例 2 为研究不同的给药方式(口服与注射)和药的效果(有效与无效)是否有关,进行了相应的抽样调查,调查结果如表 9-2-7 所示. 根据所选择的 193 个病人的数据,能否做出药的效果与给药方式有关的结论?

表 9-2-7

	有 效	无 效	合 计
口 服	58	40	98
注 射	64	31	95
合 计	122	71	193

解 提出假设

H_0:药的效果与给药方式没有关系.

根据列联表中的数据可以求得

$$\chi^2=\frac{193\times(58\times 31-40\times 64)^2}{98\times 95\times 122\times 71}\approx 1.3896<2.072.$$

因为当 H_0 成立时,$\chi^2\geqslant 1.3896$ 的概率大于 15%,这个概率比较大,所以根据目前的调查数据,不能否定假设 H_0,即不能做出药的效果与给药方式有关的结论.

例 3 气管炎是一种常见的呼吸道疾病. 医药研究人员对两种中草药治疗慢性气管炎的疗效进行了对比,所得数据如表 9-2-8 所示. 问:它们的疗效有无差异?

表 9-2-8

	有 效	无 效	合 计
复方江剪刀草	184	61	245
胆 黄 片	91	9	100
合 计	275	70	345

解 提出假设

H_0:两种中草药的治疗效果没有差异,

即病人使用这两种药物中何种药物对疗效没有明显差异.

从药物的有效性看,例 2、例 3 都有差异,只是差异的程度略有区别. 独立性检验可以做出更精细的推断.

根据列联表中的数据可以求得

$$\chi^2=\frac{345\times(184\times 9-61\times 91)^2}{245\times 100\times 275\times 70}\approx 11.098.$$

因为当 H_0 成立时,$P(\chi^2\geqslant 10.828)\approx 0.001$,这里的 $\chi^2\approx 11.098>10.828$,所以我们有 99.9% 的把握认为,两种药物的疗效有差异.

信息技术

利用 GGB 解决卡方检验问题的步骤(以例 3 为例):

(1) 在工作表中输入数据,选中数据区 B2:C3 后右击,选择"创建/矩阵",得到"矩阵 1";

(2) 在输入框中输入"卡方检验[矩阵 1]",得到"列表 1",它表明 $P(\chi^2 \geqslant 11.098) \approx 0.000\,86$ (图 9-2-2).

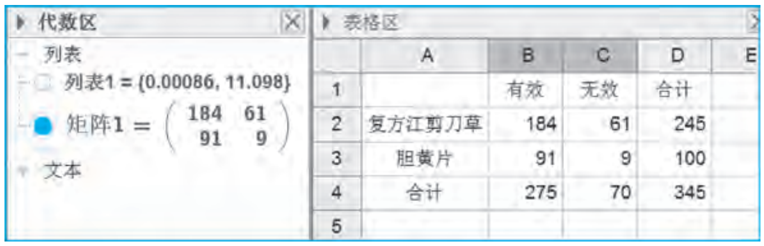


图 9-2-2

练 习

1. 某桑场为了解职工发生皮炎是否与采桑有关,对其工作人员进行了一次调查,结果如下表. 问:发生皮炎是否与采桑有关?

	采 桑	不 采 桑	合 计
患 皮 炎	18	12	30
未患皮炎	4	78	82
合 计	22	90	112

2. 为了鉴定新疫苗的效力,将 60 只豚鼠随机地分为两组,在其中一组接种疫苗后,两组都注射了病源菌,其结果列于下表. 问:能否有 90%的把握认为新疫苗有效?

	发 病	没 发 病	合 计
接 种	3	27	30
没接种	17	13	30
合 计	20	40	60

习题 9.2

感受 · 理解

1. 某医疗研究机构为了解打鼾与患心脏病的关系,进行了一次抽样调查,得到如下数据. 问:打鼾与患心脏病是否有关?

	患心脏病	未患心脏病	合 计
每一晚都打鼾	30	224	254
不 打 鼾	24	1 355	1 379
合 计	54	1 579	1 633

2. 为了解小麦种子是否灭菌与小麦发生黑穗病的关系，经试验观察，得到如下数据. 根据这组数据，能否认为发生黑穗病与种子是否灭菌有关？

	种子灭菌	种子未灭菌	合　计
有黑穗病	26	184	210
无黑穗病	50	200	250
合　计	76	384	460

3. 下表所示的是关于 11 岁儿童患花粉热与湿疹情况的调查数据. 若按 95%的可靠性的要求，则对 11 岁儿童能否做出花粉热与湿疹有关的结论？

	患花粉热	未患花粉热	合　计
患湿疹	141	420	561
未患湿疹	928	13 525	14 453
合　计	1 069	13 945	15 014

思考・运用

4. 一个随机抽取的样本包括 110 位女士和 90 位男士，女士中约有 9%是左利手，男士中约有 11%是左利手. 基于这些数据，你认为在样本所代表的总体中，左利手与性别有关吗？为什么？

探究・拓展

5. “使用动物做医学实验是正确的，这样做能够挽救人的生命”. 某机构调查了 1 152 位成年人对这种说法的态度，以下是调查对象回答情况的列联表：

回答情况	男性	女性
同意	346	306
不置可否	87	139
不同意	83	191

（1）用适当的方式描述男性与女性对该问题态度的差异（比例、图或文字均可）.

（2）你能用独立性检验的思想方法研究“男性与女性对该问题态度的差异”吗？如果希望解决这个问题，请在独立研究的基础上，查阅相关资料，给出你的结论.

应用与建模

区 分 蠓 蚊

1981 年，生物学家 W. L. Grogan 和 W. W. Wirth 在巴西的丛林里发现了两种新的叮咬型昆虫，它们被称为蠓蚊. 他们给其中一种起名为 Apf 蚊，另一种起名为 Af 蚊. 生物学家发现，Apf 蚊是一种衰竭性疾病的载体，当人们被受感染的蚊叮咬后，将导致脑肿胀，并可能引起永久性残疾. 而另一种蚊 Af 是无害的. 为了区分这两个物种，生物学家开始测量他们捉住的这两种蚊. 最容易获得的 2 个尺寸是翅膀的长度和触角的长度(单位：cm).

Af 蚊的翅膀长度与触角长度

翅膀长度/cm	1.72	1.64	1.74	1.70	1.82	1.82	1.90	1.82	2.08
触角长度/cm	1.24	1.38	1.36	1.40	1.38	1.48	1.38	1.54	1.56

Apf 蚊的翅膀长度与触角长度

翅膀长度/cm	1.78	1.86	1.96	2.00	2.00	1.96
触角长度/cm	1.14	1.20	1.30	1.26	1.28	1.18

(1) 基于翅膀长度和触角长度来区分 Af 蚊和 Apf 蚊可行吗?

(2) 如果可行，请用你的方法基于翅膀长度和触角长度来区分这三只新蚊(1.80，1.24)，(1.84，1.28)，(2.04，1.40)(前一坐标是翅膀长度，后一坐标是触角长度).

阅　读

世界一流的统计学家——许宝騄

许宝騄(1910—1970)

许宝騄(1910—1970)，被公认为在数理统计和概率论方面第一个具有国际声望的中国数学家. 他的像片悬挂在斯坦福大学统计系的走廊上，只有世界一流的统计学家才有这样的资格.

1929 年许宝騄考入清华大学数学系，1933 年毕业并获理学学士学位，经考试获得赴英留学资格，但体检时发现体重太轻不合格，未能成行.

1936 年他再次经考试获得赴英留学资格，被派往伦敦大学学院(University College London)，在统计系学习数理统计，攻读博士学位. 1938 年获得了哲学博士学位. 在 20 世纪 30 年代后期，他先后发表了多篇重要论文，对统计学相关分支起到了奠基作用，并因此于 1940 年获得了科学博士学位.

抗日战争爆发后，他于 1940 年回到了遭到战争创伤的祖国，赴昆明任教于西南联合大学数学系.

1945 年秋，应美国加州大学伯克利分校和哥伦比亚大学的联合邀请，许宝騄前往美国任访问教授. 1946 年秋，在北卡罗莱纳大学统

计系任职. 一年后,他谢绝了一些大学的聘任,回到北京大学任教授.

回国后不久他发现自己患肺结核病,但仍长期带病工作,教学科研一直未间断,在矩阵论、概率论和数理统计方面发表了 10 余篇论文.

到 1950 年代末,他身患多种疾病,行动已非常不便,但仍坚持工作. 他在卧室的外间挂了一块黑板,继续给本科高年级学生、研究生和青年教师讲课. 1960 年代初,他虚弱到每次只能在黑板前站立四五分钟,但仍没有停止教学. 可以说,中国的概率论、数理统计的教学与研究工作就是由许宝騄开创的.

1955 年,许宝騄当选为中国科学院学部委员. 1963 年他的肺病已非常严重,组织屡次安排他休养,他均谢绝,并且一个人领导 3 个讨论班(平稳过程、马氏过程、数理统计),带领青年人搞科研.

1970 年 12 月 18 日,许宝騄在其简陋的住所溘然长逝. 床前小茶几上所留下的是一叠叠计算草稿和那支使用多年的帕克钢笔.

许宝騄在统计推断和多元分析等方面做了一系列开创性工作,把许多数学中的分支,如矩阵论、函数论、测度论等引进统计学,使统计学中的许多问题的理论基础更加深厚. 从 1941 年到 1945 年,他在生物统计学(Biometrika)、伦敦数学期刊(J. London Math.)、数理统计年鉴(Ann. Math. Stat.)等许多国际权威性刊物上发表了十多篇有关数理统计等方面的开创性文章. 他在内曼-皮尔逊理论、参数估计理论、多元分析、极限理论等方面取得了卓越成就,是多元统计分析学科的开拓者之一.

写　作

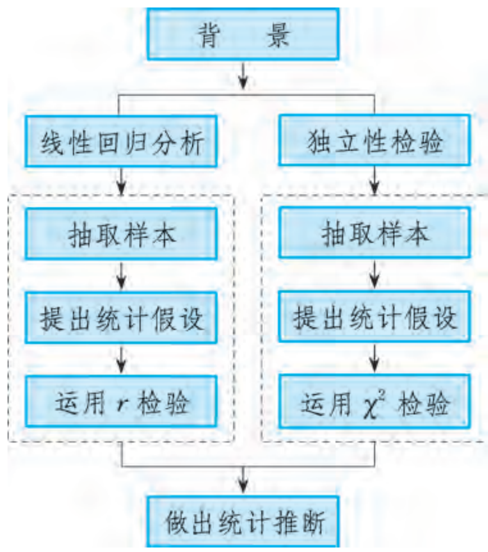
概率与统计的发展

收集概率与统计形成与发展的历史资料,撰写论文,论述概率与统计发展的过程、重要的结果,概率与统计发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献.

本章回顾

本 章 概 览

本章在《数学(必修第二册)》所学的统计知识的基础上，结合典型案例学习了几种常用统计方法的基本思想及其初步应用.



本章主要讨论了如何运用样本数据对总体进行分析、估计和预测. 线性回归分析用相关系数对两个数值变量之间的线性相关程度进行了较为精细的刻画，运用线性回归方程可以根据已知量对相关量进行估计. 独立性检验通过 χ^2 统计量，运用假设检验的方法，研究了两个分类变量之间是否有关系这一在医学、社会经济、生活以及科学技术等方面具有重要意义的问题.

统计学在现代社会中有着广泛的应用. 在本章学习的过程中，要充分领会统计分析的基本思想，了解统计方法的基本特点.

复 习 题

感受・理解

1. 某医院用光电比色计检验尿汞时，得到尿汞含量 x(单位：mg/L)与消光系数 y 的资料如下表：

尿汞含量 x/(mg/L)	2	4	6	8	10
消光系数 y	64	138	205	285	360

(1) 求 x 和 y 之间的相关系数 r；

(2) 求 y 关于 x 的线性回归方程；

(3) 估计当尿汞含量为 7 mg/L 时的消光系数.

2. 在森林学中，树腰直径 x(容易测量)常用来预测树的高度 y(难直接度量). 下表数据是 36 个白云杉样本的树腰直径(单位：cm)和高度(单位：m)：

树腰直径 x/cm	高度 y/m	树腰直径 x/cm	高度 y/m
18.9	20.0	16.6	18.8
15.5	16.8	15.5	16.9
19.4	20.2	13.7	16.3
20.0	20.0	27.5	21.4
29.8	20.2	20.3	19.2
19.8	18.0	22.9	19.8
20.3	17.8	14.1	18.5
20.0	19.2	10.1	12.1
22.0	22.3	5.8	8.0
23.6	18.9	20.7	17.4
14.8	13.3	17.8	18.4
22.7	20.6	11.4	17.3
18.5	19.0	14.4	16.6
21.5	19.2	13.4	12.9
14.8	16.1	17.8	17.5
17.7	19.9	20.7	19.4
21.0	20.4	13.3	15.5
15.9	17.6	22.9	19.2

(1) 用计算器求出相关系数.

(2) y 与 x 是否具有线性相关关系？若有线性相关关系，试估计树腰直径为 20 cm 时树高大约为多少米？若没有线性相关关系，试说明理由.

3. 66 名学生的英语考试成绩与数学考试成绩如下表所示，根据该班 66 人成绩的数据，能否有 95%的把握认为英语成绩与数学成绩有关？

	及　格	不及格	合　计
英　语	61	5	66
数　学	57	9	66
合　计	118	14	132

思考・运用

4. 某地区对本地企业进行了一次抽样调查，下表是这次抽查中所得到的各企业的人均资本 x(单位：万元)与人均产值 y(单位：万元)的数据：

人均资本 x/万元	3	4	5.5	6.5	7	8	9	10.5	11.5	14
人均产值 y/万元	4.12	4.67	8.68	11.01	13.04	14.43	17.50	25.46	26.66	45.20

(1) 设 y 与 x 之间具有近似关系 $y\approx ax^b$ (a，b 为常数)，试根据表中数据估计 a 和 b 的值；

(2) 估计企业人均资本为 16 万元时的人均产值(精确到 0.01).

探究・拓展

5. 下面的表里是统计学家安斯库姆(F. Anscombe)所提供的四组数据. 这四组数据的线性相关系数非常接近，均约等于 0.816 1，它们的线性回归方程也基本一致，均可表示为 $y=3+0.5x$.

数据组 A

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	8.04	6.95	7.58	8.81	8.33	9.96	7.24	4.26	10.84	4.82	5.68

数据组 B

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.26	8.10	6.13	3.10	9.13	7.26	4.74

数据组 C

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

数据组 D

x	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	19
y	6.58	5.76	7.71	8.84	8.47	7.04	5.25	5.56	7.91	6.89	12.50

(1) 这四组数据的线性相关程度真的如此一致吗？

(2) 对哪个(些)组的数据，可以用回归直线来预测 $x=10$ 时的 y 值？

(3) 分别对四组数据提出自己的见解.

本章测试

一、填空题

1. 如果 x, y 之间的一组数据如下表所示，那么回归直线必过的一个定点坐标是________.

x	0	1	2	3
y	1	2	5	8

2. 下表中的数据是关于青年观众的性别与是否喜欢戏剧的调查数据，那么女性青年观众喜欢戏剧的频率与男性青年观众喜欢戏剧的频率的比值是________.

	不喜欢戏剧	喜欢戏剧	合　计
男性青年观众	40	10	50
女性青年观众	40	60	100
合　计	80	70	150

3. 某单位通过对数据的统计与分析得知，日用电量 y(单位：kW·h)与当天平均气温 x(单位：℃)之间线性相关，且线性回归方程为 $\hat{y}=-2x+60$. 据此可以预测，当平均气温为 -4℃时，日用电量的度数约为________.

4. 已知变量 y 与 x 线性相关，若 $\bar{x}=5$, $\bar{y}=50$，且 y 与 x 的线性回归直线的斜率为 6.5，则线性回归方程是________________.

5. 为了考察某种药物预防疾病的效果，进行动物试验后得到如下数据. 经过计算得 $\chi^2\approx 6.979$，根据 χ^2 临界值表，可以认为该种药物对预防疾病有效果的把握为________.

	患　病	未患病	合　计
服用药	10	46	56
未服用药	22	32	54
合　计	32	78	110

6. 已知 x, y 的取值如下表所示，从散点图分析可知 y 与 x 线性相关，如果线性回归方程为 $\hat{y}=0.95x+2.6$，那么表格中的数据 m 的值为________.

x	0	1	3	4
y	2.2	4.3	4.8	m

二、解答题

7. 某中学对 50 名学生的学习兴趣和主动预习情况进行了长期的调查，得到的统计数据如下表所示. 试运用独立性检验的思想方法判断：是否有 99% 以上的把握认为，学生的学习兴趣与主动预习有关.

	主动预习	不太主动预习	合　计
学习兴趣高	18	7	25
学习兴趣一般	6	19	25
合　计	24	26	50

$\bar{x}=77.5$，$\bar{y}=85$，$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=1\,050$，$\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2=456$，$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=685$，$\sqrt{1\,050}\approx 32.4$，$\sqrt{456}\approx 21.4$.

8. 为了对某班考试成绩进行分析，现从全班同学中随机抽取 8 位，他们的数学、物理成绩如下表所示. 根据表中数据分析：变量 x 与 y 是否具有线性相关关系.

学生编号	1	2	3	4	5	6	7	8
数学分数 x	60	65	70	75	80	85	90	95
物理分数 y	72	77	80	85	88	90	93	95

9. 某兴趣小组欲研究昼夜温差大小与患感冒人数多少之间的关系，他们分别到气象局与某医院抄录了 1～6 月份每月 10 日的昼夜温差情况与因患感冒而就诊的人数，得到如下资料：

日　期	1 月 10 日	2 月 10 日	3 月 10 日	4 月 10 日	5 月 10 日	6 月 10 日
昼夜温差 x/℃	10	11	13	12	8	6
就诊人数 y	22	25	29	26	16	12

该兴趣小组确定的研究方案是：先从这 6 组数据中选取 2 组，用剩下的 4 组数据求线性回归方程，再用被选取的 2 组数据进行检验.

(1) 若选取的是 1 月与 6 月的两组数据，请根据 2～5 月份的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.

(2) 若由线性回归方程得到的估计数据与所选出的检验数据的误差均不超过 2 人，则认为得到的线性回归方程是理想的. 问：该小组所得线性回归方程是否理想？

10. 下表提供了某厂进行技术改造后生产产品过程中记录的产量 x(单位：t)与相应的生产能耗 y(单位：t 标准煤)的几组对应数据：

x/t	3	4	5	6
y/t 标准煤	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出表中数据的散点图，并求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

(2) 已知该厂技术改造前 100 t 产品的生产能耗为 90 t 标准煤，试根据(1)中求出的线性回归方程，预测该厂技术改造后 100 t 产品的生产能耗比技术改造前降低了多少 t 标准煤.

专题　数学建模与数学探究

计算机技术的高速发展，使大量随机抽样试验可以在计算机上实现，从而使模拟方法建模有了技术的保证和可能.

计算机随机模拟方法，又称为蒙特卡罗(Monte Carlo)方法，蒙特卡罗方法的基本思想是：为解决数学、物理、工程技术以及生产管理等方面的问题，首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于问题的解，然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征，最后给出所求问题的近似解.

1946 年，美国物理学家、数学家冯·诺依曼(Von Neumann)在第一台电子计算机上模拟了中子的连锁反应，并把这种方法称为“蒙特卡罗方法”.

用蒙特卡罗方法可以解决的问题主要分为两类. 第一类是确定性的数学问题，即建模对象的行为是确定的. 主要做法是构造一个概率模型，使所求的解就是所建立的模型的概率分布或数学期望(如计算面积、体积，解方程等). 第二类是随机性问题，即建模对象的行为是随机的. 主要做法是根据实际情况的概率法则，用计算机进行抽样试验，从而得出规律性的结论(如库存问题、排队问题等).

运用蒙特卡罗方法可以解决其他方法无法解决的实际问题，对理论研究也有补充及辅助作用.

案例分析

1. (面积问题)用蒙特卡罗方法求曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围区域的面积.

◆ 构造概率模型

在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 中随机投一个点，此点落在区域 $S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\sin x\}$ (图 1 中的阴影部分)的概率为

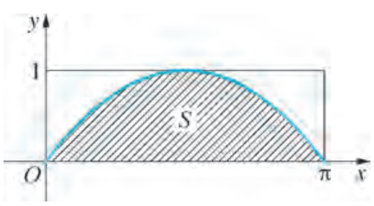


图 1

$$p=\frac{S\text{ 的面积}}{D\text{ 的面积}}.$$

让计算机在区域 D 中产生 n 个均匀分布的随机点，统计出这 n 个点中落在区域 S 中的点的个数(记为 m)，则

$$p\approx\frac{m}{n},$$

故 S 的面积 $\approx\dfrac{m}{n}\cdot D$ 的面积 $=\dfrac{\pi m}{n}$.

◆ 操作与模拟

我们利用 GGB 来实现上述模拟.

(1) 画矩形及正弦线：在指令栏内输入“多边形 [(0，0)，(π，0)，(π，1)，(0，1)]”，画出矩形；输入“函数[sin(x)，0，π]”，画出正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$.

(2) 建立参数：选择“滑动条”，设置参数 n(投点数)，最小值 0，最大值 100 000，增量 100.

随机函数“random( )”产生 0 到 1 之间的随机数.

(3) 投点：输入“序列[(π * random( )，random( ))，i，1，n]”，得到 n 个有序数对(列表 1)，这些点均匀随机地出现在矩形内.

(4) 计数和估计：输入“$m=$ 条件计数[$y(i)<\sin(x(i))$，i，列表 1]” 以及“$S=\pi*m/n$”，即得所求面积的估计值.

拖动滑动条 n，观察模拟的效果及估计的结果. 图 2 为模拟次数 n=1 000 时的效果.

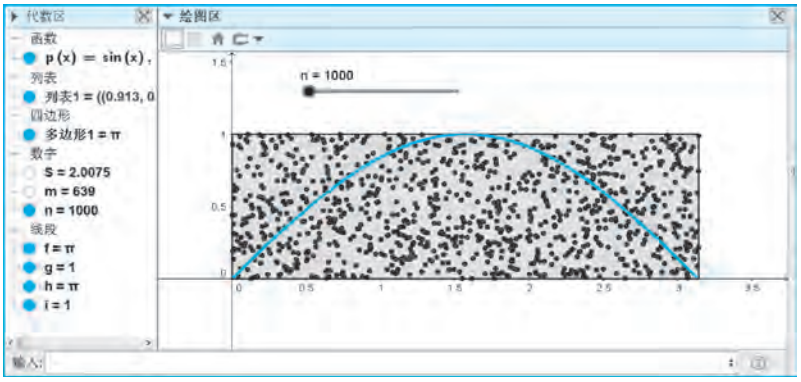


图 2

增加模拟次数，可以发现结果与 2 非常接近. 因此，可以估计所求区域的面积为 2.

利用选修中的微积分知识，可以求出曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围区域的面积为 2. 但当某图形面积用微积分方法难以计算时，用蒙特卡罗方法仍然可以很方便地进行估计.

案例分析

2. (报亭问题)有一个报亭，每天早上从报刊发行处购进报纸后零售，每卖出一份报纸可赚 0.2 元. 若晚上报纸卖不完，则可再退回发行处，此时每退一份报纸要赔 0.4 元. 报亭若购进的报纸太少，则不够卖，会少赚钱；若购进的报纸太多，则卖不完，会赔钱. 请为报亭筹划一下，应该如何确定每天购进报纸的数量，使得期望收益达到最大.

◆ 分析与假设

显然，应该根据需求量确定购进量，每天的需求量是随机的，报亭可以根据以往对报纸的需求量的统计，估计每天能卖出 k 份报纸的概率 p_k.

设报亭每天购进量为 n 份，而报纸每天的需求量为 r 份，r 为随机变量，其概率分布为

$$P\{r=k\}=p_k, k=0, 1, 2, \cdots$$

若这天的需求量 $r<n$，则售出 r 份，退回 $(n-r)$ 份；若这天的需求量 $r \geqslant n$，则 n 份报纸将全部售完. 因此，期望收益为

$$L(n)=\sum_{k=1}^{n}[0.2k-0.4(n-k)]p_k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}0.2np_k.$$

我们的目标是找到能使 $L(n)$ 取最大值时的 n.

当需求量 r 的概率分布已知且不太复杂时，我们可以运用本册8.2节的知识求解. 而当需求量 r 的概率分布比较复杂时，用解析的方法求解就有些困难了. 此时，可以用随机模拟的方法来探求.

假设该报亭根据对以往报纸的需求量的统计，估计出每天能卖出 k 份报纸的概率 p_k 如表 1 所示.

表 1 报亭每天能卖出 k 份报纸的概率

k	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p_k	0.025	0.05	0.1	0.175	0.3	0.175	0.1	0.05	0.025

给定一个购进量 n，让计算机产生随机数 r：

$$r=\begin{cases}300, & 0 \leqslant x<0.025; \\ 350, & 0.025 \leqslant x<0.075; \\ 400, & 0.075 \leqslant x<0.175; \\ 450, & 0.175 \leqslant x<0.350; \\ 500, & 0.350 \leqslant x<0.650; \\ 550, & 0.650 \leqslant x<0.825; \\ 600, & 0.825 \leqslant x<0.925; \\ 650, & 0.925 \leqslant x<0.975; \\ 700, & 0.975 \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

其中，x 是区间 $[0, 1]$ 上的均匀随机数.

判断 r 是否小于 n. 若 $r<n$，则说明有 $(n-r)$ 份报纸卖不掉，当天的利润为 $[0.2r-0.4(n-r)]$ 元；若 $r \geqslant n$，则 n 份报纸全部能卖完，利润为 $0.2n$ 元.

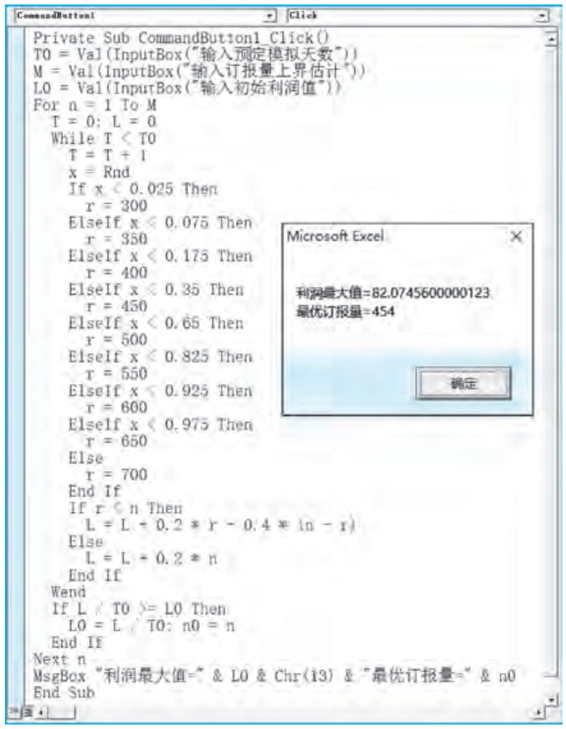
通过多次模拟，可以计算出在购进量为 n 的情况下，每天的平均利润. 对不同的 n 进行搜索，就可以找到最佳购进量.

◆ 操作与模拟

设 $T0$ 为预定模拟的天数，n 为订报量，$n0$ 为最优订报量，M 为订报量 n 的上界估计值，L 为累计利润值，$L0$ 为利润初始值.

在 Excel VBA 中编写程序，当 $T0=10\ 000$，$M=800$，$L0=60$ 时的模拟结果如图 3 所示，估计最优订报量约为 450 份.

Rnd 为 Excel VBA 中的随机函数，产生 0 到 1 之间的随机数.



```
Private Sub CommandButton1_Click()
T0 = Val(InputBox("输入预定模拟天数"))
M = Val(InputBox("输入订报量上界估计"))
L0 = Val(InputBox("输入初始利润值"))
For n = 1 To M
  T = 0: L = 0
  While T < T0
    T = T + 1
    x = Rnd
    If x < 0.025 Then
      r = 300
    ElseIf x < 0.075 Then
      r = 350
    ElseIf x < 0.175 Then
      r = 400
    ElseIf x < 0.35 Then
      r = 450
    ElseIf x < 0.65 Then
      r = 500
    ElseIf x < 0.825 Then
      r = 550
    ElseIf x < 0.925 Then
      r = 600
    ElseIf x < 0.975 Then
      r = 650
    Else
      r = 700
    End If
    If r < n Then
      L = L + 0.2 * r - 0.4 * (n - r)
    Else
      L = L + 0.2 * n
    End If
  Wend
  If L / T0 >= L0 Then
    L0 = L / T0: n0 = n
  End If
Next n
MsgBox "利润最大值=" & L0 & Chr(13) & "最优订报量=" & n0
End Sub
```


图 3

用上述方法不难求出在每天报纸需求量服从任意分布的情况下，使报亭期望利润最大的报纸购进量，而且对该报亭问题模拟系统适当修改，可用于企业的订货和库存策略研究.

课题推荐

借助信息技术解决实际问题(建立数学模型、求数值解、进行计算机模拟)或研究数学问题(探索、猜想、求解、验证)，可以提高数学建模和数学探究活动的有效性. 结合本册学习内容以及本专题案例，以下课题供同学们研究讨论.

(1) 已知单位圆的面积等于 π，试用蒙特卡罗方法探求 π 的近似值(模拟向正方形内随机投点的过程，通过计算落在正方形内切圆内的点数与落在正方形内的点数之比，以此估计 π).

(2) 如何用最基本的随机函数 Rnd(区间 $[0,\ 1]$ 中的均匀随机数)产生二项分布的一个随机数?

(3)小明与小强玩一个投篮游戏，两人的投篮命中率均为 50%. 小明先投，若投中，则小明赢；否则由小强投，若投中，则小强赢；否则由小明接着投，直到有一人投中为止. 问：此游戏是否公平? 如果不公平，那么，小明与小强赢得比赛的概率分别是多少? 试用蒙特卡罗方法模拟这一游戏过程.

附录 标准正态分布 $P(Z\leqslant z)$ 数值表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 4	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 9	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.942 9	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.954 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 9	0.965 6	0.966 4	0.967 1	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.969 9	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 1	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 5	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6
3.0	0.998 7	0.998 7	0.998 7	0.998 8	0.998 8	0.998 9	0.998 9	0.998 9	0.999 0	0.999 0

说　　明

江苏凤凰教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017年版)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需求.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设合适的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识,提升他们的数学学科核心素养.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法、核心素养四条主线,通过问题将全书贯通.每个主题围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最优发展.

衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学》(苏教版)的主编单墫教授,副主编李善良、陈永高、王巧林,以及所有编写的专家,审读、试教教师.

众多的数学家、心理学家、数学教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写与讨论工作.史宁中、鲍建生、谭顶良等教授对教科书编写提出许多建议,仇炳生、于明、祁建新等老师参与本书的编写设计与讨论,在此向他们表示衷心感谢!

感谢您使用本书,您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系,电话:025-83658737,电子邮箱:sjgzsx@126.com,lishanliang2019@126.com,466606351@qq.com.

本书编写组

2019年9月