教育部审定
2013

义务教育教科书

数学
SHUXUE

八年级下册

浙江教育出版社

义务教育教科书

数学 八年级下册

SHUXUE

本册教科书编写人员

实验版（2005～2012）

主　编　范良火

副主编　岑　申　张宝珍

编写人员　范良火　金才华　金克勤　徐鸿斌　王亚权
王利明　许芬英　岑　申　黄新民

2013年版

主　编　范良火

副主编　岑　申　张宝珍　许芬英

编写人员　范良火　金才华　金克勤　王亚权
岑　申　许芬英　王利明　巩子坤

浙江教育出版社

前　言

亲爱的同学：

当这册数学教科书放在你面前时，你又开始了一段新的数学学习之旅.

翻开新书，你会感受到数学世界的精彩：八年级下册介绍**二次根式**，**一元二次方程**，**数据分析初步**，**平行四边形**以及**特殊平行四边形**，**反比例函数**. 学习二次根式可进一步丰富我们关于代数式的知识，也是学习一元二次方程的需要. 一元二次方程既是进一步学习方程与函数的必备基础，在生活和生产实际中也有着广泛的应用.在数据分析初步这一章中，我们将进一步学习数据处理的思想和方法，并用来解决一些简单的实际问题. 平行四边形、特殊平行四边形是我们在日常生活中经常遇到的图形，知道这些图形的性质和判定也是解决实际问题的需要. 反比例函数是刻画现实世界的重要的数学模型，从中我们将进一步学习通过建立函数模型来解决问题的数学思想和方法.

这册新的数学教科书，保持了前几册的体例、结构和理念.“合作学习”，让你与同伴一起探索新的数学知识、新的数学方法；“探究活动”，使你亲身经历知识的发生过程，体验“发现”的快乐；“阅读材料”帮助你了解许多有趣的数学史实，开阔你的数学视野；而“设计题”和“课题学习”，则为你提高分析和解决问题的能力，并在数学中进行探索、实践和创新提供了机会.

数学是最重要的基础学科，是学习物理、化学、地理、生物、经济等等学科的必备知识；数学也能培养我们的思考能力，能使人思维缜密、思路清晰，增强逻辑性和精确性；数学更是认识世界，把握事物本质的科学，具有简洁之美，朴素之真，具有无穷的魅力.

数学是严肃的，它需要学习者有足够的勤奋和毅力；但数学也并不神秘，只要有充分的兴趣和良好的方法，每个人都可以学好它.

这套教科书按照教育部最新制订的《义务教育数学课程标准》(2011年版)编写，7～9年级共6册.我们殷切希望它能成为你的朋友，能够帮助你掌握数学知识，提高数学能力，欣赏数学魅力，享受学习乐趣.祝你学习快乐，学业进步！

编　者

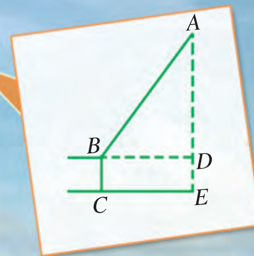
目 录

第1章

二次根式

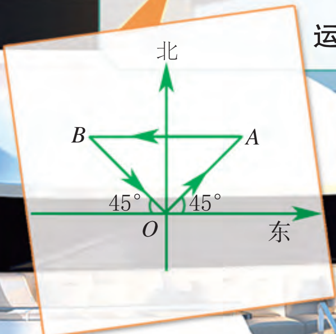
目录 CONTENTS<<

如右图，架在消防车上的云梯 AB 长为15m，$AD:BD=1:0.6$，云梯底部离地面的距离BC为2 m. 你能求出云梯的顶端离地面的距离 AE 吗？

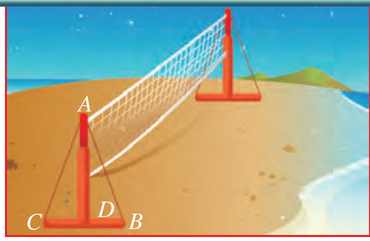


一艘快艇的航线如下图所示，从O港出发，1小时后回到O港. 若行驶中快艇的速度保持不变，则快艇驶完AB这段路程用了多少时间？

本章我们将学习二次根式的概念、性质和运算. 运用二次根式及其运算可以帮助我们解决上述问题.



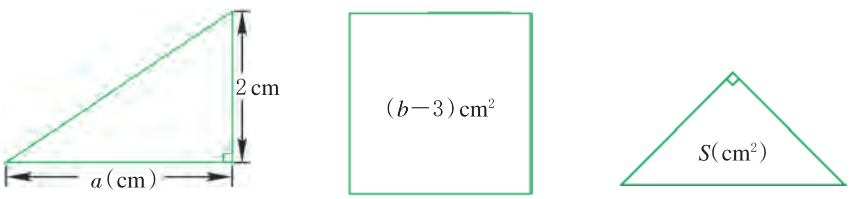
1·1 二次根式



球网的高 AD 为 2.43 米，$AC=AB$，CB 为 a 米. 你能用代数式表示 AC 的长吗？

我们知道，正数的正平方根和零的平方根统称算术平方根，用 $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 表示.

根据图 1-1 所示的直角三角形、正方形和等腰直角三角形的条件，完成以下填空：



直角三角形　　正方形　　等腰直角三角形

图 1-1

直角三角形的斜边长是________________；

正方形的边长是________________；

等腰直角三角形的腰长是________________.

你认为所得的各代数式的共同特点是什么？

像 $\sqrt{a^2+4}$，$\sqrt{b-3}$，$\sqrt{2S}$，$\sqrt{5}$ 这样表示算术平方根的代数式叫做**二次根式**.

根据算术平方根的意义，二次根式根号内字母的取值范围必须满足被开方数大于或等于零.

例1　求下列二次根式中字母 a 的取值范围.

(1) $\sqrt{a+1}$.　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{1-2a}}$.　　(3) $\sqrt{(a-3)^2}$.

解　(1) 由 $a+1\geqslant 0$，得 $a\geqslant -1$，

所以字母 a 的取值范围是大于或等于 -1 的实数.

（2）由$\dfrac{1}{1-2a}>0$，得 $1-2a>0$，即 $a<\dfrac{1}{2}$，

所以字母 a 的取值范围是小于$\dfrac{1}{2}$的实数.

（3）因为无论 a 取何值，都有$(a-3)^2\geqslant 0$，所以 a 的取值范围是全体实数.

例2 当 $x=-4$ 时，求二次根式$\sqrt{1-2x}$的值.

解 将 $x=-4$ 代入二次根式，得

$\sqrt{1-2x}=\sqrt{1-2\times(-4)}=\sqrt{9}=3$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 求下列二次根式中字母 x 的取值范围.

（1）$\sqrt{x-1}$.　　（2）$\sqrt{4x^2}$.

（3）$\sqrt{\dfrac{1}{1+3x}}$.　　（4）$\sqrt{-5x}$.

2. 一艘轮船先向东北方向航行 2 小时，再向西北方向航行 t 小时. 船的航速是每小时 25 千米.

（1）用关于 t 的代数式表示船离出发地的距离.

（2）求当 $t=3$ 时，船离出发地的距离（精确到 0.01 千米）.

作业题 ZUOYETI

A

1. 求下列二次根式中字母 a 的取值范围.

（1）$\sqrt{a}$.　　（2）$\sqrt{\dfrac{1}{2a+1}}$.　　（3）$\sqrt{1-3a}$.

2. 当 $x=-2$ 时，求二次根式$\sqrt{2+\dfrac{1}{2}x}$的值.

3. 解答节前语中的问题. 若 $a=2$，拉索 AC 长为多少米（精确到 0.01 米）？

4. 当 x 分别取下列值时，求二次根式$\sqrt{4-2x}$的值.

（1）$x=0$.　　（2）$x=1$.　　（3）$x=-1$.

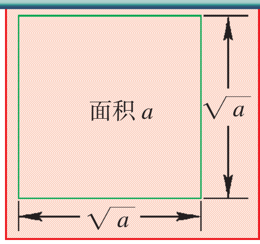
5. 若二次根式$\sqrt{x^2}$的值为3，求x的值.

6. 物体自由下落时，下落距离h(米)可用公式$h=5t^2$来估计，其中t(秒)表示物体下落所经过的时间.

(1) 把这个公式变形成用h表示t的公式.

(2) 一个物体从54.5米高的塔顶自由下落，落到地面需几秒(精确到0.1秒)?

1·2 二次根式的性质



利用节前图，你能推测出$\sqrt{a}$和a有什么关系吗?

1

根据平方根的意义，完成以下填空：

$(\sqrt{2})^2=$______；$(\sqrt{7})^2=$______；$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=$______.

一般地，二次根式有下面的性质：

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).$$

合作学习

HEZUOXUEXI

填空：

$\sqrt{2^2}=$______，　　$|2|=$______；

$\sqrt{(-5)^2}=$______，　　$|-5|=$______；

$\sqrt{0^2}=$______，　　$|0|=$______.

比较左右两边的式子，议一议：$\sqrt{a^2}$与$|a|$有什么关系？当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=$______；当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=$______.

一般地，二次根式有下面的性质：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0);\\ -a\ (a<0).\end{cases}$$

例1 计算：

(1) $\sqrt{(-10)^2}-(\sqrt{15})^2$.

(2) $[\sqrt{2}-\sqrt{(-2)^2}]\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}$❶.

解 (1) $\sqrt{(-10)^2}-(\sqrt{15})^2=|-10|-15=10-15=-5$.

(2) $[\sqrt{2}-\sqrt{(-2)^2}]\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$=(\sqrt{2}-2)\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=2$.

例2 计算：$\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\right)^2}+\left|\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}\right|$.

解 $\because\ \dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}<0,\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}>0,$

$\therefore$ 原式$=-\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{5}$.

课内练习 KENEILIANXI

1. (口答)填空：

(1) $\sqrt{(-1)^2}=$______，$(-\sqrt{3})^2=$______，

$\sqrt{\left(1\dfrac{1}{3}\right)^2}=$______，$\sqrt{(-4)^2}=$______.

(2) 数 a 在数轴上的位置如图，则 $\sqrt{a^2}=$______.

(第 1(2)题)

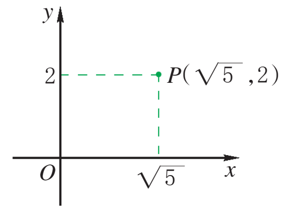
❶ 数与二次根式相乘时，乘号可以省略. 例如，$2\sqrt{2}$ 表示 $2\times\sqrt{2}$.

2. 计算：

（1）$\sqrt{(-7)^2}-(\sqrt{7})^2$.

（2）$(-\sqrt{11})^2+\sqrt{(-13)^2}$.

3. 如图，$P(\sqrt{5},2)$是直角坐标系中一点，求点 P 到原点的距离.



（第 3 题）

作业题

A 1. 填空：

（1）$(\sqrt{6})^2=$______.　　（2）$\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=$______.

2. 已知 $a=-2$，化简 $\left|a-\sqrt{a^2}\right|$ 的结果是________.

3. 计算：

（1）$(-\sqrt{5})^2-\sqrt{16}+\sqrt{(-2)^2}$.

（2）$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2-\sqrt{0.1^2}-\sqrt{\frac{1}{4}}$.

（3）$(\sqrt{a})^2+\sqrt{a^2}$ $(a\geqslant 0)$.

4. 计算：

（1）$\sqrt{\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{4}{7}-1\right)^2}$.

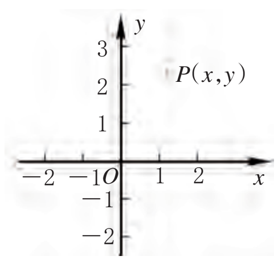
（2）$(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}+\sqrt{3}$.

B 5. 计算：$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$.

6. 如图，P 是直角坐标系上一点.

（1）用二次根式表示点 P 到原点 O 的距离.

（2）若 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{7}$，求点 P 到原点 O 的距离.



（第 6 题）

下面我们继续探索二次根式的性质.

填空(可用计算器计算):

$\sqrt{4\times9}=$__________, $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$__________;

$\sqrt{4\times5}=$__________, $\sqrt{4}\times\sqrt{5}=$__________;

$\sqrt{\dfrac{9}{16}}=$__________, $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=$__________;

$\sqrt{\dfrac{3}{2}}=$__________, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=$__________.

比较左右两边的等式,你发现了什么?你能用字母表示发现的规律吗?

一般地,二次根式有下面的性质:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant0,b>0).$$

例3 化简:

(1) $\sqrt{121\times225}$. (2) $\sqrt{4^2\times7}$.

(3) $\sqrt{\dfrac{5}{9}}$. (4) $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

解 (1) $\sqrt{121\times225}=\sqrt{121}\times\sqrt{225}=11\times15=165$.

(2) $\sqrt{4^2\times7}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.

(3) $\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(4) $\sqrt{\dfrac{2}{7}}=\sqrt{\dfrac{2\times7}{7\times7}}=\dfrac{1}{7}\sqrt{14}$.

像$\sqrt{7}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{a}$，$\sqrt{2S}$这样，在根号内不含分母，不含开得尽方的因数或因式，这样的二次根式我们就说它是**最简二次根式**．二次根式化简的结果应为最简二次根式．

例4 化简：

（1）$\sqrt{(-18)\times(-24)}$．　（2）$\sqrt{1\frac{1}{49}}$．　（3）$\sqrt{0.001\times0.5}$．

解 （1）$\sqrt{(-18)\times(-24)}$

$=\sqrt{2\times9\times3\times8}=\sqrt{2^4\times3^3}=\sqrt{2^4}\times\sqrt{3^3}=12\sqrt{3}$．

（2）$\sqrt{1\frac{1}{49}}=\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}\sqrt{2}$．

（3）$\sqrt{0.001\times0.5}$

$=\sqrt{10^{-3}\times10^{-1}\times5}$

$=\sqrt{(10^{-2})^2\times5}$

$=\sqrt{(10^{-2})^2}\times\sqrt{5}$

$=10^{-2}\times\sqrt{5}$

$=\frac{\sqrt{5}}{100}$．

课内练习 KENEIJIANXI

1. 化简：

（1）$\sqrt{25\times4}$．　（2）$\sqrt{0.01\times0.49}$．　（3）$\sqrt{3^2\times5^2}$．

2. 化简：

（1）$\sqrt{\frac{9}{25}}$．　（2）$\sqrt{1\frac{1}{2}}$．　（3）$\sqrt{\frac{5}{8}}$．

3. 化简：

（1）$5\sqrt{\frac{2}{5}}$．　（2）$\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}$．

探究活动

化简下列两组式子：

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=$________，$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=$________；

$3\sqrt{\frac{3}{8}}=$________，$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=$________；

$4\sqrt{\frac{4}{15}}=$________，$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=$________；

$5\sqrt{\frac{5}{24}}=$________，$\sqrt{5+\frac{5}{24}}=$________.

你发现了什么规律？用字母表示你所发现的规律. 再任意选几个数验证你发现的规律.

（请与你的同伴交流）

作业题

A **1.** 化简：

（1）$\sqrt{1000}$.　（2）$\sqrt{7^2\times2^4}$.　（3）$\sqrt{2^5\times3^2}$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{\frac{11}{100}}$.　（2）$\sqrt{\frac{7}{8}}$.　（3）$\sqrt{0.001}$.

3. 化简：

（1）$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{4}}$.　（2）$\sqrt{\frac{3^2+4^2}{125}}$.

4. 已知等边三角形的边长为 4 cm，求它的高线长.❶

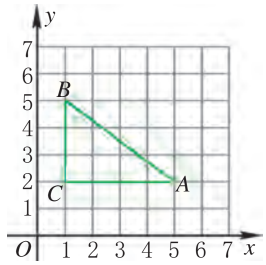
B **5.** 化简：

（1）$\sqrt{12^2+24^2}$.　（2）$\sqrt{8.1\times10^4}$.

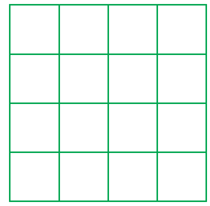
（3）$\sqrt{\left(\frac{8}{13}\right)^2-\left(\frac{2}{13}\right)^2}$.　（4）$\sqrt{1\frac{1}{80}}$.

❶ 在本套教科书中，凡结果没有要求精确度的，结果可含二次根式，但应化为最简二次根式.

6. 如图,在直角坐标系中,点 $A(5,2)$,$B(1,5)$,$C(1,2)$是三角形的三个顶点,求 AB 的长.



(第 6 题)

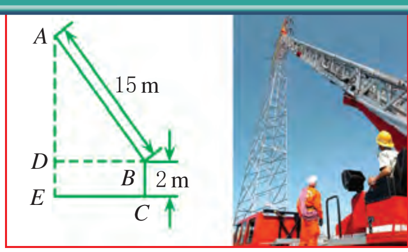

(第 7 题)

7. 在如图所示的 4×4 方格中,每个小方格的边长都为 1.

(1) 在图中画出长度为 $\sqrt{17}$ 与 $\sqrt{20}$ 的线段,要求线段的端点在格点上.

(2) 在图中画出一个三条边长分别为 3, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ 的三角形,使它的顶点都在格点上.

1·3 二次根式的运算



如图,架在消防车上的云梯 AB 长为 15 m,$AD:BD=1:0.6$,云梯底部离地面的距离 BC 为 2 m. 你能求出云梯的顶端离地面的距离 AE 吗?

1

根据二次根式的性质,我们可以得到:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,b\geqslant0);$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant0,b>0).$$

上述法则可以用于二次根式的乘除运算.

例1 计算：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$. (2) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{10}}$. (3) $\frac{\sqrt{1.8\times10^9}}{\sqrt{1.5\times10^8}}$.

解 (1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times6}$

$=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{10}}=\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{27}{10}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$

$=\sqrt{\frac{3^2\times2}{2^2}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

注 意

$\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 不能写成 $1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(3) $\frac{\sqrt{1.8\times10^9}}{\sqrt{1.5\times10^8}}=\sqrt{\frac{1.8\times10^9}{1.5\times10^8}}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

二次根式运算的结果，如果能够化简，那么应把它化简为最简二次根式.

例2 如图1-2，一个正三角形路标的边长为$2\sqrt{2}$个单位，求这个路标的面积.

解 如图1-2，作 $AD\perp BC$ 于点 D，则

$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

在Rt△ACD 中，

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{6}$.

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$（平方单位）.

答：这个路标的面积为$2\sqrt{3}$平方单位.

图 1-2

课内练习

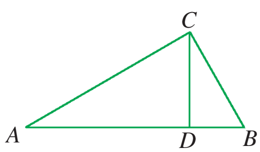
1. 计算：

（1）$\sqrt{12}\times\sqrt{3}$.　　（2）$\sqrt{1000}\times\sqrt{0.1}$.

（3）$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$.　　（4）$\sqrt{24}\times\sqrt{3}$.

2. 计算：

（1）$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.　　（2）$\frac{\sqrt{3\times10^5}}{\sqrt{2.7\times10^3}}$.　　（3）$\frac{1}{\sqrt{5}}$.



（第 3 题）

3. 如图，在Rt△ABC 中，∠ACB=Rt∠，$BC=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{6}$. 求斜边上的高线 CD 的长.

作业题

A

1. 计算：

（1）$\sqrt{8}\times\sqrt{18}$.　　（2）$\sqrt{0.5}\times\sqrt{2.5}$.

（3）$\sqrt{1\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{2}{5}}$.　　（4）$\sqrt{1.2\times10^2}\times\sqrt{3\times10^5}$.

2. 计算：

（1）$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}}$.　　（2）$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$.

（3）$\frac{2}{\sqrt{2}}$.　　（4）$\frac{\sqrt{1.6\times10^4}}{\sqrt{0.4\times10^2}}$.

3. 计算：

（1）$\sqrt{130}\times\sqrt{0.2}$.　　（2）$\sqrt{49}\div(2\sqrt{7})$.

4. 已知等腰直角三角形的斜边长为$\sqrt{2}$，求它的面积.

B

5. 计算：$\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

6. 解方程：$2\sqrt{2}x=-\sqrt{24}$.

以前我们学过的整式运算的法则和方法也适用于二次根式的运算. 例如,在二次根式的加减运算时,类似于合并同类项,我们可以把含有被开方数相同的二次根式的项进行合并.

例3 化简:$\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

解 原式$=\sqrt{2^2\times3}-\sqrt{\frac{3}{3^2}}-\sqrt{\frac{4\times3}{3^2}}=2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

例4 计算:

(1) $\sqrt{6}+\sqrt{8}\times\sqrt{12}$. (2) $\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{5}{\sqrt{3}}$. (3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

解 (1) 原式$=\sqrt{6}+\sqrt{8\times12}=\sqrt{6}+\sqrt{2^2\times2\times2^2\times3}$

$=\sqrt{6}+4\sqrt{6}=5\sqrt{6}$.

(2) 原式$=\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}+\frac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

(3) 原式$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}$.

例5 计算:

(1) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

(2) $(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$.

解 (1) 原式$=(2\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2=8-27=-19$.

(2) 原式$=6+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4=2+\sqrt{2}$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 化简：$\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{6}\sqrt{24}-\frac{3}{2}\sqrt{12}\right)$.

2. 计算：

（1）$\frac{1}{2}\sqrt{24}-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}$.　　（2）$\sqrt{3}(1-\sqrt{15})-3\sqrt{\frac{1}{5}}$.

（3）$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2}$.

3. 计算：

（1）$(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$.　　（2）$(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})^2$.

4. 在Rt△ABC 中，∠C=Rt∠，$AC=2\sqrt{2}$，$AB=3\sqrt{2}$. 求Rt△ABC 的周长和面积.

作业题 ZUOYETI

A

1. 计算：

（1）$\sqrt{125}-\sqrt{\frac{1}{125}}-\sqrt{\frac{16}{5}}$.　　（2）$(2\sqrt{6})^2-(-3\sqrt{2})^2$.

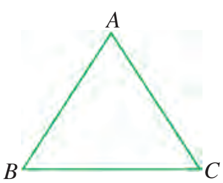
（3）$\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2. 计算：

（1）$(1-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)$.　　（2）$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$.

（3）$(1-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)$.

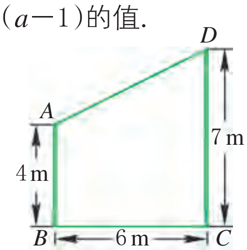
3. 求当 $a=\sqrt{2}$ 时，代数式 $(a-1)^2-(a+\sqrt{2})(a-1)$ 的值.



（第 4 题）

4. 如图，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{6}$. 求△ABC 的面积.

5. 如图，两根直立的竹竿相距 6 m，高分别为 4 m 和 7 m. 求两竹竿顶端间的距离 AD.



（第 5 题）

B

6. 已知 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 a^2-ab+b^2 的值.

7. 不用计算器，比较 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 与 $\sqrt{6}-2.1$ 的大小，并说明理由.

在日常生活和生产实际中，我们在解决一些问题，尤其是涉及直角三角形边长计算的问题时，经常用到二次根式及其运算.

例6 如图 1-3，扶梯 AB 的坡比[1]为 1∶0.8，滑梯 CD 的坡比为 1∶1.6，$AE=\frac{3}{2}$ m，$BC=\frac{1}{2}CD$. 一男孩从扶梯走到滑梯的顶部，然后从滑梯滑下，经过的总路程是多少米（要求先化简，再取近似值. 结果精确到 0.01m）?

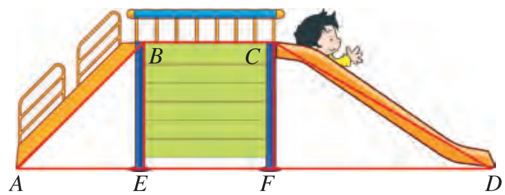


图 1-3

解 在 Rt△AEB 中，

$$AE=\frac{3}{2}\text{m},BE=\frac{3}{2}\div 0.8=\frac{15}{8}(\text{m}),$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{8}\right)^2}=\frac{3}{8}\sqrt{41}(\text{m}).$$

在 Rt△CFD 中，$DF=\frac{15}{8}\times 1.6=3(\text{m})$，

$$\therefore\quad CD=\sqrt{CF^2+DF^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2+3^2}=\frac{3}{8}\sqrt{89}(\text{m}).$$

而 $BC=\frac{1}{2}CD=\frac{3}{16}\sqrt{89}\text{m}$，

$$\therefore\quad AB+BC+CD=\frac{3}{8}\sqrt{41}+\frac{3}{16}\sqrt{89}+\frac{3}{8}\sqrt{89}$$

$$=\frac{3}{8}\sqrt{41}+\frac{9}{16}\sqrt{89}\approx 7.71(\text{m}).$$

答：这个男孩经过的总路程约为 7.71m.

例7 如图 1-4 是一张等腰直角三角形彩色纸，$AC=BC=40$ cm. 将斜边上的高线 CD 四等分，然后裁出三张宽度相等的长方形纸条.

（1）分别求出三张长方形纸条的长度.

[1] 如图1-3，斜坡上 A，B 两点之间的高度差 BE 与水平距离 AE 的比叫做 AB 的坡比.

（2）若用这些纸条为一幅正方形美术作品镶边(纸条不重叠)，如图 1-5，正方形美术作品的面积为多少平方厘米?

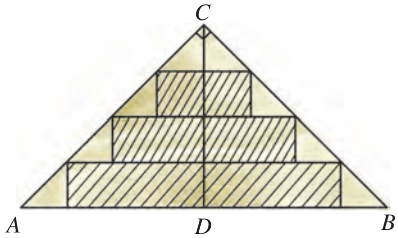


图 1-4


图 1-5

解（1）如图 1-4，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=BC=40$(cm)，

$\therefore$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{40^2+40^2}=40\sqrt{2}$(cm).

$\because$ $CD\perp AB, AD=BD$，

$\therefore$ $CD=\dfrac{1}{2}AB=20\sqrt{2}$(cm).

$\therefore$ $\dfrac{1}{4}CD=\dfrac{1}{4}\times 20\sqrt{2}=5\sqrt{2}$(cm).

$\because$ 最上面长方形纸条的长是$\dfrac{1}{4}CD$ 的 2 倍(为什么?)，

$\therefore$ 其长度为 $2\times\dfrac{1}{4}CD=2\times 5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$(cm).

同理可得，其余两张长方形纸条的长度依次为：

$2\times\dfrac{1}{2}CD=2\times 10\sqrt{2}=20\sqrt{2}$(cm)，

$2\times\dfrac{3}{4}CD=2\times 15\sqrt{2}=30\sqrt{2}$(cm).

答：三张长方形纸条的长度分别为 $10\sqrt{2}$ cm，$20\sqrt{2}$ cm，$30\sqrt{2}$ cm.

（2）三张长方形纸条连接在一起的总长度为

$10\sqrt{2}+20\sqrt{2}+30\sqrt{2}=60\sqrt{2}$(cm).

因此，给这幅美术作品所镶的边框可以看做由四张宽为 $5\sqrt{2}$ cm，长为 $15\sqrt{2}$ cm 的彩色纸条围成(图 1-5).

则正方形的边长$=15\sqrt{2}-5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$(cm)，

正方形的面积$=(10\sqrt{2})^2=200$(cm^2).

答：这幅正方形美术作品的面积为 200 cm^2.

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，一道斜坡 AB 的坡比为 $1:10$，$AC=24$ m. 求斜坡 AB 的长.

（第 1 题）

2. 请解答本节节前语中的问题（精确到 0.01 m）.

作业题 ZUOYETI

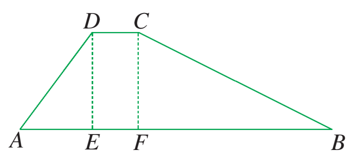
A **1.** 在 Rt△ABC 中，$\angle C=$Rt$\angle$，记 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

（1）若 $a:c=\dfrac{1}{2}$，求 $b:c$.

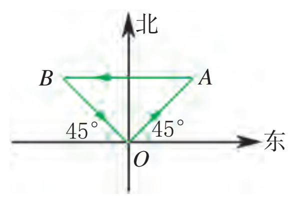
（2）若 $a:c=\sqrt{2}:\sqrt{3}$，$c=6\sqrt{3}$，求 b.

2. 在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=8$. 求△ABC 的面积.

3. 如图，大坝横截面的迎水坡 AD 的坡比为 $4:3$，背水坡 BC 的坡比为 $1:2$，大坝高 $DE=50$ m，坝顶宽 $CD=30$ m. 求大坝横截面的面积和周长（周长精确到 0.01 m）.



（第 3 题）



（第 4 题）

B **4.** 如图，一艘快艇从 O 港出发，向东北方向行驶到 A 处，然后向西行驶到 B 处，再向东南方向行驶，共经过 1 小时回到 O 港. 已知快艇的速度是 60 km/h，求 A，B 之间的距离（精确到 0.1 km）.

C **5.** 从一张等腰直角三角形纸板中剪一个尽可能大的正方形，可怎样剪？画图说明你的剪法. 如果这张纸板的斜边长为 30 cm，能剪出最大正方形的面积是多少平方厘米？

小结

XIAOJIE

填空.

1. 像$\sqrt{a^2+4}$，$\sqrt{b-3}$，$\sqrt{5}$这样表示________的代数式叫做二次根式. 二次根式根号内字母的取值范围必须满足________大于零或等于零.

2. 二次根式的性质：

$(\sqrt{a})^2=$______ $(a\geqslant 0)$；

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & (a\geqslant 0); \\ \_\_\_\_\_\_ & (a<0); \end{cases}$

$\sqrt{ab}=$_________ $(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=$_________ $(a\geqslant 0,b>0)$.

3. 在根号内不含_________，不含_________，这样的二次根式称为最简二次根式.

4. 二次根式的乘除运算法则：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=$______ $(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$_____$(a$_____$0,b$_____$0)$.

5. 整式运算的法则和方法也适用于二次根式的加减运算.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
运用二次根式的性质将二次根式化简			
简单的二次根式的四则运算			
运用二次根式及其运算解决简单的实际问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 1.1 节

● 了解二次根式的概念.

● 会求二次根式的值.

1. 当 $a=-2$ 时，二次根式 $\sqrt{2-a}$ 的值是______.

2. 当 $x=$_____时，$\sqrt{2x-6}$ 的值最小.

3. 求下列二次根式中字母 a 的取值范围.

(1) $\sqrt{5a}$.　　(2) $\sqrt{a+3}$.

(3) $\sqrt{a^2+1}$.　　(4) $\sqrt{-\frac{2}{a}}$.

目标B 1.2 节

● 了解二次根式的性质，了解最简二次根式的概念.

● 会运用二次根式的性质将二次根式化简.

4. 填空：

(1) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=$______.

(2) $\sqrt{(-13)^2}=$______.

(3) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}=$________.

5. 将 $\sqrt{3^2\times 8}$ 化简，正确的结果是(　　)

(A) $3\sqrt{8}$.　(B) $\pm 3\sqrt{8}$.　(C) $6\sqrt{2}$.　(D) $\pm 6\sqrt{2}$.

6. 化简：

(1) $\sqrt{(-11)^2}+|-11|$.　　(2) $\sqrt{108}$.

(3) $\sqrt{8^2+2^5}$.　　(4) $\sqrt{\frac{8}{27}}$.

(5) $\frac{3}{\sqrt{3}}$.　　(6) $\sqrt{0.06\times 0.27}$.

(7) $\sqrt{1-\frac{1}{4}}$.　　(8) $\frac{4}{5}\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

7. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=$Rt$\angle$，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

(1) 已知 $b=a=5$，求 c.

(2) 已知 $c=10$，$b=1$，求 a.

(3) 已知 $a=\frac{5}{13}$，$b=\frac{12}{13}$，求 c.

8. 在直角坐标系中，求下列各点到原点的距离.

(1) $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.　　(2) $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

目标C
1.3 节

● 了解二次根式加、减、乘、除的运算法则.
● 会进行二次根式的四则运算.
● 会运用二次根式的运算解决简单的实际问题.

9. 计算：

(1) $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$.　　(2) $\sqrt{0.1} \times \sqrt{0.4}$.

(3) $\sqrt{2\dfrac{3}{4}} \times \sqrt{\dfrac{2}{11}}$.　　(4) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$.

10. 化简：

(1) $2\sqrt{20} - \sqrt{5} + 3\sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

(2) $3\sqrt{3} - \left(\sqrt{12} + \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

11. 计算：

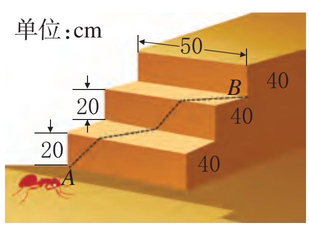
(1) $(\sqrt{18} - \sqrt{3}) \times \sqrt{12}$.　　(2) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2$.

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.　　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{5}} - \dfrac{10}{\sqrt{125}}$.

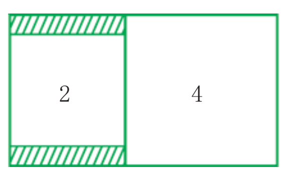
12. 求当 $a=1+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$ 时，代数式 a^2+b^2-2a+1 的值.

13. 设实数 $\sqrt{7}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $(2a+b)(2a-b)$ 的值.

14. 如图，台阶阶梯每一层高 20 cm，宽 40 cm，长 50 cm. 一只蚂蚁从 A 点爬到 B 点，最短路程是多少？



（第 14 题）

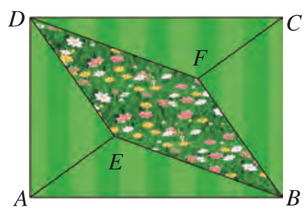


（第 15 题）

15. 如图，长方形内两个相邻正方形的面积分别为 4 和 2. 求图中阴影部分的面积.

16. 根据爱因斯坦的相对论,当地面上的时间经过 1 秒时,宇宙飞船内时间只经过$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$秒 ($c$ 是光速,为 3×10^5 千米/秒,v 是宇宙飞船的速度). 假定有一对兄弟,哥哥 18 岁,弟弟 15 岁,哥哥乘着宇宙飞船作宇宙旅行,宇宙飞船的速度是光速的 0.98 倍. 问:弟弟 20 岁时,刚从宇宙旅行回来的哥哥是几岁?

17. 如图,一块长方形场地 $ABCD$ 的长 AB 与宽 AD 之比为 $\sqrt{2}:1$, $DE\perp AC$ 于点 E,$BF\perp AC$ 于点 F,连结 BE,DF. 现计划在四边形 $DEBF$ 区域内种植花草,求四边形 $DEBF$ 与长方形 $ABCD$ 的面积之比.



(第 17 题)

第2章

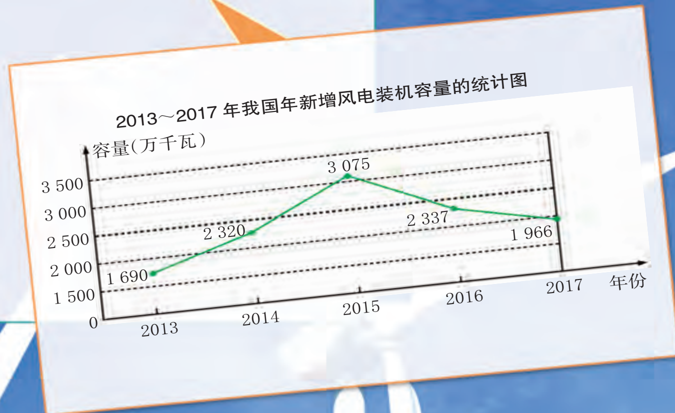
一元二次方程

目录 CONTENTS<<

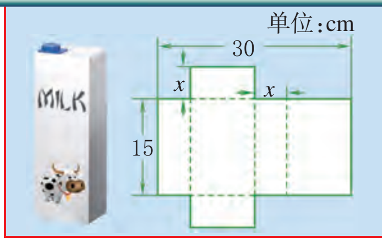
根据2013～2017年我国年新增风电装机容量的统计图，你知道从2013～2015年我国新增风电装机容量平均每年增长百分之几？

一名高尔夫球手某次击出的球的高度h(m)和经过的水平距离d(m)满足关系式$h=d-0.01d^2$. 当球所经过的水平距离为50m时，球的高度是多少？

上述问题都可以用一元二次方程来解决. 本章我们将学习一元二次方程及其应用.



2·1 一元二次方程



将一个容积为 $750\,cm^3$ 的包装盒剪开、铺平，纸样如图所示. 图中 x(cm)应满足怎样的方程?

合作学习

HEZUOXUEXI

列出下列问题中关于未知数 x 的方程:

(1) 把面积为 $4\,m^2$ 的一张纸分割成如图 2-1 所示的正方形和长方形两个部分，求正方形的边长.

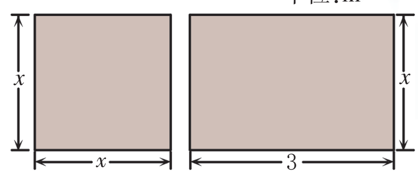


图 2-1

设正方形的边长为 x(m),可列出方程:____________________.

(2) 某放射性元素经 2 天后，质量衰变为原来的 $\frac{1}{2}$. 这种放射性元素平均每天减少率为多少?

设平均每天减少率为 x,可列出方程:____________________.

观察上面所列方程，说出这些方程与一元一次方程的相同和不同之处.

方程 $x^2+3x=4$ 和 $(1-x)^2=\frac{1}{2}$ 的两边都是整式，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2次. 我们把这样的方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation in one unknown). 能使一元二次方程两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的解(或根).

做一做

ZUOYIZUO

1. 判断下列方程是否为一元二次方程.

(1) $10x^2=9$.　　(2) $2(x-1)=3x$.

(3) $2x^2-3x-1=0$.　　(4) $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=0$.

2. 判断未知数的值 $x=-1, x=0, x=2$ 是不是方程 $x^2-2=x$ 的根.

一般地,任何一个关于 x 的一元二次方程都可以化为 $ax^2+bx+c=0$ 的形式. 我们把 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 为已知数,$a\neq 0$)称为一元二次方程的一般形式,其中 ax^2,bx,c 分别称为二次项、一次项和常数项,a,b 分别称为二次项系数和一次项系数.

想一想

为什么要限制 $a\neq 0$? b,c 可以为零吗?

例1 把下列方程化成一元二次方程的一般形式,并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

(1) $9x^2=5-4x$. (2) $(2-x)(3x+4)=3$.

解 (1) 移项,整理,得 $9x^2+4x-5=0$.

这个方程的二次项系数是 9,一次项系数是 4,常数项是 -5.

(2) 方程左边多项式相乘,得 $-3x^2+2x+8=3$,

移项,整理,得 $-3x^2+2x+5=0$.

这个方程的二次项系数是 -3,一次项系数是 2,常数项是 5.

例2 已知一元二次方程 $2x^2+bx+c=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{5}{2}$ 和 $x_2=-3$,求这个方程.

解 将 $x_1=\frac{5}{2}$,$x_2=-3$ 代入方程 $2x^2+bx+c=0$,得

$$\begin{cases}2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}b+c=0,\\ 2\times(-3)^2+(-3)b+c=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}b=1,\\ c=-15.\end{cases}$

所以这个一元二次方程是 $2x^2+x-15=0$.

我们在写一元二次方程的一般形式时,通常按未知数的次数从高到低排列,即先写二次项,再写一次项,最后是常数项.

课内练习 KENEILIANXI

1. 在下列方程中，属于一元二次方程的是（　　）

（A）$x^2+3x=\frac{2}{x}$.　　（B）$2(x-1)+x=2$.

（C）$x^2=2+3x$.　　（D）$x^2-x^3+4=0$.

2. 填表：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$2x^2-x=4$				
$\sqrt{2}y-4y^2=0$				
$(2x)^2=(x+1)^2$				

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+a=0$ 的一个根是 3，求 a 的值.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 在下列方程中，不属于一元二次方程的是（　　）

（A）$\frac{1}{5}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}=x$.　　（B）$7x^2=0$.

（C）$0.3x^2+0.2x=4$.　　（D）$x(1-2x^2)=2x^2$.

2. 把一元二次方程 $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})+(2x-1)^2=0$ 化成一般形式，正确的是（　　）

（A）$5x^2-4x-4=0$.　　（B）$x^2-5=0$.

（C）$5x^2-2x+1=0$.　　（D）$5x^2-4x+6=0$.

3. 填表：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$x^2-4x-3=0$				
$2x^2=0$				
$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{9}$				
$(2y-3)^2=y(y+2)$				

4. 判断下列各题括号内未知数的值是不是方程的根.

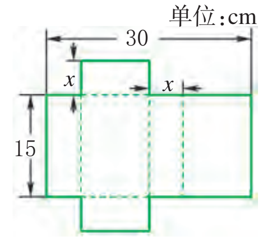
（1）$x^2-3x+2=0$　$(x_1=1, x_2=2, x_3=3)$.

（2）$2y^2-5y+2=0$　$\left(y_1=\frac{1}{2}, y_2=1, y_3=2\right)$.

（3）$\frac{1}{2}(3x-1)^2-8=0$　$\left(x_1=-1, x_2=1, x_3=\frac{5}{3}\right)$.

（4）$(2x-3)^2=(x+1)^2$　$\left(x_1=\frac{2}{3}, x_2=0, x_3=1\right)$.

B **5.** 将一个容积为 750 cm^3 的包装盒剪开、铺平，纸样如图所示. 写出关于 x 的方程. 该方程是一元二次方程吗? 如果是，把它化为一元二次方程的一般形式.



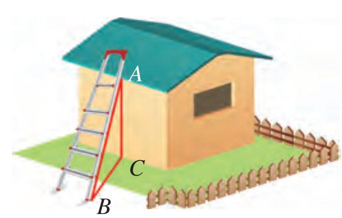
（第 5 题）

6. 写一个一元二次方程，它的二次项系数为 1，其中一个根为 -2，另一个根为 3.

2·2 一元二次方程的解法

如图，工人师傅为了修屋顶，把一架梯子搁在墙上. 已知梯子长 $AB=5$ 米，墙高 AC 是梯子底端点离墙的距离 BC 的 2 倍，求墙高 AC.

1



合作学习

HEZUOXUEXI

1. 若 $A\times B=0$，下面两个结论正确吗?
 （1）A 和 B 都为 0，即 $A=0$，且 $B=0$.
 （2）A 和 B 中至少有一个为 0，即 $A=0$，或 $B=0$.
2. 你能用上面的结论解方程 $(2x+3)(2x-3)=0$ 吗? 试一试.

例1　解下列方程:

（1）$x^2-3x=0$.　　　（2）$25x^2=16$.

解　（1）将原方程的左边分解因式，得 $x(x-3)=0$，

则 $x=0$，或 $x-3=0$，

解得 $x_1=0, x_2=3$.

(2) 移项，得$25x^2-16=0$.

将方程的左边分解因式，得$(5x-4)(5x+4)=0$，

则$5x-4=0$，或$5x+4=0$，

解得 $x_1=\frac{4}{5}$，$x_2=-\frac{4}{5}$.

像上面这种利用因式分解解一元二次方程的方法叫做**因式分解(factorization)法**. 这种方法把解一个一元二次方程转化为解两个一元一次方程.

例2 解下列一元二次方程：

(1) $(x-5)(3x-2)=10$.

(2) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$.

解 (1) 化简方程，得$3x^2-17x=0$.

将方程的左边分解因式，得 $x(3x-17)=0$，

则$x=0$，或$3x-17=0$，

解得$x_1=0$，$x_2=\frac{17}{3}$.

(2) 移项，得$(3x-4)^2-(4x-3)^2=0$.

将方程的左边分解因式，得

$[(3x-4)+(4x-3)][(3x-4)-(4x-3)]=0$，

即$(7x-7)(-x-1)=0$.

则$7x-7=0$，或$-x-1=0$，

解得$x_1=1$，$x_2=-1$.

例3 解方程 $x^2=2\sqrt{2}x-2$.

解 移项，得 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$，

即 $x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2=0$.

则$(x-\sqrt{2})^2=0$，

解得$x_1=x_2=\sqrt{2}$[1].

[1] 表示一元二次方程有两个相等的实数根.

课内练习 KENEIJIANXI

用因式分解法解下列方程：

(1) $7x^2=21x$.

(2) $\frac{x^2}{4}-9=0$.

(3) $27x^2-18x=-3$.

(4) $(x+2)^2=2x+4$.

(5) $4(x-3)^2-x(x-3)=0$.

(6) $(7x-1)^2=4x^2$.

作业题 ZUOYETI

A

1. 填空：

(1) 方程 $x^2+x=0$ 的根是______________.

(2) 方程 $x^2-25=0$ 的根是______________.

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $3y^2-5y=0$.

(2) $4x^2=12x$.

(3) $x^2+9=-6x$.

(4) $9x^2=(x-1)^2$.

3. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x-2)(2x-3)=6$.

(2) $x(x-4)=-4$.

4. 已知一个数的平方等于这个数本身，求这个数（要求列出一元二次方程求解）.

B

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(2x-1)^2=-8x$.

(2) $(x-2)^2=2x(x-2)$.

(3) $x^2-2\sqrt{3}x=-3$.

6. 构造一个一元二次方程，要求：①常数项不为零；②有一个根为－3.

2

一般地，对于形如 $x^2=a\ (a\geq 0)$ 的方程，根据平方根的定义，可得 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$. 这种解一元二次方程的方法叫做**开平方**(square root extraction)**法**.

例4 用开平方法解下列方程：

(1) $3x^2-48=0$.　　(2) $(2x-3)^2=7$.

解 (1) 移项，得$3x^2=48$.

方程的两边同除以3，得 $x^2=16$.

解得 $x_1=4$，$x_2=-4$.

(2) 由原方程，得$2x-3=\sqrt{7}$，或$2x-3=-\sqrt{7}$，

解得 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

合作学习

HEZUOXUEXI

探讨怎样解方程 $x^2-10x=-16$.

你能将方程 $x^2-10x=-16$ 转化成$(x+a)^2=b$ 的形式吗？请尝试解这个方程.

像上面这样，把一元二次方程的左边配成一个完全平方式，右边为一个非负常数，然后用开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫做**配方**(completing the square)**法**.

例5 用配方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2+6x=1$.　　(2) $x^2+5x-6=0$.

解 (1) 方程的两边同加上 9，得

$x^2+6x+9=1+9$，即$(x+3)^2=10$.

则 $x+3=\sqrt{10}$，或 $x+3=-\sqrt{10}$，

解得 $x_1=-3+\sqrt{10}$，$x_2=-3-\sqrt{10}$.

(2) 移项，得 $x^2+5x=6$.

方程的两边同加上$\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$，得 $x^2+5x+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=6+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$，

即$\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$.

则 $x+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$，或 $x+\dfrac{5}{2}=-\dfrac{7}{2}$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-6$.

注　意

由 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ 可知，这里两边同加的应是一次项系数的一半的平方.

课内练习 KENEILIANXI

1. 填空：

（1）方程 $x^2=0.25$的根是________.

（2）方程 $2x^2=18$ 的根是________.

2. 填空：

（1）x^2+8x+______$=(x+4)^2$.

（2）x^2-3x+______$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

（3）x^2-12x+______$=(x-$______$)^2$.

3. 选择适当的方法解下列方程：

（1）$x^2-81=0$.　　（2）$2x^2=50$.

（3）$(x+1)^2=4$.

4. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+12x=-9$.　　（2）$-x^2+4x-3=0$.

作业题 ZUOYETI

A

1. 填空：

（1）x^2+14x+______$=(x+7)^2$.

（2）x^2-9x+______$=(x-$______$)^2$.

2. 用开平方法解下列方程：

（1）$x^2=2.25$.　　（2）$4x^2=3$.

（3）$7x^2-56=0$.　　（4）$2(x-7)^2=14$.

3. 用配方法解下列方程：

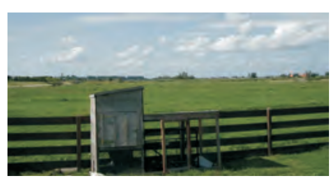
（1）$x^2-6x=-8$.　　（2）$x^2-8x-4=0$.

（3）$x^2+3x+2=0$.　　（4）$-x^2+5x+6=0$.

B

4. 用配方法解方程 $x^2=4\sqrt{3}x-11$.

5. 一个长方形牧场的面积为 8 100 平方米，长比宽多 19 米. 这个牧场的周长是多少米?



（第 5 题）

6. 先用配方法解下列方程：

① $x^2-2x-1=0$；　② $x^2-2x+4=0$；　③ $x^2-2x+1=0$.

然后回答下列问题：

（1）你在求解过程中遇到什么问题?你是怎样处理所遇到的问题的?

（2）对于形如 $x^2+px+q=0$ 这样的方程，在什么条件下才有实数根?

3

例6　用配方法解下列一元二次方程：

（1）$2x^2+4x-3=0$.　　（2）$3x^2-8x-3=0$.

分析　这两个方程的二次项系数都不是 1，但只要在方程的两边同除以二次项系数，就化归为我们已能求解的一元二次方程类型.

解　（1）方程的两边同除以 2，得 $x^2+2x-\frac{3}{2}=0$.

移项，得 $x^2+2x=\frac{3}{2}$.

方程的两边同加上 1，得 $x^2+2x+1=\frac{3}{2}+1$，即 $(x+1)^2=\frac{5}{2}$，

则 $x+1=\frac{1}{2}\sqrt{10}$，或 $x+1=-\frac{1}{2}\sqrt{10}$，

$\therefore\ x_1=-1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$，$x_2=-1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

（2）方程的两边同除以 3，得 $x^2-\frac{8}{3}x-1=0$.

移项，得 $x^2-\frac{8}{3}x=1$.

方程的两边同加上 $\left(\frac{4}{3}\right)^2$，得 $x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2$，

即 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，则 $x-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$，或 $x-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$，

$\therefore\ x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{3}$.

例7 已知 $4x^2+8(n+1)x+16n$ 是一个关于 x 的完全平方式，求常数 n 的值.

解 $4x^2+8(n+1)x+16n$

$=4[x^2+2(n+1)x]+16n$

$=4[x^2+2(n+1)x+(n+1)^2]-4(n+1)^2+16n.$

已知 $4x^2+8(n+1)x+16n$ 是一个完全平方式，则 $-4(n+1)^2+16n=0$.

化简，得 $n^2-2n+1=0$，即 $(n-1)^2=0$，

解得 $n_1=n_2=1$.

所以常数 n 的值为 1.

课内练习 KENEILIANXI

1. 用配方法解下列方程：

（1）$2x^2+6x+3=0$.　　（2）$2x^2-7x+5=0$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$\dfrac{n(n-1)}{2}-3n=1$.　　（2）$\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}=0$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 用配方法解方程 $2x^2-x-1=0$ 时，配方结果正确的是（　　）

（A）$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.　　（B）$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

（C）$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{17}{16}$.　　（D）$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+14x+2=0$.　　（2）$x^2+4x-3=0$.

3. 用配方法解下列方程：

（1）$3z^2-4z-7=0$.　　（2）$2-\dfrac{1}{3}x^2=\dfrac{5}{3}x$.

B **4.** 用配方法解下列方程：

（1）$0.1x^2+x+0.5=0$.　　（2）$\sqrt{2}x^2-2x-\sqrt{2}=0$.

5. 已知 $9x^2+18(n-1)x+18n$ 是完全平方式，求常数 n 的值.

下面我们来探讨怎样用配方法解用一般形式表示的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$. 请完成下面的填空:

方程的两边同除以______, 得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

移项, 得 $x^2+\frac{b}{a}x=$______.

方程的两边同加上______, 得 $x^2+\frac{b}{a}x+$______$=-\frac{c}{a}+$______,

即 $(x+$______$)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

若 $b^2-4ac\geqslant0$,

可得 $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 或 $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (为什么?).

$\therefore\quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 或 $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

我们也可以简单地表示为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$, 如果 $b^2-4ac\geqslant0$, 那么方程的两个根为

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

这个公式叫做一元二次方程的求根公式. 利用求根公式, 我们可以由一元二次方程的系数 a, b, c 的值, 直接求得方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做**公式** (quadratic formula) **法**.

例8 用公式法解下列一元二次方程:

(1) $2x^2-5x+3=0$. (2) $4x^2+1=-4x$. (3) $\frac{3}{4}x^2-2x-\frac{1}{2}=0$.

解 (1) 对方程 $2x^2-5x+3=0$,

$a=2, b=-5, c=3, b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=1,$

$\therefore \quad x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{5\pm1}{4},$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2}, x_2=\dfrac{5-1}{4}=1.$

（2）移项，得 $4x^2+4x+1=0,$

则 $a=4, b=4, c=1, b^2-4ac=4^2-4\times4\times1=0,$

$\therefore \quad x=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2\times4}=-\dfrac{1}{2},$

$\therefore \quad x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}.$

（3）方程的两边同乘 4，得 $3x^2-8x-2=0.$

则 $a=3, b=-8, c=-2,$

$b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(-2)=88,$

$\therefore \quad x=\dfrac{8\pm\sqrt{88}}{2\times3}=\dfrac{4\pm\sqrt{22}}{3},$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{4+\sqrt{22}}{3}, x_2=\dfrac{4-\sqrt{22}}{3}.$

例9 解方程：$x\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)=(x-2)^2.$

解 去括号，得 $\dfrac{1}{2}x^2-x=x^2-4x+4,$

化简，得 $\dfrac{1}{2}x^2-3x+4=0.$

则 $a=\dfrac{1}{2}, b=-3, c=4,$

$b^2-4ac=(-3)^2-4\times\dfrac{1}{2}\times4=1,$

$\therefore \quad x=\dfrac{3\pm1}{2\times\dfrac{1}{2}}=3\pm1,$

即 $x_1=4, x_2=2.$

想一想

你能用因式分解法解本例的方程吗？

从一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式的推导过程中不难看出，方程的根的情况由代数式 b^2-4ac 的值来决定．因此 b^2-4ac 叫做一元二次方程的**根的判别式**，它的值与一元二次方程的根的关系是：

$b^2-4ac>0\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不相等的实数根；

$b^2-4ac=0\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实数根；

$b^2-4ac<0\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 没有实数根.

课内练习 KENEILIANXI

1. 用判别式判别下列方程根的情况(不要求解方程)：

(1) $2x^2-3x+1=0$.　　(2) $3x^2-9x+\frac{27}{4}=0$.

(3) $\sqrt{2}x^2=\sqrt{3}x-1$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+3x-4=0$.　　(2) $2x^2-13x+15=0$.

(3) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x=1$.

3. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $\frac{16}{25}x^2=1$.　　(2) $5x^2=2x$.

(3) $3x^2+1=4x$.　　(4) $(x-2)^2=9x^2$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 用判别式判别下列方程根的情况(不要求解方程)：

(1) $-x^2-3x+1=0$.　　(2) $2x^2-\frac{7}{2}x+\frac{1}{4}=0$.

(3) $4x^2+5=4\sqrt{5}x$.　　(4) $\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{6}=0$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-5x=6$.　　(2) $3x^2-11x-4=0$.

(3) $3x^2+10x+3=0$.　　(4) $6t^2-13t+5=0$.

3. 用公式法解下列方程：

(1) $4x^2+9=12x$.　　(2) $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}=0$.

(3) $2x^2-\sqrt{2}x-1=0$.　　　(4) $0.1y^2-y-0.2=0$.

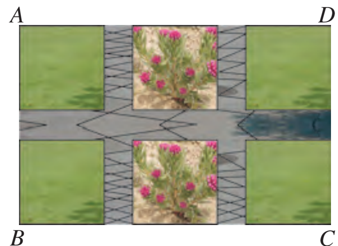
4. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $x(2x-7)=2x$.　　　(2) $x(2x-7)=-\frac{49}{8}$.

(3) $(2x-1)^2=(3x+1)^2$.　　　(4) $(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$.

B **5.** 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数满足 $ac<0$，判别方程根的情况，并说明理由.

6. 如图，某小区规划在一个长 40 m、宽 26 m 的长方形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的通道，使其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种花草. 要使每一块草坪的面积都为 144 m^2，则通道的宽应设计成多少米?

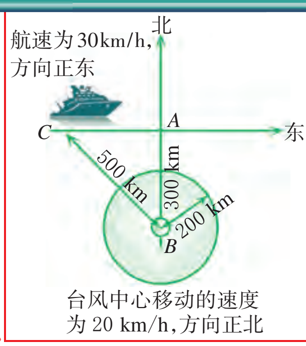


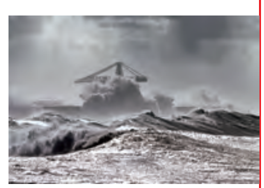
(第 6 题)

2·3 一元二次方程的应用

距台风中心 200 km 的区域（包括边界）为受台风影响区. 如图，如果轮船不改变航向，会进入台风影响区吗?

1





一元二次方程在生活和生产实际中有着广泛的应用.

例1　某花圃用花盆培育某种花苗，经过试验发现，每盆花的盈利与每盆株数构成一定的关系. 每盆植入 3 株时，平均单株盈利 3 元；以同样的栽培条件，若每盆每增加 1 株，平均单株盈利就减少 0.5 元. 要使每盆的盈利

为 10 元，则每盆应植多少株?

分析 本题涉及的主要数量有每盆的花苗株数，平均单株盈利，每盆花苗的盈利. 主要数量关系有:

平均单株盈利×株数=每盆盈利;

平均单株盈利=3-0.5×每盆增加的株数.

解 设每盆花苗增加 x 株，则每盆花苗有 $(3+x)$ 株，平均单株盈利为 $(3-0.5x)$ 元. 由题意，得

$$(x+3)(3-0.5x)=10.$$

化简、整理，得 $x^2-3x+2=0$.

解这个方程，得 $x_1=1, x_2=2$.

经检验，$x_1=1, x_2=2$ 都是方程的解，且符合题意.

答:要使每盆的盈利为 10 元，则每盆应植入 4 株或 5 株.

> **想一想**
>
> 列一元二次方程解应用题的基本步骤与列一元一次方程解应用题相同吗? 列一元二次方程解应用题时，你认为有哪些地方更需引起注意?

例2 根据图 2-2 的统计图，求从 2013 年到 2015 年，我国风电新增装机容量的平均年增长率(精确到 0.1%).

2013～2017 年我国年新增风电装机容量的统计图

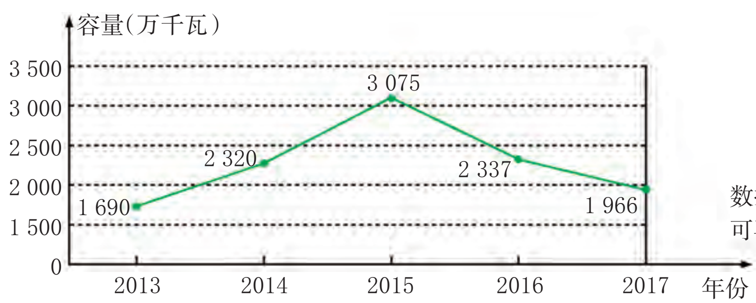


图 2-2

解 设从 2013 年到 2015 年我国风电新增装机容量的平均年增长率为 x，由题意可以列出方程 $1690(1+x)^2=3075$.

解这个方程，得

$$x_1=-1+\sqrt{\frac{3075}{1690}}\approx 34.9\%,$$

$$x_2=-1-\sqrt{\frac{3075}{1690}}\text{(不合题意，舍去)}.$$

答:从 2013 年到 2015 年，我国风电新增装机容量的平均年增长率为 34.9%.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知两个连续正奇数的积是 63，利用一元二次方程求这两个数.

2. 某校坚持对学生进行近视眼的防治，近视学生人数逐年减少. 据统计，今年的近视学生人数是前年近视学生人数的 75%，那么这两年平均每年近视学生人数降低的百分率是多少(精确到 1%)?

作业题 ZUOYETI

A **1.** 某超市销售一种饮料，平均每天可售出 100 箱，每箱利润 12 元. 为了扩大销售，增加利润，超市准备适当降价. 据测算，每箱每降价 1 元，平均每天可多售出 20 箱. 若要使每天销售饮料获利 1400 元，则每箱应降价多少元?

2. 随着科技水平的提高，某种电子产品的价格呈下降趋势，今年年底的价格是两年前的$\frac{1}{4}$. 这种电子产品的价格在这两年中平均每年下降百分之几?

B **3.** 对于向上抛的物体，如果空气阻力忽略不计，有下面的关系式：$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$(h 是物体离起点的高度，v_0 是初速度，g 是重力系数，取10 m/s^2，t是抛出后经过的时间). 杂技演员抛球表演时，以 10 m/s的初速度把球向上抛出，几秒后球离起点的高度达到 1.8 m?

4. 某人把 2 万元存入银行，定期一年(无利息税)，到期时他支取了 1 万元，然后把其余的钱仍存入银行，定期一年(利率不变)，再到期时他取得本利合计为 1. 1 232 万元. 求这种定期储蓄的年利率.

2

下面我们继续来探讨有关一元二次方程的实际应用问题.

例3 如图 2-3，有一张长 40 cm，宽 25 cm 的长方形硬纸片，裁去角上四个小正方形之后，折成如图 2-4 的无盖纸盒. 若纸盒的底面积是 450 cm^2，则纸盒的高是多少?

分析 设纸盒的高为 x(cm)，那么裁去的四个小正方形的边长也为 x(cm)，这样就可以用关于 x 的代数式表示纸盒底面长方形的长和宽. 根据纸盒的底面积是 450 cm²，就可以列出方程.

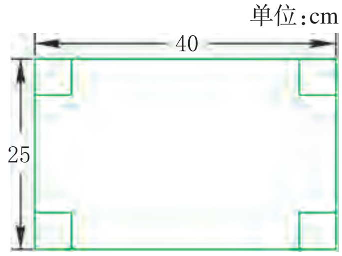


图 2-3

解 设纸盒的高为 x(cm)，则纸盒底面长方形的长和宽分别为 $(40-2x)$cm，$(25-2x)$cm.

由题意，得 $(40-2x)(25-2x)=450$.

化简、整理，得 $2x^2-65x+275=0$.

解这个方程，得 $x_1=5$，$x_2=27.5$（不合题意，舍去）.

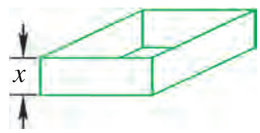


图 2-4

答：纸盒的高为 5 cm.

合作学习

一轮船(C)以 30 km/h 的速度由西向东航行(图 2-5)，在途中接到台风警报，台风中心(B)正以 20 km/h 的速度由南向北移动. 已知距台风中心 200 km 的区域（包括边界）都属于受台风影响区. 当轮船接到台风警报时，测得 $BC=500$ km，$BA=300$ km.

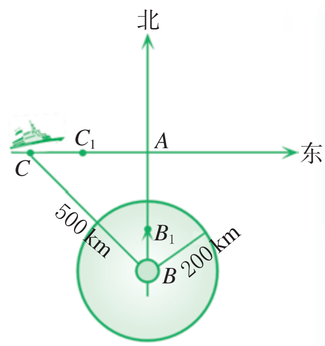


图 2-5

(1) 如果轮船不改变航向，轮船会不会进入台风影响区？你采用什么方法来判断？

(2) 如果你认为轮船会进入台风影响区，那么从接到警报开始，经多少时间就进入台风影响区？

建议：

①假设经 t 小时后，轮船和台风中心分别在 C_1，B_1 的位置；

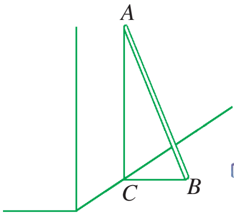
②运用数形结合的方法寻找相等关系，并列出方程；

③通过相互交流，检查列方程、计算等过程是否正确；

④讨论：如果把航速改为 10 km/h，结果将怎样？

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知一长方形公园的面积为 4 800 m^2，围绕这个公园的栅栏长为 280 m. 求这个公园的长与宽.

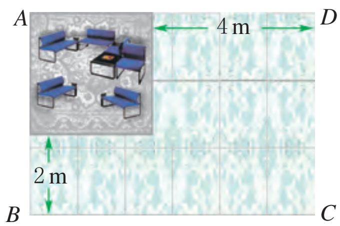


（第 2 题）

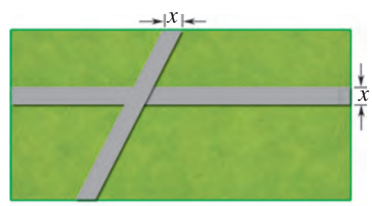
2. 如图，斜靠在墙上的一根竹竿，$AB=6.5$ m，$BC=2.5$ m. 若 A 端沿垂直于地面的方向 AC 下移 1 m，则 B 端将沿 CB 方向移动多少米（精确到 0.01 m）?

作业题 ZUOYETI

A 1. 如图，在一个长方形客厅 $ABCD$ 的一角铺上一块正方形地毯作为会客区. 已知长方形客厅的面积为 35 m^2，问应选边长为多少米的地毯?



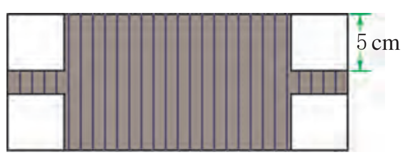
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一块长方形绿地长 100 m，宽 50 m. 在绿地中开辟两条道路后，绿地面积缩小到原来的 88.32%，求 x.

3. 取一张长与宽之比为 5∶2 的长方形纸板，剪去四个边长为 5 cm 的小正方形（如图），并用它做一个无盖的长方体形状的包装盒. 要使包装盒的容积为 200 cm^3（纸板的厚度略去不计），这张长方形纸板的长与宽分别为多少厘米?

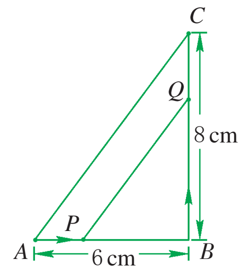


（第 3 题）

B 4. 某水库计划修建一条横截面为梯形的输水渠道. 已知横截面面积为 4.05 m^2，上口宽比渠底宽大 1.4 m，渠深比渠底宽小 0.5 m. 求渠道的上口宽和渠深.


（第 4 题）

5. 如图，在△ABC 中，$\angle B=90°$. 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，与此同时，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动. 如果 P，Q 分别从 A，B 同时出发，经过几秒，△PBQ 的面积等于 8 cm²？



（第 5 题）

6. 从一块腰长为 20 cm 的等腰直角三角形白铁皮零料上裁出一块长方形白铁皮，要求长方形的四个顶点都在三角形的边上，裁出的长方形白铁皮的面积为 75 cm²，应怎样裁？

选学

2·4 一元二次方程根与系数的关系

如一元二次方程这样的方程根与系数的关系是法国数学家韦达（F.Vieta，1540～1603 年）发现的，人们称之为韦达定理.

先解下列方程，然后计算这些方程的两根之和与两根之积：

（1）$x^2-12x+11=0$.　　（2）$2x^2-13x=0$.　　（3）$4x^2+20x+25=0$.

你发现了什么？

一般地，一元二次方程的根与系数有如下关系：

如果 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$；$x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

下面我们来证明这一结论.

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(b^2-4ac\geqslant 0)$ 的两个根为 x_1，x_2，则

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

例1 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $5x^2-7x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^2+x_2^2$ 和 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

解 由一元二次方程的根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=\frac{7}{5},\ x_1\cdot x_2=-\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\left(\frac{7}{5}\right)^2-2\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{79}{25};$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{7}{5}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3}.$$

在解决上述这类问题时，利用一元二次方程的根与系数的关系，我们不必先求出方程的根，给计算带来方便.

例2 已知一个一元二次方程的二次项系数是 3，它的两个根分别是 $\frac{1}{3}$，1. 写出这个方程.

解 设这个方程为 $3x^2+bx+c=0$，由一元二次方程根与系数的关系，得

$-\frac{b}{3}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$，解得 $b=-4$；$\frac{c}{3}=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$，解得 $c=1$.

所以这个一元二次方程是 $3x^2-4x+1=0$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 设 x_1, x_2分别是一元二次方程的根，填空：

（1）$x^2+3x+1=0$.

$x_1+x_2=$________，$x_1 \cdot x_2=$________.

（2）$2x^2-3x-5=0$.

$x_1+x_2=$________，$x_1 \cdot x_2=$________.

（3）$x^2+px+q=0$.

$x_1+x_2=$________，$x_1 \cdot x_2=$________.

2. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $3x^2+2x-1=0$ 的两个根，求 $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 的值.

作业题 ZUOYETI

A

1. 设 x_1, x_2分别是一元二次方程的根，填空：

（1）$7x^2+2x-1=0$.

$x_1+x_2=$________，$x_1 \cdot x_2=$________.

（2）$4x^2=11x-2$.

$x_1+x_2=$________，$x_1 \cdot x_2=$________.

2. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $2x^2+6x-3=0$ 的两个根. 求：

（1）$(x_1-x_2)^2$.　　　（2）$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

3. 已知长方形相邻两边长是一元二次方程 $x^2-12x+9=0$ 的两个根，求这个长方形的周长和面积.

B

4. 已知：x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a>0, b^2-4ac \geqslant 0$）的两个根.

求证：$|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$.

5. 已知一个一元二次方程的二次项系数是 2，常数项是 -14，它的一个根是 -7. 写出这个方程.

C

6. 已知：x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

求证：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

一元二次方程的发展小记

人类对一元二次方程的研究经历了漫长的岁月. 早在公元前 2000 年左右,为了交换钱币和商品,分配粮食,划分土地,以及挖运河和修堤坝时计算的需要,居住在底格里斯河和幼发拉底河流域(今伊拉克一带)的巴比伦人已经能够解一些特殊的一元二次方程. 古希腊数学家丢番图(Diophantus,公元 250 年前后)在《算术》中就已提出一元二次方程的问题,不过当时古希腊人还没有寻求到它的求根公式,只能用图解等方法求解.

在欧几里得的《原本》中,形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是:

如图 2-6,以 $\frac{a}{2}$ 和 b 为两直角边作 Rt△ABC,再在斜边上截取 $BD=\frac{a}{2}$,则 AD 的长就是所求方程的解. 显然,用这个方法只能求出其中的一个正根.

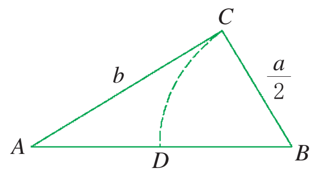


图 2-6

阿拉伯人在一元二次方程的发展历程中作出了突出贡献. 被称为"代数之父"的花拉子米(al-Khwarizmi,约 783～850 年)独立发展了一套公式用以求方程的正数解,首先提出了方程的一般性解法.

我国是世界上最早研究一元二次方程的国家之一. 在《九章算术》"勾股"章里就有涉及求方程 $x^2+34x-71\ 000=0$ 的正根的问题. 三国时期的赵爽(约 182～250 年)对二次方程做出的贡献十分突出, 他巧妙地应用出入相补原理,从几何图形的直观出发,在《勾股圆方图注》中列出了关于直角三角形三边关系和由此引申的一系列有关二次方程的命题和结果. 729 年,唐朝天文学家张遂(又名一行)在他的《大衍历》中,用文字叙述给出了一元二次方程 $x^2+px+q=0$ ($p>0,q<0$)的求根公式:$x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2-4q}-p)$. 宋朝著名数学家杨辉在《田亩比类乘除捷法》(1275 年)一书中,详细记载了一元二次方程的四种解法,里面包含配方法.

你能验证图 2-6 中 AD 的长就是方程 $x^2+ax=b^2$ 的一个根吗? 张遂的求根公式完整吗? 请用配方法求出 $x^2+px+q=0$ ($p^2-4q\geqslant 0$)的求根公式,并与之作一比较.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 方程的两边都是________，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是______次，这样的方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的一般形式是____________，其中 a,b,c 是已知数，且 $a\neq$______.

3. 当______________ ≥ 0 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式是____________.

4. _____________叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式.

$b^2-4ac>0\Leftrightarrow$____________________；

b^2-4ac______$0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$有两个相同的实数根；

b^2-4ac______$0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$没有实数根.

选学 5. 如果 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，那么

$x_1+x_2=$________，$x_1\cdot x_2=$________.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
用因式分解法解一元二次方程			
用开平方法解一元二次方程			
用配方法解一元二次方程			
用公式法解一元二次方程			
用判别式判别一元二次方程的根的情况			
列一元二次方程解应用题			
选学 利用一元二次方程的根与系数的关系解决一些代数式求值等简单问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A
2.1 节

● 理解一元二次方程的概念.

● 了解一元二次方程的一般形式，会辨别一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项.

1. 下列方程中，属于一元二次方程的有________________（填题号）.

①$2x^2-3y-5=0$；　②$\frac{2}{3}x^2-5=0$；　③$x^2=2x$；

④$\frac{1}{x}+4=x^2$；　⑤$y^2-\sqrt{2}y-3=0$.

2. 方程$(x-1)^2+5=(3x+2)(2x-3)$化为一般形式是________，其中二次项是______，二次项系数是______；一次项是______，一次项系数是_____；常数项是_____.

3. 已知一元二次方程 $2x^2-mx-m=0$ 的一个根是$-\frac{1}{2}$. 求 m 的值和方程的另一个根.

目标B
2.2 节

● 会用因式分解法、开平方法、配方法、公式法解一元二次方程.

4. 方程$(x+2)^2-9=0$ 的根是__________.

5. 方程 $3x^2=16x$ 的根是______________.

6. 方程$\frac{2}{7}x^2=14$ 的根是______________.

7. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x+3=0$.　　（2）$2x^2+7x-4=0$.

8. 选择适当的方法解下列方程：

（1）$2(x-2)^2=18$.　　（2）$2x(x-3)+x=3$.

（3）$x^2-2x-15=0$.　　（4）$4(x-1)^2=9(x-5)^2$.

（5）$x^2-2\sqrt{7}x+7=0$.　　（6）$2x^2-x-6=0$.

（7）$x^2-7x+2=0$.　　（8）$\frac{3}{2}x^2-x-2=0$.

9. 解方程：$(x-3)^2=(2x-1)(x+3)$.

目标C 2.2节 2.4节

●能用一元二次方程的根的判别式判别方程的根的情况.

选学 ●了解一元二次方程的根与系数的关系.

10. 利用一元二次方程的根的判别式判别下列方程根的情况：

（1）$x^2+9x+20=0$.

（2）$5x^2-4x+1=0$.

（3）$4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$.

选学 **11.** 设 x_1，x_2是方程 $2x^2-3x-5=0$ 的两个根. 利用根与系数的关系，求 $\left(1+\dfrac{1}{x_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x_2}\right)$的值.

选学 **12.** 已知 x_1，x_2 是方程 $3x^2-7\sqrt{3}x+1=0$ 的两个根，求 $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ 的值.

选学 **13.** 写出二次项系数为 5，以 $x_1=-3$，$x_2=\dfrac{1}{5}$为根的一元二次方程.

选学 **14.** 求一个一元二次方程，使它的两根分别为 $2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$.

选学 **15.** 已知方程 $3x^2+kx-2=0$的一个根为 2，求它的另一根及 k 的值.

目标D 2.3节

●会用一元二次方程解决简单的实际问题.

●体会方程在现实生活中的具体应用.

16. 有一张长方形桌子的桌面长 100 cm，宽 60 cm. 有一块长方形台布的面积是桌面面积的 2 倍，并且铺在桌面上时，各边垂下的长度相等. 求台布的长和宽（精确到 1 cm）.

17. 某种音乐播放器 MP3原来每只售价 400 元，经过连续两次降价后，现在每只售价为 256 元. 求平均每次降价的百分率.

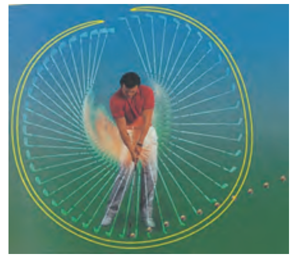
18. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元. 为了扩大销售，增加盈利，减少库存，商场决定采取适当的降价措施. 经调查发现，每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出2件. 若商场每天要盈利 1 200 元，请你帮助商场算一算，每件衬衫应降价多少元?

19. 把一个足球垂直地面向上踢，t（秒）后该足球的高度 h（米）适用公式 $h=20t-5t^2$.

（1）经多少秒后足球回到地面？

（2）经多少秒时球的高度为 15 米？

20. 一高尔夫球手某次击出一个高尔夫球的高度 h（m）和经过的水平距离 d（m）可用公式 $h=d-0.01d^2$ 来估计.



（1）当球的水平距离达到 50 m 时，球上升的高度是多少？

（2）当球的高度第一次达到 16 m 时，球的水平距离是多少？

21. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 据统计，当每辆车的月租金为 3 000 元时，可全部租出. 每辆车的月租金每增加 50 元，未租出的车将增加 1 辆. 租出的车每辆每月的维护费为 150 元，未租出的车每辆每月只需维护费 50 元.

（1）当每辆车的月租金定为 3 600 元时，能租出多少辆？

（2）当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益（租金收入扣除维护费）可达到 306 600 元？

22. 一次围棋比赛采用单循环赛制（即每位选手与其他选手各比赛 1 局），参赛者少于 10 人. 关于比赛的总局数有以下两种不同的说法：一种是说比了 28 局；另一种说法是比了 24 局. 如果比赛中没有人中途退出，你认为哪一种说法正确？如果有一人中途退出比赛呢？请说明理由.

第3章

数据分析初步

目录 CONTENTS<<

在许多大型的文艺比赛中，统计评委的评分时，为什么要去掉一个最高分和一个最低分？

三峡工程是世界最大的水利枢纽工程．如果我们获得大坝下闸蓄水前后8个地点的水位海拔，我们可以用什么统计量来说明大坝下闸蓄水后长江出现“高峡出平湖”的景象？

本章将学习平均数、中位数、众数、方差和标准差等内容．通过本章的学习，我们将对数据的作用有更多的认识，能够对统计的结果作出判断和预测．

3·1 平均数

水果在收获前，果农常会先估计果园里果树的产量. 你认为可以怎样估计呢?

合作学习 HEZUOXUEXI

某果农种植的 100 棵苹果树即将收获. 果品公司在付给果农定金前，需要估计这些苹果树的总产量.

（1）果农随机摘下 20 个苹果，称得总质量为 4 千克. 这 20 个苹果的平均质量是多少千克?

（2）果农从 100 棵苹果树中随机选出 10 棵，数出每棵树上的苹果个数，得到以下数据(单位:个):

154，150，155，155，159，150，152，155，153，157.

你能估计出平均每棵树的苹果个数吗?

（3）根据上述两个问题，你能估计出这 100 棵苹果树的总产量吗?

一般地，有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，我们把 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的**算术平均数**(arithmetic mean)，简称**平均数**(mean)，记做 $\bar{x}$(读做"x 拔").

在生活实际中，常用样本的平均数来估计总体的平均数. 例如，在上面的例子中，用 20 个苹果的平均质量(0.2 千克)来估计 100 棵苹果树上苹果的平均质量，用 10 棵苹果树的平均苹果个数(154 个)来估计 100 棵苹果树的平均苹果个数.

做一做 ZUOYIZUO

某中学足球队 20 名队员的身高如下(单位:cm):

170，167，171，168，160，172，168，162，172，169，
164，174，169，165，175，170，165，167，170，172.

计算这 20 名队员的平均身高.

例1 统计一名射击运动员在某次训练中 15 次射击的中靶环数，获得如下数据：

6，7，8，7，7，8，10，9，8，8，9，9，8，10，9.

求这次训练中该运动员射击的平均成绩.

解 成绩为 6 环的数据有 1 个，7 环的数据有 3 个，8 环的数据有 5个，9 环的数据有 4 个，10 环的数据有 2 个，所以该运动员各次射击的平均成绩为

$$\bar{x}=\frac{6\times1+7\times3+8\times5+9\times4+10\times2}{1+3+5+4+2}=\frac{123}{15}=8.2(\text{环}).$$

答：这次训练中该运动员射击的平均成绩为 8.2 环.

上例中，$\bar{x}=\dfrac{6\times1+7\times3+8\times5+9\times4+10\times2}{1+3+5+4+2}$这种形式的平均数叫做**加权平均数**(weighted mean)，其中 1，3，5，4，2 表示各相同数据的个数，称为**权**(weight). "权"越大，对平均数的影响就越大. 加权平均数的分母恰好为各权的和.

例2 某校在一次广播操比赛中，801 班，802 班，803 班的各项得分如表 3-1.

表 3-1

	服装统一	动作整齐	动作准确
801 班	80	84	87
802 班	98	78	80
803 班	90	82	83

(1) 如果根据三项得分的平均数从高到低确定名次，那么三个班的排名顺序怎样？

(2) 如果学校认为这三个项目的重要程度有所不同，而给予"服装统一""动作整齐""动作准确" 三个项目在总分中所占的比例分别为 15%，35%，50%，那么三个班的排名顺序又怎样？

解 (1) 这三个班三项得分的平均数分别为：

$$\bar{x}_1=\frac{1}{3}(80+84+87)\approx83.7(\text{分});$$

$\bar{x}_2=\frac{1}{3}(98+78+80)\approx 85.3$(分);

$\bar{x}_3=\frac{1}{3}(90+82+83)=85$(分).

答:这三个班的排名顺序为 802 班,803 班,801 班.

(2) 为了反映“服装统一”“动作整齐”“动作准确”各项目不同的重要程度,通常我们按以下方式计算这三个班得分的平均数.

$\overline{x_1'}=80\times 15\%+84\times 35\%+87\times 50\%=84.9$(分);

$\overline{x_2'}=98\times 15\%+78\times 35\%+80\times 50\%=82$(分);

$\overline{x_3'}=90\times 15\%+82\times 35\%+83\times 50\%=83.7$(分).

答:这三个班的排名顺序为 801 班,803 班,802 班.

课内练习 KENEILIANXI

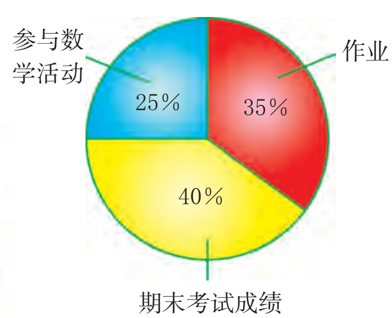
1. 某公司 6 名员工在一次义务募捐中的捐款额为(单位:元):

50, 30, 50, 60, 50, 30.

这 6 名员工的平均捐款额是多少?你能否用两种不同的方法计算结果?

2. 某校学生的数学期末总评成绩由参与数学活动、作业、期末考试成绩三部分组成,各部分所占比例如图所示. 小明参与数学活动、作业和期末考试得分依次为 84 分、92 分、88 分,则小明的数学期末总评成绩是多少?

数学期末总评成绩各部分所占比例的统计图



(第 2 题)

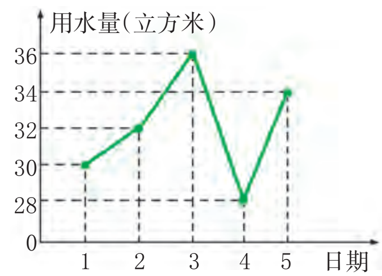
作业题 ZUOYETI

A **1.** 为了解八年级三班学生的血色素平均水平，任意抽取了 8 名学生的血样进行血色素检测，测得结果如下(单位:g/L)：
138，125，106，110，147，124，136，122.
这 8 名学生血色素的平均数为________g/L.

2. 某校 5 个小组参加植树活动，平均每组植树 10 株. 已知第一、二、三、五组分别植树 9 株、12 株、9 株、8 株，那么第四小组植树(　　)
(A) 12 株.　(B) 11 株.　(C) 10 株.　(D) 9 株.

3. 某住宅小区 6 月 1 日～6 月 5 日每天用水量变化情况如图所示，那么这 5 天平均每天的用水量是________立方米.

某住宅小区 6 月 1 日～6 月 5 日用水量统计图



(第 3 题)

4. 一次中学生田径运动会上，男子跳高项目的成绩统计如下：

成绩(m)	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70
人数	2	8	6	4	1

这次男子跳高项目的平均成绩是多少(精确到 0.01m)?

B **5.** 某地共有 62 家供应快餐的饭店. 环保部门为了了解这些饭店一天共用了多少个一次性快餐饭盒，随机抽取其中 8 家饭店，调查一天使用一次性快餐饭盒的个数，获得以下数据(单位:个)：
125，115，140，270，110，120，100，140.
(1) 这 8 家饭店平均每家一天使用一次性快餐饭盒多少个?
(2) 估计这 62 家饭店一天共使用一次性快餐饭盒的个数.

6. 某商场用加权平均数来确定什锦糖的单价. 由单价为每千克 15 元的甲种糖果 30 千克，单价为每千克 12 元的乙种糖果 50 千克，单价为每千克 10 元的丙种糖果 20 千克混合成的什锦糖果的单价应定为每千克多少元?

7. 学校举办歌唱比赛，对音色、音准、舞台效果、情感四个方面评分的权重分别设为 35%，30%，20%，15%. 801 班，802 班，803 班各项得分如下表，计算三个班的平均成绩. 如果根据平均成绩从高到低确定名次，写出三个班的排名顺序.

	音色	音准	舞台效果	情感
801 班	95	91	85	86
802 班	90	92	86	92
803 班	94	92	83	88

3·2 中位数和众数

老师带着一群幼儿园小朋友在公园里玩游戏，他们的年龄分别是(岁)：39，5，6，6，5，6，5，6，6，6. 能用平均数表示这一群体的年龄特征吗？

我们除了用平均数来刻画一组数据外，还常用众数和中位数. 一组数据中出现次数最多的那个数据叫做这组数据的**众数**(mode). 将一组数据按从小到大(或从大到小)的顺序排列，位于最中间的一个数据(当数据个数为奇数时)或最中间两个数据的平均数(当数据个数为偶数时)叫做这组数据的**中位数**(median). 例如，节前语的一组数据，其众数是 6 岁，中位数是 $\frac{6+6}{2}=6$(岁).

做一做 ZUOYIZUO

1. 求下面数据的平均数、中位数和众数.

8，10，10，13，13，13，14，15，17，18.

2. (1) 在一组数据 1，0，4，5，8 中加入一个数 x，使加入 x 后这组数据的中位数为 3，则 $x=$__________.

（2）某学校八年级有四个绿化小组，在植树节这天种下柏树的棵数如下：10，10，x，8. 若这组数据的众数和平均数相等，那么它们的中位数是 ______ 棵.

例 某工程咨询公司技术部门员工一月份的工资报表如下（单位：元）.

表 3-2

技术部门员工	总工程师	工程师	技术员 A	技术员 B	技术员 C	技术员 D	技术员 E	技术员 F	技术员 G	见习生 H
工资	10 000	6 000	4 000	4 000	3 000	2 800	2 800	2 800	2 400	800

（1）求该公司技术部门员工一月份工资的平均数、中位数和众数.

（2）作为一般技术员，若考虑应聘该公司技术部门工作，该如何看待工资情况？

解 （1）$\bar{x}=\frac{1}{10}(10\,000+6\,000+4\,000+4\,000+3\,000+2\,800\times 3+2\,400+800)=3\,860$（元）.

将员工的工资数按从大到小的顺序排列后，中间两个数是 3 000，2 800，所以中位数是$\frac{1}{2}(3\,000+2\,800)$，即工资的中位数是 2 900 元.

员工的工资数中，出现次数最多的是 2 800 元，所以众数是 2 800 元.

（2）虽然该技术部门员工一月份的月平均工资是 3 860 元，但它不能代表普通员工该月收入的一般水平. 如果除去总工程师、见习生的工资，那么其余 8 人的平均工资为 3 475 元，比较接近这组数据的中位数和众数. 因此，如果你是一名普通技术人员，你可根据该部门员工工资的中位数和众数来考虑是否应聘.

从这个例子中我们看到，在一组存在极端值（如 10 000，800）的数据中，用中位数或众数作为表示这组数据特征的统计量有时会更贴近实际.

平均数、中位数和众数都是数据的代表，它们从不同侧面反映了数据的集中程度，但也存在各自的局限性. 如平均数容易受极端值的影响；众数、中位数不能充分利用全部数据信息.

想一想

在歌手大奖赛中，去掉一个最高分和一个最低分后，将剩下分数的平均数作为这位歌手的最后得分，为什么？

课内练习 KENEIJIANXI

1. 某风景区在“十一”黄金周期间,每天接待的旅游人数统计如下表.

日期	10月1日	10月2日	10月3日	10月4日	10月5日	10月6日	10月7日
人数（万人）	1.2	2	2.5	2	1.2	2	0.6

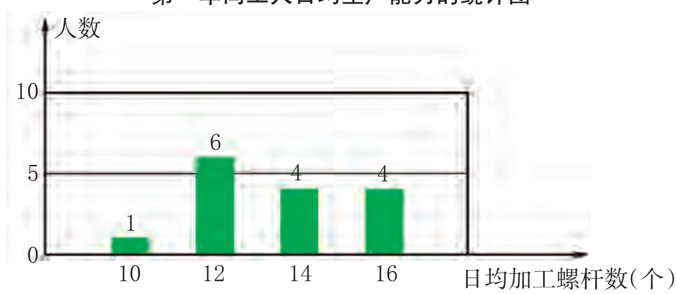
表中表示人数的一组数据中,众数和中位数分别是(　　)

(A) 1.2 万,2 万.　　(B) 2 万,2.5 万.

(C) 2 万,2 万.　　(D) 1.2 万,2.5 万.

2. 某工厂第一车间有工人 15 人,每人日均加工螺杆数统计如图. 该车间工人日均加工螺杆数的中位数和众数分别是多少? 若要从平均数、中位数、众数中选一个作为该车间工人日生产定额,超额部分给予奖励. 为鼓励大多数工人,你认为选哪一个统计量比较合适?

第一车间工人日均生产能力的统计图



(第 2 题)

作业题 ZUOYETI

A **1.** 数据 2,4,4,5,3,9,4,5,1,8 的众数是________, 中位数是________, 平均数是__________.

2. (1) 在演唱比赛中,评委给一名歌手的打分如下(单位:分): 9.73, 9.66, 9.83, 9.76, 9.86, 9.79, 9.85, 9.68, 9.86, 9.74. 去掉一个最高分和一个最低分,这名歌手的最后得分(平均数)是_________.

(2) 某班七个兴趣小组人数分别为 3,3,4,x,5,5,6. 已知这组数据的平均数是 4,则这组数据的中位数是_________.

3. 据调查,某班 30 名学生所穿鞋子鞋号统计如下:

鞋号	20	21	22	23	24
频数	1	7	6	15	1

求该班学生所穿鞋子鞋号的平均数(精确到 0.01)、中位数和众数.

B **4.** 2018 年全国居民消费价格指数统计图如图所示. 根据统计图,求 2018 年 1～12 月每月居民消费价格指数的中位数和众数.

(第 4 题)

5. 某校元旦文艺演出中,10 位评委给某个节目打分如下(单位:分):
7.20, 7.25, 7.00, 7.10, 9.50, 7.30, 7.20, 7.20, 6.10, 7.25.

(1) 该节目得分的平均数,中位数和众数.

(2) 在平均数、中位数、众数这三个统计量中,你认为哪一个统计量比较恰当地反映了该节目的水平? 请你设计一个能较好反映节目水平的统计方案.

3·3 方差和标准差

如果要选拔射击手参加射击比赛，应该挑选测试成绩中曾达到最好成绩的选手，还是成绩最稳定的选手？

合作学习 HEZUOXUEXI

甲、乙两人的测试成绩统计如下：

表 3-3

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
甲命中环数	7	8	8	8	9
乙命中环数	10	6	10	6	8

（1）分别算出甲、乙两人的平均成绩.

（2）根据这两人的成绩，在图 3-1 中画出折线统计图.

（3）现要从甲、乙两人中挑选一人参加比赛，你认为挑选哪一位比较适宜？为什么？

甲、乙两人射击成绩的折线统计图

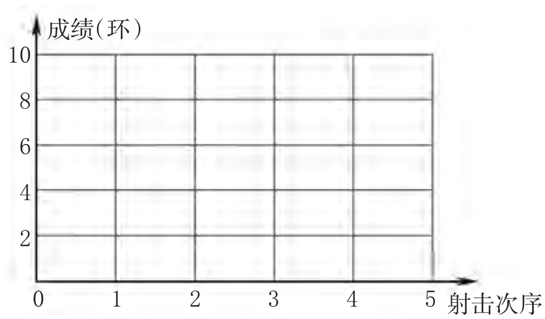


图 3-1

甲、乙两人的平均成绩相同，但是甲每次的射击成绩都接近平均数 8，而乙每次的射击成绩偏离平均数较大. 在评价数据的稳定性时，我们通常将各数据偏离平均数的波动程度作为指标.

现在我们来计算甲、乙两人每次射击成绩与平均成绩的偏差的平方和.

甲：$(7-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2$
$=2$；
乙：$(10-8)^2+(6-8)^2+(10-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2$
$=16$.
你发现了什么？

想一想

如果直接计算甲、乙每次射击成绩与平均数的偏差的和，结果如何？

容易看出，上述各偏差的平方和的大小还与射击的次数有关. 所以我们可进一步用各偏差平方的平均数来衡量数据的稳定性.

一般地，各数据与平均数的差的平方的平均数

$$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

叫做这组数据的**方差**(variance).

方差越大，说明数据的波动越大，越不稳定.

例 为了考察甲、乙两块地小麦的长势，分别从中抽出 10 株苗，测得苗高如下(单位：cm)：

甲：12，13，14，15，10，16，13，11，15，11；
乙：11，16，17，14，13，19，6，8，10，16.

哪块地小麦长得比较整齐？

解 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(12+13+14+15+10+16+13+11+15+11)=13(\text{cm})$；

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(11+16+17+14+13+19+6+8+10+16)=13(\text{cm})$.

$$S^2_{甲}=\frac{1}{10}[(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2+(15-13)^2+(10-13)^2+(16-13)^2+(13-13)^2+(11-13)^2+(15-13)^2+(11-13)^2]=3.6(\text{cm}^2)；$$

$$S^2_{乙}=\frac{1}{10}[(11-13)^2+(16-13)^2+(17-13)^2+(14-13)^2+(13-13)^2+(19-13)^2+(6-13)^2+(8-13)^2+(10-13)^2+(16-13)^2]=15.8(\text{cm}^2).$$

因为$S^2_{甲}<S^2_{乙}$，所以甲这块地的小麦长得比较整齐.

一般地,一组数据的方差的算术平方根

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$$

称为这组数据的标准差(standard deviation).

上例中,两个标准差分别是:

$S_{甲}=\sqrt{3.6}\approx1.90(\text{cm})$;$S_{乙}=\sqrt{15.8}\approx3.97(\text{cm})$.

课内练习 KENEILIANXI

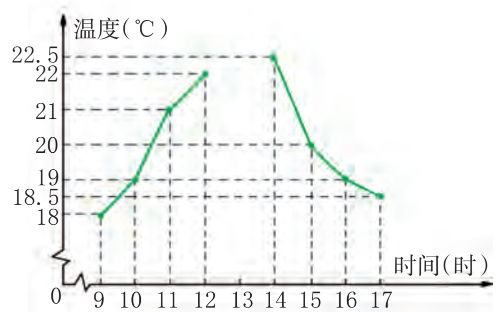
1. 数据$-2,-1,0,3,5$的方差是__________,标准差是__________(精确到0.01).

2. 如图是小强同学根据杭州市某天上午和下午各四个整点时的气温绘制成的折线统计图. 根据该统计图回答:该天上午和下午的气温哪个更稳定?

答:_______________;

理由是_______________.

杭州市某天气温统计图



(第2题)

探究活动 TANJIUHUODONG

已知数据99,97,96,98,95,把这组数据的每个数都减去97,得到一组新数据. 将这两组数据画成折线图,并用一条平行于横轴的直线来表示这两组数据的平均数. 观察你画的两个图形,你发现了哪些有趣的结论?

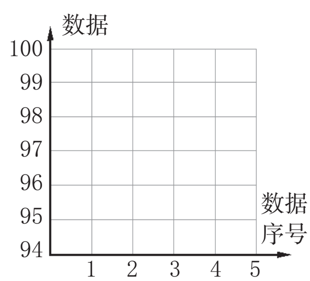


图3-2

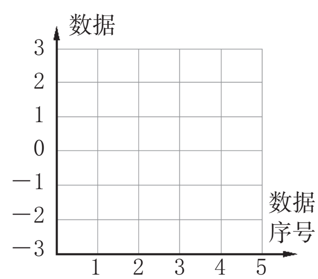


图3-3

作业题

A **1.** (1) 已知一组数据$-1,2,0,-3,-2,3,0,1$. 计算这组数据的方差和标准差(精确到 0.1).

(2) 已知一组数据 $1,3,2,5,x$ 的平均数是 3,求这组数据的方差和标准差.

2. 小明和小聪最近 5 次数学测验的成绩如下:

小聪:76, 84, 80, 87, 73;

小明:78, 82, 79, 80, 81.

哪位同学的数学成绩比较稳定?

3. 某果园实验基地种植了甲、乙两个品种的葡萄树各 100 棵,到了收获季节,为了分析收成情况,工作人员随机从甲、乙两品种的葡萄树中各采摘了四棵,每棵的产量如下统计表. 试通过计算说明,哪个品种的葡萄产量较稳定.

甲、乙两品种葡萄产量统计表

	①	②	③	④
甲品种产量(千克)	25	18	20	17
乙品种产量(千克)	18	20	24	18

B **4.** 甲、乙两人加工同一种直径为 10.00 mm 的零件,现从他们加工好的零件中各抽取 6 个,量得它们的直径如下(单位:mm):

甲:9.98, 10.02, 10.00, 10.00, 10.01, 9.99;

乙:10.00, 10.03, 10.00, 9.97, 10.10, 9.90.

根据上述数据,你认为如何评价两人的加工质量?

5. 已知一组数据 x_1,x_2,x_3,把每个数据都减去 2,得到一组新数据 $x_1'=x_1-2,x_2'=x_2-2,x_3'=x_3-2$.

(1) 这两组数据的平均数有什么关系?

(2) 这两组数据的方差相等吗?为什么?由此你能得到怎样的一般规律?

数据分析应用举例

平均数、中位数、众数描述一组数据的集中程度，方差、标准差描述一组数据的离散程度. 在实际生活中，我们不仅关注数据的集中程度，也关注数据的离散程度，在数据分析时要合理选择和恰当运用.

例1 车间有 15 名工人，某一天他们生产的机器零件个数统计如下：

表3-4

生产零件的个数(个)	6	7	8	9	10	11	13	15	16
工人人数(人)	1	2	4	1	2	1	1	2	1

为了提高工作效率和工人的积极性，管理者准备实行“每天定额生产，超产有奖”的措施. 如果你是管理者，你将如何确定这个定额？

分析 管理者所确定的定额应该是大多数工人经过努力能够完成的生产零件个数. 定额太低，不利于提高效率；定额太高，不利于提高积极性，因此我们可以从平均数、中位数、众数这几个统计量中考虑如何确定定额.

解 15 名工人这一天生产的机器零件的平均个数是

$$\bar{x}=\frac{6\times1+7\times2+8\times4+9\times1+10\times2+11\times1+13\times1+15\times2+16\times1}{15}$$

$$\approx10.1(\text{个}).$$

如果以平均个数“10”作为定额，那么将有 8 名工人可能完不成任务，因此不可取.

工人生产零件个数的中位数是 9 个. 如果以中位数“9”作为定额，那么可能有 7 名工人完不成任务.

工人生产零件个数的众数是 8 个. 如果以众数“8”作为定额，那么大多数工人都能完成或超额完成任务，有利于调动工人的积极性. 因此可以把定额确定为 8 个.

> **注 意**
>
> 在实际情境中，车间管理者在决策时可能还需要考虑其他一些因素，如技术的更新、工人素质的提高等.

例2 某公司计划从两家皮具生产能力相近的制造厂选择一家来承担外销业务. 这两家厂生产的皮具款式和材料都符合要求，因此只需要检测皮具质量的克数是否稳定. 现从两家提供的样品中各抽查 10 件，测得它们的质量如下(单位:g)：

甲厂：500，499，500，500，503，498，497，502，500，501；

乙厂：499，500，498，501，500，501，500，499，500，502.

你认为哪一家生产的皮具的质量比较稳定？

解 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(500+499+500+500+503+498+497+502+500+501)$

$=500(\mathrm{g})$；

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(499+500+498+501+500+501+500+499+500+502)$

$=500(\mathrm{g})$.

可见两厂家生产的皮具的平均质量都是 500 g.

$$S_{甲}^2=\frac{1}{10}[(500-500)^2+(499-500)^2+(500-500)^2+(500-500)^2+(503-500)^2+(498-500)^2+(497-500)^2+(502-500)^2+(500-500)^2+(501-500)^2]=2.8(\mathrm{g}^2)；$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{10}[(499-500)^2+(500-500)^2+(498-500)^2+(501-500)^2+(500-500)^2+(501-500)^2+(500-500)^2+(499-500)^2+(500-500)^2+(502-500)^2]=1.2(\mathrm{g}^2).$$

因为 $S_{甲}^2>S_{乙}^2$，所以乙厂制造的皮具的质量比较稳定.

ICT

1. 开机，进入统计功能：开机 菜单 2.
2. 选择单变量统计计算功能：1.
3. 依次输入甲厂的数据，如 500，499，500，500，503，498，497，502，500，501，输入完成后按AC键.
4. 求方差：OPTN 2，得 $\sigma^2x=2.8$.
5. 类似的，依次输入乙厂的数据，得乙厂数据的方差为 $\sigma^2x=1.2$.
6. 根据计算器屏幕提供的选项，还可以计算数据的平均数$\bar{x}$等特征数.

试一试：

1. 用某型号的全自动磨床加工一批零件内孔，零件内径合格尺寸是(单位：毫米)：$10.000\leqslant \Phi D\leqslant 10.010$，质检员每隔一定时间抽取 20 件进行检测. 除要求每件都符合合格尺寸外，还要求样本方差 $S^2\leqslant 4.5\times 10^{-6}$（单位：平方毫米）. 如果 $S^2>4.5\times 10^{-6}$，就要停机调试. 现测得 20 件零件的内径数据如下：

内径(毫米)	10.001	10.002	10.003	10.004	10.005	10.006	10.007	10.008	10.010
件数	1	3	2	2	3	4	2	2	1

请你分析是否需要停机调试.

2. 某工艺品厂草编车间共有 16 名工人,调查每个工人的日均生产能力,获得数据如下表:

日均生产能力(件)	10	11	12	13	14	15
人数	1	3	5	4	2	1

(1) 求这 16 名工人日均生产件数的平均数、众数、中位数.

(2) 若要使占 75% 的工人都能完成任务,应选什么统计量(平均数、中位数、众数)作日生产件数的定额?

设计题 SHEJITI

为了了解学校各年级男、女生在身高方面的差别,你认为应怎样抽样并获取数据?对所得数据应计算哪些统计量(如平均数、中位数、众数、方差、标准差等)?

以 4～6 人为一组,先设计一个方案,选择某一年级进行收集数据,再作必要的整理和分析,并写一份书面报告. 要求报告中包括以下内容:介绍所作抽样、调查、统计的具体过程,并阐述所选择年级男、女生身高的差别和得到该结论的依据.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 如果有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，我们把______________叫做这 n 个数的算术平均数，简称平均数.

一组数据按从小到大(或从大到小)的顺序排列，位于最中间的一个数据(当数据个数为奇数时)或最中间两个数据(当数据个数为偶数时)的平均数叫做这组数据的__________.

一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的_______.

2. 各数据与平均数的差的平方的平均数 $S^2=$____________________，叫做这组数据的_______. 方差越大，说明数据的波动________.

方差的算术平方根 $S=$___________，叫做这组数据的__________.

填表.

技能内容	学会程度		
	学 会	基本学会	不 会
求一组数据的平均数、加权平均数			
求一组数据的中位数和众数			
求一组数据的方差和标准差			
各种统计量的简单实际应用			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 3.1节 3.2节

- 理解平均数的意义，能计算中位数、众数、加权平均数，了解它们是数据集中趋势的描述.
- 能解释统计的结果，根据结果作出简单的判断和预测，并能进行交流.
- 知道可以通过样本的平均数来估计推断总体的平均数.

1. 某班 30 名学生的身高情况如下表：

身高(m)	1.45	1.48	1.50	1.53	1.56	1.60
人数	2	5	6	8	5	4

这 30 名学生的平均身高是________.

2. 某小组 6 名同学的英语口试成绩(满分 30 分)依次为:25,23,25,27,30,25,这组数据的中位数是________,众数是_________.

3. 已知5 个正数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的平均数是 a，且 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$，则数据 $a_1,a_2,a_3,0,a_4,a_5$ 的平均数和中位数是(　　)

(A) a,a_3.　(B) $a,\dfrac{a_3+a_4}{2}$.　(C) $\dfrac{5}{6}a,\dfrac{a_3}{2}$.　(D) $\dfrac{5}{6}a,\dfrac{a_3+a_4}{2}$.

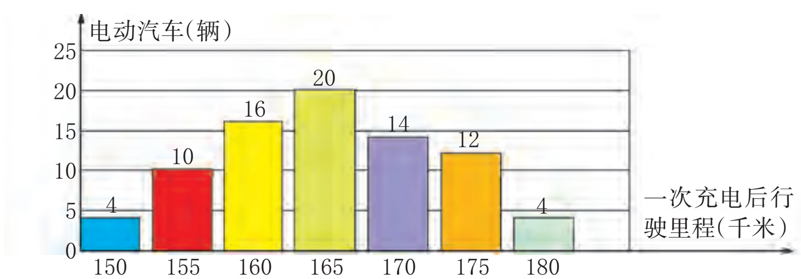
4. 某班随机抽查 5 名同学，请他们分别记录自己家中一周内丢弃的塑料袋的数量，结果如下(单位:个)：

33，25，28，26，23.

如果该班有 45 名学生，估计一周内该班全体同学家中丢弃的塑料袋数量.

5. 对一种环保电动汽车性能抽测，获得如下的条形统计图. 根据统计图估计被抽检电动汽车一次充电后平均里程数(精确到 0.1 千米).

某电动汽车一次充电后能行里程的统计图



(第 5 题)

6. 某商贸公司 10 名销售员上月完成的销售额情况如下：

销售额(万元)	3	4	5	6	7	8	10
销售员人数	1	3	2	1	1	1	1

（1）求销售额的中位数、众数，以及平均每人完成的销售额.

（2）如果以销售额的中位数作为每月定额任务指标，那么没有完成定额任务的销售员有多少人？若以销售额的众数作定额任务指标呢？

目标B 3.3 节

● 了解方差、标准差的概念. 会计算简单数据的方差，体会刻画数据离散程度的意义.

● 知道可以通过样本的方差来推断总体的方差. 能解释统计结果，根据结果作出简单的判断和预测，并进行交流.

7. 已知样本数据 1，2，4，3，5，下列说法不正确的是（　　）

（A）平均数是 3.　　（B）中位数是 4.

（C）标准差是 $\sqrt{2}$.　　（D）方差是 2.

8. 从一个养鸡场里任意抽取 5 只鸡，称得它们的质量如下(单位：千克)：3.0，3.4，3.1，3.3，3.2. 这组数据的方差 $S^2=$________.

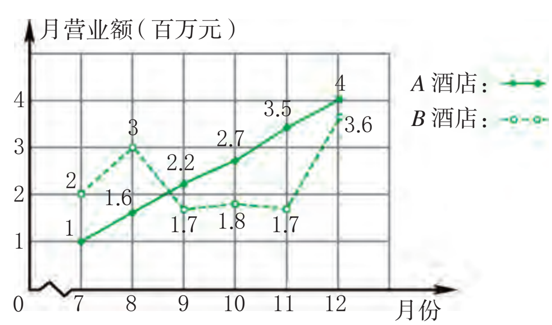
9. 某校从甲、乙两名优秀选手中选一名参加全市中小学生运动会的男子 100 米跑项目，该校预先对这两名选手测试了 8 次，测试成绩如下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8
甲的成绩(秒)	12	12.3	13	12.9	13.1	12.5	12.4	12.6
乙的成绩(秒)	12.1	12.4	12.8	13	12.2	12.7	12.3	12.5

为了衡量这两名选手 100 米跑的水平，你认为可进行怎样的数据分析？

10. 如图为 A，B两家酒店去年下半年的月营业额折线统计图.

A，B 两酒店 7～12 月月营业额的折线统计图



（第 10 题）

(1) 要评价两家酒店 7～12 月的月营业额的平均水平,你选择什么统计量? 求出这个统计量.

(2) 分别求出两家酒店 7～12 月月营业额的方差.

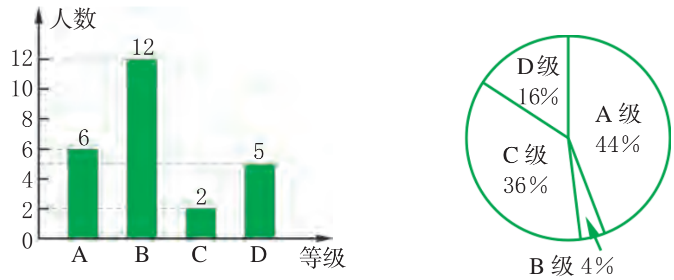
(3) 根据(1),(2)两题的结果和折线统计图,你认为哪家酒店经营状况较好? 请简述理由.

目标C

●能综合运用统计知识解决一些简单的实际问题.

11. 在学校组织的知识竞赛中,每班参加比赛的人数相同,成绩分为 A,B,C,D 四个等级, 其中相应等级的得分依次记为 100 分,90 分,80 分,70分, 学校将八年级一班和二班的成绩整理并绘制成如下的统计图.

一班竞赛成绩统计图　　二班竞赛成绩统计图



(第 11 题)

请你根据以上提供的信息解答下列问题:

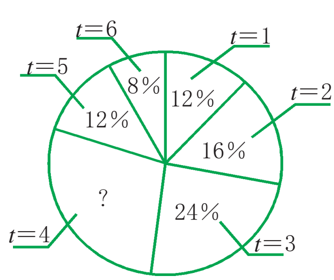
(1) 此次竞赛中,一班成绩在 C 级以上(包括 C 级)的人数为_____.

(2) 将表格补充完整.

成绩 班级	平均数(分)	中位数(分)	众数(分)
一班	87.6	90	
二班	87.6		100

12. 为了了解八年级学生的课外阅读情况,学校随机调查了该年级 25 名学生,得到他们上周双休日课外阅读时间(记为 t,单位:时)的一组样本数据,其扇形统计图如图所示.

八年级 25 名学生双休日课外阅读时间的统计图



(第 12 题)

（1）阅读时间为 4 小时的占百分之几？

（2）试确定这个样本的中位数和众数，并求出平均数.

13. 世界最大的水利枢纽三峡工程，在 2003 年 5 月 31 日大坝下闸蓄水前，大坝库区内的巴东、巫山、万县等 8 个地点的水位的海拔分别为(m)：

103.30，103.35，103.58，104.33，109.27，124.40，141.75，150.30.

而在 6 月 1 日下闸后半月内上述地点的水位的海拔分别为(m)：

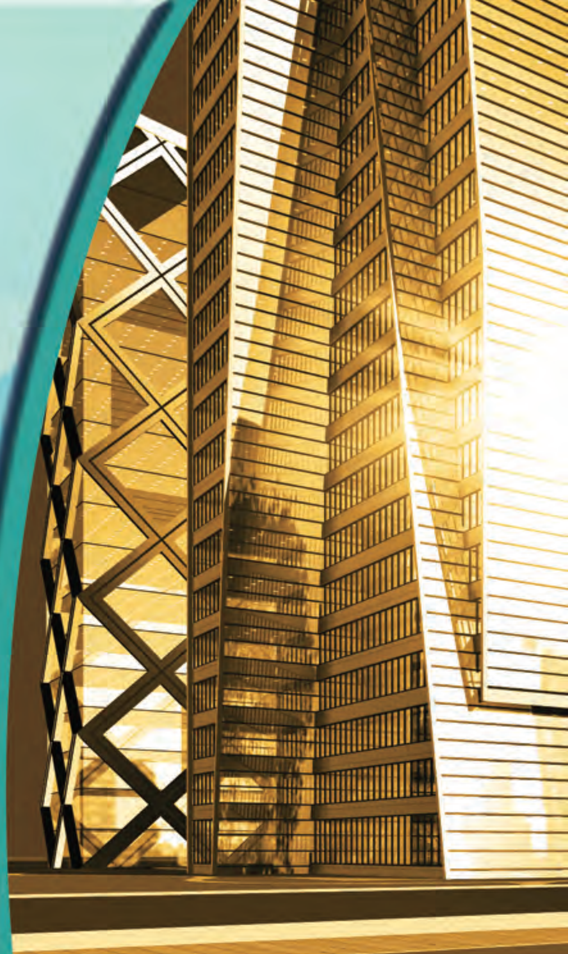
135，138，140，142，147，150，162，172.

（1）分别求出上述两组数据的平均数、方差和标准差(精确到 0.01m).

（2）利用什么统计量可以说明大坝下闸蓄水后长江出现“高峡出平湖”的景象？这种景象在下闸前后有哪些主要的变化？

第4章

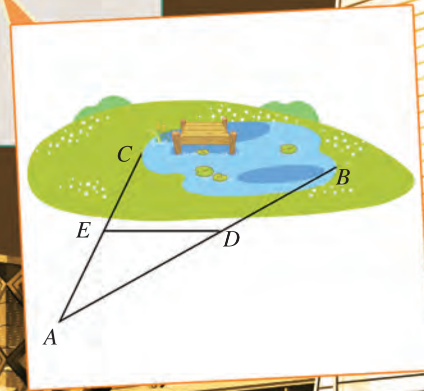
平行四边形



目录 CONTENTS<<

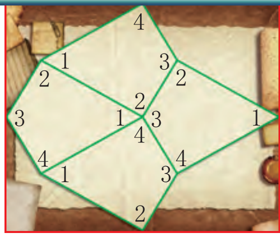
为什么可伸缩的机械装置与器具多采用平行四边形的结构?

如图,D,E分别是AB,AC的中点.你能说明为什么只要量出DE的长,就能求出B,C两地的距离吗?



本章将学习多边形,平行四边形的定义、性质、判定及其应用,以及反证法等有关知识.

4·1 多边形



能用全等的任意四边形纸片既不重叠、又不留空隙地组成一幅镶嵌图吗？为什么？

1

如图 4-1，在同一平面内，由任意两条都不在同一条直线上的若干条线段（线段的条数不小于 3）首尾顺次相接形成的图形叫做**多边形**（polygon）[1]．组成多边形的各条线段叫做多边形的**边**．

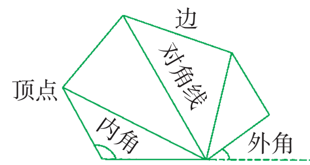


图 4-1

边数为 3 的多边形叫三角形，边数为 4 的多边形叫四边形．类似地，边数为 5 的多边形叫五边形……边数为 n 的多边形叫 n 边形（n 为正整数，且 $n \geq 3$）．

如图 4-1，多边形相邻两边组成的角叫做多边形的**内角**，多边形一边的延长线与相邻的另一边所组成的角叫做多边形的**外角**．多边形每一个内角的顶点叫做多边形的**顶点**．连结多边形不相邻两个顶点的线段叫做多边形的**对角线**．

说出如图 4-2 所示的四边形 $ABCD$ 的各条边和各个内角，并画出各条对角线和任意一个外角．

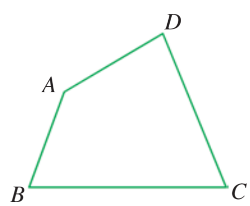


图 4-2

合作学习

HEZUOXUEXI

在纸上任意画一个四边形，剪下它的四个角，把它们拼在一起（四个角的顶点重合）．你发现了什么？其他同学与你的发现相同吗？你能把你的发现概括成一个命题吗？你能证明这个命题吗？

[1] 本套教科书所说的多边形，都指凸多边形（convex polygon），即多边形的各条边都在任意一条边所在直线的同一侧．

四边形有以下的定理：

四边形的内角和等于 360°.

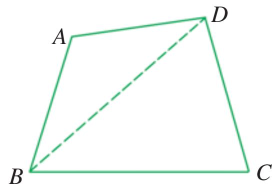


图 4-3

已知：四边形 $ABCD$.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

证明 如图 4-3，连结 BD.

$\because$ $\angle A+\angle ABD+\angle ADB=180°$,

$\angle C+\angle CBD+\angle CDB=180°$,

$\therefore$ $\angle A+\angle ABD+\angle ADB+\angle C+\angle CBD+\angle CDB$

$=180°+180°=360°$,

即 $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle CDA=360°$.

想一想

你还有其他证明方法吗？

例1 如图 4-4，四边形风筝的四个内角 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ 的度数之比为 1∶1∶0.6∶1. 求它的四个内角的度数.

解 $\because$ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$（四边形的内角和等于 360°），

又 $\because$ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ 的度数之比为 1∶1∶0.6∶1，

设 $\angle A=x$ 度，则有 $x+x+0.6x+x=360$，

解得 $x=100$.

$\therefore$ $\angle A=\angle B=\angle D=100°$, $\angle C=100°\times0.6=60°$.

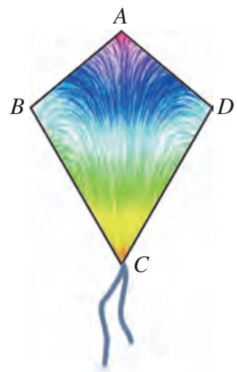
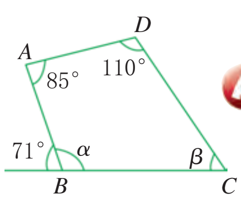


图 4-4

课内练习 KENEILIANXI

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，$\angle B=80°$. 求 $\angle D$ 的度数.
2. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle C$. 求证：$AD /\!/ BC$.
3. 请解答本节节前语中的问题.

作业题 ZUOYETI



（第 2 题）

A 1. 一个四边形四个内角的度数之比为 1∶2∶3∶3. 求这四个内角的度数.

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=85°$, $\angle D=110°$，与 $\angle \alpha$ 相邻的外角是 71°. 求 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 的度数.

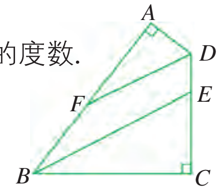
3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，$\angle B$ 比 $\angle D$ 大 $15°$. 求 $\angle B$，$\angle D$ 的度数.

B 4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

（1）找出互相平行的边.

（2）若 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数之比是 $2:1$，求各内角的度数.

5. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，BE 平分 $\angle ABC$，交 CD 于点 E，DF 平分 $\angle ADC$，交 AB 于点 F. 求证：$BE \parallel DF$.



（第 5 题）

2

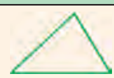
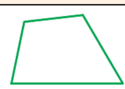
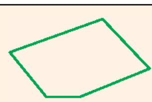
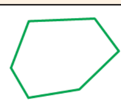
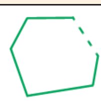
下面我们来探索任意一个多边形的内角和与外角和的规律.

合作学习

HEZUOXUEXI

填写下表：

表 4-1

边数	图形	从某顶点出发的对角线条数	划分成的三角形个数	多边形的内角和
3		0	1	$1\times180°$
4		1	2	$2\times180°$
5				
6				
…	…	…	…	…
n				

你从表中得到了什么结论？

对于 n 边形，从某一个顶点出发的 $(n-3)$ 条对角线把 n 边形划分成 $(n-2)$ 个三角形，所以 n 边形的内角和就等于这 $(n-2)$ 个三角形的所有内角之和. 于是就有下面的定理：

n边形的内角和为$(n-2)\times180^\circ(n\geqslant3)$.

由于每一个外角与和它相邻的内角互补，所以 n 边形的外角和（每一个顶点只取一个外角）为 $n\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=360^\circ$.

任何多边形的外角和为360°.

例2 一个六边形如图 4-5. 已知 $AB\parallel DE$, $BC\parallel EF$, $CD\parallel AF$. 求 $\angle A+\angle C+\angle E$ 的值.

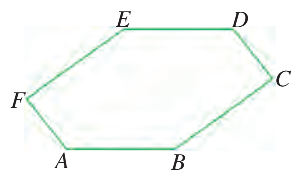


图 4-5

分析 因为两条平行线被一条直线所截，有许多等角关系，所以我们不妨连结 AD 试试看，如图 4-6. 不难发现，$\angle1=\angle3$, $\angle2=\angle4$. 由此可得本题解法.

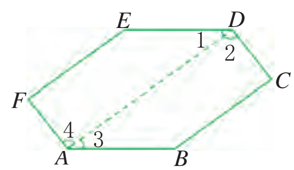


图 4-6

解 如图 4-6，连结 AD.

$\because$ $AB\parallel DE$, $CD\parallel AF$（已知），

$\therefore$ $\angle1=\angle3$, $\angle2=\angle4$.

$\therefore$ $\angle1+\angle2=\angle3+\angle4$，即 $\angle FAB=\angle CDE$.

同理，$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

$\because$ $\angle FAB+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F$
$=(6-2)\times180^\circ=720^\circ$,

$\therefore$ $\angle FAB+\angle C+\angle E=\dfrac{1}{2}\times720^\circ=360^\circ$.

想一想

你还有其他解法吗？

课内练习 KENEILIANXI

1. 如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么它是几边形？

2. 求十边形的内角和与外角和.

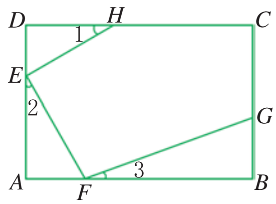
3. 已知一个多边形的内角和为 900°，这个多边形是几边形？

作业题 ZUOYETI

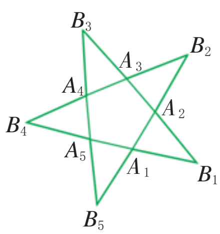
A 1. 已知一个多边形的内角和为 1800°，这个多边形是几边形？

2. 已知多边形的内角和等于外角和的两倍，求这个多边形的边数.

3. 如图，点 E,F,G,H 在长方形 $ABCD$ 的四条边上. 已知$\angle 1=\angle 2=30°$，$\angle 3=20°$. 求五边形 $EFGCH$ 各个内角的度数.



（第 3 题）



（第 4 题）

B 4. 一个五角星图案如图. 已知五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的各个内角都相等，分别求$\angle B_1$，$\angle B_2$，$\angle B_3$，$\angle B_4$，$\angle B_5$ 的度数.

5. 一个多边形剪去一个角后（剪痕不过任何一个其他顶点），内角和为 1 980°，则原多边形是几边形？

C 6. 一个内角和为 1 620°的多边形可连多少条对角线？

4·2 平行四边形及其性质

你知道遮阳篷的伸缩架为什么采用平行四边形的结构吗？

1

我们在小学里已经学过，两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**（parallelogram）. 平行四边形用符号“▱”表示，如图 4-7，平行四边形$ABCD$ 可记做“▱$ABCD$”.

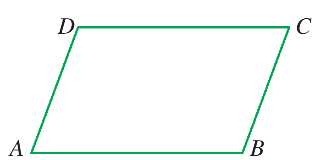


图 4-7

平行四边形有许多奇妙的性质，在日常生活中有着广泛的应用.

合作学习
HEZUOXUEXI

用两块相同的三角板拼一个平行四边形.讨论下面的问题:

(1) 怎样拼能拼出一个平行四边形?你能拼出多少个形状不同的平行四边形?

(2) 怎样证明你拼出的四边形是平行四边形?

(3) 通过上述活动,你发现平行四边形有哪些性质?你能证明这些性质吗?

平行四边形有以下性质定理:

平行四边形的对角相等.

平行四边形的对边相等.

已知:四边形 $ABCD$ 是平行四边形(图 4-8).

求证:$\angle A=\angle C$, $\angle ABC=\angle CDA$;

$AB=CD$, $BC=DA$.

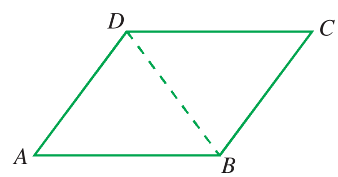


图 4-8

证明 连结 BD(图 4-8).

在四边形 $ABCD$ 中, $AB/\!/CD$(平行四边形的定义),

$\therefore\ \angle ABD=\angle CDB$.

同理, $\angle ADB=\angle CBD$.

又 $BD=DB$,

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle CDB$.

$\therefore\ AB=CD$, $BC=DA$, $\angle A=\angle C$.

同理可得, $\angle ABC=\angle CDA$.

例1 已知:如图 4-9, E, F 分别是▱$ABCD$ 的边 AD, BC 上的点,且 $AF/\!/CE$.

求证:$DE=BF$, $\angle BAF=\angle DCE$.

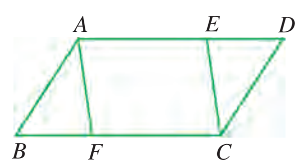


图 4-9

证明 如图 4-9, 在▱$ABCD$ 中, $AD/\!/BC$, $AD=CB$(平行四边形的对边相等).

$\because\ AF/\!/CE$,

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形(平行四边形的定义).

$\therefore\quad AE=CF$（平行四边形的对边相等）.

$\because\quad AD=CB$,

$\therefore\quad AD-AE=CB-CF$，即 $DE=BF$.

$\because\quad \angle BAD=\angle DCB$，$\angle EAF=\angle FCE$（平行四边形的对角相等），

$\therefore\quad \angle BAD-\angle EAF=\angle DCB-\angle FCE$，

即 $\angle BAF=\angle DCE$.

想一想

你还有其他证明方法吗？

与三角形的稳定性相反，四边形具有不稳定性的特点. 如图 4-10，这三个平行四边形的边长都对应相等，但它们的形状却不相同.

图 4-10

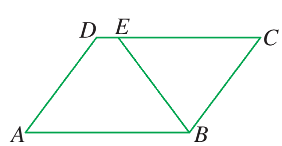
平行四边形的不稳定性在日常生活和生产实际中有许多应用，如衣帽架、伸缩门（图 4-11）、可伸缩的遮阳篷（如节前图）等，都反映了四边形的不稳定性的应用.

图 4-11

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知在▱$ABCD$ 中，$\angle A=55°$. 求其余内角的度数.

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，$BE=BC$. 求证：$AD=BE$，$\angle A=\angle ABE$.



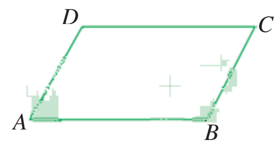
（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知▱$ABCD$（如图），将它沿 AB 方向平移，平移的距离为$\frac{1}{2}AB$.

（1）作出经平移后所得的图形▱$A'B'C'D'$.

（2）写出▱$A'B'C'D'$与▱$ABCD$ 构成的图形中所有的平行四边形（不必证明）.

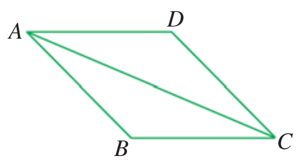


（第 1 题）

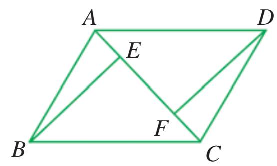
2. 已知平行四边形相邻两条边的长度之比为 3∶2，周长为20 cm. 求平行四边形各条边长.

3. 已知平行四边形的最大角比最小角大 100°，求它的各个内角的度数.

B **4.** 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ADC=135°$，$\angle CAD=23°$. 求$\angle ABC$，$\angle CAB$的度数.



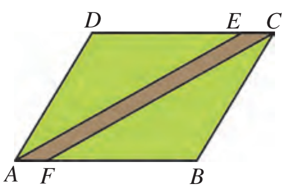
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，AC 是对角线，$BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F. 求证：$BE=DF$.

6. 如图，一块平行四边形场地中，道路$AFCE$ 的两条边 AE，CF 分别平分▱$ABCD$ 的两个对角. 这条道路的形状是平行四边形吗？证明你的判断.



（第 6 题）

2

如图 4-12，已知直线 $l_1 /\!/ l_2$. 任意画两条夹在直线 l_1与 l_2之间的平行线段，并比较它们的长短. 你发现了什么？你能证明你的发现吗？试一试.

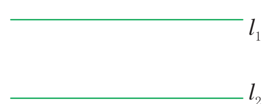


图 4-12

如果任意画两条夹在直线 l_1与 l_2间，与直线 l_1，l_2垂直的线段呢？

（请与你的同伴交流）

一般地,平行线有下面的性质定理:

夹在两条平行线间的平行线段相等.

根据这个性质定理有以下推论:

夹在两条平行线间的垂线段相等.

如图 4-13,直线 $l_1 /\!/ l_2$,$AB /\!/ CD$,则 $AB=CD$.

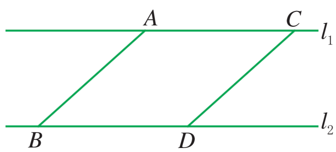


图 4-13

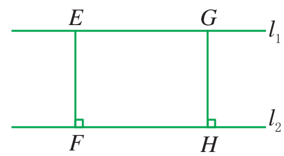


图 4-14

如图 4-14,直线 $l_1 /\!/ l_2$,$EF\perp l_2$,$GH\perp l_2$,则 $EF=GH$.

如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等. 两条平行线中,一条直线上任意一点到另一条直线的距离,叫做这两条**平行线之间的距离**. 如图 4-14,线段 EF(或 GH)的长就是平行线 l_1 与 l_2 之间的距离.

例 2 如图 4-15,放在墙角的立柜的上、下底面是一个等腰直角三角形,腰长为 1.4 m. 现要将这个立柜搬过宽为 1.2 m 的通道,能通过吗?

图 4-15

解 因为腰长 1.4 m 大于通道宽 1.2 m,所以在搬这个立柜时,如果沿立柜上、下底面任一条直角边方向平移,都不能通过.

如图 4-16,作立柜底面三角形 ABC 斜边上的高线 CD.

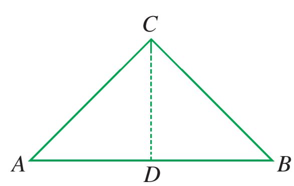


图 4-16

$\because\ AC=BC=1.4$,

$\therefore\ AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$=\sqrt{1.4^2+1.4^2}=1.4\sqrt{2}$ (m).

$\because\ CD\perp AB$,

$\therefore$ CD 是 AB 边上的中线,

$\therefore\ CD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 1.4\sqrt{2}=0.7\sqrt{2}$ (m).

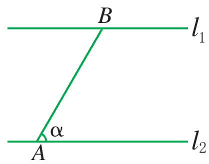
$\because\ 0.7\sqrt{2}<1.2$，即 CD 长小于通道的宽，

所以使 AB 边平行通道两边来平移立柜就可以通过.

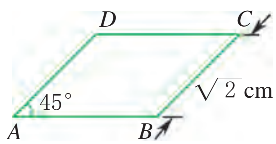
课内练习

1. 填空：

（1）如图，已知 $l_1 // l_2$，l_1 与 l_2 之间的距离为 $\sqrt{3}$，$\angle\alpha=60°$，则 $AB=$__________.

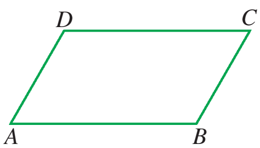


（第 1(1)题）



（第 1(2)题）

（2）如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle A=45°$，$BC=\sqrt{2}$ cm，则 AB 与 CD 之间的距离为__________.



（第 2 题）

2. 如图，在▱$ABCD$中，AB 与 AD 的长度之比为 2∶1. 求 AB，CD 之间的距离与 AD，BC 之间的距离之比.

探究活动

先观察图 4-17，直线 $l_1 // l_2$，点 A，B 在直线 l_2 上，点 C_1，C_2，C_3，C_4 在直线 l_1 上. $\triangle ABC_1$，$\triangle ABC_2$，$\triangle ABC_3$，$\triangle ABC_4$ 这些三角形的面积有怎样的关系？请说明理由.

现在我们来探讨以下问题：

（1）若把图 4-18 的四边形 $ABCD$ 改成一个三角形，并保持面积不变，可怎样改？你有多少种不同的改法？

（2）已知四边形 $ABCD$（图 4-18）. 若把它改成一个以 AB 为一条底边的梯形或平行四边形，并保持面积不变，可怎样改？请画图说明.

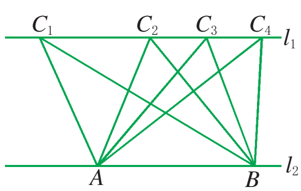


图 4-17

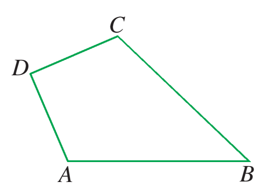
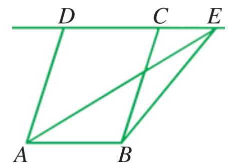


图 4-18

作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，E 是直线 CD 上的一点. 已知▱$ABCD$ 的面积为 52 cm^2，则 $\triangle ABE$ 的面积为 ________ cm^2.



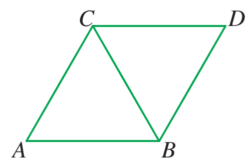
（第 1 题）

2. 画直线 $l_1 /\!/ l_2$，并使直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 1 cm.

3. 已知：如图，等边三角形 ABC 与等边三角形 DBC 的一边 BC 重合.

（1）求证：四边形 $ABDC$ 是平行四边形.

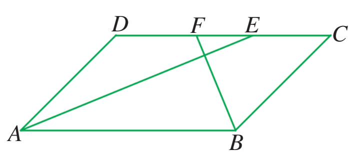
（2）若$\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ cm，求所组成的平行四边形各组对边之间的距离.



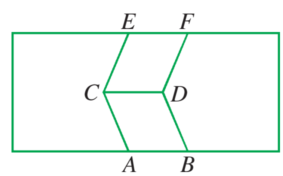
（第 3 题）

B **4.** 若平行四边形的两邻边长分别为 16 和 20，两条较长边之间的距离为 8. 求两条较短边之间的距离.

5. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=8$ cm，$AD=5$ cm，$\angle BAD$ 的平分线交 CD 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F. 求线段 EF 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

C **6.** 如图，一块草地的中间有一条等宽的弯路，$AC /\!/ BD$，$CE /\!/ DF$，$CD /\!/ AB$. 请给出一种方案，把道路改直，且草地的种植面积保持不变.

3

任意画一个平行四边形，连结它的两条对角线. 你发现了什么？你能证明你发现的结论吗？

（请与你的同伴交流）

平行四边形还有如下性质：

平行四边形的对角线互相平分.

已知：在$\square ABCD$中，对角线AC，BD交于点O（图 4-19）.

求证：$OA=OC$，$OB=OD$.

证明 如图 4-19，在$\square ABCD$中，

$AD /\!/ BC$（平行四边形的定义），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又$\because$ $AD=CB$（平行四边形的对边相等），

$\therefore$ $\triangle AOD \cong \triangle COB$.

$\therefore$ $OA=OC$，$OB=OD$.

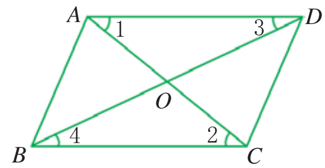


图 4-19

例3 已知：如图 4-20，$\square ABCD$的对角线AC，BD交于点O. 过点O作直线EF，分别交AB，CD于点E，F. 求证：$OE=OF$.

证明 如图 4-20，在$\square ABCD$中，

$AB /\!/ CD$（平行四边形的定义），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

又$\because$ $OA=OC$（平行四边形的对角线互相平分），$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore$ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore$ $OE=OF$.

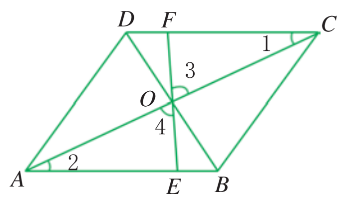


图 4-20

例4 如图 4-21，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD交于点E，$AC \perp BC$. 若$AC=4$，$AB=5$，求BD的长.

分析 如图 4-21，因为平行四边形的两条对角线互相平分，所以要求BD的长，只需求出BE的长. 在$\text{Rt}\triangle ABC$中，AB，AC长已知，可求得BC的长. 又$CE=\dfrac{1}{2}AC$，则BE可求.

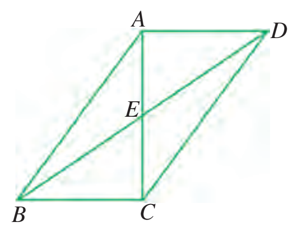


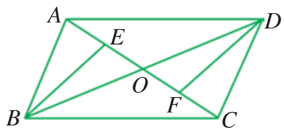
图 4-21

请你完成求解过程. 想一想，你还有其他求解方法吗？

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知 O 是▱$ABCD$ 两条对角线的交点，$AC=24\,\text{mm}$，$BC=38\,\text{mm}$，$OD=28\,\text{mm}$，则△OBC 的周长为__________.

2. 有没有这样的平行四边形，它的两条对角线长分别为 14 cm 和 20 cm，它的一边长为 18 cm？为什么？



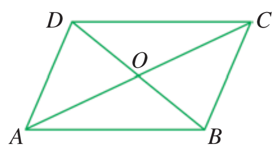
（第 3 题）

3. 已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别为 OA，OC 的中点. 求证：△OBE≌△ODF.

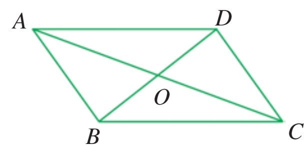
作业题 ZUOYETI

A

1. 如图，▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O.
   （1）图中有多少对全等三角形？把它们写出来.
   （2）图中有多少对面积相等的三角形？



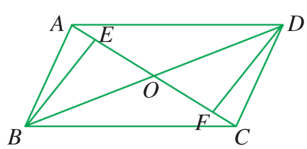
（第 1 题）



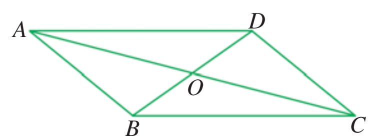
（第 2 题）

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 已知 $AB=5\,\text{cm}$，△OAB 的周长比△BOC 的周长小 3 cm，求 AD 的长.

3. 已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 分别在 AO，CO 上，且 $AE=CF$. 求证：$\angle EBO=\angle FDO$.



（第 3 题）

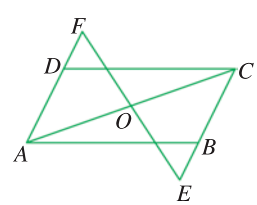


（第 4 题）

B

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，O 是对角线 AC，BD 的交点. 已知 $AB=4$，△AOB 的周长是 11. 求对角线 AC 与 BD 的和.

5. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，过 AC 的中点 O 的直线分别交 CB，AD 的延长线于点 E，F. 求证：$BE=DF$.



（第 5 题）

4·3 中心对称

你能在图案中找出一点，使图案绕该点旋转180°后仍和原图案重合吗？

合作学习 HEZUOXUEXI

如图 4-22，O 是▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 的交点. 以 O 为旋转中心，把▱$ABCD$ 按顺时针方向旋转 180°，作出所得的图形.

你发现了什么？请剪出图形动手试一试，观察旋转 180°前后原图形和新图形的位置情况.

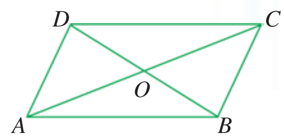


图 4-22

如果一个图形绕着一个点旋转 180°后，所得到的图形能够和原来的图形互相重合，那么这个图形叫做**中心对称**(point symmetry)**图形**，这个点叫**对称中心**. 如图 4-22 的▱$ABCD$ 是中心对称图形，两条对角线的交点是它的对称中心.

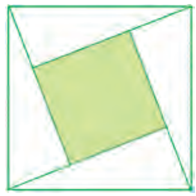
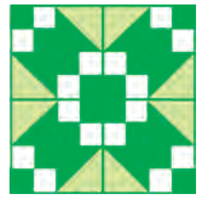
类似地，如果一个图形绕着一个点 O 旋转 180°后，能够和另外一个图形互相重合，我们就称这两个图形关于点 O 成中心对称. 如图 4-22，△AOD 绕点 O 旋转 180°后与△COB 重合，△AOD 与△COB 关于点 O 成中心对称.

做一做 ZUOYIZUO

下列哪些图形是中心对称图形？

(1)

(2)

(3) 　　(4) 

根据中心对称图形的定义,容易得出中心对称图形的以下性质:

对称中心平分连结两个对称点的线段.

例1　如图 4-23,已知$\triangle ABC$和点 O,作$\triangle A'B'C'$,使$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于点 O 成中心对称.

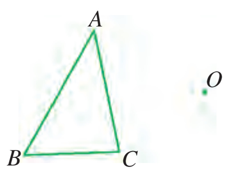


图 4-23

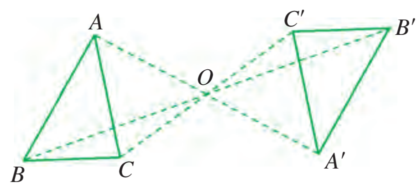


图 4-24

解　如图 4-24.

(1) 连结 AO 并延长到 A',使 $A'O=AO$,则点 A'即点 A 关于点 O 成中心对称的对称点.

(2) 同理,作出点 B,C 的对称点 B',C'.

(3) 连结 $A'B'$,$B'C'$,$C'A'$.

$\triangle A'B'C'$即为所求作的三角形.

例2　求证:**在直角坐标系中,点 $A(x,y)$与点 $B(-x,-y)$关于原点成中心对称**.

分析　由中心对称的定义知,要证明 A,B 两点关于原点 O 对称,只需证明 A,O,B 三点共线,且 $AO=BO$ 即可.

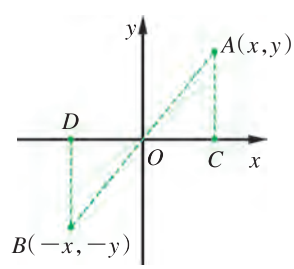


图 4-25

证明　如图 4-25,连结 AO,BO,作 $AC\perp x$ 轴,$BD\perp x$ 轴,C,D 分别为垂足.

$\because$　$|x|=|-x|$,$|y|=|-y|$,

$\therefore$　$CO=DO$,$AC=BD$,

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle AOC \cong \text{Rt}\triangle BOD$.

$\therefore$ $AO = BO$，$\angle AOC = \angle BOD$.

$\therefore$ $\angle BOD + \angle AOD = \angle AOC + \angle AOD = 180°$，

即 A，O，B 在一条直线上，当将点 A 绕点 O 旋转 $180°$时，点 A 与点 B 重合.

所以点 A，B 关于原点成中心对称（我们也称为点 A，B 关于原点对称）.

课内练习 KENEILIANXI

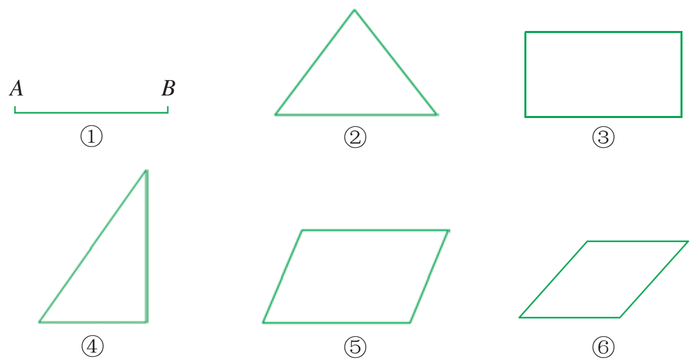
1. 观察图形，并回答下面的问题：

（1）哪些是轴对称图形？

（2）哪些是中心对称图形？

（3）哪些既是中心对称图形，又是轴对称图形？

（4）哪些既不是中心对称图形，又不是轴对称图形？



（第 1 题）

2. 在直角坐标系中，找出下列各点中关于原点对称的点.

$(-1,0)$，$(2,1)$，$(-3,-1)$，$(1,0)$，$(-3,1)$，

$(3,1)$，$(-2,-1)$，$(4,-\sqrt{2})$，$(3,-1)$，$(-4,\sqrt{2})$.

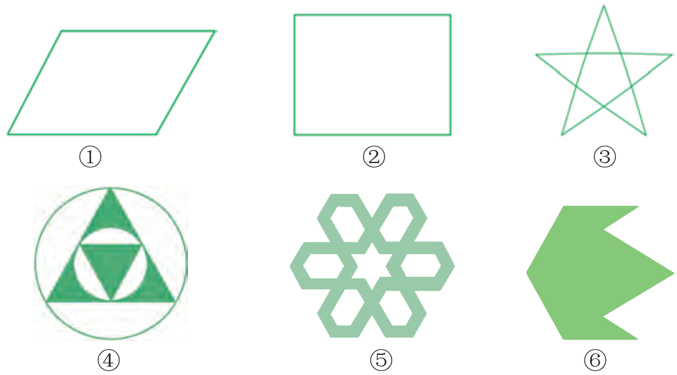
作业题 ZUOYETI

A **1.** 观察如图图形，并回答下面的问题：

（1）哪些是轴对称图形？

（2）哪些是中心对称图形？

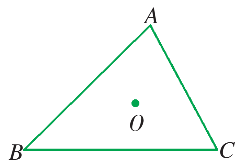
（3）哪些既是轴对称图形，又是中心对称图形？



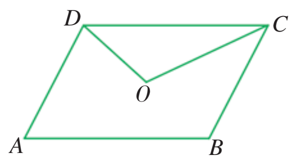
（第 1 题）

2. 在直角坐标系中，点 $A(-7, \sqrt{5})$关于原点对称的点的坐标是______，关于 x 轴对称的点的坐标是________.

3. 已知$\triangle ABC$（如图）. 以点 O 为对称中心，求作与$\triangle ABC$ 成中心对称的图形.



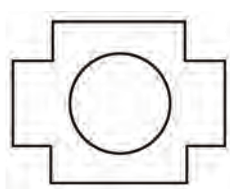
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，O 是$\square ABCD$ 的对称中心. 这个图形是不是中心对称图形？如果认为是，请说明理由；如果认为不是，在原图上添加一些线，使它成为中心对称图形.

B **5.** 下面两幅图案是中心对称图形吗？如果认为是，标出它们的对称中心. 对于图②，至少把图形绕整个圆的圆心旋转多少度，就能和原图重合？



①

②

（第 5 题）

6. 举出两个在现实生活中体现中心对称图形的例子.

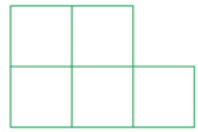
7. 如图是五个小正方形拼成的图形. 请你移动其中一个小正方形，重新拼一个图形，使得所拼成的新图形：

（1）是轴对称图形，但不是中心对称图形.

（2）是中心对称图形，但不是轴对称图形.

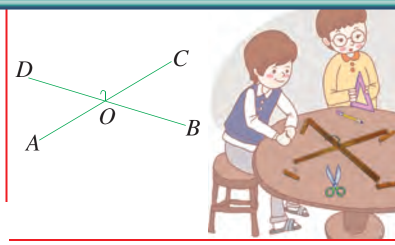
（3）既是轴对称图形，又是中心对称图形.

请分别画出示意图.



（第 7 题）

4·4 平行四边形的判定定理



你见过如图这样的简易晒衣架吗？如果依次连结A，B，C，D四个端点，得到的四边形一定是平行四边形吗？

1

命题“平行四边形的一组对边平行且相等”是真命题吗？写出它的逆命题. 这个逆命题是真命题吗？

（请与你的同伴交流）

我们知道，根据平行四边形的定义可以判定一个四边形是不是平行四边形. 除此之外，我们还有以下判定一个四边形是平行四边形的定理：

一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形.

已知：如图 4-26，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \underline{\mathbin{/\!/}}$ [1] BC.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

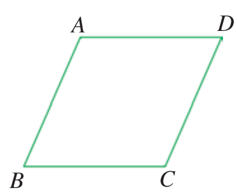


图 4-26

分析 因为 $AD \parallel BC$，根据平行四边形的定义，只要再证明 $AB \parallel DC$ 即可. 而要证明 $AB \parallel DC$，可连结 AC，证明相应的内错角相等.

证明 如图 4-27，连结 AC.

[1] 符号“$\underline{\mathbin{/\!/}}$”表示平行且相等.

$\because$ $AD /\!/ BC$,

$\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$.

又 $\because$ $AD = BC, AC = AC$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $\angle ACD = \angle CAB$.

$\therefore$ $AB /\!/ CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（根据什么?）.

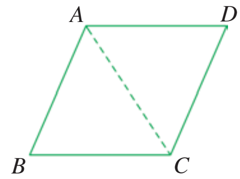


图 4-27

例1 已知:如图 4-28,在▱$ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,CD 的中点.

求证:$EF /\!/ AD$.

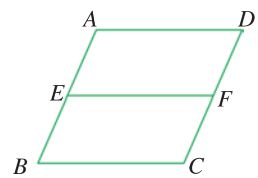


图 4-28

证明 在▱$ABCD$ 中,

$AB \underline{/\!/} CD$（为什么?）.

又 $\because$ E,F 分别是 AB,CD 的中点,

$\therefore$ $AE \underline{/\!/} DF$.

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形（一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形）.

$\therefore$ $EF /\!/ AD$（平行四边形的定义）.

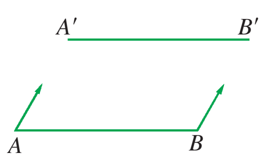
我们还有以下判定一个四边形是平行四边形的定理:

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

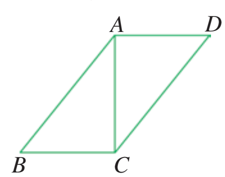
请你完成这一定理的证明.

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图,把线段 AB 平移到线段 $A'B'$. AB 与 $A'B'$ 平行吗?请说明理由.



（第 1 题）



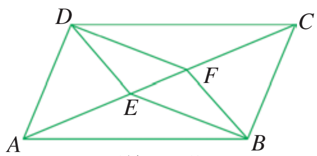
（第 2 题）

2. 已知:如图,$AD \perp AC, BC \perp AC$,且 $AB = CD$.

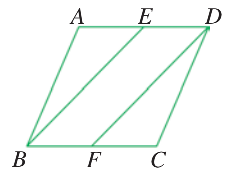
求证:$AB /\!/ CD$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知:如图,E,F 是▱$ABCD$ 的对角线 AC 上的两点,且 $AE=CF$.
求证:四边形 $BFDE$ 是平行四边形.



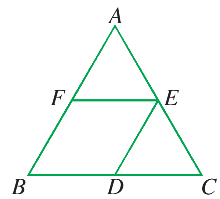
(第 1 题)



(第 2 题)

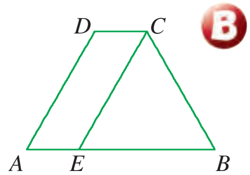
2. 已知: 如图,E,F 分别是▱$ABCD$ 的边 AD,BC 的中点.求证:$BE=DF$.

3. 已知:如图,在等边三角形 ABC 中, D,E,F 分别为各边的中点. 求证: 四边形 $DEFB$ 是平行四边形.



(第 3 题)

B **4.** 已知:如图,在梯形 $ABCD$ 中,$CD\parallel AB$,$AD=BC$,E 是 AB 上一点,且 $AE=CD$, $\angle B=60°$. 求证:$\triangle EBC$ 是等边三角形.



(第 4 题)

5. 已知直角坐标系内四个点$A(a,1)$,$B(b,1)$,$C(c,-1)$,$D(d,-1)$. 以点 A,B,C,D 为顶点的四边形一定是平行四边形吗? 如果你认为是,请给出证明;如果你认为不一定是,请添加一个条件,使它成为平行四边形.

2

判定一个四边形是平行四边形,还有以下的定理:

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

已知:如图 4-29,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,且 $AO=CO$,$BO=DO$.

求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

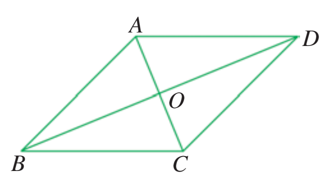


图 4-29

证明 在$\triangle AOD$ 与$\triangle COB$ 中,

$\because$ $AO=CO$,$DO=BO$,$\angle AOD=\angle COB$,

$\therefore$ $\triangle AOD\cong\triangle COB$.

$\therefore$ $AD=CB$.

同理，$AB=CD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

例2 已知：如图 4-30，在▱$ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上的两点，且$\angle BAE=\angle DCF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

分析 不难发现，四边形 $AECF$ 与▱$ABCD$ 有相同的对角线 AC. 连结 AC，交 BD 于点 O，则 $AO=CO$，$BO=DO$. 因此只要证明 $BE=DF$，就能证明 $EO=FO$. 根据定理“对角线互相平分的四边形是平行四边形”就能证明四边形 $AECF$ 是平行四边形.

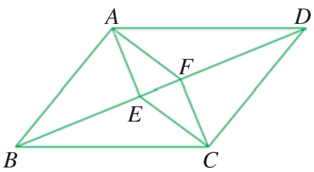


图 4-30

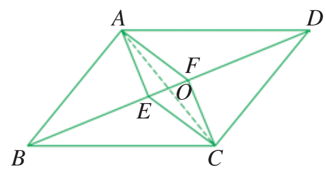


图 4-31

证明 如图 4-31，连结 AC，交 BD 于点 O.

在▱$ABCD$ 中，$BO=DO$，$AO=CO$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵ $AB\parallel CD$（平行四边形的定义），

∴ $\angle ABE=\angle CDF$.

又∵ $\angle BAE=\angle DCF$，

$AB=CD$（平行四边形的对边相等），

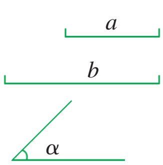
∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

∴ $BE=DF$.

∴ $BO-BE=DO-DF$，即 $EO=FO$.

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

课内练习 KENEILIANXI

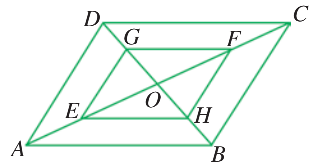


（第 1 题）

1. 已知：线段 a，b，$\angle\alpha$（如图）. 用直尺和圆规作一个平行四边形，使它的两条对角线长分别等于线段 a，b，两条对角线所成的一个角等于 $\angle\alpha$.

2. 请回答 4.4 节节前语中的问题，并说明理由.

3. 已知：如图，在▱*ABCD* 中，*E*，*F* 是对角线 *AC* 上的两个点，*G*，*H* 是对角线 *BD* 上的两点，*AE*＝*CF*，*DG*＝*BH*. 求证：四边形 *EHFG* 是平行四边形.



（第 3 题）

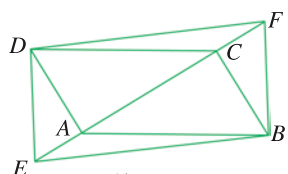
探究活动

任意画一个三角形和三角形一条边上的中线. 比较这条中线的 2 倍与三角形另外两边的和的大小，你发现了什么？再画几个三角形试一试，你发现的规律仍然成立吗？试证明你的发现.

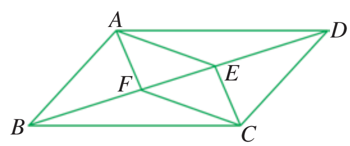
作业题

A 1. 求作▱*ABCD*，使对角线 $AC=4$ cm，$BD=3$ cm，两条对角线所成的一个角为 60°.

2. 已知：如图，*AC* 是▱*ABCD* 的一条对角线. 延长 *AC* 至 *F*，反向延长 *AC* 至 *E*，使 *AE*＝*CF*. 求证：四边形 *EBFD* 是平行四边形.



（第 2 题）

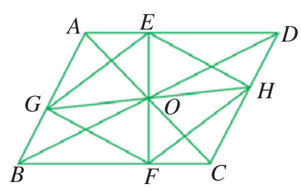


（第 3 题）

3. 已知：如图，在▱*ABCD* 中，∠*BAD* 和∠*BCD* 的平分线 *AF*，*CE* 分别与对角线 *BD* 交于点 *F*，*E*. 求证：四边形 *AFCE* 是平行四边形.

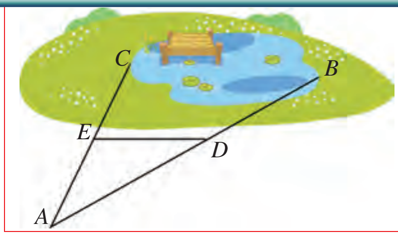
B 4. 已知在直角坐标系中，四边形 *ABCD* 四个顶点的坐标分别为 $A(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$，$B(1,-1)$，$C(\sqrt{3},\sqrt{2})$，$D(-1,1)$. 以点 *A*，*B*，*C*，*D* 为顶点的四边形是不是平行四边形？请给出证明.

5. 已知：如图，▱*ABCD* 的两条对角线相交于点 *O*，直线 *EF*，*GH* 过点 *O*，分别交 *AD*，*BC*，*AB*，*CD* 于点 *E*，*F*，*G*，*H*. 求证：四边形 *GFHE* 是平行四边形.



（第 5 题）

4·5 三角形的中位线



若D,E分别是AB,AC的中点,则只需测量出DE的长,就可以求出池塘的宽BC. 你知道为什么吗?

在本节中,我们将运用平行四边形的有关知识,探索三角形中位线的性质.

合作学习

HEZUOXUEXI

任意画一个$\triangle ABC$,然后分别取AB,AC的中点D,E,连结DE. 通过观察、测量等方法,你发现线段DE有哪些性质? 你能用命题的形式表述你所发现的性质吗? 试一试.

连结三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**. 如图 4-32,在$\triangle ABC$中,D,E分别是AB,AC的中点,DE就是$\triangle ABC$的一条中位线. 我们可得到下面三角形的中位线定理:

三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半.

已知:如图 4-32,DE是$\triangle ABC$的中位线.

求证:$DE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BC$.

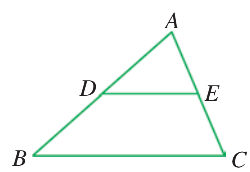


图 4-32

分析 因为E是AC的中点,可以考虑以点E为中心,把$\triangle ADE$按顺时针方向旋转$180°$,得到$\triangle CFE$,如图 4-33. 这样就只需证明四边形$BCFD$是平行四边形.

证明 如图 4-33,以点E为旋转中心,把$\triangle ADE$绕点E,按顺时针方向旋转$180°$,得$\triangle CFE$,则D,E,F同在一直线上,$DE=EF$,且$\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

$\therefore \quad \angle ADE=\angle F$,$AD=CF$,

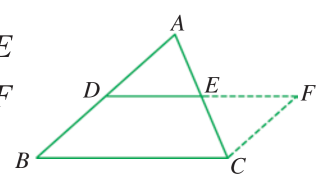


图 4-33

∴　$AB /\!/ CF$.

又∵　$BD=AD=CF$，

∴　四边形 $BCFD$ 是平行四边形(一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形)，

∴　$DF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} BC$(根据什么?)，

∴　$DE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}BC$.

> **想一想**
>
> 你能用不同的方法加以证明吗?

例　已知:如图 4-34,在四边形 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点.

求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

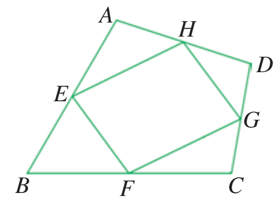


图 4-34

分析　由 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点,联想到运用三角形的中位线定理来证明.

证明　如图 4-35,连结 AC.

∵　EF 是△ABC 的中位线,

∴　$EF=\dfrac{1}{2}AC$ (三角形的中位线等于第三边的一半).

同理,$HG=\dfrac{1}{2}AC$.

∴　$EF=HG$.

同理可得 $EH=FG$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

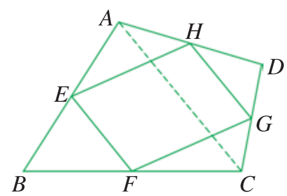
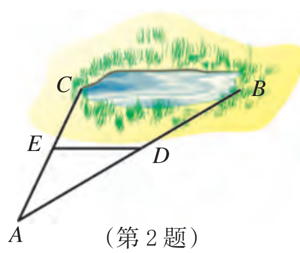


图 4-35

课内练习 KENEILIANXI

1. 任意作一个三角形,然后作出它的三条中位线.

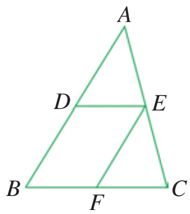
2. 要测量B,C 两地的距离,小明想出一个方法:在池塘外取点 A,得到线段 AB,AC,并取 AB,AC 的中点 D,E,连结DE.只要测出 DE 的长,就可以求得 B,C两地的距离.你认为这个方法正确吗?请说明理由.



(第 2 题)

作业题 ZUOYETI

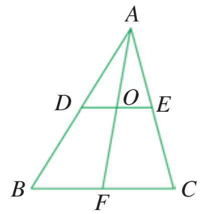
A 1. 三角形的周长为 18 cm，它的三条中位线围成的三角形的周长是__________.



（第 2 题）

2. 已知：如图，DE，EF 是△ABC 的两条中位线. 求证：四边形 $BFED$ 是平行四边形.

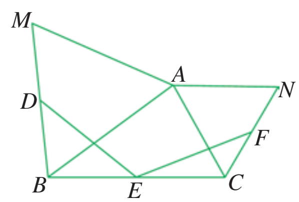
3. 已知：如图，DE 是△ABC 的中位线，AF 是 BC 边上的中线，DE 和 AF 交于点 O. 求证：DE 与 AF 互相平分.



（第 3 题）

B 4. 取任意一张三角形纸片，你能把它剪成四个全等的三角形吗？说明你的方法，并画出示意图.

C 5. 已知：如图，△ABC 是锐角三角形. 分别以 AB，AC 为边向外侧作等边三角形 ABM 和等边三角形 ACN. D，E，F 分别是 MB，BC，CN 的中点，连结 DE，FE. 求证：$DE=FE$.



（第 5 题）

4·6 反证法

根据路边的李树上结满了成熟的果子，有人推断这棵树上李子的味道一定是苦的. 你认为有道理吗？为什么？

中国古代有一个叫《路边苦李》的故事：

王戎 7 岁时，与小伙伴们外出游玩，看到路边的李树上结满了果子. 小伙伴们纷纷去摘取果子，只有王戎站在原地不动. 有人问王戎为什么，王戎回答说：“树在道边而多子，此必苦李.”小伙伴摘取李子尝了一下，果然是苦李.

王戎是怎样知道李子是苦的？他运用了怎样的推理方法？

在证明一个命题时，人们有时先假设命题不成立，从这样的假设出发，经过推理得出和已知条件矛盾，或者与定义、基本事实、定理等矛盾，从而得出假设命题不成立是错误的，即所求证的命题正确. 这种证明方法叫做**反证法**（proof by contradiction）.

例 求证：四边形中至少有一个角是钝角或直角.

已知：四边形 $ABCD$（图 4-36）.

求证：四边形 $ABCD$ 中至少有一个角是钝角或直角.

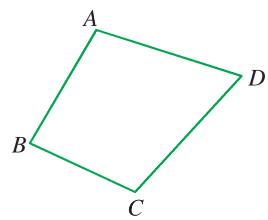


图 4-36

证明 假设四边形 $ABCD$ 中没有一个角是钝角或直角，即 $\angle A<90°$，$\angle B<90°$，$\angle C<90°$，$\angle D<90°$，

于是 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D<360°$.

这与“四边形的内角和为 360°”矛盾.

所以四边形 $ABCD$ 中至少有一个角是钝角或直角.

合作学习 HEZUOXUEXI

求证：**在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.**

（1）你会选择哪一种证明方法？

（2）如果你选择反证法，先怎样假设？结果和什么产生矛盾？

课内练习 KENEILIANXI

1. 用反证法证明（填空）：两直线平行，同位角相等.

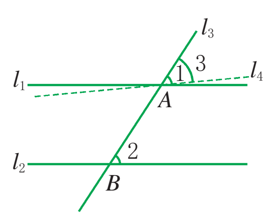
已知：如图，直线 l_1，l_2 被 l_3 所截，A，B 为交点，$l_1//l_2$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明：假设所求证的结论不成立，

即 ____ $\neq$ ____.

过点 A 作直线 l_4，使 l_4 与 l_3 所成的 $\angle 3$ 与



（第 1 题）

$\angle 2$ 相等，则 $\angle 3$____$\angle 1$，

所以直线 l_4 与直线 l_1 不重合.

但 $l_4 /\!/ l_2$(____________________)，又已知 $l_1 /\!/ l_2$，这与基本事实"________________________"产生矛盾. 所以________不成立.

所求证的结论成立.

2. 证明：在三角形中，至少有一个内角大于或等于 60°.

作业题 ZUOYETI

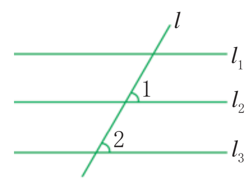
A

1. 已知：两条不重合的直线 AB，CD 相交. 求证：AB，CD 只有一个交点.

2. 求证：在直角三角形中，至少有一个锐角不大于 45°.

3. 求证：在同一平面内，如果一条直线与两条平行直线中的一条相交，那么和另一条也相交.

4. 已知：如图，直线 l 与 l_1，l_2，l_3 都相交，且 $l_1 /\!/ l_2$，$l_1 /\!/ l_3$. 求证：$\angle 1 = \angle 2$.



（第 4 题）

B

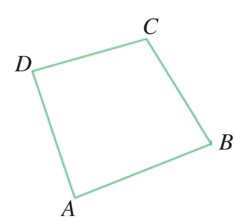
5. 反证法的思想也时常体现在人们的日常交流中，下面是有关的一个例子：

妈妈：小华，听说邻居小芳全家这几天正在外地旅游.

小华：妈妈，不可能，我昨天和今天上午都还在学校碰到了她和她妈妈呢！

上述对话中，小华要告诉妈妈的命题是什么？他是如何推断该命题的正确性的？在你的日常生活中也有类似的例子吗？请举一至两个例子.

6. 一块铁皮零料的形状如图所示，要从中裁出一块平行四边形铁皮，并使四个顶点分别落在原铁皮零料的四条边上. 可以怎样裁？



（第 6 题）

格点多边形的面积计算

如图4-37，多边形的各顶点都在方格纸的格点（横竖格子线的交错点）上，这样的多边形称为格点多边形. 要计算格点多边形的面积，当然我们可以通过统计多边形所围成的方格数得到. 有没有更简便的方法呢？我们进行如下的探索.

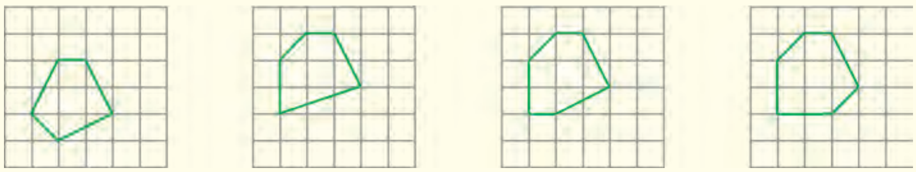

①　②　③　④

图 4-37

记格点多边形内的格点数为 a，边界上的格点数为 b，格点多边形的面积为 S. 图4-37①中，$a=4$，$b=5$；图4-37②中，$a=4$，$b=6$.

观察图4-37，多边形内的格点数 a 均为4，统计各多边形所围成的方格数，求出各多边形的面积，并填写右表.

图 4-37	①	②	③	④
b（个）				
S（平方单位）				

在图4-38的直角坐标系中画出 S 关于 b 的函数图象. 判断 S 关于 b 的函数是哪一类函数，并求出函数表达式.

上面你求出的函数表达式是当 $a=4$ 时的情况. 更一般地，格点多边形的面积公式可表示为 $S=ma+nb-1$（其中 m，n 为常数），你能猜测出 m，n 的值吗？说出你的结论及理由.

用图4-39验证你所得到的公式是否也适合凹多边形的情形.

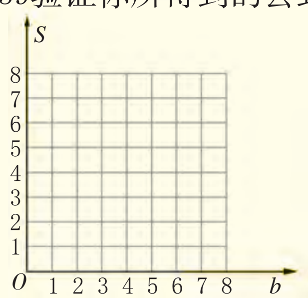


图 4-38

图 4-39

奥地利数学家皮克（G.Pick，1859～1942年）证明了格点多边形的面积公式. 查找有关皮克定理的资料，并和你探索的结果作比较.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 在平面内,由不在同一条直线上的若干条线段(线段的条数不小于3)____________而成的图形叫做多边形.

边数为4的多边形叫________. 四边形的内角和等于________, 外角和等于________. n边形的内角和为__________, 外角和为________.

2. 中心对称图形的性质:对称中心平分连结两个_________的线段.

在直角坐标系中,点(x,y)与点______关于原点对称.

3. 平行四边形的性质:

平行四边形的对边__________.

平行四边形的对角__________.

平行四边形的__________互相平分.

夹在两条平行线间的_________相等.

夹在_____________间的垂线段相等.

两条平行线中,一条直线上的点到另一条直线的距离,叫做这两条________.

平行四边形是__________对称图形,__________是它的对称中心.

4. 平行四边形的判定:

一组对边________________的四边形是平行四边形.

两组对边________________的四边形是平行四边形.

对角线__________________的四边形是平行四边形.

5. 连结三角形___________的线段叫做三角形的中位线.

三角形的中位线________第三边,并且等于第三边的_________.

6. 先假设命题不成立. 从假设出发,经过推理得出和_____矛盾,或者与______、_______、_______等矛盾,从而得出假设命题不成立是错误的, 即所求证命题正确. 这种证明方法叫做_________.

7. 在同一平面内,如果两条直线都和第三条直线平行,那么这两条直线也____.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
运用平行四边形的性质定理和判定定理进行论证或计算			
写出一个命题的逆命题			
在直角坐标系中,求一个已知点关于原点对称的点的坐标			
运用反证法证明命题			

目标与评定

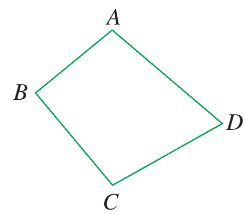
MUBIAOYUPINGDING

目标A 4.1 节

● 了解多边形的定义以及内角、外角、对角线等概念.

● 探索并掌握多边形的内角和与外角和公式.

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$\angle A=\angle C=100°$，则 $\angle D$ 的度数为__________.



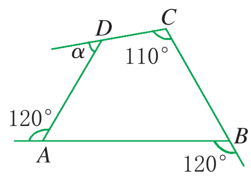
（第 1 题）

2. (1) 十二边形的内角和的度数是__________.

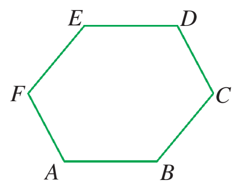
(2) 一个多边形的内角和是它的外角和的5.5倍，这个多边形的边数是__________.

3. 一个十边形有多少条对角线？

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=110°$，与 $\angle BAD$，$\angle ABC$ 相邻的外角都是 $120°$. 求 $\angle ADC$ 的外角 α 的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle B=\angle E$，$\angle A=\angle D$，$BC/\!/EF$.

(1) 求证：$AF/\!/CD$.

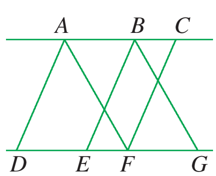
(2) 求 $\angle A+\angle B+\angle C$ 的度数.

目标B 4.2 节

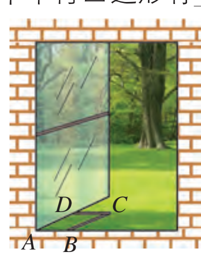
● 理解平行四边形的概念.

● 了解四边形的不稳定性.

6. 如图，点 A,B,C 在同一直线上，点 D,E,F,G 在同一直线上，且 $AC/\!/DG$，$AD/\!/BE/\!/CF$，$AF/\!/BG$. 图中平行四边形有________个.



（第 6 题）



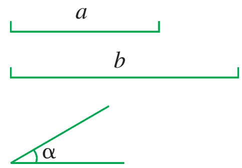
（第 7 题）

7. 如图，窗户的支撑装置（四边形 $ABCD$）被设计成平行四边形. 你能说明其中的理由吗？

8. 如图,已知线段a,b和$\angle\alpha$.

(1) 以线段a,b为一组邻边作一个平行四边形. 这样的平行四边形能作几个?

(2) 以线段a,b为一组邻边,它们的夹角为$\angle\alpha$,作一个平行四边形. 这样的平行四边形能作几个?



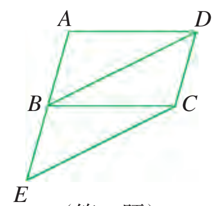
(第 8 题)

目标C
4.2 节

●探索并掌握平行四边形的性质定理:平行四边形的对边相等,对角相等,对角线互相平分.

●了解两条平行线之间的距离的意义,能度量两条平行线之间的距离.

9. 已知:如图,在▱$ABCD$中,点E在AB的延长线上,且$EC /\!/ BD$. 求证:$BE=AB$.

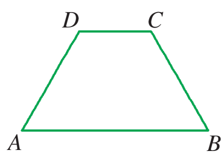


(第 9 题)

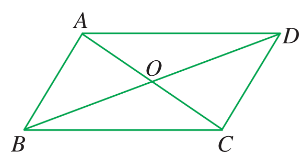
10. 已知:如图,在梯形$ABCD$中,$AB /\!/ CD$,$\angle A=\angle B=60^\circ$,$AB=2CD=10\text{ cm}$.

(1) 求证:$AD=BC$.

(2) 求AB与CD的距离.



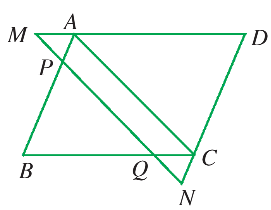
(第 10 题)



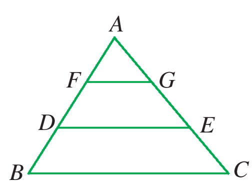
(第 11 题)

11. 如图,O是▱$ABCD$的对角线的交点. 已知$\triangle OBC$的周长为 59,$BD=38$,$AC=24$. 求AD的长.

12. 已知:如图,在▱$ABCD$中,$MN /\!/ AC$,分别交DA,DC的延长线于点M,N,交AB,CB于点P,Q. 求证:$MQ=NP$.



(第 12 题)



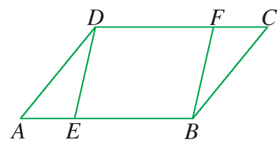
(第 13 题)

13. 已知:如图,在$\triangle ABC$中,$FG /\!/ DE /\!/ BC$,且$BD=DF=FA$.
求证:$DE+FG=BC$.

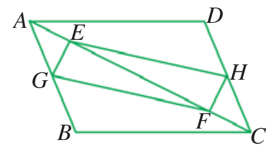
目标D 4.4节

●探索并掌握平行四边形的判定定理：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形.

14. 已知：如图，在▱$ABCD$中，点E，F分别在AB，CD上，且$AE=CF$. 求证：四边形$EBFD$是平行四边形.



（第14题）



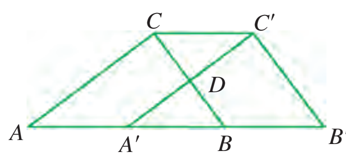
（第15题）

15. 已知：如图，在▱$ABCD$中，点G，H分别是AB，CD的中点，点E，F在AC上，且$AE=CF$. 求证：四边形$EGFH$是平行四边形.

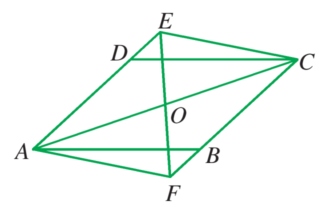
16. 已知：如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=$Rt∠，$AC=4$，$BC=3$. 将△ABC沿AB方向平移至△$A'B'C'$，使$A'C'$经过BC的中点D.

（1）求证：$AA'=A'B=BB'$.

（2）求梯形$AB'C'C$的面积.



（第16题）



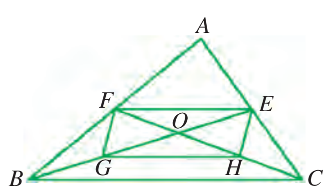
（第17题）

17. 已知：如图，在▱$ABCD$中，O为AC的中点，EF过点O，分别交AD，CB的延长线于点E，F. 求证：四边形$AFCE$是平行四边形.

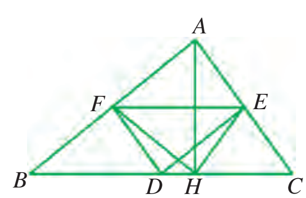
目标E 4.5节

●探索并掌握三角形中位线的性质.

18. 已知：如图，在△ABC中，中线BE，CF交于点O，G，H分别是OB，OC的中点，连结GH，EF，FG，EH. 求证：$FG\parallel EH$.



（第18题）



（第19题）

19. 已知：如图，在△ABC中，$AH\perp BC$于点H，D，E，F分别是BC，AC，AB的中点. 求证：△DEF≌△HFE.

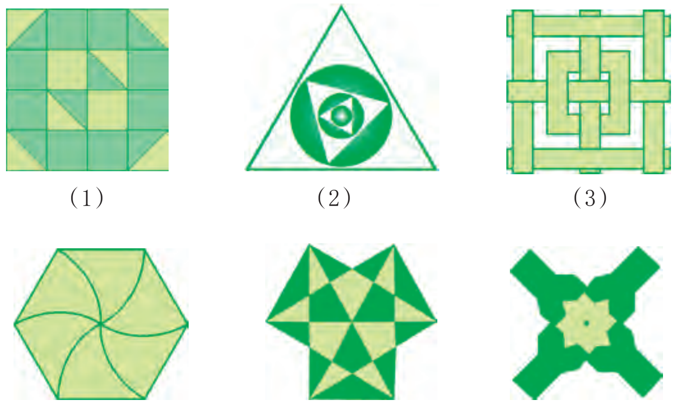
目标F 4.3节

●了解中心对称的概念，了解平行四边形是中心对称图形.

●了解中心对称的性质. 会作与已知图形关于已知点成中心对称的图形.

●会在直角坐标系中求已知点关于原点对称的点的坐标.

20. 下列各图案中，哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？哪些既是中心对称图形，又是轴对称图形？哪些既不是轴对称图形，也不是中心对称图形？



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(第20题)

21. 一块蛋糕的形状如图，表面是平行四边形，且有一个圆孔. 你能切一刀把它分成大小相等的两块吗？说出你的切法，并画出示意图.

(第21题)

22. 已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于直角坐标系的原点 O，点 A，B 的坐标为$(-1,3)$，$(1,2)$. 求点 C，D 的坐标.

目标G 4.6节

●体会反证法的含义.

●了解定理：在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

●会综合运用本章知识解决有关作图、计算和证明问题.

23. 用反证法证明“同旁内角不互补的两条直线不平行”（填空）.

已知：如图，直线 l_1，l_2 被直线 l_3 所截，$\angle 1+\angle 2$______180°.

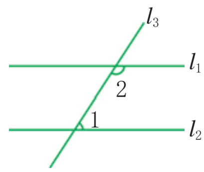
求证：直线 l_1 与 l_2______.

证明：假设 l_1______l_2，

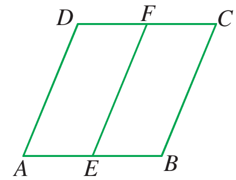
则$\angle 1+\angle 2$______180°(____________________).

这与 ________矛盾，故 ________不成立.

所以 ____.



（第 23 题）



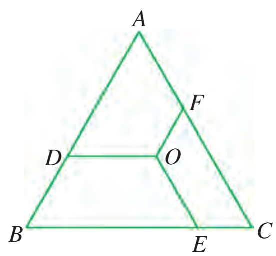
（第 24 题）

24. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，$EF\parallel BC$，交 CD 于 F. 求证：$CF=DF$.

25. 用反证法证明：如果一个三角形的两条较短边的平方和不等于较长边的平方，那么这个三角形不是直角三角形.

26. 在直角坐标系中，已知点 $A(2a,a-b+1)$，$B(b,a+1)$关于原点对称，求 a，b 的值，并写出这两个点的坐标.

27. 如图，O 是等边三角形 ABC 内任意一点，$OD\parallel BC$，$OE\parallel AC$，$OF\parallel AB$，点 D，E，F 分别在 AB，BC，AC 上. 求证：$OD+OE+OF=BC$.



（第 27 题）

第5章

特殊平行四边形

目录 CONTENTS<<

矩形、菱形、正方形这些特殊四边形具有许多有用的性质，而且图形工整、匀称、美观，设计方便，在人们的生活和生产实际中有着广泛的应用.

本章我们将学习矩形、菱形、正方形这些特殊四边形的概念、性质和判定.

5·1 矩形

矩形由于具有工整、美观、设计方便等特点，广泛地被人们所采用．你知道矩形具有哪些一般平行四边形所没有的性质吗？

合作学习

HEZUOXUEXI

用 6 根火柴棒首尾相接摆成一个平行四边形（图 5-1）．

① ②

图 5-1

议一议：

（1）能摆成多少个不同的平行四边形？它们有什么共同的特点？

（2）在这些平行四边形中，有没有面积最大的一个平行四边形？说出你的理由．

（3）这个面积最大的平行四边形的内角有什么特点？比较它的两条对角线的长度，你又发现了什么？

如图 5-2，我们把有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle）．小学里学过的长方形、正方形都是矩形．在人们的日常生活和生产实际中，矩形有着广泛的应用，如书本、黑板、电视机屏幕的表面等一般都采用矩形的形状（如图 5-3）．

图 5-2

图 5-3

矩形是特殊的平行四边形,所以它不但具有一般平行四边形的性质,而且还具有一些特殊的性质.

定理 1　**矩形的四个角都是直角**.

定理 2　**矩形的对角线相等**.

根据矩形的定义和平行四边形内角的性质,容易推得定理 1,请你写出证明过程. 下面给出定理 2 的证明.

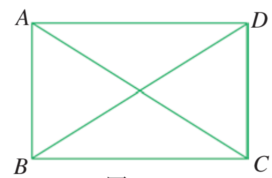


图 5-4

已知:AC,BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线(图 5-4).

求证:$AC=BD$.

证明　在矩形 $ABCD$ 中,

$AB=CD$(根据什么?),

$\angle ABC=\angle DCB=\mathrm{Rt}\angle$(矩形的四个角都是直角).

又 $BC=CB$,

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong \mathrm{Rt}\triangle DCB$.

$\therefore$ $AC=BD$.

例1　已知: 如图 5-5, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,$\angle AOD=120^\circ$, $AB=4\,\mathrm{cm}$.

(1) 判断 $\triangle AOB$ 的形状.

(2) 求矩形对角线的长.

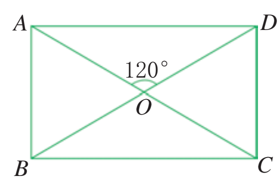


图 5-5

解　(1) 在矩形 $ABCD$ 中,

$AC=BD$(矩形的对角线相等).

$\because$ $OA=OC=\dfrac{1}{2}AC$, $OB=OD=\dfrac{1}{2}BD$ (平行四边形的对角线互相平分),

$\therefore$ $OA=OC=OB=OD$.

$\because$ $\angle AOD=120^\circ$,

$\therefore$ $\angle AOB=60^\circ$,

$\therefore$ $\triangle AOB$ 是等边三角形.

(2) $\because$ $AB=4\,\mathrm{cm}$,

$\therefore$ $AC=BD=2AB=8\,\mathrm{cm}$,即矩形对角线的长为 8 cm.

从上例可以看到，矩形的对角线相等且互相平分，并把矩形划分成四个等腰三角形. 如果过对角线交点 O 作两条直线 l_1,l_2 分别垂直于矩形的两条相邻的边(图 5-6)，那么直线 l_1,l_2 必定分别垂直平分两组对边. 所以，矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，它至少有两条对称轴.

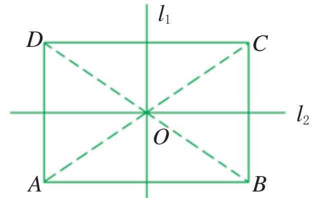
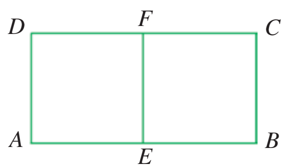


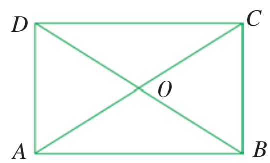
图 5-6

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB,CD 的中点. 求证：四边形 $AEFD$ 是矩形.



（第 1 题）



（第 2 题）

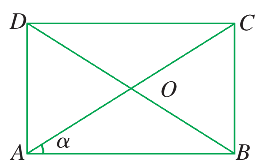
2. 如图，矩形$ABCD$ 的两条对角线相交于点O. 图中有多少对全等三角形？把它们写出来.

3. 已知矩形的周长为 56，对角线的交点到短边的距离比到长边的距离大 4. 求矩形的各边长.

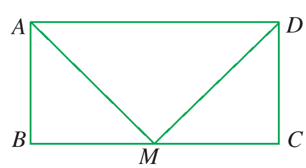
作业题 ZUOYETI

A

1. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O. 图中和 $\angle\alpha$ 相等的角有几个？把它们写出来.



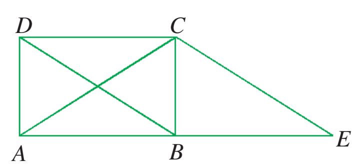
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，M 为 BC 的中点. 求证：$AM=DM$.

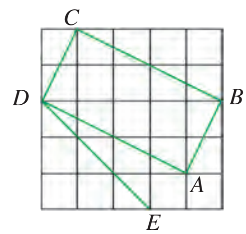
3. 已知：如图，过矩形 $ABCD$ 的顶点作 $CE/\!/BD$，交 AB 的延长线于点 E. 求证：$\angle CAE=\angle CEA$.



（第 3 题）

B **4.** (1) 判断如图 5×5 方格内四边形 $ABCD$ 是不是矩形，请说明理由.

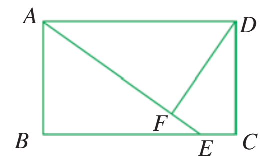
(2) 以 DE 为一边作一个矩形，要求另外两个顶点也在方格顶点上.



（第 4 题）

5. 利用矩形的性质定理“矩形的对角线相等”证明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

C **6.** 已知：如图，在矩形$ABCD$ 中，E 是BC 上一点，且$AE=AD$，$DF\perp AE$ 于点 F. 求证：$CE=FE$.



（第 6 题）

2

要判定一个四边形是矩形，除了利用定义之外，还有以下的定理：

定理 1　**有三个角是直角的四边形是矩形.**

定理 2　**对角线相等的平行四边形是矩形.**

请你自己完成定理 1 的证明过程. 下面给出定理 2 的证明.

已知：如图 5-7，在▱$ABCD$ 中，$AC=BD$.

求证：▱$ABCD$ 是矩形.

分析　要证明▱$ABCD$ 是矩形，只要证明其中一个角是直角，这可以通过证明一组邻角相等得到.

证明　如图 5-7，在▱$ABCD$ 中，$AB=CD$.

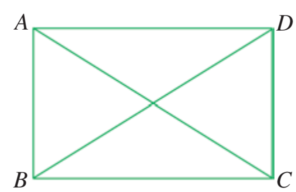


图 5-7

又 ∵　$AC=DB$，$BC=CB$，

∴　$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

∴　$\angle ABC=\angle DCB$.

∵　$AB/\!/CD$（根据什么？），

∴　$\angle ABC+\angle DCB=180°$.

∴　$\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times180°=90°$.

∴　▱$ABCD$ 是矩形（矩形的定义）.

例2 如图 5-8，一张四边形纸板 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直. 若要从这张纸板中剪出一个矩形，并使它的四个顶点分别落在四边形 $ABCD$ 的四条边上，可怎样剪？

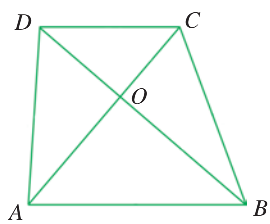


图 5-8

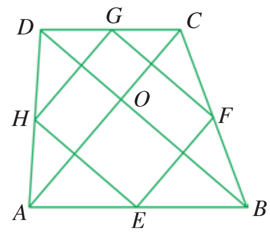


图 5-9

解 如图 5-9，分别取 AB,BC,CD,DA 的中点 E,F,G,H，依次连结 EF，FG,GH,HE. 沿四边形 $EFGH$ 的各条边剪，就能剪出符合要求的矩形. 下面给出证明.

$\because$ EF 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线，

$\therefore$ $EF /\!/ AC$（根据什么？）.

$\because$ $AC \perp BD$，

$\therefore$ $EF \perp BD$.

$\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的一条中位线，

$\therefore$ $EH /\!/ BD$，

$\therefore$ $EF \perp EH$，即 $\angle HEF = \mathrm{Rt}\angle$.

同理，$\angle EHG = \mathrm{Rt}\angle$，$\angle HGF = \mathrm{Rt}\angle$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

课内练习 KENEILIANXI

1. 判断下列命题是否正确，并说明理由.

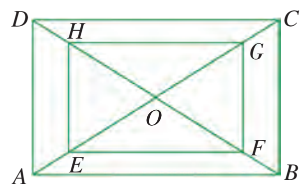
（1）对角互补的平行四边形是矩形.

（2）一组邻角相等的平行四边形是矩形.

（3）对角线相等的四边形是矩形.

（4）内角都相等的四边形是矩形.

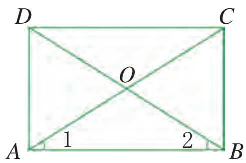
2. 已知：如图，AC,BD 是矩形 $ABCD$ 的两条对角线，$AE=CG=BF=DH$.
求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



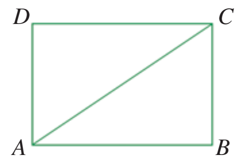
（第 2 题）

作业题

A **1.** 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$.
求证：▱$ABCD$ 是矩形.



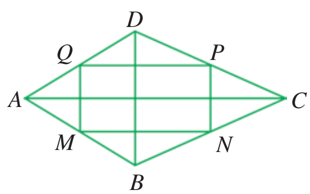
（第 1 题）



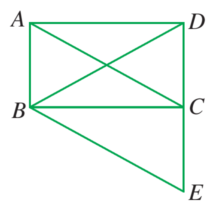
（第 2 题）

2. 已知：如图，Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle CDA$，其中点 A，D 的对应点分别是 C，B，$\angle B=\angle D=$ Rt$\angle$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

B **3.** 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，点 M，N，P，Q 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $MNPQ$ 是矩形.



（第 3 题）



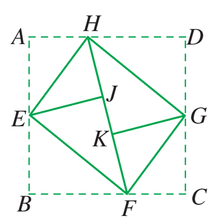
（第 4 题）

4. 如图，BC 是等腰三角形 BED 的底边 ED 上的高线，四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

C **5.** 已知：如图，将矩形纸 $ABCD$ 的四个角向内折起，恰好拼成一个无缝隙、无重叠的四边形 $EFGH$.

（1）求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

（2）若 $EH=3\,\text{cm}$，$EF=4\,\text{cm}$，求边 AD 的长.



（第 5 题）

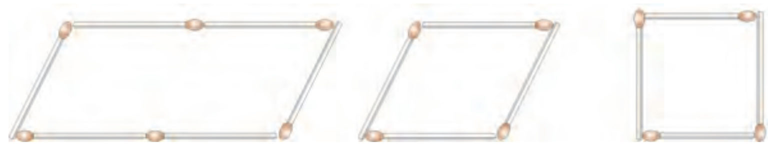
5·2 菱形

菱形是一种美观且性质丰富的图形.如图是甘肃永昌出土的菱形图案彩纹陶罐.

1

合作学习 HEZUOXUEXI

观察以下由火柴棒摆成的图形(如图 5-10).



①　　②　　③

图 5-10

议一议:

(1) 三个图形都是平行四边形吗?

(2) 与图①相比,图②与图③有什么共同特点?

我们把一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**(rhombus).例如,图 5-10 中,图②,图③都是菱形.菱形具有工整、匀称、美观等许多优点,常被人们用在图案设计上,如图 5-11.

窗花

比利时地毯

中国古代墙面装饰

图 5-11

菱形也是特殊的平行四边形,所以它除具有一般平行四边形的性质外,还具有一些特殊的性质.

定理 1　**菱形的四条边都相等**.

定理 2　**菱形的对角线互相垂直，并且每条对角线平分一组对角**.

定理 1 的证明比较简单，请你自己完成. 下面我们给出定理 2 的证明.

已知：在菱形 $ABCD$ 中(图 5-12)，对角线 AC，BD 相交于点 O.

求证：$AC \perp BD$，AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$，BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$.

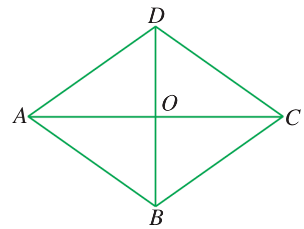


图 5-12

证明　$\because$　四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore$　$AB=AD$ (菱形的定义)，

　$BO=DO$ (根据什么？).

$\therefore$　$AC \perp BD$，AC 平分 $\angle BAD$.

同理，AC 平分 $\angle BCD$，BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$.

由定理 2 可以得出，菱形是轴对称图形，它的两条对角线所在的直线都是它的对称轴.

例1　如图 5-13，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle BAC=30^\circ$，$BD=6$. 求菱形的边长和对角线 AC 的长.

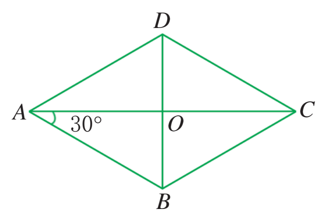


图 5-13

解　在菱形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$ (根据什么？)，

AC 平分 $\angle BAD$ (菱形的每条对角线平分一组对角).

又 $\because$　$\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore$　$\angle BAD=60^\circ$，

$\therefore$　$\triangle ABD$ 是等边三角形，

$\therefore$　$AB=BD=6$.

又 $\because$　$OB=OD=3$，

　$AC \perp BD$ (菱形的对角线互相垂直)，

由勾股定理，得 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

$\therefore$　$AC=2AO=6\sqrt{3}$.

课内练习 KENEIJIANXI

1. 菱形具有而矩形不一定有的性质是（　　）

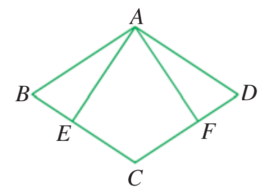
（A）对角线互相平分.

（B）四条边都相等.

（C）对角相等.

（D）邻角互补.

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足为 E，F. 求证：$AE=AF$.

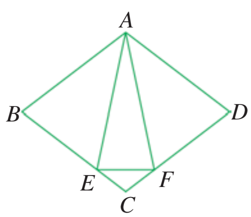


（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

A 1. 已知菱形的两条对角线长分别为 a，b，求菱形的面积.

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 CB，CD 上的点，且 $BE=DF$. 求证：$\angle AEF=\angle AFE$.

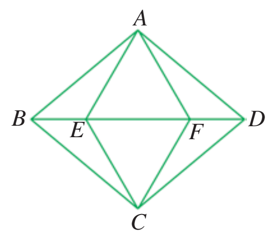


（第 2 题）

3. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $AECF$ 都是菱形，点 E，F 在 BD 上. 已知 $\angle BAD=100°$，$\angle EAF=60°$，求：

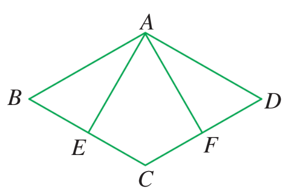
（1）$\angle ABD$ 的度数.

（2）$\angle BAE$ 的度数.

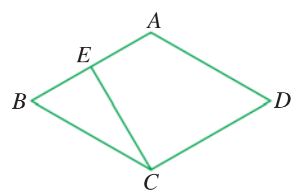


（第 3 题）

B 4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 的中点，且 $AE\perp BC$，$AF\perp CD$. 求菱形各个内角的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

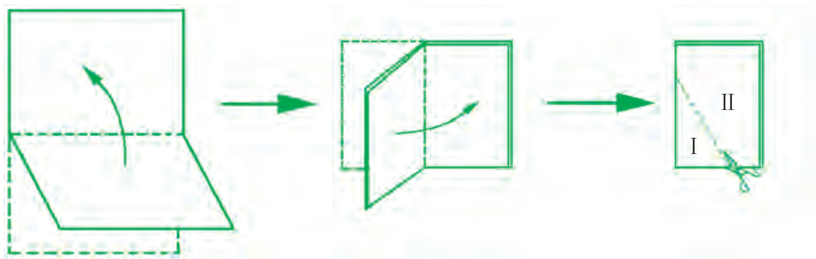
5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$CE\perp AB$ 于点 E. 已知 $\angle BCE=30°$，$CE=3\,\text{cm}$，求菱形 $ABCD$ 的周长和面积.

C 6. 剪两个全等的等腰三角形（三边不全相等）纸片，拼成一个平行四边形. 有几种拼法？拼出的平行四边形都是菱形吗？如果不都是菱形，怎样拼才是菱形？说明拼法，并画出示意图.

合作学习

HEZUOXUEXI

取一张长方形纸片,按图 5-14 的方法对折两次,并沿图③中的斜线(虚线)剪开,把剪下的Ⅰ这部分展开,平铺在桌面上.



① ② ③

图 5-14

议一议:

(1) 剪出的这个图形是哪一种四边形?一定是菱形吗?

(2) 根据折叠、裁剪的过程,这个四边形的边和对角线分别具有什么性质?

(3) 一个平行四边形具备怎样的条件,就可以判定它是菱形?

一般地,判定菱形有以下的定理:

定理 1　**四条边相等的四边形是菱形.**

定理 2　**对角线互相垂直的平行四边形是菱形.**

请你自己完成定理 1 的证明. 下面我们给出定理 2 的证明.

已知:如图 5-15,在▱$ABCD$ 中,$BD\perp AC$,O 为垂足.

求证:▱$ABCD$ 是菱形.

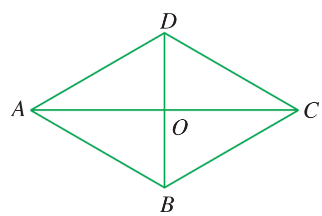


图 5-15

证明　在▱$ABCD$ 中,

$AO=CO$(平行四边形的对角线互相平分).

$\because$　$BD\perp AC$,

$\therefore$　$AD=CD$(根据什么?).

$\therefore$　▱$ABCD$ 是菱形(菱形的定义).

例2 如图 5-16,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC 的垂直平分线与边 AD,BC 分别交于点 E,F. 求证:四边形 $AFCE$ 是菱形.

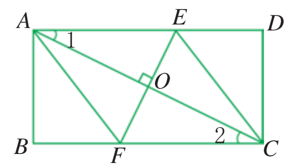


图 5-16

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ $AE /\!/ CF$(矩形的定义),

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

又 $\because$ $\angle AOE = \angle COF$,$AO = CO$,

$\therefore$ $\triangle AOE \cong \triangle COF$,

$\therefore$ $EO = FO$.

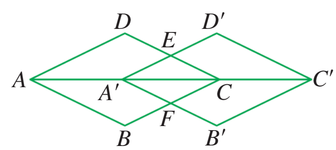
$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).

又 $\because$ $EF \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形(对角线互相垂直的平行四边形是菱形).

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图,将菱形 $ABCD$ 沿 AC 方向平移至 $A'B'C'D'$,$A'D'$ 交 CD 于点 E,$A'B'$ 交 BC 于点 F. 判断四边形 $A'FCE$ 是不是菱形,并说明理由.



(第 1 题)

2. 说出命题"菱形的对角线互相垂直"的逆命题,并判断它是否成立.

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 5-17,DF,EF 是 $\triangle ABC$ 的两条中位线. 我们探究的问题是:这两条中位线和三角形的两条边所围成的四边形的形状与原三角形的边或角有什么关系?建议按下列步骤探索:

(1) 围成的四边形是否必定是平行四边形?

(2) 在什么条件下,围成的四边形是菱形?

(3) 在什么条件下,围成的四边形是矩形?

(4) 你还能发现其他什么结论吗?

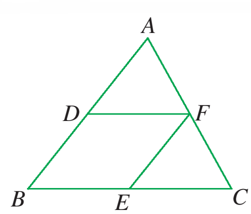
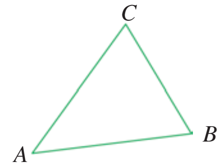


图 5-17

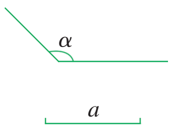
作业题

A **1.** 如图，在△*ABC* 中，*AB*＝*AC*．△*ABC* 经怎样的运动，所得图形与△*ABC* 组成一个菱形？叙述图形的运动过程，并作出所得的图形.



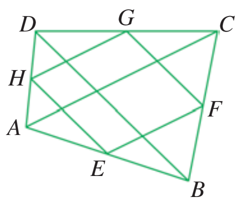
（第 1 题）

2. 已知∠α 和线段 *a*，如图．用直尺和圆规作一个菱形，使它的一个内角等于∠α，边长为 *a*.

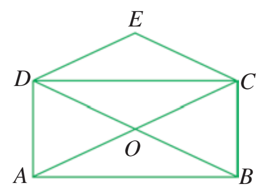


（第 2 题）

3. 已知：如图，在四边形 *ABCD* 中，*AC*＝*BD*．*E*，*F*，*G*，*H* 依次是 *AB*，*BC*，*CD*，*DA* 的中点．求证：四边形 *EFGH* 是菱形.



（第 3 题）



（第 4 题）

B **4.** 已知：如图，*O* 是矩形 *ABCD* 的对角线的交点．作 *DE*∥*AC*，*CE*∥*BD*，*DE*，*CE* 相交于点 *E*．求证：四边形 *OCED* 是菱形.

5. 在直角坐标系中，四边形 *ABCD* 的顶点 *A*，*B*，*C*，*D* 的坐标依次为 (−1，0)，(*x*，*y*)，(−1，5)，(−7，*z*)．求 *x*，*y*，*z* 的值，使得四边形 *ABCD* 是菱形.

5·3 正方形

给你一张正方形的彩色纸，你能一刀剪出如图所示的正方形孔吗？

1

回顾并思考：

1. 我们已经学习过哪些特殊的平行四边形？
2. 是否存在一组邻边相等的特殊的矩形？若存在，它是什么图形？
3. 是否存在一个角是直角的菱形？若存在，它是什么图形？

在图 5-18 中填上各种图形的名称和转化的条件.

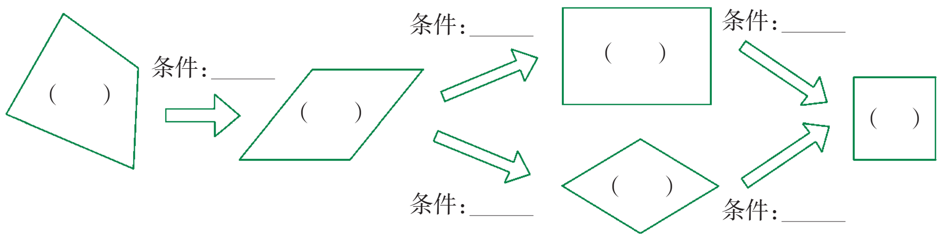


图 5-18

我们把有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**(square). 正方形既是特殊的矩形,又是特殊的菱形. 完成图 5-18 的填空后,我们就能得到一些正方形的判定定理,如:

有一组邻边相等的矩形是正方形.

有一个角是直角的菱形是正方形.

你还得到哪些判定一个四边形是正方形的定理?把它们写下来,与你的同伴交流.

做一做 ZUOYIZUO

判断题(对的在括号内打“✓”,错的在括号内打“×”):

(1) 对角线互相垂直,一个角是直角的四边形是正方形. ( )

(2) 如果一个菱形的对角线相等,那么它一定是正方形. ( )

(3) 如果一个矩形的对角线互相垂直,那么它一定是正方形. ( )

(4) 四条边相等,且有一个角是直角的四边形是正方形. ( )

例1 已知:如图 5-19,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CD 是 $\angle ACB$ 的平分线,$DE\perp BC$,$DF\perp AC$,垂足分别是 E,F.

求证:四边形 $CFDE$ 是正方形.

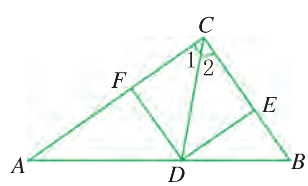


图 5-19

证明 $\because$ $DE\perp BC$,$DF\perp AC$,

$\therefore$ $\angle DEC=\angle DFC=90°$.

而$\angle ACB=90°$,

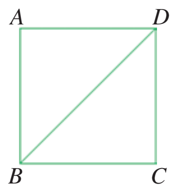
$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是矩形(有三个角是直角的四边形是矩形).

又 $\because$ CD 是$\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ $DE=DF$(为什么?).

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是正方形(有一组邻边相等的矩形是正方形).



（第 1 题）

课内练习 KENEILIANXI

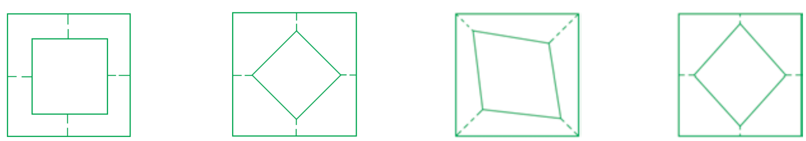
1. 已知：如图，$\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都是等腰直角三角形，$\angle A=\angle C=\text{Rt}\angle$. 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

2. 求证：依次连结正方形各边中点所成的四边形是正方形.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 将一张正方形纸片按如图步骤①，②，沿虚线对折两次，然后沿③中的虚线剪去一个角，展开铺平后的图形是(　　)

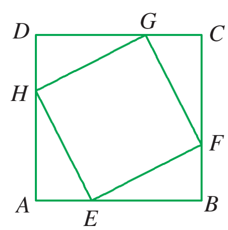
（第 1 题）



2. 判断命题"对角线互相垂直且相等的四边形是正方形"是否成立. 如果认为不成立，请增加一个条件使它成立.

3. 求证：矩形的各内角平分线围成的四边形是正方形.

4. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是它的四条边上的点，且 $AE=BF=CG=DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.



（第 4 题）

B **5.** 已知在直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的四个顶点坐标依次是 $A(-a,-b)$，$B(a,-b)$，$C(a,b)$，$D(-a,b)$. 这个四边形是正方形吗？如果认为是正方形，给出证明；如果认为不一定是正方形，请增加一个条件，使它是正方形(不必证明).

正方形既是特殊的矩形，又是特殊的菱形，所以正方形同时具有矩形和菱形的所有性质，于是就有以下定理：

正方形的四个角都是直角，四条边相等.

正方形的对角线相等，并且互相垂直平分，每条对角线平分一组对角.

例2 已知：如图 5-20，在正方形 $ABCD$ 中，G 是对角线 BD 上的一点，$GE \perp CD$，$GF \perp BC$，E，F 分别为垂足，连结 AG，EF. 求证：$AG=EF$.

分析 由已知可得，BD 平分 $\angle ADC$，$AD=CD$. 如果连结 CG，那么很容易发现 $\triangle AGD \cong \triangle CGD$，得 $AG=CG$. 由此我们只需证明四边形 $FCEG$ 是矩形，就能完成证明.

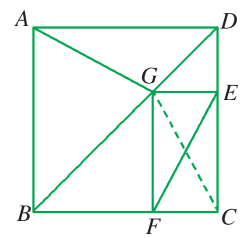


图 5-20

证明 如图 5-20，连结 CG.

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle CGD$ 中，

$\angle ADG=\angle CDG$（正方形的对角线平分一组对角），

$DG=DG$，$AD=CD$（正方形的四条边相等），

$\therefore$ $\triangle AGD \cong \triangle CGD$，

$\therefore$ $AG=CG$.

$\because$ $GE \perp CD$，$GF \perp BC$，

$\therefore$ $\angle GFC=\angle GEC=\mathrm{Rt}\angle$.

又 $\because$ $\angle BCD=\mathrm{Rt}\angle$（正方形的四个角都是直角），

$\therefore$ 四边形 $FCEG$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形），

$\therefore$ $EF=CG$（矩形的两条对角线相等），

$\therefore$ $AG=EF$.

课内练习 KENEIIANXI

1. 正方形具有而菱形不一定有的性质是(　　)

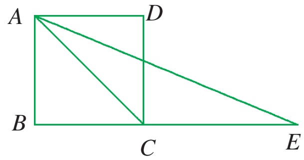
（A）四条边相等.

（B）对角线互相垂直平分.

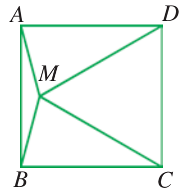
（C）对角线平分一组对角.

（D）对角线相等.

2. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,延长 BC 至 E,使 $CE=CA$. 求 $\angle CAE$ 的度数.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,M 是正方形内一点,且 $MC=MD=AD$. 求 $\angle BAM$ 的度数.

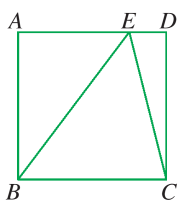
作业题 ZUOYETI

A 1. 正方形具有而矩形不一定有的性质是(　　)

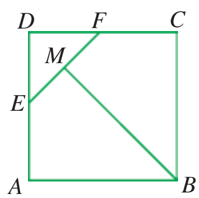
(A) 四个角相等.　　　　(B) 对角线互相垂直.

(C) 对角线相等.　　　　(D) 对角互补.

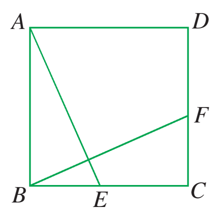
2. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 8,E 为边 AD 上一点. 若 $BE=10$,则 $CE=$________.



(第 2 题)



(第 3 题)

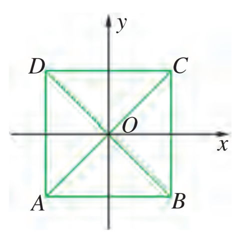


(第 4 题)

3. 已知:如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AD,CD 上的点,且 $DE=DF$,$BM\perp EF$ 于点 M. 求证: $ME=MF$.

4. 已知:如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 BC,CD 上的点,$AE\perp BF$. 求证: $AE=BF$.

B 5. 如图,在直角坐标系中,正方形 $ABCD$ 的对角线交点是原点 O,两组对边分别与 x 轴,y 轴平行. 若正方形的对角线长为 $2\sqrt{2}$,求正方形各顶点的坐标.

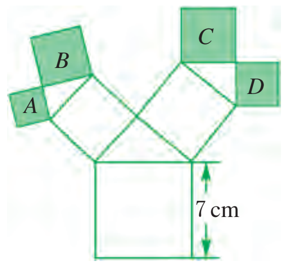


(第 5 题)

6. 如图,已知所有的四边形都是正方形,所有的三角形都是直角三角形,其中最大正方形的边长为 7 cm.

(1) 求 A,B,C,D 四个正方形的面积之和.

(2) 若其中每个直角三角形的最短边与最长边的长度之比都为 3:5,求正方形 A,B,C,D 的面积.



(第 6 题)

设计题 SHEJITI

准备一张矩形纸片和一张平行四边形纸片,尝试以下操作.

1. 把平行四边形纸片割补成一个矩形. 怎样操作能使分割线的条数最少?

2. 把矩形纸片割补成有一个角为60°的平行四边形. 怎样操作能使分割线最少?

通过上述活动,你获得哪些经验?

(请与你的同伴交流)

试一试:两张正方形纸片拼在一起,如图5-21. 把它割补成一个更大的正方形,并使分割线的条数最少.

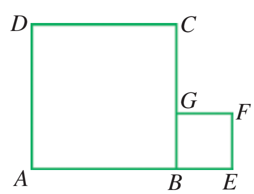


图 5-21

有趣的拼图

让我们先做一个简单的游戏.

如图 5-22 表示一个乒乓球放在由四根木棒搭成的“杯子”里. 你能只移动其中的两根木棒,使乒乓球跑到“杯子”外面吗? 试一试.

图 5-22

现在我们来讨论下面的问题.

如图 5-23 是由 8 个全等的正方形拼成的图形. 能否只剪两刀,将它分成三块,拼成一个大正方形?

我们可以这样来思考: 如果设每个小正方形的面积为 1,则拼成的大正方形的面积为 8,其边长为 $2\sqrt{2}$. 由此可见,剪痕应是 2×2 方格的对角线.如图 5-24,沿 AB,CD 各剪一刀,就可以拼成如图 5-25 的大正方形.

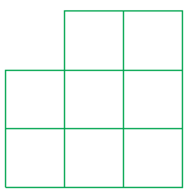


图 5-23

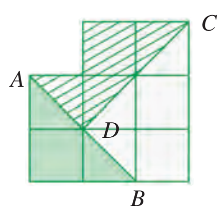


图 5-24

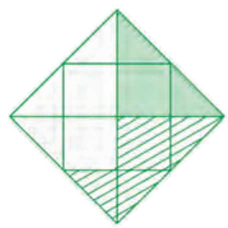


图 5-25

试一试:

如图 5-26 是由 5 个全等的正方形拼成的图形. 把它剪拼成一个大正方形,并使剪痕的条数最少.

本文开头有关乒乓球的拼图游戏你做出来了吗? 答案如图 5-27.

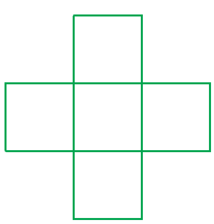


图 5-26

图 5-27

小结

XIAOJIE

填空.

1. 有一个角是________的________叫做矩形.

矩形的______个角都是直角.

矩形的对角线________.

矩形既是______对称图形，又是______对称图形，它至少有______条对称轴.

有______个角是直角的四边形是矩形.

对角线相等的__________是矩形.

2. 一组________相等的________叫做菱形.

菱形的______条边都相等.

菱形的________互相垂直，并且每条对角线平分_______.

菱形既是______对称图形，又是______对称图形，它至少有_______条对称轴.

四条边相等的四边形是__________.

对角线____________的平行四边形是菱形.

3. 有一组________相等，并且有一个角是________的平行四边形叫做正方形.

正方形的_______个角都是直角，四条边都__________.

正方形的对角线________，并且________，每条对角线平分一组________.

正方形既是_______对称图形，又是______对称图形，有______条对称轴.

有一组邻边相等的__________是正方形.

有一个角是直角的__________是正方形.

4. 几种四边形的关系可表示为：

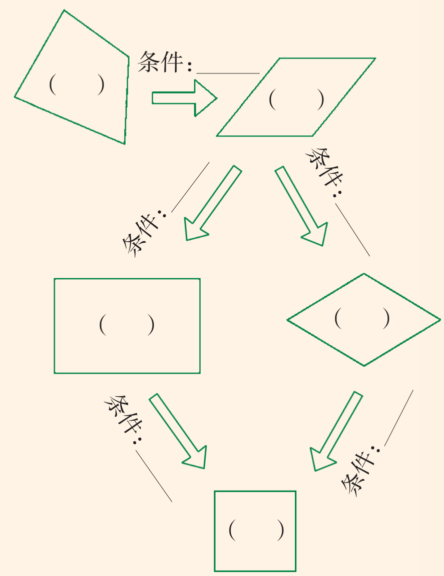


图 5-28

填表.

技能内容	学会程度		
	学 会	基本学会	不 会
运用矩形、菱形和正方形的性质进行计算和证明几何命题			
判定一个平行四边形是矩形、菱形、正方形			

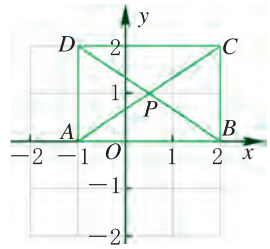
目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 5.1 节 5.2 节

●理解矩形、菱形的概念，探索并证明矩形、菱形的性质定理，以及它们的判定定理.

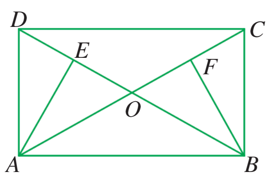
1. 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AC=10$，$\angle ACB=30^\circ$，则 $\angle AOB=$______，$CD=$______.



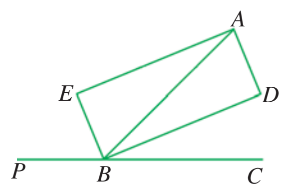
（第 2 题）

2. 如图，在直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$. 写出它的各个顶点及对角线 AC，BD 的交点 P 的坐标.

3. 已知：如图，在矩形$ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于点 E，$BF\perp AC$ 于点 F. 求证：$AE=BF$.



（第 3 题）



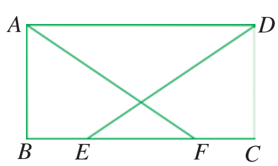
（第 4 题）

4. 已知：如图，P，B，C 在同一条直线上，BD，BE 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ABP$ 的平分线，$AE\perp BE$，$AD\perp BD$，E，D 为垂足. 求证：四边形 $AEBD$ 是矩形.

5. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 为 BC 上的两点，且 $BE=CF$，$AF=DE$. 求证：

（1）$\triangle ABF\cong\triangle DCE$.

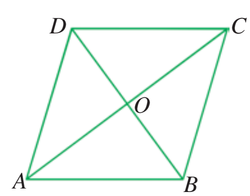
（2）▱$ABCD$ 是矩形.



（第 5 题）

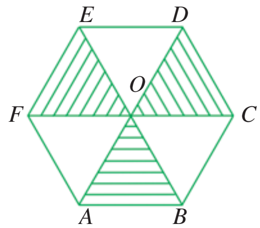
6. 已知菱形的周长为 16 cm，一个内角为 60°，求菱形的面积.

7. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 O. 已知 $AC=16$ cm，$BD=12$ cm，求菱形 $ABCD$ 的高线长.

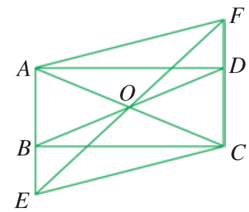


（第 7 题）

8. 如图图案由 6 个正三角形组成. 找出图中所有的菱形.



（第 8 题）



（第 9 题）

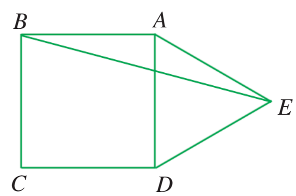
9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，O 是 AC 与 BD 的交点，过 O 的直线分别与 AB，CD 的延长线交于点 E，F. 当 AC 与 EF 满足什么条件时，四边形 $AECF$ 是菱形？请给出证明.

目标B
5.3 节

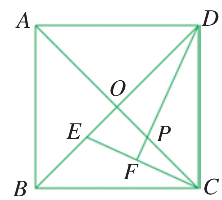
●理解正方形的概念，探索并掌握正方形的对称性及其他有关性质，以及一个四边形是正方形的条件.

10. 如图，以正方形 $ABCD$ 的一边 AD 为边向外作等边三角形 ADE，则$\angle BED$ 等于（　　）

（A）30°.　　（B）37.5°.　　（C）45°.　　（D）50°.



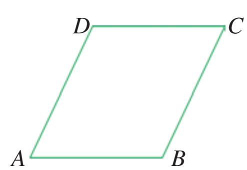
（第 10 题）



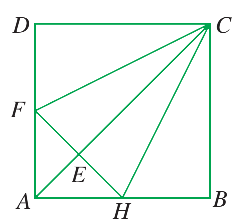
（第 11 题）

11. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，E 为 OB 上一点，$DF \perp EC$ 于点 F，交 CO 于点 P. 求证：$OE=OP$.

12. 如图，在▱$ABCD$ 中，AB 边上的高线长与 AB 边的长相等. 你能把▱$ABCD$ 割补成一个正方形吗？若能，请说明方法及理由.



（第 12 题）



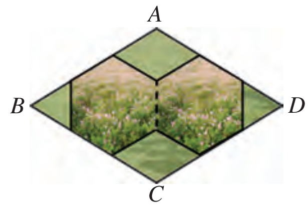
（第 13 题）

13. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是对角线 AC 上一点，$EF \perp AC$，交 AD，AB 于点 F，H. 求证：$CF=CH$.

目标C

●会初步综合应用特殊平行四边形的知识，解决一些简单的实际问题.

14. 如图，菱形花坛 $ABCD$ 的边长为 6 m，$\angle B=60^\circ$，其中由两个正六边形(各条边都相等，各个内角都相等)组成的图形部分种花，求种花部分的周长和面积.



（第 14 题）

（第 15 题）

15. 如图所示的红丝带是全世界关心艾滋病患者行动的标志，它将宽 1 cm 的红丝带交叉成 60° 角重叠在一起. 求重叠部分四边形的面积.

16. 有一张三角形纸片，要把它剪拼成一个矩形，要求剪的刀数尽可能少. 应怎样剪拼？请画出示意图.

第6章

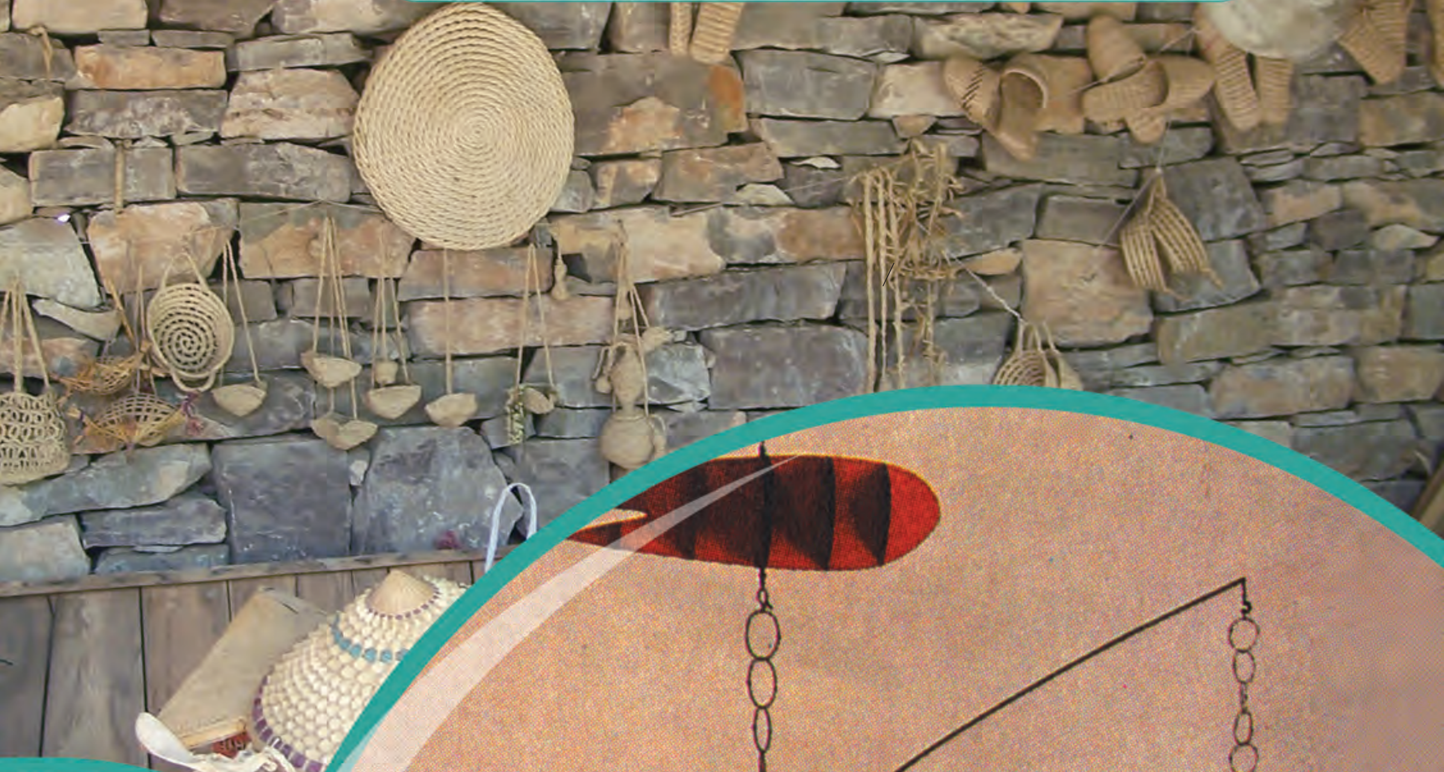
反比例函数

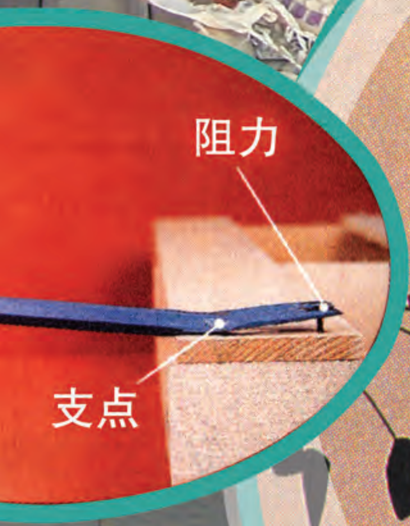
目录 CONTENTS<<

一名工人一天能做6～8个某种型号的工艺品．若某工艺品厂每天生产60个这种工艺品，则需要工人多少人？

如下图，阻力为1 000 N，阻力臂长为5 cm，那么动力y(N)与动力臂长x(cm)之间有怎样的函数关系？

解决上述问题涉及反比例函数的概念．反比例函数是刻画现实世界的重要数学模型，在人们的生活、生产以及科研中有着广泛的应用．本章我们将学习反比例函数的概念、图象和性质，以及反比例函数的一些简单的实际应用．





6·1 反比例函数

一辆汽车前灯灯泡的亮度与通过的电流大小有关.电流越大,灯就越亮.如果电压不变,电阻增大了,那么汽车前灯的亮度将发生什么变化?你能用数学方法给出解释吗?

①

在小学里我们已经学过,如果两个变量的积是一个不为零的常数,我们就说这两个变量成反比例.

思考并回答下面的问题.

1. 北京到杭州铁路线长约为1 600 km.一列火车从北京开往杭州,记火车全程的行驶时间为x(h),火车行驶的平均速度为y(km/h),你能完成表6-1吗?y与x有什么数量关系?能用一个函数表达式表示吗?

表6-1

x(h)	5	6	12		20
y(km/h)				100	

2. 测量质量都是100 g的金、铜、铁、铝四种金属块的体积V(cm^3),获得数据如表6-2所示.表中ρ(g/cm^3)表示金属块的密度.已知锌的密度是7.14 g/cm^3,金的密度是19.30 g/cm^3,请完成表6-2. V与ρ有什么数量关系?能用一个函数表达式表示吗?

表6-2

金属种类 / 相关量	金	铜	铁	锌	铝
V(cm^3)	5.18	11.21	12.82		35.84
ρ(g/cm^3)	19.30			7.14	

我们把函数$y=\dfrac{k}{x}$(k为常数,$k\neq0$)叫做**反比例函数**(reciprocal function).这里x是自变量,y是关于x的函数,k叫做**比例系数**.例如,前面得到的$y=\dfrac{1\,600}{x}$,$\rho=\dfrac{100}{V}$都是反比例函数,其中比例系数分别是1 600,100.

显然,反比例函数的自变量x的取值不能为零.

做一做

下列函数中，哪些是反比例函数？是反比例函数的，指出其比例系数和自变量的取值范围.

(1) $y=\frac{1}{2}x$.　(2) $y=\frac{-3}{x}$.　(3) $y=\frac{1}{3x}$.　(4) $y=\frac{2}{x-3}$.

例1　如图 6-1，阻力为 1 000 N，阻力臂长为 5 cm. 设动力为 y(N)，动力臂长为 x(cm)(图中杠杆本身所受重力略去不计. 杠杆平衡时，动力×动力臂＝阻力×阻力臂).

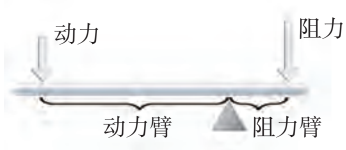


图 6-1

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式. 这个函数是反比例函数吗？如果是，说出比例系数.

(2) 求当 $x=50$ 时，函数 y 的值，并说明这个值的实际意义.

(3) 利用 y 关于 x 的函数表达式，说明当动力臂长扩大到原来的 $n(n>1)$ 倍时，所需动力将怎样变化？

解　(1) 根据题意，得　$y\times x=1\,000\times 5$，

所以所求函数的表达式为 $y=\frac{5\,000}{x}$.

这个函数是反比例函数，比例系数是 5 000.

(2) 当 $x=50$ 时，

$$y=\frac{5\,000}{x}=\frac{5\,000}{50}=100(\mathrm{N}).$$

这个函数值的实际意义是，当动力臂长为 50 cm 时，所需动力为 100 N.

(3) 设原来的动力臂长为 d(cm)，动力为 y_1(N)；扩大后的动力臂长为 nd(cm)($n>1$)，动力为 y_2(N).

将 $x=d$，$x=nd$ 分别代入 $y=\frac{5\,000}{x}$，

得 $y_1=\frac{5\,000}{d}$，$y_2=\frac{5\,000}{nd}$.

$\therefore\ y_2=\frac{1}{n}y_1$.

所以当动力臂长扩大到原来的 n 倍时，所需动力缩小到原来的$\frac{1}{n}$.

想一想

如果把动力臂长缩小到原来的$\frac{1}{n}$，那么所需动力将怎样变化？

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知反比例函数 $y=-\frac{5}{3x}$.

（1）说出比例系数.

（2）求当 $x=-10$ 时函数的值.

（3）求当 $y=2\frac{1}{2}$时自变量 x 的值.

2. 设面积为10 cm^2 的三角形的一条边长为 a(cm)，这条边上的高线长为 h(cm).

（1）求 h 关于 a 的函数表达式和自变量 a 的取值范围.

（2）h 关于 a 的函数是不是反比例函数？如果是，说出它的比例系数.

（3）求当边长 $a=2.5$ cm 时，这条边上的高线长.

作业题 ZUOYETI

A 1. 下列各问题情境中均包含一对变量，其中哪些成正比例，哪些成反比例，哪些既不成正比例，又不成反比例？

（1）汽车沿一条公路从 A 地驶往 B 地所需的时间 t 与平均速度 v.

（2）圆的周长 l 与圆的半径 r.

（3）圆的面积 S 与圆的半径 r.

（4）100 元钱购买糖果的千克数 y 与糖果的单价 x.

2. 下列 y 关于 x 的函数中，哪些是反比例函数？是反比例函数的，指出它的比例系数.

（1）$y=\frac{\pi}{x}$.　　（2）$y=\sqrt{2}x$.

（3）$y=-\frac{4}{x}$.　　（4）$y=\frac{k}{x^2}(k\neq0)$.

3. 已知反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$.

（1）说出这个函数的比例系数和自变量的取值范围.

（2）求当 $x=-3$ 时函数的值.

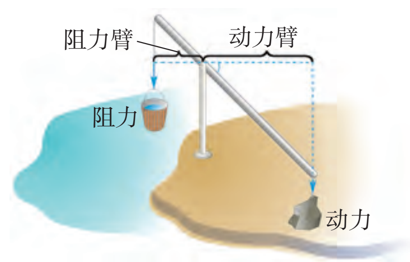
（3）求当 $y=-\sqrt{3}$ 时自变量 x 的值.

4. A,B 两地相距 200 km. 一辆汽车从 A 地驶往 B 地，速度为 v(km/h)，驶完全程的时间为 t (h). 求 v 关于 t 的函数表达式. 若汽车驶完全程用了 1.8 h，求汽车的速度(精确到 1 km/h).

B **5.** 一杠杆装置如图，杆的一端吊起一桶水，所受的重力为 250 N，木桶对杆的拉力的作用点到支点的杆长为 1.2 m. 杆与水平线的倾斜角为 45°. 设在杆的另一端施加的压力为 p(N)，压力作用点到支点的距离为 d (m)(杆自身所受的重力略去不计).

（1）求 p 关于 d 的函数表达式.

（2）若 $d=2.4$ m，则杆的另一端所加压力为多少牛?



（第 5 题）

6. 已知变量 x,y 满足 $(x+y)^2=x^2+y^2-2$. 问：x,y 是否成反比例? 请说明理由.

2

要确定一个反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式，只需求出比例系数 k. 如果已知一对自变量与函数的对应值，就可以由此求出比例系数，然后写出所求的反比例函数.

例2 已知 y 是关于 x 的反比例函数，当 $x=0.3$ 时，$y=-6$. 求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

解 $\because$ y 是关于 x 的反比例函数，

$\therefore$ 可设 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$).

将 $x=0.3$，$y=-6$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $-6=\frac{k}{0.3}$，

解得 $k=-1.8$.

所以所求的函数表达式为 $y=\frac{-1.8}{x}$，自变量 x 的取值范围为 $x\neq 0$ 的全体实数.

例3 一辆汽车前灯电路上的电压保持不变，通过灯泡的电流越大，灯就越亮. 设选用灯泡的电阻为 $R(\Omega)$，通过的电流强度为 $I(\mathrm{A})$.

（1）若电阻为 $30\ \Omega$，通过的电流强度为 $0.40\ \mathrm{A}$，求 I 关于 R 的函数表达式，并说明比例系数的实际意义.

（2）如果电阻大于 $30\ \Omega$，那么与原来的相比，汽车前灯的亮度将发生什么变化?

解 （1）在题设条件下，电压 U 是不为零的常数. 由欧姆定律知，I 与 R 成反比例，设 $I=\frac{U}{R}$.

由题意知，当 $R=30\ \Omega$ 时，$I=0.40\ \mathrm{A}$，

$\therefore\ 0.40=\frac{U}{30}$，

$\therefore\ U=0.40\times 30=12(\mathrm{V})$.

所以所求的函数表达式为 $I=\frac{12}{R}$. 比例系数是 12，在本题中的实际意义是指汽车前灯的电压为 12 V.

（2）设电阻 $R'>30\Omega$，此时通过灯泡的电流强度 $I'=\frac{12}{R'}$.

$\because\ R'>30$，

$\therefore\ \frac{12}{R'}<\frac{12}{30}$，即 $I'<0.40$.

也就是说，当电阻大于 $30\ \Omega$ 时，电流强度 I 变小，汽车前灯将变暗.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知 y 是关于 x 的反比例函数，当 $x=-\frac{3}{4}$ 时，$y=2$. 求这个函数的表达式和自变量的取值范围.

2. 若当 $x=\frac{1}{2}$ 时，正比例函数 $y=k_1x$ $(k_1\neq 0)$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ $(k_2\neq 0)$ 的值相等，则 k_1 与 k_2 的比是（　　）

(A) 4:1.　　(B) 2:1.　　(C) 1:2.　　(D) 1:4.

3. 已知 y 与 z 成正比例，z 与 x 成反比例. 当 $x=-4$ 时，$z=3$，$y=-4$. 求：

(1) y 关于 x 的函数表达式.

(2) 当 $z=-1$ 时，x，y 的值.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$，当 $x=\sqrt{2}$ 时，$y=-2\sqrt{2}$，则比例系数 k 的值是________.

2. 已知 x 与 y 成反比例，且当 $x=-\frac{3}{4}$ 时，$y=\frac{4}{3}$. 求：

(1) y 关于 x 的函数表达式.

(2) 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，y 的值.

3. 在面积为定值的一组矩形中，当矩形的一边长为 7.5 cm 时，它的另一边长为 8 cm.

(1) 设矩形相邻的两边长分别为 x(cm)，y(cm)，求 y 关于 x 的函数表达式. 这个函数是反比例函数吗？如果是，指出比例系数.

(2) 若其中一个矩形的一条边长为 5 cm，求这个矩形与之相邻的另一边长.

B **4.** 已知 y 是关于 x 的反比例函数，x_1，y_1 和 x_2，y_2 是自变量与函数的两组对应值. 下面关系式中，哪些成立？哪些不成立？你是怎样判断的？

(1) $x_1y_1=x_2y_2$.　　(2) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

(3) $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$.　　(4) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$.

5. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$，当自变量 x 变为原来的 $\frac{1}{n}$ (n 为正整数，且 $n\geqslant 2$) 时，函数 y 将怎样变化？请说明理由.

6·2 反比例函数的图象和性质

已知一盏电灯的额定电压为 220 V. 要使灯泡钨丝的电流强度限定为不得超过 0.1136 A，如何确定灯泡电阻的选择范围？

1

合作学习

1. 根据下列步骤，在直角坐标系中画出反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象.

（1）列表. 根据表 6-3 中 x 的取值，求出对应的 y 值，填入表 6-3 内. 观察 x 值的取法，从中你能获得哪些经验？

表 6-3

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	…
y	…				-2									…

（2）以表中各组对应值为点的坐标，在直角坐标系中描出相应的点.

（3）先在第一象限内，按自变量由小到大的顺序，将点用光滑曲线连结，得到图象的一个分支；再在第三象限内画出图象的另一个分支.

2. 如图 6-2，在图象的任一个分支上任意取一些点，如(3,2)，(−6，−1)，然后在直角坐标系中分别作出它们关于原点的对称点. 你发现了什么？你认为反比例函数的图象具有怎样的对称性？

3. 在同一个直角坐标系中画出反比例函数 $y=\frac{-6}{x}$ 的图象，并比较 $y=\frac{-6}{x}$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 的图象，概括出反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象在位置和对称性方面的性质.

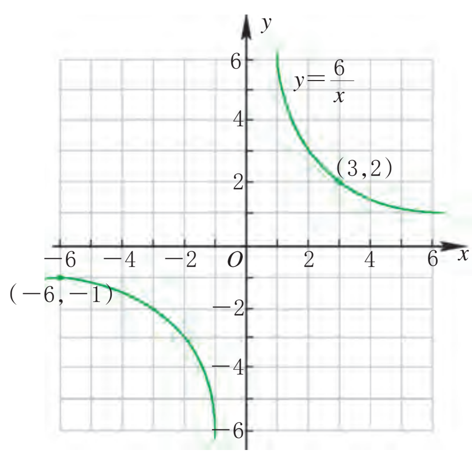


图 6-2

一般地，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象有下面的特征：

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$$(k\neq0)$的图象是由两个分支组成的曲线[1]. 当 $k>0$ 时，图象在一、三象限；当 $k<0$ 时，图象在二、四象限.

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象关于直角坐标系的原点成中心对称.

例1 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象的一支如图 6-3 所示，它经过点 $B(-4,2)$.

(1) 判断 k 是正数还是负数.

(2) 求这个反比例函数的表达式.

(3) 补画这个反比例函数图象的另一支.

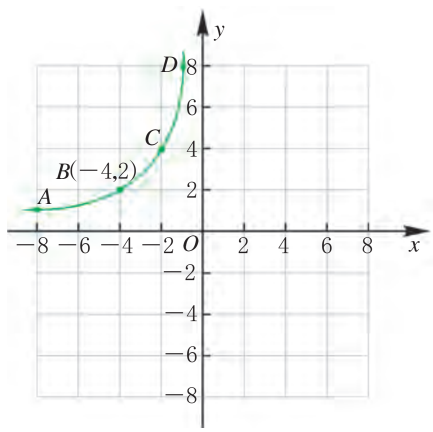


图 6-3

解 (1) 因为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象的一支在第二象限，所以图象上的点的横坐标与纵坐标异号，即 $k=xy<0$.

(2) 将图象上点 B 的横坐标-4，纵坐标 2 分别代入表达式 $y=\dfrac{k}{x}$$(k\neq0)$，得 $2=\dfrac{k}{-4}$，解得 $k=-8$.

---

❶ 是双曲线的一种，双曲线的定义将在高中阶段学习.

所以所求的反比例函数的表达式是 $y=\frac{-8}{x}$.

(3) 在已知图象上分别取一些点 A,B,C,D,作出它们关于原点中心对称的点 A',B',C',D',然后用光滑曲线把它们依次连结,这样就得到反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图象中的另一分支(图 6-4).

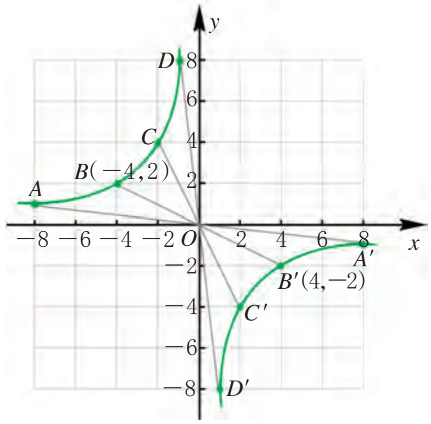


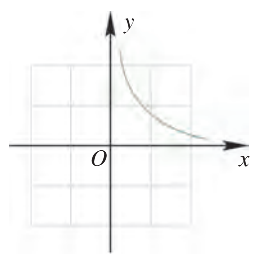
图 6-4

课内练习 KENEILIANXI

1. 下列反比例函数的图象分别在哪两个象限?

(1) $y=\frac{3}{x}$. (2) $y=-\frac{1}{x}$.

2. 如图,已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$)的图象的一个分支,补画它的另一个分支.



(第 2 题)

3. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$)的图象上一点的坐标为$(-\sqrt{2},2)$,求这个反比例函数的表达式.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 用描点法画出反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象.

2. 分别根据下列条件判断反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$)的图象所在的象限:

(1) $k<0$.

(2) $k>0$.

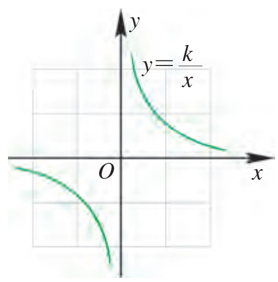
(3) 图象上一点的坐标为$(\pi,-\sqrt{17})$.

(4) 与正比例函数 $y=-4x$ 的图象有公共点.

3. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象上一点的坐标为$(-1,-4)$，求这个反比例函数的表达式，并画出它的图象.

B **4.** 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象交于点 $A(2,2)$，$B(-1,m)$，求一次函数的表达式.

5. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$的图象如图. 你认为利用怎样的图形运动就能得到反比例函数 $y=-\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$的图象？请画出这个图象.



（第 5 题）

设计题 SHEJITI

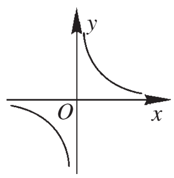
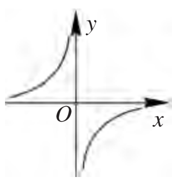
我们知道，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图象关于坐标原点成中心对称. 仔细观察，反比例函数的图象还具备怎样的对称性？你能设计一个实验来验证你的判断吗？在班上交流你的方法. 你能用推理的方法证明你的判断吗？这有一定的难度，试试看！

2

观察表 6-4 中反比例函数的图象，你能根据反比例函数的图象发现反比例函数的有关性质吗？把你的思考结果简要地填入表 6-4 相应的空格部分.

（可与你的同伴交流）

表 6-4

反比例函数	图象	图象的位置	图象的对称性	在图象所在的每一个象限内，当 x 增大时，y 的变化规律
$y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$				
$y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$				

一般地，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 还有以下性质：

当 $k>0$ 时，在图象所在的每一象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，在图象所在的每一象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大.

做一做 ZUOYIZUO

用“>”或“<”填空：

（1）已知 x_1, y_1 和 x_2, y_2 是反比例函数 $y=\frac{\pi}{x}$ 的两对自变量与函数的对应值. 若 $x_1<x_2<0$，则 0____ y_1____ y_2.

（2）已知 x_1, y_1 和 x_2, y_2 是反比例函数 $y=-\frac{a^2}{x}$ $(a\neq 0)$ 的两对自变量与函数的对应值. 若 $x_1>x_2>0$，则 0____ y_1____ y_2.

例2 从 A 市到 B 市列车的行驶里程为 120 千米.假设火车匀速行驶,记火车行驶的时间为 t 小时,速度为 v 千米/时,且速度限定为不超过 160千米/时.

(1) 求 v 关于 t 的函数表达式和自变量 t 的取值范围.

(2) 画出所求函数的图象.

(3) 从 A 市开出一列火车,在 40 分钟内(包括 40 分钟)到达 B 市可能吗? 50 分钟内(包括 50 分钟)呢? 如有可能,此时对火车的行驶速度有什么要求?

解 (1) 从 A 市到 B 市的里程为 120 千米,所以所求的函数表达式为 $v=\frac{120}{t}$. 当 $v=160$ 时,$t=\frac{120}{160}=\frac{3}{4}$.

$\because$ v 随 t 的增大而减小,

$\therefore$ 由 $v\leqslant 160$,得 $t\geqslant\frac{3}{4}$,所以自变量的取值范围是 $t\geqslant\frac{3}{4}$.

(2) 列函数 $v=\frac{120}{t}$ $\left(t\geqslant\frac{3}{4}\right)$与自变量 t 的对应值表.

表 6-5

t(时)	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	…
v(千米/时)	160	120	96	80	$68\frac{4}{7}$	60	$53\frac{1}{3}$	…

用描点法画出函数 $v=\frac{120}{t}$ $\left(t\geqslant\frac{3}{4}\right)$的图象(图 6-5).

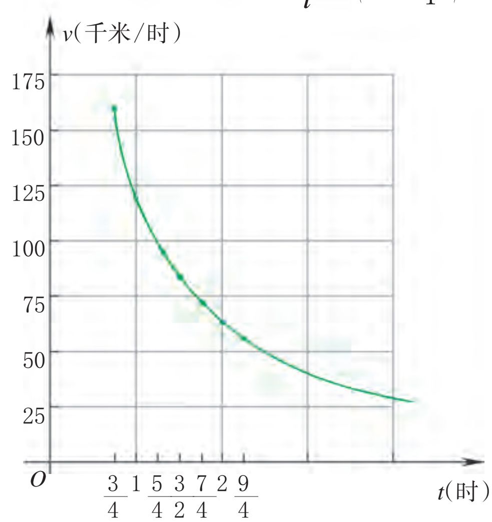


图 6-5

想一想

怎样确定具有实际情境的反比例函数的自变量的取值范围?在自变量的取值范围内画函数图象应注意什么?

（3）因为自变量的取值范围为 $t \geq \frac{3}{4}$，即在题设条件下，火车到达 B 市的最短时间为 45 分，所以火车不可能在 40 分钟内到达 B 市. 在 50 分钟内到达是有可能的，此时由 $\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{5}{6}$，可得 $144 \leq v \leq 160$.

也就是说，如果火车要在 50 分钟内到达 B 市，那么它行驶的速度必须不小于 144 千米/时. 但根据题设，也不能超过 160 千米/时，因此行驶的速度应在 144 千米/时到 160 千米/时之间.

对上述例题及解法，请与你的同伴讨论下面的问题：第（1）题求函数自变量的取值范围时，能否先画出 $v=\frac{120}{t}$（$t>0$）的图象，然后利用图象，根据 $v \leq 160$，求出 t 的范围（参考图 6-5）？如果速度不小于 50 千米/时，t 的取值范围又如何？第（3）题求 v 的取值范围能否也利用图 6-5 的图象来求？

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知反比例函数 $y=\frac{5}{x}$. 当 $x>5$ 时，0___ y ___1；当 $x \leq 5$，且 $x \neq 0$ 时，y___1，或 $y<$______.

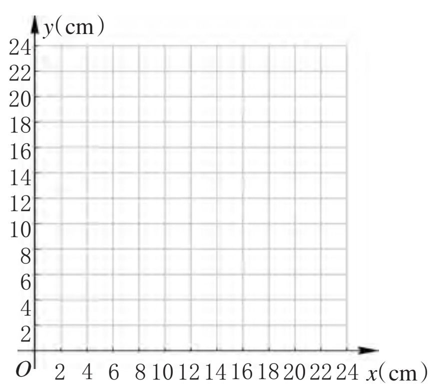
2. 已知反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$，当 $x>-3$，且 $x \neq 0$ 时，$y>$________，或 $y<$________.

3. 记面积为 18 cm^2 的平行四边形的一条边长为 x(cm)，这条边上的高线长为 y(cm).

（1）求 y 关于 x 的函数表达式，以及自变量 x 的取值范围.

（2）在如图的直角坐标系中，用描点法画出所求函数的图象.

（3）求当边长满足 $0<x<15$ 时，这条边上的高线长 y 的取值范围.



（第 3 题）

作业题

A **1.** 对于反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，当 $x>1$ 时，y 的取值范围是____________；当 $x\leqslant 1$，且 $x\neq 0$ 时，y 的取值范围是____________.

2. 对于反比例函数 $y=-\frac{10}{x}$，当 $y\geqslant 4$ 时，有 $-\frac{5}{2}$____x____0；当 $y<4$，且 $y\neq 0$ 时，有 $x>$______，或 $x<$______.

3. 已知反比例函数 $y=-\frac{4}{x}$.

(1) 画出这个反比例函数的图象.

(2) 利用所画图象求当 $y<2$ 时，x 的取值范围.

(3) 已知 $(-3,y_1)$，$(-15,y_2)$，$(1,y_3)$ 是所画图象上的三个点. 比较 y_1，y_2，y_3 的大小，并用反比例函数的性质说明理由.

4. 已知电灯电路两端的电压 U 为 220V，设灯泡内钨丝的电阻为 $R(\Omega)$，通过的电流强度为 I(A).

(1) 求 I 关于 R 的函数表达式和自变量 R 的取值范围.

(2) 画出这个函数的图象.

(3) 如果通过钨丝的电流强度的最大限度不得超过 0.113 6 A，求选用灯泡电阻的允许值范围（精确到 1Ω）.

B **5.** 下列函数在自变量的取值范围内，自变量越大，函数值越小的函数有哪几个？

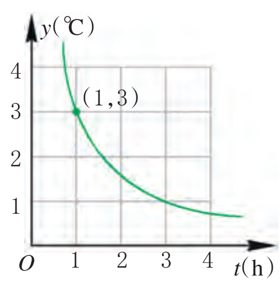
① $y=-\frac{9}{x}$； ② $y=\frac{11}{x}$； ③ $y=\frac{3}{x}\ (x<0)$；

④ $y=2x-9$； ⑤ $y=-3x$.

6. 如图所示的曲线是一个反比例函数的图象的一支，它过点 (1, 3).

(1) 求该曲线所表示的函数的表达式和自变量 t 的取值范围.

(2) 若 $y\leqslant 2.5$，求自变量 t 的取值范围.



（第 6 题）

6·3 反比例函数的应用

设 1 根火柴的长度为 1，能否用若干根火柴首尾相接摆出一个面积为 12 的矩形？面积为 12 的正方形呢？

在现实世界中，成反比例的量广泛存在着. 用反比例函数的表达式和图象表示问题情境中成反比例的量之间的关系，能帮助我们分析和判断问题情境中的有关过程和结果，确定变量在一定条件下的特殊值或特定的范围，了解变量的变化规律.

例1 设$\triangle ABC$中BC边的长为x（cm），BC上的高线AD为y（cm），$\triangle ABC$的面积为常数. 已知y关于x的函数图象过点(3，4).

（1）求y关于x的函数表达式和$\triangle ABC$的面积.

（2）画出函数的图象，并利用图象，求当$2<x<8$时y的取值范围.

解 （1）设$\triangle ABC$的面积为S，则$\frac{1}{2}xy=S$，所以$y=\frac{2S}{x}$.

因为函数图象过点(3，4)，所以$4=\frac{2S}{3}$，解得$S=6(\text{cm}^2)$.

所以所求函数的表达式为$y=\frac{12}{x}$，$\triangle ABC$的面积为6 cm^2.

（2）因为$x>0$，所以图象在第一象限. 用描点法画出函数$y=\frac{12}{x}$的图象，如图 6-6.

当$x=2$时，$y=6$；

当$x=8$时，$y=\frac{3}{2}$.

由图 6-6，得 $\frac{3}{2}<y<6$.

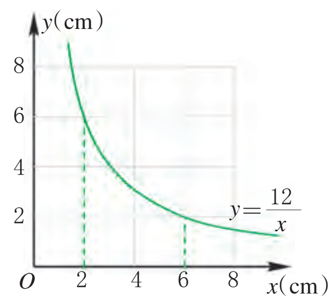


图 6-6

例2 如图 6-7,在温度不变的条件下,通过一次又一次地对汽缸顶部的活塞加压,测出每一次加压后汽缸内气体的体积和气体对汽缸壁所产生的压强.

(1) 根据表 6-6 中的数据求出压强 p(kPa)关于体积 V(mL)的函数表达式.

(2) 当压力表读出的压强为 72 kPa 时,汽缸内气体的体积压缩到多少毫升?

表 6-6

体积 V(mL)	压强 p(kPa)
100	60
90	67
80	75
70	86
60	100

图 6-7

解 (1) 根据表中的数据,可画出 p 关于 V 的函数图象(图 6-8). 根据图象的形状,选择反比例函数模型进行尝试. 设它的函数关系式为 $p=\dfrac{k}{V}$ $(k\neq 0)$,选点(60,100)的坐标代入,得 $100=\dfrac{k}{60}$.

$\therefore \quad k=6\,000$,

$\therefore \quad p=\dfrac{6\,000}{V}$.

将点(70,86),(80,75),(90,67),(100,60)的坐标一一代入 $p=\dfrac{6\,000}{V}$ 验证:

$\dfrac{6\,000}{70}\approx 86$, $\dfrac{6\,000}{80}=75$, $\dfrac{6\,000}{90}\approx 67$,

$\dfrac{6\,000}{100}=60$.

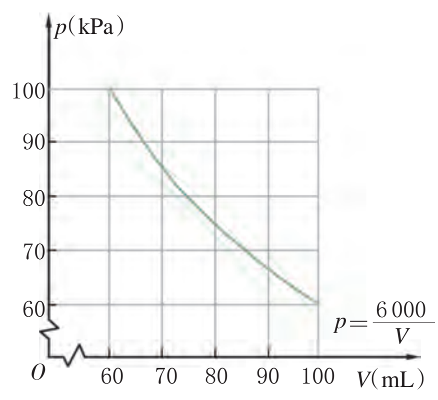


图 6-8

可见 $p=\dfrac{6\,000}{V}$ $(V>0)$相当精确地反映了在温度不变时气体体积和所产生的压强之间的关系,也就是所求的函数关系式.

（2）当从压力表中读出气体的压强为 72 kPa 时，有 $72=\frac{6\,000}{V}$，

解得　$V=\frac{6\,000}{72}\approx 83(\text{mL})$.

答：当压力表中读出压强为 72 kPa 时，汽缸内气体的体积约为 83 mL.

想一想

这一结果也能从图 6-8 中获得吗？

解决例 2 中的问题的过程就是建立数学模型的过程，具体过程可概括为：由实验获得数据——用描点法画出图象——根据图象和数据判断或估计函数的类别——用待定系数法求出函数关系式——用实验数据验证函数关系式——应用函数关系式解决问题.

课内练习 KENEILIANXI

1. 设每名工人一天能做某种型号的工艺品 x 个. 若某工艺品厂每天要生产这种工艺品 60 个，则需工人 y 名.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式.

（2）若一名工人每天能做的工艺品个数最少 6 个，最多 8 个，估计该工艺品厂每天需要做这种工艺品的工人多少人.

2. 本节例 2 中，若压强 $80<p<90$，估计汽缸内气体体积的取值范围，并说明理由.

探究活动 TANJIUHUODONG

某一农家计划利用已有的一堵长为 7.9 m 的墙，用篱笆围成一个面积为 12 m² 的矩形园子. 现有可用的篱笆总长为 11 m.

（1）你能给出一种围法吗？

（2）若取园子的长、宽都为整数（单位：m），一共有几种围法？

（3）若要使 11 m 长的篱笆恰好用完，应怎样围？

作业题

A **1.** 一批相同型号衬衣的单价为每件 60 元至 80 元之间（包括 60 元和 80 元），用 720 元钱至少可买多少件衬衣？至多可买多少件衬衣？用反比例函数的性质或图象说明理由.

2. 某汽车的油箱一次加满汽油 45 升，可行驶 y 千米，设该汽车行驶每 100 千米耗油 x 升. 求 y 关于 x 的函数表达式（假设汽车能行驶至油用完）.

3. 圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$（S 表示圆锥的底面积，h 表示圆锥的高线长）. 某工厂要制作一系列圆锥模型，要求体积保持不变. 测得其中一个已做成的圆锥模型的底面半径为 $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$ cm，高线长为 10 cm.

（1）求这一系列圆锥模型的底面积 $S(\text{cm}^2)$ 关于高线长 $h(\text{cm})$ 的函数表达式，并画出函数图象.

（2）利用所画的函数图象，求当高线长限定为 $50 \leqslant h < 100$ 时，底面积的取值范围.

B **4.** 用若干根火柴首尾相接摆成一个长方形. 设一根火柴的长度为 1，长方形两条邻边的长分别为 x，y，要求摆成的长方形的面积为 12.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

（2）能否摆成正方形？请说明理由.

5. 经过实验获得两个变量 $x\,(x>0)$，$y\,(y>0)$ 的一组对应值如下表.

x	1	2	3	4	5	6
y	6	2.9	2.1	1.5	1.2	1

（1）画出相应函数的图象.

（2）求这个函数的表达式.

（3）求当 $y=\frac{3}{10}$ 时，x 的值.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 函数______（k是常数，$k\neq$______）叫做反比例函数，k叫做__________.

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象是由两个分支组成的曲线. 当 $k>0$时，函数图象在______、______象限，在每一象限内，y 随x的增大而______；当 $k<0$时，函数图象在_______、______象限，在每一象限内，y 随x的增大而_______.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象关于直角坐标系的__________成中心对称.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
根据已知条件，确定反比例函数的表达式			
画反比例函数的图象			
利用反比例函数的性质或图象解决简单的实际问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A
6.1节

●结合具体情境体会反比例函数的意义，理解反比例函数的概念.

●掌握并会求反比例函数的表达式.

1. 下列各问题情境中，哪些量成正比例，哪些量成反比例？

（1）在压力不变的情况下，压强 p 与支承面的面积 S.

（2）在利息不变的条件下，本金 a 与利率 r.

（3）在电阻不变的情况下，电流强度 I 与电压 U.

2. 反比例函数 $y=-\dfrac{16}{x}$ 的比例系数是______. 当 $x=-\dfrac{4}{3}$ 时，函数 y 的值是______.

3. 设大米的单价为 x 元/千克，用 50 元钱可购买大米 y 千克.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式.

（2）若 $y=12.5$，求 x 的值，并说明此时 x 的值的实际意义.

4. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$），当 $x=-3$ 时，$y=\dfrac{4}{3}$. 求：

（1）y 关于 x 的函数表达式及自变量 x 的取值范围.

（2）当 $x=-4$ 时，函数 y 的值.

目标B
6.2节

●会画反比例函数的图象.

●能根据反比例函数的图象和表达式 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）探索并理解其性质.

5. 已知点 $(-2,y_1)$，$(-3,y_2)$，$(2,y_3)$ 在函数 $y=-\dfrac{0.8}{x}$ 的图象上，则（　　）

（A）$y_1<y_2<y_3$.　　（B）$y_2<y_1<y_3$.

（C）$y_3<y_1<y_2$.　　（D）$y_3<y_2<y_1$.

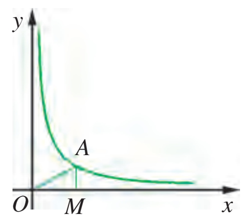
6. 用“>”或“<”填空：

（1）x_1,y_1 和 x_2,y_2 是反比例函数 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ 的两对自变量与函数的对应值. 若 $x_2<x_1<0$，则 0____ y_2 ____y_1.

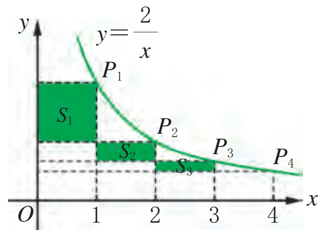
（2）(x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 是函数 $y=-\dfrac{5}{x}$ 的图象在第二象限内的两个点. 若 $x_2>x_1$，则 y_2 ____ y_1 ____0.

7. 若正方形 $AOBC$ 的边 OA, OB 在坐标轴上，顶点 C 在第一象限，且在反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上，则点 C 的坐标是 ________.

8. 如图，点 A 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 的图象上，$AM\perp x$ 轴于点 M. 若 $\triangle AMO$ 的面积为 3，则 $k=$ ______.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$ 的图象上有点 P_1, P_2, P_3, P_4，它们的横坐标依次为 1，2，3，4，分别过这些点作 x 轴与 y 轴的垂线. 图中所构成的阴影部分的面积从左到右依次为 S_1, S_2, S_3，则 $S_1+S_2+S_3=$ ______.

10. 已知反比例函数 $y=-\dfrac{12}{x}$，求当 $y\leqslant\dfrac{4}{3}$，且 $y\neq 0$ 时自变量 x 的取值范围.

11. 某游泳池每次换水前后水的体积基本保持不变. 当该游泳池以每小时 300 立方米的速度放水时，经 3 小时能将池内的水放完. 设放水的速度为 v 立方米/时，将池内的水放完需 t 小时.

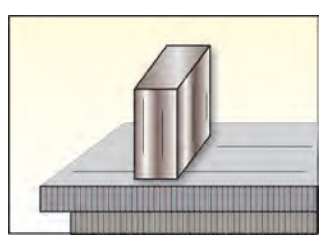
（1）求 v 关于 t 的函数表达式，并画出函数图象.

（2）若要求在 2.5 小时内（包括 2.5 小时）把游泳池内的水放完，则游泳池的放水速度至少为多少立方米/时（要求用反比例函数的性质和图象两种方法求解）？

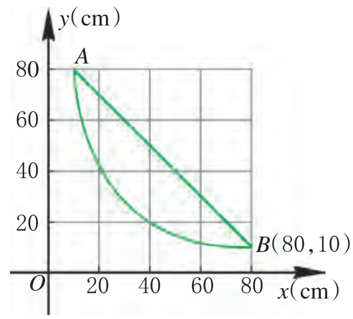
目标C 6.3 节

●能用反比例函数的性质和图象解决某些实际问题.

12. 假设一张桌面所能承受的最大压强为 10^4 Pa，有一个长方体铁块的长、宽、高分别为 50 cm，20 cm，10 cm，能否把这个铁块放在这张桌面上？用反比例函数的性质说明理由（铁的密度为 7.8 g/cm^3）.


（第 12 题）

13. 如图是一个光学仪器上用的曲面横截面示意图，图中的曲线是一段反比例函数的图象，端点 A 的纵坐标为 80，另一端点 B 的坐标为 $B(80,10)$. 求这段图象的函数表达式和自变量的取值范围.



（第 13 题）

14. 某气球内充满一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的压强 p(kPa)与气体的体积 V(m^3)成反比例. 当气体的体积 $V=0.8\ m^3$ 时，气球内气体的压强 $p=112.5$ kPa.

（1）当气体的体积为 1 m^3 时，它的压强是多少？

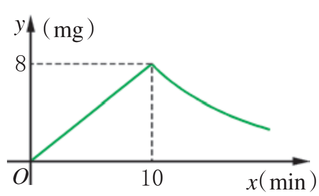
（2）当气球内气体的压强大于 150 kPa 时，气球就会爆炸. 问：气球内气体的体积应不小于多少气球才不会爆炸？

15. 为预防传染病，某校定期对教室进行“药熏消毒”. 已知药物燃烧阶段，室内每立方米空气中的含药量 y(mg)与燃烧时间 x(min)成正比例；燃烧后，y 与 x 成反比例（如图所示）. 现测得药物 10 分钟燃完，此时教室内每立方米空气含药量为 8 mg. 据以上信息解答下列问题：

（1）求药物燃烧时 y 关于 x 的函数表达式.

（2）求药物燃烧后 y 关于 x 的函数表达式.

（3）当每立方米空气中含药量低于 1.6 mg 时，对人体方能无毒害作用，那么从消毒开始，在哪个时段学生不能停留在教室里？



（第 15 题）

16. 测得不同国家六种硬币的质量和体积数据如下表：

硬币	质量(g)	体积(cm^3)
A	3.1	0.41
B	4.0	0.50
C	8.6	1.2
D	8.0	0.95
E	9.8	1.1
F	5.0	0.67

（1）设用质量为 m(g)的某种金属制作成的硬币体积为 V(cm^3)，求该种金属的密度 ρ .

（2）从前，奥地利硬币由铜和锌的合金制成，其密度为 8.42 g/cm^3. 你认为上表中，哪一种硬币可能来自奥地利？

（3）已知铜的密度为 8.92 g/cm^3，锌的密度为 7.15 g/cm^3. A，B 两种硬币都由铜和锌的合金制成，哪一种含锌量较多？请说明理由.

义务教育教科书
数　学　八年级下册
YIWU JIAOYU JIAOKESHU
SHUXUE BA NIANJI XIACE

责任编辑	华　琼	**责任校对**	吴招生
装帧设计	在线广告传媒有限公司	**责任印务**	陆　江

出　　版	浙江教育出版社 （杭州市天目山路40号　电话:0571-85170300-80928）
发　　行	浙江省新华书店集团有限公司
图文制作	杭州兴邦电子印务有限公司
印　　刷	杭州富春印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	10
字　　数	200 000
版　　次	2013年11月第1版
印　　次	2021年12月第9次印刷
本次印数	00 001—550 000
标准书号	ISBN 978-7-5536-1427-4
定　　价	10.01元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。
电话:0571-64362059

绿色印刷产品

定价批准文号:浙发改价格[2019]319号、[2020]331号　　举报电话:12345、12315

ISBN 978-7-5536-1427-4