普通高中教科书

数学

SHUXUE

必修

第三册

湖北教育出版社

普通高中教科书 数学 必修 第三册 湖北教育出版社

ISBN 978-7-5564-3142-7

普通高中教科书

数学

SHUXUE

必修

第三册

主　编　彭双阶

湖北教育出版社

主　　编：彭双阶

副 主 编：徐胜林　胡典顺　郭熙汉

本册主编：徐胜林

主要编者：高　云　孔　峰　姚尉林　徐胜林　胡典顺

郭熙汉　岑爱国

shuxue

致高中生

高中数学是一门非常重要的课程．数学以其卓越的智力成就被人们尊称为“科学的皇后”．数学是人类最高超的智慧活动，是人类心灵最独特的创造，是形成人类文化的主要力量，是人类文明的核心部分，是认识世界和创造世界的一把关键钥匙．

我们需要数学，因为作为人类文明发展标志的数学，是人类文化的重要组成部分．数学既是一种睿智的文化、一种思想的体操，更是现代科技进步中理性文化的核心．

我们需要数学，因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用．数学素养是现代社会公民应该具备的一种必备品格．

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会现象的特殊语言和有力工具，是自然科学、技术科学的基础，在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越强大的作用．

我们需要数学，因为数学已经渗透到现代社会和人们日常生活的各个方面．学好数学是提升生活质量、优化生活品质的重要保证．

本套教科书以《普通高中数学课程标准（2017 年版）》为依据来编写，遵循了现代数学教与学的规律，着眼于 21 世纪现代生活和未来发展，力求提升同学们的数学核心素养，更快地适应未来社会的发展．

教科书是教与学的一种重要资源．在使用本套教科书的同时，我们还应该多关注现实生活，关注社会进步和科技发展，用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界．现代社会是信息社会，又是终身学习的社会．在这个大数据时代，我们可以根据实际条件，选择利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率．积极参与数学活动，勤于思考，敢于质疑，乐于合作交流，克难奋进，砥砺前行，养成良好的数学学习习惯，让数学学习变得更加生动活泼、富有情趣．

亲爱的同学们，插上快乐的翅膀，带着青春的梦想，在浩瀚的数学海洋扬帆奋进吧！

Mulu

目 录

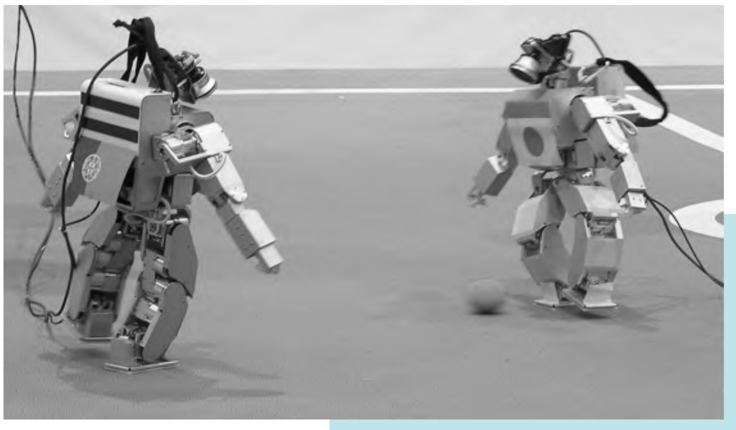
第 1 章 平面向量及其应用

第 2 章 复数

Mulu

第 3 章 立体几何初步

第1章 平面向量及其应用



在现实生活中，我们要接触和研究各种各样的量，这些量可以分成两类.

一类量在取定单位后只用一个实数就可以表示出来. 例如长度、质量、热量等，这样的量称为标量，数学中叫作数量.

另一类量，仅仅用一个实数表示是不够的. 如安排机器人去执行一项任务，如果在设置指令时只告知要行走 50 m，那么机器人就无法执行任务，因为它不知道应朝哪个方向行走. 因此，设定指令时，除了要告知行走距离外，还必须指明行走的方向. 像这种既有大小又有方向的量，就是我们将要学习的向量.

向量最初被应用于物理学，向量的概念就是从力、速度、位移这些重要的物理量中抽象出来的. 向量是数学的重要概念之一，它和数一样也能进行运算，而且用向量的有关知识可以有效地解决很多实际问题.

在这一章，我们将学习向量的概念和向量的几种运算，还将通过对任意三角形边角关系的探究，归纳出正弦定理和余弦定理，并运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

1.1 向量的概念

生活中常会遇到一些既有大小又有方向的量，例如：

(1) 某同学向东行走 6 米；

(2) 航母辽宁舰以 20 节(knot)的速度向东南方向航行(1 节$=$1 海里/时$\approx$1.852 千米/时)；

(3) 起重机向上提起质量为 230 千克的物体.

这些量必须同时用数值和方向才能表示. 为了刻画这些量，我们引入向量的概念.

我们将既有大小又有方向的量叫作**向量**(vector). 物理学中的力、速度、位移等都是向量.

向量可用几何图形直观表示. 一般地，如果规定线段 AB 的一个端点为起点，另一个端点为终点，我们就说线段 AB 具有方向，具有方向的线段叫作有向线段. 通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向(如图 1-1)，以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$，线段 AB 的长度也叫作有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度. 有向线段包含三个要素：起点、方向、长度.

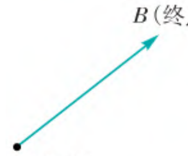


图 1-1

向量常用有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向. 向量也可用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等表示. 例如，(2)中航母辽宁舰的速度可表示为向量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$(如图 1-2).

向量 $\boldsymbol{a}$ 印刷时用黑体 $\boldsymbol{a}$，我们书写时必须写为 $\vec{a}$.

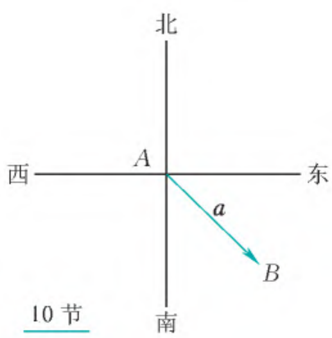


图 1-2

向量$\overrightarrow{AB}$的大小叫作向量的**模**(module)(或长度)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

模为 0 的向量叫作**零向量**(zero vector)，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向是任意的.

模为 1 个单位的向量叫作**单位向量**(unit vector).

模相等且方向相同的向量叫作**相等向量**(equal vector). 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 零向量与零向量相等.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**(opposite vector)，记作$-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 与$-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量. 并规定：零向量的相反向量仍是零向量.

显然$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

我们把两个方向相同或相反的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 叫作**平行向量**(parallel vectors)，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 并规定零向量与任何向量平

行．平行向量又叫作**共线向量**(collinear vectors)．

对于一组向量，若其中任何两个向量都平行，则称这组向量为一组平行向量．如图 1-3 中的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 就是一组平行向量．

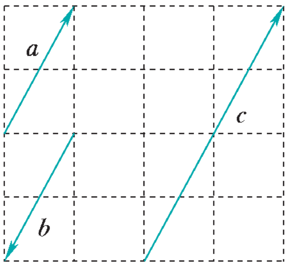


图 1-3

由于所有的平行向量均可平移到一条直线上，因此人们常将平行向量称为共线向量．

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$ 吗？要保证这一结论成立，需附加什么条件？

例1 判断下列说法是否正确：

（1）零向量是唯一没有方向的向量；

（2）平面内的单位向量只有一个；

（3）单位向量都相等；

（4）方向相反的向量是共线向量，共线向量不一定是方向相反的向量．

解 （1）不正确，因为零向量的方向是任意的；

（2）不正确，因为不同方向上的单位向量不同；

（3）不正确，因为方向不相同的单位向量不相等；

（4）正确，因为方向相同或相反的向量都是共线向量．

例2 如图 1-4，设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出图中满足下列条件的向量．

（1）与$\overrightarrow{OA}$相等的向量；

（2）与$\overrightarrow{OC}$相等的向量；

（3）$\overrightarrow{OB}$的相反向量；

（4）与$\overrightarrow{DA}$共线的向量．

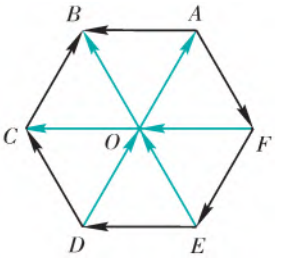


图 1-4

解 （1）与$\overrightarrow{OA}$相等的向量是$\overrightarrow{CB}$和$\overrightarrow{DO}$；

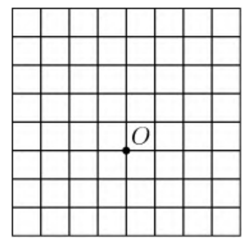
（2）与$\overrightarrow{OC}$相等的向量是$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{ED}$和$\overrightarrow{FO}$；

（3）$\overrightarrow{OB}$的相反向量是$\overrightarrow{AF}$；

（4）与$\overrightarrow{DA}$共线的向量是$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{CB}$和$\overrightarrow{FE}$．

练习

1. 向量与有向线段这两个概念有什么区别？
2. 在如图的方格纸中，画出下列向量(每个小方格的边长为 1)：
   (1) $|\overrightarrow{OA}|=4$，点 A 在点 O 的正北方向；
   (2) $|\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{2}$，点 B 在点 O 的东偏南 45°方向；
   (3) 画一个以 O 为起点的向量 $\boldsymbol{c}$，使 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，并说出 $\boldsymbol{c}$ 的终点的轨迹是什么.

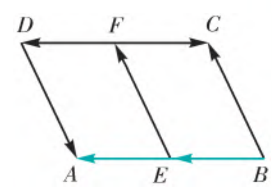


(第 2 题图)

3. 非零向量$\overrightarrow{AB}$的模怎样表示？非零向量$\overrightarrow{BA}$的模怎样表示？这两个向量的模相等吗？这两个向量相等吗？
4. (1) 用有向线段表示两个相等的向量，如果它们有相同的起点，那么它们的终点是否相同？
   (2) 用有向线段表示两个方向相同但长度不同的向量，如果它们有相同的起点，那么它们的终点是否相同？
5. 有人说，由于海平面以上的高度(海拔)用正数表示，海平面以下的高度用负数表示，所以海拔也是向量. 你同意他的看法吗？温度、角度是向量吗？为什么？

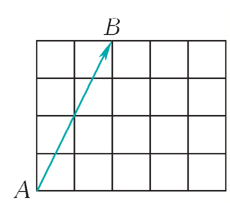
习题 1.1

1. 两个向量可以比较大小吗？
2. 判断下列结论是否正确.
   (1) 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$； (　　)
   (2) 方向为南偏西 60°的向量与北偏东 60°的向量是共线向量； (　　)
   (3) 零向量是没有方向的； (　　)
   (4) 单位向量的方向是任意的； (　　)
   (5) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形当且仅当$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. (　　)
3. 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，$A=\{$与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量$\}$，$B=\{$与 $\boldsymbol{a}$ 模相等的向量$\}$，$C=\{$与 $\boldsymbol{a}$ 模相等且方向相反的向量$\}$. 下列说法中，错误的是(　　).
   (A) $C\subseteq A$　　(B) $A\cap B=\{\boldsymbol{a}\}$
   (C) $C\subseteq B$　　(D) $\{\boldsymbol{a}\}\subseteq A\cap B$
4. 如图，$ABCD$ 为平行四边形，E，F 分别为 AB，CD 的中点. 写出图中，
   (1) 与$\overrightarrow{BE}$相等的向量；
   (2) 与$\overrightarrow{BA}$共线的向量.



(第 4 题图)

5. 如图，在 4×5 的方格图中，有一个向量$\overrightarrow{AB}$，分别以图中小正方形的顶点为起点和终点所得到的向量中，
   (1) 与向量$\overrightarrow{AB}$相等的向量有多少个？
   (2) 与向量$\overrightarrow{AB}$模相等的向量有多少个？



(第 5 题图)

1.2 向量的运算

1.2.1 向量的加法

我们先看一个实际问题.

机器人接到第一个命令后从点 A 出发行走到了点 B，紧接着它接到第二个命令后从点 B 行走到了点 C(如图 1-5)，那么，机器人最终的位移是$\overrightarrow{AC}$. 如果我们将最终的位移$\overrightarrow{AC}$作为位移$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$相加的结果，并且也用符号“＋”表示这种加法，则有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

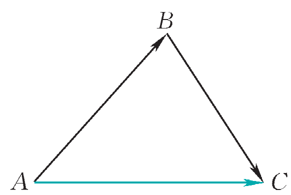


图 1-5

这个实例提示我们，可以这样规定两个向量的和：

给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任意取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1-6).

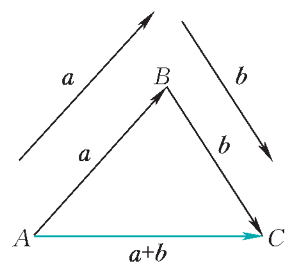


图 1-6

求两个向量和的运算叫作**向量的加法**. 上述向量求和的方法叫作向量加法的**三角形法则**.

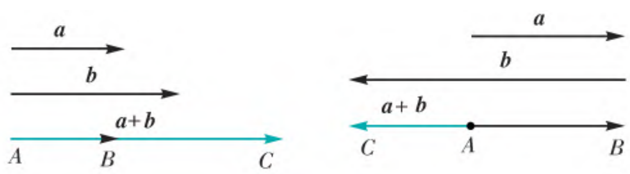


图 1-7

三角形法则也适用于共线向量求和(如图 1-7).

特别地，我们规定：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

在物理学中，我们学过力的合成，如果有方向不同的两个力 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 作用于同一个质点 A，那么它们产生一个合力 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}$ 的大小和方向正好由以 $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{AD}$来表示(如图 1-8). 因此可以用另一种方法来规定两个向量的和：

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为不共线向量，在平面内任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，并且以 AB，AC 为邻边作▱$ABDC$，则对角线$\overrightarrow{AD}$即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(如图 1-9). 这种求和的方法叫作向量加法的**平**

行四边形法则.

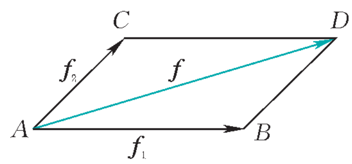


图 1-8

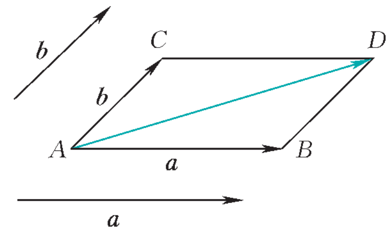


图 1-9

易知，分别用这两个法则求两个向量的和时，结论是相同的.

同实数的运算性质类似，向量的加法也满足交换律与结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

事实上，对任意两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作▱$ABCD$，使$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$(如图 1-10)，则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$.

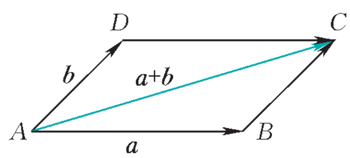


图 1-10

因为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，容易验证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

因此，向量加法满足交换律.

用类似的方法可以证明向量加法满足结合律.

请问下面的等式是否成立？你能得出什么规律？

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

由于向量的加法满足交换律与结合律，因此多个向量的加法运算就可以按照任意的次序与任意的组合来进行了. 例如，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})]+\boldsymbol{b}.$$

例 1 如图 1-11，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在图中分别作出下列向量：

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$；

(2) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}$；

(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$.

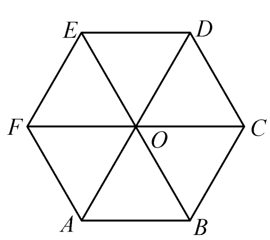


图 1-11

解 (1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$，如图 1-12；

(2) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BE}$，如图 1-13；

(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{ED}$，如图 1-14.

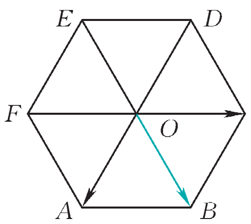


图 1-12

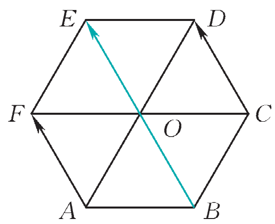


图 1-13

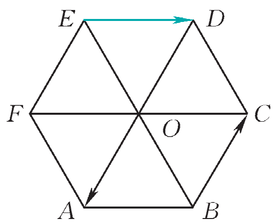


图 1-14

例2 渡轮以 32 km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶，江水的流速为 8 km/h，求渡轮实际航行速度的大小(精确到 0.01 km/h)和方向(用与江水流向的夹角表示，精确到 1°).

解 如图 1-15 所示，用$\overrightarrow{OA}$表示渡轮垂直于对岸的速度，$\overrightarrow{OB}$表示水流的速度. 作▱$AOBC$，则$\overrightarrow{OC}$为渡轮实际航行的速度.

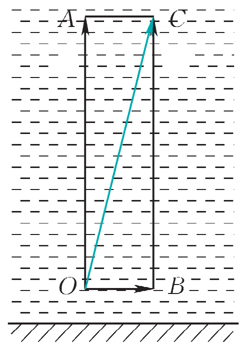


图 1-15

在 Rt△OBC 中，$|\overrightarrow{OB}|=8$，$|\overrightarrow{BC}|=32$，所以

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=\sqrt{8^2+32^2}=\sqrt{1\,088}\approx 32.98,$$

$$\tan\angle BOC=\frac{32}{8}=4.$$

由计算器算得$\angle BOC\approx 76°$.

所以，渡轮实际航行速度的大小约为 32.98 km/h，实际航行方向与江水流向的夹角约为 76°.

例3 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

已知：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AO=OC$，$BO=OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明 如图 1-16，由向量的加法法则知，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$.

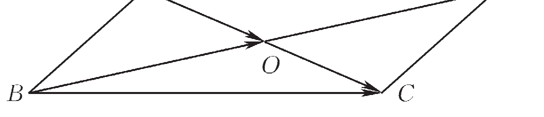


图 1-16

又因为$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，所以

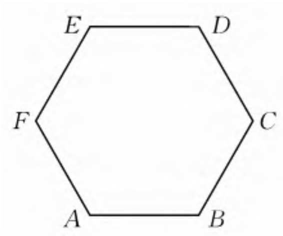
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}，\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC},$$

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，即 AD 与 BC 平行且相等.

故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

练习

1. 化简：$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$.
2. 在正六边形 $ABCDEF$ 中，化简$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$.
3. 设 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$，$\boldsymbol{b}$ 是任一非零向量，则下面结论正确的是________.
   ①$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$； ②$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$； ③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$；
   ④$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$； ⑤$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.
4. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，下列说法不正确的是(　　).
   (A) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同
   (B) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同
   (C) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，且$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同
   (D) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，且$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同
5. 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，若 $AB=1$，求$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}|$.



(第 5 题图)

1.2.2 向量的减法

在实数运算中，我们知道：减去一个数等于加上这个数的相反数. 类似地，我们可以给出向量减法的定义.

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

求两向量的差的运算叫作**向量的减法**.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，怎样作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 呢？因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})\\&=[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

所以，求作的 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是这样一个向量，它与 $\boldsymbol{b}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$.

根据向量加法的三角形法则，我们得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图方法.

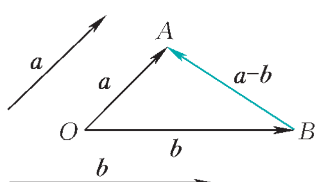


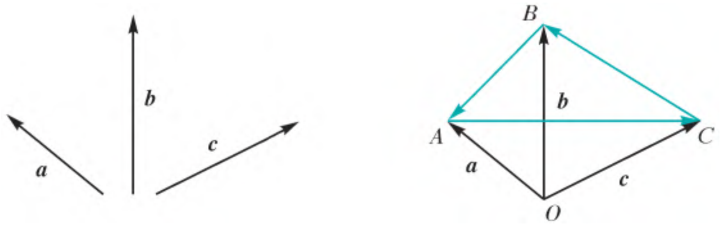
图 1-17

如图 1-17，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

由此我们得到，起点相同的两向量的差就是以减向量的终点为起点、被减向量的终点为终点的向量. 这就是向量减法的三角形法则.

例1 如图 1-18(1)，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.



(1) (2)

图 1-18

解 如图 1-18(2)，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，并作$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AC}$，则

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}，\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

例2 如图 1-19，在$\square ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BD}$.

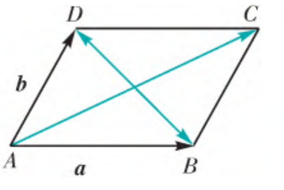


图 1-19

解 由向量加法与减法的法则知

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}，\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}.$$

例3 化简：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

解 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}$

$=\mathbf{0}$.

练习

1. 计算：(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$；(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.
2. 化简：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.
3. 已知 D，E，F 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 的中点，则(　　).

   (A) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$　　(B) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\mathbf{0}$

   (C) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$　　(D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$
4. 若$|\overrightarrow{OA}|=8$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，求$|\overrightarrow{AB}|$的最大值和最小值.
5. 在$\square ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

   (1) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$垂直？

   (2) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$？

1.2.3 实数与向量的积

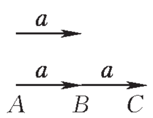


图 1-20

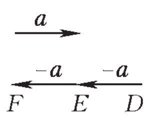


图 1-21

由图 1-20 可知，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$，类似数的乘法，我们把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记作 $2\boldsymbol{a}$，显然 $2\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$2\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍，即 $|2\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{a}|$.

同样，由图 1-21 可知，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=2(-\boldsymbol{a})$，显然，$2(-\boldsymbol{a})$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，$2(-\boldsymbol{a})$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍，即 $|2(-\boldsymbol{a})|=2|\boldsymbol{a}|$，也可以把 $2(-\boldsymbol{a})$ 记作 $-2\boldsymbol{a}$.

一般地，设 λ 是非零实数，$\boldsymbol{a}$ 是非零向量，我们规定 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

规定：对于任一向量 $\boldsymbol{a}$，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；对于任一实数 λ，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

求实数与向量的积的运算叫作**向量的数乘**(multiplication of vector by scalar)，简称**数乘**.

根据定义，向量的数乘满足下面的运算律.

设 λ、μ 为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；
(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；
(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由此有

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a}),$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}.$$

由向量的数乘的定义，我们容易证明：

定理 如果 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线；反之，若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

向量的加法、减法和数乘的运算，通常叫作向量的**线性运算**.

例 1 计算：

(1) $(-2)(3\boldsymbol{a})$；

(2) $2(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-3(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(3) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$；

(4) $(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\quad(x,y\in\mathbf{R})$.

解 (1) $(-2)(3\boldsymbol{a})=[(-2)\times3]\boldsymbol{a}=-6\boldsymbol{a}$.

(2) $2(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-3(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=[2\times3+(-3)\times2+1]\boldsymbol{a}+[2\times2+(-3)\times(-1)+1]\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}.$

(3) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

$=(3+2-2)\boldsymbol{a}+(3-3)\boldsymbol{b}+(-3+1-2)\boldsymbol{c}$

$=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{c}.$

(4) $(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=[(x+y)+(x-y)]\boldsymbol{a}+[(x+y)\times(-1)+(x-y)]\boldsymbol{b}$

$=2x\boldsymbol{a}-2y\boldsymbol{b}.$

例2 如图 1-22，在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AE}$，试判断$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{BC}$是否共线.

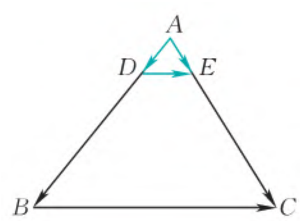


图 1-22

解 因为

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$=5\overrightarrow{AE}-5\overrightarrow{AD}$

$=5(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=5\overrightarrow{DE}$，

所以$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{BC}$共线.

例3 如图 1-23，G是$\triangle ABC$的重心，D是BC的中点.

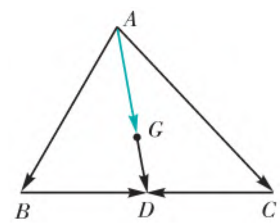


图 1-23

(1) 求证：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；

(2) 用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示向量$\overrightarrow{AG}$.

解 (1) 因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，所以

$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}.$

因为D是BC的中点，所以

$$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0},$$

所以$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，即

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

(2) 由G是$\triangle ABC$的重心知

$$|\overrightarrow{AG}|:|\overrightarrow{AD}|=2:3,$$

所以

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$

练习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，下列说法中不正确的是（　　）.

   (A) $2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $2\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的两倍

   (B) $-2\boldsymbol{a}$ 与 $5\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且 $-2\boldsymbol{a}$ 的模是 $5\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{2}{5}$

   (C) $-2\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{a}$ 是一对相反向量

   (D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是一对相反向量

2. 点 C 在线段 AB 上，且 $\frac{AC}{CB}=\frac{5}{2}$，则 $\overrightarrow{AC}=$________$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=$________$\overrightarrow{AB}$.

3. 把下列各小题中的向量 $\boldsymbol{b}$ 用实数与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积的形式来表示：

   (1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{e}$；　　(2) $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-14\boldsymbol{e}$；

   (3) $\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}$；　　(4) $\boldsymbol{a}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$.

4. 判断下列各小题中的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线：

   (1) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$；

   (2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

5. 化简：

   (1) $5(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+4(2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})$；

   (2) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-\frac{1}{4}(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

   (3) $(x+y)\boldsymbol{a}-(x-y)\boldsymbol{a}$　$(x, y\in\mathbf{R})$.

1.2.4 向量的数量积

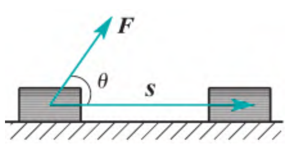


图 1-24

从物理学我们知道，功与物体所受的力以及物体的位移这两个向量有关. 如果一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$，那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角（如图1-24）.

在数学中我们说，W 就是向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

那么，对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的数量积应该如何定义呢？

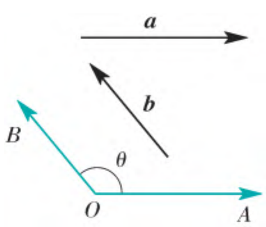


图 1-25

如图 1-25，已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么 $\angle AOB=\theta\,(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.

当 $\theta=90^\circ$ 时，我们称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，可记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（inner product）（或

内积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

规定：$\boldsymbol{0}$ 与任意向量的数量积为 0.

由向量的数量积的定义，容易得到如下性质：

(1) 当 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量 $\boldsymbol{e}$ 时，$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

(2) 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 可简写为 $\boldsymbol{a}^2$.

(4) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ ($\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量).

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

如图 1-26，若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ，过点 B 作 $BB_1\perp OA$，垂足为 B_1，则

$$OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

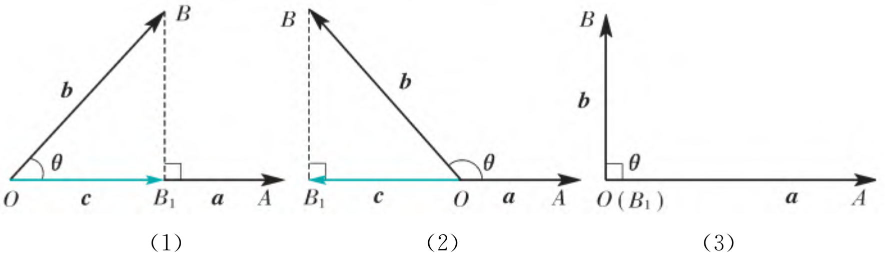


图 1-26

记 $\boldsymbol{c}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，它是向量 $\boldsymbol{b}$ 向向量 $\boldsymbol{a}$ 的**投影**(projection)，称为**投影向量**(projection vector)，把$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量.

显然，向量 $\boldsymbol{b}$ 向向量 $\boldsymbol{a}$ 的投影 $\boldsymbol{c}$ 是一个与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量.

当 θ 为锐角时(图 1-26(1))，投影 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是一个正数；

当 θ 为钝角时(图 1-26(2))，投影 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是一个负数；

当 $\theta=90^\circ$(图 1-26(3))时，投影 $\boldsymbol{c}$ 为零向量，投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是 0；

当 $\theta=0^\circ$ 时，投影 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|$；

当 $\theta=180^\circ$ 时，投影 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，投影 $\boldsymbol{c}$ 的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=-|\boldsymbol{b}|$.

由此，我们可以得到向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：

数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的模$|\boldsymbol{a}|$与 $\boldsymbol{b}$ 向 $\boldsymbol{a}$ 的投影的数量$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

对向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，由向量的数量积的定义和几何意义知，向量的数量积满足下列运算律：

你能完成这些运算律的证明吗？

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

例1 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=30°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\times2\times\cos 30°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

例2 求证：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；

(3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

证明 (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

(3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

例3 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=3^2-3\times2\times\cos 60°-6\times2^2$

$=-18$.

例4 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求实数 k 的值.

解 因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,$$

即

$$k\boldsymbol{a}^2+(k-2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0.$$

又因为

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1,\ \boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=4,$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\times2\times\cos 60^\circ=1,$$

所以

$$k+(k-2)-8=0,$$

解得

$$k=5.$$

练习

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $3\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.
2. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 60°，试求下列向量的夹角：
   (1) $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$；　(2) $2\boldsymbol{a}$ 与 $3\boldsymbol{b}$.
3. 已知$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，判断$\triangle ABC$ 的形状.
4. 设 O 是边长为 6 的等边$\triangle ABC$ 的中心，向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.
5. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，
   (1) 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角；(2) 求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角；(3) 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的夹角.

习题 1.2

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，四边形 $ABCD$ 是否为平行四边形？
2. 化简：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OM}$.
3. 若 P 是▱$ABCD$ 外一点，化简：$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD}$.
4. 化简：$5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$.
5. 已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.
6. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=1$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
7. 若点 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点，且满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 为$\triangle ABC$ 的(　　).
   (A) 外心　　(B) 内心　　(C) 垂心　　(D) 重心
8. 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，设$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=6\boldsymbol{e}_1+23\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2$，求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线.
9. 已知 O 是四边形 $ABCD$ 所在平面内一点，若满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，则四边形 $ABCD$ 的形状有什么特殊性？试证明你的猜想.
10. 如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，但 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线，试求实数 k 的值.
11. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°，且$|\boldsymbol{a}|=4$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=24$. 求向量 $\boldsymbol{b}$ 向向量 $\boldsymbol{a}$ 的投影.
12. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-1$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

1.3 向量基本定理及坐标表示

1.3.1 平面向量基本定理

在物理学中我们知道，力是可以分解的．如图 1-27 所示，悬挂着的电灯所受的重力 $\boldsymbol{F}$ 可分解为力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$，即 $\boldsymbol{F}$ 可用 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 来表示．物理学中的这一结论告诉我们：平面上的一个向量可以用两个不共线的向量表示．我们自然要问，对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，是否也可用两个不共线的向量来表示？若能表示，表示的方法是否唯一？下面我们对这一问题进行探究．

图 1-27

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线的向量(如图 1-28)，在平面上任取一点 O，作

$$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{e}_2.$$

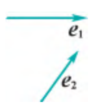


图 1-28

对于平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，则由数乘向量的知识可知，$\boldsymbol{a}$ 可用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示．

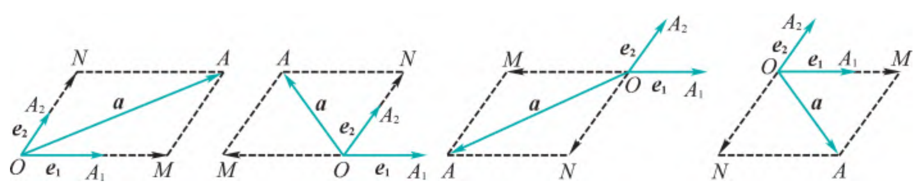


图 1-29

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 均不共线时，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$．过点 A 作平行于 $\overrightarrow{OA_2}$ 的直线，与 $\overrightarrow{OA_1}$ 所在直线交于点 M；过点 A 作平行于 $\overrightarrow{OA_1}$ 的直线，与 $\overrightarrow{OA_2}$ 所在直线交于点 N(如图 1-29)．这时平行四边形 $OMAN$ 的对角线正好为 OA，于是

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}.$$

因为 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线，$\overrightarrow{ON}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，故存在唯一一对实数 λ_1，λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，所以

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

这样，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示.

于是得到下面的定理.

平面向量基本定理 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么，对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一一对实数 λ_1，λ_2，使得

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组**基底**(base).

例1 如图 1-30，已知▱$ABCD$，E 为 BC 的中点，F 为 DC 上的点，且 $DF=2FC$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{EF}$.

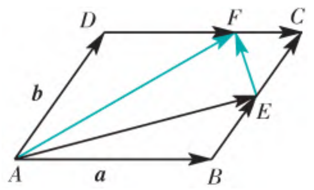


图 1-30

解 因为 $DF=2FC$，所以$\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$，又$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

因为 E 为 BC 的中点，所以$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\right)-\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

例2 如图 1-31，已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$($\lambda\in\mathbf{R}$). 试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OC}$.

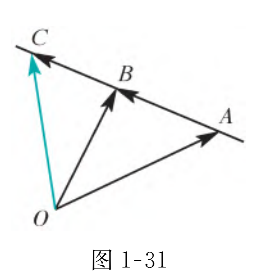


图 1-31

解 因为$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

练习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是(　　).
(A) A，B，D　　(B) A，B，C　　(C) B，C，D　　(D) A，C，D
2. 设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的两个向量，分别判断下列各组向量能否作为平面内所有向量的一组基底.
(1) $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$；　　(2) $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$；
(3) $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$；　　(4) $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.
3. 在▱$ABCD$ 中，M，N 分别是 DC，BC 的中点，已知$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{d}$，用 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 表示$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$.
4. 在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点. 若$\overrightarrow{CE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$，求 $m+n$.
5. 在△ABC 中，点 M，N 满足$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$. 若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in\mathbf{R})$，求 x 和 y.

1.3.2 平面向量的坐标表示

由平面向量基本定理，我们知道：设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，则对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，均有唯一的一对实数 λ_1，λ_2，使得

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

因此，当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 确定后，对于平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一个实数对(λ_1,λ_2)与它对应.

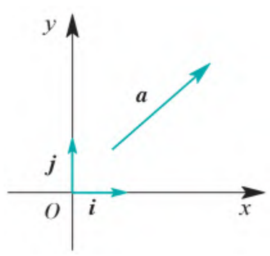


图 1-32

特别地，如图 1-32 所示，在直角坐标系内分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，则对于坐标平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一个实数对(x,y)，使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.\tag{①}$$

我们把(x,y)叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(x,y).\tag{②}$$

其中，x 叫作 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标，y 叫作 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标. ②式叫作**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示**. 显然

$$\boldsymbol{i}=(1,0)，\boldsymbol{j}=(0,1)，\mathbf{0}=(0,0).$$

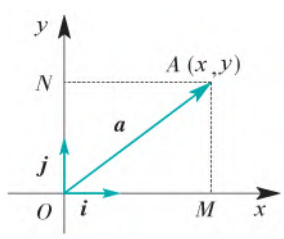


图 1-33

在平面直角坐标系内，如果向量$\overrightarrow{OA}$的终点 A 的坐标为(x,y)，那么$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$(如图 1-33). 因此，向量$\overrightarrow{OA}$的坐标也就是点 A 的坐标.

例1 如图 1-34，已知两点 $A(-1,\ 2)$，$B(-5,\ 4)$，用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}$，并写出它们的坐标.

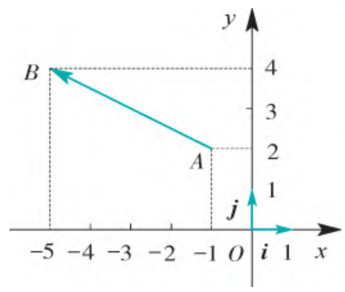


图 1-34

解 因为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是以原点为起点的向量，所以

$\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，其坐标为$(-1,\ 2)$；

$\overrightarrow{OB}=-5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，其坐标为$(-5,\ 4)$；

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})-(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\\&=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}$的坐标为$(-4,\ 2)$.

练习

1. 已知 O 是坐标原点，点 A 在第一象限，$|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$，$\angle xOA=60°$，求向量$\overrightarrow{OA}$的坐标.
2. 在平面直角坐标系中，点 $A(2,\ 3)$，$B(-3,\ 4)$，在 x 轴、y 轴正方向上的两个单位向量分别是 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，则下列说法中正确的是________.
   ①$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$；　　②$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$；
   ③$\overrightarrow{AB}=-5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$；　　④$\overrightarrow{BA}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$.
3. 已知$\overrightarrow{OA}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,\ 5)$，求点 C 的坐标.
4. 已知点 $M(3,\ -2)$，$N(-5,\ -1)$，若$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，求点 P 的坐标.

1.3.3 平面向量线性运算的坐标表示

已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

同理可得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2).$$

也就是说，**两个向量和(差)的坐标等于这两个向量相应坐标的和(差).**

同样，已知 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$和实数 λ，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j},$$

即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\ \lambda y).$$

也就是说，**实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘以原来向量的相应坐标.**

有了向量运算的坐标表示，我们来研究一般向量的起点、终点坐标与向量坐标的关系.

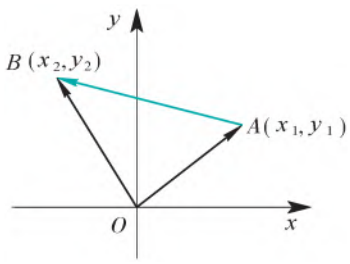


图 1-35

如图 1-35，已知点 A 的坐标为$(x_1,\ y_1)$，点 B 的坐标为$(x_2,\ y_2)$，由向量减法法则知

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

即一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

例1 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -5)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,\ 2)+(3,\ -5)=(2,\ -3)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,\ 2)-(3,\ -5)=(-4,\ 7)$，

$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(-1,\ 2)-2(3,\ -5)$

$=(-3,\ 6)-(6,\ -10)=(-9,\ 16)$.

例2 已知▱$ABCD$ 的三个顶点 A，B，C 的坐标分别为$(-1,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(4,\ -2)$，求点 D 的坐标.

解 设点 D 的坐标为$(x,\ y)$. 因为

$\overrightarrow{AB}=(0-(-1),\ 2-0)=(1,\ 2)$，

$\overrightarrow{DC}=(4-x,\ -2-y)$，

由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，得

$$(1,\ 2)=(4-x,\ -2-y)，$$

所以$\begin{cases}1=4-x,\\2=-2-y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\y=-4.\end{cases}$

即点 D 的坐标为$(3,\ -4)$.

练习

1. 已知点 $A(1,\ -1)$，向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为$(1,\ 3)$，求点 B 的坐标.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标：
   (1) $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ -1)$；
   (2) $\boldsymbol{a}=(3,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 5)$；
   (3) $\boldsymbol{a}=(3,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 1)$.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ -1)$，求$-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，$4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的坐标.
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ -1)$，$\boldsymbol{c}=(3,\ -2)$，且 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，求 λ，μ 的值.
5. 已知▱$ABCD$ 的顶点 A 的坐标为$(-2,\ 1)$，一组对边 AB，CD 的中点分别是 $M(3,\ 0)$，$N(-1,\ -2)$，求点 B，C，D 的坐标.

1.3.4 平面向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，怎样用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 呢?

设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴方向相同的单位向量，容易知道

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

因为 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

这就是说，**两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和**，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

由此还容易得到以下结论.

(1) 若 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，则 $\boldsymbol{a}^2=x^2+y^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点为 $A(x_1, y_1)$，终点为 $B(x_2, y_2)$，那么

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ 是非零向量，它们的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

特别地，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

> 你能否由此证明：$(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$.

例 1 设 $\boldsymbol{a}=(4, -3)$，$\boldsymbol{b}=(5, 12)$，求 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解法 1 因为

$$\boldsymbol{a}^2=4^2+(-3)^2=25,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times5-3\times12=-16,$$
$$\boldsymbol{b}^2=5^2+12^2=169,$$

所以

$$\begin{aligned}&(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=3\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2\\&=3\times25-2\times(-16)-169\\&=-62.\end{aligned}$$

解法 2　因为

$$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3\times4+5,\ 3\times(-3)+12)=(17,\ 3),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-5,\ -3-12)=(-1,\ -15),$$

所以

$$(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=17\times(-1)+3\times(-15)=-62.$$

例 2　已知△ABC 的顶点坐标分别为 $A(1,\ 2)$，$B(2,\ 3)$，$C(-2,\ 5)$，求△ABC 的各个内角(用计算器算出各角的大小，精确到 $0.1°$).

解　因为

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 3-2)=(1,\ 1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2-1,\ 5-2)=(-3,\ 3),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0,$$

因此，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，故 $A=90°$.

又因为

$$\overrightarrow{BA}=(-1,\ -1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(-2-2,\ 5-3)=(-4,\ 2),$$

所以

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\times(-4)+(-1)\times2=2,$$
$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5},$$

故
$$\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以 $B\approx71.6°$，从而 $C=90°-B\approx18.4°$.

练习

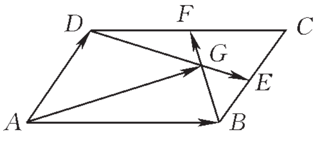
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$以及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ 4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,\ -2)$，求：
   (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；
   (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；
   (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2$.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{b}|$.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(3,\ m)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 m.
5. 已知 $\boldsymbol{a}=(\lambda+1,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda+2,\ 2)$，若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求 λ 的值.

习题 1.3

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内的一组基底，向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，若 A，B，D 三点共线，求 k 的值.
2. 若 $A(x，3)$，$B(4，x)$，当$|\overrightarrow{AB}|$取最小值时，求 x 的值.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(4，2)$，求与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(x，y)$，$\boldsymbol{b}=(-1，2)$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1，3)$，求$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$.
5. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1，0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2}\right)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.
6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2，-3)$，$\boldsymbol{b}=(x，6)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.
7. 已知 $\boldsymbol{a}=(4，3)$，$\boldsymbol{b}=(-2，1)$，如果向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，求 λ.
8. 已知集合 $M=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(1,2)+\lambda(3，4)，\lambda\in\mathbf{R}\}$，$N=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(-2，-2)+\mu(4，5)，\mu\in\mathbf{R}\}$，求 $M\cap N$.
9. 已知 $A(2，3)$，$B(8，-4)$，点 $G(2，-1)$在$\triangle ABC$ 的中线 AD 上，且$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}$，求点 C 的坐标.
10. 已知▱$ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1，2)$，$B(2，3)$，$C(-2，5)$，求$\overrightarrow{BD}$.
11. 已知 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一定点，P 是平面内一动点，且$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$，$\lambda\in[0，+\infty)$，则点 P 的轨迹一定经过$\triangle ABC$ 的(　　).

    (A) 外心　　(B) 内心

    (C) 重心　　(D) 垂心
12. 在$\triangle ABC$ 中，设$\overrightarrow{AB}=(2，3)$，$\overrightarrow{AC}=(1，k)$，且$\triangle ABC$ 是直角三角形，求 k 的值.
13. 已知 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，若 $P(x，y)$为直线 AB 上一点，且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda\in\mathbf{R}，\lambda\neq-1)$. 试证：
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}，\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$
14. 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，DC 的中点，DE 和 BF 的交点为 G，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{DE}$和$\overrightarrow{AG}$.



(第 14 题图)

阅读与讨论

几何图形与向量关系

向量的引入为解决几何问题提供了有力的工具．在用向量方法解决几何问题时，一般是先将图形的性质“翻译”成向量关系，然后利用向量的运算导出另一些向量关系，再将得到的向量关系“翻译”成图形的另一些性质．在这个过程中，正确掌握图形语言与向量语言之间的相互转换以及选择适当的方法是关键．因此，掌握下表中一些最基本的转换是必要的．利用表中的基本转换，结合适当的向量运算，我们就能解决大量的几何问题．

图形语言	向量语言
直线 AB 与直线 CD 平行(或重合)	$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$
直线 AB 与直线 CD 垂直	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
点 H 在直线 AB 上	$\overrightarrow{AH}/\!/\overrightarrow{AB}$
H 是线段 AB 的中点	$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}$或$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\mathbf{0}$ 或对平面上任何一点 M，有 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MH}$
点 H 在直线 AB 上，且 $AH=\lambda HB(\lambda\neq-1)$	对平面上任何一点 M，有 $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{MA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{MB}$
A，B，C 三点共线	$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$

作为例子，我们用向量证明：

$\triangle ABC$ 的三条中线交于一点(该点称为$\triangle ABC$ 的重心)，该点是三角形中线的三等分点．

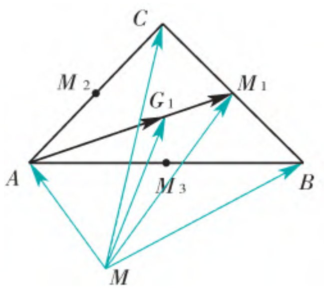


图 1

如图 1，设 M_1，M_2，M_3 分别是 BC，CA，AB 的中点．在 AM_1 上取点 G_1，使得$\overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1}$．

再在平面上任取一点 M，分别连接 MA，MB，MC，

MG_1，MM_1. 由上表倒数第二栏的公式知

$$\overrightarrow{MG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MM_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

同理，分别在 BM_2，CM_3 上取点 G_2，G_3，使得

$$\overrightarrow{BG_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}，\overrightarrow{CG_3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}，$$

可得
$$\overrightarrow{MG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})，$$

$$\overrightarrow{MG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

这样，$\overrightarrow{MG_1}=\overrightarrow{MG_2}=\overrightarrow{MG_3}$，即 G_1，G_2，G_3 重合，设为 G，所以，$\triangle ABC$ 的三条中线交于一点 G.

顺便指出，在上述证明过程中，我们得到：

若 G 是$\triangle ABC$ 的重心，则

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})，$$

即
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}. \quad ①$$

我们可以证明，当①式成立时，G 为$\triangle ABC$ 的重心.

这样我们得出三角形重心的向量形式的表述：

G 是$\triangle ABC$ 的重心，当且仅当对平面上任一点 M，有

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$$

特别地，如果让 M 与 G 重合，可得三角形重心的另一种向量表述：

G 是$\triangle ABC$ 的重心，当且仅当$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

讨论题

分组探求三角形的外心、内心和垂心的向量表述，并进行小组交流.

1.4 向量的应用与解三角形

1.4.1 向量的简单应用

向量体现了数与形的结合，是解决数学、物理等问题的重要工具. 运用向量方法研究数学、物理等问题，关键是根据题意正确建立向量模型.

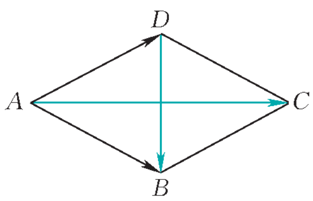


图 1-36

例1 用向量方法证明：菱形的对角线互相垂直.

证明 如图 1-36，因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|,\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},$$

从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2\\&=0.\end{aligned}$$

因此，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$，故菱形的对角线互相垂直.

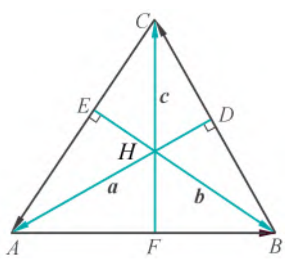


图 1-37

例2 试证三角形的三条高线交于一点.

证明 如图 1-37，设 AD，BE 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC，AC 上的高，AD 与 BE 交于 H. 连接 CH，延长 CH 交 AB 于 F.

记$\overrightarrow{HA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{HB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{HC}=\boldsymbol{c}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

因为 AD 是 BC 边上的高，所以 $HA\perp BC$，故$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0. \quad ①$$

同理可得

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0. \quad ②$$

由①，②可得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，从而 $HC\perp BA$，即 $CF\perp AB$，因此 CF 是 AB 边上的高.

所以，三角形的三条高线交于一点.

例3 如图 1-38，一个所受重力为 40 N 的均匀球体放在倾斜角为 30°的光滑斜面上，并被一个光滑挡板挡住处于平衡状态. 若挡板与斜面间的夹角为 45°，求挡板对球体的压力的大小.

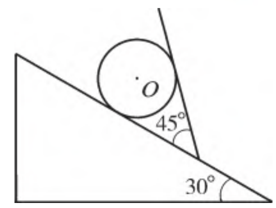
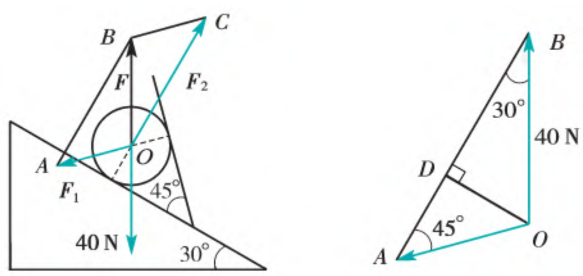


图 1-38

解 如图 1-39(1)，对球体进行受力分析. 设挡板对球体的压力为 $\boldsymbol{F}_1$，斜面对球体的弹力为 $\boldsymbol{F}_2$，则 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 与重力的大小相等，方向相反，所以 $|\boldsymbol{F}|=40$ N.

以 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 为邻边作▱$OABC$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}$，$\angle OBA=30°$，$\angle BAO=45°$.



(1) (2)

图 1-39

如图 1-39(2)，作 $OD\perp AB$，垂足为 D，则 $OD=\dfrac{1}{2}OB=20$，故

$$OA=\frac{OD}{\sin 45°}=20\sqrt{2},$$

即

$$|\boldsymbol{F}_1|=20\sqrt{2}\ \text{N}.$$

所以，挡板对球体的压力的大小为 $20\sqrt{2}$ N.

例4 2017 年 5 月，某市举行抢渡长江挑战赛. 如图 1-40，假设比赛的起点设在上游南岸的 A 地，终点设在下游北岸的 B 地. 测得江宽 $AC=900$ m，$BC=900$ m. 比赛当天江水的流速大小 $|\boldsymbol{v}_1|=1.85$ m/s. 已知某选手在静水中的速度的大小 $|\boldsymbol{v}_2|=1.35$ m/s，且在比赛中保持不变，那么该选手最快多长时间到达终点？并求此时 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角 θ 的大小.

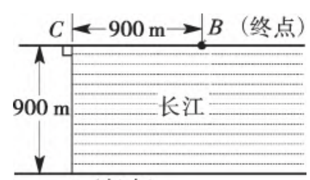


图 1-40

解 如图 1-41，以 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 为邻边作平行四边形，则其对角线向量 $\boldsymbol{v}$ 为该选手实际渡江的速度. 显然，当 $\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同时，能最快到达终点.

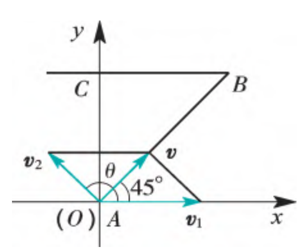


图 1-41

建立如图 1-41 所示的直角坐标系，则 $\boldsymbol{v}_1=(1.85,\ 0)$，$\triangle ACB$ 为等腰直角三角形.

设 $\boldsymbol{v}=(x,\ x)$，则

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1=(x-1.85,\ x).$$

而 $|\boldsymbol{v}_2|=1.35$，所以

$$(x-1.85)^2+x^2=1.35^2,$$

解得 $$x_1\approx1.16,\ x_2\approx0.69(\text{舍去}).$$

所以 $\boldsymbol{v}=(1.16,\ 1.16)$，$\boldsymbol{v}_2=(-0.69,\ 1.16)$，渡江时间为

$$900\div1.16\approx776\ (\text{s}).$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{-0.69\times1.85}{1.35\times1.85}\approx-0.51.$$

用计算器算得 $\theta\approx180°-59.3°=120.7°$.

所以，该选手最快 776 s 能到达终点，这时 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角 θ 约为 $120.7°$.

练习

1. 用向量方法证明：等腰三角形底边上的中线垂直于底边.
2. 有一艘在静水中的速度为 10 km/h 的船，沿与河岸成 60°角的方向向河的上游行驶. 受水流的影响，结果在垂直于河岸的方向上驶达对岸. 求这条河的水流速度的大小.
3. 有一只鹰正沿与水平方向夹角为 30°的方向向下飞行，太阳光从鹰的头上直射下来，鹰在地面上影子的速度是 12 m/s，求鹰飞行速度的大小.

1.4.2 解三角形

在初中，我们已学会解直角三角形，也就是说，已会根据直角三角形中已知的边或角求出未知的边或角.

在实际中，我们常常会遇到任意三角形的边角计算问题. 例如：

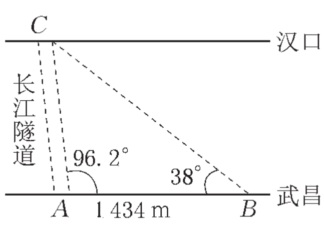


图 1-42

如图 1-42，武汉长江隧道的两端口分别位于汉口的点 C 和武昌的点 A. 为了测量隧道两个端口间的距离，测量人员在武昌一侧选择点 B，测得 A，B 两点间的距离为 1 434 m，$\angle CAB=96.2°$，$\angle ABC=38°$. 那么，如何根据这些数据来计算 A，C 两点间的距离呢？

这是一个“在三角形中，已知两角和一边，求另一边”的问题. 为了解决这类问题，我们先来学习两个重要定理——正弦定理和余弦定理.

一般情况下，我们用 a，b，c 表示$\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB，用 A，B，C 表示$\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，下面我们来研究 a，b，c，A，B，C 之间的数量关系.

1. 正弦定理

如图 1-43，在 Rt△ABC 中，$C=90^\circ$，根据正弦函数的定义可得

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},$$

所以
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又因为 $C=90^\circ$，所以 $\sin C=1$，故$\frac{c}{\sin C}=c$，于是可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

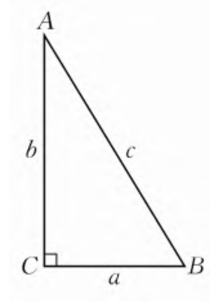


图 1-43

那么，在任意三角形中，这一关系是否成立呢？下面，我们用向量来研究这个问题.

当△ABC 为锐角三角形时，如图 1-44，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D.

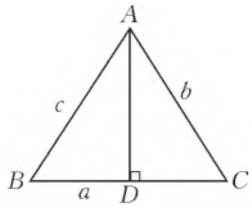


图 1-44

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

又因为 $AD\perp BC$，所以$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD,$$

于是可得

$$c\cdot\cos(90^\circ-B)=b\cdot\cos(90^\circ-C),$$

即 $c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$，所以

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理，过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

所以
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

当△ABC 为钝角三角形时，不妨设 B 为钝角，如图1-45，过点 A 作 $AD\perp BC$，交 CB 的延长线于 D，则$\angle BAD=B-90^\circ$，$\angle CAD=90^\circ-C$，同理可得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

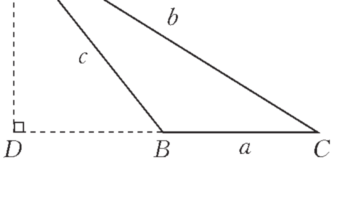


图 1-45

同理，过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

所以 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

因此，我们可以得到下面的定理.

正弦定理 在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

一般地，我们把三角形的三个角 A，B，C 和它们的对边 a，b，c 叫作三角形的元素，已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫作**解三角形**.

如果已知三角形的两个角和任一边，利用正弦定理可以解此三角形.

例1 在△ABC 中，已知 $c=10$，$A=45°$，$C=30°$，解此三角形.

你能解决本节开头提出的问题吗？

解 因为 $A=45°$，$C=30°$，所以 $B=180°-A-C=105°$.

根据正弦定理，

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2},$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 105°}{\sin 30°}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

例2 在△ABC 中，$B=45°$，$c=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，求 C.

解 根据正弦定理，

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{3}\sin 45°}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $C=60°$或 $C=120°$.

例3 在△ABC 中，已知 $a=10$，$b=6$，$\angle A=30°$，解此三角形（角度精确到 0.1°，边长精确到 0.000 1）.

例 2、例 3 都属于“已知三角形的两边和其中一边所对的角，解三角形”，它们分别有两解和一解. 还会有其他情况吗？

解 因为 $b<a$，所以 $B<A$，所以 B 也是锐角. 因为 $a=10$，$b=6$，$A=30°$，

根据正弦定理，

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin 30°}{10}=0.3.$$

因为 $0°<B<90°$，所以 $B\approx17.5°$，所以

$$C=180°-A-B\approx 132.5°,$$

根据正弦定理，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 132.5°}{\sin 30°}\approx 14.7455.$$

例4 如图 1-46，已知建筑物 AB 的高为 40 m，另一建筑物 CD 与 AB 的水平距离 $BC=55$ m，在 AB 的顶部 A 测得 CD 的视角为 58°，求建筑物 CD 的高(精确到 0.1 m).

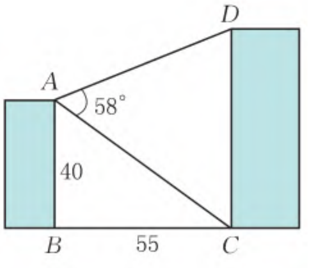


图 1-46

解 在 Rt△ABC 中，$\tan\angle ACB=\frac{40}{55}\approx 0.7273$，所以 $\angle ACB\approx 36°$，从而 $\angle ACD=54°$，

$$\angle ADC=180°-(54°+58°)=68°.$$

在△ACD 中，根据正弦定理，有 $\frac{CD}{\sin 58°}=\frac{AC}{\sin 68°}$，所以

$$CD=\frac{AC\times\sin 58°}{\sin 68°}.$$

因为 $AC=\sqrt{40^2+55^2}=\sqrt{4625}$，所以

$$CD=\frac{\sqrt{4625}\times 0.8480}{0.9272}\approx 62.2(\text{m}).$$

即建筑物 CD 的高约为 62.2 m.

练习

1. 在△ABC 中，$A=60°$，$a=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{2}$，求 B.
2. 在△ABC 中，若 $b=a\cos C+c\sin A$，求 A.
3. 在△ABC 中，若 $A:B:C=1:2:3$，那么 $a:b:c=$________.
4. 在△ABC 中，$b=11$，$a=20$，$B=30°$，求 A，C，c(角精确到 1°，边长精确到 1).
5. 请你完成本节开头提出的问题，求出 A，C 两点间的距离.

2. 余弦定理

如果已知一个三角形的两边及其夹角，那么这个三角形的大小和形状是完全确定的. 但是，利用正弦定理不易求出该三角形的另一条边，因此，我们必须建立三角形边与角之间的其他数量关系.

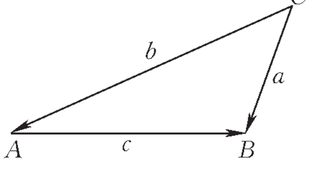


图 1-47

如图 1-47，在△ABC 中，因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}^2&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}^2,\end{aligned}$$

所以 $|\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos(180^\circ-A)+|\overrightarrow{AB}|^2$，

即 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得：

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

因此，我们得到以下定理：

余弦定理 三角形中任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

即 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

由余弦定理，可以得到它的推论

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

在余弦定理中，如果 $C=90^\circ$，这时 $\cos C=0$，所以 $c^2=a^2+b^2$. 由此可知勾股定理是余弦定理的特例.

余弦定理建立了三角形的一个角与三条边之间的联系，利用它可以解决一些生活中的实际问题.

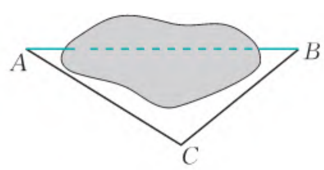


图 1-48

例1 如图 1-48，要测量一水塘两侧 A，B 两点间的距离. 先选适当的位置 C，测出 $\angle ACB=109^\circ$，再量出 AC，BC 的长分别为 42.1 m，35.0 m，试求出 A，B 两点间的距离.

解 在△ABC 中，由余弦定理，可得

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C\\&=42.1^2+35.0^2-2\times42.1\times35.0\times\cos109^\circ\\&=42.1^2+35.0^2+2\times42.1\times35.0\times\cos71^\circ\\&\approx3\,956.86,\end{aligned}$$

所以 $$AB\approx\sqrt{3\,956.86}\approx62.9(\mathrm{m}).$$

即 A，B 两点间的距离约为 62.9 m.

例2 已知$\triangle ABC$的三边长分别为$a=7$，$b=6$，$c=9$，求A，B，C(精确到1°).

解 由余弦定理的推论得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+6^2-9^2}{2\times7\times6}\approx0.0476,$$

所以$C\approx87^\circ$.

因为

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+9^2-7^2}{2\times6\times9}\approx0.6296,$$

所以$A\approx51^\circ$.

所以$B=180^\circ-A-C\approx180^\circ-(87^\circ+51^\circ)=42^\circ$.

例3 在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=5$，$C=35^\circ$，求c，A和B(边长精确到0.0001，角度精确到1°).

解 根据余弦定理，

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos35^\circ\\&\approx9.4254,\end{aligned}$$

所以$c\approx3.0701$.

根据正弦定理，

$$\begin{aligned}\sin A&=\frac{a\sin C}{c}=\frac{3\sin35^\circ}{3.0701}\\&\approx0.5605,\end{aligned}$$

所以$A\approx34^\circ$.

所以$B=180^\circ-A-C\approx180^\circ-34^\circ-35^\circ=111^\circ$.

例4 在$\triangle ABC$中，已知$B=45^\circ$，$c=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，用余弦定理求C.

解 根据余弦定理，

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

得$8=a^2+12-2\sqrt{6}a$，即

$$a^2-2\sqrt{6}a+4=0,$$

解得$a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$或$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

又由余弦定理的推论得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以，

当$a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$时，

用正弦定理或余弦定理都可解决“已知两边和其中一边所对的角，求三角形中其他边角”的问题. 试将两者进行比较，并谈谈你的看法.

$$\cos C=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

得 $C=60^\circ$；

当 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$时，

$$\cos C=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2},$$

得 $C=120^\circ$.

综上可知，$C=60^\circ$或 120°.

练习

1. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，求 b.
2. 在$\triangle ABC$中，已知 $b=3$，$c-a=2$，$\cos A=\frac{7}{8}$，求 a.
3. 在$\triangle ABC$中，若 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2c}$，判断$\triangle ABC$的形状.
4. 在$\triangle ABC$中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，求最大角的余弦值.
5. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=30$，$b=22$，$c=16$，求 A，B 和 C(精确到 1°).

习题 1.4

1. 用向量方法证明：梯形的中位线平行于底边，且等于两底和的一半.
2. 一条河的两岸平行，河的宽度为 400 m，一艘船以 $|\boldsymbol{v}_1|=13$ km/h 的速度大小向对岸行驶，水流速度的大小为 $|\boldsymbol{v}_2|=5$ km/h，要使船能垂直到达对岸，$\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角 θ 应为多少(精确到 0.1 度)？船垂直到达对岸需要多少时间？
3. 两个力 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{F}_2=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$(其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 是 x 轴，y 轴正方向上的单位向量)作用于同一质点，使该质点从 $A(2, 5)$移动到 $B(6, 7)$. 求：
   (1) $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 分别对该质点所做的功；
   (2) $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 对该质点所做的功.
4. 在$\triangle ABC$中，$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$B=150^\circ$，求 b.
5. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=2$，$b=3$，$c=4$，求$\frac{\sin 2C}{\sin A}$.
6. 在$\triangle ABC$中，$a=31$，$b=42$，$c=27$，求$\triangle ABC$各角的度数（精确到 1°).
7. 在平面直角坐标系中，三角形的三个顶点为 $A(6, 5)$，$B(-2, 8)$，$C(4, 1)$，求 A(精确到 1°).
8. 在$\triangle ABC$中，如果 $\sin A:\sin B:\sin C=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，求这个三角形的最小角.
9. 在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求 A.

10. 在$\triangle ABC$中，若$b=11$，$a=20$，$B=30^\circ$，则这样的三角形有几个？

11. 在直角$\triangle ABC$中，若$C=90^\circ$，则$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab$. 而$\sin C=1$，所以$S=\frac{1}{2}ab\sin C$. 这个公式对于任意三角形是否成立？为什么？

12. 已知一个锐角三角形的三边长分别是2，3，x，求x的取值范围.

13. 已知点O是$\triangle ABC$的外心，E是$\triangle ABC$内一点，满足$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，求证：$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BC}$.

14. 在$\triangle ABC$中，已知向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0,$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2},$$

试判断$\triangle ABC$的形状.

阅读与讨论

已知两边和其中一边的对角时解三角形

已知两角及其一边，这样的三角形是唯一确定的，解此类三角形的关键是确定已知边所对的角，以便利用正弦定理.

已知两边和其中一边的对角，这样的三角形可能不唯一，解此类三角形的过程中，要把握两个原则：一是大边对大角，二是利用正弦定理求角.

下面我们来研究$\triangle ABC$中，已知a，b和A时解三角形的各种情况.

1. A为锐角.

(1) 若$a\geqslant b$，则B为锐角，由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，计算B时只能取锐角的值，此时三角形只有一个解；

(2) 若$a<b$.

①如果$a<b\sin A$，由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，计算得$\sin B>1$，此时三角形无解；

②如果 $a=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$，计算得 $\sin B=1$，即 $B=90^\circ$，此时三角形只有一个解；

③如果 $a>b\sin A$，由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$，计算得 $\sin B<1$，所以 B 可以是一个锐角或一个钝角，此时三角形有两个解.

2. A **为钝角或直角.**

（1）若 $a>b$，由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$，计算得 $\sin B<1$，且 B 只能取锐角，此时三角形只有一个解；

（2）若 $a\leqslant b$，由大边对大角知 $A\leqslant B$，此时三角形无解.

讨论题

已知两边和其中一边的对角，解三角形时有多种可能情况，你能从几何角度给出解释吗？你能作出下面表格中(已知 a，b 和 A)的相应图形吗？

	A 为锐角				A 为钝角或直角	
关系式	$a\geqslant b$	$a<b\sin A$	$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a>b$	$a\leqslant b$
图形						
解的个数	一个	无解	一个	两个	一个	无解

复习题

A 组

1. 判断下列命题的正确性：

（1）相等向量一定是平行向量； （　　）

（2）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$； （　　）

（3）$\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$； （　　）

（4）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$. （　　）

2. (1) 在$\triangle ABC$中，$B=45°$，$c=2\sqrt{2}$，$b=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，那么$A=$(　　).

(A) 15°　　(B) 75°　　(C) 105°　　(D) 15°或75°

(2) 在$\triangle ABC$中，若$A=60°$，$b=16$，此三角形的面积$S=220\sqrt{3}$，则a的值是(　　).

(A) $20\sqrt{6}$　　(B) 25　　(C) 55　　(D) 49

3. 在$\square ABCD$中，若$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，求$\overrightarrow{BD}$.

4. 已知$A(-1,2)$，$B(0,-2)$，若点D在线段AB上，且$2|\overrightarrow{AD}|=3|\overrightarrow{BD}|$，求点$D$的坐标.

5. 已知$A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的坐标；

(2) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$的坐标；

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；

(4) $\angle BAC$的大小.

6. 已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，试求：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$(精确到1°).

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$，且$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=5$，求$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

8. 已知$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，当k为何值时，

(1) $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$；

(2) $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

9. 用向量方法证明：对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

10. 求证：$A(1,0)$，$B(5,-2)$，$C(8,4)$，$D(4,6)$是一个矩形的四个顶点.

11. 在$\triangle ABC$中，若$a=2\sqrt{7}$，$A=60°$，$b<c$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-12$，求$b$，$c$.

12. 根据下列条件，判断三角形的形状：

(1) 已知$A+C=2B$，$b^2=ac$；

(2) 已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，$\sin A=2\sin B\cos C$.

13. 根据下列条件解三角形(角度精确到1′，边长精确到0.01).

(1) $a=12$，$b=5$，$A=120°$；

(2) $a=6$，$b=8$，$A=30°$；

(3) $a=7$，$b=23$，$C=130°$；

(4) $a=2$，$b=3$，$c=4$.

14. 在$\triangle ABC$中，已知$A>B>C$，且$A=2C$，$b=4$，$a+c=8$，求a，c.

15. 在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点E为BC的中点，点F在边CD上，且$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FC}$，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$.

B 组

1. 机器人站在直角坐标系的原点，面向x轴正方向. 下面是指挥中心给机器人下达的四串命令，用一个命令来取代这一串命令，使机器人达到的终点位置相同.

(1) “旋转90°，直行2 m”，然后“旋转$-90°$，直行2 m”；

(2) “旋转90°，直行2 m”，然后“旋转90°，直行2 m”；

(3) 连续执行命令“旋转 30°，直行 2 m”计 3 次；

(4) 连续执行命令“旋转−45°，直行 5 m”计 7 次.

2. 设两个向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|\boldsymbol{e}_1|=2$，$|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°，若向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为钝角，求实数 t 的取值范围.

3. 在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$D$ 为 BC 的中点，E 为线段 BC 的垂直平分线 l 上异于 D 的任意一点.

(1) 求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$；

(2) 判断$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}$是否为定值，并说明理由.

4. 已知 O 为坐标原点，$A(-2, 1)$，$B(0, 2)$，点 C 满足$\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB}$且$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$，求点 C 的坐标.

5. 已知 O 是△ABC 内一点，且有 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

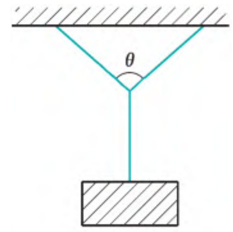
(1) 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$；

(2) 求证 O 为△ABC 的垂心.

6. 如图，两根长度相等的绳子，下端悬挂一个所受重力 $G=20$ N 的物体，上端固定在水平天花板上，两绳间的夹角为 θ.

(1) 当 $\theta=120°$时，求绳子受到的拉力的大小；

(2) θ 为何值时，绳子受到的拉力最小?



(第 6 题图)

7. 在△ABC 中，已知 $A=60°$，$c=3b$，求$\dfrac{a}{c}$和$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$.

8. 在△ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，当$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}):(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=1:2:3$时，求△$ABC$ 的三边长之比.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, \sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(1, 2)$，求 t 的值，使 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$ 取得最小值，并证明此时 $(\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$.

10. 一缉私艇发现在北偏东 45°方向，距离 12 n mile 的海面上有一走私船正以10 n mile/h的速度沿东偏南 15°方向逃窜．若缉私艇的速度为 14 n mile/h，沿北偏东 $45°+\alpha$ 的方向追击．若缉私艇要在最短的时间内追上该走私船，求所需的时间和角 α 的正弦值.

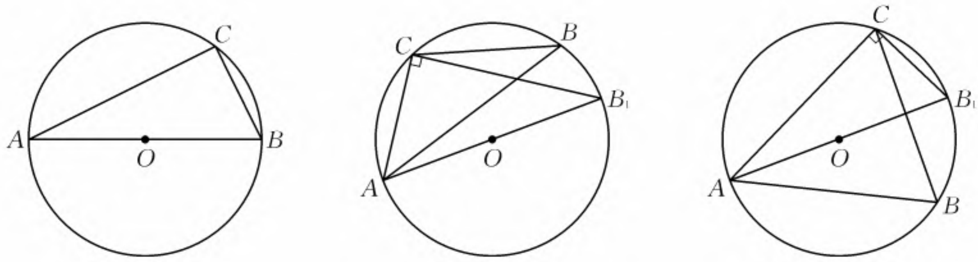
思考与实践

1. 请到图书馆或上网查资料，了解向量和向量代数的历史.

2. 如图(1)，在 Rt△ABC 中，斜边 AB 是△ABC 的外接圆的直径(设△ABC 的外接圆的半径为 R)，因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

这个结论对于任意△ABC(图(2)，图(3))是否成立？给出你的结论并说明理由.



(1)　(2)　(3)

(第 2 题图)

3. 古希腊几何学家海伦(Heren，公元 62 年前后)在他的著作《度量论》一书中提出并证明了三角形的面积公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 S 表示 $\triangle ABC$ 的面积，a，b，c 表示 $\triangle ABC$ 的三边长，p 表示 $\triangle ABC$ 的半周长，即 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

我国南宋数学家秦九韶(1202—1261)也独立地发现了类似的求三角形面积的公式

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

思考：海伦公式、秦九韶求面积公式与余弦定理有什么关系？试用余弦定理推导出这两个公式.

4. 在你所在地选择一个无法达到其底部中心的高大建筑物. 用一个测角器(可以测仰角)与一个皮尺，要求被测量数据的个数尽量少，通过实地测量后，计算出该建筑物的高度，请尽可能多地设计不同方案，并写出研究报告.

第2章　复　数

数的概念是在生产、生活实践中产生的，随着社会的发展，为了解决现实中的某些实际问题，也为了解决数学自身的矛盾，数的概念在不断发展，人们所认识的数的范围也在逐步扩充.

正如我们已经学习过的数，无论是从正数到负数、从自然数到整数、从整数到有理数、从有理数到实数，都反映出数的概念自身的形成和扩展. 实际上，数的概念有两个本质特征：其一，它是一套并不属于客观物质世界的、人造的符号系统；其二，它是可以用来进行各种运算的、合理的符号系统.

认识了实数之后，面临“对负数进行开平方运算”的问题时，人们开始踌躇不已. 16 世纪，在求解“将 10 分为两个数，并要求这两个数的乘积等于 40”这一问题时，意大利数学家卡尔丹（G. Cardano，1501—1576）认为把答案写成“$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$”就可以满足要求：

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40.$$

尽管当时有许多数学家认为式子“$\sqrt{-15}$”是虚构的，没有意义，不承认它是数，但在解决实际问题中使用类似这样的式子却能带来很多方便.

经过一个多世纪的发展，逐渐形成了比较系统的复数理论，并且在数学、力学、电学及其他一些领域有着广泛的应用，成为现代科学技术中普遍使用的一种数学工具.

本章主要介绍复数的概念、表示、运算及其几何意义.

2.1 复数的概念

2.1.1 数系的扩充与复数的引入

数的概念是在生产、生活实践中产生和发展起来的. 随着社会的发展，为了解决现实中的某些实际问题，也为了解决数学自身的矛盾，数的概念在不断发展，人们所认识的数的范围也在按照某种“规则”逐步扩充.

早在人类社会初期，人们在狩猎、采集果实等劳动以及分配食物的过程中，由数数产生了 1，2，3，4，…等数的概念以及表示“没有”的数 0，这就产生了自然数. 在自然数集中，加法和乘法总可以实施，并且满足交换律、结合律及分配律，但是减法和除法并不是总能实施的，例如，较小的数不能减较大的数.

为了刻画某些具有相反意义的量以及解决数学中“较小的数不能减较大的数”的矛盾，人们引进了负数.

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的实际问题以及数的运算中遇到的“不能整除”的问题，人们引进了分数. 在我国经典数学著作《九章算术》中就已有约分、通分及分数的四则运算等知识. 分数引入之后，使得度量等实际问题以及两个自然数相除(除数不为 0)的问题得到了解决，并且产生了小数.

大约在公元前 5 世纪，古希腊数学家发现，正方形的边长与其对角线的比不是有理数，这个发现在当时引起了极大的震惊. 后来，又发现数轴上还有许多点不对应任何有理数，于是引入一种新的数——无理数，这样就把有理数集扩充为实数集.

数系每扩充一次，数的集合扩大了，原来的数集成为新数集的真子集，原来数集中数的运算在扩大的数集中都能进行，相应的运算律(如交换律、结合律、分配律等)也都成立.

我们知道，如果 $b^2-4ac<0$，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，这说明：在代数方程的讨论中，实数

集依然不够完善，在实数范围内，负数不能开平方.

1545 年，意大利数学家卡尔丹在研究一元三次方程的解法时首次提出了负数开平方的思想，瑞士数学家欧拉引进了新数 i，用它表示 -1 的一个平方根，并规定：

（1）$i^2=-1$；

（2）实数可以与 i 进行四则运算，进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立.

在这种规定下，实数 b 与 i 相乘得到的 bi 是新数集中的一个数，再与实数 a 相加后得到的 $a+bi$ 仍是新数集中的数.

形如 $a+bi(a, b\in\mathbf{R})$ 的数叫作**复数**（complex number），i 叫作**虚数单位**（imaginary unit）. 全体复数组成的集合叫作**复数集**（set of complex numbers），记作 $\mathbf{C}$，显然 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$，这一形式称为复数 z 的**代数表示**. 本章中说 $z=a+bi$ 时，都有 $a, b\in\mathbf{R}$，其中 a 与 b 分别叫作 z 的**实部**（real part）与**虚部**（imaginary part），通常记作 $\operatorname{Re}z$ 与 $\operatorname{Im}z$.

对复数 $z=a+bi$，当且仅当 $b=0$ 时，它是一个实数；当 $b\neq0$时，叫作**虚数**（imaginary number）；当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，叫作**纯虚数**（pure imaginary number）.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们就称这两个复数**相等**. 即

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

特别地，$a+bi=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$.

给定两个复数，可以判断它们是否相等，但一般不能比较大小.

例 1 说出下列复数的实部与虚部，并指出它们是实数还是虚数. 如果是虚数，请指出是否为纯虚数.

（1）$2+i$；　　（2）$-i$；　　（3）$1+\sqrt{2}$.

解 （1）$2+i$ 的实部为 2，虚部为 1，它是虚数，但不是纯虚数；

（2）$-i$ 的实部为 0，虚部为 -1，它是虚数，而且是纯虚数；

（3）$1+\sqrt{2}$ 的实部为 $1+\sqrt{2}$，虚部为 0，它是实数.

例2 若复数 $z=m^2-1+(m+1)i$，则实数 m 取什么值时，

(1) z 是实数？　(2) z 是虚数？　(3) z 是纯虚数？

解 因为 m 是实数，

(1) 当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，复数 z 是实数；

(2) 当 $m+1\neq0$，即 $m\neq-1$ 时，复数 z 是虚数；

(3) 当 $m^2-1=0$，且 $m+1\neq0$，即 $m=1$ 时，复数 z 是纯虚数.

例3 设 a，$b\in\mathbf{R}$，复数 $(3a-b)+(a+2)i=a-bi$，求 a，b.

解 根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}3a-b=a,\\ a+2=-b,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ b=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

练习

1. 下列各数中，哪些是实数？哪些是虚数？哪些是纯虚数？

   $\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{2}i$，0，i^2，$2+\sqrt{3}i$，$\sqrt{5}i$，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. 说出下列复数的实部与虚部.

   $-4-5i$，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$，$-\sqrt{3}i$，$\sqrt{2}$，$-i$，0.

3. 已知 x，$y\in\mathbf{R}$，求适合以下方程的实数 x 和 y.

   (1) $(3x-2y)+(5x+2y)i=9-i$；

   (2) $xy-(x+y)i=-24+5i$；

   (3) $(x^2+y^2)-xyi=10-3i$.

2.1.2 复数的几何意义

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的，任意一个实数 x 都可以用数轴上的一个点来表示. 那么，复数能否用点来表示呢？

根据复数的定义可知，任意一个复数 $z=a+bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定，而有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点是一一对应的．因此，我们可以在复数集与建立了直角坐标系的平面中的点集之间确定一一对应关系，对应规则是

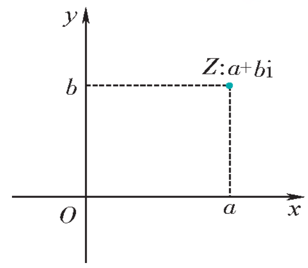


图 2-1

$$\text{复数 } z=a+bi \leftrightarrow \text{点 } Z(a, b).$$

如图 2-1，x 轴上的点 $(a, 0)$ 与实数 a 对应；当 $b\neq 0$ 时，点 $(0, b)$ 与纯虚数 bi 对应；复数 $z=a+bi$ 与点 $Z(a, b)$ 对应，这是复数的一个几何意义．

这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫作**复平面**(complex plane)，x 轴叫作**实轴**(real axis)，y 轴叫作**虚轴**(imaginary axis)．实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数．

例 1　已知 $z_1=3+2i$，$z_2=3-2i$，$z_3=-3+2i$，$z_4=-3-2i$，在复平面上描出表示它们的点．

解　如图 2-2 所示，复数 z_1，z_2，z_3，z_4 分别与点 $Z_1(3, 2)$，$Z_2(3, -2)$，$Z_3(-3, 2)$，$Z_4(-3, -2)$ 对应．

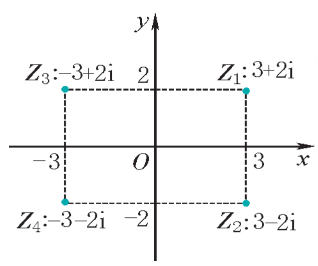


图 2-2

观察图 2-2 中的点 Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 之间的关系，可以总结出以下规律：

(1) 表示 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的点关于实轴对称；

(2) 表示 $a+bi$ 和 $-a+bi$ 的点关于虚轴对称；

(3) 表示 $a+bi$ 和 $-a-bi$ 的点关于原点对称．

如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，这两个复数叫作互为共轭复数，简称**共轭复数**（conjugate complex number)．虚部不等于 0 的两个共轭复数又叫互为**共轭虚数**(conjugate imaginary number)．

复数 $z=a+bi$ 的共轭复数记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=a-bi$．

若 $z=a$ $(a\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a$，即实数的共轭复数是它本身．

我们知道，复数集合与复平面上点的集合一一对应．复数 $z=a+bi$ 与点 $Z(a, b)$ 对应，点 $Z(a, b)$ 又与平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应，因此，复数 $z=a+bi$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应(如图 2-3)．并且规定：相等的向量表示同一个复数．向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模称为复数 $z=a+bi$ 的**模**(modulus)，记为 $|z|$，显然 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，它表示点 Z 到原点的距离．

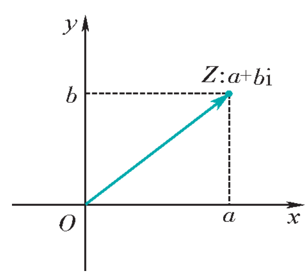


图 2-3

$|z_2|>|z_1|$ 说明：在复平面上，点 Z_2：$3-4i$ 到原点 O 的距离比点 Z_1：$2+3i$ 到原点 O 的距离远.

例 2 求复数 $z_1=2+3i$ 和 $z_2=3-4i$ 的模，并比较它们的大小.

解 $|z_1|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

$|z_2|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$.

因为 $5>\sqrt{13}$，所以 $|z_2|>|z_1|$.

练习

1. 写出下列复数的共轭复数，并在复平面上把每一对共轭复数对应的点和向量表示出来.
   $z_1=1+i$，$z_2=2-3i$，$z_3=4$，$z_4=-2i$.
2. 已知复数 $(3x-2y)+(5x+2y)i$（x，$y\in\mathbf{R}$）是 $9+i$ 的共轭复数，求 x，y 的值.
3. 求下列复数的模，并比较模的大小：
   $z_1=4-i$，$z_2=7+2i$，$z_3=3+2i$，$z_4=3-i$.
4. 证明：互为共轭复数的两个复数的模相等.

习题 2.1

1. 设复数 $z=(m^2-5m-6)+(m^2-3m-4)i$ （$m\in\mathbf{R}$）.
   (1) 若 z 是实数，求 m 的值；
   (2) 若 z 是虚数，求 m 的值；
   (3) 若 z 是纯虚数，求 m 的值；
   (4) 若 $z=0$，求 m 的值.
2. $\mathbf{C}$ 表示复数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{N}$ 表示自然数集，用集合的包含符号把它们连接起来.
3. 已知 x，$y\in\mathbf{R}$，$(x^2+y^2)+xyi$ 是复数 $10+3i$ 的共轭复数，求 x，y.
4. 已知复数 $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求这些复数的模，并在复平面内画出这些复数对应的点和向量.
5. 实数 m 取何值时，复数 $(m^2-3m-10)+(m^2-7m+10)i$ 对应的点分别在：
   (1) 第三象限；　(2) 第四象限；
   (3) x 轴上；　(4) y 轴上.

2.2 复数的运算

2.2.1 复数的加法和减法

已知复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，我们把 $a+bi$ 和 $c+di$ 看成关于 i 的多项式，依照多项式加法的运算法则，合并同类项后得到

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

我们将此作为复数加法、减法的定义，就是说：两个复数相加(减)就是把它们的实部与实部、虚部与虚部分别相加(减)，即

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

容易验证：复数的加法运算满足交换律和结合律，即对任意 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

例1 计算$(3+2i)+(-2-i)-(1+i)$.

解 $(3+2i)+(-2-i)-(1+i)$

$=[3+(-2)-1]+[2+(-1)-1]i$

$=0+0i$

$=0.$

例2 设复数 $z=a+bi$，求 $z+\bar{z}$和 $z-\bar{z}$.

解 $z+\bar{z}$

$=(a+bi)+(a-bi)$

$=(a+a)+(b-b)i$

$=2a,$

$z-\bar{z}$

$=(a+bi)-(a-bi)$

$=(a-a)+[b-(-b)]i$

$=2bi.$

你能发现 $z+\bar{z}$，$z-\bar{z}$与复数 z 的实部、虚部之间有什么关系吗？

第2章 复数

因为复数 $z=a+bi$ 与平面向量$\overrightarrow{OZ}$对应，所以复数的加法、减法运算也可以按向量的加法、减法运算法则来进行.

已知复数

$$z_1=a+bi,\ z_2=c+di,$$

它们分别对应平面向量

$$\overrightarrow{OZ_1}=(a,\ b),\ \overrightarrow{OZ_2}=(c,\ d).$$

因为

$$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=\overrightarrow{OZ},$$

$$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)=\overrightarrow{Z_2Z_1},$$

又

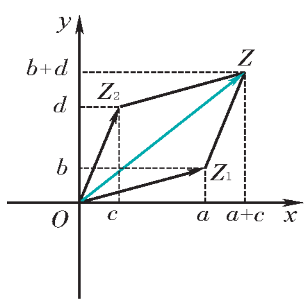
$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i,$$

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i,$$

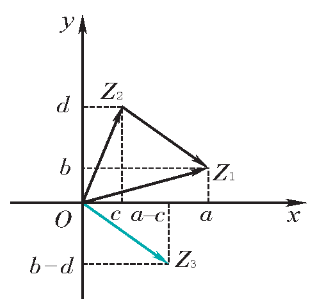
这说明：

两个向量$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$之和就是复数$(a+c)+(b+d)i$对应的向量，因此，复数的加法可以按照向量的加法进行(如图2-4(1))，这是复数加法的几何意义.

两个向量$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$之差$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$(等于$\overrightarrow{Z_2Z_1}$)就是$(a-c)+(b-d)i$对应的向量，因此，作$\overrightarrow{OZ_3}=\overrightarrow{Z_2Z_1}$，则点 Z_3 对应复数 z_1-z_2(如图 2-4(2))，这是复数减法的几何意义.



(1)



(2)

图 2-4

练习

计算：

(1) $(-3-5i)+(-3+5i)$;

(2) $(-5+2i)-(-5-2i)$;

(3) $(2+7i)+(3-i)$;

(4) $(-2+i)+(3+2i)+(5-i)$.

2.2.2 复数的乘法和除法

将复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 看成关于 i 的多项式，按多项式的乘法规则，有

$$(a+bi)(c+di)$$
$$=ac+bci+adi+(bi)(di)$$
$$=ac+(bc+ad)i+bdi^2.$$

由于 $i^2=-1$，代入上式得

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

我们将此作为复数乘法的定义，也就是说，两个复数的乘积仍然是一个复数，运算规则与多项式的乘法类似，但是在运算过程中需要用 $i^2=-1$ 进行化简，然后把实部和虚部分别合并.

容易验证：复数的乘法满足交换律、结合律和分配律，即对任意 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，有

$$z_1z_2=z_2z_1,$$
$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

复数的乘方是相同复数的乘积，n（n 为正整数）个相同的复数 z 的乘积可以简记为 z^n.

例1 计算 $(3+2i)(-2-i)(1+i)$.

解 $(3+2i)(-2-i)(1+i)$

$=(-4-7i)(1+i)$

$=3-11i.$

例2 设复数 $z=a+bi$，求 $z\bar{z}$.

解 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=[a^2-b(-b)]+[a(-b)+ba]i$

$=a^2+b^2.$

由例 2 可知：
$z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

例3 设 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求 z^2，z^3 和 z^2+z+1.

解 $z^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

实数的乘法公式对于复数也适用，因此，求 z^2，z^3，…也可以按实数的乘法公式计算.

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{i}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z^3=z^2z=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,$$

$$z^2+z+1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+1=0.$$

规定复数的除法是复数的乘法运算的逆运算.

已知 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}\neq0$，假定 z_1 除以 z_2 的商为 $z=x+y\mathrm{i}$，则 $z_1=z_2z$. 从而

$$a+b\mathrm{i}=(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(cx-dy)+(dx+cy)\mathrm{i},$$

于是有

$$\begin{cases}cx-dy=a,\\dx+cy=b.\end{cases}$$

注意到 $z_2=c+d\mathrm{i}\neq0$，所以 $c^2+d^2\neq0$，解这个方程组得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

所以

$$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.\quad(c+d\mathrm{i}\neq0)$$

复数 z_1 除以 z_2 的商记为 $\frac{z_1}{z_2}$.

求商 $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 还可以用以下方法进行：

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

这里，分子、分母都乘以分母的共轭复数，从而使分母“实数化”.

例4 计算 $(4+2\mathrm{i})\div(1-3\mathrm{i})$.

解

$$\frac{4+2\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\frac{(4+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}$$

$$=\frac{(4-6)+(2+12)\mathrm{i}}{1+3^2}$$

$$=\frac{-2+14\mathrm{i}}{10}$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

例5 在复数范围内解方程：$x^2=\mathrm{i}$.

解 设 $x=a+b\mathrm{i}$ 是方程 $x^2=\mathrm{i}$ 的复数根，其中 a，b 是待定实数，则 $(a+b\mathrm{i})^2=\mathrm{i}$，即

$$a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=\mathrm{i},$$

所以 $\begin{cases}a^2-b^2=0,\\ 2ab=1.\end{cases}$

解得

$$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是，方程 $x^2=\mathrm{i}$ 有两个复数根 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 和 $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，它们是 i 的两个平方根.

> 每一个复数都有自己的平方根，可用例 5 一样的方法求解.

练习

1. 计算：i^2，i^3，i^4，$\frac{1}{\mathrm{i}}$，$\frac{1}{\mathrm{i}^2}$，$\frac{1}{\mathrm{i}^3}$.
2. 计算：

(1) $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$；

(2) $(2+\mathrm{i})\div(3-2\mathrm{i})$；

(3) $(3+2\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})$；

(4) $[(1+3\mathrm{i})(4-\mathrm{i})](-6+3\mathrm{i})$；

(5) $(1+3\mathrm{i})+(4-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$.

习题 2.2

1. 证明：复数的加法运算满足交换律和结合律.
2. 证明：复数的乘法运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律.
3. 计算：

(1) $(3+4\mathrm{i})-3\mathrm{i}-(4-\mathrm{i})+(-5-2\mathrm{i})$；

(2) $(3-\mathrm{i})+(-3+\mathrm{i})$；

(3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2$；

(5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\div\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；

(6) $\frac{1}{3-4\mathrm{i}}$；

(7) $(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})(1-\sqrt{2}\mathrm{i})$；

(8) $(1-2\mathrm{i})^4$.

4. 设 $z=\cos\frac{2\pi}{3}-\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}$，求 z^2，z^3 及 z^2+z+1.
5. 设 $z\in\mathbf{C}$，且 $|z|=1$，证明：$\bar{z}=\frac{1}{z}$.

阅读与讨论

代数基本定理

数系扩充到了复数，在复数集内，数的加、减、乘、除(除数不为0)(当然也包括乘方、开方)等运算都能顺利进行．我们自然想到，在复数集内解多项式方程是否也“畅行无阻”呢？

在代数发展史上，很长一段时期内解多项式方程是研究的一个中心问题．数学家们希望用方程的系数经过加、减、乘、除、乘方、开方等运算把方程的根表示出来．例如，在实数集合中，一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$ 有一个根 $x=-\frac{b}{a}$；对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $b^2-4ac>0$ 时有两个不同的实数根，当 $b^2-4ac=0$ 时有两个相同的实数根，当 $b^2-4ac<0$ 时没有实数根．

如果在复数集合内考虑，当 $b^2-4ac<0$ 时，由于

$$(\sqrt{4ac-b^2}\ \mathrm{i})^2=(\sqrt{4ac-b^2})^2\mathrm{i}^2=b^2-4ac,$$

故有

$$\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{i}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{i}\right)\right]$$
$$=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a},$$

即此时实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在复数集合中有两个复数根

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{i},\ x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{i}.$$

代数基本定理指出：

在复数范围内，一元 n 次方程($n\in\mathbf{N}^*$)至少有一个根．

由此可以推出：任何复系数一元 n 次方程一定有 n 个复数根，而且只有 n 个复数根．

于是，n 次多项式可以分解为 n 个一次多项式的乘积，即

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

其中 x_1，x_2，…，$x_n \in \mathbf{C}$，并且根与系数之间有如下关系：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_1x_2x_n+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

代数基本定理是数学中最重要的定理之一，它在代数学中起着基石的作用. 1799 年，高斯给出了他对代数基本定理的第一个证明，这个证明依赖于对复数的承认. 虽然这个证明不是完全严格的，但对巩固复数的地位做出了贡献. 后来，高斯还给出了这个定理的另外三个证明. 代数基本定理的严格证明，是经过此后几代数学家的努力才得到的.

在复数集合中，一元三次方程、一元四次方程都可以通过求根公式求出它们的根. 尽管如此，五次和五次以上的多项式方程的根却不能用方程的系数经过加、减、乘、除、乘方、开方等运算表示出来，除非特殊情况.

讨论题

方程 $x^3-1=0$ 在实数范围内有几个根？在复数范围内有几个根？求出方程 $x^3-1=0$ 在复数范围内的所有根.

2.3 *复数的三角表示

前面我们已经学习过复数的代数表示及其几何意义，复数 $z=a+bi(a，b\in\mathbf{R})$既可以用复平面上的点 $Z(a，b)$ 表示，也可以用复平面上的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示.

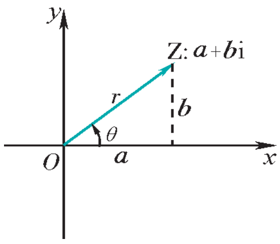


图 2-5

设复数 z 的模为 r，即 $|z|=|\overrightarrow{OZ}|=r$，$\theta$ 是以 x 轴的非负半轴为始边、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（起点为 O）为终边的角，如图 2-5，那么，a，b 和 r，θ 有什么关系呢？

由任意角的三角函数的定义可得：$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$. 于是可知，点 Z 还可由 r，θ 唯一确定，且

$$z=a+bi=r\cos\theta+(r\sin\theta)i=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

即复数 z 可由 r，θ 表示如下：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r\geqslant 0).$$

这个表达式叫作复数 z 的**三角表示**. 其中，当 $r\neq 0$ 时，θ 叫作复数 z 的**辐角**. 复数 0 的辐角是任意的.

非零复数的代数表示 $z=a+bi$ 和三角表示 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0)$ 之间满足以下关系：

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

显然，非零复数 $z=a+bi$ 的辐角有无限多个值，这些值相差 2π 的整数倍. 例如，复数 i 的辐角是 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 可以取任何整数.

我们把适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值，叫作 z 的**辐角主值**，通常记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$. 这样，每一个非零复数就有唯一的模与辐角主值，并且可由它的模与辐角主值唯一确定. 因此，两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角主值分别相等.

很明显，当 a 为正数时，

$$\arg a=0,\ \arg(-a)=\pi,$$

$$\arg(ai)=\frac{\pi}{2},\ \arg(-ai)=\frac{3\pi}{2}.$$

如果 $z=0$，那么与它对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 缩成一个点（零向量），这样的向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的.

例 1 把下列复数化为三角表示：

(1) $1-i$；　　(2) $-2i$.

解 (1) 因为 $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，与复数 $1-i$ 对应的点在第四象限，所以

$\arg(1-\mathrm{i})=\frac{7\pi}{4}$，于是

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

（2）因为 $r=2$，$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$，与复数 $-2\mathrm{i}$ 对应的点在 y 轴负半轴上，所以 $\arg(-2\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}$，于是

$$-2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

练习

1. 把下列复数化成三角表示，并且画出与它们对应的向量.

4，-3，$2\mathrm{i}$，$-\mathrm{i}$，$-2+2\mathrm{i}$，$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$3-4\mathrm{i}$，$-4+3\mathrm{i}$.

2. 下列复数是不是复数的三角表示？如果不是，把它们化成三角表示.

（1）$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；（2）$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{4}\right)$；

（3）$r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$；（4）$-r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

3. 把下列复数的三角表示化成代数表示.

（1）$4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$；（2）$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$；

（3）$6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；（4）$3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

如果把两个复数 z_1，z_2 分别写成三角表示

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

我们来计算它们的乘积，就有

$$\begin{aligned}&z_1z_2\\&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

这就是说，两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和.

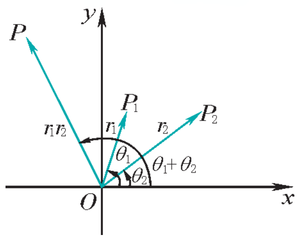


图 2-6

据此可知，如果要考虑上述两个复数 z_1，z_2 的乘积 z_1z_2 对应的向量，可以先画出分别与 z_1，z_2 相对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，把向量$\overrightarrow{OP_1}$按逆时针方向旋转一个角 θ_2（如果$\theta_2<0$，就要把$\overrightarrow{OP_1}$按顺时针方向旋转一个角$|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍，所得的向量$\overrightarrow{OP}$就表示积 z_1z_2. 这是复数乘法的几何意义，图 2-6 就是 $r_2>1$ 时的示意图.

例2 计算：$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

解 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

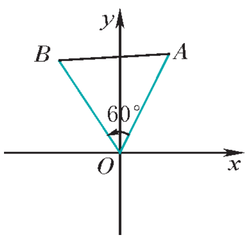


图 2-7

例3 如图 2-7，$\triangle OAB$ 为正三角形（O 为坐标原点），O，A，B 按逆时针顺序排列，点 A 的坐标为（1，2），试求点 B 的坐标.

解 设复数 $z_0=\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°$，在复平面内，向量$\overrightarrow{OA}$对应的复数为 $z_A=1+2\mathrm{i}$，因为$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，$\angle AOB=60°$，且 O，A，B 按逆时针顺序排列，所以，由复数乘法的几何意义可知，向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数

$$z_B=z_A\cdot z_0$$

$$=(1+2\mathrm{i})\cdot(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$$

$$=(1+2\mathrm{i})\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i},$$

所以点 B 的坐标为$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}，1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为复数的除法运算是复数的乘法运算的逆运算，于是可得：

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，$r_1\geqslant0$，

$r_2>0$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

这就是说，两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

你能归纳出复数除法的几何意义吗？

例4 计算：$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

解 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$.

练习

计算：

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $\sqrt{2}(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$；

(3) $3(\cos 18°+\mathrm{i}\sin 18°)\cdot 2(\cos 54°+\mathrm{i}\sin 54°)\cdot 5(\cos 108°+\mathrm{i}\sin 108°)$；

(4) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div\left[6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]$；

(5) $2\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(6) $(-\mathrm{i})\div[2(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)]$.

习题 2.3

1. 把下列复数化成三角表示，并且画出相应的向量：

6，$1+\mathrm{i}$，$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$5+12\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

2. 把下列复数化成代数表示：

(1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $9(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.

3. 计算：

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $(\cos 75^\circ-i\sin 75^\circ)\cdot(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)$；

(3) $[3(\cos 22.5^\circ+i\sin 22.5^\circ)]^2$；

(4) $10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

复习题

A 组

1. 设 $z=(a^2-a-6)+(a-3)i$ 是纯虚数，求实数 a.

2. 求适合方程 $(2x^2-5x+2)+(y^2+y-2)i=0$ 的实数对 (x, y).

3. 在复平面内描出表示下列复数的点：

$-1-i$，$3i$，$\sqrt{2}+i$，$\sqrt{2}-i$，$-\sqrt{2}+i$，$-\sqrt{2}-i$.

4. 指出下列复数的共轭复数，并在复平面内把它们表示出来：

$3+5i$，$7-4i$，$-3-2i$，$-3i$，6，$-4+i$.

5. 画出与下列复数及其共轭复数对应的向量，并求它们的模：

(1) $3+5i$；　　(2) $7-4i$；　　(3) $-3-2i$.

6. 设 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，求证：

(1) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；　　(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$.

7. 计算：

(1) $(-3-2i)-(-5+3i)+(-1-i)-3i$；

(2) $(2+i)+(2-i)+(-2+i)+(-2-i)$；

(3) $(1-i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$；

(4) $(4-3i)(-3i)(5-4i)$；

(5) $\frac{2+i}{4-3i}\cdot\frac{2-i}{4+3i}$；

(6) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$.

8*. 化简：

(1) $\frac{(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)}$；

(2) $\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}$.

B 组

1. 设 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求 $|z|$，z，z^2+z+1 及 z^3.

2. 设 $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}$，证明：$z_1$，$z_2$ 是方程 $x^2+3x+5=0$ 的根.

3. 设 $z\in\mathbf{C}$，$z+\overline{z}=2$，$z\overline{z}=3$，求复数 z.

4. 设 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，且 $z_1 z_2=0$，证明：z_1，z_2 中至少有一个是 0.

5. 设 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，求证：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

6. 已知 $z_1=4+3\mathrm{i}$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$，求 z.

7*. 求证：$\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

思考与实践

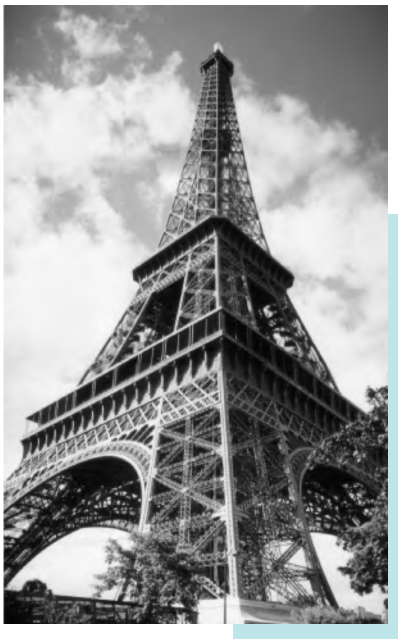
1. 我们知道，关于两个复数相乘，有结论：

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

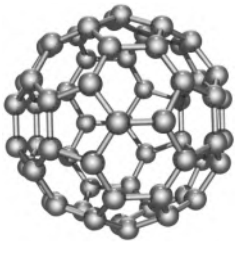
若是 3 个、4 个甚至 n 个复数相乘呢？若是 n 个相等的复数相乘呢？通过计算你发现有什么规律吗？把你发现的规律表述出来，并给出证明.

2. 证明：若 z_1，z_2 是非零复数，则 $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

第3章 立体几何初步



埃菲尔铁塔



C_{60}模型

在小学和初中阶段，我们已经从现实生活中感受到许许多多的立体图形，对这些立体图形，我们采取不同的方法，得到它们的视图、截面图和展开图等，这些都是平面图形，我们主要研究它们的形状、大小和位置关系. 像这样的初步研究，对我们深入认识人类赖以生存的现实空间是远远不够的. 比如：

在学校操场上竖立一根旗杆，怎样才能保证它与地面垂直?

建造一座大型建筑，该如何根据实际需要对空间构型进行合理设计?

在微观世界中，有时需要考虑微观物质的立体结构（比如 C_{60} 的分子结构模型）是怎样的.

本章中，我们要把平面内直线平行、垂直的概念及其性质推广到空间，研究空间的点、线、面之间的关系，学会计算一些特殊几何体的表面积和体积. 我们还将发现，曾经获得的关于平面图形的某些性质在空间中仍然成立，而另一些性质在空间中是不成立的. 研究范围扩大了，就需要我们对原有的认识不断质疑和重新研究. 另外，我们还要学习在平面上画出空间图形的方法.

立体几何还为我们提供了一些直观、形象的数学模型，在进一步学习数学的过程中，可以利用这些直观模型来帮助我们理解抽象的数学概念.

3.1 空间几何体

3.1.1 多面体与旋转体

我们已经认识了一些立体图形．如长方体、正方体、圆柱、圆锥和球．在我们生活的现实空间中，存在着大量的立体图形，例如金字塔、帐篷、晶体、蒙古包、足球以及魔方等(如图 3-1).

(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

图 3-1

我们可以发现，正方体、长方体等都是由一些平面多边形围成的几何体．像这种由几个平面多边形所围成的几何体，叫作**多面体**(polyhedron).

本书所说的平面多边形，一般包括其内部的平面部分.

围成多面体的各个平面多边形叫作**多面体的面**，相邻两个面的公共边叫作**多面体的棱**，棱与棱的公共端点叫作**多面体的顶点**，连接不在多面体的同一面上两个顶点的线段叫作**多面体的对角线**.

多面体按照它所具有的面的个数分别叫四面体、五面体、六面体等.

在多面体中，如三棱镜、方砖、建筑中的立柱等(如图 3-2)都给我们以柱体的形象.

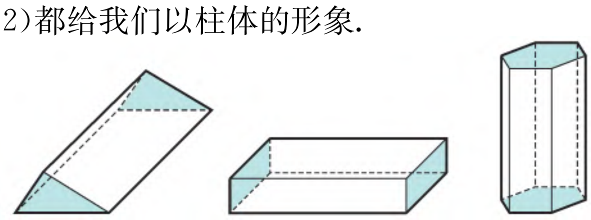


图 3-2

如果一个多面体有两个面互相平行，而其余每相邻两个面的公共边互相平行，这样的多面体叫作**棱柱**(prism). 两个互相平行的面叫作**棱柱的底面**，简称**底**；其余各面叫作**棱柱的侧面**；两侧面的公共边叫作**棱柱的侧棱**；两个底面之间的距离叫作**棱柱的高**.

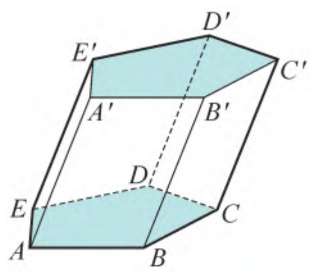


图 3-3

棱柱用底面各顶点的字母表示，如图 3-3 中的棱柱，记作棱柱 $ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$，或用表示一条对角线的端点的字母表示，例如棱柱 AC'.

我们可以根据底面多边形的边数把棱柱分类. 底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫作三棱柱、四棱柱、五棱柱……

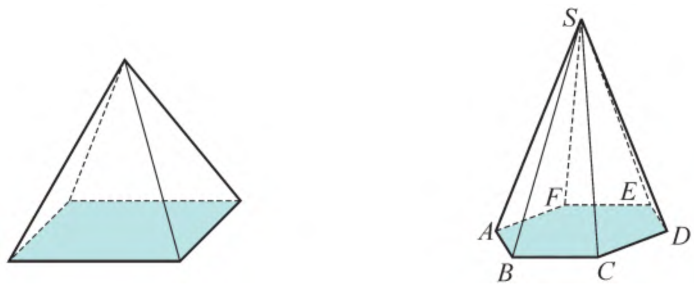
根据棱柱的定义，容易证明棱柱具有下列性质：

(1) 棱柱的各个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；

(2) 棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形；

(3) 过棱柱不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.

图 3-4 给我们以锥体的形象.



(1)　　(2)

图 3-4

如果一个多面体的一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，那么这个多面体叫作**棱锥**(pyramid). 这个公共顶点叫作**棱锥的顶点**；这个多边形叫作**棱锥的底面**(简称底)；其余各面叫作**棱锥的侧面**；两侧面的公共边叫作**棱锥的侧棱**；顶点到底面的距离叫作**棱锥的高**.

棱锥用顶点和底面各顶点表示，或者用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示. 如图 3-4(2)的棱锥记作棱锥 $S\text{-}ABCDEF$，或者棱锥 $S\text{-}AC$.

我们可以根据底面多边形的边数把棱锥分类. 底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫作三棱锥、四棱锥、五棱锥……

用平行于棱锥的底面的平面截棱锥，夹在截面与底面之间的部分叫作**棱台**；截面叫作**棱台的上底面**；原棱锥的底面叫作**棱台的下底面**；其余各面叫作**棱台的侧面**；相邻侧面的公共边叫作侧

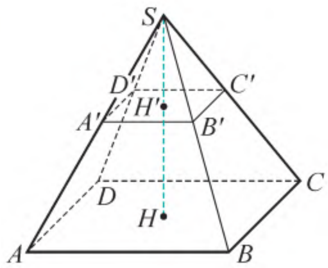


图 3-5

棱；棱台的两个底面之间的距离叫作**棱台的高**（如图 3-5）.

棱台用表示上、下底面各顶点的字母表示. 如图 3-5 中的棱台，记作棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，亦可记作棱台 AC'.

根据底面多边形的边数把棱台分类. 底面是三角形、四边形、五边形……的棱台分别叫作三棱台、四棱台、五棱台……

我们以前了解过的圆柱、圆锥和球不是多面体，它们都可以看作是由一个平面图形绕某一直线旋转而成的.

将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周，形成的几何体分别叫作**圆柱**(cylinder)、**圆锥**(cone)、**圆台**(circular truncated cone)，这条直线叫作**轴**；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫作**底面**；不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫作**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫作**母线**.

在图 3-6 中的圆柱、圆锥、圆台可分别记作圆柱OO'、圆锥 SO、圆台 OO'.

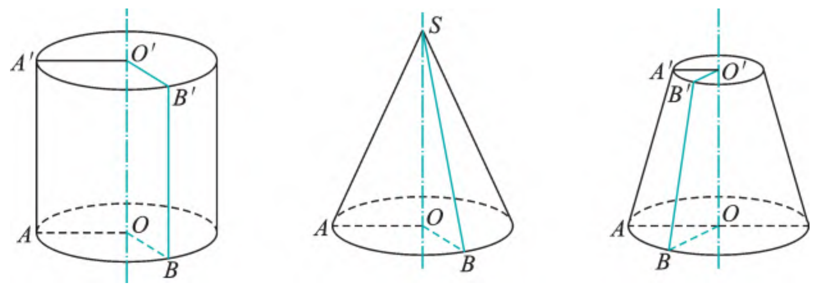


图 3-6

半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面叫作**球面**(sphere)，球面所围成的几何体叫作**球体**(spheroid)，简称球. 半圆的圆心叫作**球心**，连接球面上任何一点和球心的线段叫作球的**半径**. 球一般用表示球心的字母表示，如图 3-7 中的球可记作球 O.

我们还可以把空间中的球面与平面内的圆类比，据此你能给出球面的另一种定义吗？

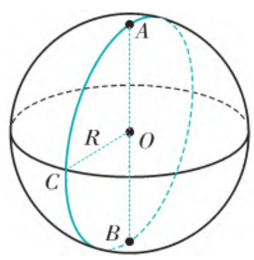
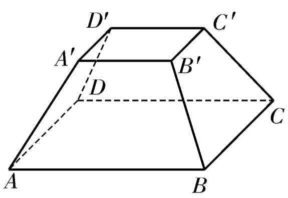


图 3-7

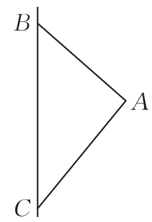
一般地，一条平面曲线绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫作旋转面，封闭的旋转面围成的几何体称为**旋转体**(solid of rotation). 圆柱、圆锥、圆台和球都是特殊的旋转体.

练习

1. 一个多面体至少有几个面?
2. 数一数正方体有多少个面，多少条棱，多少条对角线，多少个顶点.
3. 用硬纸板制作三棱柱、四棱锥、四棱台各一个.
4. 在如图所示的棱台 AC' 中，指出它的底面、侧面、侧棱及对角线.
5. 用平行于底面的平面截棱柱和棱锥，所得截面与底面有何关系?



（第 4 题图）



（第 6 题图）

6. 如图，将$\triangle ABC$ 绕 BC 边所在的直线旋转一周形成的图形可以由哪些几何体构成?

3.1.2 空间几何体的直观图

为了研究立体图形，我们需要把它画出来.

把立体图形画在纸上或黑板上，实际上是把本来不完全在同一平面内的点的集合用同一平面内的点来表示. 这时画在纸上或黑板上的图形已不是普通的平面图形，而是立体图形的直观图. 图 3-8 是正方体的一种直观图.

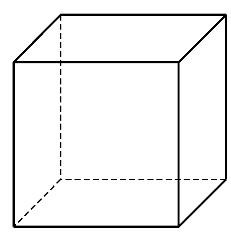


图 3-8

立体图形的直观图不可能全面表示这个立体图形的真实形状，但它近似地反映了人们直接观察这个立体图形的结果，具有立体感，给我们以真实形状的感觉. 这里我们先介绍几何图形的直观图的画法.

看直观图和画直观图是发展空间想象力的重要途径.

例1 画水平放置的正六边形的直观图.

画法 (1) 在已知正六边形 $ABCDEF$(图 3-9(1))中，以对角线 AD 所在直线为 x 轴，以对称轴 GH 所在直线为 y 轴. 如图 3-9(2)，画对应的 x'轴，y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

(2) 在 x'轴上取 $A'D'$，使 O' 为其中点，且 $A'D'=AD$; 在 y'轴上取 $O'H'=O'G'$，使 $G'H'=\frac{1}{2}GH$. 过点 H'画线段 $F'E'\parallel x'$轴，使 $F'E'=FE$，且点 H'是 $F'E'$的中点; 过点 G'画线段$B'C'\parallel x'$轴，使 $B'C'=BC$，且点 G'是 $B'C'$的中点.

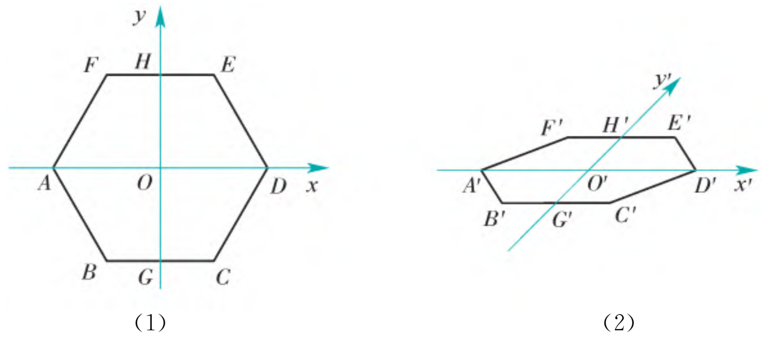


图 3-9

(3)连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

上面介绍的画直观图的方法叫作**斜二测画法**，这种画法的规则是：

(1) 在已知平面图形中建立直角坐标系 xOy. 画直观图时，把它们画成对应的 x'轴和 y'轴，两轴交于点 O'，使两轴的夹角为 45°或 135°，它们代表水平面上的直角坐标系.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度变为原来的一半.

用斜二测画法画水平放置的平面多边形的直观图，关键是确定顶点的位置.

例2 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法 (1) 作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$(如图 3-10(1))，使$\angle BAD=45°$，$AB=2$ cm，$AD=1$ cm.

(2) 过点 A 作 z'轴使$\angle BAz'=90°$，分别过点 A，B，C，D，沿 z'轴的正方向取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

(3) 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，得到的图形就是所求正方体的直观图(如图 3-10(2)).

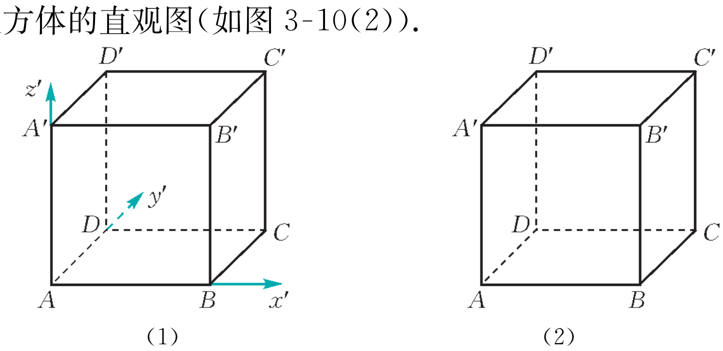


图 3-10

几何体的直观图的画法规则，与放置在水平位置的平面图形的画法相比，只是多画一个与 x'轴、y'轴都垂直的 z'轴，并且平行于 z'轴的线段的平行性和长度都不变．在直观图上，平面 $x'O'y'$表示水平平面，平面 $y'O'z'$和 $z'O'x'$表示竖直平面．

画直观图时，还要注意被遮住的线段通常用虚线表示(或擦去)．

圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆面．生活经验告诉我们，水平放置的圆看起来非常像椭圆．在画水平放置的圆的直观图时，应该画成椭圆，可以用椭圆模板(如图 3-11)来画．

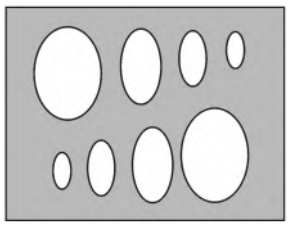


图 3-11

练习

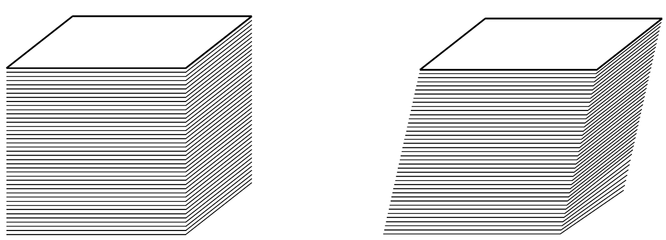
1. 画一个边长为 3 cm 的正三角形的直观图．
2. 画出底面边长为 2 cm、高为 3 cm 的正四棱锥的直观图．

3.1.3 空间几何体的表面积和体积

在棱柱、棱锥、棱台中，所有侧面的面积之和叫作它们的**侧面积**(lateral area)；侧面积与所有底面面积的和叫作它们的**表面积**(surface area)．

几何体占有空间部分的大小叫作它的**体积**(volume)．

我们可以把一叠 8 开的纸摆放成直棱柱，也可以把它摆放成斜棱柱，如图 3-12．它们的体积显然不变．这时，它们的底面积和高也没变．



(1)　　　　(2)

图 3-12

一般地，当两个柱体的底面积和高都相等时(不论它们是斜柱体还是直柱体)，它们都有相等的体积．如果一个柱体的底面积是 S，高是 h，那么这个柱体的体积公式是

$$V_{柱体}=Sh.$$

请你做一做下面的实验：

挑选具有全等的底(事实上，只要底面积相等)与相同的高的一个柱形容器和一个锥形容器．用沙子或水填满锥形容器，然后把这些沙子或水倒入柱形容器，估计一下大约占柱形容器体积的几分之几．然后重复这个操作，直到柱形容器被填满．验证一下你的估计是否正确．

通过这个操作，我们可以验证锥体的体积公式

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh(其中\ S\ 是底面积，h\ 是高).$$

有兴趣的同学可尝试一下，看你能不能用这里所说的计算台体体积的方法证明这个公式.

由于台体是锥体被平行于底面的平面截得的，可以据此计算台体的体积.

设台体的上底面积为 S'，下底面积为 S，高为 h，则

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

例1 有一堆规格相同的铁质六角螺帽(如图 3-13)共重 5.8 kg，已知其底面是正六边形，边长为 12 mm，内孔直径和高均为 10 mm，问：这堆六角螺帽大约有多少个？(铁的密度是7.8 g/cm^3，π 取 3.14.)

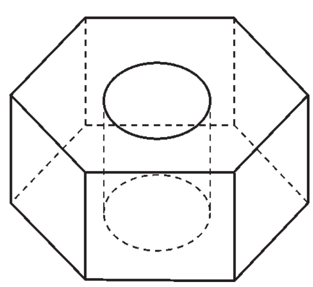


图 3-13

解 六角螺帽体积是六棱柱体积与圆柱体积的差，即

$$\begin{aligned}V&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10-3.14\times5^2\times10\\&\approx2\ 956(mm^3)\\&=2.956(cm^3).\end{aligned}$$

所以，螺帽的个数大约有

$$5.8\times1\,000\div(7.8\times2.956)\approx252(个).$$

“阿基米德测王冠”的故事启示我们，可以利用下面的实验来验证球的体积公式.

把一个半径为 R 的球放入一个底面半径为 R，高为 $2R$ 的圆柱内(如图 3-14). 然后在圆柱内注满水后，再把球拿出来，观察圆柱内的水深.

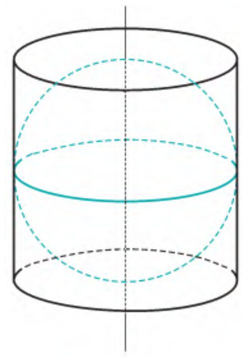


图 3-14

通过这个实验可以得出一个结论：

球的体积是这个圆柱的体积的$\frac{2}{3}$，即

$$V_{球}=\frac{2}{3}\cdot\pi R^2\cdot2R=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

于是验证了半径为 R 的球的体积是

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

我们可以得到球的表面积公式为

$$S_{球}=4\pi R^2.$$

这个公式的推导过程参看本章“阅读与讨论”.

例2 如图 3-14，圆柱的底面直径与高都等于球的直径. 求证：球的表面积等于圆柱的侧面积.

证明 设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$，所以

$$S_{球}=4\pi R^2,\quad S_{圆柱侧}=2\pi R\cdot2R=4\pi R^2.$$

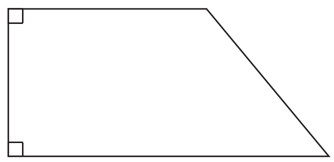
所以 $$S_{球}=S_{圆柱侧}.$$

练习

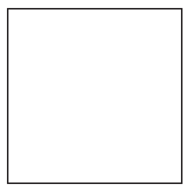
1. 地球半径约为 6 370 km，试计算地球的表面积.
2. 一个三棱台的上底面是边长为 8 cm 的正三角形，下底面是边长为 18 cm 的正三角形，它的三条侧棱的长都等于13 cm，求这个三棱台的侧面积.

习题 3.1

1. 想一想：直角梯形以它的垂直于底边的腰所在直线为轴旋转一周，所形成的图形是什么图形？将这个图形的侧面展开，会得到什么样的平面图形？
2. 长方体的长、宽、高分别是 3 cm，2 cm，2 cm，试画出长方体的直观图.
3. 用斜二测画法画出如下平面图形的直观图.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图是用斜二测画法画出的某平面图形水平放置的直观图，它是一个正方形，试画出这个平面图形.
5. 已知球 O_1 的体积是球 O_2 的体积的 125 倍，球 O_1 的半径是 10 cm,求球 O_2 的表面积和体积.
6. 球的表面积膨胀为原来的 2 倍，它的体积变为原来的几倍？

3.2 平面的基本性质

我们已经对简单的空间图形有了初步的认识. 我们知道，空间图形都是由点、线、面构成的. 因此，我们需要研究的基本元素是空间中的点、线、面.

多面体的面以及日常生活中常见的桌面、墙面、平静的水面都能给我们以**平面**(plane)的形象. 几何里所说的平面就是从这些物体中抽象出来的，就像直线是从黑板的边沿、光线等事物中抽象出来的一样. 直线是无限延伸的，没有粗细，平面是无限延展的，没有厚薄. 从这个意义上可以说，在数学中所研究的直线和平面都是从具体事物中抽象出来的理想模型.

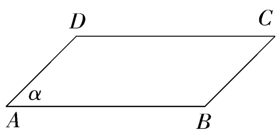


图 3-15

我们可以画一条线段来表示无限延伸的直线，同样，我们也可以画出平面的一部分来表示平面. 当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感觉它们都很像平行四边形，因此，通常用平行四边形来表示平面(如图 3-15). 当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成

邻边的 2 倍长. 当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应该把被遮住的部分画成虚线或不画(如图 3-16).

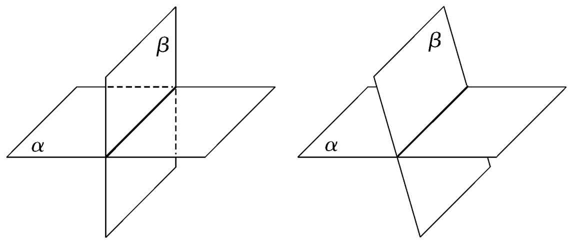


图 3-16

平面通常用小写希腊字母表示，如平面 α，平面 β，平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的四个顶点的字母或两个相对顶点的字母表示，如平面 $ABCD$ 或平面 AC(如图 3-15).

平面内有无限多个点，平面可以看作这些点组成的点集，其中每个点都是它的元素. 点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$(如图 3-17).

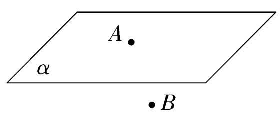


图 3-17

一扇门的一边用两个铰链安装在门框内，这时它可以绕经过这两个铰链的直线旋转；如果我们再用一把锁将门与门框连起来，门就固定不动了. 这种现象可归纳为

公理 1　过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

公理 1 的含义如图 3-18 所示.

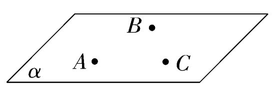


图 3-18

通常，把过不在同一条直线上的三个点 A，B，C 的平面记作“平面 ABC”.

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”.

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(如图 3-19).

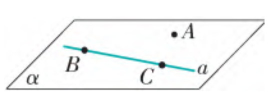


图 3-19

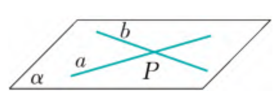


图 3-20

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(如图 3-20).

直线 a 和 b 相交于点 P，记作 $a\cap b=P$.

推论 3　经过两条平行直线有且只有一个平面(如图 3-21).

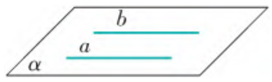


图 3-21

公理 1 及它的三个推论给出了确定一个平面的依据.

木工师傅在检验一块木板是否刨平时，常常把直尺的边缘贴在木板上任意滑动，观察木板与直尺的边缘有没有缝隙. 如果直尺边缘与木板之间有缝隙，说明木板不平. 这种现象可归纳为

公理 2　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内.

点 P 在直线 l 上，记作 $P\in l$；点 P 在直线 l 外，记作 $P\notin l$. 如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，记作 $l\subset\alpha$；否则就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l\not\subset\alpha$.

公理 2 的含义如图 3-22 所示，可以用符号语言表示为

$$A\in l，B\in l，A\in\alpha，B\in\alpha\Longrightarrow l\subset\alpha.$$

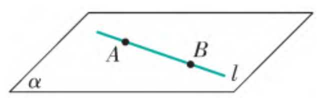


图 3-22

在我们所观察的多面体中，相邻两个面有且只有一条公共边. 如图 3-23 是一个五面体，平面 ABC 与平面 $BCDE$ 有一条公共直线 BC，但是平面 ABE 与平面 ACD 是否只有一个公共点 A 呢？当然不是，因为平面是可以无限延展的，它们还有其他的公共点，这些公共点组成过点 A 的一条直线. 这种现象可归纳为

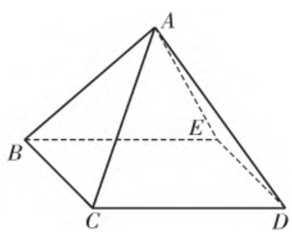


图 3-23

本书所说的“两个平面”，均指不重合的两个平面. 后面提到的“两条直线”，也是指不重合的两条直线，“两点”指不重合的两点.

公理 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

如果平面 α 与平面 β 有一条公共直线 l，就说平面 α 与平面 β 相交，交线是 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

公理 3 的含义如图 3-24 所示，可以用符号语言表示为

$$P\in\alpha，且 P\in\beta\Longrightarrow\alpha\cap\beta=l，且 P\in l.$$

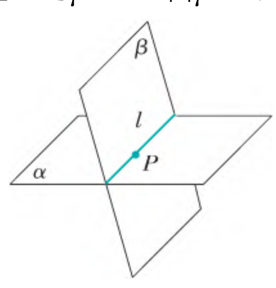


图 3-24

例1 如图 3-25，直线 AB，BC，CA 两两相交，交点分别为 A，B，C. 判断这三条直线是否共面，并说明理由.

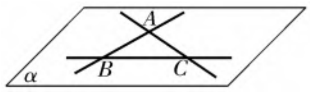


图 3-25

解 这三条直线共面. 理由如下：

因为 $AB \cap AC = A$，由推论 2 可知 AB，AC 确定一个平面 α.

因为 $B \in AB$，$C \in AC$，所以 $B \in \alpha$，$C \in \alpha$，所以由公理 2 得 $BC \subset \alpha$.

因此，直线 AB，BC，CA 都在平面 α 内，即它们共面.

> 如果空间的几个点和几条直线都在同一个平面内，就说它们"共面"，否则就说它们"不共面".

练习

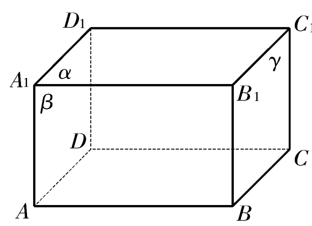
1. 如图，长方体的三个面所在平面 A_1C_1，A_1B，BC_1 分别记作 α，β，γ，则

   (1) A ______ AB，A ______ BC；

   (2) A ______ β，A ______ α；

   (3) AB ______ α，AB ______ β；

   (4) $\alpha \cap \beta =$ ______，$\beta \cap \gamma =$ ______.



（第 1 题图）

2. 用符号表示下列语句，并画出图形.

   (1) 点 A 在平面 α 内，点 B 在平面 α 外；

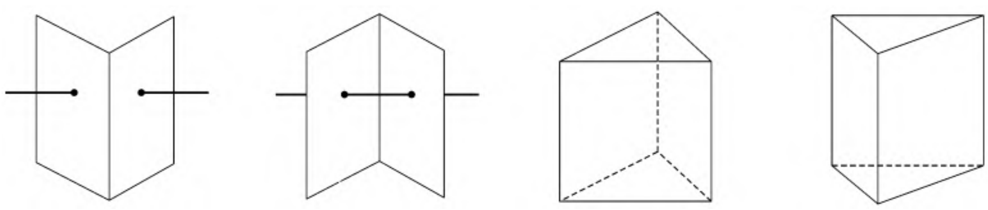
   (2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 不在平面 α 内；

   (3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l；

   (4) 直线 l 过平面 α 内一点 Q 和平面 α 外一点 P；

   (5) 直线 l 是平面 α 与平面 β 的交线，直线 m 在平面 α 内，l 与 m 相交于点 P.

3. 观察下面四个图形，请你仿制模型，并按各图所示方向把它们摆放在书桌上.



(1)　(2)　(3)　(4)

（第 3 题图）

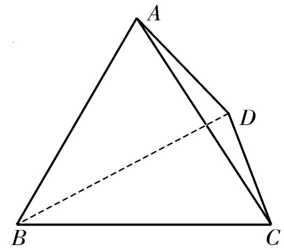
习题 3.2

1. 在图中，

(1) A ______平面 ABC，A ______平面 BCD；

(2) BD ______平面 ABD，BD ______平面 ABC；

(3) 平面 $ABC\cap$平面 $ACD=$____，______$\cap$______$=BC$.



（第 1 题图）

2. 用符号表示下列语句，并画出图形.

(1) 点 P 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2) 直线 l 在平面 α 内，但不在平面 β 内；

(3) 直线 l 与直线 m 相交于点 P；

(4) 平面 α 与平面 β 的交线是 l，点 P 在 l 上；

(5) 直线 l 经过平面 α 内一点 P，但 l 在 α 外.

3. (1) 经过同一直线上的三个点的平面(　　).

(A) 有且只有 1 个　　(B) 有且只有 3 个

(C) 有无数个　　(D) 有 0 个

(2) 直线 a，b，c 两两平行，但不共面，经过其中两条直线的平面共有(　　).

(A) 1 个　　(B) 3 个　　(C) 0 个　　(D) 6 个

(3) 已知四个点中，任何三点不共线，过这四个点中的三个点的平面共有(　　).

(A) 1 个　　(B) 3 个　　(C) 4 个　　(D) 1 个或 4 个

4. 不共面的 4 个点中能否有三个点共线？为什么？

5. 三角形是否一定是平面图形？为什么？梯形呢？

6. 一条直线过平面内一点和平面外一点，它与这个平面有几个公共点？为什么？

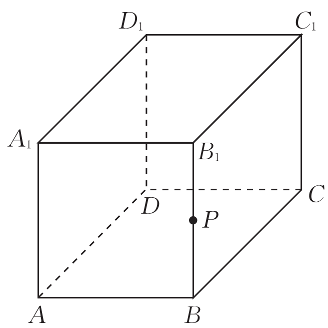
7. 一条直线与两条平行直线都相交，判断这三条直线是否在同一个平面内，并说明理由.

8. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线，判断这三条直线是否在同一个平面内，并说明理由.

9. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点.

(1)画出平面 PAC 与平面 $ABCD$ 的交线；

(2)画出平面 PA_1C 与平面 $ABCD$ 的交线.



（第 9 题图）

3.3 空间两条直线的位置关系

如图3-26，长方体$ABCD$-$A'B'C'D'$中，线段$A'B$所在的直线与CC'所在的直线的位置关系如何？

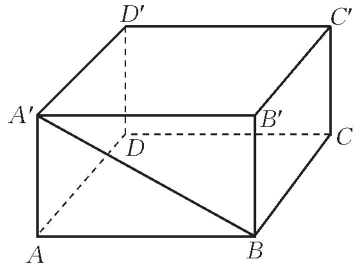


图3-26

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫作**异面直线**(skew lines).

空间两条直线的位置关系有三种：

$$\begin{cases}\text{共面直线}\begin{cases}\text{相交直线：有且只有一个公共点；}\\\text{平行直线：没有公共点；}\end{cases}\\\text{异面直线：不同在任何一个平面内.}\end{cases}$$

画异面直线时，通常用平面衬托，以显示它们不共面，如图3-27.

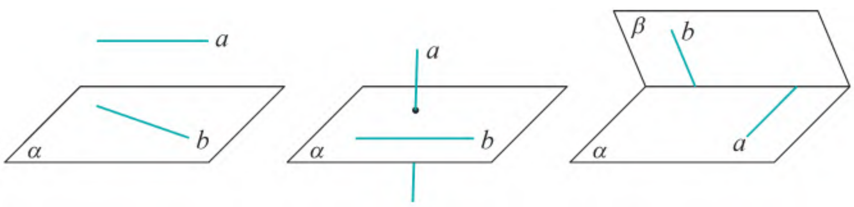


图3-27

在同一平面内，如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行. 对于空间三条直线，是否也有这样的性质呢？观察教室的墙面与墙面的交线，如图3-28所示，$AA_1 /\!/ BB_1$，$CC_1 /\!/ BB_1$，那么AA_1与CC_1平行吗？

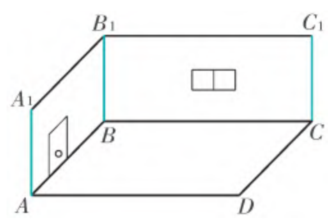


图3-28

公理4　平行于同一条直线的两条直线平行.

公理4可以用符号语言表示为

$$a /\!/ b,\ b /\!/ c \Longrightarrow a /\!/ c.$$

如果三条直线a，b，c两两平行，可以记为$a /\!/ b /\!/ c$.

例1　已知四边形$ABCD$是空间四边形，点E，H分别是边AB，AD的中点，点F，G分别是边CB，CD上的点，且$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$. 求证四边形$EFGH$是梯形.

四个顶点不共面的四边形叫作空间四边形.

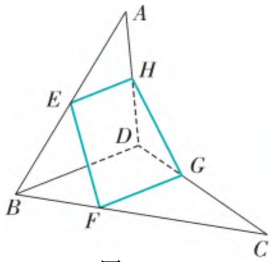


图 3-29

证明 如图 3-29，连接 BD.

因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以

$$EH /\!/ BD，EH=\frac{1}{2}BD.$$

又在 $\triangle CBD$ 中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，所以

$$FG /\!/ BD，FG=\frac{2}{3}BD.$$

根据公理 4，$EH /\!/ FG$，又 $FG>EH$，故四边形 $EFGH$ 是梯形.

在同一平面内，如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补. 在空间里这个命题还正确吗?

假设 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 中，$AB /\!/ A'B'$，$AC /\!/ A'C'$，根据构成角的两组射线 AB 与 $A'B'$，AC 与 $A'C'$ 的方向分三种情况进行讨论.

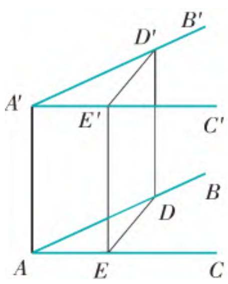


图 3-30

如果这两组射线的方向分别相同(如图 3-30)，在 AB，$A'B'$ 上分别截取 $AD=A'D'$，在 AC，$A'C'$ 上分别截取 $AE=A'E'$，连接 AA'，EE'，DD'. 因为 $AE \mathrel{\underline{/\!/}} A'E'$，所以 $AEE'A'$ 是平行四边形，所以 $AA' \mathrel{\underline{/\!/}} EE'$. 同理我们有 $AA' \mathrel{\underline{/\!/}} DD'$. 于是 $EE' \mathrel{\underline{/\!/}} DD'$，所以 $EDD'E'$ 是平行四边形，从而 $ED \mathrel{\underline{/\!/}} E'D'$. 所以 $\triangle AED \cong \triangle A'E'D'$，所以 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

如果这两组射线的方向分别相反，借助于对顶角进行转化，也有 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

如果这两组射线中，一组方向相同，另一组方向相反，与上面类似，可推知，一个角等于另一个角的补角.

定理 如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

定理表明，两条直线在平行移动时，并不改变它们所成角的大小. 如果 a，b 是两条异面直线，过空间任一点 P 作直线 a'，b'，使 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，我们把相交直线 a'，b' 所成的锐角或直角叫作**异面直线** a，b **所成的角**. 当异面直线 a，b 所成的角是直角时，我们说 a，b 是互相垂直的异面直线，记作 $a \perp b$.

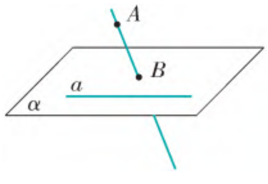


图 3-31

例2 求证：过平面外一点与平面内一点的直线与平面内不经过该点的直线是异面直线.

已知：$a \subset \alpha$，$A \notin \alpha$，$B \in \alpha$，$B \notin a$(如图 3-31).

求证：AB 与 a 是异面直线.

证明 假设直线 AB 与 a 在同一平面 β 内，则 $A\in\beta$，$B\in\beta$，$a\subset\beta$.

又 β 是过 a，B 的平面，α 也是过 a，B 的平面，而过 a，B 的平面只有一个，于是 α 与 β 是同一平面.

由于 $A\in\beta$，因而 $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

所以直线 AB 和 a 是异面直线.

例3 如图 3-32，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

（1）求直线 BA' 和 CC' 所成的角；

（2）哪些棱所在的直线与 AA' 垂直？

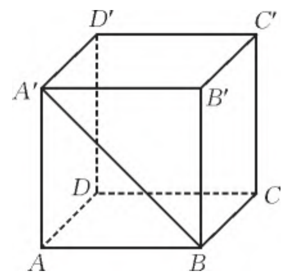


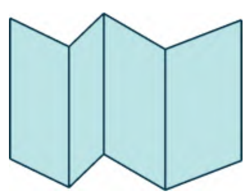
图 3-32

解 （1）由 $BB'\,/\!/\,CC'$ 知，$\angle B'BA'$ 为异面直线 BA' 与 CC' 所成的角．且 $\angle B'BA'=45°$，所以直线 BA' 与 CC' 所成的角为 $45°$.

（2）直线 AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$ 都与直线 AA' 垂直.

练习

1. 如图，把一张长方形的纸对折几次，说明为什么这些折痕互相平行.



（第 1 题图）

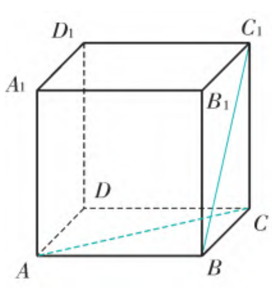
2. （1）在空间里，两条直线互相垂直，它们一定相交吗？

（2）在空间里，垂直于同一条直线的两条直线，有几种位置关系？

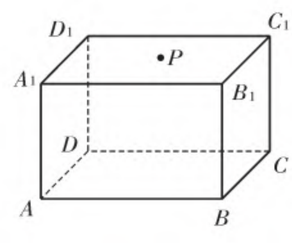
3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

（1）求证：BC_1 与 AC 是异面直线；

（2）求直线 BC_1 与直线 AC 所成的角.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，在长方体木块的面 A_1C_1 上有一点 P，怎样画一条过点 P 的直线与棱 CD 平行？

习题 3.3

1. (1) 设 AA_1 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA_1 平行的棱共有(　　).

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

(2) 设直线 a，b 分别是长方体相邻的两个面的对角线所在直线，则 a 与 b(　　).

(A) 平行　　(B) 相交

(C) 是异面直线　　(D) 可能相交，也可能是异面直线

(3) 如果 $OA/\!/O'A'$，$OB/\!/O'B'$，那么$\angle AOB$ 和$\angle A'O'B'$(　　).

(A) 相等　　(B) 互补

(C) 可能相等，也可能互补　　(D) 大小无关

2. 判断下列命题的真假：

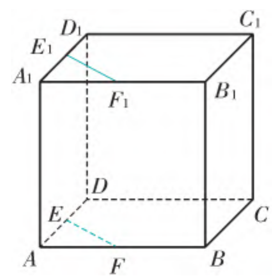
(1) a，b，c，d 是四条直线，若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，$c/\!/d$，则 $a/\!/d$；(　　)

(2) 已知直线 a，b，平面 α，β，且 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 a，b 一定是异面直线. (　　)

3. (1) AA_1 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA_1 垂直的棱共有________条；

(2) 如果 a，b 是异面直线，直线 c 与 a，b 都相交，那么由这三条直线中的两条所确定的平面共有________个.

4. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，E_1，F_1 分别在棱 AD，AB，A_1D_1，A_1B_1 上，且 $AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$. 求证：$EF \underline{\underline{/\!/}} E_1F_1$.

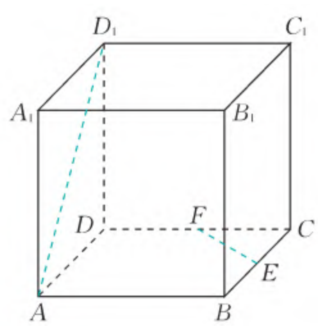


(第 4 题图)

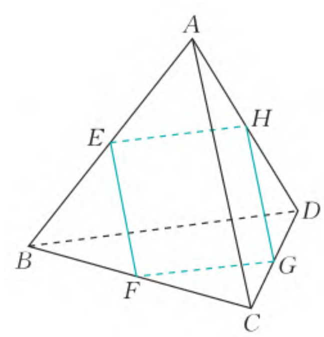
5. 已知直线 a，b，c，其中 a 与 b 是异面直线，$c/\!/a$，且 $b\cap c=\varnothing$. 求证：b 与 c 是异面直线.

6. 如果直线 AB，CD 是两条异面直线，那么直线 AC，BD 一定是异面直线吗？为什么？

7. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BC，CD 的中点，求异面直线 AD_1 与 EF 所成的角.



(第 7 题图)



(第 8 题图)

8. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点.

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 若 $AC=BD$，求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.

3.4 直线与平面的位置关系

3.4.1 直线与平面平行的判定和性质

如图 3-33，线段 $A'B$ 所在的直线与长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$的六个面所在的平面有什么样的位置关系？

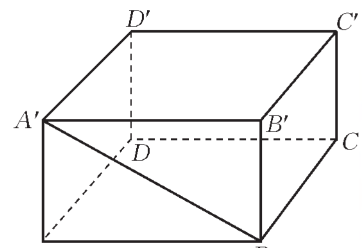


图 3-33

通过对长方体模型的观察思考，可以得到直线与平面的位置关系有三种：

直线在平面内——有无数个公共点（如图 3-34(1)）.

直线与平面相交——有且只有一个公共点．直线 l 与平面 α 相交于点 P，记作 $l\cap\alpha=P$（P 是公共点）（如图3-34(2)）.

直线与平面平行——没有公共点．直线 l 与平面 α 平行，记作 $l/\!/\alpha$（如图 3-34(3)）.

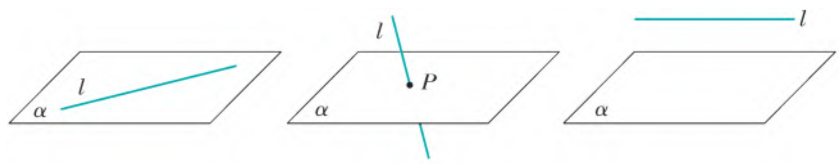


图 3-34

直线与平面相交或平行统称为直线在平面外.

将一张请柬放在桌面上(如图 3-35)，翻开后观察请柬的边缘 AB 与桌面的位置关系就会发现，请柬的边缘 AB 始终保持与桌面平行．从中归纳得到

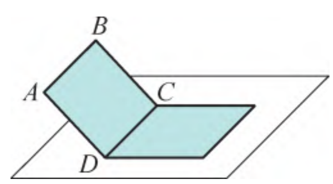


图 3-35

直线与平面平行的判定定理　若平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.

这个定理可以用符号语言表达如下(如图 3-36)：

$$a/\!/b,\ b\subset\alpha,\ a\not\subset\alpha\Longrightarrow a/\!/\alpha.$$

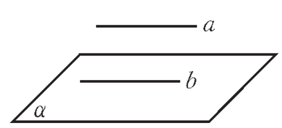


图 3-36

例 1　如图 3-37，已知在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点，求证：$EF/\!/$平面 BCD.

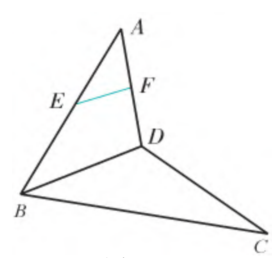


图 3-37

证明　连接 BD.

$\because AE=EB$，$AF=FD$，

$\therefore EF/\!/BD$，又 $BD\subset$平面 BCD，$EF\not\subset$平面 BCD，

$\therefore EF /\!/$ 平面 BCD.

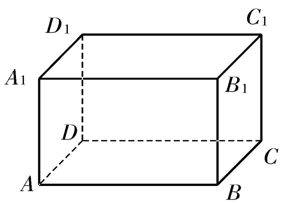


图 3-38

如图 3-38，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，与棱 A_1B_1 平行的面有 $ABCD$ 和 CDD_1C_1，经过 A_1B_1 的面有 A_1B_1BA 和 $A_1B_1C_1D_1$. 其中，平面 $ABCD \cap$ 平面 $A_1B_1BA = AB$，平面 $CDD_1C_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = C_1D_1$，且 $AB /\!/ A_1B_1$，$C_1D_1 /\!/ A_1B_1$. 从中归纳得到

直线与平面平行的性质定理　一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.

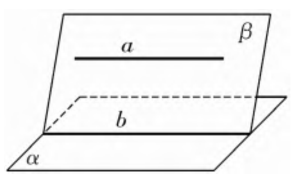


图 3-39

已知：$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b$(如图 3-39).

求证：$a /\!/ b$.

证明　$\because \alpha \cap \beta = b$，$\therefore b \subset \alpha$，又 $a /\!/ \alpha$，

$\therefore a$ 与 b 没有公共点，又 $a \subset \beta$，$b \subset \beta$.

$\therefore a /\!/ b$.

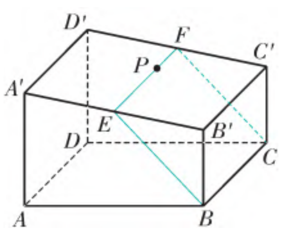


图 3-40

例2　图 3-40 所示的一块木料是一个六面体，棱 $BC /\!/$ 平面 $A'C'$.

(1) 要经过面 $A'C'$ 上的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线?

(2) 所画的线与平面 AC 是什么关系?

分析　要画出锯木料时所用的线，就要画出图中截面 BCP 与木料表面的交线 BE，EF 和 CF，其中画出 EF 是关键. 因为点 E，F 确定后，BE 与 CF 很容易画出. 怎样画 EF 呢? 显然 EF 是截面 BCP 与面 $A'C'$ 的交线. 由已知 $BC /\!/$ 面 $A'C'$，可知 $EF /\!/ BC$. 由于受木料形状的限制，过点 P 直接画与 BC 平行的直线不方便. 注意到 $B'C'$ 是过 BC 的面与面 $A'C'$ 的交线，所以 $B'C' /\!/ BC$. 在木料上过点 P 画 $B'C'$ 的平行线是很容易的，于是可以通过画出过点 P 与 $B'C'$ 平行的直线来确定 EF.

解　(1)在面 $A'C'$ 内，过点 P 画直线 EF，使 $EF /\!/ B'C'$. EF 分别交棱 $A'B'$，$C'D'$ 于点 E，F. 连接 BE，CF. 则 EF，BE，CF 就是应画的线.

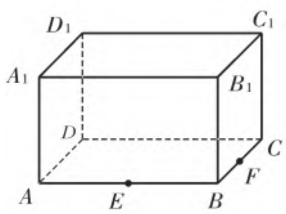
(2) $\because EF /\!/ B'C' /\!/ BC$，$BC \subset$ 平面 AC，$EF \not\subset$ 平面 AC，

$\therefore EF /\!/$ 平面 AC.

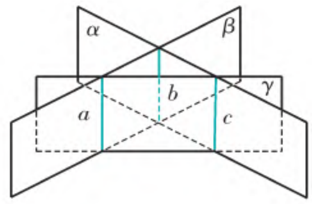
直线 BE 和 CF 显然都与平面 AC 相交.

练习

1. 在如图所示的长方体中，E，F 分别是棱 AB，BC 的中点，画出过 A_1，E，F 三点的截面，并说明理由.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，平面 α，β，γ 两两相交，直线 a，b，c 为三条交线，且 $a /\!/ b$，求证：$a /\!/ c$.

3.4.2 直线与平面垂直的判定和性质

竖立在水平地面上的旗杆、电线杆等都给我们以直线与平面垂直的形象.

观察直立在水平地面上的旗杆与它在地面上的影子之间的关系，不难发现，在任何时刻，旗杆 AB 与影子始终垂直(如图 3-41). 这就是说，地面上任何一条经过点 B 的直线都与旗杆 AB 垂直.

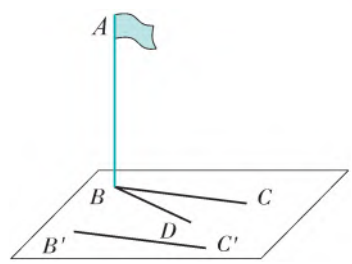
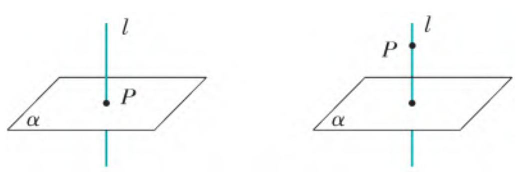


图 3-41

我们继续探讨地面上任一条不过 B 的直线 $B'C'$ 与 AB 的关系. 此时，只需过 B 作 $BC /\!/ B'C'$. 因为 $AB \perp BC$，根据异面直线垂直的定义，有 $AB \perp B'C'$.

一般地,如果一条直线 l 与一个平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α **互相垂直**，记作 $l \perp \alpha$. 直线 l 叫作平面 α 的**垂线**，平面 α 叫作直线 l 的**垂面**. 直线 l 与平面 α 的交点叫作**垂足**.

画直线与水平平面垂直时，一般把直线画成与表示平面的平行四边形的横边垂直. 如图 3-42(1)所示，$l \perp \alpha$，点 P 是垂足.

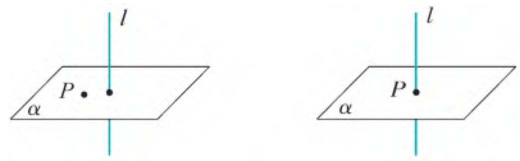


(1)　　(2)

图 3-42

我们知道，在平面图形中，过一点有且仅有一条直线与已知直线垂直. 对空间中的直线和平面，也有类似的结论：

设 α 是任一平面，点 P 是空间任一点，则过点 P 有且只有一条直线 l 是 α 的垂线（如图 3-42）；**设 l 是任一直线，点 P 是空间任一点，则过点 P 有且只有一个平面 α 是 l 的垂面**（如图3-43）.



(1)　　(2)

图 3-43

例1　求证：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

已知：$a/\!/b$，$a\perp\alpha$(如图 3-44).

求证：$b\perp\alpha$.

证明　设 m 是 α 内任一条直线，则

$$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a\perp m\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b\perp m \\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow b\perp\alpha.$$

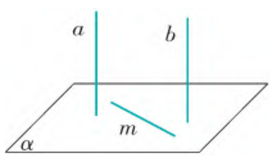


图 3-44

根据定义来判定直线与平面垂直时，必须考虑平面内所有的直线，有时候不太方便，因此,有必要寻求更为简便的判定方法.

在有些医院里可以看见一些输液时挂吊瓶用的架子(如图 3-45)，它是用两根木条做一个十字架底座，在底座上竖起一根木杆制成的. 只要木杆与底座上两根木条都垂直，把底座平放在地面上，木杆就保持与地面垂直. 这种现象可归纳为


图 3-45

直线与平面垂直的判定定理　**若一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直.**

这个定理可以用符号语言表示如下(如图 3-46)：

$$l\perp a,\ l\perp b,\ a\subset\alpha,\ b\subset\alpha,\ a\cap b=O\Longrightarrow l\perp\alpha.$$

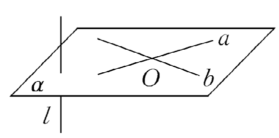


图 3-46

如图 3-47，一条直线 PA 和一个平面 α 相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫作这个平面的**斜线**，斜线和平面的交点 A 叫作**斜足**. 过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫作斜线在这个平面上的**射影**. 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫作这条直线和这个平面所成的角.

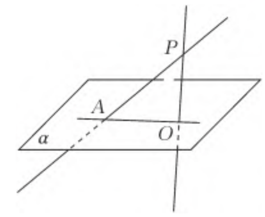


图 3-47

一条直线和一个平面垂直，就称它们所成的角是直角. 一条直线和一个平面平行，或在平面内，就称它们所成的角是 0°的角.

直立的电线杆都与水平地面垂直，这些电线杆相互平行. 我们从这一现象中归纳出

直线与平面垂直的性质定理　垂直于同一个平面的两条直线平行.

已知：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$(如图 3-48).

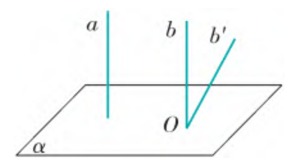


图 3-48

求证：$a /\!/ b$.

证明　因为 $b\perp\alpha$，所以可设 $b\cap\alpha=O$.

假设 a、b 不平行，过 O 作 $b' /\!/ a$. 因为 $a\perp\alpha$，所以 $b'\perp\alpha$.

于是，过 O 有两条直线 b 和 b' 都与平面 α 垂直，这与过一点有且只有一条直线与平面 α 垂直相矛盾.

所以 $a /\!/ b$.

例 2　如图 3-49，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，求直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

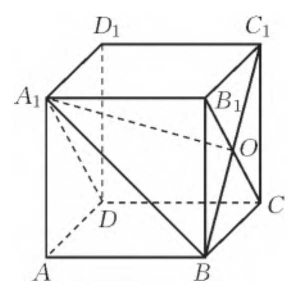


图 3-49

解　连接 BC_1 交 B_1C 于 O，连接 A_1O.

因为 $A_1B_1\perp B_1C_1$，$A_1B_1\perp B_1B$，所以 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又 $BC_1\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $A_1B_1\perp BC_1$.

又因为 $BC_1\perp B_1C$，所以 $BC_1\perp$平面 A_1B_1CD，

所以 A_1O 为斜线 A_1B 在平面 A_1B_1CD 内的射影，$\angle BA_1O$ 为直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

设正方体的棱长为 a，在 Rt$\triangle A_1BO$ 中，$A_1B=\sqrt{2}a$，$BO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $BO=\frac{1}{2}A_1B$，$\angle BA_1O=30°$.

因此，直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角为 30°.

例 3　已知直线 l 与平面 α 平行，A 是 l 上任一点，过 A 作 α 的垂线，垂足为 A'. 当 A 在 l 上移动时，线段 AA' 的长度是否变化？证明你的推断.

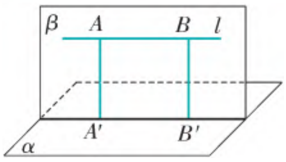


图 3-50

解 线段 AA'的长度不变．下面证明这个结论．

在直线 l 上任取不同于点 A 的点 B，过点 B 作平面 α 的垂线 BB'，垂足为 B'(如图 3-50)．

因为 $AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，所以 $AA'/\!/BB'$．

设经过直线 AA'和 BB'的平面为 β，即 $\beta\cap\alpha=A'B'$．

因为 $l/\!/\alpha$，所以 $l/\!/A'B'$．

由 $AA'/\!/BB'$，$l/\!/A'B'$得 $ABB'A'$是平行四边形，所以 $AA'=BB'$．即线段 AA'的长度不变．

练习

1. 判断下列命题的真假（以下 l，m，n 为直线，α 为平面）：

(1) $l\perp\alpha\Longrightarrow l$ 与 α 相交； ( )

(2) $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$l\perp m$，$l\perp n\Longrightarrow l\perp\alpha$； ( )

(3) $l/\!/m$，$m/\!/n$，$l\perp\alpha\Longrightarrow n\perp\alpha$； ( )

(4) $l/\!/m$，$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha\Longrightarrow l/\!/n$． ( )

2. 已知三条共点直线两两垂直，求证其中一条直线垂直于另两条直线所确定的平面．

3. 平面外一点与这个平面内各点连接而成的线段中，最短的线段是哪一条？为什么？

习题 3.4

1. 判断下列命题的真假：

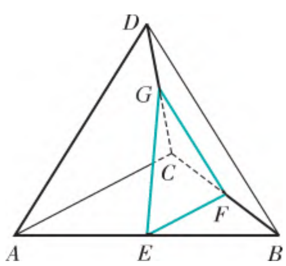
(1) 如果直线 a，b 与平面 α 满足 $a/\!/b$，且 $b\subset\alpha$，那么 $a/\!/\alpha$； ( )

(2) 如果直线 a 与平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，直线 $b\subset\alpha$，则 $a/\!/b$； ( )

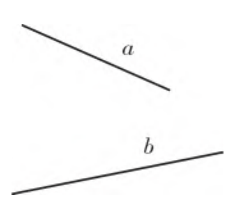
(3) 如果直线 a，b 与平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，且 $b/\!/\alpha$，那么 $a/\!/b$； ( )

(4) 如果直线 a，b 与平面 α 满足 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，$b\not\subset\alpha$，那么 $b/\!/\alpha$． ( )

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G 分别是 AB，BC，CD 的中点．求证：$BD/\!/$平面 EFG，$AC/\!/$平面 EFG．



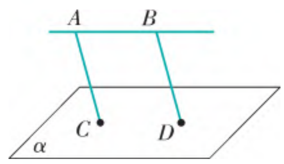
（第 2 题图）



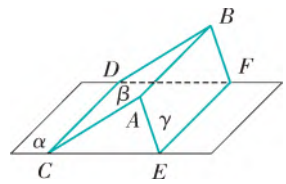
（第 3 题图）

3. 已知 a，b 是异面直线，画出平面 α，使 $a\subset\alpha$，且 $b/\!/\alpha$．

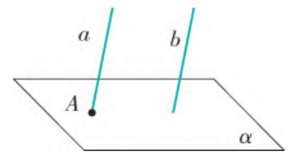
4. 如图，已知 $AB /\!/ \alpha$，$AC /\!/ BD$，$C \in \alpha$，$D \in \alpha$. 求证：$AC = BD$.



（第 4 题图）



（第 5 题图）



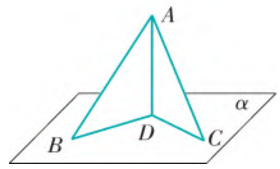
（第 6 题图）

5. 如图，已知 $\alpha \cap \beta = CD$，$\alpha \cap \gamma = EF$，$\beta \cap \gamma = AB$，$AB /\!/ \alpha$. 求证：$CD /\!/ EF$.

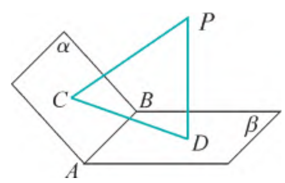
6. 如图，已知 $a /\!/ b$，$a \cap \alpha = A$. 求证：b 与 α 相交.

7. 已知直线 l，m 和平面 α，$l /\!/ \alpha$，$m \perp \alpha$. 求证：$l \perp m$.

8. 如图，将锐角三角形硬纸板沿它的一边 BC 上的高 AD 对折成一个角度，然后将它立在桌面上，使点 B，C，D 落在桌面上，这时直线 AD 与桌面有什么关系？为什么？



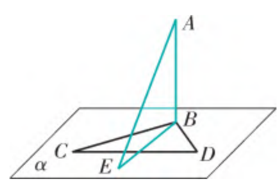
（第 8 题图）



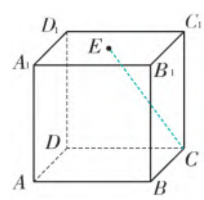
（第 9 题图）

9. 如图，$\alpha \cap \beta = AB$，$PC \perp \alpha$，$PD \perp \beta$，C，D 是垂足，直线 AB 和 CD 的位置关系如何？证明你的结论.

10. 如图，$AB = 5$ cm，$BC \perp AB$，$BD \perp AB$，点 E 在直线 BC 和 BD 所在的平面 α 内，$BE = 7$ cm. 求 AE 的长.



（第 10 题图）



（第 11 题图）

11. 如图，一块正方体木料的上底面内有一点 E，要经过点 E 在上底面内画一条直线与 C，E 的连线垂直，应该怎样画？

12. 求证：两平行线和同一个平面所成的角相等.

3.5 平面与平面的位置关系

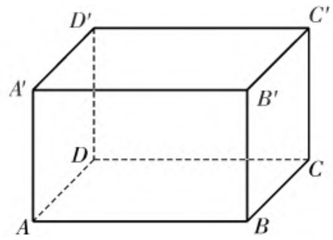


图 3-51

如图 3-51，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中的六个面，两两之间的位置关系有几种?

通过对长方体模型的观察思考，可以看出两个平面之间的位置关系有两种：

两个平面平行——没有公共点．平面 α 与平面 β 平行，记作 $\alpha /\!/ \beta$（如图 3-52(1)).

两个平面相交——有且只有一条公共直线．平面 α 与平面 β 相交于直线 l，记作 $\alpha \cap \beta = l$（如图 3-52(2)).

画两个互相平行的平面时，一般使表示平面的两个平行四边形的对应边平行(如图 3-52(1)).

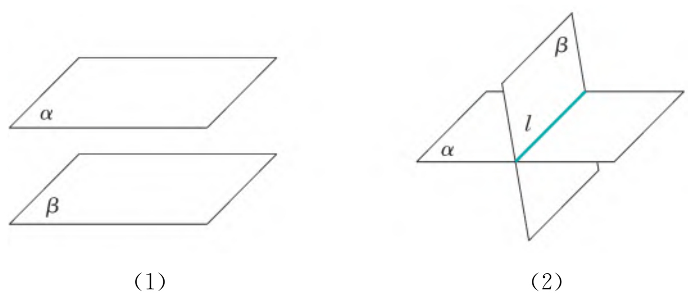


图 3-52

3.5.1 两个平面平行的判定和性质

在日常生活中，经常需要判断两个平面是否平行，比如建造一栋楼房，建筑工人必须判断每一层的楼板是否与水平面平行；装修房间的地板时，装修工人也要判断地板所在平面是否与水平面平行．如何才能判断两个平面是否平行呢?

在为房间铺设地板砖时，装修工人首先在室内固定两条相交的水平线．只要保证每一块地板砖在这两条交线所确定的平面上，即可保证地面与水平面平行．这一事例说明，若两条相交直线与一个平面平行，则这两条相交直线所在的平面与这个平面平行.

两个平面平行的判定定理　若一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

这个定理可以用符号语言表示如下(如图 3-53)：

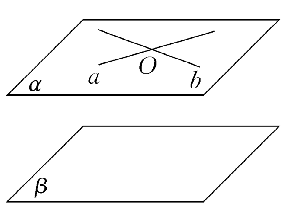


图 3-53

$a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a \cap b = O$，$a /\!/ \beta$，$b /\!/ \beta \Longrightarrow \alpha /\!/ \beta$.

为了把一个平板仪的平板调整为水平面(如图 3-54)，通常是把水平仪按两个不同方向放在平板上，如果水平仪里面的水泡都是居中的，说明平板仪的平板已是水平面，依据的就是这个定理.

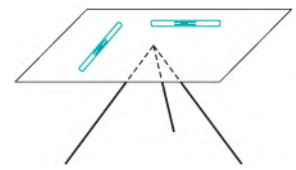


图 3-54

例1 求证：垂直于同一条直线的两个平面平行.

已知：$\alpha \perp AA'$，$\beta \perp AA'$，$\alpha \cap AA' = A$，$\beta \cap AA' = A'$(如图 3-55).

求证：$\alpha /\!/ \beta$.

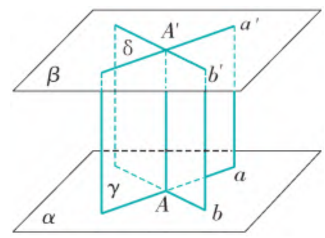


图 3-55

证明 设经过直线 AA' 的两个平面 γ，δ 分别与平面 α 和 β 交于直线 a，a' 和 b，b'. $a \cap b = A$，$a' \cap b' = A'$.

因为 $AA' \perp \alpha$，$AA' \perp \beta$，所以 $AA' \perp a$，$AA' \perp a'$.

因为 $a \subset \gamma$，$a' \subset \gamma$，所以 $a /\!/ a'$.

又 $a \subset \alpha$，于是 $a' /\!/ \alpha$.

同理可证，$b' /\!/ \alpha$.

又 $a' \cap b' = A'$，且 $a' \subset \beta$，$b' \subset \beta$，所以 $\alpha /\!/ \beta$.

根据两个平面平行的定义和直线与平面平行的定义，容易得出下面的结论：

如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任一条直线平行于另一个平面.

观察教室的左右两个墙面与前面墙面的交线的关系，天花板和地面与同一个墙面的交线的关系，由这些现象不难归纳得到

两个平面平行的性质定理　两个平面平行，如果第三个平面与这两个平面都相交，那么两条交线平行.

已知：$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$(如图 3-56).

求证：$a /\!/ b$.

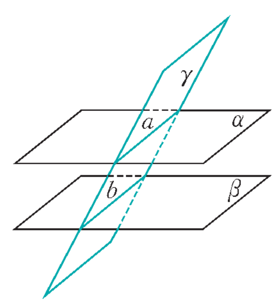


图 3-56

证明 因为 $\alpha \cap \gamma = a$，所以 $a \subset \alpha$，同理可得 $b \subset \beta$.

而 $\alpha /\!/ \beta$，所以 a 和 b 没有公共点.

又因为 $a \subset \gamma$，$b \subset \gamma$，所以 $a /\!/ b$.

例2 求证：如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么它也垂直于另一个平面.

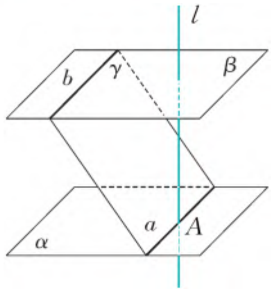


图 3-57

已知：$\alpha/\!/\beta$，$l\perp\alpha$，$l\cap\alpha=A$(如图 3-57).

求证：$l\perp\beta$.

证明 在平面 β 内任取一条直线 b. 平面 γ 是过点 A 和直线 b 的平面. 设 $\gamma\cap\alpha=a$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b\\ \left.\begin{array}{l}a\subset\alpha\\ l\perp\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp a\end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp b.$$

又直线 b 是 β 内的任意一条直线，根据直线与平面垂直的定义，可知 $l\perp\beta$.

练习

1. 判断下列命题的真假（以下 l，m，n 是直线，α，β 是平面）：

 (1) $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta\Longrightarrow\alpha/\!/\beta$； ( )

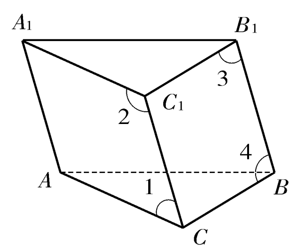
 (2) $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta\Longrightarrow m/\!/n$； ( )

 (3) $\alpha/\!/\beta$，$l\subset\alpha\Longrightarrow l/\!/\beta$； ( )

 (4) α 内的任一直线都平行于 $\beta\Longrightarrow\alpha/\!/\beta$. ( )

2. 如图，在立体图形 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，如果平面 A_1C 内有 $\angle1+\angle2=180°$，在平面 B_1C 内有 $\angle3+\angle4=180°$，那么平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 有什么关系？为什么？

3. 求证：夹在两个平行平面间的平行线段相等.



（第 2 题图）

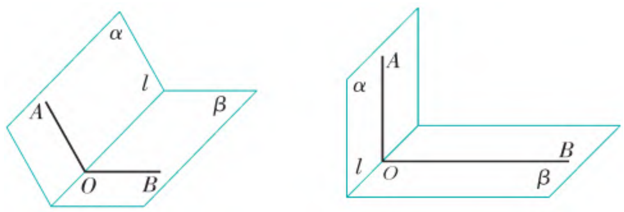
3.5.2 两个平面垂直的判定和性质

水坝的迎水面、背水面与水平面成适当角度才能使水坝坚固耐用；笔记本电脑的液晶显示屏要与键盘面成一定角度才便于使用；人造卫星的轨道平面与赤道平面也须选择适当角度，这对成功发射以及卫星效能的充分发挥都很重要. 这些角度都是两个平面相交形成的(如图 3-58).

图 3-58

平面内的一条直线把这个平面分成两部分，其中每一部分叫作**半平面**(semi-plane)，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**(dihedral angle)，这条直线叫作二面角的**棱**，这两个半平面叫作二面角的**面**.

图 3-59 是从直线 l 出发的两个半平面 α，β 形成的二面角，记作二面角 α-l-β.



（1）　　　　（2）

图 3-59

如图 3-59(1)，在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O，以 O 为垂足在两个半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的角 $\angle AOB$ 叫作二面角的平面角.

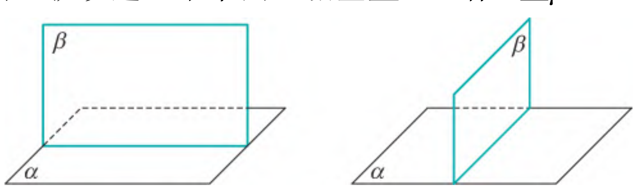
二面角的平面角的大小与点 O 在棱 l 上的位置无关.

二面角的大小可以用它的平面角 $\angle AOB$ 来度量，$\angle AOB$ 是多少度，就说这个二面角是多少度.

当二面角的两个面重合时，规定二面角的大小为 0°，当二面角的两个面合成一个平面时，规定二面角的大小为 180°.

平面角是直角的二面角叫作**直二面角**(如图 3－59(2)).

一般地，平面 α 与平面 β 相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.



（1）　　　　（2）

图 3-60

两个互相垂直的平面一般画成如图 3-60 那样，把竖直平面的一组对边画成与水平平面的横边垂直.

教室的门在开关过程中，门所在的平面与地面保持垂直. 通过观察可以发现，虽然门所在平面的位置随着门的开关运动在不停地变化，但门上有一条边 AB 是固定不动的，而直线 AB 恰好与地面垂直(如图 3-61).

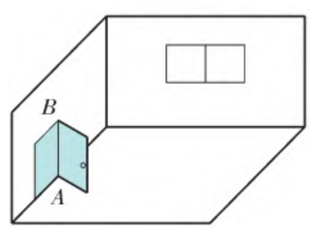


图 3-61

据此我们可以归纳得到

两个平面垂直的判定定理　**若一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.**

这个定理可以用符号语言表示为(如图 3-62)：

$a\subset\alpha$，$a\perp\beta\Longrightarrow\alpha\perp\beta$.

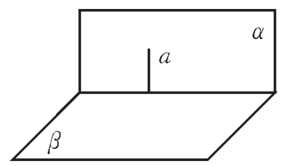


图 3-62

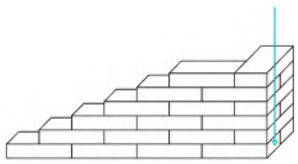


图 3-63

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙面是否与水平面垂直（如图 3-63）. 想一想，这是什么道理？

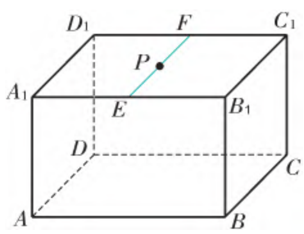


图 3-64

例1 如图 3-64，在长方体 AC_1 中，P 是平面 A_1C_1 上的一点，现在需要在平面 A_1C_1 上经过点 P 作一条直线与平面 AB_1 垂直，应该如何画线呢？

解 因为所作的直线与平面 AB_1 垂直，必须与平面 AB_1 内的直线 A_1B_1 垂直. 过点 P 在平面 A_1C_1 内作 A_1B_1 的垂线，分别与 A_1B_1，C_1D_1 交于 E，F 两点.

又 $A_1D_1\perp A_1B_1$，且 EF，A_1B_1，A_1D_1 都在平面 A_1C_1 内，所以 $EF/\!/A_1D_1$. 在长方体中，$A_1D_1\perp AA_1$，$A_1D_1\perp A_1B_1$，所以 $A_1D_1\perp$平面 AB_1，所以 $EF\perp$平面 AB_1.

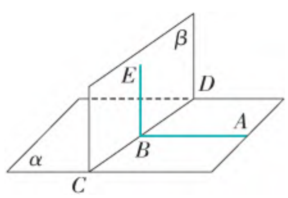


图 3-65

由上述作平面 AB_1 的垂线的过程可以归纳得到

两个平面垂直的性质定理　如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

已知：如图 3-65，$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=CD$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp CD$，$AB\cap CD=B$.

求证：$AB\perp\beta$.

证明 过点 B 在 β 内作 $BE\perp CD$，则$\angle ABE$ 是二面角 α-CD-β的平面角. 由 $\alpha\perp\beta$ 知，$AB\perp BE$. 又因为 $AB\perp CD$，BE 与 CD 是 β 内的两条相交直线，所以 $AB\perp\beta$.

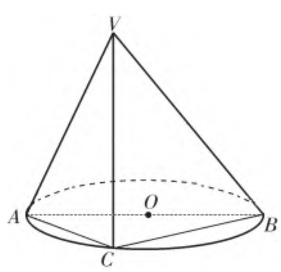


图 3-66

例2 如图 3-66，AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上一点，过点 C 的直线 VC 垂直于圆 O 所在的平面. 求证：平面 $VAC\perp$平面 VBC.

证明 因为 $VC\perp$平面 ABC，所以 $VC\perp BC$，$VC\perp AC$，即$\angle BCA$ 是平面 VAC 与平面 VBC 所成二面角的平面角.

又因为$\angle BCA$ 是直径所对的圆周角，所以$\angle BCA=90°$，即平面 VAC 与平面 VBC 所成的二面角是直二面角.

所以，平面 $VAC\perp$ 平面 VBC.

例3 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 $A\text{-}B_1D_1\text{-}C$ 的余弦值（如图 3-67）.

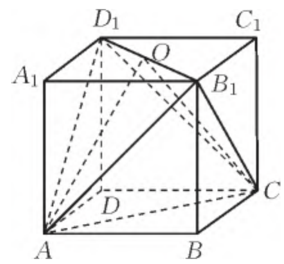


图 3-67

解 取 B_1D_1 的中点 O，连接 OA，AC，OC.

设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中的棱长为 a，则

$$AD_1=AB_1=CD_1=CB_1=\sqrt{2}a,$$

所以 $AO\perp B_1D_1$，$CO\perp B_1D_1$，

因此 $\angle AOC$ 就是二面角 $A\text{-}B_1D_1\text{-}C$ 的平面角.

在 $\triangle ACO$ 中，$AC=\sqrt{2}a$，$AO=CO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

所以，

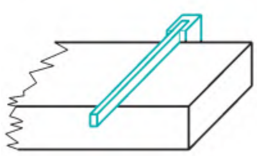
$$\cos\angle AOC=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2-(\sqrt{2}a)^2}{2\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

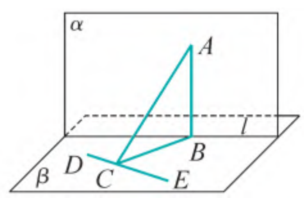
因此，二面角 $A\text{-}B_1D_1\text{-}C$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

练习

1. 画出互相垂直的两个平面和两两垂直的三个平面.
2. 如图，检查工件的相邻两个平面是否垂直时，只要用角尺的一边紧贴在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动，观察尺边是否和这个面密合就可以了. 这是为什么？



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp l$，$BC\subset\beta$，$DE\subset\beta$，$BC\perp DE$. 求证：$AC\perp DE$.
4. 已知 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，$\alpha\cap\beta=l$. 求证：$l\perp\gamma$.

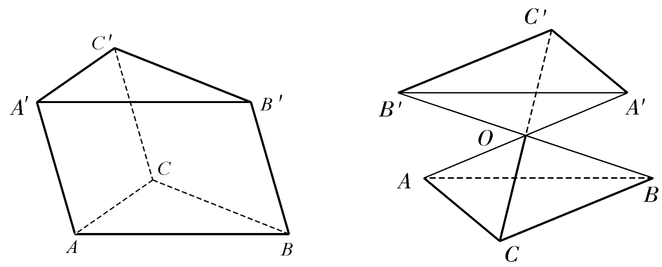
习题 3.5

1. 判断下列命题的真假，对真命题给出证明，对假命题用图形举出反例.

（1）平行于同一直线的两个平面平行；

（2）平行于同一平面的两个平面平行.

2. （1）如图(1)，A，B，C 为不在同一直线上的三点，$AA' \underline{/\!/} BB' \underline{/\!/} CC'$. 求证：平面 $ABC /\!/$ 平面 $A'B'C'$.

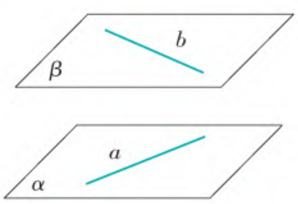


（1）　　（2）

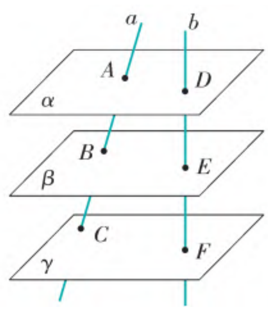
（第 2 题图）

（2）如图(2)，直线 AA'，BB'，CC' 交于点 O，$AO=A'O$，$BO=B'O$，$CO=C'O$. 求证：平面 $ABC /\!/$ 平面 $A'B'C'$.

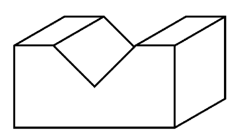
3. 如图，a，b 是异面直线，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a /\!/ \beta$，$b /\!/ \alpha$. 求证：$\alpha /\!/ \beta$.



（第 3 题图）



（第 4 题图）



（第 5 题图）

4. 如图，直线 a 和 b 分别交平面 α，β，γ 于点 A，B，C 和 D，E，F，$\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$. 试推测 AB，BC，DE，EF 的比例关系，并证明你的结论.

5. 如图，要把长方体铁块加工成一个 V 形铁块，使 V 形面成直二面角，且 V 形面的两个面是全等矩形，上口宽 40 mm，求切削深度.

6. （1）如果一个平面与另一个平面的垂线平行，判断这两个平面的位置关系，并说明理由；

（2）如果一个平面和一条直线都垂直于另一个平面，判断这个平面与这条直线的位置关系，并说明理由；

（3）如果两个平面都垂直于第三个平面，这两个平面是否相交？如果相交，交线与第三个平面的位置关系如何？

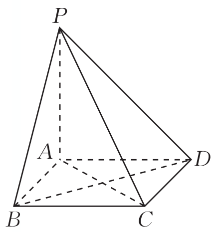
7. （1）求证：如果三条共点的直线两两互相垂直，那么它们中每两条直线确定的平面也两两互相垂直；

（2）求证：三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

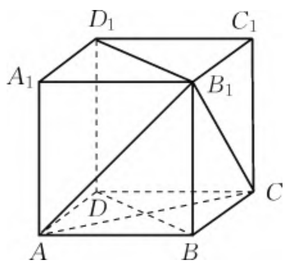
8. 下列命题是否正确？如果正确，请给出证明；如果不正确，请画图举出反例.（下面的 α，β，γ，α_1，β_1 都表示平面.）

（1）$\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma\Longrightarrow\alpha\perp\gamma$；（2）$\alpha/\!/\alpha_1$，$\beta/\!/\beta_1$，$\alpha\perp\beta\Longrightarrow\alpha_1\perp\beta_1$.

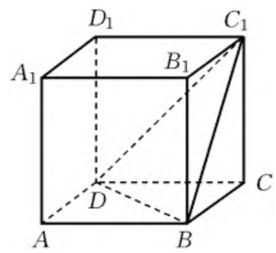
9. 如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是菱形. 求证：平面 $PAC\perp$平面 PBD.



（第 9 题图）



（第 10 题图）



（第 11 题图）

10. 如图，已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，求证：平面 $B_1AC\perp$平面 B_1BDD_1.

11. 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，求二面角 C_1-BD-C 的正切值.

阅读与讨论

球的表面积公式的探索

我们通过实验的方法得到了球的体积公式，在此基础上，我们来推导球的表面积公式.

我们在球面上画上网络，这些网络线把球面分割为一些"小球面片"（如图 1），它们的面积分别用 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_i，…，ΔS_n 表示，则球的表面积

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots+\Delta S_n.$$

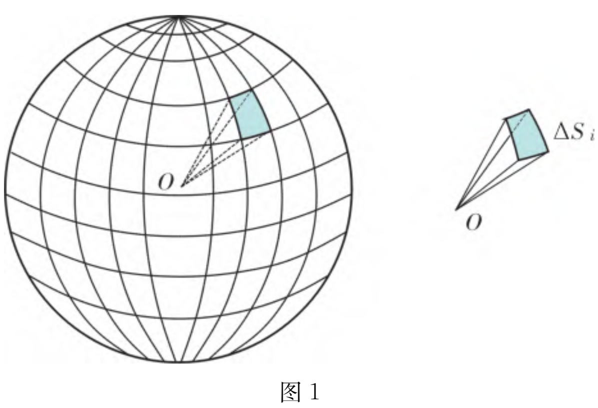


图 1

以这些“小球面片”为底，球心为顶点的“小锥体”的体积的和等于球的体积．这些“小锥体”可近似地看成棱锥，“小锥体”的底面积 ΔS_i 近似地等于小棱锥的底面积，球的半径 R 近似地等于小棱锥的高 h_i，因此第 i 个小棱锥的体积

$$V_i \approx \frac{1}{3}h_i\Delta S_i.$$

当“小锥体”的底面非常小时，“小锥体”的底面几乎是“平”的，于是球的体积

$$V \approx \frac{1}{3}(\Delta S_1 \cdot h_1 + \Delta S_2 \cdot h_2 + \cdots + \Delta S_i \cdot h_i + \cdots + \Delta S_n \cdot h_n).$$

容易看出，当网络分割越细密，“小锥体”越接近于棱锥，此时其高越接近于 R，另一方面，不论网络如何分割，总有 $\Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n = S$．于是上式变为

$$V = \frac{1}{3}RS.$$

已知 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$，所以 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}RS$，从而

$$S = 4\pi R^2.$$

讨论题

球的体积公式是通过实验得到的，我们也可以用推导球的表面积公式的方法推导出球的体积公式（不能利用表面积公式）．请同学们仿照上述方法推导球的体积公式．

（提示：把球切割成 $2n$ 个“薄圆片”，厚度为 $\frac{R}{n}$，每一个“薄圆片”近似看成高为 $\frac{R}{n}$ 的圆柱．）

复习题

A 组

1. 下列命题是否正确？如果正确，请给出证明，否则请举出反例．

（1）$l_1 \cap l_2 \cap l_3 = P \Longrightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面；

（2）$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3 \Longrightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面；

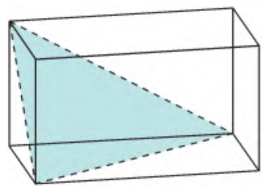
（3）$l_1 \cap l_2 = P$，$l_2 \cap l_3 = Q$，$l_3 \cap l_1 = S$（P，Q，S 是不同的三个点）$\Longrightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面．

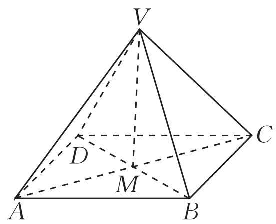
2. 求证：长方体的对角线长的平方等于它的长、宽、高的平方和．

3. 长方体的长、宽、高的比为 1∶2∶3，对角线长为 $2\sqrt{14}$ cm，求它的体积．

4. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 4 cm，求这个球的体积．

5. 如图，沿长方体相邻三个面的对角线截去一个三棱锥，则三棱锥的体积是长方体体积的几分之几？


（第 5 题图）



（第 6 题图）

6. 如图，棱锥的底 $ABCD$ 是一个矩形，AC 与 BD 交于 M，VM 是棱锥的高，若 $VM=4$ cm，$AB=4$ cm，$VC=5$ cm，求棱锥的体积.

7. 仓库的房顶呈正四棱锥形，量得底面的边长为 2.6 m，侧棱长为 2.1 m，现要在房顶上铺一层油毡纸，问：需要油毡纸的面积是多少？

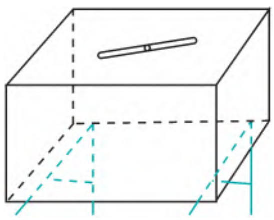
8. 回答下列问题：

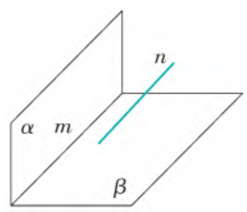
（1）在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线与这条直线垂直？在空间呢？

（2）在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线与这条直线平行？在空间呢？

9. 经过两条平行线中一条直线的平面，与另一条直线有怎样的位置关系？

10. 如图，安装空调室外机时，先在墙上安装两个直角三角架，使它的一直角边紧靠墙面，另一直角边与墙面垂直. 把空调室外机放在安装好的三角架上之后，安装工人再把水准仪在空调机上测试（水准仪不与墙面垂直），看水准仪的水泡是否居中. 为什么这样做？试说明理由.


（第 10 题图）



（第 11 题图）

11. 如图，$\alpha\cap\beta=m$，$n/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$. 求证：$m/\!/n$.

12. 三个平面两两相交，有三条交线，求证:这三条交线交于一点或互相平行.

13. 长方体被一平面所截，截面与长方体交于一顶点的三条棱都相交，求证:所得截面是锐角三角形.

14. 已知正方体、等边圆柱（底边直径与高相等的圆柱）、球的体积相等，其表面积分别为 S_1，S_2，S_3. 试比较 S_1，S_2，S_3 的大小.

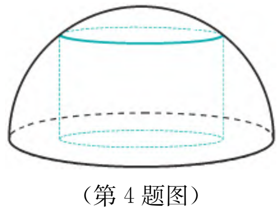
B 组

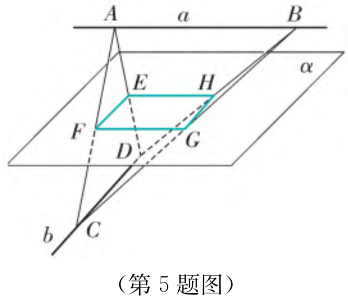
1. 观察自己的教室，说出观察到的点、线、面之间的位置关系，并说明理由.

2. 求证：经过一点且与一条直线垂直的所有直线都在同一平面内.

3. 三棱锥的三个侧面两两垂直，它们的面积分别为 6 m^2，4 m^2 和 3 m^2，求它的体积.

4. 在半径为 R 的半球内有一内接圆柱，求这个内接圆柱侧面积的最大值.


（第 4 题图）

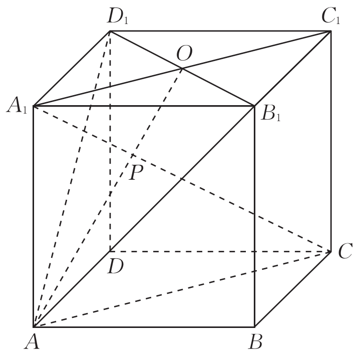


（第 5 题图）

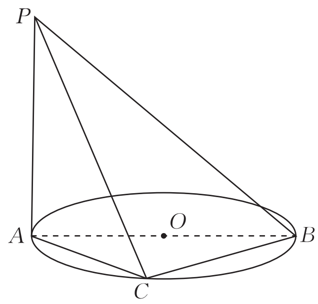
5. 如图，a，b 是异面直线，端点分别在 a，b 上的线段 AD，AC，BC，BD 分别交平面 α 于 E，F，

G，H. 若 $a /\!/ \alpha$，$b /\!/ \alpha$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

6. 正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，$A_1C \cap$ 平面 $AB_1D_1 = P$，求证：A，P，O 三点共线.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 如图，AB 是圆 O 的直径，C 是圆 O 是上任意一点(异于 A 和 B)，PA 垂直于圆 O 所在的平面.

（1）求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBC；

（2）如果 $PA = AC = 1$，$AB = \sqrt{2}$，求二面角 A-PB-C 的大小.

思考与实践

1. 立体几何里有很多问题可以与平面几何进行类比. 运用这种类比方法你一定会有新的收获与体会，请就你的收获与体会写一篇小论文.

2. 建筑中要考虑面面平行、面面垂直等问题，这不仅关系到建筑的外观，而且关系到建筑的稳定性、抗震性等. 在建筑工地上我们发现，常用一种水平经纬仪来判定楼层间的平行关系. 工人师傅在施工过程中，每建完一层，都会在楼面一角的角平分线上取一点，以该点为中心留一正方形小孔，其大小及位置每层都是统一的. 该小孔内不填水泥. 假如每层都平行的话，则每个小孔的射影都应该与底下的正方形小孔重合. 水平经纬仪是用来判断每个小孔的射影是否与底下的正方形小孔重合的工具. 为什么每个小孔的射影都与底下的正方形小孔重合时，就能保证每层的楼面平行？试说明理由.

3. 请你举出一个在日常生活中遇到的需要用立体几何知识解决的实例，并运用你所学的立体几何知识解答这个实际问题.

后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，依据《普通高中数学课程标准（2017年版）》，我们组织专家学者编写了这套普通高中数学教科书.

在本套教科书的编写过程中，我们得到了许多数学教育界前辈、数学课程专家、数学教育理论工作者、中学数学教研员和教师的大力支持和热情帮助，我们对他们的辛勤付出表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢华中师范大学数学与统计学学院对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持.

本套教科书是全体编写人员集体智慧的结晶. 除已列出的主要编写者外，参加本册教科书编写讨论的还有：彭树德、刘运新、罗国彬、高保中、李建国、李文溢、田杰、张琴、孙昕等.

我们还要感谢使用本套教科书的师生们，期待你们在使用本套教科书的过程中，及时把意见和建议反馈给我们，以便我们进一步修改完善.

责任编辑 张 琴 田 杰
封面设计 牛 红 刘静文

普通高中教科书 数学 必修 第三册

出 版 湖北教育出版社 430070 武汉市雄楚大街 268 号
经 销 新 华 书 店
网 址 http://www.hbedup.com
印 刷 武汉中远印务有限公司
开 本 890mm×1240mm 1/16
印 张 6.5
字 数 120 千字
版 次 2019 年 11 月第 1 版
印 次 2019 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5564-3142-7
定 价 6.35 元