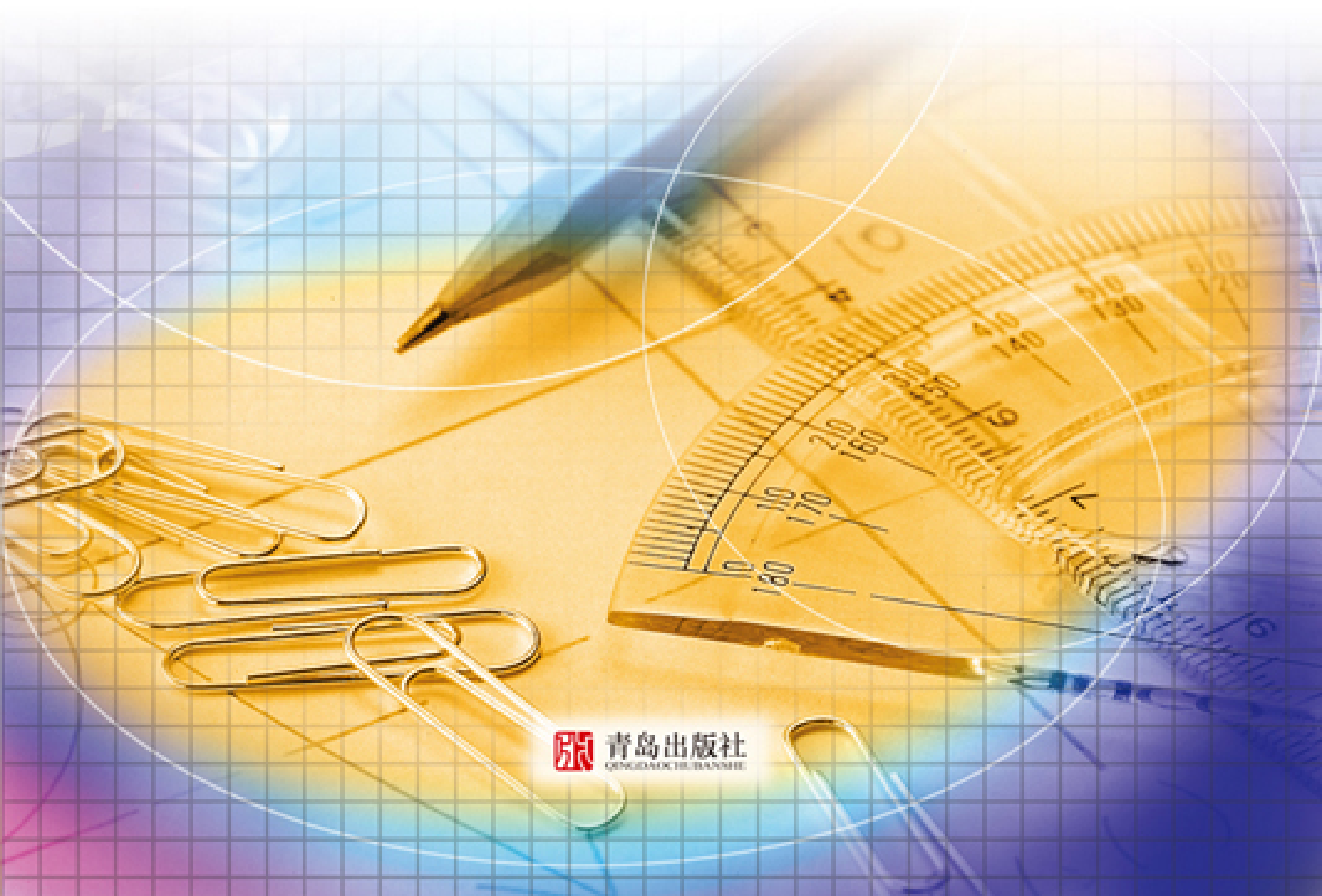
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

八年级　上册

SHUXUE



青岛出版社

义 务 教 育 教 科 书

数　学

八年级　上册

青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

书　　名　义务教育教科书　数学（八年级上册）
主　　编　展　涛
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址　http://www.qdpub.com
责任编辑　刘海波　戴振宇
美术编辑　路渊源
制　　版　济南汇海科技有限公司
印　　刷　昌邑市新华印刷有限公司
出版日期　2013 年 6 月第 2 版　2021 年 6 月第 17 次印刷
开　　本　16 开（787mm × 1092mm）
印　　张　12.25
字　　数　190 千字
书　　号　ISBN 978-7-5436-3324-7
定　　价　11.33 元
编校质量、盗版监督服务电话　4006532017　（0532）68068670
青岛版图书售出后如发现质量问题，请寄回青岛出版社印刷物资处调换。
电话：（0532）68068629

新学期寄语

亲爱的同学：

祝贺你进入新的学年，登上一个新的起点。这本新的数学教科书将继续伴你成长，与你一起走进新的数学天地，探索数学世界中新的奥秘。你的数学视野会进一步扩大，你将迎接一些新的挑战，进一步体验、感受、品味数学的美妙，享受学习数学的乐趣。

在生活中，你见过各式各样的图形，你知道什么是全等形吗？全等是进一步研究图形及其性质的基础。你将经历观察、实验、归纳、猜想、探索过程，掌握三角形全等的性质和条件，并开始接触尺规作图。

轴对称图形与成轴对称的现象随处可见，给我们带来美的享受。你知道轴对称图形的性质吗？你会用尺规作线段的垂直平分线与角的平分线吗？本册将帮你解答这些问题。

在已学过的平面图形的基础上，你将开始学习推理和证明。从几个基本事实出发，证明有关角、平行线、三角形等一些简单几何图形的性质和判定方法，进一步学会合乎逻辑的思考，理解证明的必要性，做到言之有理，落笔有据。

你知道怎样描述一组数据的集中趋势吗？你能用平均数、中位数和众数对实际问题作出解释吗？一组数据的离散程度怎样描述？在本册中你将会用方差对数据的波动大小进行判断，帮助你在掌握这些知识的同时，初步形成统计的观念。

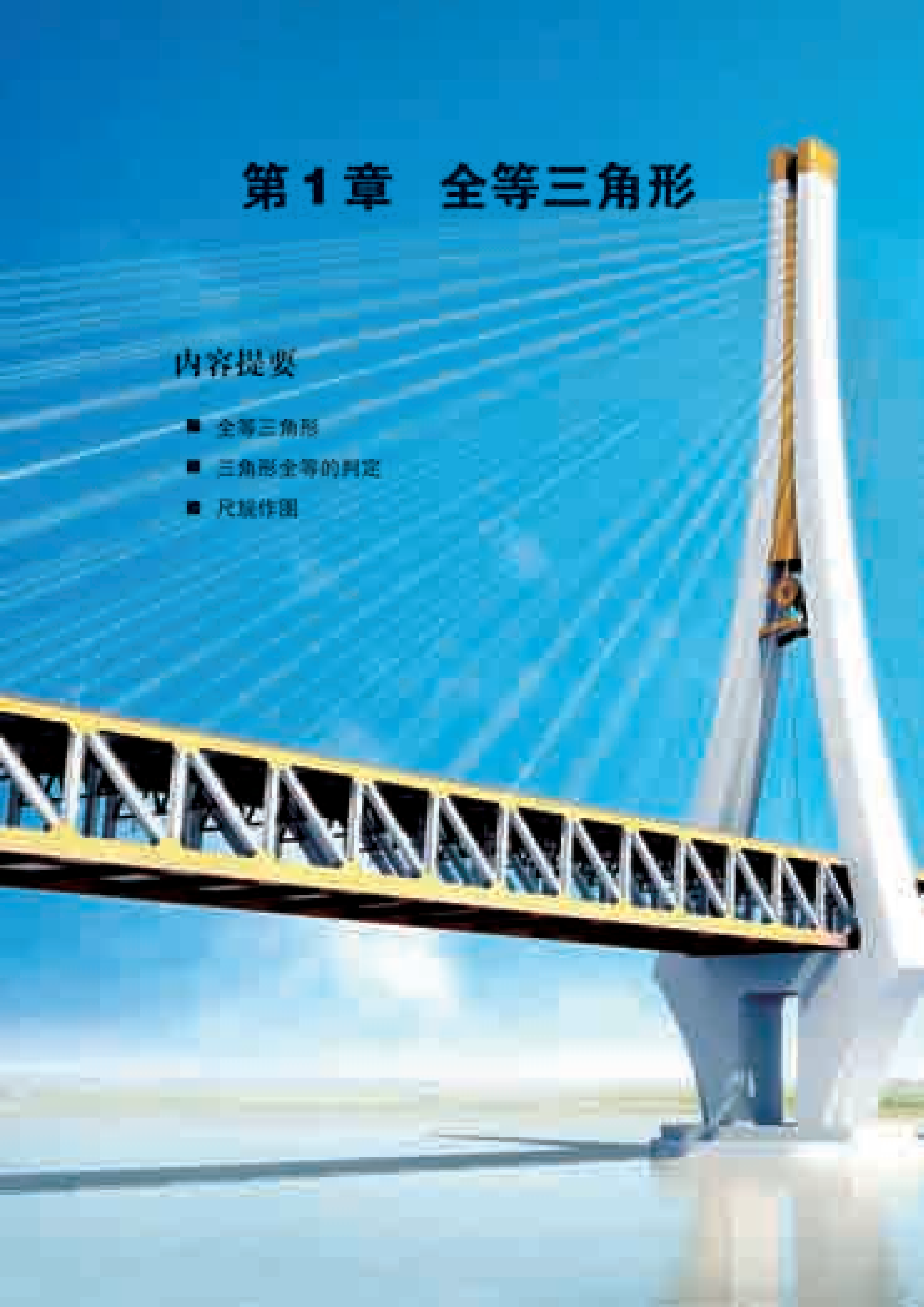
你知道分式吗？在学习了整式的基础上，本册将带你结识新的朋友——分式。通过与分数类比，你将学习分式的基本性质和分式的加、减、乘、除运算等，并会利用分式方程解决一些实际问题。

数学世界是五彩缤纷的百花园，它的大门对每一位同学都是敞开的。一分耕耘，一分收获，只要你肯付出辛勤的劳动，勤于观察，勤于动手，勤于思考，勤于交流，你将会得到丰厚的回报。

现在就让我们走进八年级数学的新天地，继续探索数学的奥秘吧！

目　录

第 1 章　全等三角形



内容提要

- 全等三角形
- 三角形全等的判定
- 尺规作图

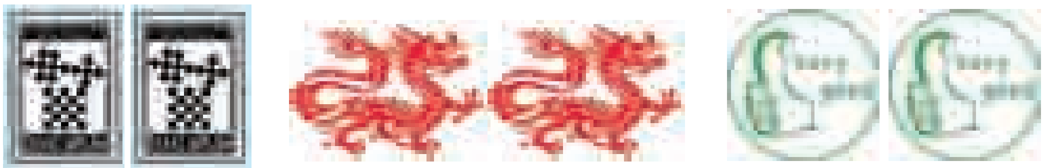
情境导航

我们已经学过了三角形，在这幅斜拉式大桥的图片中，有许许多多的三角形，你能从中找到形状和大小都相同的三角形吗？

1.1 全等三角形

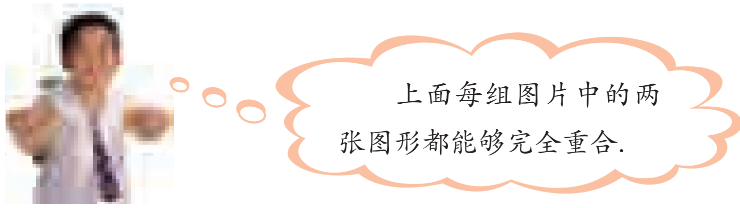
观察与思考

（1）分别观察下面的三组图片，你有什么发现？如果将每组中的两张图片用适当的方式叠合在一起，它们能够完全重合吗？



邮票　　剪纸　　印章

图 1–1



（2）观察图 1–2，你发现图中左、右两个图形的形状和大小分别有怎样的关系？

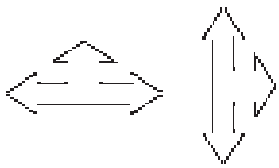


图 1–2

如果我们用纸将这两个图形复制后剪下来，把其中的一个放到另一个上，使它们适当地叠合在一起，那么可以发现这两个图形也能够完全重合. 也就是说，这两个图形的形状相同，大小相等.

（3）在现实生活中，你能举出能够完全重合的两个平面图形的例子吗？与同学交流.

能够完全重合的两个平面图形，叫做**全等形**（congruent figures）. 全等形的形状相同，大小相等.

实验与探究

（1）用硬纸片任意剪一个三角形，记为△ABC . 然后用它做模板，沿着它的边

缘在纸上画出一个三角形，记为△$A'B'C'$（图1–3），△ABC与△$A'B'C'$是全等形吗？

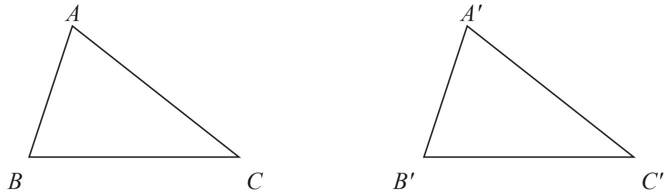


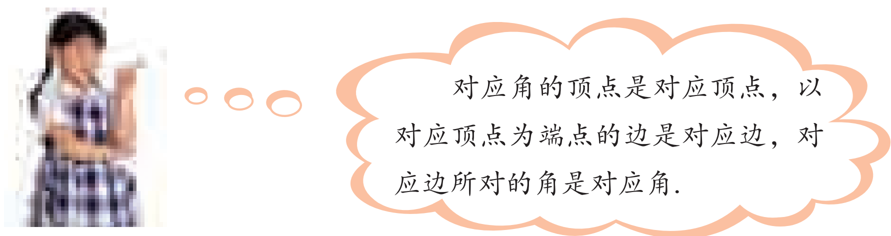
图 1–3

由画图过程可知，这两个三角形能够完全重合，所以它们是全等形. 能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles）.

（2）当图 1–3 中的两个全等三角形完全重合时，你能说出它们的哪些顶点、哪些边、哪些角分别重合吗？

当两个全等三角形完全重合时，互相重合的顶点叫做**对应顶点**（corresponding points），互相重合的边叫做**对应边**（corresponding sides），互相重合的角叫做**对应角**（corresponding angles）.

在图 1–3 中，点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C' 分别是对应顶点；边 AB 与 $A'B'$，AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$ 分别是对应边；$\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$ 分别是对应角.



△ABC 与△$A'B'C'$ 是全等三角形，记作△$ABC \cong$△$A'B'C'$，符号“≌”读作“全等于”. 在书写两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上，这样可以比较容易地找出全等三角形的对应边和对应角.

例1 如图 1–4，已知△$ABC \cong$△DEF，试写出这两个三角形的对应边和对应角.

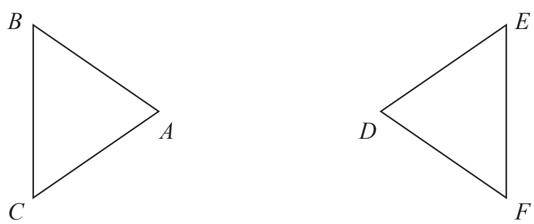
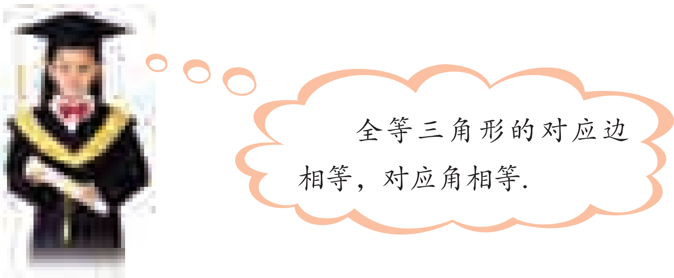


图 1–4

解 在图 1−4 中，由△ABC ≌△DEF 可知，点 A 与点 D，点 B 与点 E，点 C 与点 F 分别是对应顶点，从而边 AB 与 DE，AC 与 DF，BC 与 EF 分别是对应边；$\angle A$ 与 $\angle D$，$\angle B$ 与 $\angle E$，$\angle C$ 与 $\angle F$ 分别是对应角.

（3）观察图 1−3，△ABC ≌△$A'B'C'$，这两个全等三角形的对应边之间有什么大小关系？对应角呢？为什么？



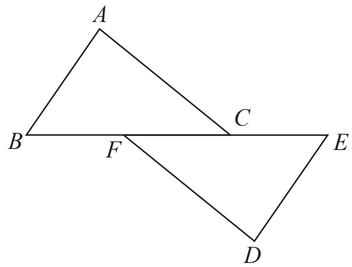


图 1−5

例2 如图 1−5，已知△ABC ≌△DEF，写出这两个三角形中相等的边和相等的角.

解 由△ABC ≌△DEF 可知，这两个三角形的对应边分别相等，所以 $AB = DE$，$AC = DF$，$BC = EF$；它们的对应角分别相等，所以 $\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$，$\angle ACB = \angle DFE$.

挑战自我

如图 1−6，已知△ABC ≌△DCB，且 $AB = 7$ cm，$BD = 5$ cm，$\angle A = 60°$，你能说出线段 DC，AC 的长和 $\angle D$ 的大小吗？

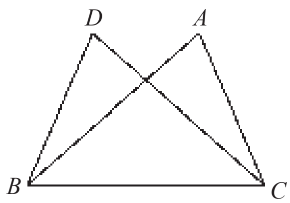
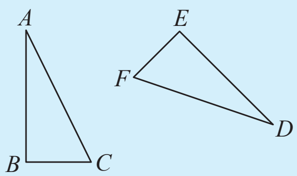


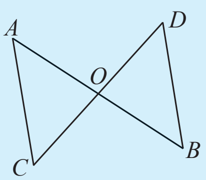
图 1−6

练 习

1. 如图，已知△ABC ≌△DEF，写出这两个三角形中的对应边和对应角.



（第 1 题）



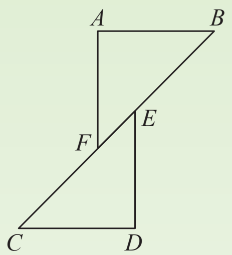
（第 2 题）

2. 如图，AB 和 CD 相交于点 O，$\triangle AOC \cong \triangle BOD$，写出这两个三角形中相等的边和相等的角.

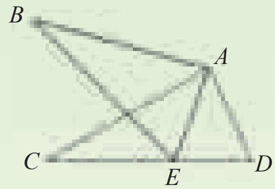
习题1.1

复习与巩固

1. 如图，已知$\triangle ABF \cong \triangle DCE$，试写出这两个三角形中的对应边和对应角.
2. 如图，已知$\triangle ABE \cong \triangle ACD$，试写出这两个三角形中相等的边和相等的角.



（图 1 题）

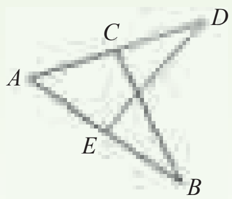


（第 2 题）

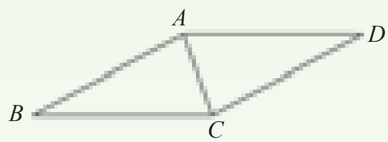
3. 填空：

（1）如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle ADE$，$AB = 11$ cm，$CA = 5$ cm，那么 $AD =$ ____ cm，$EA =$ ____ cm.

（2）如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\angle BAC = 85°$，$\angle ABC = 30°$，那么$\angle DCA =$ ______，$\angle CDA =$ ______，$\angle BCA =$ ______，$\angle DAC =$ ______ .



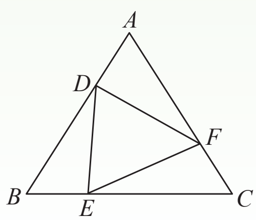
（第 3（1）题）



（第 3（2）题）

拓展与延伸

4. 如图，已知$\triangle ADF \cong \triangle BED$，$\triangle BED \cong \triangle CFE$. 写出图中相等的线段和相等的角.

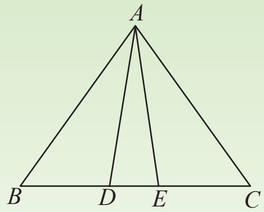


（第 4 题）

5. 如图，已知$\triangle ABE \cong \triangle ACD$.

（1）如果$BE = 6$，$DE = 2$，求 BC 的长；

（2）如果 $\angle BAC = 75°$，$\angle BAD = 30°$，求 $\angle DAE$ 的度数.



（第 5 题）

探索与创新

6. 用硬纸板任意剪一个三角形，用它做模板，在白纸上画出两个不重合的三角形，使它们分别满足：

（1）有一条公共边；　　（2）有一个公共顶点；　　（3）有一个公共角.

它们都全等吗？

1.2　怎样判定三角形全等

如果两个三角形能够重合，那么就可以判定这两个三角形全等. 然而，判断两个三角形能否重合，我们只会通过叠合的方法去验证，运用时毕竟不太方便. 是否有更简便、更适用的判定两个三角形全等的方法呢？

一个三角形由六个元素组成，即三条边和三个角. 当两个三角形全等时，它们的三条边分别对应相等，三个角也分别对应相等. 反过来，如果两个三角形的三条边和三个角分别相等，那么把这两个三角形叠合后，它们能够重合，因此这两个三角形全等. 这就是说，可以根据两个三角形中六对元素之间的相等关系，判定这两个三角形全等. 问题是，最少几对元素相等，就可判定这两个三角形全等？

实验与探究

（1）只根据两个三角形有一对元素相等，能保证两个三角形全等吗？

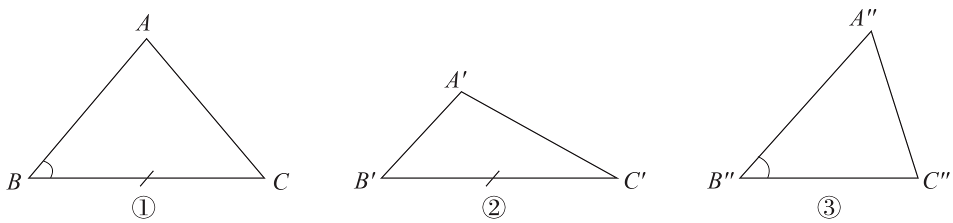


图 1–7

如图 1−7①②，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$BC = B'C'$，将$\triangle ABC$放到$\triangle A'B'C'$上，使BC与$B'C'$重合，由于不能保证点A与点A'重合，因此不能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等.

如图 1−7①③，在$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$中，$\angle B = \angle B''$，将$\triangle ABC$放到$\triangle A''B''C''$上，使$\angle B$与$\angle B''$重合，由于不能保证点A与点A''重合，因此不能保证$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$全等.

（2）只根据两个三角形有两对元素分别相等能保证两个三角形全等吗?

如图 1−8①②，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$AB = A'B'$，$BC = B'C'$，将$\triangle ABC$放到$\triangle A'B'C'$上，使AB与$A'B'$重合，由于不能保证BC与$B'C'$重合，因此不能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等.

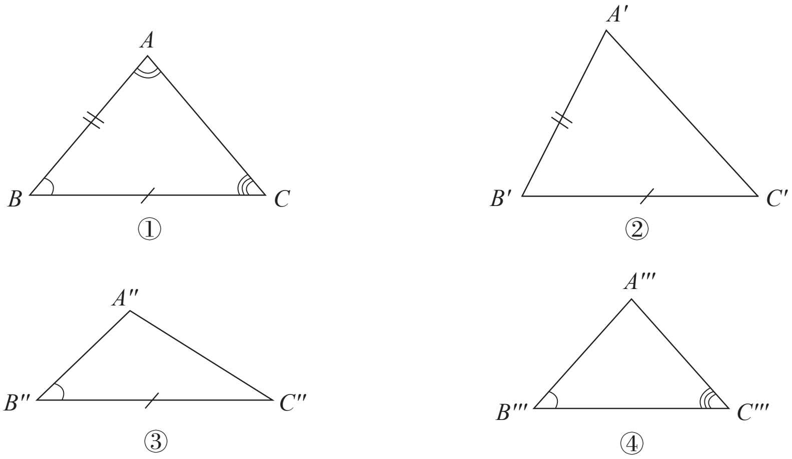


图 1−8

如图 1−8①③，在$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$中，$BC = B''C''$，$\angle B = \angle B''$，将$\triangle ABC$放到$\triangle A''B''C''$上，使BC与$B''C''$重合，$\angle B$与$\angle B''$重合，由于不能保证$BA = B''A''$，故不能保证点A与点A''重合，因此不能保证$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$全等.

如图 1−8①④，在$\triangle ABC$与$\triangle A'''B'''C'''$中，$\angle B = \angle B'''$，$\angle C = \angle C'''$，将$\triangle ABC$放到$\triangle A'''B'''C'''$上，使$\angle B$与$\angle B'''$重合，由于不能保证$BC = B'''C'''$，故不能保证点C与点C'''重合，因此不能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'''B'''C'''$全等.

在两个三角形中，如果已知它们有两对元素分别相等，能否再添加一个适当的条件，从而保证这两个三角形全等吗?

（3）观察图1－8①②，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$AB = A'B'$，$BC = B'C'$，如果再添加一个条件$\angle B = \angle B'$（图1–9），$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

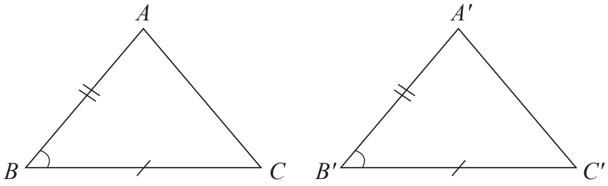


图 1–9

把$\triangle ABC$放到$\triangle A'B'C'$上，使点B与点B'重合，BC落在$B'C'$上，点A与点A'在BC的同侧，因为$BC = B'C'$，所以点C与点C'重合. 因为$\angle B = \angle B'$，所以射线BA与$B'A'$重合. 又因为$BA = B'A'$，所以点A与点A'重合. 于是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$重合，从而$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等.

（4）由此你能得出什么结论？

判定方法1　两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

这个判定方法通常简写成“边角边”或“SAS”.

小资料

S是英文side（边）的第一个字母的大写，A是英文angle（角）的第一个字母的大写.

例1　如图1–10，已知$AB = AD$，$\angle BAC = \angle DAC$，$\triangle ABC$与$\triangle ADC$全等吗？说明你的理由.

解　$\triangle ABC$与$\triangle ADC$全等. 理由是：

在$\triangle ABC$与$\triangle ADC$中，因为$AB = AD$，AC是$\triangle ABC$与$\triangle ADC$的公共边，$AC = AC$，$\angle BAC$与$\angle DAC$分别是AB与AC，DA与AC的夹角，并且$\angle BAC = \angle DAC$，由SAS，所以$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

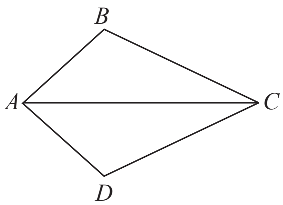


图 1–10

例2　如图1–11，为了测量池塘边上不能直接到达的两点A，B之间的距离，小亮设计了这样一个方案：先在平地上取一个能够直接到达点A与点B的点C，然后在射线AC上取一点D，使$CD = CA$，在射线BC上取一点E，使$CE = CB$. 测量DE的长，那么DE的长就等于A，B两点之间的距离. 他的方案对吗？为什么？

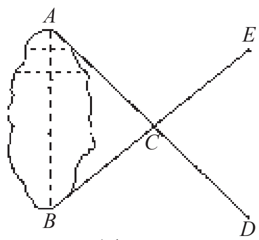


图 1–11

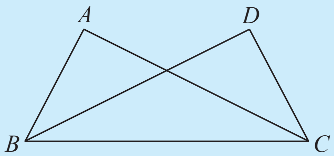
解　他的方案是对的. 理由是：

因为$CA = CD$，$CB = CE$，$\angle ACB = \angle DCE$，由SAS，所以$\triangle ACB \cong \triangle DCE$. 因此，$DE$与$AB$相等.

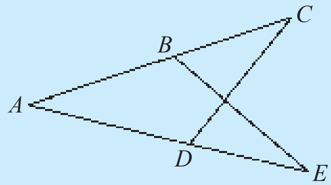
练 习

1. 如图，已知 $AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 全等吗？说明你的理由.

2. 如图，已知 $AB=AD$，$AC=AE$，$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 全等吗？说明你的理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

实验与探究

（1）再来观察图 1–8 ①③，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 中，$BC=B''C''$，$\angle B=\angle B''$，如果再添加一个条件 $\angle C=\angle C''$（图 1–12），$\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 全等吗？

（2）把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A''B''C''$ 上，使点 B 与 B'' 重合，边 BC 落在 $B''C''$ 上，点 A 与点 A'' 在 BC 的同侧.

因为点 B 与点 B'' 重合，BC 落在 $B''C''$ 上，由于 $BC=B''C''$，所以点 C 与点 C'' 重合. 又因为 $\angle B=\angle B''$，所以射线 BA 与 $B''A''$ 重合. 添加条件 $\angle C=\angle C''$ 后，射线 CA 与射线 $C''A''$ 重合. 因为 $C''A''$（CA）与 $B''A''$（BA）有且只有一个交点，所以点 A 与点 A'' 重合，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 重合.

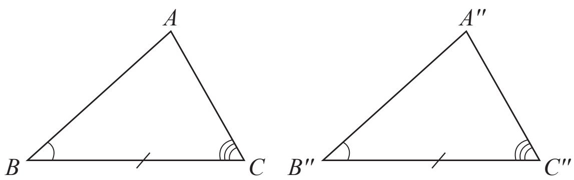


图 1–12

（3）由此你能得出什么结论？

判定方法 2　两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.

这个判定方法通常简写成“角边角”或“ASA”.

例3　如图 1–13，已知 $\angle ACB=\angle DFE$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等吗？为什么？

解　$\triangle ABC$与$\triangle DEF$全等. 理由是：

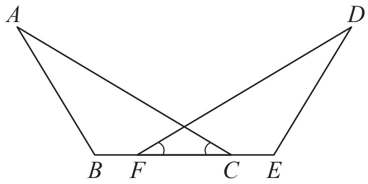


图 1–13

在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，因为$\angle ACB=\angle DFE$，$\angle B=\angle E$，BC，EF分别是$\angle B$与$\angle ACB$，$\angle E$与$\angle DFE$的夹边，且$BC=EF$，由 ASA，所以$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

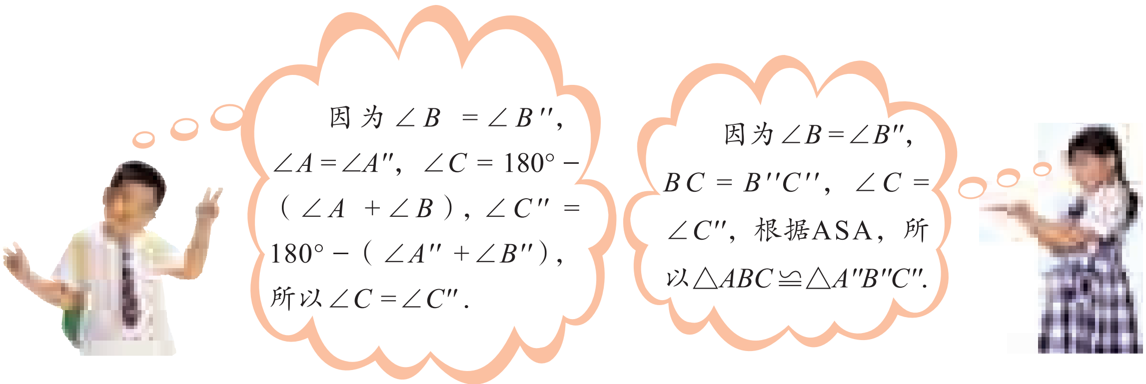
交流与发现

（1）继续观察图 1–8 ①③，在$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$中，$BC=B''C''$，$\angle B=\angle B''$，如果添加条件$\angle A=\angle A''$（图 1–14），这时边BC与$\angle A$什么关系？边$B''C''$与$\angle A''$呢？

（2）$\angle C$与$\angle C''$相等吗？为什么？

（3）你能判定$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$全等吗？为什么？与同学交流.


图 1–14



（4）由此你能得出什么结论？

判定方法3　两角分别相等且其中一组等角的对边也相等的两个三角形全等.

这个判定方法通常简写成“角角边”或“AAS”.

例4　如图 1–15，在$\triangle ABD$与$\triangle CDB$中，已知$\angle A=\angle C$，再添加一个什么条件，就可以判定$\triangle ABD$与$\triangle CDB$全等？

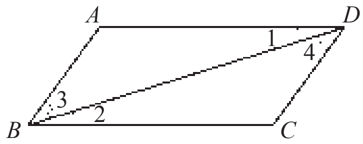


图 1–15

解　由已知$\angle A=\angle C$，再添加$\angle 1=\angle 2$（或$\angle 3=\angle 4$），就可以判定$\triangle ABD$与$\triangle CDB$全等. 理由是：

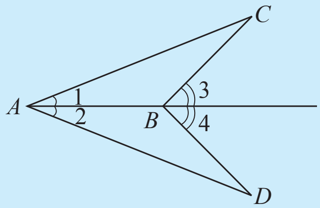
在$\triangle ABD$与$\triangle CDB$中，因为$\angle A=\angle C$，$\angle 1=\angle 2$（或$\angle 3=\angle 4$），BD分别是$\angle A$与$\angle C$的对边，又是$\triangle ABD$与$\triangle CDB$的公共边，$BD=DB$，由 AAS，所以$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

挑战自我

小亮在学习了全等三角形的判定方法 2 和判定方法 3 后，他发现在这两个判定方法的条件中，相等的边可以是“两等角的夹边”，也可以是“一组等角的对边”，于是，他认为可以把这两个判定方法概括成“满足两角及一边分别相等的两个三角形全等”. 你同意他的意见吗？如果不同意，请举例说明.

练 习

1. 在图 1–8 ①④ 中，$\angle B=\angle B'''$，$\angle C=\angle C'''$，你能适当添加一个条件，使$\triangle ABC\cong\triangle A'''B'''C'''$吗？你有几种不同的添加方式？说明理由.
2. 如图，已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\triangle ABC$与$\triangle ABD$全等吗？为什么？



（第 2 题）

如果两个三角形的三条边分别相等，这两个三角形全等吗？

实验与探究

（1）用三根木条制作一个三角形的架子（图 1–16），再用四根木条钉一个四边形的架子（图 1–17①）. 分别拉动这两个架子的边框，你有什么发现？

三角形的架子由于它的三条边的长度固定，三个角的大小也随之固定，因此它的形状、大小没有发生变化. 但四边形的架子虽然它的四条边的长度固定了，

但它的四个角的大小并没能随之固定. 因而拉动边框时，它的形状、大小可以改变（图 1−17②）.

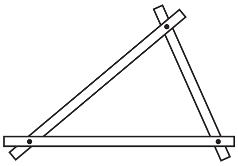
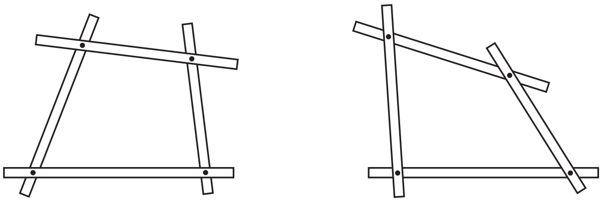


图 1−16

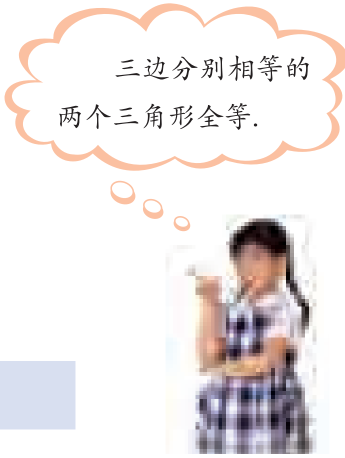


①　②

图 1−17

（2）如果再取与图 1−16 中的三根木条分别相等的木条，再制作一个三角形的架子，这两个三角形架子的形状、大小相同吗？如果把其中一个三角形架子叠放在另一个三角形架子上，它们能重合吗？

（3）通过这个实验，你能得出什么结论？



判定方法4　三边分别相等的两个三角形全等.

这个判定方法通常简写成“边边边”或“SSS”.

三角形的三条边的长度确定后，它的形状和大小就被确定了. 三角形的这种特性叫做**三角形的稳定性**. 而四边形的四条边的长度确定后，它的形状大小不能确定. 四边形的这种特性，叫做**四边形的不稳定性**.

三角形的稳定性和四边形的不稳定性在生活及生产实际中都很有用处. 如在盖房子时，为了使木门框在砌墙的过程中不容易变形，先在门框上斜着钉上木条（图 1−18）. 自行车的车架（图 1−19）、斜拉式大桥的架构（章头图）等都采用三角形结构，也是这个道理. 而电动推拉门（图1−20）的原理则应用了四边形的不稳定性.

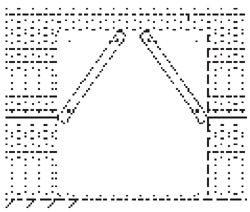


图 1−18

图 1−19

图 1−20　电动推拉门

例5　如图 1–21，已知 $AD = CB$，$AB = CD$. 那么 $\angle A = \angle C$ 吗？为什么？

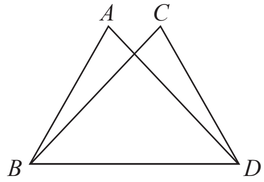


图 1–21

解　$\angle A = \angle C$. 理由是：

因为 $AD = CB$，$AB = CD$，$BD = DB$，由 SSS，所以 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. 因此，$\angle A$ 与 $\angle C$ 相等.

例6　如图 1–22，已知 $AB = ED$，$BC = DF$，$AE = CF$.

（1）AC 与 EF 相等吗？

（2）指出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDF$ 中互相平行的边，并说明理由.

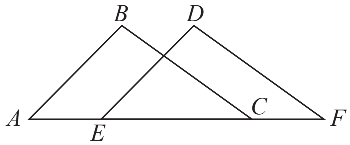


图 1–22

解　（1）因为 $AE = CF$，所以

$$AE + EC = CF + EC，从而 \quad AC = EF .$$

（2）$AB \parallel ED$，$BC \parallel DF$. 理由是：

因为 $AB = ED$，$BC = DF$，$AC = EF$，由 SSS，所以 $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

于是 $\angle A = \angle DEF$，$\angle ACB = \angle EFD$，所以 $AB \parallel ED$，$BC \parallel DF$.

通过实验和探究，我们知道，判定两个三角形全等，除了用定义以外，还有四个判定方法. 你发现这四个判定方法有什么共同特点？与同学交流.

在两个三角形中，已知两个三角形的六对元素中的下列三对元素分别相等，即 SAS，ASA，AAS，SSS，就可判定它们全等. 但并不意味着两个三角形中的任意三对元素分别相等，就能保证这两个三角形全等. 例如图 1–23，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$AC = A'C'$，$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$，但 $\angle A \neq \angle A'$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不可能完全重合. 显然它们不全等. 另外，本章第 13 页“挑战自我”中提出的问题，也是不能保证两个三角形全等的例子. 三个角分别相等的两个三角形全等吗？画出图形，试一试.

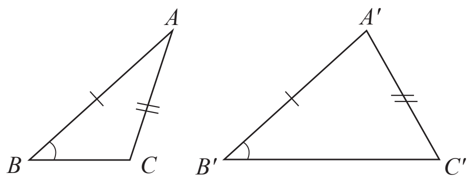


图 1–23

判定两个三角形全等的条件，也是确定一个三角形的条件. 这就是说，如果一个三角形两边及其夹角，两角及其夹边，两角及其中一角的对边或三边确定后，那么这个三角形的形状和大小也就完全确定了.

练 习

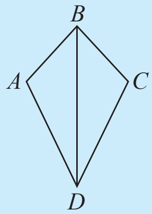
1. （1）底边及一腰分别相等的两个等腰三角形全等吗？为什么？

（2）两腰分别相等的两个等腰三角形全等吗？为什么？

（3）一边相等的两个等边三角形全等吗？为什么？

2. 如图，已知 $AB = CB$，$AD = CD$．$\angle A$ 与 $\angle C$ 相等吗？为什么？

3. 举出应用三角形稳定性和四边形不稳定性的实例.



（第 2 题）

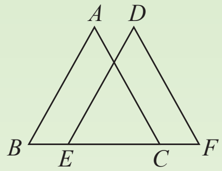
习题1.2

复习与巩固

1. 如图，$AC = DF$，$AC \parallel DF$，$BE = CF$．

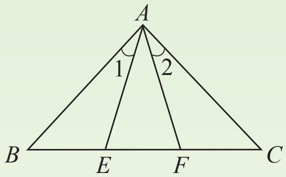
（1）BC 与 EF 相等吗？为什么？

（2）$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是否全等？为什么？



（第 1 题）

2. 如图，已知点 E、F 在 BC 上，$AF = AE$，$\angle 1 = \angle 2$，$BA = CA$. $\triangle AFB$ 与 $\triangle AEC$ 是否全等？为什么？

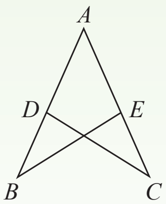


（第 2 题）

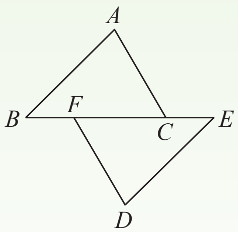
3. 如图，已知 $\angle B = \angle C$，$AB = AC$．$\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 是否全等？为什么？

4. 如图，已知点 B，F，C，E 在同一条直线上，$BC = EF$，$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是否全等？为什么？

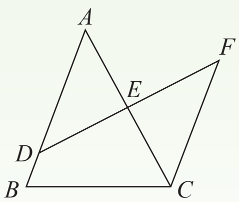
5. 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE = FE$，$FC \parallel AB$. $\triangle ADE$ 与 $\triangle CFE$ 是否全等？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）



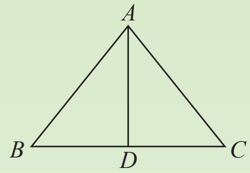
（第 5 题）

6. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，具备下列条件中的哪三个条件就能保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$？

① $AB = A'B'$；　② $BC = B'C'$；　③ $AC = A'C'$；

④ $\angle A = \angle A'$；　⑤ $\angle B = \angle B'$；　⑥ $\angle C = \angle C'$.

7. 如图，$AB=AC$，AD为$\triangle ABC$的BC边上的中线，$\triangle ABD$与$\triangle ACD$全等吗？为什么？

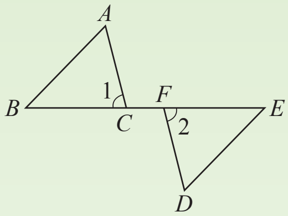


（第 7 题）

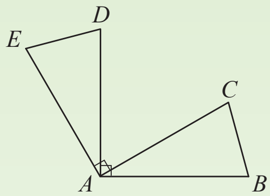
拓展与延伸

8. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$BC=EF$. 需要添加一个怎样的条件，才能使$\triangle ABC\cong\triangle DEF$？

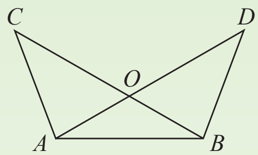
9. 如图，已知$DA\perp AB$，$EA\perp AC$，且$DA=BA$，$EA=CA$，$\triangle ADE$与$\triangle ABC$全等吗？为什么？



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

（1）指出这两个三角形中相等的边和相等的角；

（2）$\triangle OAC$与$\triangle OBD$全等吗？为什么？

探索与创新

11. 如图，已知$AB\perp AC$，$AB=AC$，DE过点A，且$CD\perp DE$，$BE\perp DE$，垂足分别为点D，E.

（1）$\angle DCA$与$\angle EAB$相等吗？说明理由；

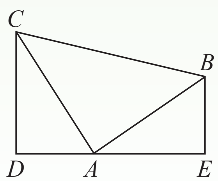
（2）$\triangle ADC$与$\triangle BEA$全等吗？说明理由.

12. 如图，在四边形$ABCD$中，$CD/\!/AB$，

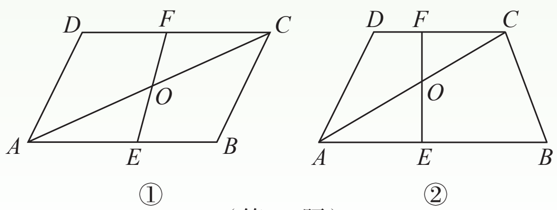
（1）如果$AB=CD$（图①），能判定$\triangle ABC$与$\triangle CDA$全等吗？为什么？

（2）如果$AD=BC$，但$AB\neq CD$（图②），能判定$\triangle ABC$与$\triangle CDA$全等吗？为什么？

（3）如果O是AC的中点，EF过点O分别交AB，CD于点E，F. 不论是否有$AB=CD$，$\triangle COF$与$\triangle AOE$全等吗？为什么？



（第 11 题）



（第 12 题）

1.3　尺规作图

交流与发现

（1）在七年级上册我们学习过“用直尺和圆规作一条线段，使它等于已知线段”. 如图 1–24，已知线段 a，回忆一下，你是怎样用不带刻度的直尺和圆规作出线段 $AB = a$ 的？做一做.

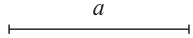


图 1–24

（2）你能说明上面作图的道理吗？与同学交流.

用直尺作射线 AC，以点 A 为圆心，线段 a 为半径画弧，可以作出弧与射线 AC 的交点 B，因为这条弧上的所有点到点 A 的距离都等于 a 的长，所以 $AB = a$. 因此线段 AB 即为所求作的线段.

（3）再用刻度尺画一条线段使它等于已知线段 a，比较你先后得到的两条线段，你认为用哪种方式绘制的图形是精确的，哪种方式是近似的？

研究几何图形，就离不开画图. 人们发现利用刻度尺、量角器等工具所绘制的图形都只能是近似的. 为了精确作图，古代数学家提出了在画几何图形时，只允许用直尺（没有刻度）和圆规这两种工具的限制. 这一类问题，叫做**尺规作图**（construction with ruler and compasses）.

在尺规作图时，用直尺可以作经过任意一点的直线；也可以以任意一点为端点作射线；用直尺连接两个点可以作一条线段；可以作经过这两点的直线；可以以其中一点为端点作经过另一点的射线；也可以用直尺把线段向两个方向任意延长. 以任一点为圆心，以任意长为半径，用圆规可以作一个圆或一段弧. 直尺和圆规交替使用，可以解决许多几何作图问题. 上面（1）中的“用直尺和圆规作一条线段，使它等于已知线段”，就是一个范例.

（4）如图 1–25，已知 $\angle AOB$，你能用直尺和圆规作一个角 $\angle A'O'B'$，使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 吗？

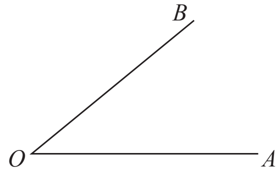


图 1–25

要作$\angle A'O'B'=\angle AOB$，就要设法利用直尺和圆规将$\angle AOB$放到一个三角形中，使它成为三角形的一个内角，然后再利用直尺和圆规作出一个与它所在的三角形全等的三角形，该三角形中$\angle AOB$的对应角，就是所求作的角.

已知：$\angle AOB$（图1–25）.

求作：$\angle A'O'B'$，使$\angle A'O'B'=\angle AOB$.

作法 ① 任取一点O'，作射线$O'A'$；

② 以点O为圆心，以任意长为半径作弧，交OA于点C，交OB于点D（图1–26①）；以点O'为圆心，以OC为半径作弧，交射线$O'A'$于点C'（图1–26②）；

③ 以点C'为圆心，以CD为半径作弧，与前弧交于点D'（图1–26③）；

④ 过点D'作射线$O'B'$.

$\angle A'O'B'$就是所求作的角（图1–26④）.

（5）你能说出$\angle A'O'B'=\angle AOB$的理由吗？与同学交流.

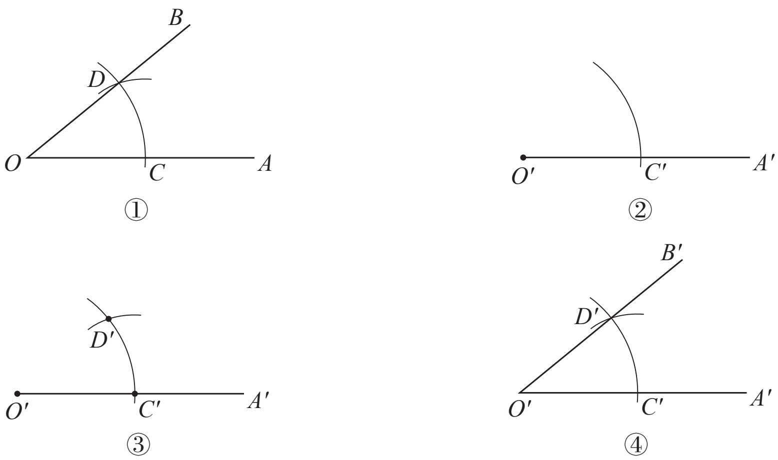
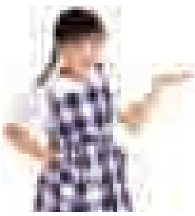


图 1–26



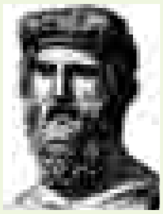
在图1–26①与④中，分别连接CD与$C'D'$. 由SSS可知，$\triangle COD\cong\triangle C'O'D'$，所以$\angle A'O'B'=\angle AOB$.

最基本、最常用的尺规作图，称为基本作图. “作一条线段等于已知线段”和“作一个角等于已知角”都是基本作图.[1]

[1] 本教科书中的基本作图共有5种，另外三种基本作图将在本册第2章中给出.

史海漫游

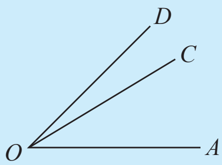
尺规作图


柏拉图

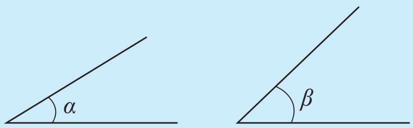
早在公元前 5 世纪左右，古希腊的数学家们就提出了尺规作图问题，即几何作图只允许使用任意开度的圆规和无刻度的、任意长的直尺. 古希腊数学家、哲学家、教育学家柏拉图（Plato，公元前 427 年－前 347 年）也主张几何作图的工具应只限于尺规，他认为用其他工具作图很难达到训练抽象思维的目的. 由于这种限制，产生了著名的几何作图三大问题：三等分角问题、倍立方体问题、化圆为方问题. 两千多年来，一代又一代的数学家们曾为解决这三大问题绞尽脑汁，伤透脑筋，但都不得其解. 直至19世纪才有人证明了这三个问题都是尺规作图的不可能问题，即不可能有限次地使用尺规画出符合要求的图形. 但是历史上对这些问题的探究，也推动了数学的进步和发展，开创了许多新的数学理论.

练 习

1. 如图，在$\angle AOD$的内部作射线OB，使$\angle AOB=\angle COD$[1].
2. 如图，已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$，求作$\angle\gamma$，使$\angle\gamma=\angle\alpha+\angle\beta$.



（第 1 题）



（第 2 题）

实验与探究

（1）如图 1-27，$\triangle ABC$中有六个元素，只要已知其中的哪几个元素就可作出这个三角形呢？与同学交流.

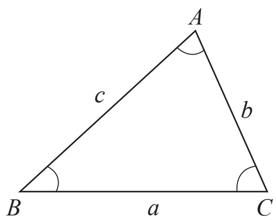


图 1-27

[1] 本书练习、习题中所有作图题，只保留作图痕迹，不要求写出作法.

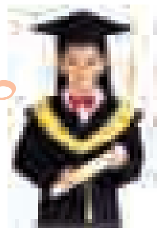
知道$\triangle ABC$的六个元素中的某三个元素，根据确定三角形的条件，以下四种情况可作出$\triangle ABC$：

① 已知三边；

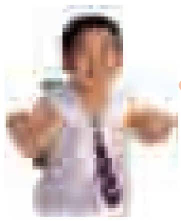
② 已知两边及其夹角；

③ 已知两角及其夹边；

④ 已知两角和其中一角的对边.

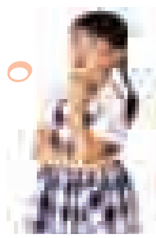


（2）利用你学过的基本作图，已知三边分别为 a，b，c（图 1–28），如何作三角形？与同学交流.



利用基本作图 1，可以先作出一条线段，例如$BC = a$，这样便确定了所求作的三角形的两个顶点B，C，如何确定第三个顶点A呢？

第三个顶点到点B的距离是c，到点C的距离是b，所以它既在以点B为圆心，以c为半径的圆上，又在以C为圆心，以b为半径的圆上，两圆的交点便是第三个顶点A.



已知：线段 a，b，c（图 1–28）.

求作：$\triangle ABC$，使 $BC = a$，$AB = c$，$AC = b$.

作法　如图 1–29.

① 作线段 $BC = a$；

② 分别以B，C为圆心，以c，b为半径在BC的同侧作弧，记两弧的交点为A；

③ 连接AB，AC.

$\triangle ABC$就是所求作的三角形.

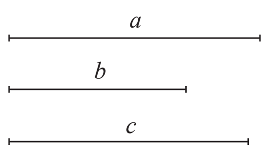


图 1–28

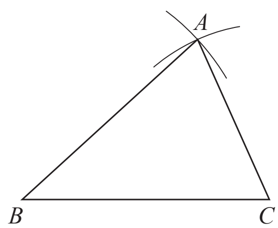
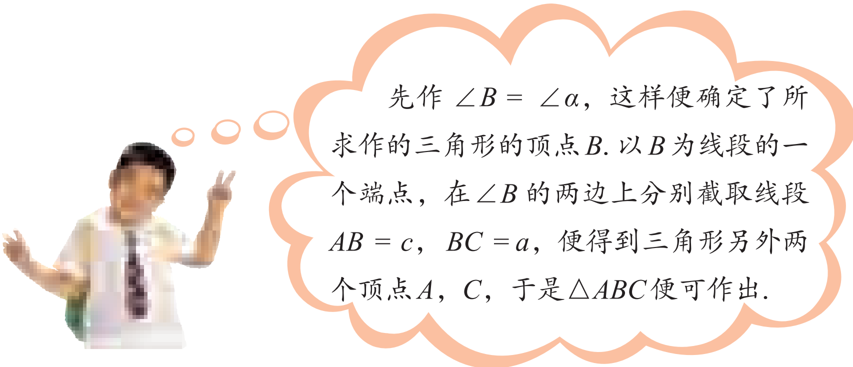


图 1–29

（3）图 1–29 是以 B，C 为圆心，c，b 为半径作弧在 BC 所在直线的上方相交的情况，是否可能在 BC 所在直线的下方相交？如果可能，所得到的三角形与$\triangle ABC$全等吗？为什么？

（4）利用你学过的基本作图，已知两边及其夹角，例如已知 a，c 和 $\angle\alpha$（图 1–30），如何作 $\triangle ABC$，使 $\angle B=\angle\alpha$，$AB=c$，$BC=a$ 呢？与同学交流.



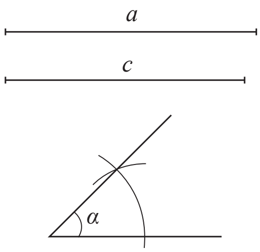


图 1–30

已知：线段 a，c，$\angle\alpha$（图 1–30）.

求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$\angle B=\angle\alpha$，$AB=c$.

作法　如图 1–31.

① 作 $\angle B=\angle\alpha$；

② 在 $\angle B$ 的一边上截取 $BC=a$，在另一边上截取 $BA=c$；

③ 连接 AC.

$\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.

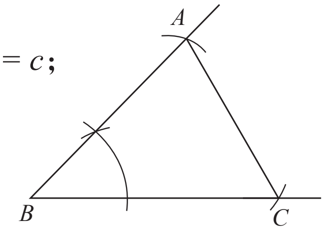


图 1–31

（5）在上面的作图步骤中，分别用到了哪些基本作图？

挑战自我

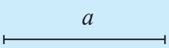
已知三条线段 a，b，c，作 $\triangle ABC$，使 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$ 时，对 a，b，c 三条线段的大小有没有限制？如果有，a，b，c 的大小应当满足什么条件？

练 习

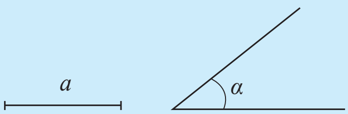
利用尺规作图：

1. 如图，已知线段 a，求作边长等于 a 的等边三角形.

2. 如图，已知线段 a，$\angle\alpha$，求作 $\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle\alpha$，$AB=AC=a$.



（第 1 题）

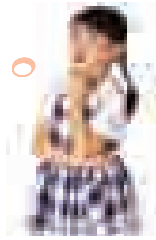


（第 2 题）

实验与探究

（1）利用基本作图，已知两角及它们的夹边，例如已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$和线段a（图1-32），如何作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle\beta$，$BC=a$呢？与同学交流.

利用基本作图1，先作线段$BC=a$，便确定了三角形的两个顶点B，C. 然后分别以B，C为角的顶点，BC（或CB）为一边，在BC同侧分别作角，使它们分别等于$\angle\alpha$，$\angle\beta$，两角的另一边的交点就是三角形的第三个顶点A.



已知：$\angle\alpha$，$\angle\beta$，线段a（图1-32）.

求作：$\triangle ABC$，使$BC=a$，$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle\beta$.

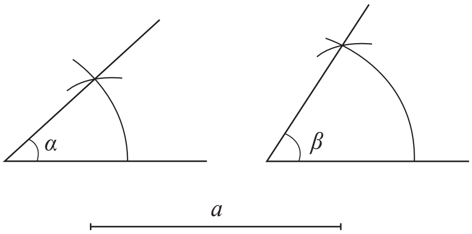


图1-32

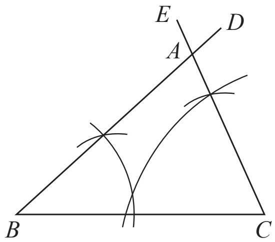


图1-33

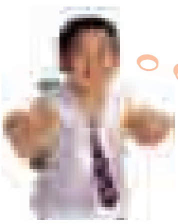
作法　如图1-33.

① 作线段$BC=a$；

② 在BC的同侧作$\angle CBD=\angle\alpha$，$\angle BCE=\angle\beta$，记BD与CE的交点为A.

$\triangle ABC$就是所求作的三角形.

（2）利用基本作图，如果已知两角及其中一角的对边，例如已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$和线段c，如何作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle\beta$，$AB=c$？与同学交流.



假设$\triangle ABC$已经作出（图1-34），其中$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle\beta$，$AB=c$，根据三角形内角和的性质，那么$\angle A=180°-(\angle\alpha+\angle\beta)$. 而且$c$是$\angle A$和$\angle B$的夹边.

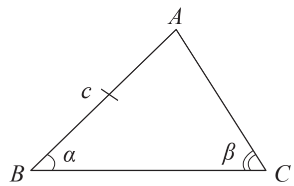


图1-34

由已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$，利用尺规可以作出$\angle A=180^\circ-(\angle\alpha+\angle\beta)$，于是问题就转化成已知两角及其夹边作三角形的问题了.

（3）请你用尺规完成（2）中的作图.

挑战自我

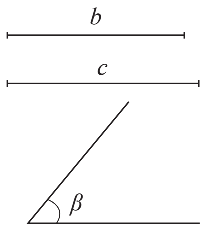
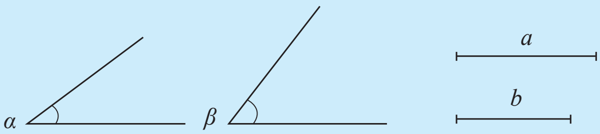


图 1–35

已知两边及其中一边的对角，例如已知$\angle\beta$，线段b和c（图 1–35）. 能作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\beta$，$AB=c$，$AC=b$吗？如果能作，可以作出几个满足上述条件的不同的三角形？

练 习

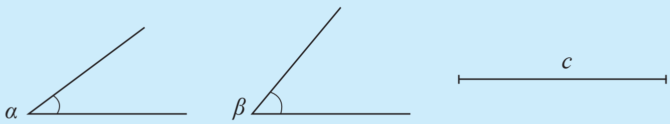
1. 如图，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$，线段a，b，求作：$\triangle ABC$，使$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$，$AB=a+b$.



（第 1 题）

2. 完成第 23 页（2）的作图：

   如图，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$和线段c，求作：$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=\angle\beta$. $AB=c$.



（第 2 题）

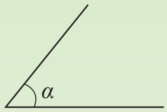
习题1.3

复习与巩固

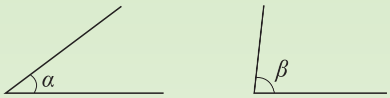
利用尺规，完成下列作图：

1. 如图，已知$\angle\alpha$是一个锐角，求作：$\angle\beta$，使$\angle\beta=2\angle\alpha$.

2. 如图，已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$，求作：$\angle\gamma$，使$\angle\gamma=\angle\beta-\angle\alpha$.



（第 1 题）



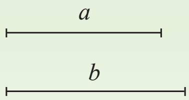
（第 2 题）

3. 如图，已知线段a，b，求作：$\triangle ABC$，使$AB=AC=a$，$BC=b$.

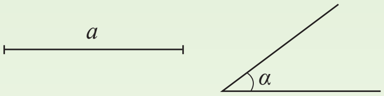
4. 如图，已知$\angle\alpha$，线段a.

（1）求作：$\triangle ABC$，使$BC=a$，$\angle B=\angle C=\angle\alpha$；

（2）求作：$\triangle ABC$，使$AB=AC=a$，$\angle B=\angle\alpha$.



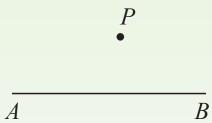
（第 3 题）



（第 4 题）

拓展与延伸

5. 如图，已知直线AB和直线AB外的一点P. 你能利用尺规过点P作直线CD，使$CD/\!/AB$吗？试一试.

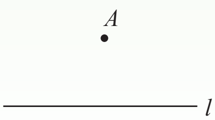


（第 5 题）

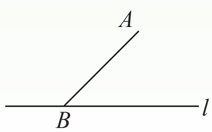
探索与创新

6.（1）如图，已知直线l及l外一点A. 求作等腰三角形ABC，使底边BC在直线l上. 你能作出几个满足条件的三角形？

（2）如图，已知直线l上的一点B及l外一点A，求作等腰三角形ABC，使它的腰为AB，顶点C在l上. 你能作出几个满足条件的三角形？



（第 6（1）题）



（第 6（2）题）

回顾与总结

1. 本章学习的主要内容是什么？总结一下，与同学交流.
2. 什么叫全等形？两个图形的全等，与它们的位置有关吗？
3. 什么是全等三角形？什么是全等三角形的对应顶点、对应边、对应角？举例说明.

4. 判定两个三角形全等，除按照定义外，可以从三角形的六个元素中，根据其中的某三对元素分别相等加以判定. 有4个判定方法，分别是：

判定方法1：________________________；

判定方法2：________________________；

判定方法3：________________________；

判定方法4：________________________.

5. 在什么情况下，由两个三角形的三对元素分别相等不能判定这两个三角形全等？

6. 什么是尺规作图？你学过了哪两种基本作图？如何利用基本作图根据已知三边、两边及其夹角或两角及其夹边作三角形？

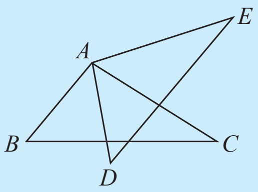
综合练习

复习与巩固

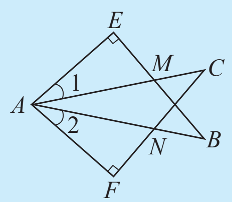
1. 填空：

（1）如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle ADE$. 则图中与$AB$相等的线段是________；如果$\angle BAE = 135°$，$\angle BAD = 40°$，那么$\angle BAC =$________°.

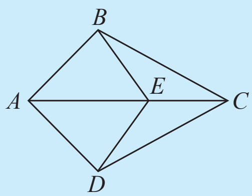
（2）在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle A = \angle A'$，$AB = A'B'$，要使$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，应添加的条件是____________.



（第1（1）题）



（第2题）



（第3题）

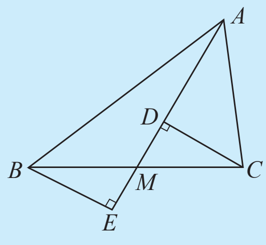
2. 如图，$AE \perp BE$，$AF \perp CF$，$\angle B = \angle C$，$AE = AF$.

（1）BE与CF相等吗？为什么？

（2）$\angle 1$与$\angle 2$相等吗？为什么？

（3）$\triangle ACN$与$\triangle ABM$全等吗？为什么？

3. 填空：如图，已知$AB = AD$，$BC = DC$. 图中共有________对全等三角形，它们分别是________________________.



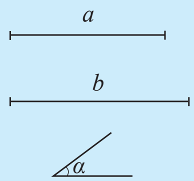
（第4题）

4. 如图，M为$\triangle ABC$的边BC的中点，$CD \perp AM$，$BE \perp AM$，

垂足分别为点 D 和点 E. BE 和 CD 相等吗？为什么？

5. 如图，已知线段 a，b，$\angle\alpha$.

求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AB=b$，$\angle B=2\angle\alpha$.



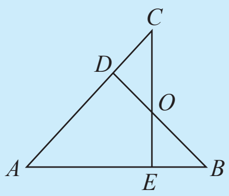
（第 5 题）

拓展与延伸

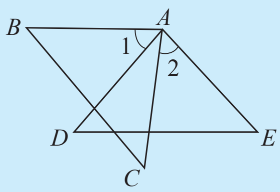
6. 如图，由 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，能判定 $\triangle OBE\cong\triangle OCD$ 吗？为什么？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，已知 $AB=AD$，$\angle 1=\angle 2$. 再添加一个什么条件，可使 $\triangle ABC\cong\triangle ADE$？说明理由.

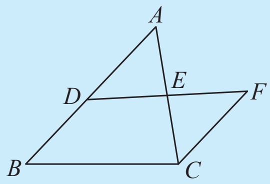
8. 如图，已知 $AB/\!/FC$，点 E 是 DF 的中点. $AB=15$，$CF=8$，求 BD 的长.



（第 6 题）



（第 7 题）



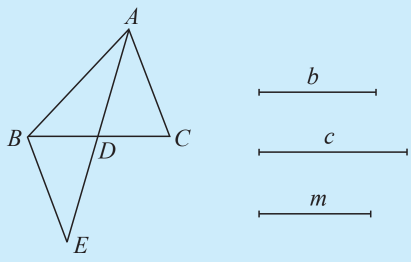
（第 8 题）

探索与创新

9.（1）如图①，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，点 E 在 AD 的延长线上，且 $AD=DE$. $\triangle ACD$ 与 $\triangle EBD$ 全等吗？为什么？

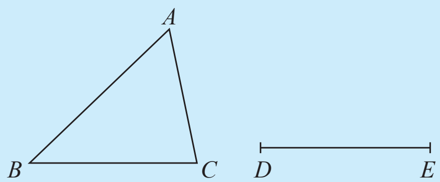
（2）已知线段 b，c，m（图②），求作：$\triangle ABC$，使 $AC=b$，$AB=c$，BC 边上的中线 $AD=m$.

10. 如图，已知 $\triangle ABC$，作 $DE=BC$. 再以 DE 为边，作出所有与 $\triangle ABC$ 全等的三角形，这样的三角形可以作几个？



①　　②

（第 9 题）



（第 10 题）

第 2 章　图形的轴对称

内容提要

- 图形的轴对称
- 轴对称的基本性质
- 轴对称图形
- 线段垂直平分线及其性质
- 角平分线的性质
- 等腰三角形的性质和判定
- 等边三角形的性质和判定
- 三种基本作图

情境导航

我国是一个多民族的国家，有56个民族. 北京中华世纪坛的主体外立墙上饰刻着代表56个民族的56幅精美浮雕，下面是其中的6幅. 观察这些图案，思考下面的问题：

（1）这6幅民族图案在设计和布局方面有什么特点?

（2）如果不考虑图中的汉字，在这6幅民族图案中，哪些是轴对称图形? 你能画出它的对称轴吗?

2.1　图形的轴对称

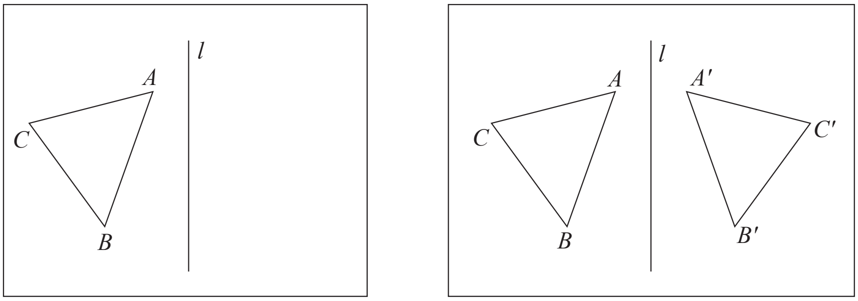
过去我们已经认识了轴对称现象. 你能举出生活中轴对称现象的例子吗?

实验与探究

（1）如图 2−1 ①，在纸上画出△ABC 与一条直线 l，你能以直线 l 为折痕，通过折叠，得到一个与△ABC 全等的三角形吗？试一试.

把△ABC 沿直线 l 折叠. 然后在△ABC 的顶点 A，B，C 处用大头针各扎出一个小孔. 将纸展开，这时相应地得到了三个小孔. 把与点 A，B，C 对应的小孔分别记作 A'，B'，C'. 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，便得到△$A'B'C'$（图 2−1 ②）.

（2）你发现△$A'B'C'$ 与△ABC 全等吗？为什么？



①　　②

图 2−1

（3）如图 2−2，在纸上作出一条直线 l，在 l 的一侧画出五角星图案. 你能以直线 l 为折痕，用折叠的方法，得到一个与它全等的五角星吗？

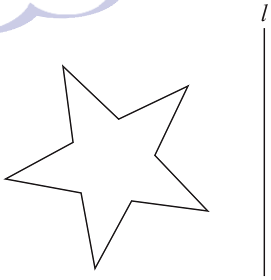


图 2−2

把一个图形沿某条直线折叠后，得到另一个与它全等的图形，图形的这种变化叫做**轴对称**（axis symmetry）. 这条直线叫做**对称轴**（axis of symmetry）.

加油站

几何的研究对象不仅是图形，还包括对图形变化的研究.

（4）观察图 2−3 ① 中的两个图案，把其中一个图案以直线 l 为对称轴，经过轴对称后，能与另一个图案重合吗？图 2−3 ②、图 2−3 ③ 呢？

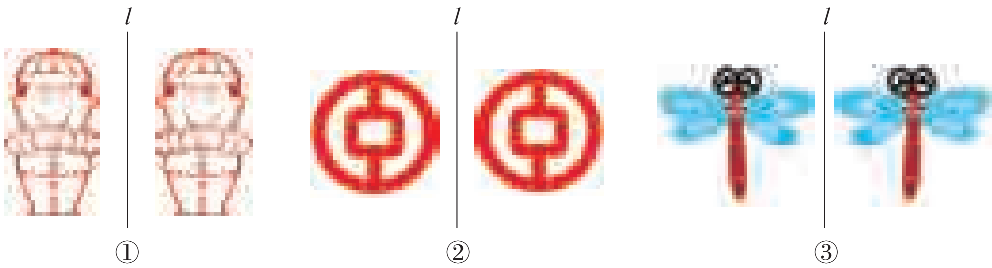


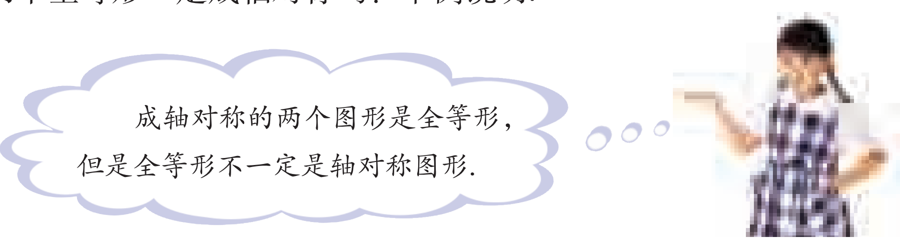
图 2−3

一个图形以某条直线为对称轴，经过轴对称后，能够与另一个图形重合，就说这**两个图形关于这条直线成轴对称**，重合的点叫做**对应点**. 特别地，如果两个点关于一条直线成轴对称，其中一个点叫做另一个点关于这条直线的**对称点**（symmetric points）.

在图 2−3 ①②③ 中的两个图案，都分别关于图中的直线 l 成轴对称. 在图 2−1 ② 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 成轴对称，直线 l 是对称轴，点 A，B，C 的对应点分别是 A'，B'，C'；点 A'，B'，C' 的对应点分别是 A，B，C.

（5）成轴对称的两个图形一定全等吗？为什么？

（6）两个全等形一定成轴对称吗？举例说明.



例1 如图 2−4，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 关于直线 l 成轴对称. 如果 $DE = 3\,\text{cm}$，$\angle A = 75°$，$\angle E = 43°$，求 AB 的长与 $\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle F$ 的度数.

解　因为$\triangle ABC$与$\triangle DEF$关于直线l成轴对称，所以$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

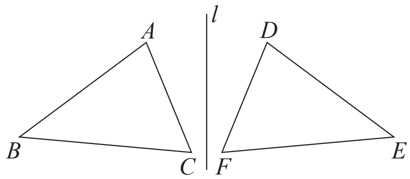


图 2–4

由已知$DE = 3\,\text{cm}$，$\angle A = 75°$，$\angle E = 43°$，因为AB与DE是对应边；$\angle A$与$\angle D$，$\angle B$与$\angle E$，$\angle C$与$\angle F$分别是对应角，所以

$$AB = DE = 3\,\text{cm}，\angle B = \angle E = 43°，\angle D = \angle A = 75°.$$

又因为三角形的内角和为$180°$，所以

$$\angle C = \angle F = 180° - 75° - 43° = 62°.$$

挑战自我

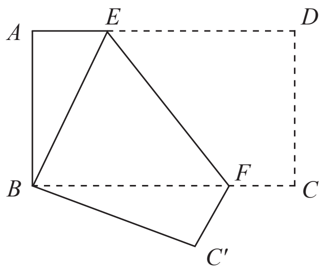


图 2–5

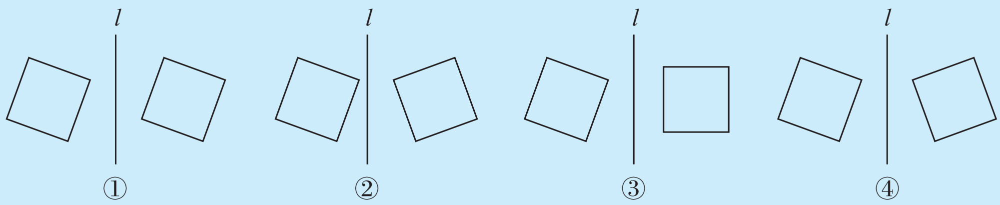
如图 2–5，将长方形纸片$ABCD$折叠. 使点D与点B重合，点C落到点C'处，折痕为EF.

（1）指出图中关于直线EF成轴对称的图形；

（2）已知$\angle EFC' = 125°$，求$\angle ABE$的度数.

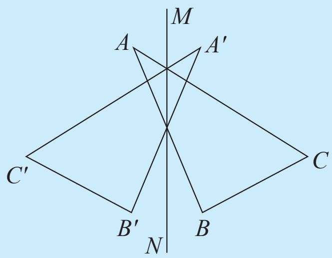
练 习

1. 下列图中各有两个正方形，它们是关于直线l成轴对称的图形吗?



（第 1 题）

2. 如图，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线MN成轴对称. 指出它们的对应顶点，并找出三对相等的边和相等的角.

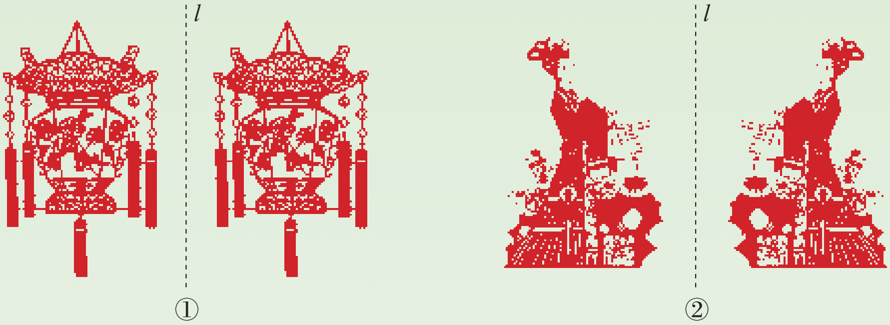


（第 2 题）

习题2.1

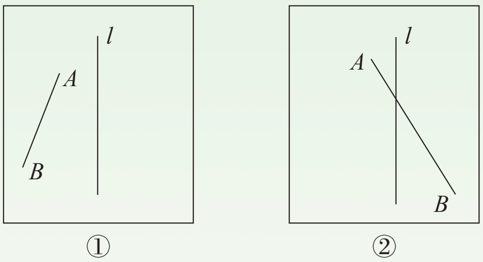
复习与巩固

1. 如图，观察①与②中的两幅图案，它们是关于直线 l 成轴对称的图形吗？



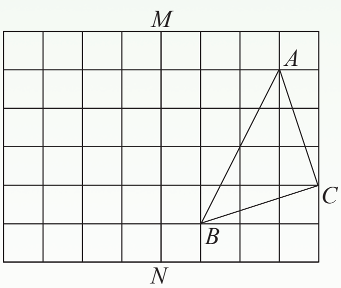
（第 1 题）

2. 如图①②，先在纸上分别作出直线 l 与线段 AB. 再把纸沿直线 l 折叠，用扎孔的方法作出与线段 AB 关于直线 l 成轴对称的图形.

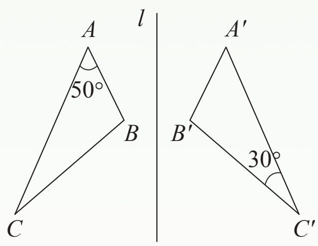


（第 2 题）

3. 在如图所示由边长相等的小正方形组成的网格中，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，试在网格中作出 $\triangle ABC$ 关于直线 MN 成轴对称的 $\triangle A'B'C'$.



（第 3 题）

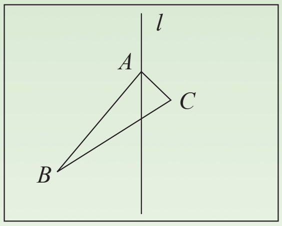


（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 成轴对称. 已知 $\angle A = 50°$，$\angle C' = 30°$，$\angle B$ 的度数是多少？

拓展与延伸

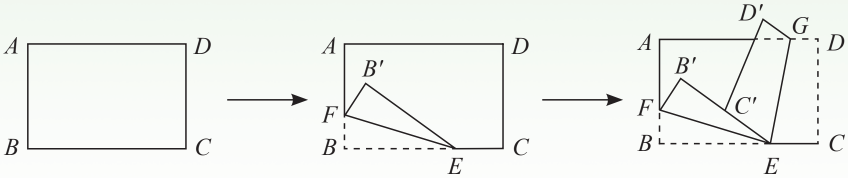
5. 如图，在纸上作出△ABC及直线l. 利用扎孔的方法作出△ABC关于直线l成轴对称的图形.



（第 5 题）

探索与创新

6. 如图，取一张长方形纸片 $ABCD$，按图中所示的方式将纸片折叠，EF，EG 为两条折痕，求 $\angle GEF$ 的度数.



（第 6 题）

2.2　轴对称的基本性质

实验与探究

（1）把一张纸片对折（图 2-6 ①），扎一个小孔（图 2-6 ②），然后展开铺平. 记得到的两个小孔为点 A 与 A'，折痕为 MN（图 2-6 ③）. 连接 AA' 交 MN 于点 O（图 2-6 ④）.

（2）如果将纸片沿 MN 重新折叠，你发现线段 OA 与 OA' 有怎样的大小关系？线段 AA' 与直线 MN 有怎样的位置关系？说明理由.

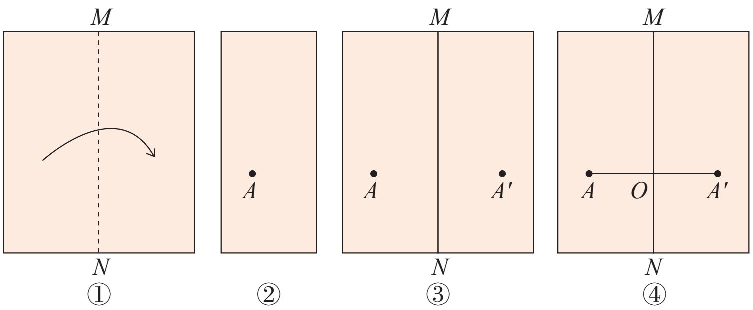
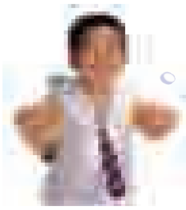


图 2-6



$OA=OA'$,

$AA'\perp MN$.

将纸片沿直线 MN 对折后，点 A 与 A' 重合，O 与自身重合，所以 OA 与 OA' 重合，$\angle MOA$ 与 $\angle MOA'$ 重合，因此 $OA=OA'$，且 $\angle MOA+\angle MOA'=180°$，所以 $\angle MOA=\angle MOA'=90°$，即 $MN\perp AA'$.

（3）把一张纸对折后扎出三个不在同一条直线上的小孔，把纸展开铺平，把得到的三对对应点分别记为 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C'. 折痕记为 MN. 分别连接 AB，BC，CA，$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$（图 2-7），在 $\triangle ABC$ 的一条边上任取一点 D，你能说出与点 D 关于直线 MN 成轴对称的点 D' 的位置吗？用扎孔的方法验证你的结论.

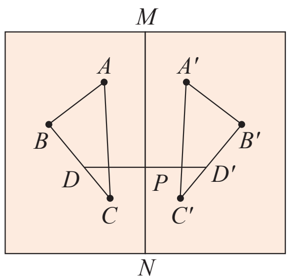


图 2-7

（4）连接 DD'，交 MN 于点 P. 你发现线段 DD' 与直线 MN 具有怎样的位置关系？说明理由.

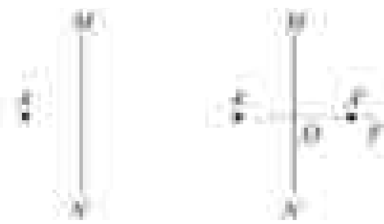
由以上实验，得到轴对称的基本性质：

成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分.

交流与发现

（1）如图 2-8 ①，在纸上作一条直线 MN，再在直线 MN 的一侧取一点 A，你能利用轴对称的性质，画出点 A 关于直线 MN 的对称点吗？与同学交流.

如图 2-8 ②，过点 A 画直线 MN 的垂线 AF，设垂足为点 O. 在 OF 上截取 $OA'=OA$. 点 A' 就是所要求画的点 A 关于直线 MN 的对称点.



① ②

图 2-8

（2）你能说明（1）中画一个已知点关于给定直线的对称点的方法的道理吗？

（3）如图 2-9，你能画出与线段 AB 关于直线 l 成轴对称的线段吗？能画出与直线 AB 关于直线 l 成轴对称的直线吗？

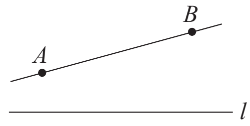


图 2-9

例1　如图 2-10，画出 $\triangle BDC$ 关于直线 l 成轴对称的图形.

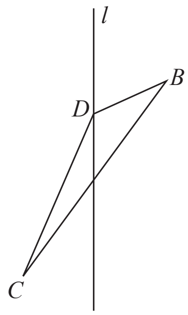


图 2-10

加油站

画一个多边形关于一条直线的轴对称图形，可以先分别画出已知多边形的各个顶点关于这条直线的对应点. 然后顺次连接它们，便得到已知多边形关于这条直线成轴对称的图形.

解　如图 2-11.

（1）过点 B 画 $BM \perp l$，垂足为点 M. 延长 BM 到 B'，使 $MB' = MB$，得到点 B 关于直线 l 的对称点 B'；

（2）用同样的方法画出点 C 关于直线 l 的对称点 C'；

（3）由于点 D 在对称轴 l 上，所以点 D 关于直线 l 的对称点是它本身. 连接 $B'C'$，$C'D$，DB'.

$\triangle B'DC'$ 就是要求画出的图形.

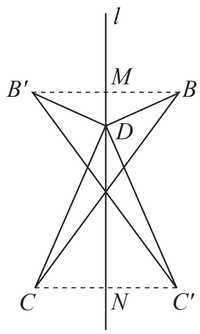
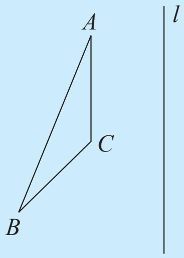


图 2-11

练　习

1. 把图 2-4 中两个三角形的对应顶点分别连接，指出哪些线段被直线 l 垂直平分.

2. 如图，画出与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称的图形.



（第 2 题）

观察与思考

（1）如图 2-12，在直角坐标系中，已知点 Q 的坐标为（4，3），画出点 Q 关于 y 轴的对称点 Q'，写出点 Q' 的坐标，你发现点 Q 与 Q' 的坐标有什么关系？利用轴对称的基本性质，说明你的理由.

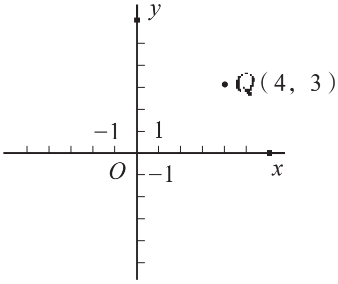


图 2-12

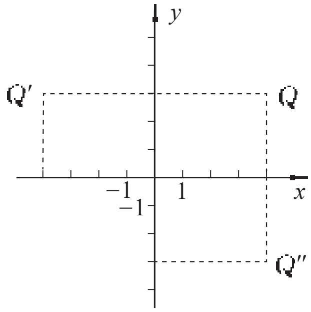
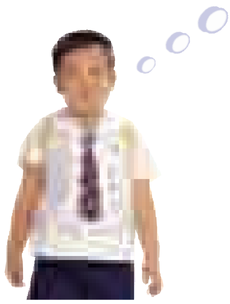


图 2-13

如图2-13，Q' 在第二象限，坐标是（-4，3）.

因为点 Q 与 Q' 关于 y 轴成轴对称，所以 y 轴垂直平分线段 QQ'，从而 QQ' 平行于 x 轴，且到 y 轴的距离相等. 所以点 Q' 与点 Q 的横坐标互为相反数，纵坐标相等.



（2）画出点 Q 关于 x 轴的对称点 Q''，写出点 Q 关于 x 轴的对称点 Q'' 的坐标. 你发现点 Q 与 Q'' 的坐标有什么关系？

（3）你能分别写出点（-1，0）关于 y 轴和 x 轴对称点的坐标吗？点（0，-1）呢？

（4）一般地，已知点 P 的坐标是（a，b），按照上面发现的规律，你能分别写出点 P 关于 y 轴的对称点 P' 和关于 x 轴的对称点 P'' 的坐标吗？

在直角坐标系中，点（a，b）关于 y 轴的对称点是（$-a$，b），关于 x 轴的对称点是（a，$-b$）.

例2　如图 2-14，在直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 $A(-2,\ 1)$，$B(1.5,\ -4)$ 和 $C(0,\ 3)$.

（1）分别写出与 $\triangle ABC$ 关于 y 轴成轴对称的 $\triangle A'B'C'$ 的顶点坐标；

（2）分别写出与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的 $\triangle A''B''C''$ 的顶点坐标；

（3）分别画出 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle A''B''C''$.

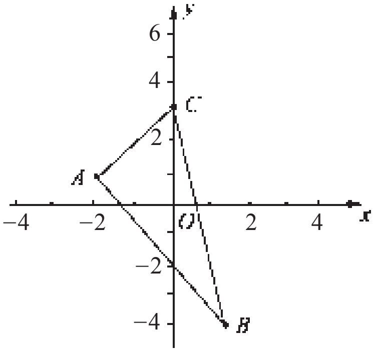
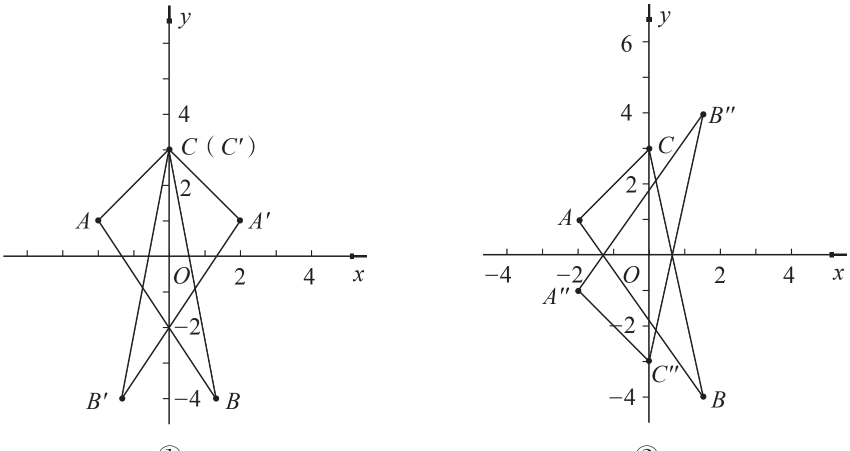


图 2-14

解　（1）与 $\triangle ABC$ 关于 y 轴成轴对称的 $\triangle A'B'C'$ 的顶点坐标分别为 $A'(2,\ 1)$，$B'(-1.5,\ -4)$，$C'(0,\ 3)$；

（2）与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的 $\triangle A''B''C''$ 的顶点坐标分别为 $A''(-2,\ -1)$，$B''(1.5,\ 4)$，$C''(0,\ -3)$；

（3）分别连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 便得到 $\triangle A'B'C'$（图 2-15①），分别连接 $A''B''$，$B''C''$，$C''A''$ 便得到 $\triangle A''B''C''$（图 2-15②）.



①　　②

图 2-15

练 习

1. 在直角坐标系中，分别写出下列各点关于 x 轴与 y 轴成轴对称的点的坐标：

   $A(2,\ 1)$，　$B(-5,\ 4)$，　$C(-4,\ -1)$，

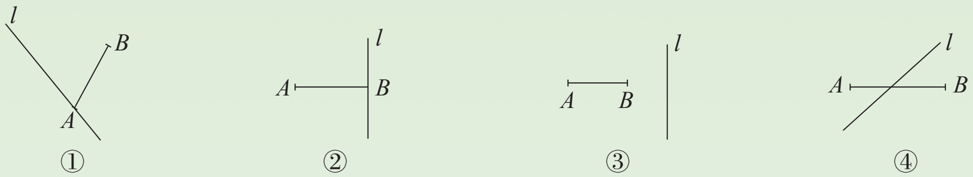
   $E(-3,\ 0)$，　$O(0,\ 0)$，　$P(a,\ -b)$.

2. 已知点 $A(a,\ 4)$ 关于 x 轴的对称点 B 的坐标为 $(-2,\ b)$，分别写出点 A，B 关于 y 轴的对称点的坐标.

习题2.2

复习与巩固

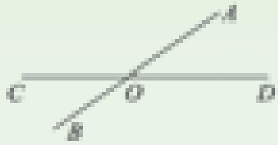
1. 如图①~④，已知线段AB和直线l，分别画出线段AB关于直线l成轴对称的图形：



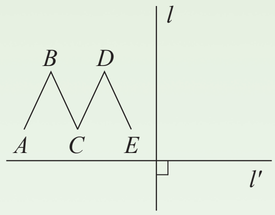
（第 1 题）

2. 如图，直线AB与CD相交于点O. 画出直线AB关于直线CD成轴对称的直线.

3. 如图，直线$l\perp$直线l'，$ABCDE$是一条“M”形折线段，分别画出$ABCDE$关于直线l和l'成轴对称的图形.



（第 2 题）



（第 3 题）

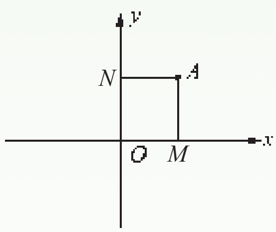
4. 如图，在直角坐标系中，四边形$OMAN$是边长为 1 的正方形. 顶点O在坐标原点，顶点M，N分别在x轴和y轴上.

（1）写出顶点A的坐标；

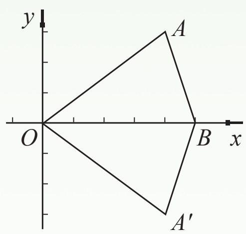
（2）分别画出点A关于y轴的对称点B，点B关于x轴的对称点C，点C关于y轴的对称点D，并写出它们的坐标；

（3）点A与点D关于哪条直线成轴对称？

（4）四边形$ABCD$是什么图形？



（第 4 题）



（第 5 题）

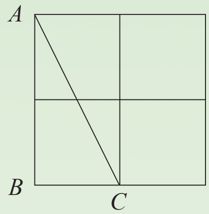
5. 在如图所示的直角坐标系中，$\triangle AOB$与$\triangle A'OB$关于x轴成轴对称，点A'的坐标是（4，-3），点B的坐标是（5，0）.

（1）写出点A的坐标；

（2）画出与四边形$AOA'B$关于y轴成轴对称的图形.

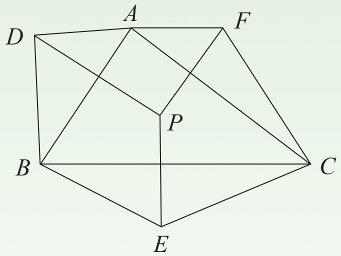
拓展与延伸

6. 如图，在 2×2 的正方形网格中，有一个以格点为顶点的 $\triangle ABC$. 请在同样大小的网格中，画出与 $\triangle ABC$ 成轴对称且以格点为顶点的不同的三角形（标出对称轴），你最多可以画出几个这样的三角形？

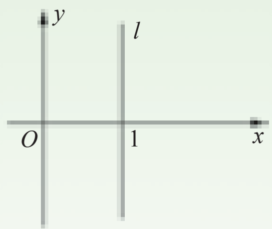


（第 6 题）

7. 如图，P 为 $\triangle ABC$ 内的一点，D，E，F 分别是点 P 关于边 AB，BC，AC 所在直线的对称点，那么 $\angle ADB+\angle BEC+\angle CFA$ 等于多少度？



（第 7 题）



（第 8 题）

探索与创新

8. 如图，在直角坐标系中，直线 l 是经过点（1，0）且平行于 y 轴的直线，解答下面的问题：

（1）求点（−1，0）关于直线 l 的对称点的坐标；

（2）求点（2，1）关于直线 l 的对称点的坐标；

（3）点 P（m，−3）与点 Q（5，n）关于直线 l 成轴对称，求 m 与 n 的值.

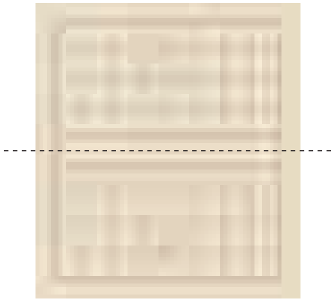
2.3　轴对称图形

观察与思考

（1）图 2−16 ① 是一幅中国象棋棋盘，如果把棋盘沿着中间的虚线对折，棋盘的上下两部分将会怎样？

每次开局之前，双方要按照规则把棋子摆放到棋盘上，如图 2−16 ②. 这些

棋子的摆放有什么规律吗？摆一摆，试试看.


①


②

图 2-16

（2）如图 2-17 是正五角星形的一部分，你能以直线 l 为对称轴，画出它的另一部分吗？观察你画出的完整的五角星形，你发现五角星形在直线 l 两旁的部分有怎样的关系？

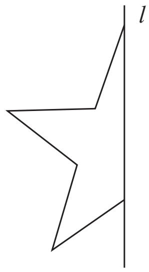


图 2-17

（3）在纸上画出一个与图 2-18 中的梯形同样的图形，过上下底边 AA' 与 BB' 的中点 C，D 作直线 l，直线 l 把梯形分成左右两部分，如果把梯形 $ABB'A'$ 沿直线 l 对折，直线两旁的部分能够重合吗？

一个图形的一部分，以某一条直线为对称轴，经过轴对称能与图形的另一部分重合，这样的图形叫做**轴对称图形**（axially symmetric figure）.

图 2-16 中的中国象棋棋盘，根据图 2-17 画出的完整的五角星形以及图 2-18 中的梯形都是轴对称图形，你能说出它们各有几条对称轴吗？

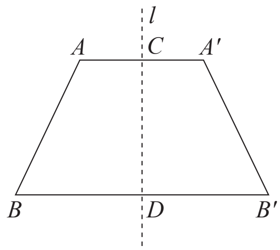


图 2-18

（4）比较上面的问题（2）和第 2.1 节“实验与探究”问题（3）中得到图形，你能说出“轴对称图形”与“两个图形成轴对称”的区别与联系吗？与同学交流.

轴对称图形是一种具有特殊形状的图形. 如果把一个轴对称图形沿它的对称轴分成的两部分看做是两个图形，那么这两个图形关于这条直线成轴对称.

例1　小莹要制作一个风筝，为了放飞时能保持平衡，风筝应设计成轴对称图形. 图2−19是她设计的对称轴左侧部分的图形，直线 AE 为对称轴.

（1）设点 B，D 关于 AE 的对称点分别为 G，F，请将这幅风筝图形补充完整；

（2）$\triangle ABC$ 与 $\triangle AGC$ 全等吗？

（3）AE 与 $\angle BAG$ 有什么关系？

（4）分别连接 BF，DG，你发现它们的交点与 AE 有什么位置关系？

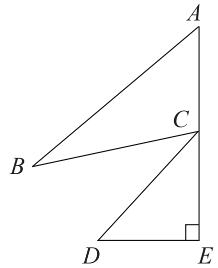


图 2−19

解　（1）画 $BH \perp AE$，垂足为 H；延长 BH 到点 G，使 $BH = HG$；延长 DE 到点 F，使 $DE = EF$；连接 FC，CG，GA. 多边形 $ABCDFCG$ 就是所要求画的以 AE 为对称轴的轴对称图形（图2−20）；

（2）$\triangle ABC \cong \triangle AGC$；

（3）AE 平分 $\angle BAG$；

（4）BF 与 DG 的交点 M 在对称轴 AE 上.

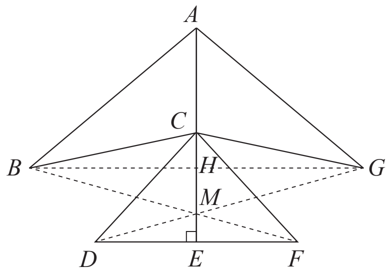


图 2−20

挑战自我

你能借助 BF 与 DG 关于直线 AE 成轴对称，说明上述结论（4）的道理吗？与同学交流.

智趣园

算盘上的轴对称现象

算盘是我国的一种传统的计算工具，发明于东汉时期，经过历代千千万万人的使用和改进，一直流传至今. 利用算盘，人们可以做加、减、乘、除等运算.

如图2−21，中国的算盘一般有13档. 图2−21是轴对称图形吗？

图 2−21

在学习和使用算盘的过程中，人们发现有些正整数进行四则运算后，其结果是具有对称性的数字，这样的数字在算盘上相应地用算珠排成了轴对称图形. 如图2−22，就是用算珠排成的两个轴对称图形，它们分别是下面两个算式的计算结果：

16 225 679 × 35 = 567 898 765，

742 496 466 − 123 456 789 − 123 456 789 − 123 456 789 − 123 456 789 − 123 456 789 = 125 212 521.

图 2−22 中用算珠排成的两个图，被人们形象地称为“凤凰展翅”和“并肩前进”.

你还能举出类似的整数运算的例子吗？

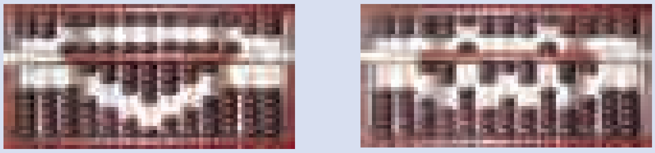


图 2−22

练 习

1. 在如图所示的图案中，哪些是轴对称图形？如果是，找出它的对称轴.

①　②　③　④

（第 1 题）

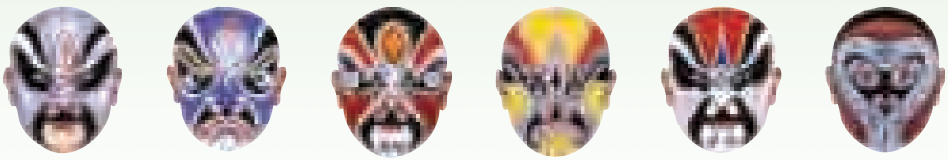
2. 与同学一起做下面的小游戏：两人轮流说出一个上下或左右成轴对称结构的汉字，如“土”、“王”、“草”、“晶”等，看谁说得快，说得多.

习题2.3

复习与巩固

1. 如果把阿拉伯数字 0～9 和大写英文字母都看做图形，你能从中各举出几个轴对称图形的例子吗？

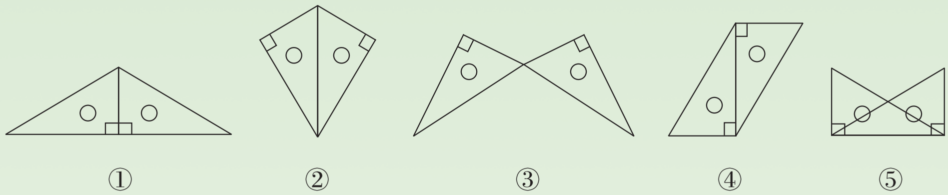
2. 你喜欢看京剧吗？京剧艺术是中国的国粹. 下图是 6 个京剧脸谱的图案，其中哪些是轴对称图形？



①　②　③　④　⑤　⑥

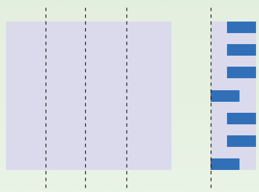
（第 2 题）

3. 小亮用两个大小相同的含 30° 角的三角尺，摆成下列图形，这些图形中哪几个是轴对称图形？如果是，画出它的对称轴.



（第 3 题）

4. 如图，取一张正方形的纸片，先把它折叠两次，然后按图中的方式涂上阴影，再把阴影部分剪去. 展开后得到一个什么图案？你还能运用图形的轴对称设计并剪制一幅美丽的图案吗？

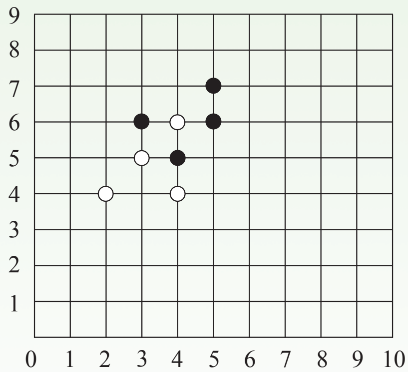


（第 4 题）

5. 回答本章“情境导航”中的问题.

拓展与延伸

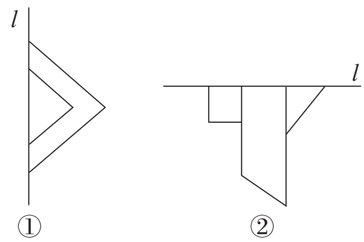
6. 小莹与小亮用围棋子做游戏，小莹用白色棋子，小亮用黑色棋子，二人轮流在棋盘上的格点处摆放棋子. 每人每次只能摆放一枚棋子. 如图所示，现轮到小亮先摆，小莹再摆，如果要求摆放后 5 枚黑色棋子和 5 枚白色棋子分别组成轴对称图形. 黑子、白子应分别放在什么位置？（用有序数对表示出来）



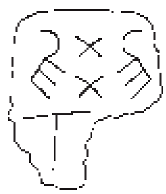
（第 6 题）

7. 如图，把给出的图形分别补成以直线 l 为对称轴的轴对称图形.

8. 甲骨文中的“学”（简体为“学”）字是一个轴对称图形. 它的上半部是两只拿着算筹的手的形象，下半部是一个专门的学习场所，意指从书本上或从教师那儿获取知识. 如图是一块出土文物的残片，上面有一个残缺的“学”字. 你能作出这个字的对称轴，并把这个字补写完整吗？



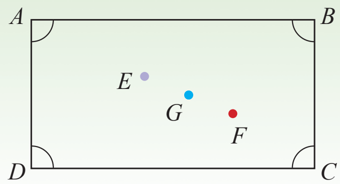
（第 7 题）



（第 8 题）

探索与创新

9. 台球是一项流行的体育活动. 如图是一张台球桌，目标球 F 与本球 E 之间有一个 G 球阻挡. 击球者想通过击打 E 球，使 E 球先撞击球台的 AB 边，经过一次反弹后再撞击 F 球. 他应将 E 球击到 AB 边上的哪一点？请画出 E 球的运行路线.



（第 9 题）

2.4 线段的垂直平分线

实验与探究

（1）在纸上作一条线段 AB（图 2−23 ①），通过对折使端点 A 与端点 B 重合. 将纸展开后铺平，记折痕所在的直线为 MN，直线 MN 与线段 AB 的交点为 O（图 2−23 ②）. 你有什么发现？

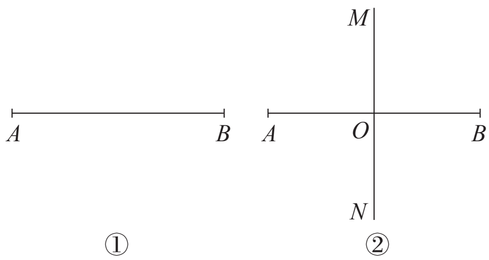
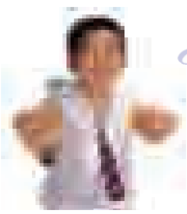


图 2−23



$MN \perp AB$，垂足为点 O. $AO = OB$.

线段是轴对称图形. 它的一条对称轴垂直平分这条线段.

垂直并且平分一条线段的直线叫做这条线段的**垂直平分线**（perpendicular bisector）.

（2）如图 2-23②，MN是线段AB的垂直平分线，在MN上任意取一点P，则点P可能有两种情况：当P恰是MN与线段AB的交点时，由MN平分AB可知$PA = PB$；当P不在线段AB上时，连接PA与PB（图 2-24）. 把这张纸再沿直线MN对折，PA与PB重合吗？为什么？由此你能得到什么结论？

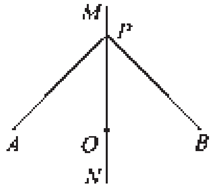


图 2-24

将线段AB沿直线MN对折，因为MN是线段AB的对称轴，A，B是对应点. 故对折后点A与点B重合. 由于点P在对称轴MN上，对折后点P与它自身重合，于是PA与PB重合，所以$PA = PB$.

这样，就得到线段垂直平分线的性质：

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

（3）反过来，到线段两端距离相等的点是否都在线段的垂直平分线上？当点P在线段AB上时，由$PA = PB$，可知P是AB的中点，此时点P在线段AB的垂直平分线上. 当点P在线段AB外时，如果$PA = PB$，你能说明点P在线段AB的垂直平分线上吗？

设线段AB的中点为O，连接PO，由SSS可知$\triangle POA \cong \triangle POB$. 因为$\angle AOP + \angle BOP = 180°$，$\angle AOP = \angle BOP$，所以$\angle AOP = 90°$，即$PO \perp AB$. 所以$PO$就是线段$AB$的垂直平分线，这就是说，点$P$在线段$AB$的垂直平分线上.

于是，又得到

到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

（4）已知线段AB（图2-25）.

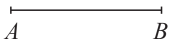


图 2-25

你能根据（3）中的结论，用尺规作出线段AB的垂直平分线吗？与同学交流.

加油站

用尺规作一条线段的垂直平分线，只要能作出到这条线段的两个端点距离相等的两个点，这两点所确定的直线就是这条线段的垂直平分线.

作法 （1）分别以点A与点B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧，两弧分别交于M，N两点；

（2）过M，N两点作直线MN（图2-26）.

直线MN就是线段AB的垂直平分线❶.

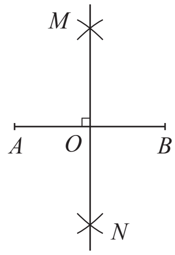


图 2-26

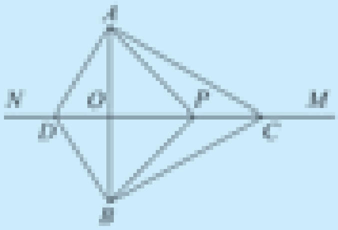
（5）用折纸的方法检验你作出的直线MN是不是线段AB的垂直平分线.

挑战自我

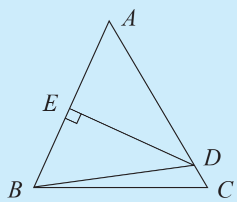
在上面的作图过程中，为什么必须以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧呢？

练 习

1. 如图，点P，C，D是线段AB的垂直平分线MN上的任意三点，分别连接AP，PB，AC，BC，AD，BD，指出图中相等的线段.
2. 在$\triangle ABC$中，DE垂直平分线段AB，交AB于E，交AC于D. 已知$AC = 16$. $BC = 10$. 求$\triangle BCD$的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

3. 已知线段AB，求作AB的中点C.

❶用尺规作一条线段的垂直平分线，属于基本作图.

实验与探究

利用基本作图“作一条线段的垂直平分线”可以作出过已知线段中点的这条线段的垂线，能把作图的范围再推广到“过一个点作已知直线的垂线”吗？

由于一个点与一条直线的位置关系有两种：点在直线上和点在直线外，所以应分两种情况进行讨论．

（1）已知直线 l 和 l 上一点 P（图2－27）．怎样过点 P 作直线 l 的垂线？

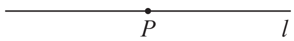
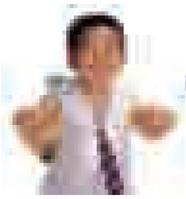


图 2–27



先在直线 l 上作出以点 P 为中点的一条线段 AB，再利用上面学过的基本作图，作线段 AB 的垂直平分线，那么这条直线既经过点 P，又与直线 l 垂直．

作法　①以点 P 为圆心，以任意长为半径作弧，与直线 l 相交于点 A 和点 B；

②作线段 AB 的垂直平分线 CD（图2－28）．

直线 CD 就是过点 P 的直线 l 的垂线[1]．

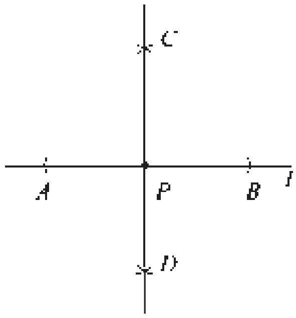


图 2–28

（2）已知直线 l 和 l 外一点 P（图2－29）．怎样经过点 P，作直线 l 的垂线？

也要设法先在直线 l 上作出一条线段 AB，并且使点 P 到线段 AB 两端的距离相等．再利用基本作图“作线段 AB 的垂直平分线”，那么这条直线既经过点 P，又与直线 l 垂直．

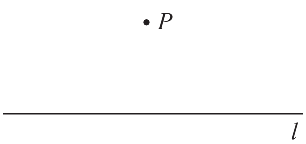


图 2–29

[1] 用尺规过一点作一条直线的垂线，也是基本作图．

作法　① 任意取一点 K，使点 K 和点 P 分别在直线 l 的两侧；

② 以点 P 为圆心，PK 的长为半径作弧，与直线 l 相交于点 A 和点 B；

③ 作线段 AB 的垂直平分线 CD（图 2−30）.

直线 CD 就是过点 P 的直线 l 的垂线.

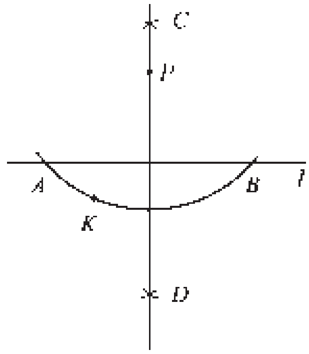


图 2−30

（3）你体会在解决“过一点作已知直线的垂线”这一问题时，运用了哪些基本的数学思想？与同学交流.

例1　海伦（Heron，活跃于公元 62 年左右）是古希腊的一位数学家、测量学家. 相传，有一天一位将军专程拜访海伦，求教一个令他百思不得其解的问题：“我每天策马往返于两个边防站 A 与 B 之间，途中都要到小河 l 边让坐骑饮水. 怎样走路程最近呢（图 2−31）？”你能帮将军解答这个问题吗？说出你的作法，在图中作出最近的路线，并说明作图的道理.

加油站

本题是一则“将军饮马”的数学故事，把它进一步抽象为数学语言就是：

已知 A，B 两点在直线 l 的同侧（图 2−31），在直线 l 上求作一点 P，使 $AP+BP$ 的值最小.

图 2−31

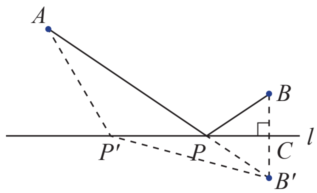


图 2−32

作法　（1）过点 B 作直线 l 的垂线 BC，垂足为 C；

（2）在 BC 上截取点 B'，使 B，B' 分别在 l 的两侧，且 $CB' = CB$；

（3）连接 AB'，与直线 l 交于点 P（图 2−32）.

点 P 就是所求作的直线 l 上使 $AP + BP$ 的值最小的点.

理由是：因为点 B，B' 关于直线 l 对称，根据轴对称的基本性质，l 是 BB' 的垂直平分线，所以 $PB = PB'$. 根据“两点之间线段最短”，如果点 P' 是 l 上的一个动点，当 A，P'，B' 在一条直线上（即 P' 与 P 重合）时，$AP'+P'B$ 的值最小，也就是 $AP+PB$ 的值最小.

挑战自我

如图 2–33，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，D 是斜边 AB 上的任意一点，你能在 AC 边上找出一点 E，使 $BE+ED$ 最小吗？你能在 BC 边上找出一点 F，使 $AF+FD$ 最小吗？画出图形，并说明理由.

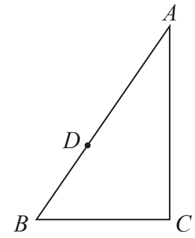
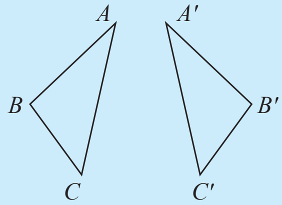


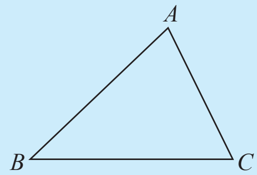
图 2–33

练 习

1. 如图，△ABC 与 △$A'B'C'$ 是关于直线 l 的对称图形，请作出对称轴 l.
2. 如图，已知△ABC，求作 AC 边上的高.



（第 1 题）

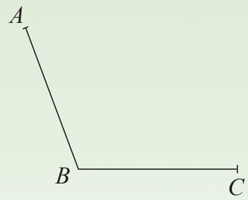


（第 2 题）

习题2.4

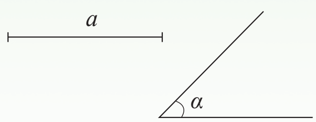
复习与巩固

1. 任意作一条线段，用直尺和圆规把它四等分.
2. （1）如图，用直尺和圆规分别作出线段 AB 与 BC 的垂直平分线；
   （2）如果线段 AB 与 BC 的垂直平分线相交于点 P，那么 PA 与 PC 相等吗？为什么？

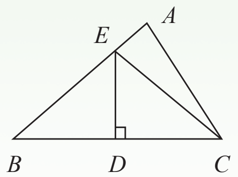


（第 2 题）

3. 任意画一个三角形，用直尺和圆规作出它的三条边的垂直平分线. 你有什么发现？
4. 如图，已知线段 a，锐角 α，求作 Rt△ABC，使 $\angle C=90°$，$BC=a$，$\angle B=\alpha$.



（第 4 题）



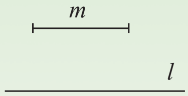
（第 5 题）

5. 如图，在△ABC 中，$AC=b$. BC 边上的垂直平分线 DE 分别交 BC，AB 于点 D，E. △AEC 的周长等于 $a+b$，求边 AB 的长.

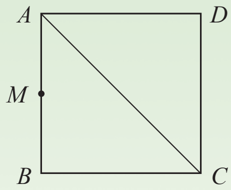
拓展与延伸

6. 如图，已知直线 l 和线段 m. 求作直线 a，使 $a/\!/l$，且 a 与 l 之间的距离等于 m. 满足条件的直线 a 有几条？

7. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，M 是 AB 边的中点. 请在对角线 AC 上找一点 P，使 $PM+PB$ 的值最小.



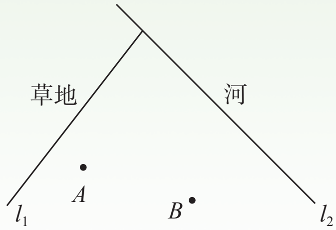
（第 6 题）



（第 7 题）

探索与创新

8. 如图，牧区内住着一家牧民，点 A 处有一个马厩，点 B 处是他家的帐篷. l_1 是草地的边沿，l_2 是一条笔直的河流. 每天清晨，牧民都要从马厩牵出马来，先去草地上让马吃草，再到河岸边去饮马，然后回来帐篷 B 处. 请你为牧民设计一条最短的行走路线.

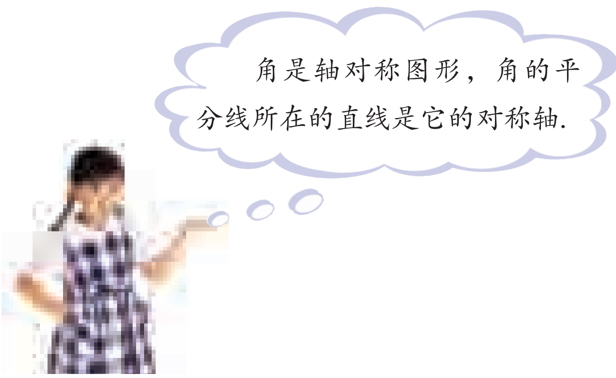


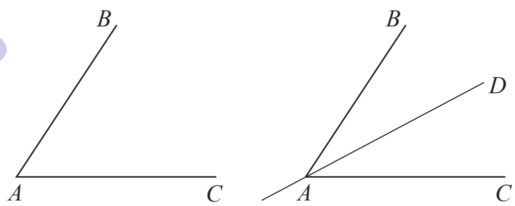
（第 8 题）

2.5　角平分线的性质

实验与探究

（1）在纸上任意画一个 $\angle BAC$（图 2–34 ①），把它沿经过点 A 的某条直线对折，使角的两边 AB 与 AC 重合，然后把纸展开后铺平，记折痕为 AD（图 2–34 ②）. 你发现 $\angle BAC$ 是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是哪条直线？





①　　②

图 2–34

（2）如图 2–35，在$\angle BAC$的角平分线AD上任意取一点P，过点P作$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，垂足分别是点M，N，用圆规比较PM与PN的大小，你有什么发现？说明你的理由. 由此你能得出什么结论？

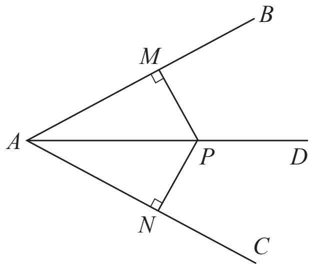


图 2–35

角平分线上的点，到这个角的两边的距离相等．

（3）如图 2–36，已知$\angle BAC$，经过$\angle BAC$内部任意作直线$l_1 /\!/ AB$，作直线$l_2 /\!/ AC$，使l_2与AC之间的距离等于l_1与AB之间的距离. 记l_1，l_2的交点为P. 则P是$\angle BAC$内部一个到$\angle BAC$的两边AB，AC距离相等的点. 作直线AP. 如果将$\angle BAC$沿AP对折. 你发现$\angle BAP$与$\angle CAP$重合吗？由此你能得到什么结论？

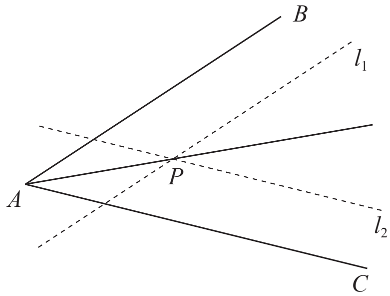
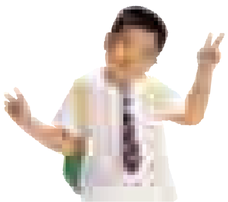


图 2–36



$\angle BAP=\angle CAP$．
点P在$\angle BAC$的平分线上.

这就是说，

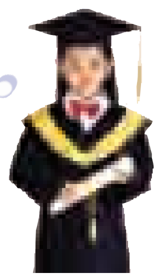
角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

（4）已知一个角（图 2–34①），你能用直尺和圆规作出它的平分线吗？

已知：$\angle BAC$（图 2–34①）.

求作：$\angle BAC$的平分线.

要作出$\angle BAC$的平分线，只要设法确定角平分线上的一点P的位置就可以. 为此，可以用圆规在角的两边分别截出以A为公共端点的两条相等的线段，然后再分别以这两条线段的另一个端点为圆心，以适当的长为半径作弧，两弧的交点便是所要确定的点P.



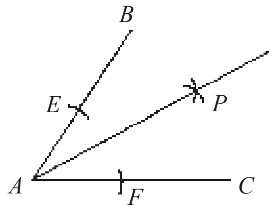


图 2-37

作法 ① 以点 A 为圆心，以适当的长为半径作弧，分别交这个角的两边于 E，F 两点；

② 分别以点 E，F 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径作弧，两条弧交于点 P；

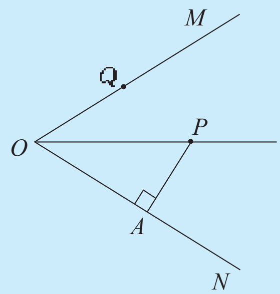
③ 作射线 AP（图 2-37）.

射线 AP 就是所求作的 $\angle BAC$ 的平分线❶.

（5）你能说明图 2-37 中所作出的射线 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线吗？

连接 PE，PF，因为 $AE=AF$，$EP=FP$，$AP=AP$，由SSS，$\triangle APE \cong \triangle APF$．所以 $\angle BAP=\angle CAP$．

练 习

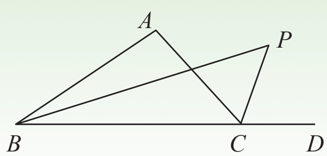


（第 1 题）

1. 如图，OP 平分 $\angle MON$，$PA \perp ON$，垂足为 A，$PA=2$．Q 是边 OM 上的一个动点，则线段 PQ 的最小值是多少？为什么？
2. 任意画一个三角形，用尺规分别作出它的三个内角平分线．验证三角形三条角平分线交于一点．

习题2.5

复习与巩固

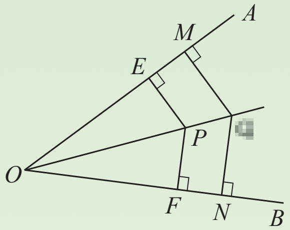


（第 1 题）

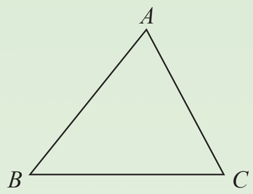
1. 如图，点 P 是 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle ABC$ 与它的外角 $\angle ACD$ 的角平分线的交点．已知点 P 到 AC 的距离为 5 cm．求点 P 到直线 AB 的距离．

❶ 用尺规作一个角的平分线，也属于基本作图.

2. 如图，P 是 $\angle AOB$ 内部的一点，$PE\perp OA$，$PF\perp OB$，垂足分别为点 E，F，且 $PE=PF$. Q是 OP 上的任意一点，$QM\perp OA$，$QN\perp OB$，垂足分别为点 M 和 N. QM 与 QN 相等吗？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知△ABC. 利用直尺和圆规，根据下列要求作图，并回答问题：

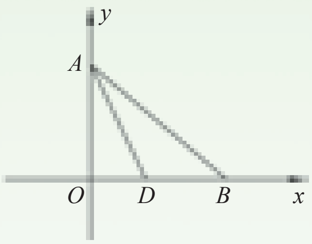
（1）作 $\angle ABC$ 的平分线 BD，交 AC 于点 D；

（2）作线段 BD 的垂直平分线，交 AB 于点 E，交 BC 于点 F，连接 DE，DF；

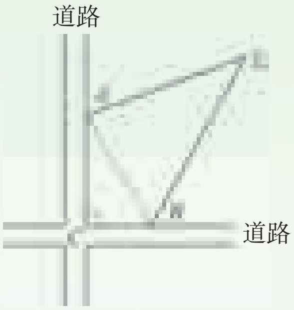
（3）写出你所作出的图形中的相等线段.

拓展与延伸

4. 如图，在直角坐标系中，AD 是 $\angle OAB$ 的角平分线，点 D 的坐标是（2，0），求点 D 到 AB 的距离.



（第 4 题）

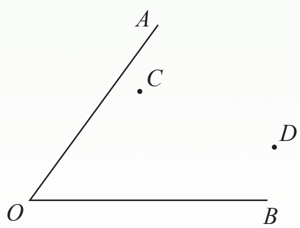


（第 5 题）

5. 如图，李伯伯承包了一块四边形的土地 $ACBD$. 他让小亮帮他测量一下这块地的面积. 先量得 AC 的长为 120 m，BC 的长为 60 m，BD 的长为 240 m. 当要测量 AD 的长度时，小亮说：“不用量了，我已经测得 AB 正好平分 $\angle CBD$，公路 AC 和 BC 是互相垂直的. 有了这些条件，就能求出这块土地的面积了.”小亮说得对吗？你会计算这块土地的面积吗？

探索与创新

6. 如图，C，D 是 $\angle AOB$ 内的两点，你能找到一点 P，使得点 P 到 $\angle AOB$ 的两边距离相等，并且到点 C 和点 D 的距离也相等吗？利用直尺和圆规作出这个点.



（第 6 题）

2.6　等腰三角形

前面我们利用对折的方法探索了线段和角的轴对称性，并分别得到它们的对称轴的一些重要性质. 任意画一个三角形，它是轴对称图形吗？如果它是一个等腰三角形呢？

实验与探究

（1）已知等腰三角形的底边和一腰，你能用尺规作出这个等腰三角形 ABC 吗？

（2）如图 2–38，将你作的等腰三角形 ABC 剪下来. 然后将它对折，使两腰 AB 与 AC 所在的射线重合，记折痕与底边 BC 的交点为 D，你发现等腰三角形 ABC 是轴对称图形吗？

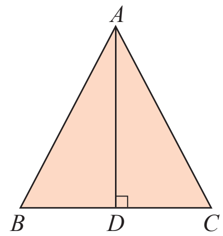
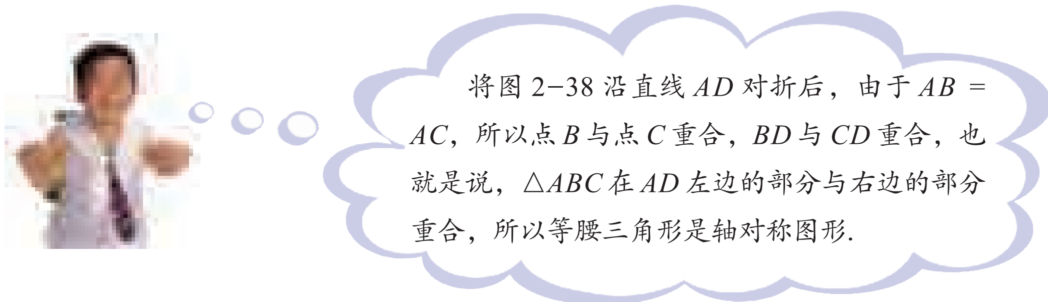


图 2–38

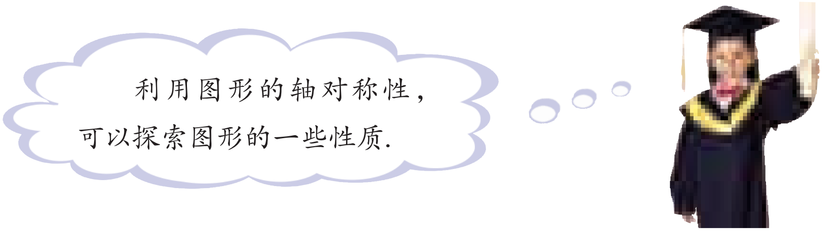


（3）在图 2–38 中，根据轴对称的基本性质，对称轴 AD 与底边 BC 有什么关系？根据角的轴对称性，$\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 有什么关系？由此你发现等腰三角形 ABC 底边 BC 上的高、中线及顶角的平分线有什么关系？

（4）利用等腰三角形的轴对称性，你发现 $\angle B$ 与 $\angle C$ 相等吗？由此你能得到关于等腰三角形底角的什么性质？

（5）你能总结一下等腰三角形的性质吗？

等腰三角形是轴对称图形．等腰三角形的对称轴是底边的垂直平分线．
等腰三角形的底边上的高、底边上的中线及顶角的平分线重合．
等腰三角形的两个底角相等．



例1　如图 2−39，屋椽 AB 和 AC 的长相等，$\angle A=120°$，求 $\angle B$ 的度数．

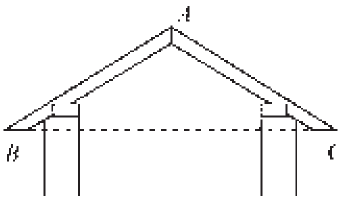


图 2−39

解　因为 $AB=AC$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，从而 $\angle B=\angle C$．

因为　$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A=120°$，

所以　
$$\angle B=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$$
$$=\frac{1}{2}(180°-120°)$$
$$=30°.$$

（6）已知底边和底边上的高，能利用尺规作出等腰三角形吗?

例2　已知：线段 a，h（图 2−40）．

求作：$\triangle ABC$，使 $AC=BC$，且 $AB=a$，高 $CD=h$．

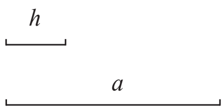


图 2−40

作法　如图 2−41．

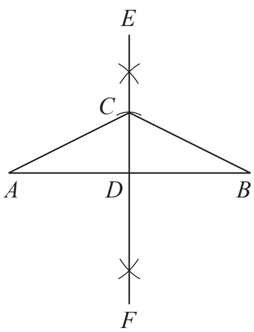
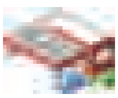


图 2−41



加油站

由已知底边可确定等腰三角形底边上的两个顶点，并且可以作出底边的垂直平分线，再根据等腰三角形的性质，底边上的高是底边垂直平分线的一段，利用已知底边上的高，便可以确定等腰三角形的另一个顶点．

（1）作线段$AB = a$；

（2）作线段AB的垂直平分线EF，交AB于点D；

（3）在EF上截取$DC = h$；

（4）连接AC，BC.

$\triangle ABC$就是所求作的等腰三角形.

挑战自我

如图 2−42，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，把直角边BC沿过点B的某条直线折叠，使点C落到斜边AB上的一点D处，当$\angle A$为多少度时，点D恰为AB的中点？说明你的结论.

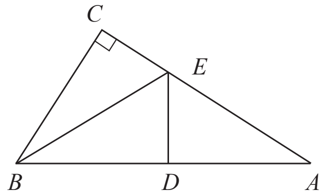
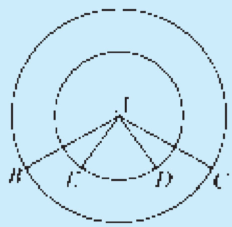


图 2−42

练 习

1. 如果等腰三角形的一个底角是50°，它的顶角是多少度？
2. 顶角是直角的等腰三角形叫做**等腰直角三角形**. 等腰直角三角形的两个底角分别是多少度？
3. 如图，在以点A为圆心的两个同心圆中，一条直线与这两个同心圆分别交于B，E，D，C四个点. 请找出图中相等的线段和相等的角，并说明理由.



（第 3 题）

实验与探究

（1）你还记得已知两角及其夹边怎样作三角形的吗？如果已知$\angle\alpha$（$\angle\alpha < 90°$）和线段a（图2−43），你能用尺规作$\triangle ABC$，使$\angle B = \angle C = \angle\alpha$，$BC = a$吗？

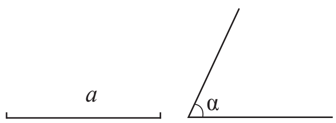


图 2−43

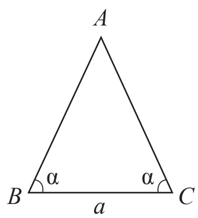
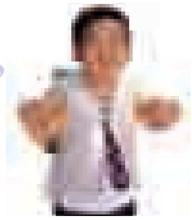


图 2−44

（2）在作出的$\triangle ABC$（图 2−44）中，比较边AB与边AC的长，你有什么发现？

我发现在一个三角形中，如果两个角相等，那么它们所对的边也相等.



这就是说

有两个角相等的三角形是等腰三角形.

（3）你能用折纸的方法，验证你的发现吗？

例3　如图 2-45，已知$\angle A=36^\circ$，$\angle DBC=36^\circ$，$\angle C=72^\circ$. 求$\angle BDC$和$\angle ABD$的度数，并指出图中有哪些等腰三角形.

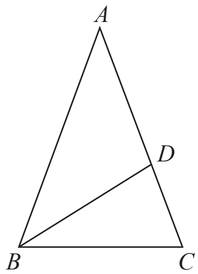


图 2-45

解　在$\triangle DBC$中，$\angle DBC=36^\circ$，$\angle C=72^\circ$，

所以　$\angle BDC=180^\circ-(\angle DBC+\angle C)$

$=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$.

又因为$\angle BDC$是$\triangle ADB$的一个外角，$\angle A=36^\circ$，

所以　$\angle ABD=\angle BDC-\angle A=72^\circ-36^\circ=36^\circ$.

于是，由$\angle A=\angle ABD=36^\circ$，可知$AD=BD$，所以$\triangle ADB$是等腰三角形；

由$\angle BDC=\angle C=72^\circ$，可知$BD=BC$，所以$\triangle DBC$是等腰三角形；

由$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=36^\circ+36^\circ=72^\circ$，$\angle C=72^\circ$，可知$AB=AC$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形.

例4　如图 2-46，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle ABC$与$\angle ACB$的平分线交于点F，$\triangle FBC$是等腰三角形吗？为什么？

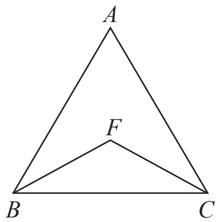


图 2-46

解　$\triangle FBC$是等腰三角形. 理由如下：

由$AB=AC$，可知$\triangle ABC$是等腰三角形，所以$\angle ABC=\angle ACB$.

因为BF，CF分别是$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线，所以$\angle ABF=\angle CBF=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACF=\angle BCF=\frac{1}{2}\angle ACB$，所以$\angle FBC=\angle FCB$，由此可知$FB=FC$，

所以$\triangle FBC$是等腰三角形.

挑战自我

（1）在例 4 中，如果过点 F 作底边 BC 的平行线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E（图 2−47①），除△ABC 和△FBC 外，图中还有哪些三角形是等腰三角形？

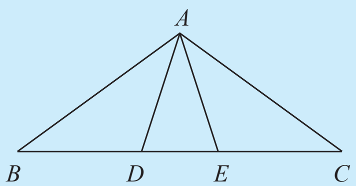
（2）在（1）中，如果△ABC 中，$AB \neq AC$，其他条件不变（图 2−47②），图中有等腰三角形吗？说明你的理由.

① ②

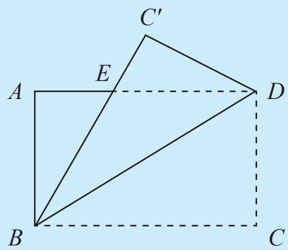
图 2−47

练 习

1. 如图，在△ABC 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 108°$，AD，AE 三等分 $\angle BAC$，指出图中有哪些等腰三角形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，将一张长方形纸片 $ABCD$ 沿它的一条对角线 BD 折叠后，点 C 落在点 C' 处，BC' 交 AD 于点 E，△EBD 是等腰三角形吗？为什么？

等边三角形是特殊的等腰三角形，它除了具有等腰三角形的所有性质外，还有哪些特有的性质？怎样判定一个三角形是等边三角形？

交流与发现

如图 2−48，△ABC 是等边三角形，思考下面的问题：

（1）等边三角形有几条对称轴？你能作出这些对称轴吗？

（2）等边三角形的各个角的大小有什么关系？说明你的理由，并与同学交流.

（3）根据三角形的内角和性质，你发现等边三角形的每个内角是多少度？

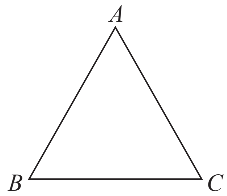
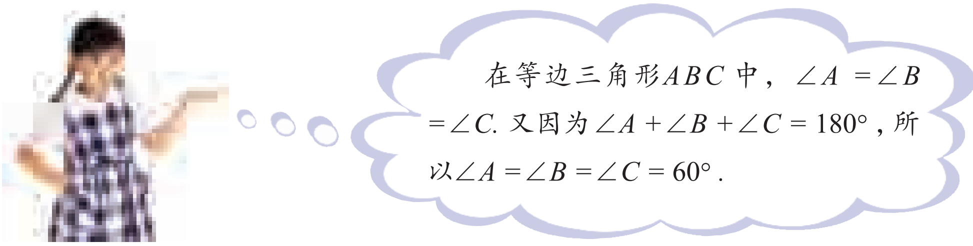


图 2–48



于是，就得到等边三角形的性质：

等边三角形的各角都等于60°.

（4）如果一个三角形的三个角都相等，这个三角形是等边三角形吗？说明你的理由，并与同学交流.

三个角都相等的三角形是等边三角形.

（5）有一个内角为60°的等腰三角形是等边三角形吗？

如图2–49，已知$AB=AC$.

① 如果$\angle B=60^\circ$，那么$\angle C=\angle B=60^\circ$，

所以　$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$.

于是　$\angle A=\angle B=\angle C$，所以$\triangle ABC$是等边三角形.

② 如果$\angle A=60^\circ$，那么

由　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ 和$\angle B=\angle C$得

$$\angle B=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)=60^\circ.$$

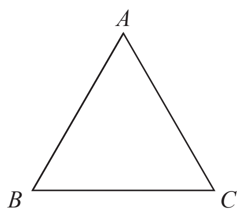


图 2–49

于是　$\angle B=\angle C=\angle A$，所以$\triangle ABC$是等边三角形.

由①②可知，有一个内角为$60°$的等腰三角形是等边三角形.

于是，又得到等边三角形的另一个判定方法：

有一个内角为 60° 的等腰三角形是等边三角形 .

挑战自我

你能用一张正方形的纸片折出一个等边三角形吗？试一试.

练习

1. 下面的判断中，错误的是（　　）.

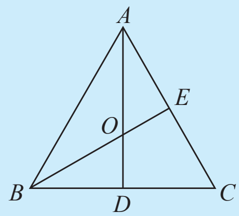
（A）在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，且$\angle A=\angle B$，那么$\triangle ABC$为等边三角形

（B）在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，且$\angle B=\angle C$，那么$\triangle ABC$为等边三角形

（C）在$\triangle ABC$中，如果$\angle A=60°$，$\angle B=60°$，那么$\triangle ABC$为等边三角形

（D）在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，$\angle B=60°$，那么$\triangle ABC$为等边三角形

2. 如图，$\triangle ABC$是等边三角形，BC边上的中线AD与AC边上的中线BE相交于点O，求$\angle DOE$的度数 . 你有几种不同的解法？



（第 2 题）

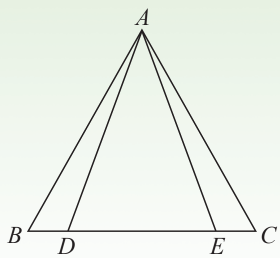
习题2.6

复习与巩固

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是BC边上的中线，$\angle BAC=42°$，分别求$\angle ABC$，$\angle ADB$，$\angle DAB$的度数.

2. D是等腰三角形ABC底边BC的中点，D点到腰AB和AC的距离相等吗？为什么？

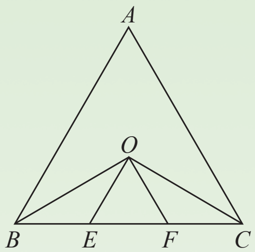
3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D，E是BC上的点，且$\angle BAD=\angle CAE$. AD与AE相等吗？为什么？



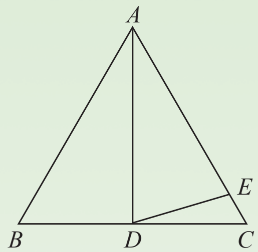
（第 3 题）

4. 如图，$\triangle ABC$为等边三角形，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线相交于点O，$OE /\!/ AB$交BC于点E，$OF /\!/ AC$交BC于点F. 图中有等边三角形和直角三角形吗？如果有，将它写出来.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，D为BC的中点，$AD = AE$，$\angle BAD = 30°$. 求$\angle EDC$的度数.



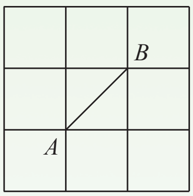
（第 4 题）



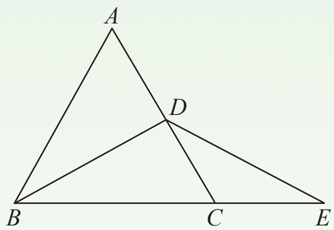
（第 5 题）

拓展与延伸

6. 在一个3×3的正方形网格中，A，B是如图所示的两个格点，如果C也是格点，且$\triangle ABC$是等腰三角形. 试用尺规作图的方法，确定顶点C的位置，你发现点C所有可能的位置共有多少个？



（第 6 题）



（第 8 题）

7. 有一个钝角三角形，它的三个内角分别是20°，40°，120°. 能把这个三角形分成两个等腰三角形吗？你有几种不同的分法？分成的两个等腰三角形的内角分别是多少度？

8. 如图，$\triangle ABC$是等边三角形，BD是AC边上的中线，延长BC到E，使$CE = CD$. $\triangle BDE$是等腰三角形吗？为什么？

探索与创新

9.（1）利用直尺和圆规，你能作出下列度数的角吗？

① 90°；② 60°；③ 45°；④ 30°；⑤ 105°；

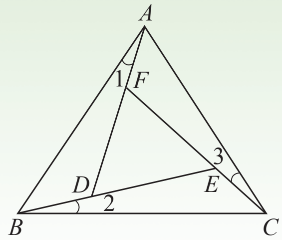
如果能作，分别作出这些角，并说出各利用了哪些基本作图；

（2）利用（1）的结果和基本作图，说出你还能用尺规作出的锐角（至少说出5个，不必再实际作图）.

10. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

（1）求 $\angle BEC$ 的度数；

（2）$\triangle DEF$ 是等边三角形吗？为什么？



（第 10 题）

回顾与总结

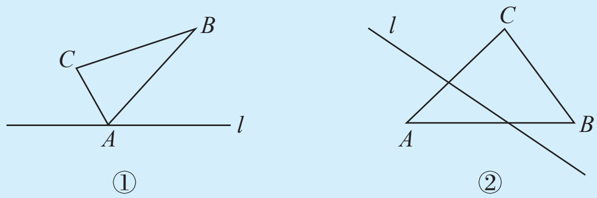
1. 本章学习的主要内容是什么？总结一下，与同学交流.
2. 什么叫做轴对称？什么叫做对称轴？
3. 什么叫做两个图形关于一条直线成轴对称？轴对称有什么基本性质？
4. 怎样画出一个图形关于某一条直线成轴对称的图形？
5. 什么叫做轴对称图形？轴对称图形与两个图形关于一条直线成轴对称有什么区别和联系？
6. 在直角坐标系中，如果已知一个点的坐标是 (m,n)，你能分别写出这个点关于 x 轴和 y 轴的对称点的坐标吗？如果两个点关于某条坐标轴对称，那么它们的坐标之间满足怎样的关系？
7. 线段是轴对称图形吗？什么是线段的垂直平分线？线段的垂直平分线有什么性质？
8. 角是轴对称图形吗？角的平分线有什么性质？
9. 等腰三角形是轴对称图形吗？它的对称轴是什么？利用它的轴对称性，你得到了等腰三角形的哪些性质？
10. 要判定一个三角形是等腰三角形，除定义外，你还学习了什么方法？
11. 等边三角形有几条对称轴？你在本章学习了等边三角形的什么性质？怎样判定一个三角形是等边三角形？
12. 本章你学习了哪些基本作图？怎样利用基本作图，已知底边和底边上的高作等腰三角形？

综合练习

复习与巩固

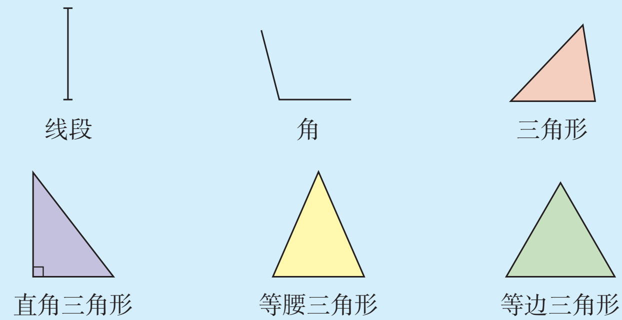
1. 已知直角坐标系中的点 $A(m-1, 3)$ 与点 $B(4, n-2)$ 关于 x 轴成轴对称，求 m，n 的值.

2. 如图①②，已知直线 l 和△ABC，分别求作△$A'B'C'$，使它与△ABC 关于直线 l 成轴对称.



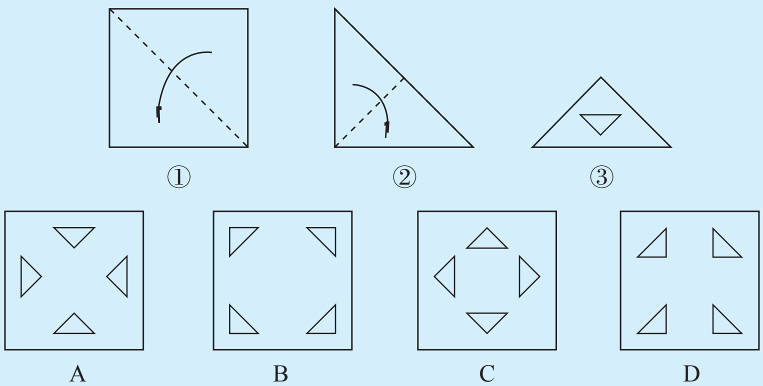
（第 2 题）

3. 下面的图形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴是一条怎样的直线，并利用尺规分别作出它们的对称轴.



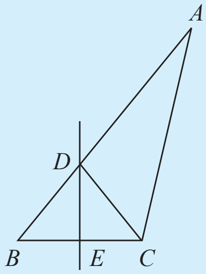
（第 3 题）

4. 选择题：把一张正方形纸片如图①、图②对折两次后，再如图③挖出一个三角形小孔，则展开后的图形是（　　）.

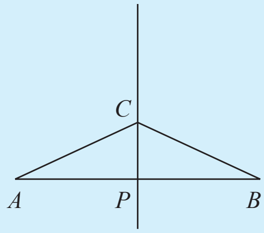


（第 4 题）

5. 如图，$\triangle ABC$ 的一边 BC 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 BC 于点 E. 如果 $\triangle ACD$ 的周长为 17 cm，$\triangle ABC$ 的周长为 25 cm. 根据这些条件，你可以求出哪些线段的长？



（第 5 题）



（第 6 题）

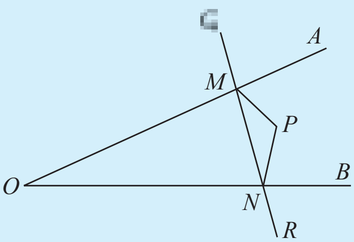
6. 如图，已知线段 AB 的垂直平分线 CP，交 AB 于点 P，且 $AC = 2CP$，甲、乙两人想在 AB 上作出两点 D，E，使得 $AD = DC = CE = EB$. 他们的作法分别如下：

（甲）作 $\angle ACP$，$\angle BCP$ 的平分线，分别交 AB 于 D，E. 则点 D，E 即为所求；

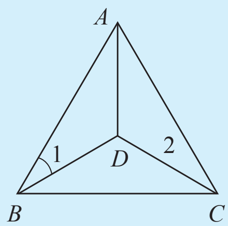
（乙）作 AC，BC 的垂直平分线，分别交 AB 于 D，E，则点 D，E 即为所求.

你认为甲、乙两人谁的作法正确？为什么？

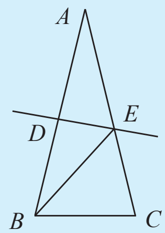
7. 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 内一点，点 R 与 Q 分别是点 P 关于 OB 与 OA 的对称点，QR 与 OA 交于点 M，与 OB 交于点 N. 已知 $QR = 5$ cm，求 $\triangle PMN$ 的周长.



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

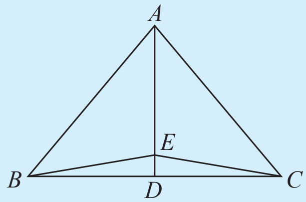
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BD = CD$，$\angle 1 = \angle 2$. 小莹说：“AD 平分 $\angle BAC$”. 你认为她说的对吗？说明你的理由.

9. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$. 线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，连接 BE. $\angle CBE$ 等于多少度？

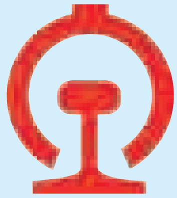
拓展与延伸

10. 已知 $\angle AOB = 30°$，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部. P_1 是点 P 关于 OB 的对称点，P_2 是点 P 关于 OA 的对称点. 请判断 P_1，O，P_2 三点所构成的三角形是什么三角形？说明理由.

11. 如图，在△ABC中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足为点D．E为AD上一点，$AE=BE$，$\angle BAC=80°$．求$\angle ABE$与$\angle BEC$的度数.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图是我国铁路系统的路徽，是由“工”“人”两个汉字组成的轴对称图案，下方的“工”字，又象征铁轨，和“人”字合在一起，像一个火车头.

（1）你在生活中，还见过哪些部门的徽标？请举出其中的几个轴对称图案，并解释它的含义；

（2）你能利用轴对称为你们班级设计一个班徽吗？试一试，并说明它的含义.

13. 在直角坐标系中，$A(2,2)$为等腰三角形ABC的顶点.

（1）若底边BC在x轴上，写出一组满足条件的点B，C的坐标；

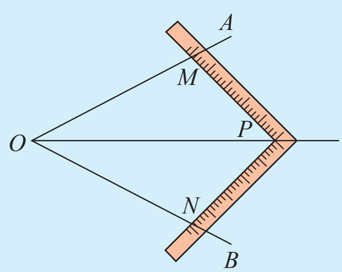
（2）若点B，C的坐标分别为$(m,0)$，$(n,0)$，要使$AB=AC$，你认为m，n分别满足怎样的条件？

（3）若底边BC的两个端点分别在x轴和y轴上，写出一组满足条件的点B，C的坐标；

（4）若点B，C的坐标分别为$(m,0)$，$(0,n)$，要使$AB=AC$，你认为m，n分别满足怎样的条件？

探索与创新

14. 数学课上，老师让同学们尝试用角尺平分一个任意角$\angle AOB$．小亮和小莹分别设计了如下方案.



（第 14 题）

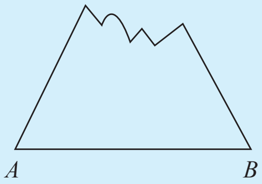
小亮：“如图，将角尺的直角顶点P置于$\angle AOB$的内部，移动角尺，使角尺两边上的刻度的读数相同，记此时角尺的两边与OA，OB两边的交点分别为M，N，此时$PM=PN$．作射线OP，则OP是$\angle AOB$的平分线”；

小莹：“在$\angle AOB$的两边上各取一点M，N，使$OM=ON$，将角尺的直角顶点P置于$\angle AOB$的内部，移动角尺，使$PM=PN$．作射线OP，则OP就是$\angle AOB$的平分线”.

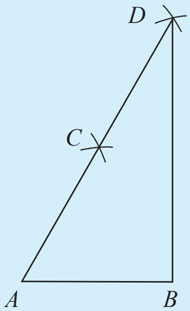
小亮和小莹的方案都可行吗？说明理由.

15. （1）分别画一个锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，用圆规和直尺分别作出三边上的高所在的直线. 你发现三边上的高所在的直线有怎样的位置关系？

（2）如图是一个缺角的三角形铁片的残片，不恢复这个缺角，利用（1）中你发现的结论，请用尺规作出 AB 边上的高所在的直线.



（第 15（2）题）



（第 16 题）

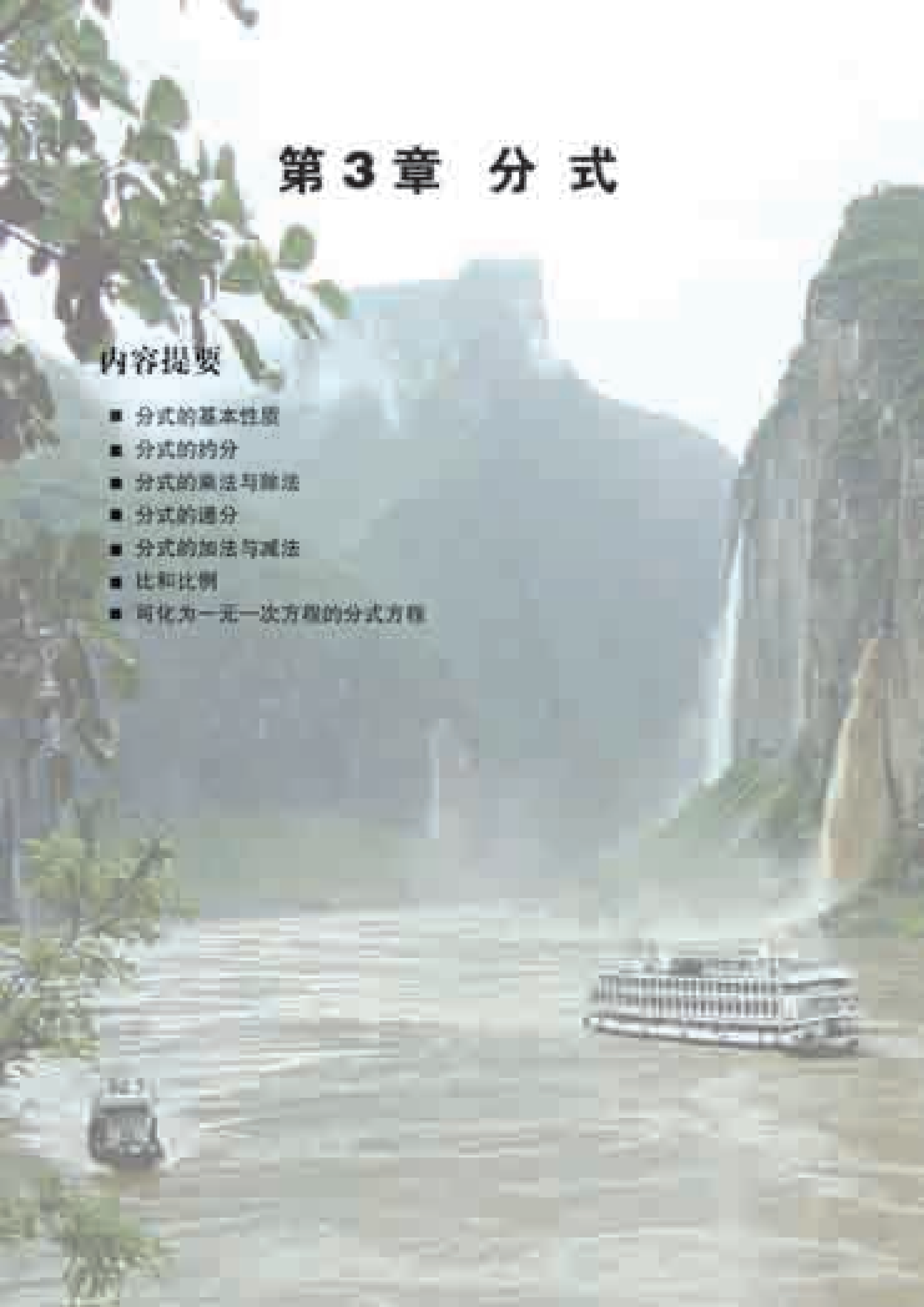
16. 木工师傅在板材边角处作直角时，往往使用“三弧法”. 其作法是：

（1）作线段 AB，分别以 A，B 为圆心，以 AB 长为半径作弧，两弧相交于点 C；

（2）以 C 为圆心，仍以 AB 长为半径作弧交 AC 的延长线于点 D；

（3）连接 BD，则 $\angle ABD$ 就是直角（如图）.

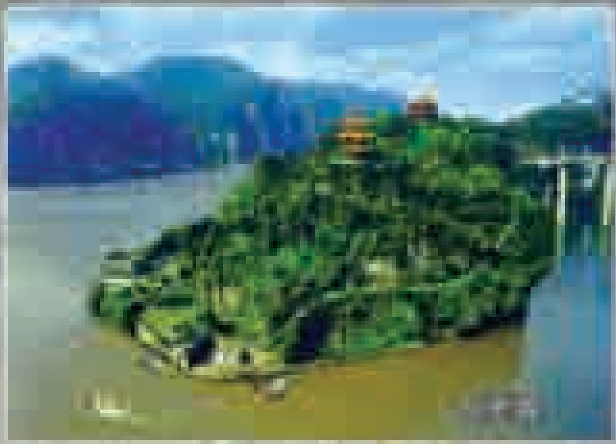
请你就 $\angle ABD$ 为什么是直角作出说明.



第3章 分式

内容提要

- 分式的基本性质
- 分式的约分
- 分式的乘法与除法
- 分式的通分
- 分式的加法与减法
- 比和比例
- 可化为一元一次方程的分式方程



情境导航

长江三峡自古以来就是四川通往中原的重要水路，也是秀丽壮美、享誉中外的世界级旅游胜地。

早在1500多年前的魏晋时期，地理学家郦道元就在他的著作《水经注》中留下这样一段生动的描述："有时朝发白帝，暮到江陵，其间千二百里，虽乘奔御风，不以疾也。"

你能列出下面的算式吗？

（1）如果客船早6时从白帝城启航，顺水而下，傍晚6时到达江陵，航程600千米，客船航行的平均速度约为多少千米/时？

（2）如果客船8小时航行了s千米，该船航行的平均速度是多少？

（3）如果客船在静水中的航行速度为v千米/时，江水流动的平均速度为20千米/时，那么客船顺水而下，航行600千米需多少时间？如果客船逆水航行s千米，需要多少时间？

3.1　分式的基本性质

交流与发现

（1）你能解答情境导航中的问题（1）（2）（3）吗？与同学交流.

（2）比较上面列出的算式 $\frac{600}{12}$，$\frac{S}{8}$，$\frac{600}{v+20}$，$\frac{S}{v-20}$ 哪些是整式？哪些不是整式？为什么？

（3）你能说出代数式 $\frac{600}{v+20}$，$\frac{S}{v-20}$ 的共同特点吗？

如果把除法算式 $A \div B$ 写成 $\frac{A}{B}$ 的形式，其中 A，B 都是整式，且 B 中含有字母时，我们把代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**（fraction），其中 A 叫做分式的**分子**（numerator），B 叫做分式的**分母**（denominator）.

（4）除上面遇到的分式 $\frac{600}{v+20}$，$\frac{S}{v-20}$ 外，你还能举出几个分式的例子吗？与同学交流.

例1　在“情境导航”问题（3）中，如果 $v=30$，$S=600$，分别求出客船顺水而下与逆水而上所需航行的时间.

解　客船顺水而下，航行600千米所需的时间为 $\frac{600}{v+20}$（时）.

当 $v=30$ 时，顺水而下所需时间为

$$\frac{600}{30+20}=12\text{（时）}.$$

这里，12是分式 $\frac{600}{v+20}$ 当 $v=30$ 时的值.

客船逆水而上，航行 S 千米所需的时间为 $\frac{S}{v-20}$（时）.

当 $v=30$，$S=600$ 时，逆水而上所需时间为

$$\frac{600}{30-20}=60（时）.$$

这里，60 是分式 $\frac{S}{v-20}$ 当 $v=30$，$S=600$ 时的值.

例2 （1）当 a 取什么值时，分式 $\frac{4a-3}{3-2a}$ 无意义?

（2）当 a 取什么值时，分式 $\frac{4a-3}{3-2a}$ 的值为 0?

解 （1）当分式的分母 $3-2a=0$ 时，$a=\frac{3}{2}$.

所以，当 $a=\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{4a-3}{3-2a}$ 无意义.

（2）当分式的分子为 0，而分母不为 0 时，分式的值为 0 .

由 $4a-3=0$，得 $a=\frac{3}{4}$.

此时，分母 $3-2a=3-2\times\frac{3}{4}\neq 0$.

所以，当 $a=\frac{3}{4}$ 时，分式 $\frac{4a-3}{3-2a}$ 的值为 0 .

加油站

因为在除法运算中除数不能为 0，所以分式中分母的值也不能为 0. 当分式中分母的值为 0 时，分式没有意义.

练 习

1. 填空：在下列代数式

$$\frac{3x}{5},\quad -\frac{3}{x},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3(a^2+1)}{4},\quad \frac{3}{\pi},\quad \frac{2x}{x^2+1},\quad \frac{a+b}{a^2-b^2}$$

中，____________是整式，____________是分式 .

2. 写出使分式 $\frac{x+1}{x+5}$ 有意义的条件 .

3. 填写下面的表格：

分式 分式的值 x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{x+3}{x+2}$	$\frac{x^2-4}{x-2}$
-3				
-2				
0	无意义			
1				
2				

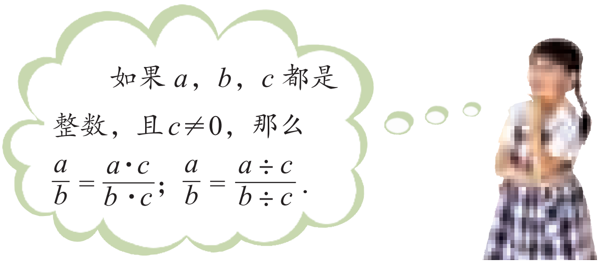
观察与思考

（1）观察下列各组中的两个分数，比较它们的异同和大小关系，并在“___”处填上适当的符号（从“>”、“<”和“=”中选取）：

①$\dfrac{2}{5}$ ___ $\dfrac{2\times 3}{5\times 3}$；　②$\dfrac{2}{5}$ ___ $\dfrac{2\times(-3)}{5\times(-3)}$；　③$\dfrac{6}{-15}$ ___ $\dfrac{6\div(-3)}{-15\div(-3)}$．

（2）想一想，你在（1）中填空的依据是什么？

（3）你能把分数的基本性质，用含有字母的等式表示出来吗？



（4）如果 $\dfrac{A}{B}$ 是一个分式，M是一个不等于 0 的整式，类比你在（3）中得到的两个等式，你能猜想分式应当有怎样的性质？

分式的分子与分母都乘（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变．这个性质叫做**分式的基本性质**，用等式表示就是

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}，\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}\text{（其中 }M\text{ 是不等于零的整式）．}$$

例3　在下面的括号内填上适当的整式，使等式成立：

（1）$\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2xy}{(\quad)}$；　　（2）$\dfrac{-m^2}{m^3}=\dfrac{(\quad)}{m}$．

解　（1）等号右边的分子 $2xy$，等于等号左边的分子 $2y$ 乘 x，所以

$$\frac{2y}{x}=\frac{2y\cdot x}{x\cdot x}=\frac{2xy}{x^2}，$$

即括号内应填入 x^2．

（2）等号右边的分母 m，等于等号左边的分母 m^3 除以 m^2，所以

$$\frac{-m^2}{m^3}=\frac{-m^2\div m^2}{m^3\div m^2}=\frac{-1}{m}，$$

即括号内应填入 -1．

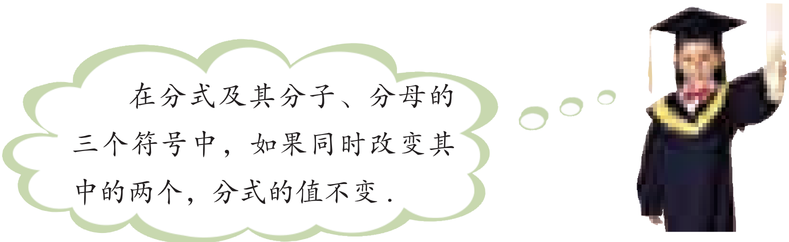
交流与发现

（1）分式 $\dfrac{-b}{-a}$ 与分式 $\dfrac{b}{a}$ 有什么不同？它们的值相等吗？为什么？

（2）分式 $\dfrac{b}{-a}$ 与分式 $\dfrac{-b}{a}$ 有什么不同？它们的值相等吗？为什么？

（3）分式 $\dfrac{-b}{a}$ 与分式 $-\dfrac{b}{a}$ 有什么不同？分式 $\dfrac{b}{-a}$ 与 $-\dfrac{b}{a}$ 有什么不同？它们的值相等吗？为什么？

（4）由问题（1）（2）（3），你发现了什么结论？



（5）你能不改变分式的值，使分式 $\dfrac{-x}{2y}$ 和 $-\dfrac{3x}{-y^2}$ 的分子和分母中都不含有负号吗？

练　习

1. 下面各组中的分式相等吗？为什么？

（1）$\dfrac{m-n}{a}$ 与 $\dfrac{2m-2n}{2a}$；　　（2）$\dfrac{a+ab}{ac}$ 与 $\dfrac{b+1}{c}$；

（3）$\dfrac{-a+b}{a-b}$ 与 -1；　　（4）$\dfrac{x+0.23y}{0.5x-y}$ 与 $\dfrac{100x+23y}{50x-100y}$．

2. 下面的等式成立吗？为什么？

（1）$\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{2x}{2x+y}$；　　（2）$\dfrac{n+m}{n-m}=\dfrac{m+n}{m-n}$．

3. 在下面的括号内填上适当的整式，使等式成立：

（1）$\dfrac{16a^2x}{(\quad)}=\dfrac{a}{x}$；　　（2）$\dfrac{2p}{10q}=\dfrac{(\quad)}{5q}$；

（3）$\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(\quad)}$；　　（4）$\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{a^2-1}{(\quad)}$．

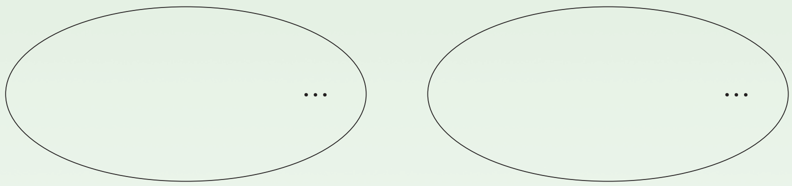
习题3.1

复习与巩固

1. 把下列除式写成分式，并指出当字母x取何值时，这些分式有意义.

（1）$(3-x)\div 3x$；　　（2）$(2x+7)\div(x-2)$.

2. 从代数式x，$x-1$和-2中，任意取出两个，把其中的一个作为分子，另一个作为分母，把所得到的式子，分别填入下面的两个圈中：



整式　　分式

3. 对分式$\dfrac{28}{x-1}$可以这样解释：某商品每件x元，商家为了促销每件降价1元．小亮用28元买了$\dfrac{28}{x-1}$件．请你对分式$\dfrac{28}{x-1}$再结合实例给出一个解释．

4. 求下列分式的值：

（1）$\dfrac{x-3}{2x+3}$，其中$x=5$；　　（2）$\dfrac{x+3y}{y-x}$，其中$x=-4$，$y=-2$．

5. 当x取什么值时，下列分式有意义？❶ 当x取什么值时，下列分式的值是0？

（1）$\dfrac{x+6}{2x-6}$；　　（2）$\dfrac{2x-36}{x}$．

6. 下列分式的变形是否正确？

（1）$\dfrac{m}{n}=\dfrac{m(x^2+1)}{n(x^2+1)}$；　　（2）$\dfrac{2}{5+y}=\dfrac{2x}{5x+y}$；

（3）$\dfrac{-x}{x-y}=\dfrac{x}{x+y}$；　　（4）$\dfrac{-x}{x-y}=\dfrac{x}{-x+y}$．

7. 不改变分式的值，使下列分式的分子或分母都不含“$-$”号：

（1）$\dfrac{n}{-5m}$；　　（2）$\dfrac{-4x^2}{-9y}$；　　（3）$-\dfrac{-a^2}{b}$．

❶ 今后若没有特别说明，所遇到的分式都是有意义的，也就是分式里分母的值都不等于0.

拓展与延伸

8. 某超市经销一种运动鞋，进货价为每双x元，销售价为每双y元．

（1）销售这种运动鞋，每双鞋的利润是多少？

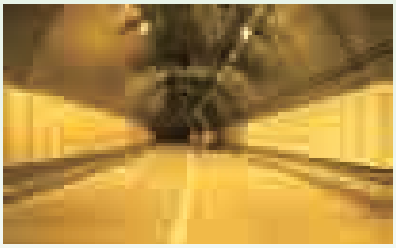
（2）销售这种运动鞋的利润率是多少？

（3）如果这种运动鞋的进货价每双提高a元，而销售价不变，那么利润率是多少？

9. 新建一条高速公路，其间要修建一条长 350 m 的隧道．施工时，如果甲、乙两个工程队分别从隧道两端同时掘进，甲队每天掘进 a m，乙队每天掘进b m．

（1）甲、乙两队经过多少天可以将隧道打通？

（2）如果$a = 3.5$ m，$b = 4$ m，求两队打通这条隧道所用的时间．



隧道

10. 不改变分式的值，使下列各题中第二个分式的分母与第一个分式的分母相同：

（1）$\dfrac{2a-b}{a-b}$ 与 $\dfrac{a-2b}{b-a}$；　　　　（2）$\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$ 与 $\dfrac{2b-a}{(b-a)^2}$．

探索与创新

11. 不改变分式的值，使下列分式的分子和分母的最高次项的系数成为正数：

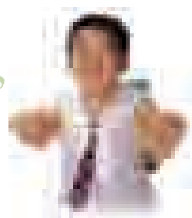
（1）$\dfrac{2-x}{-x^2+3}$；　　　　（2）$-\dfrac{5+x-x^2}{3+x}$．

3.2　分式的约分

交流与发现

（1）你以前学习过分数的约分，想一想，怎样的分数需要进行约分？分数的约分是如何进行的？举例说明.

分数的分子与分母含有 1 以外的公因数时，通常要约去这样的公因数，把分数化成最简分数或整数.



（2）仿照分数约分的意义，约去下列分式的分子和分母中除 1 以外的公因式：

① $\dfrac{a^2}{2a^3}=$ ________；　　② $\dfrac{xy}{4y^2}=$ ________.

（3）上面变形的根据是什么？与同学交流.

利用分式的基本性质，把一个分式的分子和分母中 1 以外的公因式约去，叫做分式的**约分**（reduction of a fraction）.

例1　约分：

（1）$\dfrac{-2x^2y}{4axy^3}$；　　（2）$\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab}$.

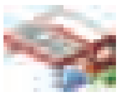
解　（1）$\dfrac{-2x^2y}{4axy^3}=-\dfrac{2x^2y}{4axy^3}$

$=-\dfrac{2xy\cdot x}{2xy\cdot 2ay^2}$

$=-\dfrac{x}{2ay^2}$；

（2）$\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab}=\dfrac{ab(a+b)}{a(a+b)}$

$=b$.



加油站

将分式进行约分时，一般要约去分子和分母中 1 以外的所有公因式. 如果分式的分子或分母带有负号，应先将负号化去；当分式的分子与分母是多项式时，应当先把多项式进行因式分解，然后再确定它们的公因式.

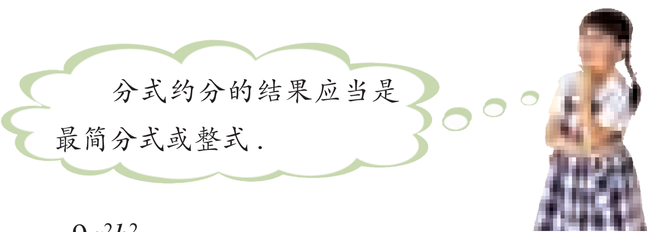
分别观察上面约分后得到的分式 $\dfrac{1}{2a}$，$\dfrac{x}{4y}$，$-\dfrac{x}{2ay^2}$ 的分子和分母，除去公因式 1 以外，它们还有其他的公因式吗？

与最简分数的意义类似，当一个分式的分子与分母，除去 1 以外没有其他的公因式时，这样的分式叫做**最简分式**（irreducible fraction）.

例2　计算：

（1）$-9a^2b^2\div(-3ab^2)$；

（2）$(a^2-4)\div(a^2-4a+4)$.

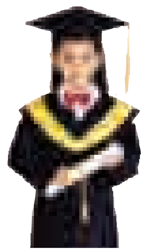


解　（1）$-9a^2b^2\div(-3ab^2)=\dfrac{-9a^2b^2}{-3ab^2}$

$=3a$；

$$(2)\ (a^2-4)\div(a^2-4a+4)=\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$$
$$=\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}$$
$$=\frac{a+2}{a-2}.$$

把整式的除法写成分式的形式，可以利用约分进行运算．两个整式相除，商可能是整式，也可能是分式．



练习

1. 约分：

(1) $\frac{32a^3}{20a^2b}$； (2) $\frac{2a+a^2}{2+a}$.

2. 下面的约分正确吗？如果不正确，请说明理由.

(1) $\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}$； (2) $\frac{x+a}{x+b}=\frac{1+a}{1+b}$；

(3) $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$； (4) $\frac{5a-15}{10a}=\frac{a-15}{2a}$.

3. 指出下列分式中的最简分式：

$$\frac{a+b}{a^2+b^2},\ \frac{a+b}{a^2-b^2},\ \frac{3x}{12y},\ \frac{2a+b}{a+b}.$$

习题3.2

复习与巩固

1. 约分：

(1) $\frac{15a^3b^4}{-6ab^6}$； (2) $\frac{-112x^2y^3}{-40axy^5}$；

(3) $\frac{(y-x)^2}{2x(x-y)}$； (4) $\frac{3(c-a)^2}{9(a-c)^3}$.

2. 约分：

（1）$\dfrac{2x+x^2}{2x}$；　　（2）$\dfrac{a^2b+ab^2}{ab}$；

（3）$\dfrac{2ab+b^2}{4a^2+b^2+4ab}$；　　（4）$\dfrac{m^2-4mn+4n^2}{m^2-4n^2}$.

3. 计算：

（1）$6x^2y \div 3xy$；　　（2）$5ab^2 \div (-15abc)$；

（3）$(6x^3y+4x^2y^3) \div (-2x^2y)$；　　（4）$(x^2-1) \div (x^2+2x+1)$.

4. 化简下面的分式，并求分式的值：

（1）$\dfrac{3a-6b}{a^2-4ab+4b^2}$，其中 $a=2$，$b=3$；

（2）$\dfrac{-x^2+2xy}{6y^2-3yx}$，其中 $x=2$，$y=3$.

拓展与延伸

5. 对于问题“当 a 为何值时，分式 $\dfrac{a^2+6a+9}{a+3}$ 有意义？”小亮的解题过程如下：

解：先将分式 $\dfrac{a^2+6a+9}{a+3}$ 进行约分，$\dfrac{a^2+6a+9}{a+3}=\dfrac{(a+3)^2}{a+3}=a+3$，

所以对任意实数 a，分式 $\dfrac{a^2+6a+9}{a+3}$ 都有意义.

你认为小亮的解答正确吗？如果不正确，应当怎样解答？说明理由.

6. 已知 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=4$，求 $\dfrac{a-2ab-b}{2a-2b+7ab}$ 的值.

探索与创新

7. 从下列三个整式中任意选出两个构成一个分式，并化简该分式：

a^2-4，　　$ab-2b$，　　$2b+ab$.

3.3　分式的乘法与除法

交流与发现

（1）你以前学习过分数的乘法与除法，分数乘法与除法的运算法则分别是什么？举例说明.

（2）你能用字母分别表示出分数乘法与除法的运算法则吗？

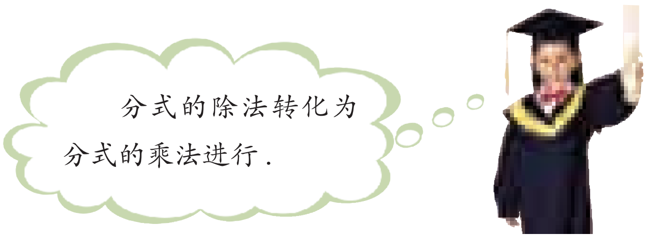
（3）仿照分数乘除法的运算法则，如果字母 a，b，c，d 都表示整式，你会进行下面的计算吗？

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=?\ (a\neq0,\ c\neq0)；\qquad \frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=?\ (a\neq0,\ c\neq0,\ d\neq0).$$

（4）类比分数的乘法与除法法则，你认为分式的乘法与除法的运算法则应当怎样叙述？与同学交流.

两个分式相乘，把分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.

两个分式相除，把除式的分子与分母颠倒位置后，再与被除式相乘.



例1 计算：（1）$\dfrac{2mn}{3m^2}\cdot\dfrac{6mn}{5n}$；（2）$\dfrac{4y}{3x}\div\dfrac{16y^2}{-9x^2}$.

解 （1）$\dfrac{2mn}{3m^2}\cdot\dfrac{6mn}{5n}$

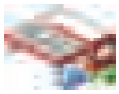
$$=\frac{2mn\cdot6mn}{3m^2\cdot5n}$$

$$=\frac{4}{5}n；$$

（2）$\dfrac{4y}{3x}\div\dfrac{16y^2}{-9x^2}$

$$=\frac{4y}{3x}\cdot\frac{-9x^2}{16y^2}$$

$$=-\frac{3x}{4y}.$$



加油站

在进行分式的乘法运算过程中，当按照法则，分子与分子相乘，分母与分母相乘时，如果分子、分母有 1 以外的公因式可先进行约分，然后再分别相乘. 如果分式的分子或分母是多项式，应当先分解因式，以便于约分.

例2 计算：（1）$\dfrac{a+1}{a-1}\cdot\dfrac{a}{a^2-1}$；

（2）$\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}\div(4y-2x)$.

解 （1）$\dfrac{a+1}{a-1}\cdot\dfrac{a}{a^2-1}$

$$=\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{a}{(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

(2) $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}\div(4y-2x)$

$$=\frac{(x-2y)^2}{x+2y}\cdot\frac{1}{2(2y-x)}$$

$$=\frac{2y-x}{2x+4y}.$$

观察与思考

观察下列算式：

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2},\qquad \left(\frac{b}{a}\right)^3=\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^3}{a^3}.$$

(1) 你能计算出 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$ 吗?

(2) 由此你能归纳出分式乘方的法则吗? 用语言和符号分别叙述出来.

分式的乘方，把分子、分母分别乘方. 即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (n\text{为正整数},\ b\neq 0).$$

例3　计算：(1) $\left(-\dfrac{b}{2a^2}\right)^3$；　(2) $\left(\dfrac{y^2}{6x^2}\right)^2\div\dfrac{y^2}{4x}$.

解　(1) $\left(-\dfrac{b}{2a^2}\right)^3=-\dfrac{b^3}{(2a^2)^3}$

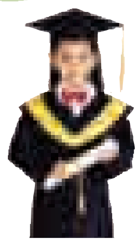
$$=-\frac{b^3}{8a^6};$$

(2) $\left(\dfrac{y^2}{6x^2}\right)^2\div\dfrac{y^2}{4x}=\dfrac{y^4}{36x^4}\div\dfrac{y^2}{4x}$

$$=\frac{y^4}{36x^4}\cdot\frac{4x}{y^2}$$

$$=\frac{y^2}{9x^3}.$$

分式乘方时，要注意幂的符号. 若分式本身的符号是负的，应类比负数乘方法则进行，即负数的偶次幂为正数，负数的奇次幂为负数.



练 习

1. 计算：

（1）$\dfrac{8x}{9y}\cdot\dfrac{3y}{2x^2}$；（2）$\dfrac{2a}{3bc}\cdot\dfrac{5bc^2}{8a}$；

（3）$\dfrac{12ab}{5x}\div\dfrac{4ab}{7xy}$；（4）$3xy\div\dfrac{2y^2}{3x}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{a+3}{a-3}\cdot\dfrac{1}{a^2+3a}$；（2）$\dfrac{2a-4}{x}\div\dfrac{a-2}{2x}$.

3. 计算：

（1）$\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^5$；（2）$\left(\dfrac{x^3y^2}{z}\right)^2\cdot\left(\dfrac{yz}{x^2}\right)^3$.

习题3.3

复习与巩固

1. 计算：

（1）$\dfrac{3xy}{5a}\cdot\dfrac{7ab}{6xy}$；（2）$\dfrac{3bc}{5a^2}\cdot\dfrac{-2ab}{3c^2}$；

（3）$(-4ab)\div\dfrac{2b}{ax}$；（4）$\dfrac{2x}{5y}\div\dfrac{-3x}{4y}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{3mn^2}{5a^2b}\cdot\left(-\dfrac{15ab^2}{7m^2n}\right)$；（2）$\dfrac{12xy}{5a}\div 8x^2y$.

3. 计算：

（1）$\dfrac{x^2+x}{x}\cdot\dfrac{2x}{x+1}$；（2）$\dfrac{2x-4}{x+2}\div\dfrac{x}{4-x^2}$；

（3）$\dfrac{m^2-2m+1}{4-m}\cdot\dfrac{m-4}{m^2-1}$；（4）$\dfrac{2a-2b}{a+b}\div\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

4. 计算：

（1）$\left(\dfrac{3x}{4y}\right)^3$；（2）$\left(-\dfrac{x^2}{y}\right)^2\div\left(-\dfrac{y}{x}\right)^3$.

拓展与延伸

5.（1）试写出两个分式，使它们的积为 $2x+1$；

（2）试写出一个整式和一个分式，使它们的积为 $2x+1$.

6. 计算：

（1）$\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)^2\cdot\dfrac{a}{a^2-b^2}$；　　（2）$\left(\dfrac{4ac-16ab}{4a}\right)^2\div(c-4b)^2$.

探索与创新

7. 给定下列分式：$\dfrac{x^3}{y}$，$-\dfrac{x^5}{y^2}$，$\dfrac{x^7}{y^3}$，$-\dfrac{x^9}{y^4}$，…（$xy\neq0$）.

（1）这列分式的分子、分母和符号分别有什么特征?

（2）从第 2 个分式起，把任意一个分式除以它前面的一个分式，有什么规律?

（3）根据你发现的规律，写出给定的这列分式中的第 10 个分式 .

3.4　分式的通分

交流与发现

（1）某市为缓解某交通路口车辆堵塞现象，决定在该路口新建一座大型立交桥. 原计划 x 个月完工，每个月需完成工程量的几分之几？如果这项工程要求比原计划提前 3 个月完成，那么每个月需完成工程量的几分之几?

（2）你能把上面问题中得到的两个分式化为同分母的分式吗?

立交桥

在问题（1）中，如果按原计划，那么每月需完成工程量的 $\dfrac{1}{x}$，如果提前 3 个月完成，那么每月需完成工程量的 $\dfrac{1}{x-3}$. 类比分数的通分，因为 $x(x-3)$ 是分式 $\dfrac{1}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x-3}$ 的公分母，所以可以把它们都化

成分母是$x(x-3)$的分式．根据分式的基本性质，得

$$\frac{1}{x}=\frac{x-3}{x(x-3)},\qquad \frac{1}{x-3}=\frac{x}{x(x-3)}.$$

像这样，把几个异分母的分式化成与原来的分式相等的同分母分式的变形叫做分式的**通分**（changing fractions to a common denominator）.

（3）观察分式$\frac{3}{2x^2}$与$\frac{a}{3xy}$你发现它们的分母有什么特点？它们的公分母有多少个？如果把它们化为同分母分式，你认为应当从中选择一个怎样的整式作为它们的公分母？

分式$\frac{1}{2x^2}$，$\frac{a}{3xy}$的分母$2x^2$与$3xy$分别都是单项式，系数2和3的最小公倍数是6，字母因式x，y的最高次幂分别是x^2，y，所以应当把$6x^2y$作为这两个分式的公分母.

与异分母分数的通分类似，异分母分式的通分，关键是确定它们的公分母. 通常取各分母系数的最小公倍数与所有字母因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母叫做**最简公分母**.

（4）要把分式$\frac{3}{2x^2}$，$\frac{a}{3xy}$化成分母是$6x^2y$的分式，它们的分子分母应当分别同乘一个怎样的整式？

（5）你能把分式$\frac{3}{2x^2}$与$\frac{a}{3xy}$进行通分吗？

因为$\frac{3}{2x^2}$与$\frac{a}{3xy}$的最简公分母是$6x^2y$，$6x^2y\div 2x^2=3y$，$6x^2y\div 3xy=2x$．所以

$$\frac{3}{2x^2}=\frac{3\cdot 3y}{2x^2\cdot 3y}=\frac{9y}{6x^2y};$$

$$\frac{a}{3xy}=\frac{a\cdot 2x}{3xy\cdot 2x}=\frac{2ax}{6x^2y}.$$

例1　把下列各题中的分式通分：

（1）$\frac{y}{2x^2}$，$\frac{1}{3xy}$，$\frac{3x}{4xy^2}$；　　（2）$\frac{n}{2(m+4)}$，$\frac{-5mn}{m^2-16}$.

解 （1）分式 $\dfrac{y}{2x^2}$，$\dfrac{1}{3xy}$，$\dfrac{3x}{4xy^2}$ 的最简公分母是 $12x^2y^2$，

$$\frac{y}{2x^2}=\frac{y\cdot 6y^2}{2x^2\cdot 6y^2}=\frac{6y^3}{12x^2y^2};$$

$$\frac{1}{3xy}=\frac{1\times 4xy}{3xy\cdot 4xy}=\frac{4xy}{12x^2y^2};$$

$$\frac{3x}{4xy^2}=\frac{3x\cdot 3x}{4xy^2\cdot 3x}=\frac{9x^2}{12x^2y^2}.$$

（2）因为 $m^2-16=(m+4)(m-4)$，所以分式 $\dfrac{n}{2(m+4)}$ 与 $\dfrac{-5mn}{m^2-16}$ 的最简公分母是 $2(m+4)(m-4)$，

$$\frac{n}{2(m+4)}=\frac{n(m-4)}{2(m+4)(m-4)};$$

$$\frac{-5mn}{m^2-16}=-\frac{10mn}{2(m+4)(m-4)}.$$

你能总结一下分式通分的步骤吗？如何检验通分的结果是正确的？

分母是多项式时，应先将分母分解因式，以便于找出它们的最简公分母.

练 习

1. 把下列各题中的分式通分：

（1）$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$；　（2）$\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{a}{3b}$；

（3）$\dfrac{2}{2x+3}$，$\dfrac{3}{2x}$；　（4）$\dfrac{x-1}{x(x+1)}$，$\dfrac{1}{x-1}$.

2. 填写下面的表格：

通分前的分式		最简公分母	通分后的分式	
$\dfrac{3}{4xy}$	$\dfrac{5}{2x^2y}$			
$\dfrac{1}{2x-1}$	$\dfrac{1}{2x+1}$			
$\dfrac{x}{2x-1}$	$\dfrac{x+1}{4x^2-1}$			

习题3.4

复习与巩固

1. 填空：

（1）$\dfrac{2}{xy}$ 与 $\dfrac{3y}{xy-x^2}$ 的最简公分母是________________；

（2）$\dfrac{a}{a^2-9}$ 与 $\dfrac{1}{a^2+6a+9}$ 的最简公分母是________________.

2. 把下列各题中的分式通分：

（1）$\dfrac{3}{8xy}$，$\dfrac{1}{6xz^2}$；

（2）$\dfrac{a}{a+b}$，$\dfrac{b}{a-b}$；

（3）$\dfrac{a}{(a-2)^2}$，$\dfrac{3a-1}{a-2}$；

（4）$\dfrac{x}{x+y}$，$\dfrac{x+y}{x^2-xy}$，$\dfrac{y}{x-y}$.

拓展与延伸

3. 把下列各题中的分式通分：

（1）$\dfrac{1}{6x-4y}$，$\dfrac{2y}{9x^2-4y^2}$，$\dfrac{x}{3x+2y}$；

（2）$\dfrac{1}{(x+y)(y+z)}$，$\dfrac{1}{(y+z)(x+z)}$，$\dfrac{1}{(x+y)(x+z)}$；

（3）$\dfrac{b}{a(x-1)(2-x)}$，$\dfrac{a}{b(1-x)(x-2)}$.

3.5　分式的加法与减法

交流与发现

思考下面的问题：

（1）你以前学习过分数的加法与减法，同分母分数的加减运算法则是什么？举例说明.

（2）你能用字母分别表示出同分母分数加法与减法的法则吗？

（3）仿照同分母分数加法与减法的法则，如果字母 a，b，c 都表示整式

（$a \neq 0$），你会进行下面的计算吗？

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=? \qquad \frac{b}{a}-\frac{c}{a}=?$$

（4）类比同分母分数的加减法法则，你认为同分母分式的加减法法则应当怎样叙述？与同学交流.

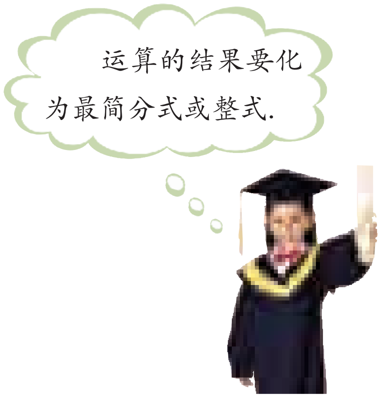
同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减 .

例1 计算：

（1）$\frac{y}{3x}+\frac{5y}{3x}$； （2）$\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{m^2+n^2}{mn}$.

解 （1）$\frac{y}{3x}+\frac{5y}{3x}=\frac{y+5y}{3x}=\frac{6y}{3x}=\frac{2y}{x}$；

（2）
$$\begin{aligned}\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{m^2+n^2}{mn}&=\frac{(m^2-n^2)-(m^2+n^2)}{mn}\\&=\frac{m^2-n^2-m^2-n^2}{mn}\\&=\frac{-2n^2}{mn}\\&=-\frac{2n}{m}.\end{aligned}$$



例2 计算：

（1）$\frac{a+2}{2a-3}+\frac{3a-8}{2a-3}$； （2）$\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}$.

解 （1）
$$\begin{aligned}\frac{a+2}{2a-3}+\frac{3a-8}{2a-3}&=\frac{(a+2)+(3a-8)}{2a-3}\\&=\frac{4a-6}{2a-3}\\&=\frac{2(2a-3)}{2a-3}=2;\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}&=\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x-y}\\&=\frac{x^2-y^2}{x-y}\\&=\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}=x+y.\end{aligned}$$

练习

1. 计算：

（1）$\dfrac{3y}{x}+\dfrac{y}{x}$；　　（2）$\dfrac{a+3}{3a+2}-\dfrac{2a-1}{3a+2}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{2b}{a-4}+\dfrac{3b}{4-a}$；　　（2）$\dfrac{2x-z}{x-y}-\dfrac{z-2y}{y-x}$.

交流与发现

（1）异分母分数加法与减法的法则是什么？举例说明.

（2）你能分别用字母表示出异分母分数加减运算的法则吗？

（3）仿照异分母分数加法与减法的法则，如果字母 a，b，c，d 都表示整式（$a\neq0$，$c\neq0$），你会进行下面的计算吗？

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=?\qquad \frac{b}{a}-\frac{d}{c}=?$$

（4）类比异分母分数的加减法的法则，你认为异分母分式的加减法法则应当怎样叙述？与同学交流.

异分母的分式相加减，先把它们通分，变为同分母分式，再加减.

例3 计算：

（1）$\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{6bc}$；　　（2）$\dfrac{a+b}{3ab}-\dfrac{a-b}{5b^2}$.

解 （1）$\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{6bc}$

$$=\frac{3c}{6abc}+\frac{a}{6abc}$$

$$=\frac{a+3c}{6abc};$$

（2）$\dfrac{a+b}{3ab}-\dfrac{a-b}{5b^2}$

$$=\frac{5b(a+b)}{15ab^2}-\frac{3a(a-b)}{15ab^2}$$

$$=\frac{5b(a+b)-3a(a-b)}{15ab^2}$$

$$=\frac{5b^2+8ab-3a^2}{15ab^2}.$$

例4　计算：

（1）$\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$；　　（2）$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}$.

解　（1）$\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$

$$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2}{m-3}$$

$$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{12-2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{6-2m}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{-2(m-3)}{(m+3)(m-3)}$$

$$=-\frac{2}{m+3}.$$

（2）$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}$

$$=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}.$$

挑战自我

已知 $\dfrac{5x-4}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+2}$，求 A，B 的值.

智趣园

从埃及分数谈起

在距今 3 700 多年前的古埃及纸草书中，记载和讨论了分子为 1 的分数. 后来，人们把分子为 1 的分数叫做埃及分数.

能把一个埃及分数写成两个不相等的埃及分数的和，甚至写成任意多个不相等的埃及分数的和吗？

由等式
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}, \tag{①}$$

移项，得
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}. \tag{②}$$

利用等式②就可以把一个埃及分数写成两个或任意多个不相等的埃及分数的和.

例如，可以把 $\frac{1}{3}$ 写成两个不相等的埃及分数的和. 将 $n=3$ 代入等式②，得
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}.$$

进一步，可以把 $\frac{1}{3}$ 写成三个不相等的埃及分数的和. 例如，将 $n=4$ 代入等式②，得
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20},$$

从而有
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

再进一步，可以把 $\frac{1}{3}$ 写成四个不相等的埃及分数的和. 例如，将 $n=5$ 代入等式②，得
$$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30},$$

从而有
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}.$$

可以看出，运用这种方法可以把 $\frac{1}{3}$ 写成任意多个不相等的埃及分数的和. 你还能把 $\frac{1}{3}$ 写成另外三个、四个埃及分数的和吗？

等式①的威力还不止于此. 把等式①反过来，得到
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \tag{③}$$

应用③，可以进行一些有趣的计算．例如

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}\\
=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\
=&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\\
=&1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{99}\right)-\frac{1}{100}\\
=&1-\frac{1}{100}\\
=&\frac{99}{100}.
\end{aligned}$$

练 习

1. 计算：(1) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$；　　(2) $\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

　(3) $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+2}$；　　(4) $\frac{1}{m+n}-\frac{m}{m^2-n^2}$.

2. 填空：已知某室内游泳池的容积为 v m³.

　(1) 如果每小时向空池内注水 a m³，那么 ________ 时可以把游泳池注满；

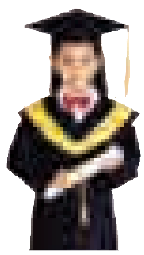
　(2) 如果每小时多注水 b m³，那么可以提前 ________ 时把游泳池注满.

例5　计算：

(1) $\frac{x}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}-\frac{x^4y}{x^4-y^4}\div\frac{x^2}{x^2+y^2}$；　　(2) $\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x+3}{x^2-3x}$.

解　(1) $\frac{x}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}-\frac{x^4y}{x^4-y^4}\div\frac{x^2}{x^2+y^2}$；

$$\begin{aligned}
&=\frac{x}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}-\frac{x^4y}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2};\\
&=\frac{xy^2}{(x-y)(x+y)}-\frac{x^2y}{(x+y)(x-y)}\\
&=\frac{xy(y-x)}{(x+y)(x-y)}\\
&=-\frac{xy}{x+y}.
\end{aligned}$$



分式混合运算的顺序与有理数混合运算的顺序相同，即先乘方，再乘除，最后算加减．如果有括号，就先算括号里的.

(2) $\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{x}\right)\div\dfrac{x+3}{x^2-3x}$

$$=\frac{x+3}{x(x-3)}\div\frac{x+3}{x^2-3x}$$

$$=\frac{x+3}{x(x-3)}\cdot\frac{x(x-3)}{x+3}$$

$$=1.$$

例6 先化简，再求值：

$1-\dfrac{a-1}{a}\div\left(\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{1}{a^2+2a}\right)$，其中 $a=2$.

解

$$1-\frac{a-1}{a}\div\left(\frac{a}{a+2}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$$

$$=1-\frac{a-1}{a}\div\frac{a^2-1}{a(a+2)}$$

$$=1-\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}$$

$$=1-\frac{a+2}{a+1}$$

$$=-\frac{1}{a+1}.$$

当 $a=2$ 时，原式 $=-\dfrac{1}{3}$.

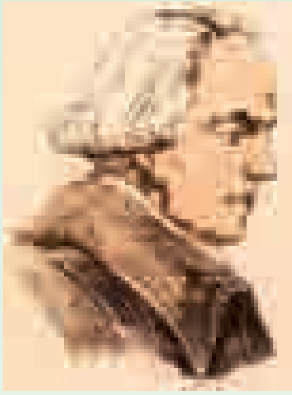
广角镜

类比与数学发现

分数与分式有许多特征是相同或类似的. 例如，分数与分式的表示形式是相同的. 分数的分子与分母都是整数，分式的分子与分母都是整式；分数的分母不能为 0，分式的分母也不能为 0；在英文中，分数和分式甚至都用同一个单词“fraction”.

正因为如此，可以猜想它们在其他方面也可能是相同或类似的. 例如，由分数的基本性质联想到分式也应当有类似的基本性质；由分数可以进行约分和通分联想到分式也可以进行约分和通分；由分数的乘除法法则联想到分式的乘除法法则；由分数的加减法法则联想到分式的加减法法则等.

根据两个或两类事物在某些方面相同或类似，而猜想它们在其他方面也相同或类似的方法，叫做**类比**. 法国著名数学家拉普拉斯（Laplace, 1749—1827）说过：“甚至在数学里，发现真理的工具也是归纳和类比.”德国著名哲学家康德（Kant, 1724—1804）也指出：“每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这种方法往往能指引我们前进.”在数学及其他科学的发展史上，许多重要的数学猜想与科学假说是通过类比发现的；工程技术中的许多重要发明也是在类比思想的启迪下获得的. 类比已成为人类进行探索和发现的一种重要工具.



拉普拉斯

由 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

你能通过类比化简代数式

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

吗？能验证你的猜测是否正确吗？

应当指出，运用类比进行推理的依据并不充分，类比的过程只是猜测、推广的过程，因而类比推理的结论也只能称为类比联想，不能保证它一定是正确的. 例如，由

$$a(m+n)=am+an$$

类比出

$$a^{m+n}=a^m+a^n,$$

就是错误的.

练习

1. 计算：

（1）$\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x^2+2x+1}{x^2-4}+\frac{1}{x+1}$；

（2）$\left(\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\div\frac{b}{b-a}$.

2. 化简：$x\left(2-\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{x^2-2x}\cdot(x^2-4)$.

习题3.5

复习与巩固

1. 计算：

（1）$\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{a}$；　　（2）$\dfrac{3x-1}{xy}-\dfrac{1}{xy}$；

（3）$\dfrac{a^3}{a-1}+\dfrac{a}{1-a}$；　　（4）$\dfrac{3a}{a-4b}-\dfrac{a+b}{4b-a}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}$；　　（2）$\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{2x-5}{x^2-3x}$；

（3）$\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$；　　（4）$\dfrac{2xy}{x^2-y^2}-\dfrac{y}{x-y}$.

3. 计算：

（1）$\dfrac{b-a}{ab}+\dfrac{c-b}{bc}+\dfrac{a-c}{ac}$；　　（2）$\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{x+5}{x^2-x}$；

（3）$1-\dfrac{4x}{2x+y}$；　　（4）$\dfrac{x^2}{x+1}-x+1$.

4. 计算：

（1）$\dfrac{3b^2}{4a^2}\cdot\left(\dfrac{a}{-6b}\right)$；　　（2）$\dfrac{x}{x^2-2x}\cdot(x^2-4)$；

（3）$\dfrac{2x^3z}{y}\div\dfrac{4xz^2}{-3y^2}$；　　（4）$\dfrac{3ab+a^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a+3b}{a-b}$.

5. 计算：

（1）$\dfrac{a+2}{a^2-2a+1}\cdot\dfrac{a^2-4a+4}{a+1}\div\dfrac{a^2-4}{a^2-1}$；　　（2）$\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$\left(-\dfrac{-y}{x^2}\right)^3$；　　（4）$\dfrac{x^4-y^4}{x-y}\div\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)^2$.

6. 计算：

（1）$\left(\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+4}\right)\div\dfrac{2}{x^2-16}$；　　（2）$\dfrac{xy^2}{x^2-y^2}\div\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)^2$；

（3）$1-\dfrac{a-b}{a+b}\div\dfrac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$；　　（4）$\left(1-\dfrac{x}{x-1}\right)\div\dfrac{1}{x^2-x}$.

7.（1）甲、乙两捆相同型号的电线，质量分别为 m kg 和 n kg（$m>n$）. 如果这种电线每米的质量为 a kg，那么这两捆电线的长度相差多少米？

（2）甲、乙两捆型号不同的电线，质量分别为 p kg 和 q kg，甲捆电线每米的质量为 a kg，乙捆电线每米的质量为 b kg，那么这两捆电线的总长度为多少米？

8. 神州号客轮在静水中航行的平均速度为 v km/h，长江水流的平均速度为 a km/h，武汉到上海的水上距离为 s km．如果这艘客轮从武汉开往上海后停留6小时，然后返回武汉，那么往返一次所用的时间是多少？

拓展与延伸

9. 已知 $A=\frac{4}{x^2-4}$，$B=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}$，在以下三个结论中：

（1）$A=B$；（2）A，B 互为倒数；（3）A，B 互为相反数

哪个正确？为什么？

10. 已知 $a\neq0$，$b\neq0$，$a^2-b^2\neq0$．小亮用 4 步演算出下式的结果：

$$\frac{1}{a^2-b^2}\div\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\div\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a^2-b^2}\div\frac{1}{a-b} \qquad （第 1 步）$$

$$=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b} \qquad （第 2 步）$$

$$=\frac{1}{(a+b)-(a-b)} \qquad （第 3 步）$$

$$=\frac{1}{2b}. \qquad （第 4 步）$$

他的计算过程正确吗？如果不正确，第几步开始出现错误？写出正确的计算过程.

11. 先化简分式：$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}\div\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a-a^2}{a-1}$，然后在 0，1，2，3 中选一个你认为合适的 a 值，代入求值.

探索与创新

12. 请写出两个异分母分式，使它们的和为 $\frac{1}{x}$.

3.6 比和比例

交流与发现

某种消毒液的说明书上注明：当对水果、蔬菜消毒时，该消毒液与所加清水的比为1∶1 000．你知道这里1∶1 000的含义吗？

八年级一班男、女生人数的比是$m:n$，你知道$m:n$的含义吗？

两个数a与b（$b\neq0$）相除，叫做a与b的**比**（ratio），记作$a:b$或$\frac{a}{b}$. 其中，a叫做比的**前项**，b叫做比的**后项**.

你能举出生活中见到的比的例子吗？与同学交流.

因为$a:b$可以记作$\frac{a}{b}$，所以常常通过化简分式$\frac{a}{b}$来化简$a:b$.

你能化简下面的比吗？试试看.

（1）$18a:16b$；　　　　（2）$50x:15$.

例1　八年级一班有学生a名，如果男、女生人数的比是$m:n$，那么该班女生有多少名？

解　因为男、女生人数的比是$m:n$，所以女生人数为该班学生总数的$\frac{n}{m+n}$.

于是
$$a\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{an}{m+n}\text{（名）}.$$

所以，该班有女生$\frac{an}{m+n}$名.

例2　如图3-1，时代中学的校园中有两块草坪. 草坪甲是边长为a的正方形，中间有一个边长为b的正方形喷水池，草坪乙是长为c，宽为$a-b$的长方形. 求甲、乙两块草坪的面积的比.

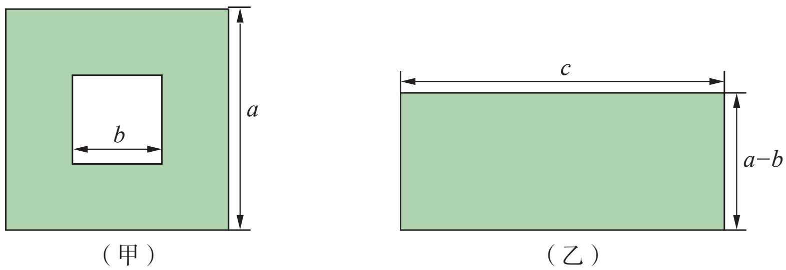


图 3-1

解　草坪甲的面积是a^2-b^2，草坪乙的面积是$c(a-b)$，

$$\frac{a^2-b^2}{c(a-b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{c(a-b)}=\frac{a+b}{c}.$$

所以，甲、乙两块草坪的面积的比是$\frac{a+b}{c}$.

练 习

1. 把下面的比写成分式的形式，并化简：

（1）$35a : 7a^2$；　　　　（2）$4xy^2 : 6x^2y$；

（3）$(x+y) : (x^2-y^2)$；　　　　（4）$a : (a^2+2a)$.

2. 设 b，c 都是不为 0 的数.

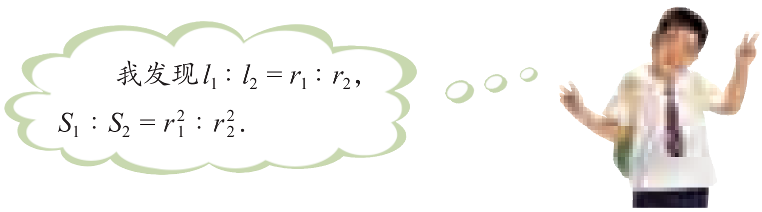
（1）$a : b$ 等于 $(ca) : (cb)$ 吗？为什么？

（2）$a : b$ 等于 $(a+c) : (b+c)$ 吗？举例说明.

（3）$a : b$ 等于 $a^2 : b^2$ 吗？举例说明.

交流与发现

已知⊙O_1 的半径为 r_1，周长为 l_1，面积为 S_1，⊙O_2 的半径为 r_2，周长为 l_2，面积为 S_2. 分别计算 $l_1 : l_2$，$S_1 : S_2$，你发现了什么？



表示两个比相等的式子叫做**比例式**，简称**比例**（proportion）. 如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，就说 a，b，c，d 四个数成比例. 可以写成

$$a : b = c : d，或 \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

在比例中，a，b，c，d 叫做组成比例的**项**，其中 a 与 d 叫做**比例的外项**（extreme terms of proportion），b 与 c 叫做**比例的内项**（internal terms of proportion）. 当比例的两个内项相等，即当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 时，b 叫做 a 和 c 的**比例中项**（mean term of proportion）.

利用等式的基本性质，在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的两边同乘 bd（$bd\neq0$），你发现了什么？

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，**那么** $ad=bc$（$bd\neq0$）. 这就是说，**在比例中，两外项的乘积等于两内项的乘积.**

这个性质叫做**比例的基本性质**.

反过来，由 $ad = bc$（$bd \neq 0$），能得出 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 吗？为什么？

例3 已知 $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}$，求 $a : b$.

解 由 $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}$，利用比例的基本性质，得

$$2(a-b) = a,$$

即 $2a - 2b = a$.

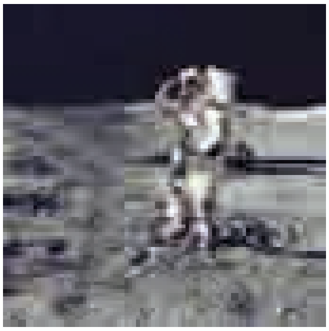
从而 $a = 2b$，

所以 $a : b = 2$.

你还有其他解法吗？

例4 同一个物体在月球上和地球上的重力是不同的，二者的比是 1 : 6. 如果一名宇航员在地球上的重力为 750 N，那么他在月球上的重力是多少？

解 设该宇航员在月球上的重力为 x N，



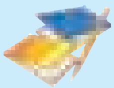
由题意，得 $x : 750 = 1 : 6$.

利用比例的基本性质，得

$$6x = 750.$$

解得 $x = 125$.

所以，该宇航员在月球上的重力是 125 N.



练 习

1. 填空：

（1）如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$，那么 $\frac{b}{a} =$ __________；

（2）如果 $\frac{4}{x} = \frac{7}{y}$，那么 $\frac{x}{y} =$ __________；

（3）如果 $3b - 4a = 0$，且 $b \neq 0$，那么 $a : b =$ __________；

（4）已知 3 是 x 与 4 的比例中项，写成比例式应为 ______，其中 $x =$ ______.

2. 已知 $\frac{a-2b}{3b-a} = \frac{3}{5}$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

实验与探究

在七年级你已经学过线段的度量. 当单位长度确定后，就可以量出一条线段的长度. 在选用同一单位长度表示两条线段长度时，它们的量数的比，叫做这**两条线段的比**.

（1）选用 cm 为单位长度，用刻度尺分别度量线段 AB 和 CD 的长度（图3-2），计算 $AB:CD$.

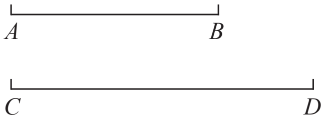
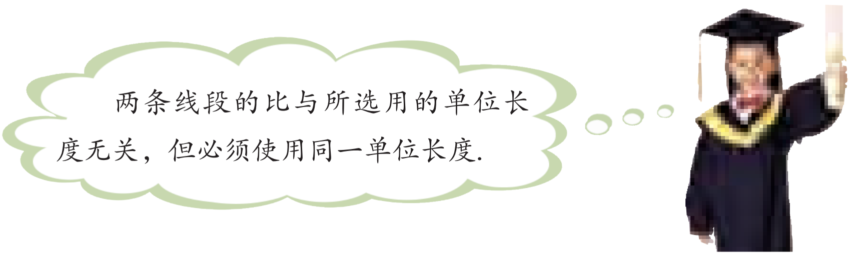


图 3-2

（2）如果选用 mm 为单位长度，用刻度尺分别度量线段 AB 和 CD 的长度，计算 $AB:CD$.

（3）由（1）（2）你发现两条线段的比与所选用的单位长度有关吗？与同学交流.



在四条线段 a，b，c，d 中，如果 $a:b=c:d$，那么这四条线段 a，b，c，d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**（proportional segments）.

由于两条线段的比就是两个数的比，因此比例的基本性质也适合于比例线段.

例5 如图3-3，已知 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，且 $AD=15$，$AB=40$，$AC=28$，求 AE 的长.

解 由已知条件，得

$$DB=AB-AD=40-15=25,$$
$$EC=AC-AE=28-AE.$$

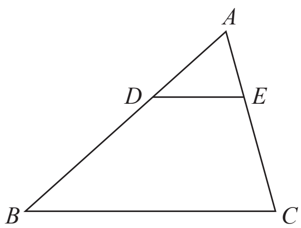


图 3-3

所以

$$\frac{15}{25}=\frac{AE}{28-AE}.$$

根据比例的基本性质，得

$$15(28-AE)=25AE.$$

解关于 AE 的方程，得

$$AE = 10.5\ .$$

观察与思考

在例5中，$AD = 15$，$DB = 25$，$AB = 40$．思考下面的问题：

（1）$AD : DB =$ ______________；

$DB : AB =$ ______________．

（2）按照上面的结果，可以把线段 AD，DB，AB 的比写成

$AD : DB : AB =$ ________ : ________ : ________．

在“$AD : DB$”与“$DB : AB$”这两个比中，“DB”是相同的，也就是说，前一个比的后项与后一个比的前项是相同的，因而可以把这两个比连起来写在一起，得到

$$AD : DB : AB = 3 : 5 : 8,$$

这种形式叫做**连比**（continued proportion）.

例6 $\triangle ABC$ 的周长为 52 cm，$AB : BC : AC = 3 : 4 : 6$，求三条边的长.

解 因为 $3 + 4 + 6 = 13$，

$$AB = 52 \times \frac{3}{13} = 12,$$

$$BC = 52 \times \frac{4}{13} = 16,$$

$$AC = 52 \times \frac{6}{13} = 24\ .$$

所以，AB，BC，AC 的长分别是 12 cm、16 cm、24 cm．

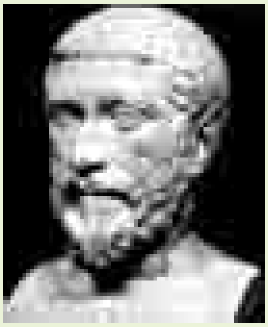
挑战自我

（1）如果 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$（$a$，$b$，$c$ 都不为 0），能得到 $a : b : c = 2 : 3 : 4$ 吗？为什么？

（2）如果 $a : b : c = 2 : 3 : 4$，能得到 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ 吗？为什么？

史海漫游

调和数



毕达哥拉斯

在公元前 500 年前后，以古希腊数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—前 500）为首的毕达哥拉斯学派就开始用数学方法研究音乐. 他们根据一个简单整数比原理，创造了一套音乐理论. 他们发现，弹拨琴弦时声音音调的高低，取决于弦的长度. 绷得同样紧的几根弦，当它们长度的比能够表示成整数的比时，发出的声音就比较和谐. 例如，当三根弦的长度的比为 15∶12∶10 时，三根弦将分别发出很调和的乐声do，mi，so .

通过研究15，12，10这三个数的倒数 $\frac{1}{15}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{10}$，人们发现

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}-\frac{1}{15}.$$

后来，就把适合关系

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}.$$

的三个正整数 a，b，c 叫做一组调和数.

想一想，你能写出几组调和数吗？

练习

1. 线段 $a=36$ cm，$b=1.8$ m，求 $a:b$.
2. 已知 a，b，c，d 是成比例线段，其中 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$c=6$ cm . 求 d.
3. 今年植树节，七、八、九年级的同学共植树 480 棵. 已知三个年级植树棵数的比为 4∶5∶7，三个年级各植树多少棵?

习题3.6

复习与巩固

1. 根据下列各式，求 $x:y$.

（1）$3x=4y$；　　　　（2）$3:5=y:x$；

（3）$2:x=3:y$；（4）$a:y=b:x$.

2. 在一张放大的蜻蜓图片上，量得蜻蜓双翼伸展开的宽度是 a cm. 已知该图片的比例尺是 $1:0.2$，求蜻蜓双翼伸展开的实际宽度.

3. 解答下列各题：

（1）已知 $(5-x):x=2:3$，求 x 的值；

（2）已知 $\dfrac{2a+b}{3a+5b}=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{a}{b}$ 的值.

4. 已知四条线段 a，b，c，d 的长度为 $a=2$ cm，$b=30$ m，$c=6$ cm，$d=10$ m. 请判断它们是否成比例.

5. 已知线段 AB，延长 AB 到 C，使 $BC=2AB$，求：

（1）$AC:AB$；（2）$AB:BC$；

（3）$AC:BC$.

6. 已知 $x:y=2:3$，$y:z=4:7$，求连比 $x:y:z$.

7. 某种蛋糕的制作原料有面粉、鸡蛋和糖. 已知这几种原料质量的比是 $11:8.5:4.5$，那么制作一个质量为 960 g 的蛋糕需要原料各多少？

8. 已知 $a:b:c=4:3:2$，求 $\dfrac{a+2b+3c}{c}$ 的值.

拓展与延伸

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 $a=2$，$b=4$，$c=3$. 求三边上的高的连比 $h_a:h_b:h_c$.

10. 解答下列各题：

（1）已知 $\dfrac{a-b}{a}=\dfrac{1}{7}$，求 $\dfrac{a+b}{a}$ 的值；

（2）已知 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{7}$，且 $3x-2y+z\neq 0$，求 $\dfrac{3x+2y-z}{3x-2y+z}$ 的值.

探索与创新

11. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$，其中 b，d，f 均不为 0，且 $b+d+f\neq 0$，$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ 与 $\dfrac{a}{b}$ 相等吗？为什么？

12. 点 P 和 Q 同在线段 AB 上，且在 AB 的中点 C 的同侧. 点 P 分线段 AB 成 $2:3$，点 Q 分线段 AB 成 $3:4$. 已知 $PQ=2$ cm，求 AB 的长.

3.7　可化为一元一次方程的分式方程

交流与发现

王师傅承担了 310 个工件的焊接任务. 加工了 100 个工件后，开始采用焊接新工艺，工效提高到原来的 1.5 倍，共用 8 天完成了任务. 采用新工艺前，王师傅每天焊接多少个工件?

思考下面的问题：

(1) 在这个问题中，哪些是已知量，哪些是未知量?

(2) 如果选取某一个未知量用 x 表示，那么其他未知量怎样用关于 x 的代数式表示?

(3) 这个问题中的等量关系是什么?

(4) 选择哪个等量关系，可以得到关于未知数 x 的方程?

设采用新工艺前，王师傅每天焊接 x 个工件. 采用新工艺前王师傅工作了 $\frac{100}{x}$ 天，采用新工艺后，王师傅工作了 $\frac{310-100}{1.5x}$ 天. 根据等量关系

采用新工艺前工作的天数 + 采用新工艺后工作的天数 = 8 .

得
$$\frac{100}{x}+\frac{310-100}{1.5x}=8 .$$

(5) 观察 (4) 中得到的方程，你发现它有什么特征?

像这样，分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**（fractional equation）.

(6) 怎样解分式方程 $\frac{100}{x}+\frac{310-100}{1.5x}=8$ 呢? 想一想，与同学交流.

方程两边都乘最简公分母 $1.5x$，得

$$150+210=12x.$$

解这个一元一次方程，得

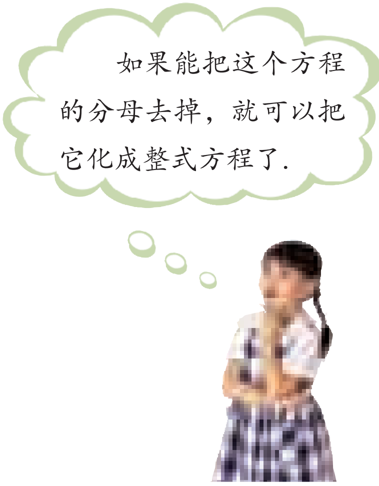
$$x=30.$$

检验：把 $x=30$ 代入原方程，左边 = 右边.

所以，$x=30$ 是原方程的根.

代入本节开始时提出的问题检验，符合题意.

所以采用新工艺前王师傅每天焊接30个工件.



一般地，解分式方程的思路是，先将方程的两边同乘一个适当的整式（通常是各分式的最简公分母），化去方程中的分母，从而把解分式方程转化成解整式方程的问题.

例1 解方程 $\dfrac{3}{x^2-1}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 方程两边都乘最简公分母（x^2-1），得

$$3=2(x-1)-(x+1).$$

解得 $x=6$.

经检验，$x=6$ 是原方程的根.

练 习

1. 下列关于 x 的方程中，哪些是分式方程？

（1）$\dfrac{1}{x}=-2$； （2）$\dfrac{x}{x-2}=2$； （3）$\dfrac{1}{4}(x+3)+2=\dfrac{x+4}{3}$；

（4）$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$； （5）$\dfrac{2-x}{3}-\dfrac{x-4}{5}=0$； （6）$\dfrac{x+m}{m}-2=\dfrac{x-m}{n}$.

2. 解下列分式方程：

（1）$\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{1}{x}$； （2）$\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{5}{x+1}$.

例2 解方程 $\dfrac{x-8}{x-7}-\dfrac{1}{7-x}=8$.

解 方程两边都乘（$x-7$），得

$$x-8+1=8(x-7).$$

解这个一元一次方程，得

$$x=7.$$

检验可知，当 $x=7$ 时，分式 $\dfrac{x-8}{x-7}$ 与 $\dfrac{1}{7-x}$ 的分母都为 0．所以，$x=7$ 不是原方程的根，原方程没有解.

事实上，原方程可以写成

$$\frac{x-8}{x-7}+\frac{1}{x-7}=8，即\quad \frac{x-7}{x-7}=8.$$

由此看出，这个方程无解.

在方程变形的过程中，产生的不适合原方程的根叫做方程的**增根**. 增根应当舍去.

思考下列问题，并与同学交流.

（1）解一元一次方程时，会出现增根吗？为什么？

（2）解本节例 1 中的方程，为什么没有出现增根？

（3）解本节例 2 中的方程，为什么出现了增根？

（4）解分式方程为什么必须验根？

解例 1 中的方程时，方程两边都乘（x^2-1），化为一元一次方程，然后解出 $x=6$. 把 $x=6$ 代入 x^2-1 不等于 0，这相当于方程两边都乘同一个不为零的数，因而所得到的整式方程的根与原分式方程的根相同.

解例 2 中的方程时，方程两边都乘（$x-7$），然后解出 $x=7$. 相当于方程两边都乘零，因而所得到的整式方程的根不是原分式方程的根.

例3　解方程 $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{16}{x^2-4}=1$.

解　将 x^2-4 分解因式，原方程化为

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}=1.$$

方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$，得

$$(x-2)^2-16=(x+2)(x-2).$$

整理，得

$$-4x=8.$$

解这个方程，得

$$x=-2.$$

检验：当 $x=-2$ 时，$(x+2)(x-2)=0$.

所以，$x=-2$ 是增根，原方程无解.

想一想，解分式方程时怎样验根比较简便?

可以把求出的整式方程的根代入最简公分母，看其是否为零. 使最简公分母的值是 0 的整式方程的根是原分式方程的增根，必须舍去.

由上面的例 1，例 2 和例 3，你能总结一下解分式方程的主要步骤吗？与同学交流.

挑战自我

当 m 为何值时，解分式方程

$$\frac{x-3}{x-2}=\frac{m}{2-x}$$

会出现增根?

练 习

1. 选择题：

在解分式方程 $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$ 时，以下四个步骤中错误的一步是（　　）.

（A）方程两边分式的最简公分母是（$x-1$）（$x+1$）

（B）方程两边都乘（$x-1$）（$x+1$），得整式方式 $2(x-1)+3(x+1)=6$

（C）解这个整式方程，得 $x=1$

（D）原方程的解为 $x=1$

2. 解下列方程：

（1）$\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{3-x}{x-2}$；　　（2）$\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{1}{2}$；

（3）$\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{6x}{x^2-4}=\dfrac{3}{x+2}$；　　（4）$\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1-x}{2-x}-1$．

例4　甲、乙两地相距 360 km，张老师、王老师分别从甲地乘早 7 时出发的普通客车和 8 时 15 分出发的豪华客车去乙地，两车恰好同时到达. 已知豪华客车与普通客车的平均速度的比是 $4:3$，两车的平均速度分别是多少？

这个问题中的等量关系是：

普通客车所用时间－豪华客车所用时间 $=\dfrac{5}{4}$ h.

解　设豪华客车的平均速度为 $4x$ km/h，普通客车的平均速度为 $3x$ km/h．于是，豪华客车从甲地到乙地所用的时间为 $\dfrac{360}{4x}$ h，普通客车从甲地到乙地所用的时间为 $\dfrac{360}{3x}$ h.

根据题意，得

$$\frac{360}{3x}-\frac{360}{4x}=\frac{5}{4}.$$

解这个方程，得

$$x=24.$$

经检验可知，$x=24$ 是原分式方程的根，并符合题意.

由 $4x=4\times24=96$，$3x=3\times24=72$ 可知，豪华客车的平均速度为 96 km/h，普通客车的平均速度为 72 km/h．

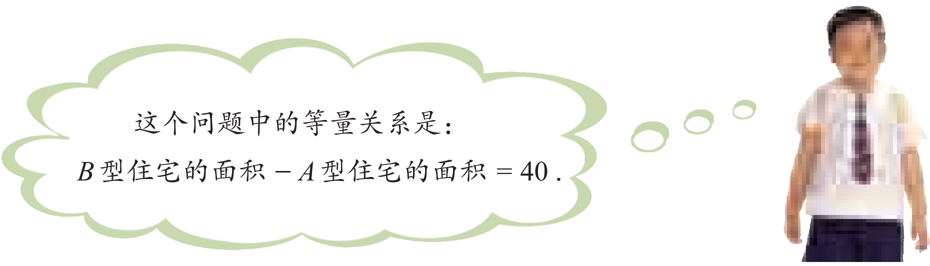
加油站

有些实际问题需要通过列出分式方程加以解决，这就是说，分式方程也是刻画现实世界数量关系的有效模型.

例5　阳光小区有 A 型和 B 型两种户型的住宅出售，A 型与 B 型住宅每平方米的价格分别是全楼每平方米平均价格的 1.1 倍与 0.9 倍，而且一套 A 型比一套 B 型的面积少 40 m². 如果 A 型与 B 型两种住宅的售价分别为 66 万元与 81 万元，求全楼每平方米的平均价格.

图 3-6

解　设全楼每平方米的平均价格为 x 万元，则 A 型住宅每平方米的价格为 $1.1x$ 万元，B 型住宅每平方米的价格为 $0.9x$ 万元. 于是，A 型住宅的面积为 $\dfrac{66}{1.1x}$ m²，B 型住宅的面积为 $\dfrac{81}{0.9x}$ m².



根据题意，得

$$\frac{81}{0.9x}-\frac{66}{1.1x}=40 .$$

整理，得

$$\frac{90}{x}-\frac{60}{x}=40 .$$

解这个方程，得

$$x=0.75 .$$

经检验可知，$x=0.75$ 是原分式方程的根，并符合题意.

所以，全楼每平方米的平均价格为 0.75 万元，即 7 500 元.

根据例 5 提供的信息，你还能编制出一个用分式方程解决的问题吗？与同学交流.

练 习

1. 假日里，小亮去距家 18 km 的姨妈家玩. 他先步行了 2 km，然后乘汽车前往，共用 1 小时到达. 如果汽车的速度是小亮步行速度的 8 倍，求他步行的速度.
2. 甲制作 90 个零件所用的时间和乙制作 120 个零件所用的时间相等. 已知两人每小时共制作 35 个零件，甲、乙每小时各制作多少个零件？

习题3.7

复习与巩固

1. 解下列方程：

（1）$\frac{x}{6+x}=\frac{1}{4}$；　　（2）$\frac{2}{x}+\frac{x}{x+3}=1$；

（3）$\frac{4x+2}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x}$；　　（4）$\frac{1+x^2}{x-2}=x-2$.

2. 解下列方程：

（1）$\frac{x}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}$；　　（2）$\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{1}{x+2}-1$.

3. 解方程 $\frac{1}{x^3+2x^2+x}+\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{5}{2x^2+2x}$.

4. 当 x 为何值时，分式 $\frac{3}{x}$ 与 $\frac{2}{6-x}$ 互为相反数？

5. 小亮从图书馆借了一本书，共 280 页，借期是两周. 当他读完书的一半时，发现以后平均每天读书的页数必须增加 1 倍才能在借期内读完. 小亮读前半本书时平均每天读多少页？

6. 某地对一段长达 4 800 m 的河堤进行加固. 在加固 600 m 后，采用新的加固模式，每天的加固长度是原来的 2 倍. 用 9 天完成了全部加固任务. 原来每天加固河堤多少米？

7. A，B 两城市间新建一条城际铁路，建成后，铁路运行里程由目前的 312 km 缩短至 154 km. 旅客列车的设计时速是现行时速的 2.5 倍，运行时间将因此缩短约 3.13 小时. 求城际铁路列车的设计时速.

拓展与延伸

8. 如果等式 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 成立，用关于 a，b 的代数式表示 c.

9. 一个二位数的十位数字与个位数字的和是12. 如果交换十位数字与个位数字的位置，并把所得到的新的二位数作为分子，把原来的二位数作为分母，所得的分数约分后为 $\frac{4}{7}$. 求这个二位数.

10. 一项工程，若由甲队单独去做，刚好能如期完成；若由乙队单独去做，要比规定时间多用 5 天才能完成. 若甲、乙两队合做 4 天，余下的工程由乙队单独去做也正好如期完成. 这项工程预期几天完成？

探索与创新

11. 如果解关于 x 的分式方程 $\frac{x+m}{x-3}-\frac{1}{x+4}=1$ 时出现增根，求 m 的值.

12. 某自来水公司水费的计费办法是：若每户用水当月不超 5 m^3，则每 m^3 收费 1.5 元. 若每户用水超过 5 m^3，则超出部分按加高定额收费. 1 月份，小亮家用水量是小莹家用水量的 $\frac{2}{3}$. 小亮家当月水费为 17.5 元，小莹家当月水费是 27.5 元. 超过 5 m^3 的部分每 m^3 收费多少元？

回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容？总结一下，与同学交流.
2. 什么是分式的基本性质？本章的哪些内容用到了分式的基本性质？
3. 用语言和符号分别叙述分式的加法、减法、乘法与除法的法则，并各举一例说明.
4. 什么是比？什么是比例？比与比例有什么区别和联系？
5. 什么是比例的基本性质？本章中的哪些内容用到了比例的基本性质.
6. 举出生活中应用比和比例的几个实际例子，与同学交流.
7. 什么是分式方程？解分式方程的基本思路是什么？
8. 为什么解分式方程必须验根？
9. 你能概括出解分式方程的一般步骤吗？
10. 同一元一次方程、一次不等式组一样，分式方程也是一种重要的数学模型. 你能通过一个实例，说明建立和求解分式方程模型的过程吗？
11. 在本章的学习内容中，体现了哪些数学思想？与同学交流.

综合练习

复习与巩固

1. 填空：

（1）当分式 $\frac{x-3}{x^2+4}$ 的值为0时，x 的值是________；

（2）已知1，2，3三个数，请你添加一个数，写出一个比例式________.

2. 选择题：太阳能热水器安装有一个进水管（冷水管）和一个出水管（热水管）. 单独打开进水管，x h可以将空的热水器注满水；单独打开出水管，y h可以把注满水的热水器中的水放尽（$x<y$）. 如果把进水管与出水管同时打开，那么注满一台空热水器需要的时间是（　　）.

（A）$y-x$　　（B）$\frac{1}{y-x}$　　（C）$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$　　（D）$1\div(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$

3. x 为何值时，下列分式有意义？

（1）$\frac{2x}{x+1}$；　　（2）$\frac{1+2x}{1-2x}$.

4. 如果把分式 $\frac{2x}{x+3y}$ 中的 x 和 y 都扩大到原来的3倍，分式的值有没有变化？为什么？

5. 计算下列各式：

（1）$\frac{x-y}{y}-\frac{y-x}{x}$；　　（2）$\frac{x^2-4x}{x+3}-\frac{x+3}{x}$；

（3）$1-\frac{x+2}{x-1}\div\frac{x+2}{x+1}$；　　（4）$\frac{x^2-2x}{x^2-1}\div(x+1-\frac{2x-1}{x-1})$.

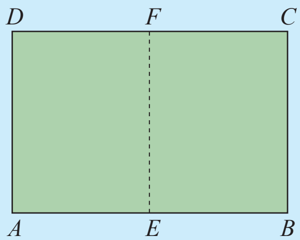
6. 计算：

（1）$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}\cdot\frac{a^2+2a+1}{a+1}$；　　（2）$(x^4-y^4)\div\frac{x^2+y^2}{x+y}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}$；

（3）$\frac{a^2+b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a+b}\div\frac{a-b}{ab(a^2+b^2)}$；　　（4）$(\frac{3x-1}{x+2}-\frac{x-1}{x+2})\div\frac{x}{x^2-4}$.

7. 小亮收集生物标本的件数是大刚的 $\frac{3}{4}$，大刚收集标本的件数是小莹的 $\frac{5}{6}$，小亮、大刚、小莹三人收集标本的件数的比是多少？

8. 如图，一张报纸的长、宽分别为 $AB=2a$，$BC=b$（$2a>b$），点 E，F 分别是 AB 与 CD 的中点. 将这张报纸沿直线 EF 对折后，长方形 $AEFD$ 的长 AD 与宽 AE 之比等于长方形 $ABCD$ 的长与宽之比，求 $a^2:b^2$ 的值.



（第8题）

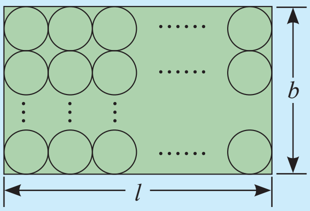
9. 解下列分式方程：

（1）$\dfrac{x}{2x-5}+\dfrac{5}{5-2x}=1$；（2）$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$；

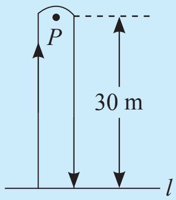
（3）$\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{x+5}{x(x-1)}$；（4）$\dfrac{9x+7}{3x+2}-\dfrac{4x+5}{2x+3}=1$.

10. 如图，一个长、宽、高分别为 l，b，h 的长方体纸盒，装满了一层高为 h 的圆柱形易拉罐饮料，求纸箱的利用率（易拉罐总体积与纸箱容积的比）.

11. 小亮和小莹玩“托球赛跑”游戏. 用球拍托着乒乓球从起跑线 l 起跑，到达点 P 后再跑回起跑线（如图）. 途中乒乓球掉下时须捡起并回到掉球的地方继续跑. 谁先回到起跑线谁获胜. 小亮由于心急，掉了球，浪费了 6 s. 小莹顺利跑完，赛后小亮说：“我俩所用的全部时间的和为 50 s”，小莹说：“如果捡球过程不计在内时，你的速度是我的 1.2 倍”. 根据图文信息，请问谁获胜?



（第 10 题）



（第 11 题）

拓展与延伸

12.（1）已知 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a-b}$，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的值；

（2）已知 $\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{y-z}=\dfrac{5}{z+x}$，求 $\dfrac{5x-y}{y+2z}$ 的值.

13. A 地至 B 地的铁路里程为 650 km. 从 A 地乘“G”字头列车和“D”字头列车都可直达 B 地. 已知“G”字头列车的时速为“D”字头列车时速的 2 倍. 且运行时间比“D”字头列车少 2.5 h，求“G”字头列车从 A 至 B 的运行时间及时速.

14. 为响应“绿色出行”的号召，小王上班由自驾车改为乘坐公交车. 已知小王家距上班地点 18 km，他乘公交车平均每小时行驶的路程比他自驾车平均每小时行驶的路程的 2 倍还多 9 km. 他从家出发到上班地点，乘公交车所用的时间是自驾车所用时间的 $\dfrac{3}{7}$. 小王用自驾车上班平均每小时行驶多少千米?

探索与创新

15. 已知关于 x 的方程 $\dfrac{ax+1}{x-1}-1=0$ 有增根，求 a 的值.

16. 已知 x 为整数，且 $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{2x+18}{x^2-9}$ 的结果也为整数，求所有符合条件的 x 的值.

第 4 章　数据分析

内容提要

- 加权平均数
- 中位数
- 众数
- 数据的离散程度
- 方差
- 用计算器计算平均数和方差

情境导航

某农场分别在 8 块管理条件和自然条件相同、面积相等的试验田中，对甲、乙两种小麦新品种进行对比试验，两种小麦的产量如下（单位：kg）：

甲种小麦：	820	980	980	830
	980	840	910	1 020
乙种小麦：	870	930	860	930
	870	930	890	920

（1）你会计算上述两组数据的中位数、众数、平均数和方差吗?

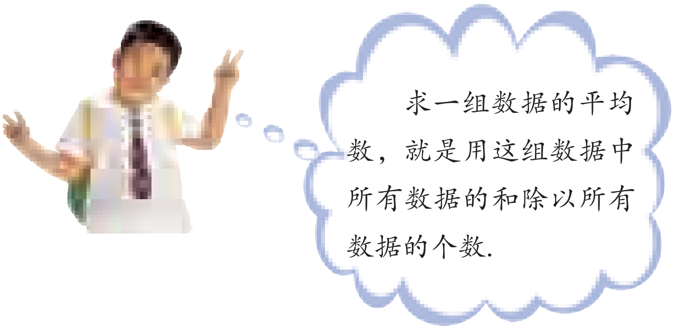
（2）你能分别解释上述数据的实际意义吗?

（3）试对两个品种的小麦作出评价.

4.1　加权平均数

交流与发现

（1）你过去已经学过平均数. 你能举例说明如何计算一组数据的平均数吗？如果已知一组数据为 x_1，x_2，…，x_n，这组数据的平均数应该怎样计算？



小资料

一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，其中 $\bar{x}$ 读作“x 拔”，“拔”是英文单词 bar（棒）的音译.

（2）为满足顾客的需要，某商场将 15 kg 奶糖、3 kg 酥心糖和 2 kg 话梅糖混合成什锦糖出售. 已知奶糖的售价为每千克 40 元，酥心糖为每千克 20 元，话梅糖为每千克 15 元. 混合后什锦糖的售价应为每千克多少元？

小亮认为，混合后每千克什锦糖的售价是三种糖单价的平均数，即

$$\frac{40+20+15}{3}=25\text{（元）}.$$

小莹认为，在总体中三种糖的质量不相等，计算每千克什锦糖的售价时，应求出混合后三种糖的总价格，再除以它们的总质量数，即

$$\frac{40\times 15+20\times 3+15\times 2}{15+3+2}=34.5\text{（元）}.$$

你同意上面谁的算法？与同学交流.

（3）上面小莹列出的算式还可以作以下变形：

$$\frac{40\times15+20\times3+15\times2}{15+3+2}$$

$$=40\times\frac{15}{20}+20\times\frac{3}{20}+15\times\frac{2}{20}=34.5\text{（元）}.$$

由此可见，什锦糖的单价不仅与混合前奶糖、酥心糖和话梅糖的单价有关，也与混合后这三种糖的质量在什锦糖质量中所占的比值有关.

（4）由问题（3）中所列出的算式可以看出，数据 40，20，15 对什锦糖单价影响的“重要程度”是不一样的. 你发现这三个数据影响平均数大小的重要程度可以通过哪三个比值反映出来？

（5）某车间工人日加工零件数如下表所示，仿照（3）中小莹列出的算式，你能计算出平均每个工人日加工零件的个数吗？

日加工零件数/个	20	22	24	25
工人数/人	4	8	20	8

由　$4+8+20+8=40$，得

$$20\times\frac{4}{40}+22\times\frac{8}{40}+24\times\frac{20}{40}+25\times\frac{8}{40}$$

$$=23.4\text{（个）}.$$

所以，该车间平均每个工人日加工零件23.4个.

在这个问题中，数据 20，22，24，25 出现的次数是不同的，因此，全部数据的平均数，不仅受上述 4 个数据大小的影响，还要受到它们占这组数据总件数 40 的比值 $\frac{4}{40}$，$\frac{8}{40}$，$\frac{20}{40}$，$\frac{8}{40}$ 的影响. 这就是说，这些比值的大小分别代表了上述四个数据影响平均数大小的重要程度. 因此，我们把比值 $\frac{4}{40}$，$\frac{8}{40}$，$\frac{20}{40}$，$\frac{8}{40}$ 分别称作数据20，22，24，25的权.

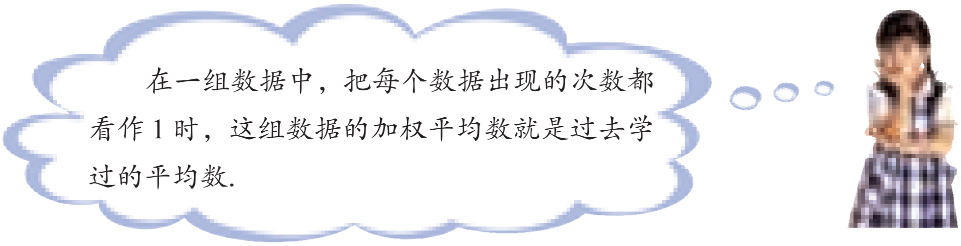
一般地，在 k 个数据 x_1，x_2，…，x_k 中，如果各个数据出现的次数分别为 w_1，w_2，…，w_k，记 $w_1+w_2+\cdots+w_k=n$，那么比值 $\frac{w_1}{n}$，$\frac{w_2}{n}$，…，$\frac{w_k}{n}$ 分别叫做这 k 个数据的**权**（weight），把

$$x_1\cdot\frac{w_1}{n}+x_2\cdot\frac{w_2}{n}+\cdots+x_k\cdot\frac{w_k}{n}$$

叫做这 k 个数据的**加权平均数**（weighted mean）.

例如，在（3）中所列出的算式中，比值 $\frac{15}{20}$，$\frac{3}{20}$，$\frac{2}{20}$ 分别是数据 40，20，15 的权. 34.5 是这三个数据的加权平均数.

（6）在加权平均数的计算公式中，所有数据的权的和是多少？对比加权平均数与以前学过的平均数的意义，你能说出二者有什么联系吗？



例1　在学校的一次卫生检查中，八年级一班的教室卫生成绩评为 85 分，环境卫生成绩评为 90 分，个人卫生成绩评为 95 分. 如果三项成绩分别按 30%，40%和 30% 计入总成绩，求该班这次卫生检查的总成绩.

解　在这个问题中，各班卫生检查的总成绩可以看做教室卫生成绩、环境卫生成绩、个人卫生成绩三项成绩的加权平均数. 这三项成绩的权分别是 30%，40%，30%，由加权平均数的意义，得

$$85 \times 30\% + 90 \times 40\% + 95 \times 30\% = 90\text{（分）}.$$

所以，八年级一班这次卫生检查的总成绩为 90 分.

挑战自我

甲、乙两地相距 120 km，一辆汽车从甲地驶往乙地，速度为 60 km/h，然后以 40 km/h 的速度由乙地返回甲地，求该车往返行驶全程的平均速度.

练 习

1. 一个射手连续射靶 20 次，其中射中 10 环 2 次，射中 9 环 7 次，射中 8 环 8 次，射中 7 环 3 次，求平均每次射中的环数（精确到 0.1 环）.
2. 八年级一班某次体育测试的成绩是：50 分的 5 人，60 分的 9 人，70 分的 12 人，80 分的 9 人，90 分的 4 人，100 分的 1 人. 求该班这次测试的平均成绩.

例2 为了考察全县12岁男生的平均身高，从中随机抽取了部分男生，测得他们的身高如下表所示：

身高/cm	140	141	142	143	144	145	146	147	148
人数/人	2	10	16	56	70	56	20	8	2

计算这个样本的平均数（精确到1 cm），并由此估计全县12岁男生的平均身高.

解 $n=2+10+16+56+70+56+20+8+2=240$.

由题意，数据

140，141，142，143，144，145，146，147，148

的权分别为

$$\frac{2}{240},\ \frac{10}{240},\ \frac{16}{240},\ \frac{56}{240},\ \frac{70}{240},\ \frac{56}{240},\ \frac{20}{240},\ \frac{8}{240},\ \frac{2}{240}.$$

由加权平均数的意义，得

$$\begin{aligned}\bar{x}=&140\times\frac{2}{240}+141\times\frac{10}{240}+142\times\frac{16}{240}+143\times\frac{56}{240}+144\times\frac{70}{240}\\&+145\times\frac{56}{240}+146\times\frac{20}{240}+147\times\frac{8}{240}+148\times\frac{2}{240}\\\approx&144\ (\mathrm{cm}).\end{aligned}$$

所以，这个样本的平均数是144 cm，由此可以估计全县12岁男生的平均身高大约为144 cm .

由例2看出，通过随机抽样，可以用样本的平均数估计总体的平均数.

例3 学校小记者团招聘一名小记者，招聘办法是：对应聘者进行综合素质考查，并进行现场作文与即兴演讲测试. 将应聘者的上述三项成绩按4∶4∶2的比例计算出个人总分，总分最高者将被录用. 下表是小莹、小亮和大刚3位应聘者的各项成绩，他们中谁将被录用?

姓　名	综合素质成绩/分	现场作文成绩/分	即兴演讲成绩/分
小莹	88	96	93
小亮	91	90	97
大刚	90	93	94

解　由连比的意义知，4∶4∶2是指每位应聘者的综合素质、现场作文、即兴演讲三项测试成绩在个人总分中所占的份额，因此个人总分是该三项成绩的加权平均数. 它们的权分别是$\frac{4}{4+4+2}$，$\frac{4}{4+4+2}$，$\frac{2}{4+4+2}$，即40%，40%，20%.

由加权平均数的意义，小莹、小亮和大刚的个人总分分别是

$$88\times40\%+96\times40\%+93\times20\%=92.2（分），$$

$$91\times40\%+90\times40\%+97\times20\%=91.8（分），$$

$$90\times40\%+93\times40\%+94\times20\%=92.0（分）.$$

小莹的个人总分最高，所以小莹将被录用.

挑战自我

在例3中，小亮的三项成绩有两项高于小莹，有两项高于大刚，可是为什么他的个人总分却名列第3呢？由此你能体会权的作用吗？

练 习

1. 班主任老师为了对学生乱花钱的现象加以了解并进行正确引导，对班里每位同学一周内零花钱的大约数额进行了统计，如下表所示：

零花钱数额/元	5	10	15	20	25
人数	7	12	18	10	3

如果一个学期按20周计算，估计该班学生一个学期零花钱的平均数额是多少？

2. 某商场宣布店庆期间对A，B，C三种型号的彩电分别降价15%，10%，5%，因此该店宣称三种彩电平均降价10%，你认为这种说法正确吗？为什么？

习题4.1

复习与巩固

1. 在一次篮球比赛中，时代中学篮球队各队员的投球次数、命中次数和个人得分情况如下表所示：

号　码	2	5	6	7	9	10	11	12	13
投球数/次	5	6	2	1	8	2	5	1	2
命中数/次	2	3	1	0	5	0	2	1	2
得分/分	4	6	2	0	10	0	5	2	5

(1)求这些队员的平均投球次数、平均命中次数和平均得分；

(2)哪几个队员的得分超过了平均数？

(第 2 题)

2. 据资料记载，意大利的比萨斜塔在 1918 年～1958 年的 40 年间，平均每年倾斜 1.10 mm；在 1959 年～1969 年的 10 年间，平均每年倾斜 1.26 mm. 这 50 年间，比萨斜塔平均每年倾斜多少毫米(精确到 0.01 mm)？

3. 某果品商店购进200箱苹果，从中随机抽取15箱，称得它们的质量如下表所示：

质量/kg	16.5	16.3	16	15.8	15.7	15.5
箱数/箱	2	3	4	2	3	1

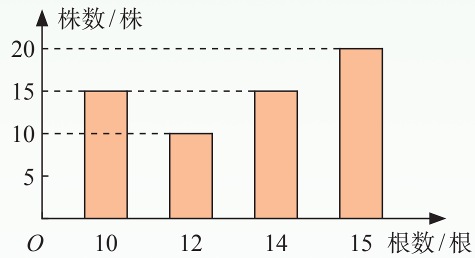
如果每千克苹果的售价为5.6元，你能用样本平均数估计这批苹果的销售金额吗？

4. 时代中学举办广播体操比赛，对各个班级的服装、队列和动作三项分别计分，然后按 15 : 35 : 50 的比例计算总分. 八年级各班的得分如下表所示，请按所得总分确定各班的名次.

项目　得分　班级	服装	队列	动作
1　班	80	85	95
2　班	92	90	75
3　班	85	89	90

拓展与延伸

5. 菜农王大伯今年试种了某种新品种黄瓜，为了了解该新品种黄瓜的生产情况，随机抽查了部分黄瓜植株上每株结出的黄瓜根数，得到如图所示的条形统计图. 你估计他种植的该品种黄瓜平均每株可结黄瓜多少根？



(第 5 题)

6. 时代中学生物课把学生的笔试、实验操作两项成绩分别按 60%、40% 的比例计入学生的学期总成绩. 小亮的实验操作这一项成绩是 81 分，要想学期总成绩不低于 90 分，那么他笔试成绩至少要达到多少分？

探索与创新

7. 甲、乙两公司去年用于员工工资、培训和保险三项的开支都分别为72万元，36万元和12万元，甲公司预计今年这三项支出依次比去年增加10%，20%和30%，而乙公司的这三项开支预计今年比去年依次增加30%，10%和20%，甲、乙两公司预计今年的三项支出比去年增长的百分数是否相等？若不相等，哪家公司的支出增加较多？

4.2　中位数

观察与思考

一组男生的身高分别为（单位：cm）：

164，172，178，170，167，168，167，172，169，170，170，156，159，161，171．

思考下面的问题，并与同学交流.

（1）这组数据中，共有多少个数据？

（2）将这组中的所有数据按照由小到大的顺序加以排列，排在正中间位置的数据是哪一个？如果按照从大到小的顺序加以排列呢？你发现了什么？

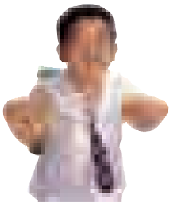
（3）如果又加入一名男生的身高数据173 cm，新的一组数据中有多少个数据？如果将这组新数据按照从小到大的顺序加以排列，那么排在正中间位置的数据是哪几个数？如果按照由大到小的顺序加以排列呢？

在问题（1）（2）中，数据的个数是15. 不论将这组数据按照从大到小还是从小到大的顺序排列，排在正中间位置的数据只有一个，且都是169 cm. 在问题（3）中，数据的个数是16，不论按照从大到小，还是从小到大的顺序将这组数据加以排列，排在正中间的数据总有两个，分别是169 cm和170 cm. 这两个数据的平均数是169.5 cm.

一般地，将一组数据按大小顺序排列后，处于中间位置的数叫做这组数据的**中位数**（median）. 如果数据的个数为奇数，那么处于中间位置的一个数据是这组数据的中位数；如果数据的个数为偶数，那么处于中间位置的两个数据的平均数，是这组数据的中位数.

当一组数据的个数为偶数时，它的中位数不一定是这组数据中的一个.

（4）观察你在（2）和（3）中重新排列的两组数据，你认为中位数 169 cm 和 169.5 cm 具有什么实际意义？



在问题（2）中，有 7 名男生的身高低于 169 cm，有 7 名男生的身高高于 169 cm .

在问题（3）中，有 8 名男生的身高低于 169.5 cm，有 8 名男生的身高高于 169.5 cm .

在上面的两个问题中，169 cm 和 169.5 cm 分别处于排列后该组数据的中间的位置，从而我们可以用 169 cm 和 169.5 cm 分别代表这两组男生的一般身高. 由此可见，在按大小顺序排列后的一组数据中，由于中位数的位置居中，因而它能够反映这组数据的集中趋势和一般水平，因此，通常也把中位数作为这组数据的代表.

例1　某商场本月 1 ~ 10 日的日营业额（单位：万元）如下表所示：

日　　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
日营业额/万元	5.3	6.2	3.6	4.5	8.6	6.8	4.5	6.3	6.5	6.6

（1）求这 10 天日营业额的平均数和中位数；

（2）请对该商场本月 2 日的营业情况作出评价.

解　（1）这 10 天日营业额的平均数为

$$\bar{x}=\frac{5.3+6.2+3.6+4.5+8.6+6.8+4.5+6.3+6.5+6.6}{10}$$

$=5.89$（万元）；

将这组数据按由小到大的顺序排列为：

$$3.6，4.5，4.5，5.3，6.2，6.3，6.5，6.6，6.8，8.6.$$

这组数据的中位数为处于中间位置的两个数据6.2，6.3的平均数，即

$$\frac{6.2+6.3}{2}=6.25（万元）.$$

所以，这10天日营业额的平均数为5.89万元，中位数为6.25万元.

（2）该商场本月2日的营业额为6.2万元，高于该月1～10日的日平均营业额，因而营业情况还是不错的. 但是，该天的营业额略低于1～10日营业额的中位数，这说明该天的营业额在这10天中，处于中等稍偏下水平.

挑战自我

小亮认为："在一组数据中，小于和大于这组数据的中位数的数据各占一半"，你认为他的说法对吗？举例说明.

练 习

1. 某市今年5月一周空气质量报告显示，各天的某项污染指数的数据依次是：

$$31，35，30，31，34，32，31$$

这组数据的中位数是多少？

2. 一组数据包含6个数，它们的平均数为15. 这组数据的中位数与平均数15的大小关系可能有怎样的情况？举例说明.

习题4.2

复习与巩固

1. 为了了解居民的用水情况，市政部门随机抽查了20户家庭的月用水量，如下表所示：

月用水量/m^3	4	5	6	8	9
户　数	4	5	7	3	1

（1）求这20户的月平均用水量；

（2）求这20户的月用水量的中位数.

2. 据中国国家统计局网站公布，2011年5～11月我国轻工业和重工业增加值月累计增长速度[1]如下表所示：

月累计增长速度/% \ 月份	5月份	6月份	7月份	8月份	9月份	10月份	11月份
轻工业	12.90	13.90	12.80	13.40	12.80	12.10	12.40
重工业	13.50	15.60	14.50	13.50	14.30	13.70	12.40

（1）分别求2011年5～11月我国轻工业和重工业的月平均累计增长速度；

（2）分别求2011年5～11月我国轻工业和重工业月累计增长速度的中位数.

拓展与延伸

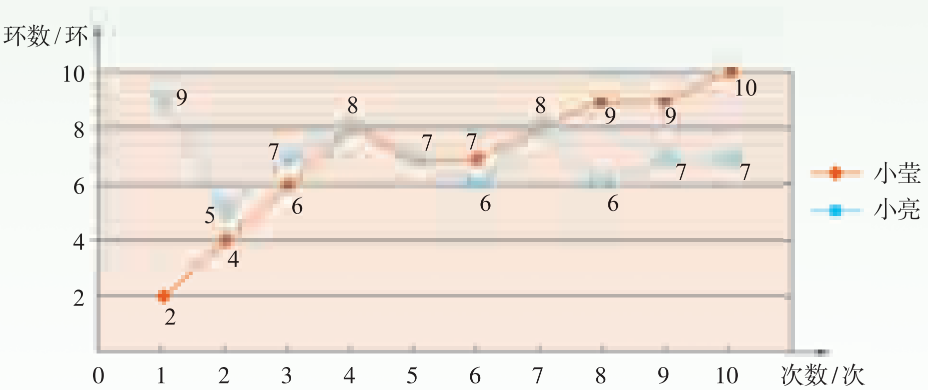
3. 在某次英语测验中，八年级一班26名男生的得分情况如下：100分的3人，98分的11人，96分的6人，89分的6人.

（1）求这组数据的中位数和平均数；

（2）小亮在这次测验中得了96分. 他对妈妈说：他这次的成绩在男生中处于中上水平. 你认为他的说法对吗？

探索与创新

4. 小亮和小莹进行投掷飞镖比赛，两人各投了10次，他们的成绩如下图所示：



（1）分别求出他们投标成绩的平均数和中位数；

（2）分别用平均数和中位数解释谁的成绩比较好.

[1] 以第1月的产值为基数，第2月的产值相对于第1月的产值的增长率为Δ_1，第3月相对于第2月的增长率为Δ_2，…第t月相对于第（$t-1$）月的增长率为Δ_{t-1}. 则这t个月累加增长率为$\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_{t-1}=\Delta_t$.

4.3　众　数

交流与发现

（1）某鞋店一周内销售了某种品牌的男鞋 60 双，各种尺码的销售量统计如下：

尺码/cm	23.5	24	24.5	25	25.5	26	26.5
销量/双	3	7	6	16	18	8	2

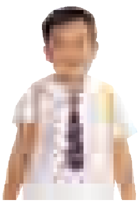
在上面由 60 双男鞋的尺码组成的一组数据中，出现次数最多的是哪个数据？由此你能给这家鞋店提供怎样的进货建议？

在这组数据中，出现次数最多的是 25.5 cm，因此可以建议鞋店多进 25.5 码的鞋子.

（2）某市 2012 年 1 月上旬的日最低气温记录如下表所示：

日　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最低气温/℃	−3	−2	0	−3	−1	−1	−2	−2	−3	−4

在上面由日最低气温组成的一组数据中，每个数据出现的次数分别是多少？其中，出现次数最多的数据有哪几个？与同学交流.



在这组数据中，出现次数最多的数据有两个，分别是 −2℃ 和 −3℃.

一组数据中出现次数最多的数据，叫做这组数据的**众数**（mode）.

在问题（1）中，众数是 25.5 cm，用它来代表该鞋店一周内售出的 60 双男鞋的尺码，比用这组数据的平均数或中位数来代表更合适. 在问题（2）中，-2℃ 和 -3℃ 出现的次数相同（各出现了 3 次），都是最多的，所以这组数据的众数是 -2℃ 和 -3℃. 这两个数据也最能反映该市1月上旬日最低气温的一般水平.

小资料

众 数

根据一些英语词典的解释，“众数”的英文名称mode与“一般”、“款式”、“时装”有关. 在一些特定条件下，当一组数据中有较多的重复数据时，出现次数最多的数据，用以描述这组数据的集中趋势，其代表面比较大.

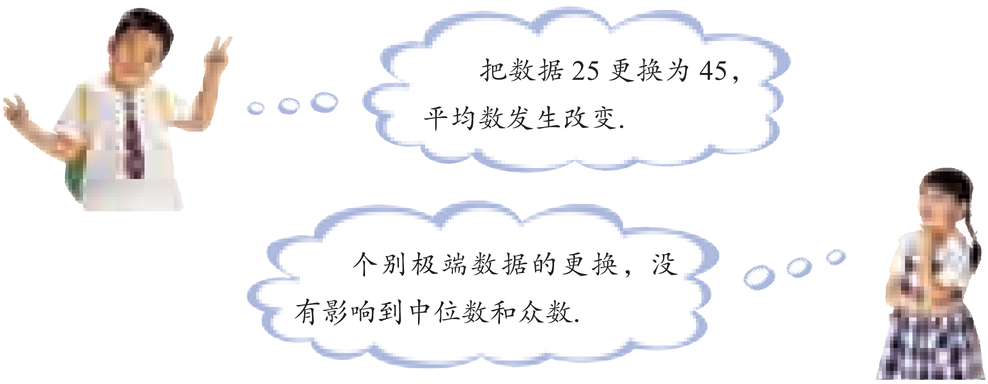
观察与思考

（1）某校合唱团由 49 名学生和 1 名指导教师组成，他们的年龄如下表所示：

年 龄/岁	12	13	14	25
人 数/人	5	20	24	1

求合唱团 50 名成员年龄的平均数、众数和中位数（精确到 0.1）.

（2）如果 25 岁的教师因工作需要调离合唱团，换了一位 45 岁的教师，那么该合唱团成员年龄的平均数、中位数和众数哪些发生了变化？哪些没有发生变化？



由（1）（2）你能得到什么结论？

平均数、众数和中位数是三种从不同途径获得的刻画数据集中程度的统计量. 平均数是通过计算得到的，它的大小由这组数据中所有的数据决定，因而能刻画一组数据的集中程度和一般水平. 平均数的应用最为广泛，但是它的值容易

受到个别极端数据的影响. 中位数是由这组数据处于中间位置的数据决定的，当数据按照大小顺序排列时，个别极端数据只能排在这组数据的最前或最后，因而中位数不容易受个别极端数据的影响. 众数是一组数据中重复出现次数最多的数据，也不容易受个别极端数据的影响. 所以在实际问题中，应根据具体情况，从平均数、中位数和众数中选择最为合适的统计量，代表一组数据的集中程度.

例1　某公司有15名工作人员，他们的月工资情况如下表所示：

职　务	经理	副经理	职员
人　数	1	2	12
月工资/元	8 000	5 000	2 000

（1）求该公司工作人员月工资的平均数、中位数和众数；

（2）假设经理的月工资由8 000元提升到12 000元，副经理的月工资由5 000元提升到6 000元，职员的月工资仍为每月2 000元，求工资变动后所得一组新数据的平均数、中位数和众数；

（3）由（1）（2）你认为在这一问题中，哪个统计量更能反映出这个公司员工的月工资水平？结合统计量的实际意义加以解释.

解　（1）该公司工作人员月工资的平均数为

$$\frac{8\ 000+2\times 5\ 000+12\times 2\ 000}{15}=2\ 800（元）.$$

把15名工作人员的月工资按从大到小排列，可得该公司的月工资的中位数为2 000元. 众数也为2 000元.

（2）该公司工资变动后，月工资的平均数为

$$\frac{12\ 000+2\times 6\ 000+12\times 2\ 000}{15}=3\ 200（元）.$$

该公司月工资的中位数和众数仍为2 000元.

（3）由于经理和副经理的工资偏高，使该公司的原月平均工资2 800元与绝大多数员工的工资差距较大. 该公司经理和副经理的工资变动后，月平均工资由2 800元升至3 200元，但中位数和众数仍为2 000元. 由此可见，在这一问题中，要反映该公司工作人员月工资的水平，用中位数和众数要比用平均数更客观一些.

练 习

1. 每年的4月23日是“世界读书日”，时代中学为了了解八年级学生的读书情况，随机调查了50名学生本学期开学后阅读了多少册课外书，统计数据如下：

册数/册	0	1	2	3	4
人数/人	3	13	16	17	1

这50名学生读课外书册数的中位数和众数分别是多少？

2. “植树节”时，八年级一班6个小组的植树棵树分别为（单位：棵）：

$$5,\ 7,\ 3,\ x,\ 6,\ 4$$

已知这组数据的平均数是5，这组数据的中位数、众数分别是多少？

例2 青年歌手大奖赛的决赛在甲、乙两名歌手之间进行，9位评委的评分（10分为满分）情况如下表所示（单位：分）：

评委编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
甲的得分	8.8	9.5	8.6	9.6	7.2	8.9	8.8	8.8	8.8
乙的得分	8.5	9.1	8.5	9.1	9.9	8.5	9.2	8.6	8.3

（1）将甲、乙两名歌手的得分适当进行分组整理，并列成统计表；

（2）分别求出甲、乙两名歌手得分的平均数、中位数和众数；

（3）由（2）的结果，分析甲、乙两名歌手中谁的演唱水平较高；

（4）如果以平均分为标准区分比赛的名次，那么制订怎样的计分规则比较合理？

解 （1）将甲、乙两名歌手的得分分组整理，得到以下两个统计表：

甲选手得分情况

得分	9.6	9.5	8.9	8.8	8.6	7.2
划记	一	一	一	止	一	一
票数	1	1	1	4	1	1

乙选手得分情况

得分	9.9	9.2	9.1	8.6	8.5	8.3
划记	一	一	丅	一	下	一
票数	1	1	2	1	3	1

（2）根据上面的表格，容易算出甲得分的平均数为

$$\bar{x}_{甲}=\frac{9.6+9.5+8.9+8.8\times4+8.6+7.2}{9}$$
$$\approx 8.78（分），$$

中位数是8.8分，众数是8.8分；

乙得分的平均数为

$$\bar{x}_{乙}=\frac{9.9+9.2+9.1\times2+8.6+8.5\times3+8.3}{9}$$

$$\approx 8.86（分），$$

中位数是8.6分，众数是8.5分.

（3）从得分的平均数来看，乙比甲高0.08分，乙的演唱水平较高.

从得分的中位数来看，甲比乙高0.2分，甲的演唱水平较高.

从得分的众数来看，甲比乙高0.3分，且有4名评委给甲评了8.8分，有3名评委给乙评了8.5分，因而甲的演唱水平较高.

（4）由（1）中的统计表可以看出，乙的平均分略高于甲，原因是个别评委评分比较极端，出现了个别差异较大的数据. 因此，可以制订“去掉一个最高分和一个最低分”的计分规则，以确保评分的合理性. 按照这个规则，甲、乙两歌手的平均分分别是8.89分与8.79分，所以甲的演唱水平较高.

练 习

1. 天泉村村委会随机抽查了本村32户农民家庭，对2011年的年总收入情况进行调查，统计结果如下：

年收入/万元	15	9.5	5.5	5.0	4.5	4.2	4.0	3.8
户　数	1	2	3	5	8	6	4	3

（1）求这些家庭年总收入的平均数、中位数和众数.

（2）该村力争在今后五年使村民的年平均收入有明显提升. 如果你是该村村民，你将向村长提出怎样的建议？

习题4.3

复习与巩固

1. 某地5月份某一周每天的最高气温统计如下：

最高气温/℃	28	29	30	31
天　数/天	1	1	3	2

求该周最高气温的众数和中位数.

2. 某户为了了解家庭用电情况，随机抽查了某个月10天内用电的度数：

每天用电量/度	0.5	1	1.5	2	2.5	3
天　数/天	1	1	2	3	1	2

（1）求该样本的中位数、众数和平均数；

（2）根据由（1）获得的数据，估计该户的月用电量（按30天计算）；如果每度电的价格为0.55元，估计该户一个月的电费支出是多少元?

拓展与延伸

3. 质检部门对某种品牌的袋装食品的质量是否符合标准进行检测. 随机抽出20袋进行统计，超过或不足的数量分别用正、负数表示. 统计结果如下：

与标准质量的差值/g	−5	−2	0	1	3	6
袋　数/袋	3	4	1	4	5	3

（1）这组数据的众数、中位数和平均数分别是多少?

（2）在这个问题中，你认为用哪个统计量代表这20袋食品的平均质量比较合理?

4. 张军大学毕业后到某公司应聘时，该公司的三位员工甲、乙、丙向他介绍说：

甲：我的月工资是2 200元，在公司中算中等收入；

乙：我们科室几个人的月工资都是2 100元；

丙：我们公司员工的收入很高，月平均工资为3 280元.

张军进一步了解该公司员工的月工资（单位：元）情况，得到下表：

员 工	经 理	丙（副经理）	职员A	职员B	职员C	职员D	甲	乙	杂 工
月工资/元	8 000	6 000	2 700	2 300	2 100	2 100	2 200	2 100	2 000

请回答下列问题：

（1）从甲、乙、丙三人的介绍中，你能知道该公司员工月工资数的平均数、中位数、众数吗?

（2）谁的说法能够较好地反映出该公司员工月工资的一般水平?

探索与创新

5. 某公司销售部有营销人员15人，7月份他们每人的销售业绩如下表所示：

销售件数	1 800	510	250	210	150	120
人　　数	1	1	3	5	3	2

该销售部计划把7月份的人均销售件数作为8月份所有人员的销售定额，你认为是

否合理？为什么？请你拟定一个较合理的销售定额，并说明理由.

6. 质量技术监督部门为了检测甲、乙、丙三个日光灯管厂家生产的日光灯管的使用寿命，从三个厂各抽取 11 只日光灯管进行检测，并将检测结果公布（单位：月）如下：

厂家	灯管使用寿命 / 月										
甲	7	8	9	9	9	11	13	14	16	17	19
乙	7	7	9	9	10	10	12	12	12	13	14
丙	7	7	8	8	8	12	13	14	15	16	17

根据检测结果，三家厂家均在广告中宣称，在正常情况下，他们生产的日光灯管，灯管的使用寿命都为12个月. 试问：

（1）这三家厂家的广告，分别利用了统计表中的哪一个特征数（平均数、中位数、众数）进行的宣传.

（2）如果三家产品的售价一样，你认为选购哪家生产的灯管合适？说明理由.

4.4　数据的离散程度

观察与思考

时代中学田径队的甲、乙两名运动员最近8次百米跑的训练成绩如下表所示：

序　数	1	2	3	4	5	6	7	8
甲的成绩 / s	12.0	12.2	13.0	12.6	13.1	12.5	12.4	12.2
乙的成绩 / s	12.2	12.4	12.7	12.5	12.9	12.2	12.8	12.3

思考下面的问题，并与同学交流.

（1）在这 8 次训练中，甲、乙两名运动员的百米跑成绩的平均数、众数、中位数分别是多少？

在这 8 次训练中，甲、乙两名运动员百米跑的平均成绩都是 12.5 s，成绩的中位数都是 12.45 s，成绩的众数都是 12.2 s.

（2）小亮说：“甲、乙两名运动员训练成绩的众数、中位数、平均数都分别相同，因而他们的成绩完全一样，没有区别.”你认同他的说法吗？

（3）根据上面的统计表，分别以序数为横轴、成绩/秒为纵轴画出两个直角坐标系，在直角坐标系中，以（次，成绩）为坐标分别在两个坐标系中描出各点（图4-1）.

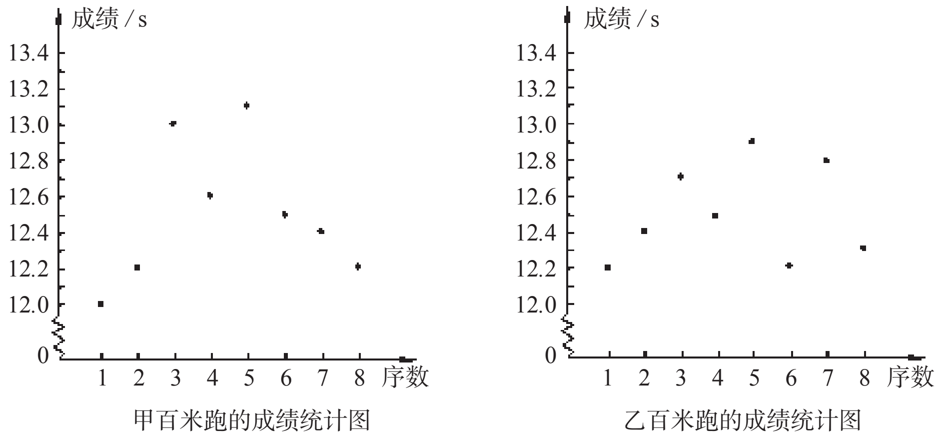


图 4-1

（4）观察图 4-1，你感到两幅统计图与前面的训练成绩的统计表相比，对于进一步了解数据的大小变动情况有什么帮助？如果我们进一步关注两幅统计图中所描出的各点的分布情况，你发现哪幅图中的点的分布比较分散，哪幅图中的点的分布比较集中？你能设法通过确定一个参照值，说明你的看法吗？

（5）在这两幅图中，分别过点（0，12.5）作横轴的平行线，想一想这条直线所代表的统计量是什么（图4-2）？

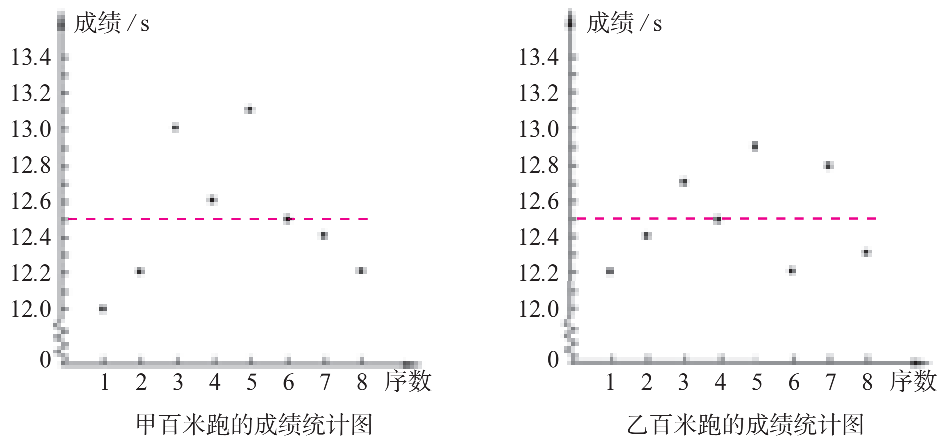
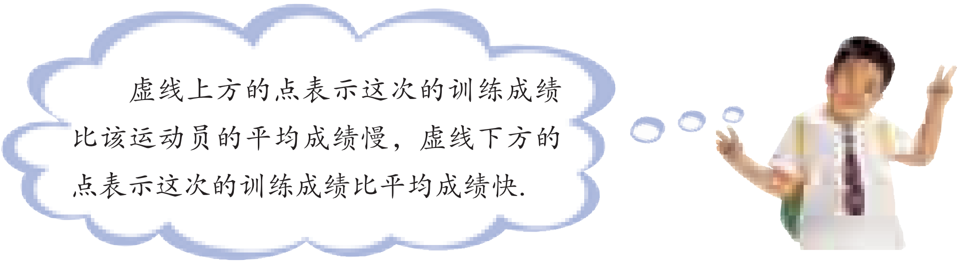


图 4-2

（6）观察图 4-2，你发现在两幅图中描出的各点与所画出的虚线有怎样的

位置关系？这条虚线上方的点与虚线下方的点所表示的训练成绩与他的平均成绩有什么关系？



（7）观察图 4-2，比较甲、乙两名运动员 8 次成绩偏离平均成绩的程度，你感觉就成绩而言，哪组数据相对于它们的平均数波动程度较小，哪组数据的波动程度较大？从而，你认为平均数 12.5 对哪组数据的代表性较大？对哪组数据的代表性较小？

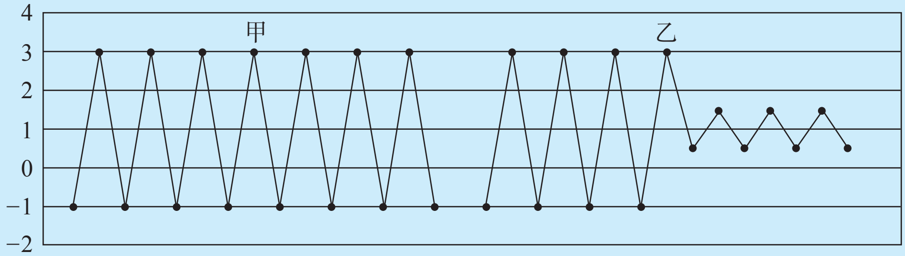
通过对以上问题的探究，可以看出，甲、乙两名运动员 8 次训练成绩的数据都分布在相同的一个平均数的上下. 但两组数据偏离平均数的程度不同：甲运动员的百米跑的 8 次成绩与乙相比，在平均数的上下波动较大，偏离平均数的程度较大，反映出甲运动员的各次训练成绩不如乙的成绩稳定. 也就是说，虽然二人 8 次训练成绩的平均数相同，但这一平均数对运动员乙的训练成绩的代表性要好于对甲的训练成绩的代表性.

由此看来，仅仅用数据的集中趋势描述一组数据的一般水平是不够的，还需要了解这组数据偏离平均数的差异程度.

一组数据偏离平均数的程度叫做这组数据的离散程度. 在统计活动中，数据的集中趋势分析和离散程度分析常被综合应用.

练 习

1. 不通过计算，比较图中甲、乙两组数据哪一组数据的波动比较大？说明理由.



（第 1 题）

2. 某砖厂从生产的甲、乙两种水泥砖中，随机各抽取了 10 块，分别测出了它们的抗断强度. 所得数据如下（单位：千克 / 平方厘米）：

甲种砖：	32.50	29.66	31.64	30.00	31.77
	31.01	30.76	31.24	31.87	31.05
乙种砖：	31.00	29.56	32.02	33.00	29.32
	30.37	29.98	31.35	32.86	32.04

（1）甲种砖的平均抗断强度是多少？

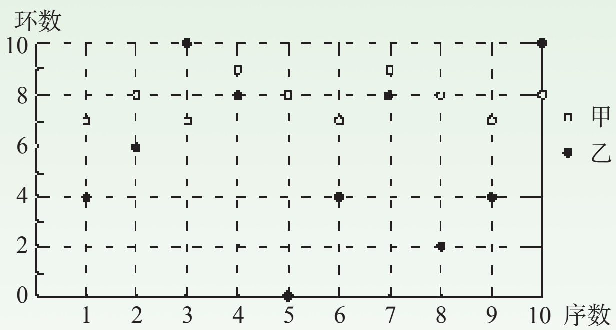
（2）乙种砖的平均抗断强度是多少？

（3）分别作出甲、乙两种砖的抗断强度的统计图，由图看出哪种砖的抗断强度波动范围较大？

习题4.4

复习与巩固

1. 甲、乙两人练习射击，每人 10 发子弹，成绩如下图所示，其中一名新手的成绩不太稳定. 根据统计图进行分析，甲、乙二人谁是新手？



（第 1 题）

2. 甲、乙两班进行投篮比赛，每班各派 10 名同学参加，每人投 10 次，投中的次数如下：

甲班：	7	8	6	8	6	5	4	9	10	7
乙班：	7	7	6	8	6	7	8	5	9	7

有人说这两个班的投篮水平相同，你同意这种说法吗？根据上述数据制成折线统计图，说明你的结论.

拓展与延伸

3. 某市所辖的 7 个区（县）2010 年的GDP（ 国民生产总值 ）及其增长速度如下表所示：

7 区（县）2010 年的 GDP

城　市	A	B	C	D	E	F	G
GDP/亿元	212	1 050	2 158	690	1 313	2 515	1 173

7 区（县）2010 年 GDP 的增长速度

城　市	A	B	C	D	E	F	G
增长速度/%	14	13.5	12.5	12.4	12.3	12.0	10.6

根据以上数据，你能对该市所辖的 7 个区（县）的经济发展作出评价吗？

4.5　方　差

交流与发现

我们继续关注 4.4 节中给出的甲、乙两名运动员最近 8 次百米跑的训练成绩. 平均数、众数、中位数都是刻画两组数据集中程度的统计量，用什么统计量可以用来刻画这两组数据的离散程度呢？

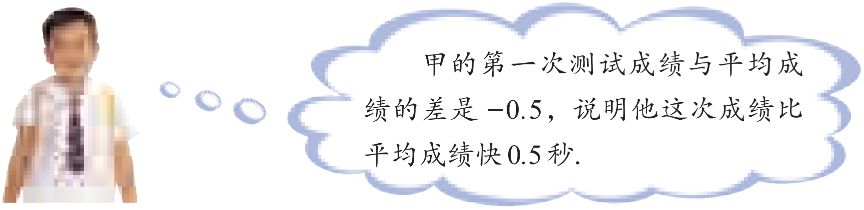
（1）甲、乙二人的平均成绩都是 12.5 s，分别计算两人的每次训练成绩与他们的平均成绩的差，你得到怎样的两组数据？

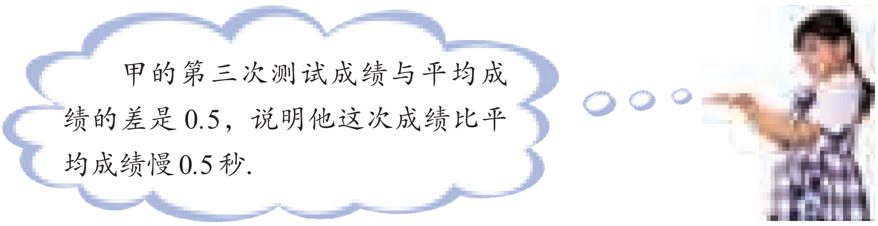
两人每次训练成绩与平均成绩的差（单位：s）分别是：

甲：−0.5，　−0.3，　0.5，　0.1，　0.6，　0，　−0.1，　−0.3

乙：−0.3，　−0.1，　0.2，　0，　0.4，　−0.3，　0.3，　−0.2

（2）观察上面得出的两组新数据，结合观察图 4−2，你能说出每个新数据的实际意义是什么吗？与同学交流.

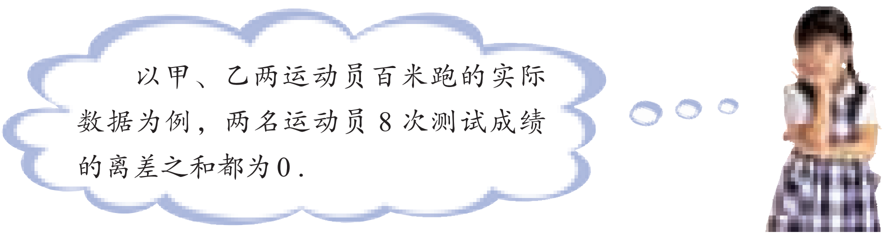




在一组数据中，一个数据与这组数据的平均数的差叫做这个数据的离差. 离差可能是正数，可能是负数，也可能是 0. 离差的符号和大小反映了该数据偏离平均数的程度.

（3）如何利用一组数据中全部数据的离差来反映这组数据的离散程度呢？

小亮设想了一个方案：用所有数据的离差之和表示一组数据的离散程度，你认为他的设想可行吗？



用各个数据的离差之和表示一组数据的离散程度不可行. 事实上，设有一组数据 x_1，x_2，…，x_n，它们的平均数为 $\bar{x}$，由于

$$
\begin{aligned}
&(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})\\
=\ &x_1-\bar{x}+x_2-\bar{x}+\cdots+x_n-\bar{x}\\
=\ &(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\bar{x}\\
=\ &(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
=\ &0.
\end{aligned}
$$

即对于任意一组数据，所有数据的离差的和总为 0. 所以不能利用离差的和表示一组数据的离散程度.

（4）小亮明确了他在（3）中提出的方案失败的原因后，又对该方案进行了如下改进，以消除离差中的负号对求和的影响.

方案二：取一组数据中所有数据的离差的绝对值之和，即

$$|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|$$

表示一组数据的离散程度.

你对改进后的小亮的方案有何看法?

小亮改进后的方案是有道理的. 并且意义明显，便于理解. 但仍有两点不足：一是由于去掉式子中的绝对值符号这一步骤不便于计算，因而在应用时受到一定的限制；二是由于所有数据的离差的绝对值之和，既与每个数据离差的大小有关，也与这组数据个数的多少有关，因此只用离差的绝对值的和比较两组数据的离散程度时，可能因为数据个数的不同而导致出现错误的判断. 所以在刻画一组数据的离散程度时，还应考虑通过取平均数消除数据的个数对离散程度造成的影响.

为了刻画一组数据的离散程度，通常选用各个数据的离差的平方的平均数，即用

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

来刻画这组数据的离散程度，我们把 s^2 叫做这组数据的**方差**（variance）.

由方差的意义可以看出，当一组数据的分布比较分散时，各数据偏离平均数的程度较大，各个数据的离差的平方和就较大，方差也就较大；当数据的分布比较集中时，各数据偏离平均数的程度较小，各个数据的离差的平方和就较小，方差也就较小.

方差越大，表明这组数据的波动越大；反之，方差越小，表明波动越小.

（5）利用方差的定义，分别计算上面问题中甲、乙两名运动员 8 次百米跑训练成绩的方差，你有什么发现?

$$s_{甲}^2=\frac{(12.0-12.5)^2+(12.2-12.5)^2+(13.0-12.5)^2+(12.6-12.5)^2+(13.1-12.5)^2+(12.5-12.5)^2+(12.4-12.5)^2+(12.2-12.5)^2}{8}$$

$$=\frac{(-0.5)^2+(-0.3)^2+0.5^2+0.1^2+0.6^2+0^2+(-0.1)^2+(-0.3)^2}{8}$$

$$=\frac{1.06}{8}=0.132\ 5,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(12.2-12.5)^2+(12.4-12.5)^2+(12.7-12.5)^2+(12.5-12.5)^2+(12.9-12.5)^2+(12.2-12.5)^2+(12.8-12.5)^2+(12.3-12.5)^2}{8}$$

$$=\frac{(-0.3)^2+(-0.1)^2+0.2^2+0^2+0.4^2+(-0.3)^2+0.3^2+(-0.2)^2}{8}$$

$$=\frac{0.52}{8}=0.065\,.$$

由此可见，甲、乙二人 8 次训练成绩的方差具有明显的差异，由 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$ 可知，甲的成绩与乙相比，波动较大，不太稳定. 这与前面我们对于这一问题的分析是相吻合的.

智趣园

离散程度的度量

几位同学做投掷飞镖的游戏，每人向如图 4-3 所示的长方形 $OABC$ 内投镖 4 支，扎出 4 个点. 规定这 4 个点的离散程度小（即散度小）者为胜. 你能设计一种用“数”刻画这 4 个点的离散程度的方法吗？试一试.

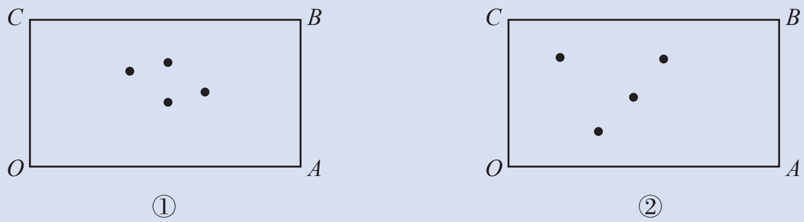


图 4-3

大刚设计的方法是：分别量出 4 个点中每两点之间的距离，用这些距离的最大值刻画该同学投镖的离散程度.

小亮设计了一种方法：分别量出 4 个点中每两点之间的距离，用这些距离之和刻画该同学投镖的离散程度.

小莹设计了另一种方法：分别量出 4 个点中每两点之间的距离，用这些距离的平均数刻画该同学投镖的离散程度.

小亮、大刚、小莹设计的方法都有一定的道理. 你还能设计出新的方法吗？

李老师设计了一种方法：在图 4-4 中，以点 O 为原点，分别以 OA，OC 所在直线为坐标轴，以 1 厘米为单位长度，建立直角坐标系.

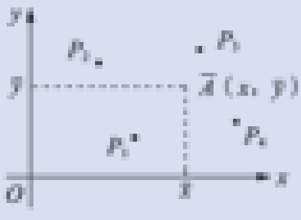


图 4-4

如图 4-4，设某同学扎出的 4 个点的坐标分别为

$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，$P_4(x_4, y_4)$，分别求出各点横坐标的平均数 $\bar{x}$ 与纵坐标的平均数 $\bar{y}$，再计算

$$k=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2}{4}$$

与

$$l=\frac{(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+(y_3-\bar{y})^2+(y_4-\bar{y})^2}{4}$$

的值，然后用（$k+l$）的值刻画该同学投镖的离散程度，（$k+l$）的值最小者获胜.

你能解释这种方法的合理性吗?

练 习

1. 一组数据 2，4，5，1，a 的平均数为 a，这组数据的方差是多少?
2. 已知一组数据 10，8，9，x，5 的众数是 8，求这组数据的方差.

例1　甲、乙两位车工同时加工一种球形零件，图纸规定球形零件的直径为（15 ± 0.05）mm，两人的工作效率相同. 现从他们加工的零件中分别随机抽取 5 个进行检验，测得零件的直径如下（精确到 0.01 mm）：

甲加工的零件：15.05，15.02，14.97，14.96，15.00

乙加工的零件：15.00，15.01，15.02，14.97，15.00

（1）分别求两个样本的平均数与方差；

（2）如果从两人中推荐一人参加即将举办的全厂技术比赛，你认为应该派谁参加?

解

（1）分别计算样本的平均数和方差：

$$\bar{x}_{甲}=\frac{15.05+15.02+14.97+14.96+15.00}{5}=15.00\ (\text{mm}),$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{15.00+15.01+15.02+14.97+15.00}{5}=15.00\ (\text{mm}),$$

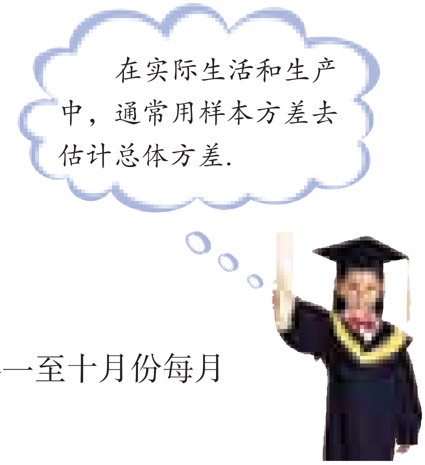
$$s^2_{甲}=\frac{(15.05-15.00)^2+(15.02-15.00)^2+(14.97-15.00)^2+(14.96-15.00)^2+(15.00-15.00)^2}{5}$$

$$=0.001\,08\ (\text{mm}^2).$$

$$s_{乙}^{2}=\frac{(15.00-15.00)^2+(15.01-15.00)^2+(15.02-15.00)^2+(14.97-15.00)^2+(15.00-15.00)^2}{5}$$

$$=0.000\ 28\ (\text{mm}^2).$$

（2）比较两个样本，它们都在规定的（15 ± 0.05）mm 的范围内，并且平均数相等，但方差 $s_{甲}^{2}>s_{乙}^{2}$，因而估计在他们加工的所有零件中，乙加工的零件的直径较稳定，所以应推荐乙参加比赛.



例2 某市甲、乙两个汽车销售公司，去年一至十月份每月销售同种品牌汽车的情况如图 4-5 所示.

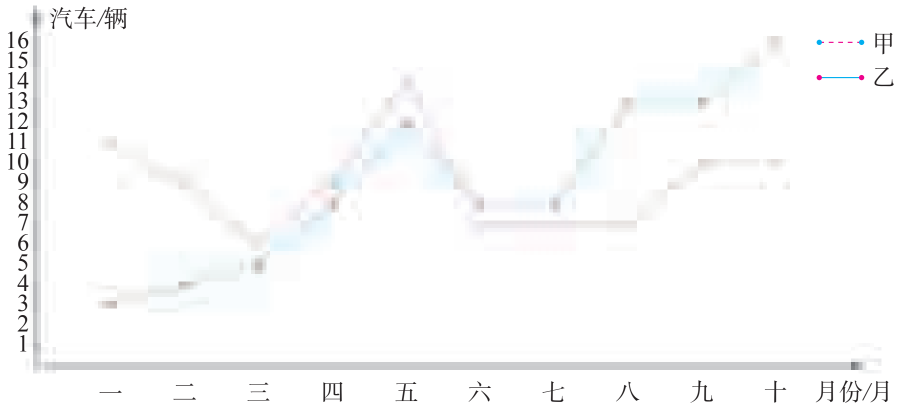


图 4-5

（1）分别求出甲、乙两公司去年一至十月份汽车销售量的平均数、方差、中位数和众数；

（2）试从平均数和方差对甲、乙两公司的销售情况加以分析；

（3）根据折线统计图，分析两家公司该品牌汽车销售量的变化趋势.

解 （1）为了方便，先将统计图表达的甲、乙两家公司十个月销售该品牌的汽车的两组数据（单位：辆）填入下面的表中，再分别求出它们的平均数、方差、中位数和众数：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均数	方 差	中位数	众 数
甲	11	9	6	9	14	7	7	7	10	10	9	5.2	9	7
乙	3	4	5	8	12	8	8	13	13	16	9	17.0	8	8

（2）从平均数分析，两家公司的月平均销售量都是 9 辆，但是二者的方差相差很大，后者约为前者的 3 倍，造成这种差异的原因是乙公司的数据比较分散，有较多的数据（如3，4，5，13，13，16）偏离平均数9的程度大；

（3）从折线图看，年初乙公司的销售情况明显低于甲公司，从三月份开始甲、乙两公司的销售水平开始接近，从六月份开始超过甲公司，以后各月销售量均比甲公司高，这表明在该品牌汽车的销售情况乙公司较有潜力.

广角镜

哪个班的成绩好

在一次科技知识竞赛中，甲、乙两个班学生的成绩统计如下：

分数/分	50	60	70	80	90	100
甲班人数/人	2	5	10	13	14	6
乙班人数/人	4	4	16	2	12	12

你能运用学过的统计知识对这两个班的成绩作出评价吗？

分别计算两个班成绩的平均分及方差，得

$$\bar{x}_{甲}=80，\bar{x}_{乙}=80；\qquad s_{甲}^{2}=172，s_{乙}^{2}=256 .$$

两个班的平均分相同. 但是 $s_{甲}^{2}<s_{乙}^{2}$，所以甲班成绩的波动比乙班要小.

这是否意味着甲班的成绩优于乙班呢？

如果竞赛的目的是比较各个班的科技知识普及与掌握的情况，那么答案是肯定的，甲班的成绩优于乙班.

从以下几个角度也可以得到这个结论：

（1）甲班的众数为90分，乙班的众数为70分，所以甲班成绩好；

（2）以 60 分为及格分数线，甲班的及格率为 96%，乙班的及格率为 92%，所以甲班成绩好；

（3）若规定成绩为 100 分获一等奖，90 分获二等奖，80 分获三等奖，则甲班的获奖率为 66%，乙班的获奖率为 52%，所以甲班的成绩好.

如果竞赛的目的是为了选拔骨干，由于乙班的方差较大，说明乙班得高分、低分极端分数的人数比甲班多. 甲班得分高于平均分 80 分的有 20 人，乙班高于平均分 80 分的有 24 人，所以乙班优于甲班.

从以下几个角度也可以得到这个结论：

（1）如果按上述（3）的规定设置一、二、三等奖，那么甲班获一等奖的人数为 6 人，乙班为 12 人，所以乙班优于甲班；

（2）如果以90分为选拔骨干的分数线，那么甲班有20人入选，乙班有24人入选，所以乙班优于甲班.

练 习

1. 八年级一班和二班各有10名同学参加电脑绘图技能测试，成绩如下（满分30分）：

成绩/分	20	22	26	28	30
一班人数/名	1	2	2	3	2
二班人数/名	0	4	1	2	3

试利用平均分和方差，对两个班同学的测试成绩进行比较分析.

习题4.5

复习与巩固

1. 分别计算习题4.4第1题中甲、乙两人射击成绩的平均数和方差，根据计算结果验证习题4.4得到的结论.
2. 某果品公司准备对收购的两批苹果进行分级，从中各任意抽取了20个，测得它们最大横截面的直径如下（单位：mm）：

第一批：81 85 80 75 78 76 83 82 78 84
79 76 85 79 76 83 82 81 78 79

第二批：80 81 78 74 83 88 76 75 84 83
82 80 78 84 85 78 76 77 83 77

哪一批苹果的大小更为整齐？

3. 为了缓解市区道路交通高峰的压力，某市实行了有关部门错时上下班的制度. 下表是随机抽取的在实行该制度前后两个星期三同一路段上班高峰期间每30 min的汽车流量：

时间段	6:30 ~ 7:00	7:00 ~ 7:30	7:30 ~ 8:00	8:00 ~ 8:30	8:30 ~ 9:00	9:00 ~ 9:30
实行前的汽车流量/辆	2 000	2 500	3 000	1 800	1 700	1 600
实行后的汽车流量/辆	1 800	2 200	2 500	2 300	2 000	1 800

分别计算两组数据的方差. 你认为该市实行该制度对于缓解交通高峰的压力是否有效？

拓展与延伸

4. 解答本章“情境导航”中的问题.

探索与创新

5. 某县统计局对甲、乙两村分别随机抽取10户居民调查去年的收入情况，得到下表：

甲村被调查户人口数/人	3	5	4	3	4	5	4	4	3	3
乙村被调查户人口数/人	6	7	5	5	4	4	4	3	3	2
被调查户人均纯收入/千元	3.9	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.8	5	5.2	5.4

计算甲、乙两村被调查户去年人均纯收入和方差，由此你能得到什么结论？

4.6　用计算器计算平均数和方差

在科学计算器的键盘上，平均数的按键为 $\boxed{\bar{x}}$，方差的按键为 $\boxed{S^2}$.

使用科学计算器计算平均数及方差的操作程序如下（不同计算器的操作程序可能有所不同）：

（1）按键 $\boxed{\text{ON}}$，打开计算器；

（2）按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ 进入统计状态，计算器显示“stat x”符号；

（3）按键 $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{CA}}$，清除计算器中原有寄存器的统计数据；

（4）输入统计数据，按键顺序为：第 1 个数据，$\boxed{\text{DATA}}$；第 2 个数据，$\boxed{\text{DATA}}$；……最后一个数据，$\boxed{\text{DATA}}$；

（5）按键 $\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{=}$，计算器显示出输入的所有统计数据的平均数；

（6）按键 $\boxed{S^2}$ $\boxed{=}$，计算器显示出输入的所有统计数据的方差；

（7）如果不准备保留数据，可按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$，退出求平均数及方差的运算.

例1　在一次国际女子排球冠亚军决赛中，A 国女排与 B 国女排出场队员的身高如下表：

A 国女排	号码	2	3	4	6	7	8	9	10	12	15	16	18
	身高/m	1.83	1.83	1.86	1.85	1.82	1.96	1.82	1.82	1.78	1.81	1.81	1.87
B 国女排	号码	2	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	16
	身高/m	1.90	1.84	1.94	1.88	1.80	1.90	1.80	1.82	1.80	1.78	1.85	1.75

根据上述数据，你认为哪支球队队员的身高更为整齐?

解　(1) 使用计算器计算A国女排队员身高的方差:

按键	显示	说明
[illegible] 3	stat x　0.	进入统计状态
[illegible] CA	stat x　0.	清除原有的内存数据
1.83 [illegible]	$n=$　1	输入第一个数据
1.83 [illegible]	$n=$　2	
1.86 [illegible]	$n=$　3	
1.85 [illegible]	$n=$　4	
1.82 [illegible]	$n=$　5	
1.96 [illegible]	$n=$　6	
1.82 [illegible]	$n=$　7	
1.82 [illegible]	$n=$　8	
1.78 [illegible]	$n=$　9	
1.81 [illegible]	$n=$　10	
1.81 [illegible]	$n=$　11	
1.87 [illegible]	$n=$　12	
[illegible] =	$\bar{x}=$　1.838 333 333	显示统计数据的平均数
[illegible] =	$S_x^2=1.880\ 555\ 556\times10^{-03}$	显示统计数据的方差

A国女排队员的平均身高约为1.838 m, 队员身高的方差约为0.001 88 m^2.

同样地，可以求得B国女排队员的平均身高约为1.838 m，队员身高的方差约为0.002 98 m^2.

(2) 由于两国队员的平均身高相同，但$S_{A国}^2<S_{B国}^2$，所以A国女排队员的身高比较整齐.

练 习

1. 用计算器分别计算习题4.5第2题中两批苹果直径的平均数与方差.
2. 某企业使用一种抽样程序来监测产品质量. 其原理是：随机抽取一个含有10件产品的样本，如果这个样本的方差超过1，那么该生产线必须立即关闭检修. 假设抽取

的某样本如下：

3.15，3.50，3.49，3.48，3.45，3.38，3.43，3.41，3.70，3.60

试问该生产线是否需要关闭检修？

习题4.6

复习与巩固

1. 用计算器分别计算习题4.5第5题中的甲、乙两村的人均收入及方差.

2. 质检部门从甲、乙两种饮料中各抽取10瓶250 mL的果汁饮料，检测其中维生素C的含量. 检测数据如下（单位：mg）：

甲	120	123	119	121	122	124	119	122	121	119
乙	121	119	124	119	123	124	123	122	123	122

哪种饮料维生素C的含量高？哪种饮料维生素C的含量比较稳定？

拓展与延伸

3. 某校要从两名跳远选手中挑选一人参加市中学生运动会. 在7次选拔赛中，他们的成绩如下表（单位：m）：

选手	选拔赛成绩 / m							中位数	平均数	方差
A	6.03	5.89	6.02	5.96	6.04	6.12	6.08			
B	5.96	5.78	5.96	6.28	5.90	6.31			6.02	

（1）把上表中所空各项数据填写完整；

（2）A，B两人的跳远成绩分别有什么特点？

（3）经查阅历届市中学生运动会记录，成绩若达到6.00 m，就很可能夺冠，你认为选谁参赛更有把握？

（4）历届市中学生运动会上该项最高记录为6.15 m，为打破这一记录，你认为应选派哪位选手参赛？

回顾与总结

1. 本章主要学习了哪些内容？总结一下，与同学交流.

2. 什么是加权平均数？怎样理解权的意义？在具体问题中，权有哪几种不同的表现形式？写出加权平均数的计算公式，并说明它与过去学过的平均数有什么联系.

3. 什么是中位数？怎样确定一组数据的中位数？一组数据的中位数一定是这组数据中的一个吗？
4. 什么是众数？
5. 平均数、中位数和众数是怎样描述一组数据集中趋势的？你能分别说出平均数、中位数、众数的特点吗？在什么情况下人们最关心平均数？在什么情况下人们最关心中位数或众数？举例说明.
6. 一组数据的离散程度反映了该组数据的什么特征？怎样刻画一组数据的离散程度？
7. 方差是怎样刻画一组数据的离散程度的？写出方差的计算公式.
8. 学习了本章，你有什么收获与提高？与同学交流.

综合练习

复习与巩固

1. 考察相同排气量的 A，B，C 三种品牌的汽车时，对价格、耗油量、最高车速、外形这 4 项分别打分，并按 40%：30%：20%：10% 记入总分. 这三种品牌的汽车的各项得分（单位：分）如下表所示：

项目 得分 品牌	价格	耗油量	最高车速	外形
A	95	73	90	90
B	82	90	89	95
C	75	93	92	85

作为消费者，你认为购买哪种品牌的汽车比较合适？如果按 40%∶20%∶20%∶20%记分呢？

2. 为了解学校在“爱我家园”绿化活动中新种植的 100 株树苗的生长情况，小亮和小莹从中随机抽取了 20 棵小树，分为两组进行跟踪观察. 6 个月后测量两组小树增长的高度（精确到 1 cm），得到如下数据：

甲组：14　13　15　14　13　11　13　16　13　15

乙组：11　7　17　14　13　19　3　13　10　17

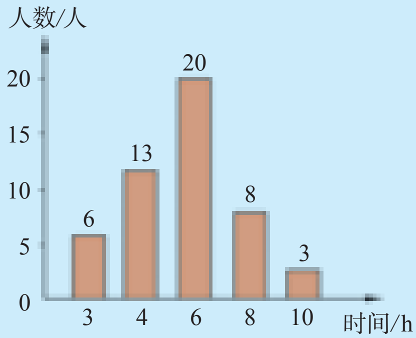
（1）分别用平均数、众数和中位数比较甲、乙两组小树的生长情况；

（2）估计这 100 株小树 6 个月内增长的平均高度.

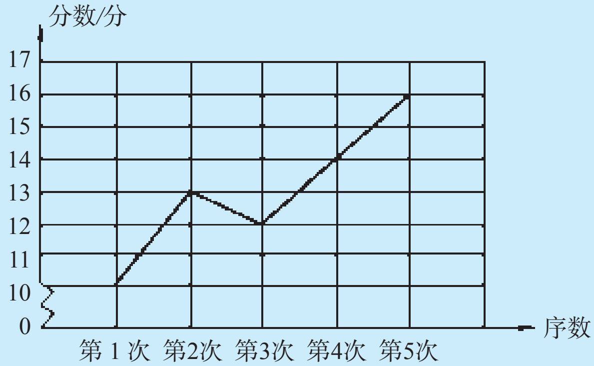
3. 为了了解阳光居民小区“全民健身”活动的开展情况，某志愿者随机调查了该小区 50 名成年居民一周的体育锻炼时间，并将数据进行整理后绘制成如图所示的统

计图. 根据图中提供的信息，求这 50 人一周体育锻炼时间的中位数和众数.

4. 小亮参加某项体育训练，近期的 5 次测试成绩得分情况如图所示，用计算器分别求出这组数据的平均数和方差.



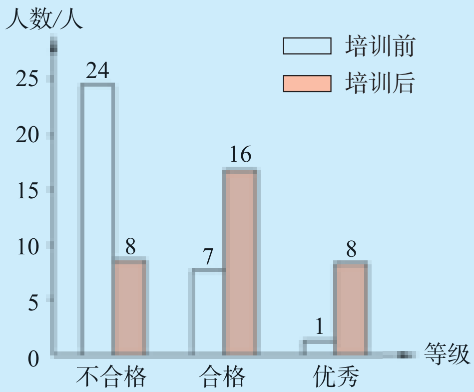
（第 3 题）



（第 4 题）

拓展与延伸

5. 某校八年级共有 320 名学生，他们在参加电脑培训前后各参加了一次水平相同的考试，成绩以同一标准划分为“不合格”、“合格”、“优秀”三个等级. 为了了解培训的效果，随机抽取了其中 32 名学生两次考试的等级，绘制成统计图（如图）. 请回答下列问题：



（第 5 题）

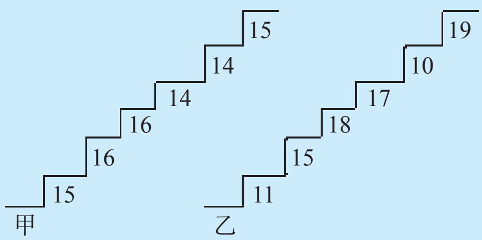
（1）这 32 名学生培训前成绩的中位数所在的等级是__________，培训后成绩的中位数所在的等级是__________；

（2）这 32 名学生经过培训，考试等级为“不合格”的百分比由____________下降到____________；

（3）估计该校整个八年级中，培训后考试等级为“合格”与“优秀”的学生共有________名；

（4）你认为上述估计合理吗？为什么？

6. 在某旅游景区一条上山的小路上，有甲、乙两段台阶（如图，图中的数字表示每一级台阶的高度，单位：cm）. 运用所学的统计知识，回答下列问题：



（第 6 题）

（1）把每一级台阶的高度作为数据，你认为两段台阶路有哪些相同点和不同点？

（2）在哪段台阶上走路比较舒服？为什么？

（3）为了便于游客行走，需要整修上山的小路．对于这两段台阶路，在台阶的数目不变的情况下，请你提出合理的整修建议．

7. 为了保护环境加强环保教育，时代中学组织 1 000 名学生参加义务收集废旧电池的活动．下面是随机抽取 50 名学生对收集废旧电池的数量进行的统计：

废旧电池数/节	3	4	5	6	8
人数/人	10	15	12	7	6

（1）这 50 名学生平均每人收集废旧电池多少节？

（2）这组废旧电池节数的中位数、众数分别是多少？

（3）根据统计发现，本次收集的各种电池的数量比为：纽扣电池：7 号电池：5 号电池：1 号电池 = 3：5：8：4．另据资料显示，各种电池 1 节能污染水的量的比为：纽扣电池：7 号电池：5 号电池：1 号电池 = 1：2：3：5．且一粒纽扣电池能使 500 吨水受到污染，本次收集活动中，可减少受污染水多少吨？

探索与创新

8. 蔬菜市场的菠菜每 500 g 的售价：早市 0.50 元，中午 0.45 元，晚市 0.40 元．姥姥从早、中、晚三市各买回 1 元钱的菠菜，她买回的菠菜每 500 g 的平均售价为多少元？

9. 经市场调查．某种优质西瓜的质量在 5 kg 左右时最为畅销．为了控制西瓜的质量，市农科所分别采用 A，B 两种不同的种植技术进行对比实验．在西瓜成熟期，分别从两个实验田各随机摘取 20 个西瓜，记录它们的质量如下（单位：kg）：

A	4.1	4.8	5.4	4.9	4.7	5.0	4.9	4.8	5.8	5.2
	5.0	4.8	5.2	4.9	5.2	5.0	4.8	5.2	5.1	5.0
B	4.6	4.9	4.8	4.5	5.2	5.1	5.0	4.5	4.7	4.8
	5.4	5.5	4.6	5.3	4.8	5.0	5.2	5.3	5.0	5.3

（1）若西瓜的质量在（5.0 ± 0.25）kg 范围内为优等品，根据以上信息填写下表：

	平均数	中位数	众数	方差	优等品率
A					
B					

（2）根据上表对 A，B 两种种植技术作出评价，从市场销售的角度分析，你认为哪种技术较好？

综合与实践

由 1 拃长引发的探索

实验与探究

（1）把你的右手的手指充分张开伸直，并将拇指尖和中指尖都接触桌面，估计大拇指指尖与中指指尖的距离（图 1），记录下来. 再用同样的方法估计大拇指指尖分别与食指、无名指、小拇指指尖的距离，把你估计的结果记录下来（精确到 0.1 cm）.

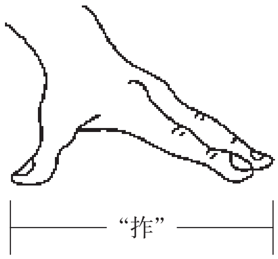


图 1

（2）用刻度尺分别量出右手各手指充分张开后拇指指尖与另四个指头指尖的距离，记录得到的数据，并与（1）中你估计的结果相比较，与同学交流，看谁估计的比较准确.

（3）将你的左右手的手心相对，手指分别对齐，你发现你的左手与右手能重合吗？由此你能得到什么结论？

（4）估计你左手的拇指尖到另外四个手指尖的距离，把你估计的结果记录下来（精确到 0.1 cm）.

（5）用刻度尺度量左手各手指充分张开后拇指指尖到另四指指尖的距离，记录得到的数据，并与（4）中的数据相比较，你有什么发现？你能对你度量得到的结果给出合理的解释吗？

（6）利用你手上随身携带的这把“尺子”——拃（zhǎ），你能测量出你的课桌的长和宽吗？再用刻度尺度量课桌的长和宽，检验你估算的精确度. 你感到在生活中，如果把“拃”作为测算物体的长度的工具时，选择拇指指尖到哪个指尖的最大距离作为 1拃比较方便？你选择的是左手还是右手？

小资料

通常把右手手指充分张开后拇指指尖到中指指尖的最大距离作为 1 拃（图 1）.

观察与思考

（1）如果每位同学都把右手手指充分张开后的拇指指尖与中指尖在桌面上的最大距离（精确到 0.1 cm）作为 1 拃，分别统计你班每位男生与每位女生 1 拃长度的数据.

（2）分别找出男、女生 1 拃长度的平均数、众数和中位数，解释它们的实际意义，体会它们是如何代表你班男、女生 1 拃长度数据的集中趋势和一般水平的. 你认为在这一实际问题中，用哪个统计量刻画这两组数据的集中趋势更客观一些？与同学交流.

（3）根据（2）中得到的结果，你对你的 1 拃的长度在整体中的位置应作如何评价？

（4）分别找出你班男生与女生 1 拃长度的最大值与最小值，你发现你班男生和女生 1 拃长分布的范围是什么？求出最大值与最小值的差，这两组数据分布的范围是否一样？如果不一样，哪组数据分布的范围大一些？分布大的原因是什么？

小资料

一组数据中最大数据与最小数据的差称为极差（range），即

极差 = 最大数据 − 最小数据

极差是度量离散程度的一种粗略的统计量，当两组数据的平均水平一致时，极差小表示代表数据一般水平的统计量（如平均数、中位数等）对集中趋势的代表性大，极差大表示这些代表一般水平的统计量的代表性小. 极差的计算简便，容易理解，但由于受到个别极端数据的影响，所以有时不能充分反映一组数据的实际离散程度.

（5）如何比较你班男生与女生 1 拃长度的离散程度？

当两组数据的平均数不相等或计量单位不相同时，不能直接比较两组数据的离散程度. 思考并计算下面的问题：

时代中学八年级随机抽查了 10 名男生和 10 名女生，他们的 1 拃长度统计如下（单位：cm）：

男生：19.0　19.0　21.0　18.0　19.0　17.0　20.0　20.0　21.0　22.5

女生：18.5　16.0　18.0　20.0　17.3　20.3　15.0　16.0　17.5　19.0

这组数据的平均数和极差如下表（单位：cm）：

	平均拃长 $\overline{x}$/cm	极差 R/cm
男生	19.65	5.5
女生	17.76	5.3

从极差来看，R（男）$>$ R（女），但不能就此得出结论：男生平均拃长对该样本的代表性小，男生拃长样本的离散程度大于女生拃长样本的离散程度. 在他们的平均拃长不一致时，必须通过比较二者的极差与平均数的百分比即极差系数的大小，才能比较两组数据的离散程度，其公式为

$$\text{极差系数}=\frac{R}{\overline{x}}\times 100\%.$$

其中 R 表示一组数据的极差，$\overline{x}$ 表示该组数据的平均数.

利用上面的公式，分别计算两个样本的极差系数，得

$$\text{男生拃长的极差系数}=\frac{R\text{（男）}}{\overline{x}\text{（男）}}=\frac{5.5}{19.65}\times 100\%$$

$$=27.99\%.$$

$$\text{女生拃长的极差系数}=\frac{R\text{（女）}}{\overline{x}\text{（女）}}=\frac{5.3}{17.76}\times 100\%$$

$$=29.84\%.$$

由于男生拃长的极差系数小于女生拃长的极差系数，所以相对而言，这 10 名男生平均拃长 19.65 cm 对样本的代表性较大.

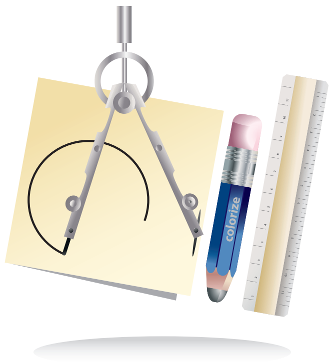
（6）请你利用（5）中的公式，分别计算你班男生和女生 1 拃长度的极差系数，并根据结果分析哪组数据的平均数的代表性大.

（7）如果把（5）中公式中的极差 R 换成方差 S^2，我们还可以利用新得到的公式，计算两组数据当平均数不相等时的方差系数，作为衡量离散程度的尺度. 请写出你得到的公式，并利用该公式计算你班男生、女生 1 拃长度的方差系数，并解释结果的意义.

由 1 拃长引发的探索活动，远远不止这些，随着今后对统计知识的继续学习，我们还可以把 1 拃长分段，绘制全班男生和女生 1 拃长的频数直方图，画出 1 拃长度与身高数据的散点图，探索它们之间的相关性，得到一些更多的信息. 你也可以运用自己学过的知识，提出一些值得探索的问题.

习题

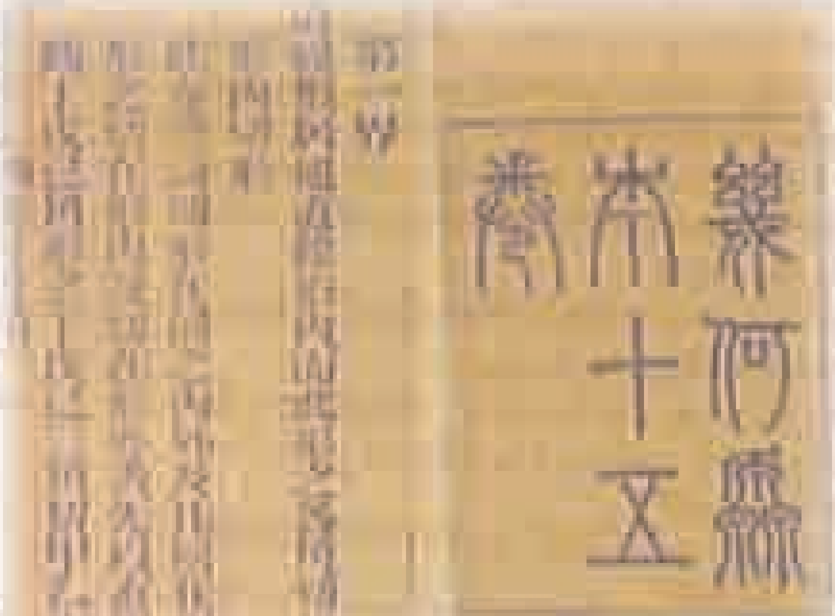
1. 设计一个方案，比较自己班级与别的班级的身高状况.



第 5 章　几何证明初步

内容提要

- 定义、命题、定理、推论
- 命题的条件和结论，原命题和逆命题
- 反例的作用
- 证明的意义和必要性
- 证明的格式
- 平行线的性质定理与判定定理的证明
- 三角形内角和定理及其推论的证明
- 直角三角形性质定理、判定定理和HL定理的证明
- 全等三角形的证明举例
- 角平分线定理、线段垂直平分线定理的证明



情境导航

三角形三个内角的和是多少度？你是怎样发现的？

用度量或剪拼的方法可以发现一个或几个三角形的三个内角的和为180°．由此，我们可以猜测，任何一个三角形的三个内角的和都等于180°．可是，你想过没有，即使再画出100个或更多个三角形，量出或通过实验观察得到每个三角形的内角和都等于（或接近于）180°，就能说明一切三角形三个内角的和都等于180°吗？

三角形有无数多个，我们永远也度量不完每一个三角形的内角和．仅仅根据对其中一部分三角形的度量或实验的结果就得出所有三角形的内角和都等于180°的结论，这种获取一般结论方法可靠吗？

要证实一个数学结论的真实性，必须用一些相关的定义和已经确认是正确的数学事实作为依据，利用逻辑推理的方法加以证明．

5.1　定义与命题

观察与思考

（1）在过去的数学学习中，我们学过许多数学概念，比如角、平行线、直角三角形等. 回忆一下，什么叫做角？什么叫做平行线？什么叫做直角三角形？

“有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角.”

“同一平面内两条不相交的直线叫做平行线.”

“有一个角是直角的三角形叫做直角三角形.”

像这样，用来说明一个概念含义的语句叫做这个概念的**定义**（definition）.

（2）观察上面举出的三个定义，它们的叙述形式有什么共同特点？

定义帮助我们理解并记忆这个概念区别于其他概念的本质特征. 例如，直角三角形的定义既揭示了一类三角形所共同具有的“有一个角是直角”的本质属性，又指出它们与其他图形的根本区别. 因此，定义一方面可以作为性质使用，另一方面又可以作为判定的方法.

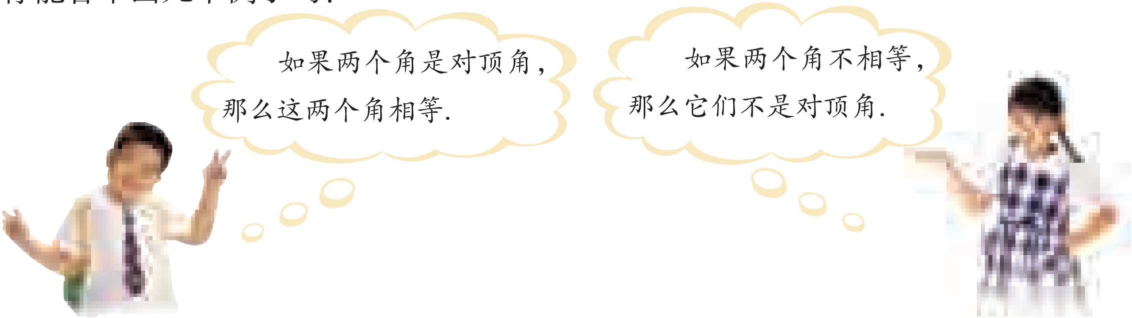
小资料

定义的叙述形式是“……叫做……”，其中“叫做”前面的部分是被定义项，后面部分是定义项.

你能举出几个学过的定义的例子吗？与同学交流.

交流与发现

过去我们探索了许多数学结论，有些是表示肯定的，有些是表示否定的，你能各举出几个例子吗？



所有这些结论都是对某件事情作出判断的语句. 像这样表示判断的语句叫做**命题**（proposition）.

如果一个语句不能对某一件事情作出判断，那么它就不是命题. 例如，“作$\angle AOB$的平分线”，“$\angle A=90°$吗？”等都不是命题.

命题通常由**条件**（condition，也称为题设）和**结论**（conclusion，也称为题断）两部分组成. 条件是已知的事项，结论是由已知事项推断出的事项. 例如，在上面小亮举出的命题中，“两个角是对顶角”是条件，“这两个角相等”是结论；小莹举出的命题中“两个角不相等”是条件，“这两个角不是对顶角”是结论.

小资料

命题的一般叙述形式为“如果……，那么……”. 其中，“如果”所引出的部分是条件，“那么”所引出的部分是结论.

例1 说出下列命题的条件和结论：

（1）如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边分别相等，那么这两个三角形全等；

（2）如果一个三角形的两边及一角与另一个三角形的两边及一角分别相等，那么这两个三角形全等；

（3）两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行；

（4）等腰三角形的两底角相等.

解 （1）条件：一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边分别相等；

结论：这两个三角形全等.

（2）条件：一个三角形的两边及一角与另一个三角形的两边及一角相等；

结论：这两个三角形全等.

（3）条件：两条直线被第三条直线所截，同位角相等；

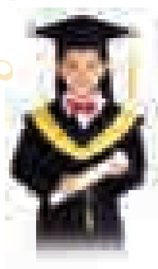
结论：两直线平行.

（4）先把这个命题改成“如果……，那么……”的形式：如果两个角是等腰三角形的两个底角，那么这两个角相等.

条件：两个角是等腰三角形的两个底角；

结论：这两个角相等.

（3）中“如果”前面的文字“两条直线被第三条直线所截”也是条件.



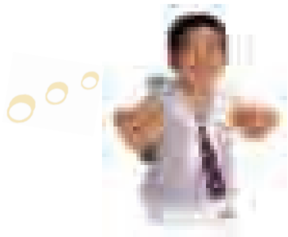
当命题的条件成立时，结论也一定成立的命题叫做**真命题**. 换言之，正确的命题是真命题.

想一想，在例 1 的四个命题中，有没有条件成立时，结论却不正确的命题？如果有，指出它是哪一个.

像例 1 中的（2）那样，当命题的条件成立时，不能保证命题的结论总是成立的命题叫做**假命题**. 换言之，不正确的命题是假命题.

你是如何发现例 1 中的命题（2）是假命题的呢？小亮只举出了一个例子，就推翻了这个命题的真实性. 你同意他的意见吗？

如本册书的图1－23，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle B=\angle B'$，但$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等. 因此，例 1 中的命题（2）是假命题.



要指出一个命题是假命题，只要能够举出一个例子，使它具备命题的条件，而不符合命题的结论就可以了. 这种例子称为**反例**（counter example）.

回忆一下，在过去的数学学习中，你还遇到通过举反例，说明一个命题是假命题的例子吗？

练 习

1. 下列语句分别是哪个定义的特征？
   （1）连接三角形的顶点和对边中点的线段；
   （2）三角形一边的延长线和另一边所成的角；
   （3）使方程的左右两边相等的未知数的值；
   （4）点到直线的垂线段的长度.
2. 将下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并指出命题中的条件和结论：
   （1）同角的补角相等；
   （2）线段垂直平分线上的一点到线段两端的距离相等.
3. 指出命题“相等的角是对顶角”的条件和结论，并说明这个命题是假命题.

习题5.1

复习与巩固

1. 下列语句中，哪些是命题？

（1）如果两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也互相平行；

（2）过直线 l 外一点 P 作 l 的平行线；

（3）什么叫做对顶角？

（4）如果明天是星期五，那么后天是星期六；

（5）如果 $a>b$，$a>c$，那么 $b=c$.

2. 指出第1题中各命题的条件和结论.

3. 下列命题中，哪些是假命题？如果是假命题，请举出一个反例.

（1）同角的余角相等；

（2）如果两个角互余，那么它们的余角也互余；

（3）如果 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余，$\angle\beta$ 与 $\angle\gamma$ 互余，那么 $\angle\alpha$ 与 $\angle\gamma$ 也互余；

（4）一个三角形中至少有两个锐角.

拓展与延伸

4. 写出下列命题的条件和结论，判断哪些是假命题，如果是假命题，请举出一个反例：

（1）一个角的补角大于这个角；

（2）如果两个有理数的积小于0，那么这两个数的和也小于0；

（3）垂直于同一条直线的两条直线垂直；

（4）直角三角形的斜边大于任何一条直角边.

5.2　为什么要证明

过去我们曾利用观察、实验、归纳和类比等方法发现了不少数学命题. 例如：

根据观察的方法得到了“两点之间线段最短”的命题；

利用实验的方法得到了两个三角形全等的判定方法；

由（+1）+（−1）= 0，（+2）+（−2）= 0，（+3）+（−3）= 0，……归纳出互为相反数的两个数的和等于0；

运用类比的方法由分数的基本性质得出分式的基本性质.

你还能举出类似的例子吗？与同学交流.

观察、实验、归纳和类比都是我们发现规律、获取一般结论的重要方法. 你是否想过，用这些方法得到的结论一定正确吗？

（1）蝴蝶泉是云南大理的著名景点. 每年春天，成千上万只“蝴蝶”云集泉边的合欢树下，成为奇观，此泉由此而得名. 明代地理学家徐霞客曾亲自考察并留下记载：“还有真蝶万千，连须钩足，自树巅倒悬而下，及于泉面，缤纷络绎，五色焕然.”

蝴蝶泉

后来有人发现，在泉边飞舞的蝴蝶躯体小，而成串倒挂在树枝上的躯体大，白天倒挂的晚上便飞走了. 于是请教蝴蝶专家，专家指出，白天倒挂的应该不是“蝶”，而是“蛾”，蛾昼伏夜动，个体大；蝶昼动夜伏，个体小. 原来徐霞客的观察和记载失实.

再如，凭你的眼力，比较图 5-1 中的线段 AF 与 FD，哪一条较长？再用圆规比较它们的长短，验证你的观察是否正确.

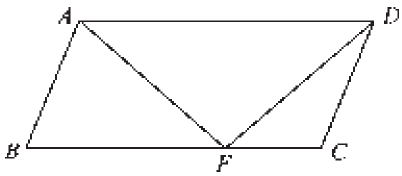
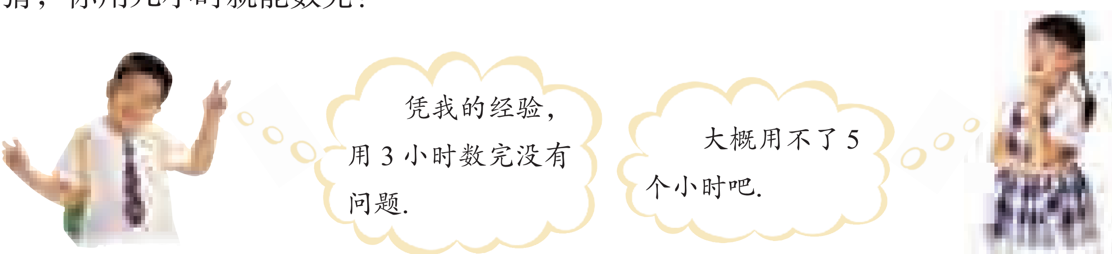


图 5-1

由此可见，凭直观得出的结论并不一定正确.

（2）小时候，大家都玩过数数（shǔ shù）游戏：从1，2，3，…一直数到100，1 000，或是一些更大的数. 可是你想过吗，如果按 1 分钟数 100 个数字的速度，从 1，2，3，… 依次往下数，数到 10 000 要用多少时间？凭你自己的经验，先猜一猜，你用几小时就能数完？



为了便于估算，在数多位数时，只读出各数位上的数字，不读出数位，如数到10，读作“1，0”，数到11，读作“1，1”，……这样数下去.

从 1 数到 9，只须数 9 个数字；从 10，11，… 数到 99，共有 $99-9=90$个两位数，要数 90×2 个数字；从 100 数到 999，共有 $999-99=900$ 个三位数，要数 900×3 个数字；从 1 000 数到 9 999，共有$9\,999-999=9\,000$ 个四位数，要数 $9\,000\times4$ 个数字；最后数到10 000是5个数字. 因此，从 1 数到 10 000 共数了

$$9\times1+90\times2+900\times3+9\,000\times4+5=38\,894$$

个数字，按 1 分钟数 100 个数字计算约需要 389 分钟，即 6 小时 29 分才能数完. 与你估计的时间相差多少?

由此可见，只凭已有经验猜测出的结论，也不一定正确.

（3）1962 年，我国数学家华罗庚给中学生讲过一个故事：“一只公鸡被一位买主买回了家. 第 1 天，主人喂了公鸡一把米；第 2 天，主人又喂了公鸡一把米，…… 连续 10 天，主人每天都给公鸡一把米. 公鸡有了 10 天的经验，就下结论说，主人一定每天都喂它一把米. 但是就在它得出这个结论不久，主人家里来了客人，公鸡就被杀掉做菜了.”故事中的公鸡为什么得出一个错误的结论呢?

再如，小亮发现，当 $n=1，2，3$ 时，代数式 n^2+3n+1 的值都是质数. 于是，他就说：“当 n 为正整数时，n^2+3n+1 的值一定是质数.”然而，小莹发现当 $n=6$时，$n^2+3n+1=55$，而 55 是合数. 小亮为什么得出一个错误的结论呢?

由此可见，只对部分对象进行研究就归纳出一般的结论，也未必正确.

（4）大刚做抛掷一枚硬币的试验，第 1 次抛出并落定后，硬币的正面朝上；第 2 次抛出并落定后硬币的反面朝上；第 3 次抛出并落定后硬币的正面朝上；于是他就猜测第 4 次抛出并落定后，肯定是硬币的反面朝上. 大刚的结论正确吗?

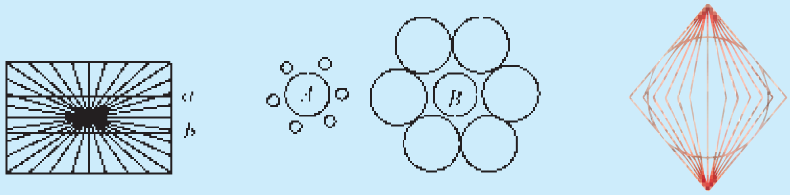
（5）小莹由“两个正数相加，和大于每一个加数”类比得到“两个有理数相加，和大于每个加数”，她得到的结论正确吗?

（6）请认真阅读本章的“情景导航”，你有什么体会？与同学交流.

综上所述，由观察、实验、归纳和类比得到的命题都仅仅是一种猜想，不能保证它是真命题. 要确定命题的正确性，还需要进一步有根据地说明理由，经过严密的逻辑推理加以证实，才能承认它是真命题.

练 习

1. 观察图①②③，回答下列问题：



①　　②　　③

（第 1 题）

（1）图①中的直线 a，b 平行吗？检验一下；

（2）图②中圆 A 与圆 B 相等吗？检验一下；

（3）图③中的黑色曲线是圆吗？检验一下.

2. 小亮从 $2>\frac{1}{2}$，$3>\frac{1}{3}$，$4>\frac{1}{4}$，…… 归纳出“任何一个正整数都大于它的倒数”，小亮的结论正确吗？

习题5.2

复习与巩固

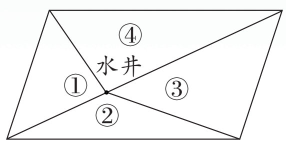
1. 一个不透明的袋子中放有大小和质地都相同的 5 个小球. 小亮在摸球试验时，摸出一个白球，然后将球放回，搅匀后重新摸球，又摸出了一个白球，……像这样重复试验 10 次后，摸出的都是白球，他就猜测袋子中放的全是白球. 小亮的结论正确吗？

2. 通过画图，小莹发现三角形的三条中线都在三角形的内部，三角形的三条角平分线也都在三角形的内部，于是推断三角形的三条高也都在三角形的内部. 小莹的结论正确吗？为什么？

3. 小亮由“如果 a，b 都是偶数，那么 $a+b$ 也是偶数”，联想“如果 a，b 都是奇数，那么 $a+b$ 也是奇数”. 小亮的结论正确吗？

拓展与延伸

4. 相传一位老农有一块平行四边形的土地，地里有一口水井，他将水井与地的四角分别相连，把地分成四块（如图）. 然后对他的两个儿子说：“地分给你们了，每人各



（第 4 题）

取相对的两块，水井不分，两家共用”. 精明的弟弟要求先选，果断地选择了面积之和“大”的②④两块. 老实的哥哥吃亏了吗？

探索与创新

5. 小亮在上台阶时发现，如果只上一个台阶，有一种走法；上两个台阶时，可以每步都上一个台阶或者一步上两个台阶. 这样就有两种不同的走法，如果规定一步至多上两个台阶，那么上三个台阶，共有 1+1+1，1+2 和 2+1 三种不同的走法. 按照上述规律，他猜想上 n 个台阶，有 n 种不同的走法. 他的猜想正确吗？如果正确，说明你的理由；如果不正确，举出一个反例.

5.3　什么是几何证明

怎样运用推理的方法证实一个命题是真命题呢？

首先，我们需要从已经了解的数学命题中，挑选出一部分人们通过长期实践总结出来，被大家所公认的命题作为**基本事实**，用基本事实作为证实所有其他几何命题的起始依据.

在已学过的几何命题中，本书确定下列命题作为基本事实[1]：

（1）两点确定一条直线；

（2）两点之间，线段最短；

（3）过一点有且只有一条直线与这条直线垂直；

（4）两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行；

（5）过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行；

（6）两边及其夹角分别相等的两个三角形全等；

（7）两角及其夹边分别相等的两个三角形全等；

（8）三边分别相等的两个三角形全等.

[1] 本书中还有一条基本事实，在九（上）学习相似形时再提出.

等式的基本性质和将来要学到的**不等式的基本性质**也看做基本事实.

另外，在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来替换. 用符号表示就是：**“如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$”**，**“如果 $a>b$，$b=c$，那么 $a>c$”**. 我们把它们也作为基本事实，简单说成：**等量代换**.

除上述基本事实外，以前所学过的以及今后要学到的其他几何命题，都需要由基本事实、定义、已证实的结论及已知条件出发，通过逻辑推理的方法加以证实. 推理的过程叫做**证明**（proof）.

例如，怎样证明命题“**如果两个角是对顶角，那么这两个角相等**”的真实性呢？

证明前先要分清待证命题的条件和结论. 为了推理时叙述方便，还要把用文字语言叙述的条件和结论“翻译”成图形语言和符号语言.

已知：如图5−2，$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角.

求证：$\angle AOC=\angle BOD$.

证明：$\because$ $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角（已知）❶，

$\therefore$ $\angle AOC+\angle AOD=180°$，

$\angle AOD+\angle BOD=180°$（平角的定义）.

$\therefore$ $\angle AOC+\angle AOD=\angle AOD+\angle BOD$（等量代换）.

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$（等式的基本性质）.

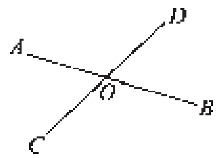


图 5−2

这样，上述命题便得到了证实.我们把经过推理得到证实的真命题叫做**定理**（theorem），定理可以作为今后证明其他命题真假的依据. 定理与定义和基本事实一样，具有普遍的意义. 例如上面的定理不仅仅对图 5−2 中的 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 成立，对 $\angle AOD$ 和 $\angle BOC$ 也成立，并且对于任何图形中的对顶角都成立. 我们把这个定理称为对顶角的性质定理，简单说成：**对顶角相等**.

❶ 符号“$\because$”读作“因为”，“$\therefore$”读作“所以”. 证明过程中每一步的后面都用括号注明推理的依据，熟悉了证明的格式后，可以省略括号及括号中填注的理由.

例1 求证：同角的余角相等.

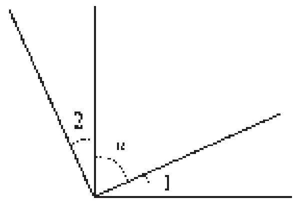


图 5-3

已知：如图5-3，$\angle 1$与$\angle\alpha$互余，$\angle 2$与$\angle\alpha$互余.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明 $\because$ $\angle 1$与$\angle\alpha$互余（已知），

$\therefore$ $\angle 1+\angle\alpha=90^\circ$（余角的定义）.

$\therefore$ $\angle 1=90^\circ-\angle\alpha$（等式的基本性质）.

又$\because$ $\angle 2$与$\angle\alpha$互余（已知），

$\therefore$ $\angle 2+\angle\alpha=90^\circ$（余角的定义）.

$\therefore$ $\angle 2=90^\circ-\angle\alpha$（等式的基本性质）.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

观察与思考

回顾并分析上面两个定理的证明过程，它们都包括了哪几个步骤？你认为今后在定理证明的书写格式上有哪些应当注意的问题？

几何证明的过程一般包括三个步骤：

（1）根据题意，画出图形.

例如，在上面证明对顶角的性质定理时，命题条件中的对顶角，是指任意两条直线相交时所成的一对对顶角. 因此画图时应任意画出两条相交直线，不能画成两条直线垂直的特殊情况. 为了随后书写已知、求证和证明时叙述的方便，在图中要标出必要的字母和符号，如图5-2，5-3.

（2）结合图形，根据条件、结论，写出已知、求证.

其中，“已知”是命题的条件，“求证”是命题的结论. 书写时，应把图形所表达的数学涵义（即图形语言）根据命题中的文字语言转化为符号语言.

（3）找出由已知推出求证的途径，写出“证明”.

“证明”是由条件（已知）出发，经过一步步的推理，最后证实结论（求证）正确的全部过程. 证明过程应按照“前因后果”的次序书写，其中的每一步推理都要有依据. 推理的依据只能是命题给出的已知条件、已经学过的定义、基本事实和已经证明过的定理. 不能凭“想当然”，把未被证实的命题作为推理的依据.

史海漫游

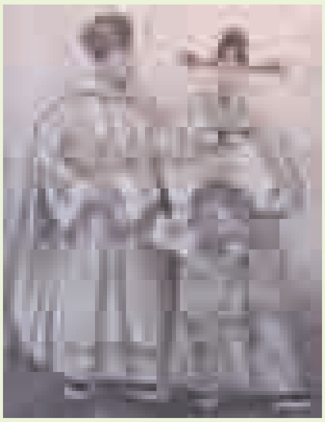
《原本》与欧氏几何

几何学（geometry）是数学最古老的分支之一. 公元前3世纪，古希腊数学家欧几里得在前人积累的大量成果的基础上，搜集了当时所知道的几何事实，按照逻辑推理的方法，整理成一部有着严密逻辑体系的数学巨著《原本》(Elements). 今天我们在初中数学教科书中所学的“图形与几何”知识，绝大部分都是从《原本》中选出来的.

欧几里得在《原本》中把逻辑学的思想方法引入到几何学，把当时的几何学内容按照逻辑要求进行了编写. 所谓逻辑要求，指的就是从很少的几个定义、公设、公理出发，利用演绎的方法证明了其他的结论（定理）. 而“证明”所需的定义、公理和其他定理，必须编写在这个定理的前面，也就是必须按照“前因后果”排列几何命题的先后次序. 欧几里得所说的“公设”、“公理”，是指一些原始的、明显成立的，而且不可能证明的基本原理，把它们以及几个基本定义作为进行逻辑推理的基础. 牛顿曾称赞《原本》“是几何学的光荣”,《原本》的出现标志着演绎数学的成熟.

《原本》是一部具有划时代意义的著作，是至今流传最广、影响最大的一部世界数学名著，它所提出的公理化方法是人类思维的一场革命，它主导了其后数学发展的主要方向，并对其他科学乃至人类文明产生了巨大的推动作用.

公元1582年，意大利人利玛窦（Ricci Matteo，1552—1610）来到中国，带来了15卷本的《原本》. 他与明代数学家徐光启（1562—1633）合作把该书的前6卷译成中文，并定名为《几何原本》，于1607年出版，这是中国首次翻译的国外数学书籍. 后9卷是公元1857年由清代数学家李善兰和英国人伟烈亚力译完的.


利玛窦和徐光启

由于时代的局限，欧几里得的《原本》也存在不少缺陷，如有些概念的定义不清楚或者根本就没有定义，而作为推理基础的公理也不完善. 直到1899年，德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862—1943）的名著《几何基础》问世，才建立起第一个完备的几何学的公理系统.

练 习

阅读并理解下列各题的证明过程，并在每步后的括号内填写该步推理的依据.

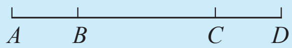
1. 已知：如图，B，C是线段AD上的两点，且$AB = CD$.

求证：$AC = BD$.

证明：$\because AB = CD$（　　　　　），

$\therefore AB + BC = CD + BC$（　　　　　），

$\therefore AC = BD$（　　　　　）.



（第 1 题）

2. 已知：如图，$\angle ABC = \angle A'B'C'$，$BD$和$B'D'$分别是$\angle ABC$和$\angle A'B'C'$的平分线.

求证：$\angle 1 = \angle 2$.

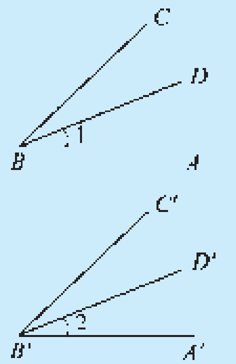
证明：$\because \angle ABC = \angle A'B'C'$（　　　　　），

$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle A'B'C'$（　　　　　），

$\because \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC$（角平分线的定义），

$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle A'B'C'$（　　　　　），

$\therefore \angle 1 = \angle 2$（　　　　　）.



（第 2 题）

习题5.3

复习与巩固

1. 阅读并理解下面的证明过程，并在每步后的括号内填写该步推理的依据.

已知：如图，点B在直线AC上，$\angle ABE$与$\angle DBC$互为余角.

求证：$DB \perp EB$.

证明：$\because \angle ABE$与$\angle DBC$互为余角（　　　　），

$\therefore \angle ABE + \angle DBC = 90°$（　　　　）.

$\because$点B在直线AC上（　　　　），

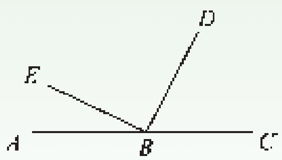
$\therefore \angle ABC = 180°$（　　　　）.

$\because \angle ABE + \angle EBD + \angle DBC = \angle ABC$（角的和的定义），

$\therefore \angle ABE + \angle EBD + \angle DBC = 180°$（　　　　）.

$\therefore \angle EBD = 90°$（　　　　）.

$\therefore DB \perp EB$（　　　　）.

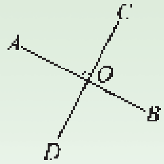


（第 1 题）

2. 已知：如图，直线 AB，CD 相交于点 O，且 $\angle AOC$ 是直角.

求证：$\angle COB$，$\angle BOD$，$\angle DOA$ 都是直角.

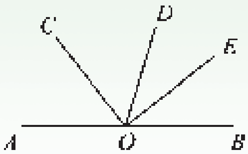
3. 求证：同角的补角相等.



（第 2 题）

拓展与延伸

4. 如图，点 O 在直线 AB 上，射线 OC，OE 分别平分 $\angle AOD$ 和 $\angle BOD$. 求证：$\angle COD$ 与 $\angle DOE$ 互为余角.



（第 4 题）

5.4　平行线的性质定理和判定定理

在七年级下册我们曾探索了哪些平行线的性质和判定方法?

我们已把其中的“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行”作为基本事实，利用它和其他有关的基本事实，可以证明平行线的性质定理 1：“**两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等**”[1]. 怎样用有关的基本事实、平行线的性质定理 1 以及已经证实了的定理证明平行线的其他性质和判定方法呢?

例1　证明平行线的性质定理 2：**两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.**

已知：如图5−4，直线 $a /\!/ b$，$\angle 1$，$\angle 2$ 是直线 a，b 被直线 c 所截得的内错角.

求证：$\angle 1 = \angle 2$.

证明　$\because a /\!/ b$（已知），

$\therefore \angle 3 = \angle 2$（两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等）.

$\because \angle 1 = \angle 3$（对顶角相等），

$\therefore \angle 1 = \angle 2$（等量代换）.

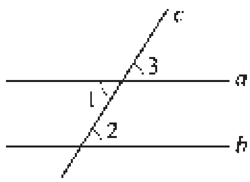


图 5−4

[1] 由于该定理的证明方法要用到反证法，本教科书安排在九（上）第3章中学习.

你会证明“平行线的性质定理 3：**两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补**”吗？试一试.

例2　证明平行线的判定定理 1：**两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行.**

已知：如图 5-5，直线 AB，CD 被 EF 所截，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：$AB /\!/ CD$.

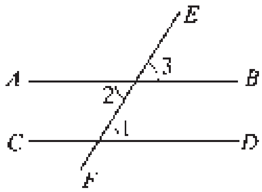


图 5-5

证明　$\because \angle 2 = \angle 3$（对顶角相等），

$\angle 1 = \angle 2$（已知），

$\therefore \angle 1 = \angle 3$（等量代换）.

$\because \angle 1 = \angle 3$（已证）❶，

$\therefore AB /\!/ CD$（两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行）.

你会证明“平行线的判定定理 2：**两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么两直线平行**”吗？与同学交流.

交流与发现

分析下面的两个命题，你发现它们的条件和结论之间有什么关系？

（1）两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

（2）两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行.

在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫做**原命题**，那么另一命题叫做它的**逆命题**.

上面所说的两个命题是互逆命题. 如果把命题（1）叫做原命题，那么命题

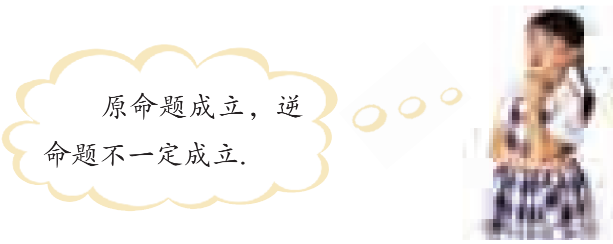
❶ 由于上一步中已出现了 $\angle 1 = \angle 3$，为了避免不必要的重复，今后该步一般省略不写.

（2）就叫做命题（1）的逆命题. 当然也可把命题（2）叫做原命题，这时命题（1）就叫做命题（2）的逆命题.

你能说出下列命题的逆命题吗？它们的逆命题分别是真命题还是假命题？

（1）两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补；

（2）对顶角相等.



如果一个定理的逆命题也是真命题，那么这个逆命题就是原定理的**逆定理**.

练习

1. 阅读并理解下面的证明过程，并在每步后的括号内填写该步推理的依据.

（1）已知：如图，直线 $AB /\!/ CD$，直线 EF 与 AB，CD 分别交于点 P 和 Q，$AB \perp EF$.

求证：$CD \perp EF$.

证明：$\because AB /\!/ CD$（　　　　　　），

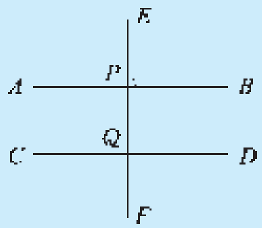
$\therefore \angle EPB = \angle PQD$（　　　　　　）.

$\because AB \perp EF$（　　　　　　），

$\therefore \angle EPB$ 是直角（　　　　　　）.

$\therefore \angle PQD$ 是直角（　　　　　　）.

$\therefore CD \perp EF$（　　　　　　）.



（第 1（1）题）

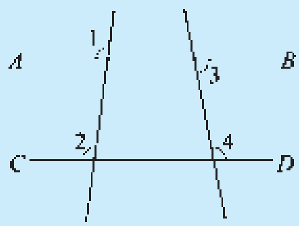
（2）已知：如图，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：$\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

证明：$\because \angle 1 = \angle 2$（　　　　　　）.

$\therefore AB /\!/ CD$（　　　　　　）.

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180°$（　　　　　　）.



（第 1（2）题）

2. 说出下列命题的逆命题，并指出它是真命题还是假命题：

（1）如果两个角相等，那么这两个角的补角相等；

（2）全等三角形的对应角相等.

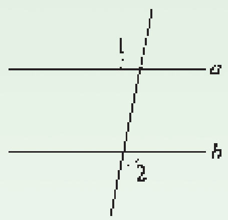
习题5.4

复习与巩固

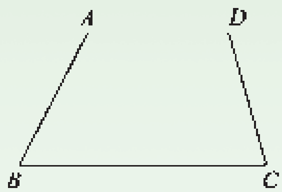
1. 已知：如图，直线$a//b$. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

2. 如图，已知$\angle A+\angle B=180°$. 求证：$\angle C+\angle D=180°$.

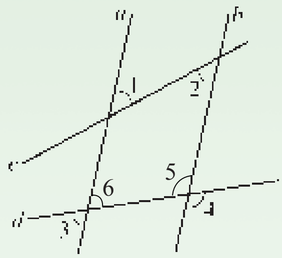
3. 已知：如图，直线c，d与直线a，b分别相交，$\angle 1=\angle 2$.
   求证：$\angle 3+\angle 4=180°$.



（第 1 题）



（第 2 题）



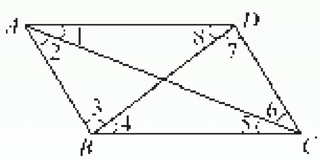
（第 3 题）

4. 说明下列命题的逆命题是假命题：
   （1）如果一个整数的各数位上的数字之和是3，那么这个整数能被3整除；
   （2）直角都相等.

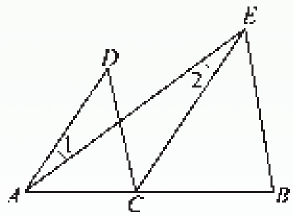
拓展与延伸

5. 如图，根据下面的条件和图中所标出的角，分别写出所有正确的结论，并从中选出一个加以证明.
   （1）由$\angle 2=\angle 6$可以推出哪些角分别相等？
   （2）由$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$可以推出哪些角分别相等？

6. 如图，已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle D=\angle BEC$. 求证：$DC//BE$.



（第 5 题）



（第 6 题）

7. 阅读并理解下面的证明过程，并在每步后的括号内填写该步推理的依据：
   已知：如图，$\angle ADC=\angle ABC$，BE，DF分别平分$\angle ABC$，$\angle ADC$，且$\angle 1=\angle 2$.
   求证：$\angle A=\angle C$.
   证明：$\because BE$，DF分别平分$\angle ABC$，$\angle ADC$（　　），

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 3=\frac{1}{2}\angle ADC$（　　　　　　　　　　）．

$\because \angle ABC=\angle ADC$（　　　　　　　　　　），

$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ADC$（　　　　　　　　　　）．

$\therefore \angle 1=\angle 3$（　　　　　　　　　　）．

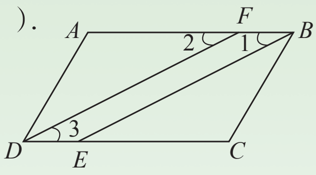
$\because \angle 1=\angle 2$（　　　　　　　　　　），

$\therefore \angle 2=\angle 3$（　　　　　　　　　　）．

$\therefore AB /\!/ CD$（　　　　　　　　　　）．

$\therefore \angle A+\angle ADC=180^\circ$，$\angle C+\angle ABC=180^\circ$（　　　　　　　　　　）．

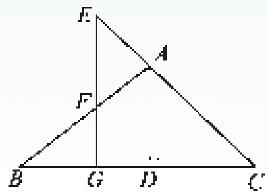
$\therefore \angle A=\angle C$（　　　　　　　　　　）．



（第 7 题）

探索与创新

8. 如图，已知$AD\perp BC$，垂足为点D，$EG\perp BC$，垂足为点G，EG交AB于点F，$\angle AFE=\angle E$．求证：AD平分$\angle BAC$．



（第 8 题）

5.5　三角形内角和定理

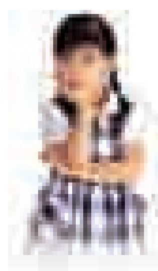
交流与发现

（1）在本章“情境导航”中，以命题“三角形的三个内角之和是180°”为例，说明了证明的必要性．怎样才能证明它的真实性呢?

已知：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角．

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$．

我们曾用把三角形纸片的三个内角撕下来，拼成一个平角的方法，验证了三角形的三个内角之和等于180°．这一实验过程对于证明上述命题有什么启发?



证明　如图 5-6，作 BC 的延长线 CD，在 $\triangle ABC$ 的外部，以 CA 为一边，作 $\angle ACE=\angle A$.

$\therefore CE/\!/AB$（两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行）.

$\therefore \angle B=\angle ECD$（两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等）.

$\because \angle ACB$，$\angle ACE$，$\angle ECD$ 组成一个平角，

$\therefore \angle ACB+\angle ACE+\angle ECD=180^\circ$（平角的定义），

$\therefore \angle ACB+\angle A+\angle B=180^\circ$（等量代换）.

通过证明，我们得到

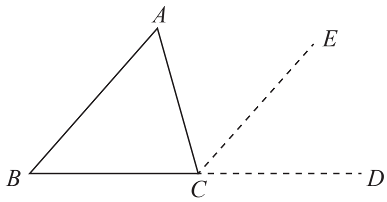


图 5-6

小资料

为了证明的需要，在原来图形上添加的线叫做**辅助线**，辅助线通常画成虚线.

三角形内角和定理　**三角形三个内角的和等于 180°.**

（2）你能用图 5-7 中所示的另外两种添加辅助线的方法，分别证明三角形内角和定理吗？试一试.

（3）除（1）（2）中的三种证法外，你还能想出这一定理的其他证明方法吗？

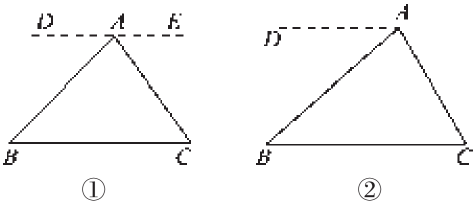


图 5-7

（4）观察图 5-6，$\angle ACD$ 是三角形的一个外角，$\angle A$ 与 $\angle B$ 是与 $\angle ACD$ 不相邻的两个内角，由三角形内角和定理能推出 $\angle ACD$ 与 $\angle A$，$\angle B$ 之间有怎样的数量关系？

$\because \angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$（三角形内角和定理），

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ-\angle ACB$（等式的基本性质），

$\because \angle ACD+\angle ACB=180^\circ$（平角的定义），

$\therefore \angle ACD=180^\circ-\angle ACB$（等式的基本性质），

$\therefore \angle ACD=\angle A+\angle B$（等量代换）.

$\therefore \angle ACD>\angle A$，$\angle ACD>\angle B$.

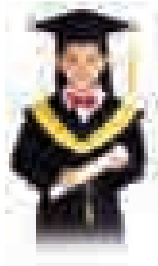
由此得出：

推论 1　**三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.**

推论 2　**三角形的一个外角大于与它不相邻的任意一个内角.**

由三角形内角和定理，直接推出了三角形的一个外角与它不相邻的两个内角之间的数量关系的两个命题，并且用推理的方法给予证实. 像这样，由基本事实或定理直接推出的真命题叫做**推论**（corollary）. 推论可以作为定理使用.

利用推理不仅可以证实一个命题是正确的，并且还可以由证实的命题推出一些新的真命题.



练 习

1. 证明：四边形四个内角的和等于360°.
2. 已知D是$\triangle ABC$内的一点. 求证：$\angle BDC > \angle A$.

观察与思考

（1）取一副三角尺，你能说出每个三角尺中的两个锐角的度数吗？同一个三角尺的两个锐角的和是多少度？

（2）任意画一个Rt$\triangle ABC$，$\angle C = 90°$（图 5-8），它的两个锐角$\angle A$与$\angle B$之间有什么数量关系？怎样证明你的结论？

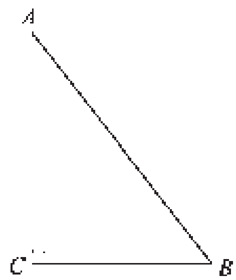
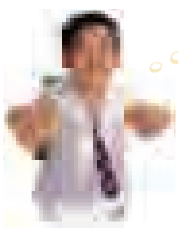


图 5-8



$\angle A+\angle B = 90°$.

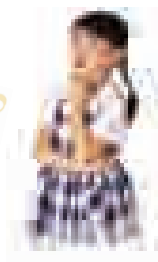
在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A+\angle B+\angle C = 180°$，

$\therefore \angle A+\angle B = 180° - \angle C$.

$\because \angle C = 90°$，

$\therefore \angle A+\angle B = 90°$.



于是，就得到

直角三角形的性质定理　**直角三角形的两个锐角互余.**

（3）你能说出直角三角形性质定理的逆命题吗？它是真命题还是假命题？如果是真命题，请加以证明；如果是假命题，请举出一个反例.

容易证明直角三角形性质定理的逆命题

两个锐角互余的三角形是直角三角形

是真命题，它可以作为直角三角形的一个判定定理.

例1　已知：如图 5-9，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足为 D.

求证：$\angle 1 = \angle B$.

证明　在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because \angle ACB = 90°$（已知），

$\therefore \angle B + \angle A = 90°$（直角三角形的两个锐角互余）.

在 $\triangle ADC$ 中，

$\because CD \perp AB$（已知），

$\therefore \angle ADC = 90°$（垂直的定义）.

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形（直角三角形的定义）.

$\therefore \angle 1 + \angle A = 90°$（直角三角形的两个锐角互余）.

$\therefore \angle 1 = \angle B$（同角的余角相等）.

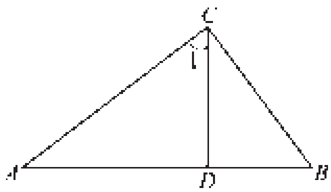


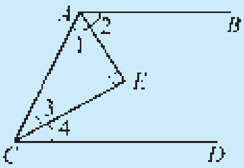
图 5-9

练 习

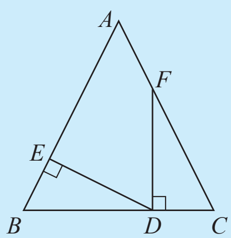
1. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle E = 90°$.

   求证：$AB \parallel CD$.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$，D 是 BC 边上的一点. 过 D 作 $DF \perp BC$，$DE \perp AB$，垂足分别为点 F，E. 求证：$\angle FDE = \angle C$.



（第 1 题）

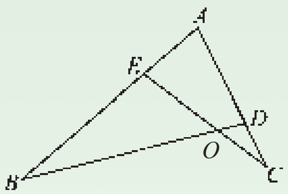


（第 2 题）

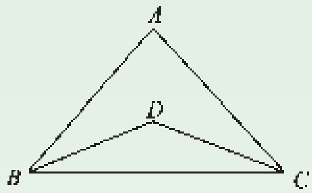
习题5.5

复习与巩固

1. 如图，已知点D，E分别在AC，AB上，$\angle B=\angle C$．除对顶角外，图中还有哪些角分别相等？证明你的结论.



（第 1 题）



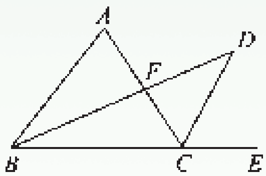
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$的平分线与$\angle ACB$的平分线交于点D．
你发现$\angle BDC$与$\angle A$的度数之间有怎样的大小关系？证明你的结论.

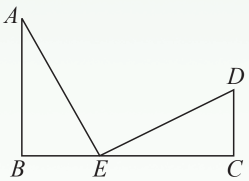
3. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B$的平分线交AC于点F，交$\angle ACB$的外角的平分线交于点D.
求证：$\angle D=\dfrac{1}{2}\angle A$．

4. 求证：三角形的外角和等于$360°$．

5. 如图，已知点B，E，C在同一条直线上，$\angle A=\angle DEC$，$\angle D=\angle BEA$，$\angle A$与$\angle D$互为余角.
求证：（1）$AE\perp DE$；　　（2）$AB/\!/CD$．



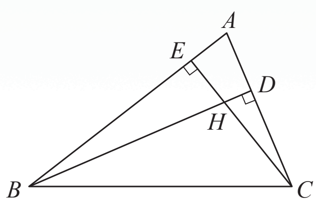
（第 3 题）



（第 5 题）

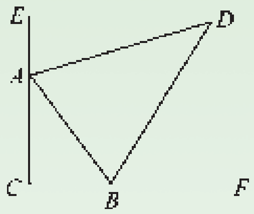
拓展与延伸

6. 如图，BD，CE分别是$\triangle ABC$的两条高，它们相交于点H．试判断下列各组角之间的大小关系，并加以证明.
（1）$\angle DHC$与$\angle A$；
（2）$\angle EBH$与$\angle A$；
（3）$\angle ACE$与$\angle ABD$.

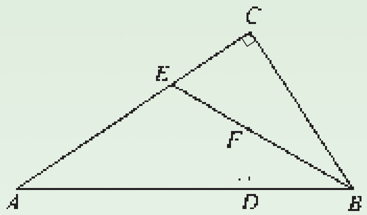


（第 6 题）

7. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，分别作两个锐角的外角平分线，相交于点 D. 试探索 $\angle D$ 的度数，并证明你的结论.



（第 7 题）

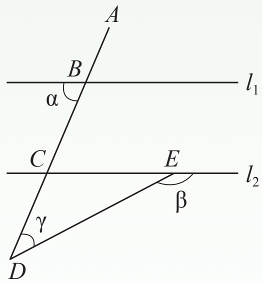


（第 8 题）

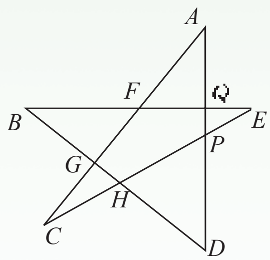
8. 如图，已知△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，CD 为 AB 边上的高，$\angle ABC$ 的平分线 BE 分别交 CD，CA 于点 F，E. 求证：$\angle CFE = \angle CEF$.

探索与创新

9. 如图，直线 $l_1 /\!/ l_2$，直线 AD 与 l_1，l_2 分别相交于点 B，C. 试判断图中三个角 $\angle\alpha$，$\angle\beta$，$\angle\gamma$ 之间存在什么数量关系，并加以证明.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，五角星中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 的度数的和是多少度？证明你的结论.

5.6 几何证明举例

在前面学过的全等三角形的四个判定方法中，判定方法 1，2，4 都已作为基本事实. 能够证明判定方法 3 吗？

已知：如图 5-10，在△ABC 和△$A'B'C'$ 中，$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

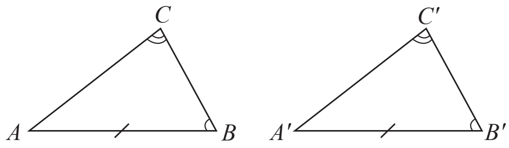


图 5-10

证明　在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$\because \angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$（已知），

$\therefore \angle A = 180° - \angle B - \angle C$，

$\angle A' = 180° - \angle B' - \angle C'$（三角形内角和定理），

$\therefore \angle A = \angle A'$（等量代换）.

$\because AB = A'B'$（已知），

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（ASA）.

今后，我们把全等三角形的判定方法3作为全等三角形的判定定理：

两角分别相等且其中一组等角的对边也相等的两个三角形全等.

从基本事实SAS，ASA，SSS以及定理AAS出发可以判定两个三角形全等，利用全等三角形对应边和对应角的定义，可以进一步推证两个全等三角形的有关线段或角的相等.

例1　已知：如图5-11，$AB = CB$，$AD = CD$.

求证：$\angle A = \angle C$.

加油站

在证明两个角相等或两条线段相等时，可考察它们是否在给出的两个全等三角形中. 如果不在，可以尝试通过添加辅助线，构造两个全等三角形，使待证的角或线段分别是这两个全等三角形的对应角或对应边.

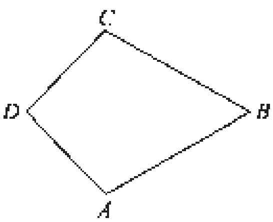


图 5-11

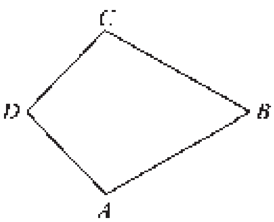


图 5-12

证明　连接DB（图5-12）. 在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，

$\because AB = CB$，$AD = CD$（已知），

$BD = BD$（公共边），

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$（SSS），

$\therefore \angle A = \angle C$（全等三角形对应角相等）.

挑战自我

作出两个全等三角形，你发现它们对应角的平分线有什么性质？对应边上的中线、对应边上的高有什么性质？证明你的结论.

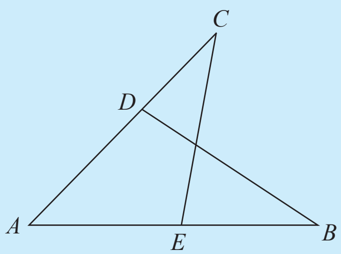
练习

1. 已知：如图，$AB = AC$，$\angle B = \angle C$.

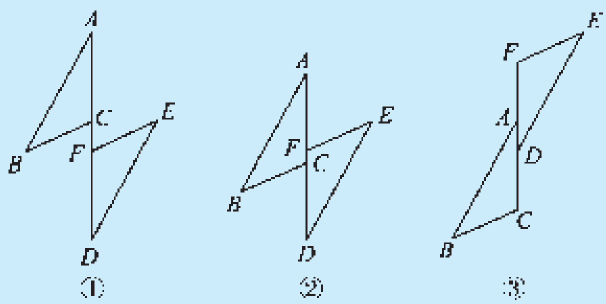
   求证：$BD = CE$.

2. （1）如图①，已知 A，C，D，F 四点在同一条直线上，$AB = DE$，$BC = EF$，$AF = DC$，求证：$AB /\!/ DE$.

   （2）如果 $AB = DE$，$BC = EF$，$AF = DC$ 不变，将图①分别变化成图②③后，（1）中的结论是否发生变化？证明过程是否发生变化？如果有，有什么变化？



（第 1 题）



（第 2 题）

交流与发现

（1）在本册第 2 章，我们利用等腰三角形的轴对称性质，通过对折的方法探索出等腰三角形的性质：“等腰三角形的两个底角相等.”你能利用基本事实以及已有的定义和定理，通过推理证明它的真实性吗？与同学交流.

（2）下面是小莹给出的证法：

已知：如图 5-13，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

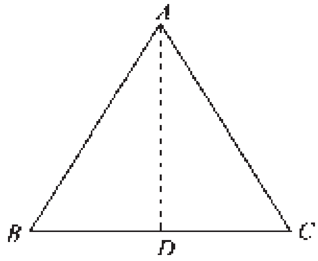


图 5−13

证明　作$\angle A$的平分线AD，与BC交与点D.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$\because AB=AC$（已知），

$AD=AD$（公共边），

$\angle BAD=\angle CAD$（角平分线定义），

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$（SAS）.

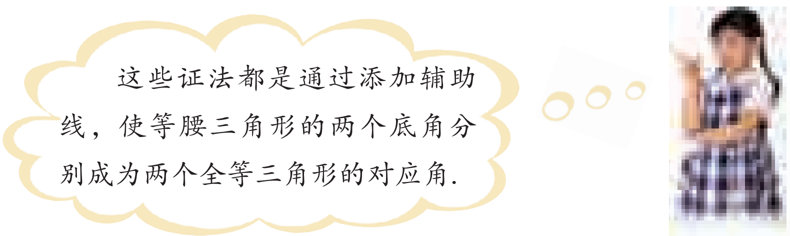
$\therefore \angle B=\angle C$（全等三角形对应角的定义）.

你同意她的证法吗？你还能给出其他的证法吗？

通过证明，我们得到

等腰三角形的性质定理 1　**等腰三角形的两个底角相等.**

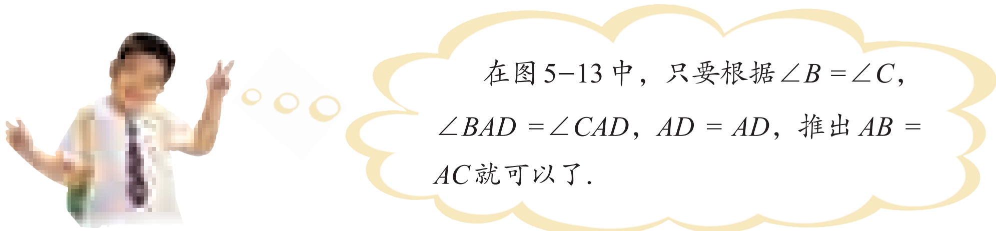
（3）在（2）中各种证明方法中，分别是怎样添加辅助线的？你体会添加辅助线对于证明上面命题的结论起到了什么作用？



在小莹的证明过程中，由$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，还可以进一步推出$BD=DC$，$\angle ADB=\angle ADC=90°$，因而$AD$不仅是顶角的平分线，也是底边上的中线，还是底边上的高. 由此得到

等腰三角形的性质定理 2　**等腰三角形底边上的高、中线及顶角的平分线重合.**

（4）你能说出等腰三角形性质定理 1 的逆命题吗？你能证明它是真命题吗？请写出它的证明过程.



通过证明，我们得到

等腰三角形的判定定理 **有两个角相等的三角形是等腰三角形.**

（5）利用等边三角形的定义和等腰三角形的性质定理，你能证明等边三角形的性质定理：**等边三角形的每个内角都等于 60° 吗？**利用等边三角形的定义和等腰三角的判定定理，你能证明等边三角形的判定定理：**三个角都相等的三角形（或有一个角是 60° 的等腰三角形）是等边三角形**吗？分别写出它们的证明过程，与同学交流.

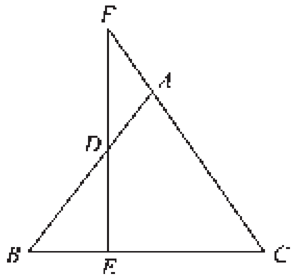


图 5-14

例2 已知：如图 5-14，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AB上的一点，$DE\perp BC$，交BC于点E，交CA的延长线于点F.

求证：$AD=AF$.

证明 $\because AB=AC$（已知），

$\therefore \angle B=\angle C$（等腰三角形的两个底角相等）.

$\because DE\perp BC$，

$\therefore \triangle DEB$与$\triangle FEC$都是直角三角形（直角三角形的定义）.

$\therefore \angle BDE=90°-\angle B$，

$\angle F=90°-\angle C$（直角三角形的两个锐角互余）.

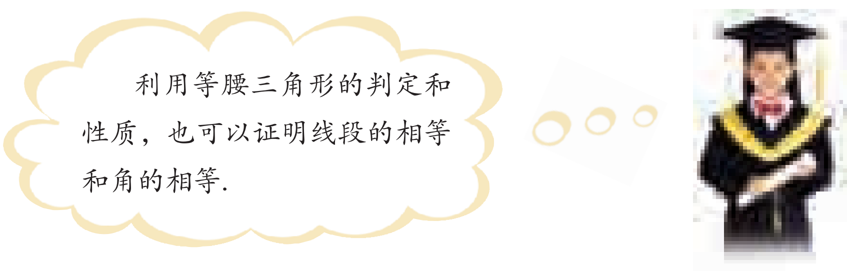
$\because \angle FDA=\angle BDE$（对顶角相等），

$\therefore \angle FDA=90°-\angle C$（等量代换）.

$\therefore \angle FDA=\angle F$（等量代换）.

$\therefore AD=AF$（有两个角相等的三角形是等腰三角形）.

在例 2 的证明过程中，$\angle B=\angle C$，$AD=AF$是怎样推出的？由此你体会今后在证明角的相等或线段的相等时，除利用全等三角形外，还可利用什么图形和定理？



挑战自我

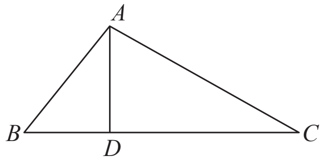
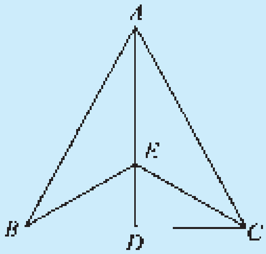


图 5−15

如图 5−15，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，AD是BC边上的高，求证：$AB+BD=DC$.

练 习

1. 证明：等腰三角形两底角的平分线相等.
2. 阅读下面的一道题目及小亮的证明过程.



（第 2 题）

已知：如图，D是$\triangle ABC$中BC边上的一点，E是AD上的一点，$EB=EC$，$\angle ABE=\angle ACE$.

求证：$\angle BAE=\angle CAE$.

证明：在$\triangle AEB$和$\triangle AEC$中，

$\because EB=EC$，$\angle ABE=\angle ACE$，$AE=AE$.

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AEC$. …………第一步

$\therefore \angle BAE=\angle CAE$. …………第二步

小亮的证明过程是否正确？如果正确，请写出第一步和第二步的推理依据；如果不正确，请指出错在哪一步，并写出你认为正确的证明过程.

交流与发现

（1）在本册第 2 章，我们利用线段的轴对称性质，通过对折的方法，探索出线段垂直平分线的性质：“线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.”你能用推理的方法证实它的真实性吗？

（2）下面是小亮的证法：

已知：CD是线段AB的垂直平分线，垂足为点M，P是直线CD上的任意一点.

求证：$PA=PB$.

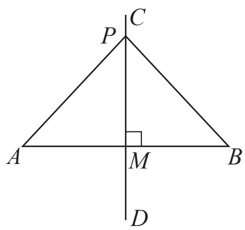


图 5−16

证明：① 当点P不与点M重合时（图 5−16）.

$\because PM\perp AB$（已知），

$\therefore \angle PMA=\angle PMB=90^\circ$（垂直平分线的定义）.

$\because PM=PM$（公共边），

$MA=MB$（垂直平分线的定义），

$\therefore \triangle PMA \cong \triangle PMB$（SAS）.

$\therefore PA = PB$（全等三角形对应边的定义）.

② 当点 P 与点 M 重合时，

$\because MA = MB$（垂直平分线的定义），

$\therefore PA = PB$（等量代换）.

由①②可知，该命题成立.

你认为小亮的证法正确吗？想一想，为什么小亮要分两种情况证明？

通过证明，我们得到

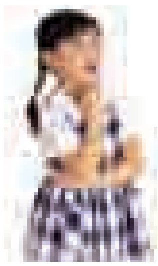
线段垂直平分线的性质定理　**线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.**

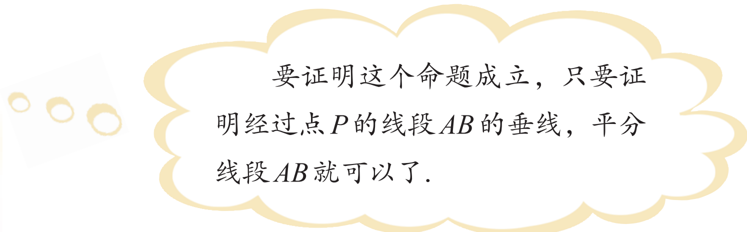
（3）你能说出线段垂直平分线的性质定理的逆命题吗？你认为它的逆命题正确吗？如果你认为正确，能加以证明吗？

到一条线段两个端点的距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

已知：线段 AB，P 为平面内一点，且 $PA = PB$.

求证：点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.





证明　（1）当点 P 不在线段 AB 所在的直线上时，如图 5−17，

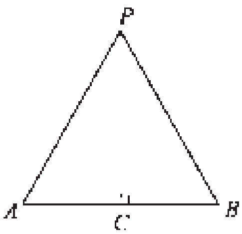


图 5−17

$\because PA = PB$，

$\therefore \triangle PAB$ 是等腰三角形.

过点 P 作 $PC \perp AB$，垂足为点 C .

$\therefore AC = CB$（等腰三角形底边上的高与底边上的中线重合）.

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上（垂直平分线的定义）.

（2）当 P 点在线段 AB 所在的直线上时，

$\because PA = PB$（已知），

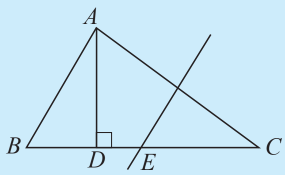
$\therefore$ 点 P 是线段 AB 的中点（线段中点的定义）.

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上（垂直平分线的定义）.

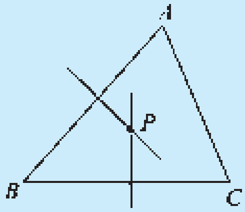
由（1）（2）可知，该命题成立.

练 习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高. AC 的垂直平分线交 DC 于点 E，且 $BD = DE$. 求证：$AB + BD = DC$.
2. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，边 AB，BC 的垂直平分线相交于点 P.
   求证：点 P 在 AC 的垂直平分线上.



（第 1 题）



（第 2 题）

交流与发现

（1）在本册第 2 章，我们利用角的轴对称性质，通过实验的方法，探索出角平分线的性质：“角平分线上的点，到这个角的两边的距离相等.”你能用推理的方法证明它的真实性吗？

下面是小莹给出的证法：

已知：如图 5–18，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，点 P 在 BD 上，$PM \perp AB$，$PN \perp BC$，垂足分别是点 M 和 N.

求证：$PM = PN$.

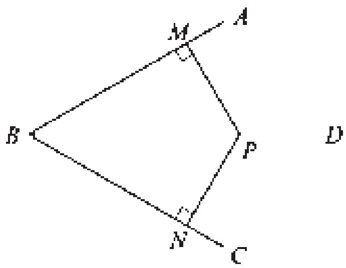


图 5–18

证明　因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，所以 $\angle ABD = \angle CBD$. 又因为 $PM \perp AB$，$PN \perp BC$，M，N 分别是垂足，所以 $\angle PMB = \angle PNB = 90^\circ$. 在 $\triangle PMB$ 和 $\triangle PNB$ 中，BP 是公共边，所以 $\triangle PMB$ 与 $\triangle PNB$ 全等（AAS），于是 $PM = PN$.

你同意她的证法吗？请你用“$\because$”“$\therefore$”的格式写出上面的证明过程.

通过证明，我们得到

角平分线的性质定理　**角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.**

小莹在证明中所采用的表达方式与用“∵”“∴”叙述形式不同，但她的证明也是正确的. 这就是说，证明可以有不同的表述形式.

（2）你能说出角平分线的性质定理的逆命题吗？它的逆命题是否正确？

如图 5−19，点 P 是 $\angle ABC$ 内的一点，$PM \perp AB$，$PN \perp BC$，垂足分别是点 M 和 N，且 $PM = PN$. 连接 MN 得到等腰三角形 PMN，从而 $\angle PMN = \angle PNM$. 由 $\angle BMN$ 与 $\angle PMN$ 互余，$\angle BNM$ 与 $\angle PNM$ 互余，可得 $\angle BMN = \angle BNM$. 所以 $\triangle BMN$ 也是等腰三角形，从而 $BM = BN$. 过点 B，P 作射线 BD，由 BP 是公共边，根据 SSS，$\triangle PBM \cong \triangle PBN$. 由此得到 $\angle ABD = \angle CBD$. 因此点 P 在 $\angle ABC$ 的平分线上.

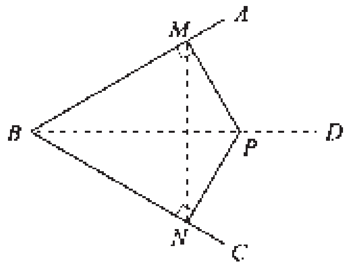


图 5−19

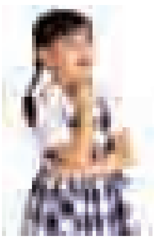
通过证明，我们得到角平分线的性质定理的逆定理：

角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

（3）过去我们曾通过画图发现三角形三条角平分线交于一点，现在利用已有的知识，能证明这个结论吗？

已知：如图 5−20，AM，BN，CP 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线.

求证：AM，BN，CP 交于一点.



要证明三角形的三条角平分线交于一点，只要证明两条角平分线的交点也在第三条角平分线上就可以了.

证明 如图 5−20，设 AM，BN 交于点 O. 过点 O 分别作 $OD \perp BC$，$OE \perp AC$，$OF \perp AB$，垂足分别为点 D，E，F.

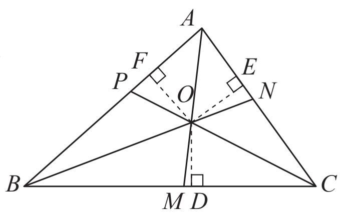


图 5−20

$\because O$ 是 $\angle BAC$ 角平分线 AM 上的一点（已知），

$\therefore OE = OF$（角平分线上的点到这个角的两边的距离相等）.

同理，$OD = OF$.

$\therefore OD = OE$（等量代换）.

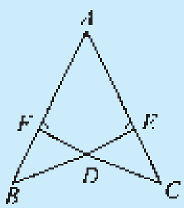
$\because CP$是$\angle ACB$的平分线（已知），

$\therefore O$在CP上（角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上）.

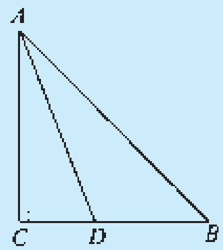
因此，AM，BN，CP交于一点.

练 习

1. 如图，已知$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，点E，F为垂足，D是BE与CF的交点，AD平分$\angle BAC$.
   求证：$BD = CD$.
2. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C = 90°$，$AC = BC$．AD是$\angle A$的平分线.
   求证：$AB = AC + CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

交流与发现

思考下面的问题，并与同学交流.

（1）要判定两个直角三角形全等，你有哪些方法?

（2）如图 5−21，在Rt△ABC和Rt△$A'B'C'$中，$\angle C$和$\angle C'$都是直角，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$．能判定Rt△ABC与Rt△$A'B'C'$全等吗?

将Rt△$A'B'C'$与Rt△ABC的顶点A'与A重合，相等的两条直角边$A'C'$与AC重合，所以C'与C重合，并使顶点B'与顶点B分别在AC所在直线的两侧（图 5−22）. 由于$\angle ACB = \angle A'C'B' = 90°$，所以点$B$，$C$，$B'$在同一条直线上，于是△$A'B'C'$与△$ABC$便拼成了一个三角形$ABB'$. 在△$ABB'$中，由已知$AB = A'B'$，所以$\angle B = \angle B'$. 又因为$AC = A'C'$，所以，Rt△$ABC \cong$ Rt△$A'B'C'$（AAS）.

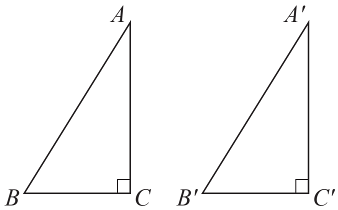


图 5-21

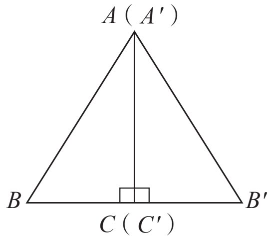
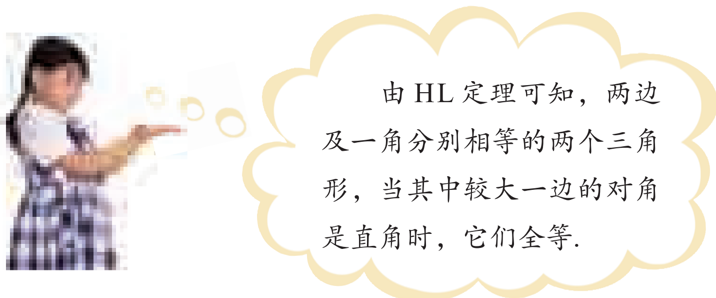


图 5-22

于是，我们得到

直角三角形全等的判定定理　如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边分别相等，那么这两个直角三角形全等.

这个定理可以简单地记作“**斜边、直角边**”或“HL”.



小资料

H 是英文 hypotenuse（斜边）的第 1 个字母，L 是英文 leg（直角边）的第 1 个字母.

（3）如图 5-23，如果将两个直角三角形的斜边 $A'B'$ 与 AB 重合，你能得到（2）中的结论吗？与同学交流.

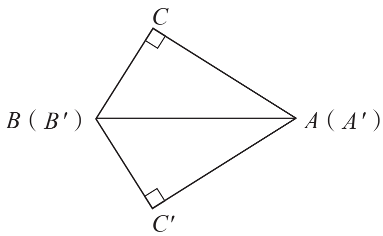


图 5-23

例3　已知：如图 5-24，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，垂足分别是点 E，F，$DE=DF$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

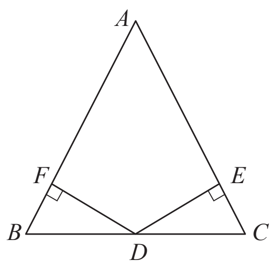


图 5-24

证明　$\because$ $DE\perp AC$，$DF\perp AB$，

$\therefore$ $\triangle DEC$ 和 $\triangle DFB$ 都是直角三角形.

$\because$ $DC=DB$，$DE=DF$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle DEC \cong \mathrm{Rt}\triangle DFB$（HL）.

$\therefore \angle C=\angle B$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是等腰三角形（有两个角相等的三角形是等腰三角形）.

例4　已知一直角边和斜边作直角三角形.

已知：线段l，m（$l<m$）（图5-25①）.

求作：Rt$\triangle ABC$，使它的直角边AC和斜边AB分别等于l，m .

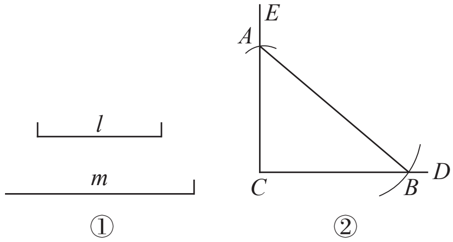
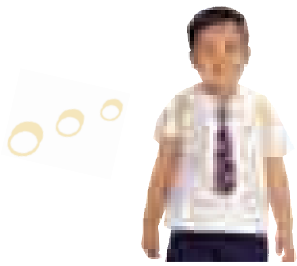


图 5-25

先利用基本作图“过一点作已知直线的垂线”，作出三角形的直角顶点C，再根据直角边AC的长确定顶点A，最后根据斜边长作出另一个顶点B.



作法　（1）任取一点C，作射线CD（图5-25②）；

（2）过点C作射线$CE\perp CD$；

（3）在CE上截取$CA=l$；

（4）以点A为圆心，以m为半径作弧，交CD于点B；

（5）连接AB .

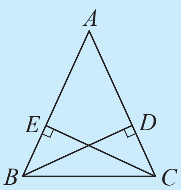
$\triangle ABC$就是所求作的直角三角形.

你能说出上面作图的道理吗？

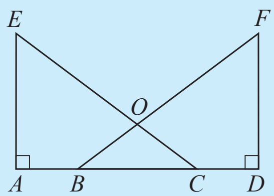
练　习

1. 如图，BD，CE是$\triangle ABC$的高，且$BD=CE$，求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.

2. 如图，点A，B，C，D在同一条直线上，$EA\perp AD$，$FD\perp AD$，EC与FB相交于点O，$AE=DF$，$EC=FB$. 求证：$OB=OC$.



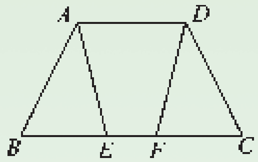
（第1题）



（第2题）

习题5.6

复习与巩固



（第 1 题）

1. 如图，已知点 E，F 在 BC 上，$BF = CE$，$\angle AEB = \angle DFC$，$\angle B = \angle C$.

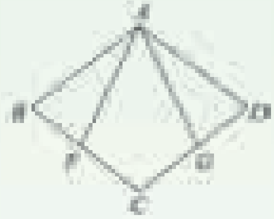
   求证：$\triangle ABE \cong \triangle DCF$.

2. 如图，已知 $AB = AD$，$AF = AG$，$BF = DG$.

   求证：（1）$\triangle ABF \cong \triangle ADG$；

   （2）$\angle BAG = \angle DAF$.

3. 如图，已知 AD 与 BC 相交于点 O，$AB = CD$，$AD = CB$. 求证：$\angle A = \angle C$.


（第 2 题）


（第 3 题）


（第 4 题）

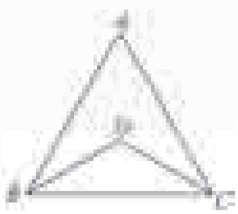
4. 如图，已知 $\angle ACB = \angle BDA$，要使 $\triangle ACB \cong \triangle BDA$，还需要添加哪些条件？把它们分别写出来，并加以证明.

5. 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 内的一点，且 $DB = DC$，BD 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACB$.

   求证：$AB = AC$.

6. 如图，已知 $AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$，OE 平分 $\angle BOC$ 交 BC 于点 E.

   求证：OE 垂直平分 BC.


（第 5 题）


（第 6 题）

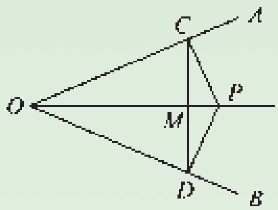
7. 证明：**有一个角等于60° 的等腰三角形是等边三角形.**（提示：应分顶角为 60° 和一个底角为 60° 两种情况证明）

8. 如图，已知 P 是 $\angle AOB$ 平分线上的一点．$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，垂足分别是点 C，D，CD 与 OP 交于点 M．

求证：（1）$\angle PCD=\angle PDC$；

（2）OP 是 CD 的垂直平分线；

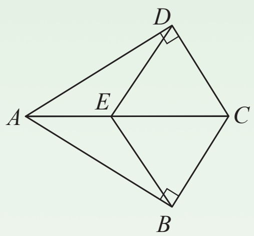
（3）$OC=OD$．



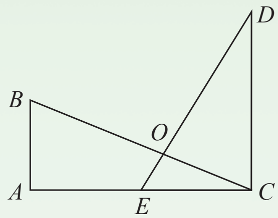
（第 8 题）

9. 如图，已知 $\angle ABC=\angle ADC=90°$，$AB=AD$，$E$ 为线段 AC 上一点，求证：$EB=ED$．

10. 如图，$AB/\!/CD$，$\angle A=90°$，$AB=EC$，$BC=DE$，BC 与 DE 相交于点 O．求证：$DE\perp BC$．



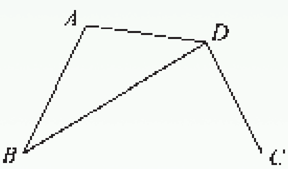
（第 9 题）



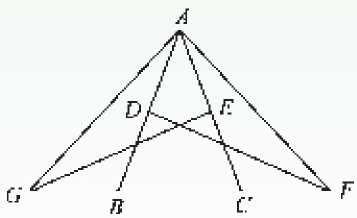
（第 10 题）

拓展与延伸

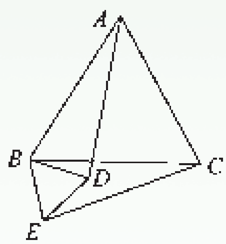
11. 如图，四边形 $ABCD$ 中，BD 平分 $\angle ABC$，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补．AD 和 DC 是否相等？如果相等，证明你的结论；如果不等，说明你的理由．



（第 11 题）



（第 12 题）



（第 13 题）

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AB，AC 的垂直平分线 DF，EG 分别交 BC，CB 的延长线于点 F，G．

求证：$\angle BAG=\angle CAF$．

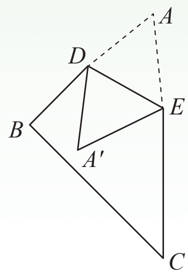
13. 如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 均为等边三角形，连接 AD，CE．

求证：$\angle BAD=\angle BCE$．

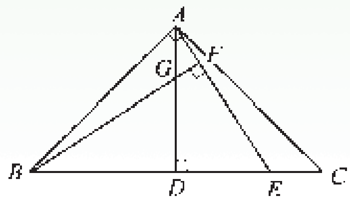
探索与创新

14. 如图，取一张三角形纸片，记为△ABC，在边 AB，AC 上各任取一点 D，E，将纸片沿 DE 折叠. 使点 A 落在 DE 的另一侧，落点为 A'. 试探索 $\angle A'$ 与 $\angle A'DB+\angle A'EC$ 之间的数量关系，并证明你的结论.

15. 如图，AD 是等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的高，点 E 是 DC 上的任意一点. 作 $BF\perp AE$ 交 AE 于点 F，BF 与 AD 相交于点 G . 请指出图中除 $AB=AC$ 外，还有哪些相等的线段，并证明你的结论.



（第 14 题）



（第 15 题）

回顾与总结

1. 本章学习的主要内容是什么？总结一下，与同学交流.
2. 什么是定义、命题、定理和推论？请说出你学过的基本事实. 在本章中，从这些基本事实和相关的定义出发，推出了哪些定理和推论？
3. 举例说明：要判定一个命题是假命题，只要能举出一个反例就可以了.
4. 举例说明：为什么要证明？几何证明一般分为哪几个步骤？
5. 什么是逆命题？如果原命题是真命题，那么它的逆命题也是真命题吗？举例说明.
6. 三角形内角和定理是怎样证明的？它有哪些推论？
7. 利用全等三角形的三个基本事实及判定定理，判定两个三角形全等，是探求和证明几何图形中角或线段相等的重要途径. 在证明有关线段或角的相等的问题时，有时需要添加辅助线，在原有的图形中，构造出全等三角形，使要证明相等的线段或角，是全等三角形的对应边或对应角. 想一想，在本章中，利用全等三角形证明了哪些定理？学过以上定理后，可以帮助你解决哪些问题？
8. 等腰三角形以及等边三角形有哪些性质定理及判定定理？它们分别是怎样证明的？

9. 线段的垂直平分线的性质定理及其逆定理是怎样证明的？角的平分线的性质定理及其逆定理呢？学过以上定理后，可以帮助你解决哪些问题？
10. 什么是HL定理？判定两个直角三角形全等有哪几种方法？
11. 在本章中，你学习到哪些证明两条线段相等或两角相等的方法？

综合练习

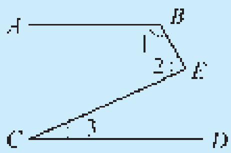
复习与巩固

1. 写出下列命题的条件和结论，并判断它是真命题还是假命题. 如果是假命题，请举出一个反例：

（1）如果两个角不相等，那么这两个角不是对顶角；

（2）两个锐角的和是钝角.

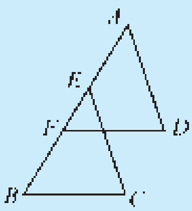
2. 写出命题“等角的余角相等”的逆命题，并指出它的逆命题是真命题还是假命题. 如果是真命题，请加以证明；如果是假命题，举出一个反例.



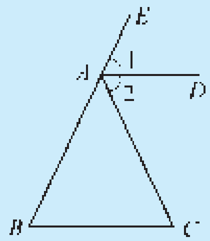
（第 3 题）

3. 如图，如果 $AB /\!/ CD$，那么 $\angle 1$，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 之间有什么关系？证明你的结论.

4. 已知：如图，$EC /\!/ AD$，$BC /\!/ FD$，求证：$\angle C = \angle D$.



（第 4 题）



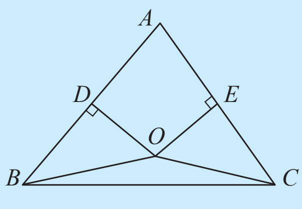
（第 5 题）

5. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，AD是$\angle CAE$的平分线. 求证：$AD /\!/ BC$.

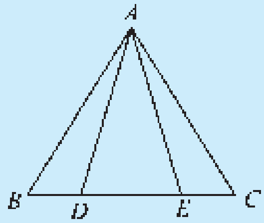
6. 如图，在$\triangle ABC$中，已知点O是边AB，AC的垂直平分线的交点. 求证：$\angle BOC = 2\angle A$.

7. 已知：如图，点D，E在BC上，$AB = AC$，$AD = AE$.

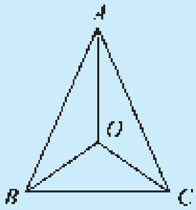
求证：$BD = CE$.



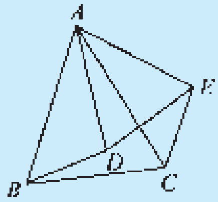
（第 6 题）



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

8. 已知：如图，$AB = AC$，$\angle BAO = \angle CAO$.

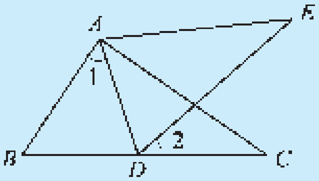
求证：$\angle OBC = \angle OCB$.

9. 如图，已知 $AB = AC$，$AD = AE$，$BD = CE$. 求证：$\angle BAC = \angle EAD$.

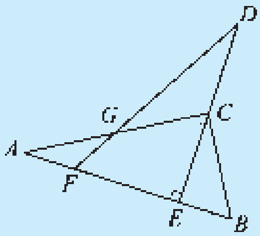
拓展与延伸

10. 如图，已知 $AB = AD$，$BC = DE$，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：（1）$AC = AE$；（2）$\angle CAE = \angle CDE$.



（第 10 题）



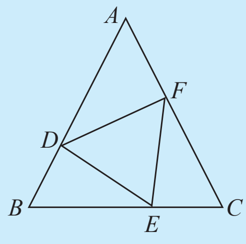
（第 11 题）

11. 用两块大小一样含 30° 角的三角尺可以拼成一些不同的图形.如图就是其中的一种拼法，请指出图中的等腰三角形，并加以证明.

12. 如图，在△ABC 中，$AB = AC$，点 D，E，F 分别在边 AB，BC，AC 上，且 $BD = CE$，$BE = CF$.

（1）求证：△DEF 是等腰三角形；

（2）试猜测当 $\angle A$ 满足什么条件时，△DEF 是等边三角形？并说明理由.

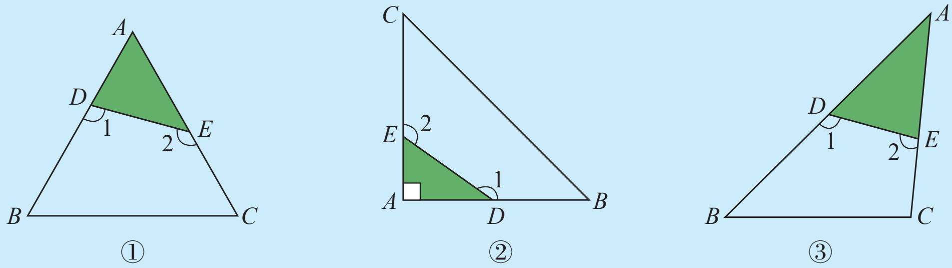


（第 12 题）

13.（1）如图①，从等边三角形 ABC 上任意剪去一个角. $\angle 1 + \angle 2$ 的度数是多少？

（2）如图②，从 Rt△ABC 上剪去直角 $\angle A$，$\angle 1 + \angle 2$ 的度数是多少？

（3）如图③，从一个任意△ABC 上剪去一个 $\angle A$. $\angle 1 + \angle 2$ 的大小与 $\angle A$ 有什么数量关系？证明你的结论.



（第 13 题）

探索与创新

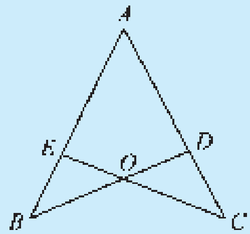
14. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E分别是AC，AB上的点. BD，CE交于点O，给出下列四个条件：

① $\angle EBO=\angle DCO$；② $\angle BEO=\angle CDO$；

③ $BE=CD$；④$OB=OC$.

（1）上述四个条件中，由哪两个条件可以判断$\triangle ABC$是等腰三角形？

（2）选择（1）中的一组条件，证明$\triangle ABC$是等腰三角形.



（第 14 题）

15. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle C$，AD是BC边上的中线，BE是$\angle ABC$的平分线，$AB=BD$.

（1）试判断$\triangle ABC$的形状，并证明你的结论；

（2）图中有哪些三角形是等腰三角形？其中有等边三角形吗？

16. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$.

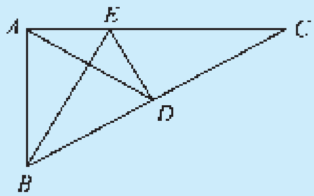
（1）根据要求，完成下面的尺规作图：

① 作$\angle BAC$的平分线AD，交BC于点D；

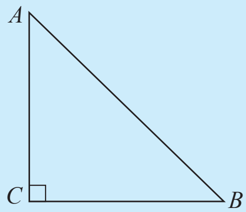
② 作线段AD的垂直平分线，交AB于点E，交AC于点F，垂足为点H；

③ 连接ED.

（2）在（1）的基础上，判定所作图形中的全等三角形；并选择其中一对加以证明.



（第 15 题）



（第 16 题）

后　记

这套义务教育七～九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书　数学（七～九年级）》（青岛出版社　2005年1月第一版）的基础上，依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的．经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过，准许使用．

本套教科书由展涛担任主编，殷建中担任执行主编，参加本册教材编写的有（按姓氏笔画为序）：王德刚、云鹏、任景业、李师正、江晓臻、高玉岱、殷建中、谢廷桢、樊兆鹏等同志，由谢廷桢担任本册主编．在本套教科书的编写工作中，我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助．在此，我们一并致谢．

欢迎教师和同学们在使用本书过程中，向我们提出改进的意见和建议．

编　者

数　学

SHUXUE

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5436-3324-7

价格批准文号：鲁发改价格核［2021］629013

举报电话：12345

9 787543 633247 >

定价：11.33 元