国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学 SHUXUE

必修 第一册

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社

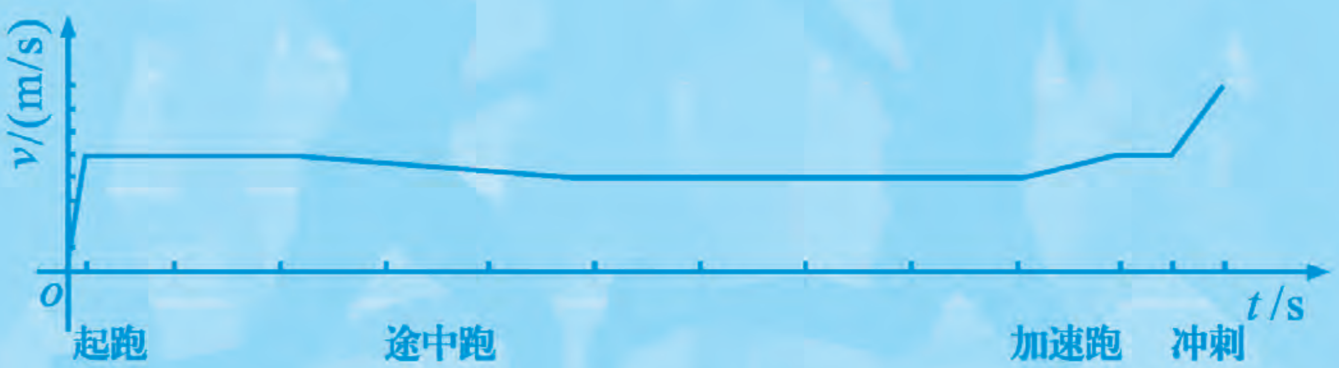
普通高中教科书

数学

必修 第一册

主编 王尚志 保继光

北京师范大学出版社



北京师范大学出版社

主编寄语

亲爱的同学们：

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更重要的数学知识和应用.

你们将获得更多的数学能力和素养.

你们将感受到更深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授人以鱼，不如授人以渔.”学会打渔的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

“在数学中，什么是重要的(What is the key in Mathematics)?”20 世纪六七十年代，很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键 (The problem is the key in Mathematics). 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅要提高思考问题的能力，提高解决问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是很重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，它会给你带来乐趣.

本套教材由 2 册必修教材和 2 册选择性必修教材组成. 习题分为三类：一类是可供课堂学习时使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两个层级；还有一类是章复习题，分为 A，B，C 三个层级.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出、抽象概括、分析理解、思考交流等研究性学习过程.

根据课程标准的要求，数学建模活动与数学探究活动是高中阶段数学课程的重要内容. 本套教材从感悟数学应用、学习数学模型、掌握建模过程和实践数学建模四个层次整体设计了数学建模活动，在必修第一册、第二册和选择性必修第一册分别安排了一章的内容. 另外，在选择性必修第一册、第二册分别从几何和代数两个方面各安排了一次数学探究活动. 数学建模活动与数学探究活动有助于引导同学们递进地思考问题，充分地动手实践. 我们更希望

北京师范大学出版社

同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

重视数学的文化价值是数学教育发展的趋势，本套教材整体设计了“数学文化”栏目，包括：名人名言、阅读材料、拓展窗口、建模选材等，并在习题中呈现了对数学文化理解的要求.教材在必修第一册第一章初步学习“数学文化”内容的基础上，特别设计“学习指导：数学文化”，对同学们后续学习数学文化有重要的指导意义.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、互联网都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多学多用，“技多不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”栏目，为同学们使用信息技术提供了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 特别地，在借助信息技术手段较多的必修第一册第四章，教材设计了“学法指导：利用信息技术学习数学”，引导同学们在学习时从具体学习对象中“跳”出来，利用信息技术手段发现数学规律. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的学校，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容有所了解. 教材中有关信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

北京师范大学出版社

目录

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社

第一章

预备知识

集合、常用逻辑用语是现代数学的基本语言，集合可以帮助我们比较准确、清晰地刻画研究对象，常用逻辑用语可以帮助我们刻画研究对象之间的逻辑关系，它们既可以帮助我们梳理学过的知识，又是我们进一步学习的基础.

在初中我们已经学习了一些方程、不等式和函数，它们是体现等量关系、不等量关系和函数关系的数学模型. 本章将学习用一元二次函数来研究一元二次不等式和一元二次方程，为进一步理解用函数的思想方法研究问题奠定基础.

北京师范大学出版社

作为高中数学学习的第一章，本章以小学、初中的知识为基础研究集合、常用逻辑用语，借此可以梳理学过的数学知识，使它们成为一个有机的整体，通过类比感悟函数、方程和不等式之间的关系，体会整体与局部之间的关系，提升数学抽象、逻辑推理和直观想象等核心素养.

先把书读厚，再把书读薄.

——华罗庚(1910—1985)

§1 集合

1.1 集合的概念与表示

在初中数学中，经常按类来研究事物，例如，代数中的自然数、整数、有理数，以及平面几何中的三角形、四边形、五边形. 在现实生活中，也经常需要把事物分类来看，例如，在学校中，按照年级分类，全体高一年级学生是一类人群，全体高二年级学生是另一类人群.

一般地，我们把指定的某些对象的全体称为**集合**，通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 集合中的每个对象叫作这个集合的**元素**，通常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

例如，正整数 1，2，3 可以组成一个集合，这个集合有 3 个元素，分别是 1，2，3；全体正奇数也可以组成一个集合，这个集合有无穷多个元素，1，3，5 是它的一部分元素.

一个集合确定后，任何一个对象是或不是这个集合的元素就确定了. 如果元素 a 在集合 A 中，就说元素 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；如果元素 a 不在集合 A 中，就说元素 a **不属于**集合 A，记作 $a\notin A$.

例如，若集合 B 是小于 10 的所有素数组成的集合，则 $2\in B$，$6\notin B$.

规定：一个集合中的任何两个元素都不相同. 也就是说，集合中的元素没有重复.

思考交流

试举出一些集合的例子.

数的集合简称数集. 下面是一些常用的数集及其记法：

全体自然数组成的集合简称**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

全体正整数组成的集合简称**正整数集**，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$；

全体整数组成的集合简称**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合简称**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合简称**实数集**，记作 $\mathbf{R}$；

全体正实数组成的集合简称**正实数集**，记作 $\mathbf{R}_+$.

例如，$0\in\mathbf{N}$，$-3\in\mathbf{Z}$，$0.618\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}\notin\mathbf{Z}$，$\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}\in\mathbf{R}$，$\pi\in\mathbf{R}$.

集合的表示方法常用的有列举法、描述法.

列举法是把集合中的元素一一列举出来写在花括号“{ }”内表示集合的方法，一般可将集合表示为 $\{a,b,c,\cdots\}$.

例如,20 以内所有素数组成的集合 C 用列举法可以表示为

$$C=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}.$$

用列举法表示集合时,元素排列的顺序可以不同. 例如,$\{1,2,3\}$ 也可以写成 $\{1,3,2\}$, $\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\}$, $\{3,1,2\}$, $\{3,2,1\}$. 这些都表示同一个集合.

例 1 用列举法表示下列集合:

(1) 由大于 3 且小于 10 的所有整数组成的集合;

(2) 方程 $x^2-9=0$ 的所有实数根组成的集合.

解 (1) 设由大于 3 且小于 10 的所有整数组成的集合为 A. 因为大于 3 且小于 10 的所有整数有 4,5,6,7,8,9,所以用列举法可以表示为

$$A=\{4,5,6,7,8,9\}.$$

(2) 设方程 $x^2-9=0$ 的所有实数根组成的集合为 B. 因为方程 $x^2-9=0$ 有两个不相等的实数根 -3,3,所以用列举法可以表示为

$$B=\{-3,3\}.$$

有时,无法将集合中的元素一一列举出来. 例如,由大于 3 且小于 10 的所有实数组成的集合. 这时,可以用描述法表示集合.

通过描述元素满足的条件表示集合的方法叫作**描述法**. 一般可将集合表示为{x 及 x 的范围|x 满足的条件},即在花括号内先写出集合中元素的一般符号及范围,再画一条竖线“|”,在竖线后写出集合中元素所具有的共同特征.

例如,所有偶数组成的集合可以表示为 $D=\{x\in\mathbf{R}\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,这里的“$x\in\mathbf{R}$”可由“$n\in\mathbf{Z}$”推得,是明确的,这种情况下“$x\in\mathbf{R}$”通常可简写为“$x$”,即此集合也可以表示为 $D=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$;函数 $y=2x$ 图象上的所有点组成的集合可以表示为 $E=\{(x,y)\mid y=2x,x\in\mathbf{R}\}$.

例 2 用描述法表示下列集合:

(1) 小于 10 的所有有理数组成的集合 A;

(2) 所有奇数组成的集合 B;

(3) 平面 α 内,到定点 O 的距离等于定长 r 的所有点组成的集合 C.

解 (1) 设 $x\in A$,则 $x\in\mathbf{Q}$,且使 $x<10$ 成立. 因此,用描述法可以表示为

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<10\}.$$

(2) 设 $x\in B$,则 x 是一个奇数. 因此,用描述法可以表示为

$$B=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}.$$

(3) 设 $M\in C$,则 $M\in\alpha$,M 到 α 内的定点 O 的距离等于定长 r. 因此,用描述法可以表示为

$$C=\{M\in\alpha\mid O\text{ 为 }\alpha\text{ 内的定点},r\text{ 为定值},\text{且 }M\text{ 到 }O\text{ 的距离等于 }r\}.$$

北京师范大学出版社

在具体问题中，应根据实际需要选择适当的方法来表示集合. 例如，方程 $x^2+2x=0$ 的解集 F，既可以用列举法表示为 $F=\{0,-2\}$，也可以用描述法表示为 $F=\{x|x^2+2x=0\}$.

含有有限个元素的集合叫作**有限集**，如集合 $\{-2,3\}$；含有无限个元素的集合叫作**无限集**，如整数集 $\mathbf{Z}$.

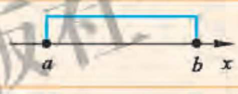
我们把不含任何元素的集合叫作**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，集合 $\{x\in\mathbf{R}|x^2+2=0\}$ 和集合 $\{x\in\mathbf{Q}|x^2-2=0\}$ 都是空集.

思考交流

分别列举出几个有限集、无限集、空集的例子，并与同学交流，感悟符号的作用.

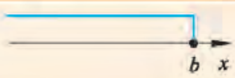
设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，则集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 也可以用符号 $[a,b]$ 表示，其他类似情况如表 1－1、表 1－2，两表中表示集合的符号都称为**区间**.

表 1－1

定　义	符　号	数轴表示
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$	
$\{x\|a<x<b\}$	(a,b)	
$\{x\|a\leqslant x<b\}$	$[a,b)$	
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	$(a,b]$	

这里的实数 a,b 称为区间的端点，$[a,b]$ 称为**闭区间**，(a,b) 称为**开区间**，$[a,b)$，$(a,b]$ 称为**半开半闭区间**. 在数轴上表示区间时，用实心点表示属于区间的端点，用空心点表示不属于区间的端点.

表 1－2

定　义	符　号	数轴表示
$\{x\|x\geqslant a\}$	$[a,+\infty)$	
$\{x\|x>a\}$	$(a,+\infty)$	
$\{x\|x\leqslant b\}$	$(-\infty,b]$	
$\{x\|x<b\}$	$(-\infty,b)$	

北京师范大学出版社

这里的符号"∞"读作"无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大".

这样，实数集 **R** 可以表示为$(-\infty,+\infty)$，集合 $A=\{x|x<5\}$ 可以表示为 $A=(-\infty,5)$，集合 $B=\{x|x\geqslant 3\}$ 可以表示为 $B=[3,+\infty)$.

练　习

1. 下列四个集合中，(　　)是空集，并说明理由.

   A. $\{0\}$　　B. $\{x|x<-2$，且 $x>2\}$

   C. $\{x\in\mathbf{N}|x^2-1=0\}$　　D. $\{x|x>4\}$

2. 用符号"∈"或"∉"填空：

   (1) 设 A 为所有亚洲国家组成的集合，则

   中国______ A，　美国______ A，　印度______ A，　英国______ A；

   (2) 0 ______ $\mathbf{N}$，　0 ______ $\mathbf{N}_+$，　-1 ______ $\mathbf{N}$，　-1 ______ $\mathbf{Z}$，

   3.14 ______ $\mathbf{Q}$，　π ______ $\mathbf{Z}$，　π ______ $\mathbf{Q}$，　π ______ $\mathbf{R}$，

   $3\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{N}$，　$3\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{Z}$，　$\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{Q}$，　$\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{R}$；

   (3) 0 ______ $\{0\}$，　1 ______ $\{x|x^2+x-1=0\}$.

3. 选择适当的方法表示下列集合：

   (1) 方程 $x^2-4=0$ 的所有实数根组成的集合；

   (2) 不等式 $3x-4<2$ 的所有正整数解组成的集合；

   (3) 一次函数 $y=x+3$ 的图象与坐标轴的所有交点组成的集合.

4. 用区间表示下列集合：

   (1) 不等式 $5x-3>2$ 的所有实数解组成的集合；

   (2) 使 $\sqrt{1-x}$ 有意义的所有实数 x 取值的集合.

北京师范大学出版社

1.2　集合的基本关系

实例分析

1. 设某校高一(1)班全体 35 位同学组成集合 P，其中女同学组成集合 M，即有：

$$若\ a\in M，则\ a\in P.$$

2. 用 A 表示所有矩形组成的集合，B 表示所有平行四边形组成的集合，即有：

$$若\ a\in A，则\ a\in B.$$

3. 所有的有理数都是实数，即有：

$$若\ a\in \mathbf{Q},则\ a\in \mathbf{R}.$$

抽象概括

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，那么称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”).

例如，在上面的实例 1 中，有 $M\subseteq P$.

显然，**任何一个集合都是它本身的子集**，即 $A\subseteq A$.

规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任意一个集合 A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

为了直观地表示集合间的关系，常用平面上封闭曲线的内部表示集合，称为 **Venn 图**. 图 1－1 直观地表示了实例 2 中集合 A 是集合 B 的子集，图 1－2 直观地表示了实例 3 中有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

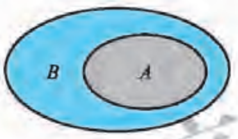


图 1－1

图 1－2

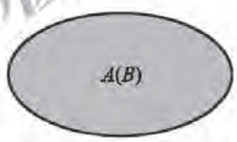


图 1－3

北京师范大学出版社

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 也是集合 A 的子集，那么称集合 A 与集合 B **相等**，记作

$$A=B.$$

可用 Venn 图(如图 1－3)表示. 即对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

例如，$A=\{x\mid(x-7)(x+5)=0\}$，$B=\{-5,7\}$，不难看出，$A=B$.

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，那么称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)，读作“A 真包含于 B”(或“B 真包含 A”).

可用 Venn 图(如图 1－4)表示.

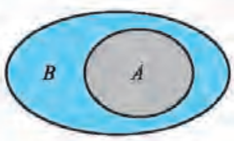


图 1－4

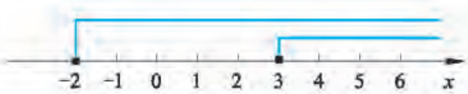


图 1－5

例如，$\{a,b\}\subsetneqq\{a,b,c\}$；$\mathbf{N}_+\subsetneqq\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$；$\{x\mid x\geqslant 3\}\subsetneqq\{x\mid x\geqslant -2\}$(如图 1－5).

例 3 某造纸厂生产练习本用纸，当纸的白度和不透明度都合格时，该产品才合格. 若用 A 表示练习本用纸合格的产品组成的集合，B 表示纸的白度合格的产品组成的集合，C 表示纸的不透明度合格的产品组成的集合，则下列包含关系哪些成立？

$$A\subseteq B,\quad B\subseteq A,\quad A\subseteq C,\quad C\subseteq A.$$

试用 Venn 图表示这三个集合的关系.

解 由题意知，$A\subseteq B$，$A\subseteq C$ 成立，它们的关系可用 Venn 图（如图 1－6）表示.

图 1－6

例 4 写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

解 由子集的定义知，集合 $\{0,1,2\}$ 的子集的元素个数最少为 0 个，最多为 3 个. 按照子集中元素的个数，由少到多依次写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集，得

$$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}.$$

显然，上述 8 个子集除了集合 $\{0,1,2\}$ 以外，其余 7 个集合都是它的真子集.

北京师范大学出版社

练 习

1. 选择适当的符号（"$\in$""$\notin$""$\subsetneqq$""$\supsetneqq$""$=$""$\subseteq$""$\supseteq$"）填空：

   (1) 0 ______ $\varnothing$，　$\{0\}$ ______ $\varnothing$，　$\varnothing$ ______ $\{x\mid x^2-x+1=0\}$，

   $\{2\}$ ______ $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，　$\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$ ______ $\{x\mid x^2-3\sqrt{2}x+4=0\}$；

   (2) 设 A 是全体正方形组成的集合，B 是全体矩形组成的集合，C 是全体平行四边形组成的集合，则 A ______ B，B ______ C；

   (3) 若集合 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 A ______ C.

2. 判断下列各组中两个集合之间的关系：

   (1) $\{1,2,3\}$ 与 $\{x\mid x$ 是 6 的正因数$\}$；

   (2) $\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$ 与 $\{x\mid x=6k,k\in\mathbf{Z}\}$.

3. 写出下列集合的所有子集：

   (1) $\{0\}$；

   (2) $\{x\mid(x-1)(x-2)(x-3)^2=0\}$.

4. 举例说明集合间的包含关系与相等关系，并用 Venn 图直观表示.

1.3 集合的基本运算

一、交集与并集

实例分析

1. 设集合 $A=\{x|x$ 是 6 的因数$\}$，$B=\{x|x$ 是 8 的因数$\}$，$C=\{x|x$ 是 6 和 8 的公因数$\}$，则集合 C 是由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的.

2. 设集合 $D=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$E=\{x|x\geqslant 0\}$，$F=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则集合 F 是由集合 D 与集合 E 的所有公共元素组成的(如图 1－7).

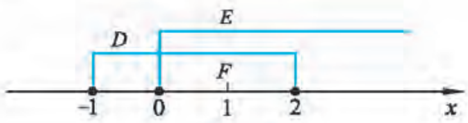


图 1－7

抽象概括

一般地，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫作集合 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,\text{且 } x\in B\}.$$

可用 Venn 图(如图 1－8)表示.

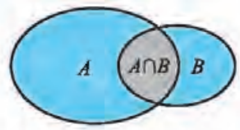


图 1－8

根据交集的定义，对于任何集合 A，B，有

$$\boxed{A\cap B=B\cap A,\quad A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B,\quad A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.}$$

例 5 求下列每一组中两个集合的交集：

(1) $A=\{x|x$ 是不大于 10 的正奇数$\}$，$B=\{x|x$ 是 12 的正因数$\}$；

(2) $C=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$，$D=\{x|x$ 是直角三角形$\}$.

解 (1) 因为 $A=\{x|x$ 是不大于 10 的正奇数$\}=\{1,3,5,7,9\}$，
$B=\{x|x$ 是 12 的正因数$\}=\{1,2,3,4,6,12\}$，
所以 $A\cap B=\{1,3,5,7,9\}\cap\{1,2,3,4,6,12\}=\{1,3\}$；

(2) 依题意知 $C\cap D=\{x|x$ 是等腰三角形$\}\cap\{x|x$ 是直角三角形$\}$
$=\{x|x$ 是等腰直角三角形$\}$.

实例分析

1. 设集合 $A=\{x\mid x-2=0\}$，$B=\{x\mid x+2=0\}$，$C=\{x\mid (x-2)(x+2)=0\}$，则集合 C 是由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的.

2. 设集合 $D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$E=\{x\mid x>0\}$，$F=\{x\mid x\geqslant -1\}$，则集合 F 是由所有属于集合 D 或属于集合 E 的元素组成的.

抽象概括

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫作集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}.$$

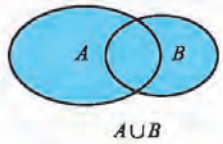


图 1-9

可用 Venn 图(如图 1-9)表示.

根据并集的定义，对于任何集合 A，B，有

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\subseteq A\cup B,\quad B\subseteq A\cup B,\quad A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A.$$

例 6 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解 在数轴上表示出集合 A，B(如图 1-10)，则

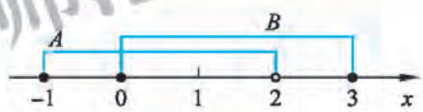


图 1-10

$$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}\cap\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{x\mid 0\leqslant x<2\};$$

$$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}\cup\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}.$$

思考交流

判断下列等式是否成立，并与同学交流：

(1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

练　习

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-16=0\}$，$B=\{x\mid x^3+64=0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

2. 已知集合 $A=\{6,8,9\}$，$B=\{1,3,7,8,9\}$，$C=\{2,6,8,9\}$，求：

北京师范大学出版社

(1) $A\cap B\cap C$；　　(2) $A\cup B\cup C$；

(3) $A\cap(B\cup C)$；　　(4) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -1<x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

4. 某校举行运动会，集合 $U=\{x\mid x$ 是该校参加运动会的学生$\}$，$A=\{x\mid x$ 是参加跳远项目的学生$\}$，$B=\{x\mid x$是参加 400 m 短跑项目的学生$\}$，$C=\{x\mid x$ 是既参加跳远项目又参加 400 m 短跑项目的学生$\}$，试用 Venn 图表示这些集合之间的关系.

二、全集与补集

在研究某些集合的时候，它们往往是某个给定集合的子集，这个给定的集合叫作**全集**，常用符号 U 表示. 全集包含所要研究的这些集合.

设 U 是全集，A 是 U 的一个子集(即 $A\subseteq U$)，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 U 中子集 A 的**补集**，记作 $\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U,\text{且 } x\notin A\}.$$

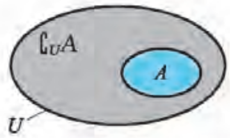


图 1－11

可用 Venn 图(如图 1－11)表示 .

例如，设全集 $U=\mathbf{R}$，则无理数集是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集，可以表示为 $\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$.

由补集的定义，对任何集合 A，有

$$\boxed{A\cup(\complement_U A)=U,\quad A\cap(\complement_U A)=\varnothing,\quad \complement_U(\complement_U A)=A.}$$

北京师范大学出版社

例 7 设全集 $U=\{x\mid x$ 是小于 10 的正整数$\}$，$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,3,5,7\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

解 依题意知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，因为 $A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,3,5,7\}$，所以

$$\complement_U A=\{1,3,5,7,9\},\ \complement_U B=\{1,4,6,8,9\}.$$

例 8 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid x>3\}$，求：

(1) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$；　　(2) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$；

(3) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$；　　(4) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

解 (1) 在数轴上表示出集合 A，B(如图 1－12)，则 $A\cap B=\{x\mid x<5\}\cap\{x\mid x>3\}=\{x\mid 3<x<5\}$，所以

$$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x\mid x\leqslant 3,\text{或 } x\geqslant 5\};$$

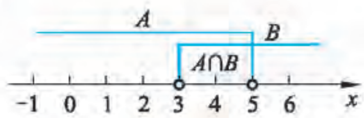


图 1－12

(2) 由图 1－12 可知 $A\cup B=\{x\mid x<5\}\cup\{x\mid x>3\}=\mathbf{R}$，所以

$$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\varnothing;$$

(3) 在数轴上表示出集合 $\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}B$(如图 1－13)，即 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\geqslant 5\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 3\}$，所以

$$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x\geqslant 5\}\cap\{x\mid x\leqslant 3\}=\varnothing;$$

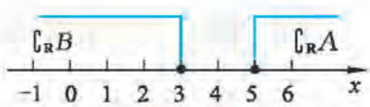


图 1－13

(4) 由图 1－13 可知

$$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x\geqslant 5\}\cup\{x|x\leqslant 3\}=\{x|x\leqslant 3,\text{或 }x\geqslant 5\}.$$

思考交流

结合例 8 思考下面两个等式是有条件成立，还是有普遍意义. 试用 Venn 图分析说明.

(1) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；

(2) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

练 习

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,3,6,7\}$，求 $A\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.
2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|-2<x<3\}$，求 $\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$.
3. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=[-3,4)$，$B=(-\infty,2]$，求 $\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$.
4. 设全集 $U=\{x\mid x\text{ 是三角形}\}$，$A=\{x\mid x\text{ 是锐角三角形}\}$，$B=\{x\mid x\text{ 是钝角三角形}\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U(A\cup B)$.

北京师范大学出版社

习题 1－1

A 组

1. 选择适当的方法表示下列集合，并指出哪些是无限集，哪些是有限集，哪些是空集：
   (1) 英文单词 mathematics 的所有字母组成的集合；
   (2) 被 4 除余 3 的所有整数组成的集合；
   (3) 方程 $x^2+x+1=0$ 的所有实数根组成的集合；
   (4) 在平面直角坐标系中，纵坐标与横坐标相等的所有点组成的集合.
2. 用列举法表示下列集合：
   (1) $A=\{x|(x-1)^2(x+1)=0\}$；　　(2) $B=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\dfrac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$.
3. 用描述法表示下列集合：
   (1) $\{1,4,9,16,25\}$；　　(2) 36 的所有因数组成的集合.
4. 选择适当的方法表示下列集合：
   (1) 对于一元二次函数 $y=-x^2+6$，当 $y>0$ 时，所有 x 的取值组成的集合；
   (2) 一元二次函数 $y=-x^2+6$ 的所有函数值组成的集合；
   (3) 抛物线 $y=-x^2+6$ 上的所有点组成的集合；

(4) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+6$ 在第一象限内的所有整点(横、纵坐标均为整数的点)组成的集合.

5. 判断下列各组中两个集合之间的关系：

(1) $A=\{x|x$ 是等边三角形$\}$，$B=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$；

(2) $G=\{x|x$ 是能够被 2 整除的数$\}$，$H=\{x|x$ 是被 4 除余 2 的整数$\}$.

6. 设集合 $A=\{x|3\leqslant x<7\}$，$B=\{x|2<x<10\}$，求下列集合：

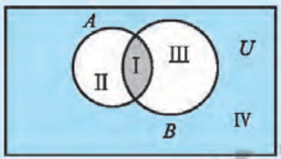
(1) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$；　　(2) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$；

(3) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；　　(4) $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

7. 已知集合 $A=\{1,3,n\}$，$B=\{n^2,1\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 n 的值.

B 组

1. 如图，两个圆形区域分别表示集合 A,B. 请用集合 U,A,B 分别表示图中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分所表示的集合.



(第 1 题)

2. 某学校先后举办了多个学科的课余活动. 已知高一(1)班有 50 名同学，其中 30 名同学参加了数学活动，26 名同学参加了物理活动，15 名同学同时参加了数学、物理两个学科的活动，则这个班有多少名同学既没有参加数学活动，也没有参加物理活动？

3. 已知集合 $A=[2a+1,3a-5]$，$B=[3,22]$.

(1) 当 $a=10$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2) 求能使 $A\cap B=A$ 成立的实数 a 的取值范围.

北京师范大学出版社

阅读材料

康托尔与集合论

研究集合的数学理论在现代数学中称为集合论. 它不仅是数学的一个基本分支，占据着极其独特的地位，而且其基本概念已渗透到数学的所有领域. 如果把现代数学比作一座无比辉煌的大厦，那么可以说集合论正是构成这座大厦的基石. 集合论的创始人康托尔(Georg Cantor，1845—1918)被誉为对 20 世纪数学发展影响最深的学者之一.

康托尔是德国数学家，出生于俄国圣彼得堡，自幼对数学有浓厚兴趣. 他 22 岁时获得博士学位，以后一直从事数学教学与研究.

康托尔于 1873 年提出集合论思想，他将集合理解为：由我们的感知或想象所确定的不同对象 m 组成的一个整体 M(any collection into a whole M of definite and separate objects m of our intuition or our thought).

有限集中元素的个数可以一一数出来，若 A 是有限集，常用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示 A 中元素的个数. 如 $A=\{1,3,5,7\}$，则 $\mathrm{card}(A)=4$. 一般地，对任意两个有限集 A 与 B，有

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B).$$

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A\cup B)&=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)\\&=4+4-2=6.\end{aligned}$$

如何比较两个无限集中元素的个数呢？不到 30 岁的康托尔向神秘的“无穷”宣战，靠着智慧和汗水，成功地证明了：一条直线上的点能够和一个平面上的点一一对应，也能和空间中的点一一对应.

北京师范大学出版社

§ 2 常用逻辑用语

常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具，是逻辑思维的基本语言. 本节的内容包括必要条件、充分条件、充要条件，全称量词与存在量词，全称量词命题与存在量词命题以及它们的否定.

> 纯粹数学，就其本质而言，是逻辑思想的诗篇.
> ——爱因斯坦
> (Albert Einstein, 1879—1955)

在初中数学中，已经学过：可以判断真假，用文字或符号表述的陈述句叫作命题. 一个命题通常可以表示为“若 p，则 q”和“p 是 q”两种形式. 当命题表示为“若 p，则 q”时，p 是命题的条件，q 是命题的结论. 当命题“若 p，则 q”是真命题时，就说由 p 推出 q，记作 $p \Rightarrow q$.

2.1 必要条件与充分条件

一、必要条件与性质定理

实例分析

在初中数学中，我们学习过一些性质定理，例如：

定理 1　菱形的对角线互相垂直. 即如果四边形为菱形，那么这个四边形的对角线互相垂直.

定理 2　如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

定理 3　如果两个三角形是全等三角形，那么这两个三角形的对应角相等.

定理 1 是菱形的性质定理，即对角线互相垂直是菱形必有的性质. 也就是说，如果能确定四边形为菱形，那么一定可以得出这个四边形的对角线互相垂直，而一旦某个四边形的对角线不互相垂直，那么这个四边形一定不是菱形.

思考交流

试用分析定理 1 的方法分析定理 2、定理 3.

抽象概括

一般地，当命题“若 p，则 q”是真命题时，称 q 是 p 的**必要条件**. 也就是说，一旦 q 不成

北京师范大学出版社

立，p 一定也不成立，即 q 对于 p 的成立是必要的.

例如，在定理 1 中，“四边形的对角线互相垂直”是“四边形为菱形”的必要条件.

例 1 将下面的性质定理写成“若 p，则 q”的形式，并用必要条件的语言表述：

(1) 平面四边形的外角和是 360°；

(2) 在平面直角坐标系中，关于 x 轴对称的两个点的横坐标相同.

解 (1) “平面四边形的外角和是 360°”可表述为“若平面多边形为四边形，则它的外角和为 360°”，所以“外角和为 360°”是“平面多边形为四边形”的必要条件；

(2) “在平面直角坐标系中，关于 x 轴对称的两个点的横坐标相同”可表述为“在平面直角坐标系中，若两个点关于 x 轴对称，则这两个点的横坐标相同”，所以“两个点的横坐标相同”是“在平面直角坐标系中，两个点关于 x 轴对称”的必要条件.

练 习

1. 用必要条件的语言表述下面的性质：

(1) 若 $A=\varnothing$，则 $A\subseteq B$；

(2) 正方形的对角线互相垂直且相等；

(3) 两条直线被第三条直线所截，如果两条直线平行，那么同位角相等.

2. 判断下列各组中，是否有 $p\Rightarrow q$ 或 $q\Rightarrow p$ 成立，并用必要条件的语言表述：

(1) p：$x^2=y^2$，q：$x=y$；

(2) p：$a=b$，$c\neq 0$，q：$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$；

(3) p：能被 5 整除的整数，q：整数的个位数字为 5；

(4) p：两个三角形全等，q：两个三角形的面积相等.

北京师范大学出版社

二、充分条件与判定定理

实例分析

在初中数学中，我们学习过一些判定定理，例如：

定理 4 若 $a>0$，$b>0$，则 $ab>0$.

定理 5 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

定理 6 平行于三角形一边的直线，截其他两边所得的三角形与原三角形相似.

定理 4 是说：如果满足了条件“$a>0,b>0$”，一定有结论“$ab>0$”. 但要注意，当 $ab>0$ 时，$a>0,b>0$ 不一定成立，例如，由“$a<0,b<0$”，也可以判定“$ab>0$”. 实际上，定理 4 告诉我们：只要有了“$a>0,b>0$”这个条件，就可以判定“$ab>0$”.

思考交流

试用分析定理 4 的方法分析定理 5、定理 6.

抽象概括

一般地，当命题“若 p，则 q”是真命题时，称 p 是 q 的**充分条件**.

综上，对于真命题“若 p，则 q”，即 $p\Rightarrow q$ 时，称 q 是 p 的必要条件，也称 p 是 q 的充分条件.

例 2 用充分条件的语言表述下面的真命题：

(1) 若 $a=-b$，则 $|a|=|b|$；

(2) 若点 C 是线段 AB 的中点，则 $AC=BC$；

(3) 当 $ac<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根.

北京师范大学出版社

解 (1) “$a=-b$”是“$|a|=|b|$”的充分条件；

(2) “点 C 是线段 AB 的中点”是“$AC=BC$”的充分条件；

(3) “$ac<0$”是“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根”的充分条件.

练　习

1. 下列各题中，试判断 p 是 q 的什么条件.

(1) p：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}(bc\neq 0)$，$q$：$b^2=ac$；

(2) 对于反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，$x>0$，p：$k>0$，q：y 值随 x 值的增大而减小；

(3) p：函数的图象关于 y 轴对称，q：函数 $y=x^2$.

2. 用充分条件或必要条件的语言表述下面的定理：

(1) 在一个平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；

(2) 若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$；

(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

(4) 如果 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

三、充要条件

实例分析

在初中数学中，勾股定理及其逆定理是非常重要的数学定理.

勾股定理 如果一个三角形为直角三角形，那么它的两直角边的平方和等于斜边的平方.

勾股定理的逆定理 如果一个三角形的一边的平方等于其他两边的平方和，那么这条边所对的角是直角.

在勾股定理中，"两直角边的平方和等于斜边的平方"是"三角形为直角三角形"的必要条件；"三角形为直角三角形"是"两直角边的平方和等于斜边的平方"的充分条件.

在勾股定理的逆定理中，"三角形的一个角是直角"是"三角形的直角所对的边的平方等于其他两边的平方和"的必要条件；"三角形的一边的平方等于其他两边的平方和"是"这条边所对的角是直角"的充分条件.

北京师范大学出版社

抽象概括

一般地，如果 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的**充分且必要条件**，简称 p 是 q 的**充要条件**，记作 $p \Leftrightarrow q$.

p 是 q 的充要条件也常常说成"p 成立当且仅当 q 成立"，或"p 与 q 等价".

当 p 是 q 的充要条件时，q 也是 p 的充要条件.

充要条件是数学中非常重要的概念，运用充要条件可以从不同的角度来理解、刻画很多数学内容.

例如，"三角形一边的平方等于其他两边的平方和"与"三角形一边上的中线等于该边长的一半"都可以用来定义直角三角形.

例 3 在下列各题中，试判断 p 是 q 的什么条件.

(1) $p: A \subseteq B, q: A \cap B = A$;

(2) $p: a = b, q: |a| = |b|$;

(3) p：四边形的对角线相等，q：四边形是平行四边形.

解 (1) 因为命题"若 $A \subseteq B$，则 $A \cap B = A$"为真命题，并且"若 $A \cap B = A$，则 $A \subseteq B$"也为真命题，所以 p 是 q 的充要条件；

(2) 因为"$a = b$"$\Rightarrow$"$|a| = |b|$"，但是"$|a| = |b|$"不能推出"$a = b$"，例如，"$|1| = |-1|$"，而"$1 \neq -1$"，所以 p 是 q 的充分条件，但不是必要条件；

(3) 因为"四边形的对角线相等"不能推出"四边形是平行四边形"，并且"四边形是平行四

边形”也不能推出“四边形的对角线相等”，所以 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

思考交流

请举出初中数学中的一些充要条件的命题，并与同学交流.

练　习

1. 用“充分条件”“必要条件”或“充要条件”填空：

(1) “$x\in\mathbf{N}$”是“$x\in\mathbf{Q}$”的________；

(2) “$x=2$”是“$x^2-3x+2=0$”的________；

(3) “$x>2$”是“$x>3$”的________；

(4) “$\frac{x}{y}>0$”是“$xy>0$”的________.

2. 下列各题中，试判断 p 是 q 的什么条件.

(1) p：$\frac{1}{x}<1$，q：$x>1$；

(2) p：四边形的对角线相等，q：四边形是矩形；

(3) p：一元二次函数 $y=ax^2+c(a\neq 0)$，q：一元二次函数的图象关于 y 轴对称.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$. 设 p：$x\in A$，q：$x\in B$，试判断 p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件.

北京师范大学出版社

2.2　全称量词与存在量词

一、全称量词命题与存在量词命题

观察下列命题：

(1) 所有正方形都是矩形；

(2) 每一个有理数都能写成分数的形式；

(3) 对于任意的正实数 k，$y=kx+b$ 的值随 x 值的增大而增大；

(4) 空集是任何集合的子集；

(5) 一切三角形的内角和都等于 180°.

以上命题中，“所有”“每一个”“任意”“任何”“一切”都是在指定范围内表示整体或全部的含义.

抽象概括

在给定集合中,断言所有元素都具有同一种性质的命题叫作**全称量词命题**. 在命题中,诸如"所有""每一个""任意""任何""一切"这样的词叫作**全称量词**,用符号"$\forall$"表示,读作"对任意的".

例如,"对于任意的实数 x,都有 $x^2\geqslant 0$"可表示为"$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2\geqslant 0$".

在某些全称量词命题中,有时全称量词可以省略. 例如,"所有的正方形都是矩形",可以简写为"正方形是矩形".

例 4 判断下列命题是不是全称量词命题,如果是,指出其中的全称量词:

(1) 所有的正方形都是平行四边形;

(2) 能被 5 整除的整数末位数字为 0.

解 (1) "所有的正方形都是平行四边形"是全称量词命题,"所有"是全称量词;

(2) "能被 5 整除的整数末位数字为 0"可以表述为"所有能被 5 整除的整数,末位数字都为 0",它是全称量词命题,其中省略了全称量词"所有".

思考交流

请举出初中数学中的一些全称量词命题,并与同学交流.

北京师范大学出版社

有一些数学命题,是对个体或整体的一部分的判断. 例如:

(1) 有些三角形是直角三角形;

(2) 在素数中,有一个是偶数;

(3) 存在实数 x,使得 $x^2+x-1=0$.

以上命题中,"有些""有一个""存在"都有表示个别或一部分的含义.

抽象概括

在给定集合中,断言某些元素具有一种性质的命题叫作**存在量词命题**. 在命题中,诸如"有些""有一个""存在"这样的词叫作**存在量词**,用符号"$\exists$"表示,读作"存在".

例如,"存在实数 x,使得 $x^2+x-1=0$"可表示为"$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x-1=0$".

例 5 判断下列命题是不是存在量词命题，如果是，指出其中的存在量词：

(1) 存在一个无理数 x，使 x^2 也是无理数；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x+1=0$.

解 (1) "存在一个无理数 x，使 x^2 也是无理数"是存在量词命题，"存在"是存在量词；

(2) "$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x+1=0$"是存在量词命题，"$\exists$(即存在)"是存在量词.

思考交流

请举出初中数学中的一些存在量词命题，并与同学交流.

练 习

1. 判断下列命题是不是全称量词命题，如果是，指出其中的全称量词：
   (1) 每一个多边形的外角和都是 $360°$；
   (2) 所有的素数都是奇数；
   (3) 对任意的无理数 x，x^2 也是无理数；
   (4) $\forall x\in\mathbf{R}$，x 都有平方根；
   (5) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $-x^2\leqslant 0$.
2. 判断下列命题是不是存在量词命题，如果是，指出其中的存在量词：
   (1) 实数都能写成小数；
   (2) 在实数集内，有些一元二次方程无解；
   (3) 在平面内，过直线外一点，存在另一条直线与其垂直；
   (4) 存在一个自然数 n，使代数式 n^2-2n+2 的值是负数.

北京师范大学出版社

二、全称量词命题与存在量词命题的否定

在数学的讨论中，有时要给出一个命题的否定，例如，在反证法的证明中要先假设命题的否定成立.

当命题是真命题时，命题的否定是假命题；当命题是假命题时，命题的否定是真命题.

实例分析

"$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x+1>0$"是一个全称量词命题，如何否定它呢？

要否定这个全称量词命题，只需要找到一个实数 x，使 $x+1>0$ 不成立，即找到一个实

数 x，使 $x+1\leqslant 0$，也就是“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x+1\leqslant 0$”，它是一个存在量词命题.

又如，全称量词命题：“$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2-2x+2>0$”. 要否定这个全称量词命题，只需要找到一个实数 x，使 $x^2-2x+2>0$ 不成立，即“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2-2x+2\leqslant 0$”，它也是一个存在量词命题.

以上的存在量词命题是对原全称量词命题加以否定得到的.

抽象概括

一般地，要否定一个全称量词命题，只需要在给定集合中找到一个元素，使命题的结论不正确，即全称量词命题不成立.

全称量词命题的否定是存在量词命题.

对于全称量词命题 p：$\forall x\in M$，x 具有性质 $p(x)$，通常把它的否定表示为

$$\boxed{\exists x\in M,x\text{ 不具有性质 }p(x).}$$

例 6 写出下列全称量词命题的否定：

(1) 任意一个一元二次函数的图象都与 x 轴相交；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\sqrt{x^2}=x$.

解 (1)“任意一个一元二次函数的图象都与 x 轴相交”的否定是“存在一个一元二次函数，它的图象与 x 轴不相交”；

(2)“$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\sqrt{x^2}=x$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\sqrt{x^2}\neq x$”.

思考交流

如何写出下列存在量词命题的否定？

(1) 存在凸 n 边形（$n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 3$），它的内角和等于 $720°$；

(2) $\exists x\in\mathbf{N}$，x^2 的个位数字等于 3.

抽象概括

一般地，要否定一个存在量词命题，需要判定给定集合中每一个元素均不能使存在量词命题的结论成立.

存在量词命题的否定是全称量词命题.

对于存在量词命题 p：$\exists x\in M$，x 具有性质 $p(x)$，通常把它的否定表示为

$$\boxed{\forall x\in M,x\text{ 不具有性质 }p(x).}$$

北京师范大学出版社

例 7 写出下列存在量词命题的否定：

(1) 某箱产品中至少有一件次品；

(2) 方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1\leqslant 0$.

解 (1)“某箱产品中至少有一件次品”的否定是“某箱产品都是正品”；

(2)“方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数”的否定是“方程 $x^2-8x+15=0$ 的每一个根都不是偶数”；

(3)“$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1\leqslant 0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2+x+1>0$”.

练习

1. 写出下列命题的否定：

(1) 对于任意一个实数 x,都有 $x^2>x$；

(2) 三个连续整数中,至少有一个数是 3 的倍数；

(3) 所有的矩形都是平行四边形；

(4) 所有的平行四边形都是菱形；

(5) $\forall x\in\mathbf{Q}$,有 $3x^2+2x+1\in\mathbf{Q}$；

(6) $\exists$锐角 α,使 $\sin\alpha=\cos\alpha$.

北京师范大学出版社

习题 1-2

A 组

1. 请在“充分条件”“必要条件”“充要条件”“既不是充分条件也不是必要条件”中选择一个最恰当的,填空：

(1) 当 $A\subseteq B$ 时,“$x\in A$”是“$x\in B$”的________；

(2)“a 是偶数,b 是偶数”是“ab 是偶数”的________；

(3)“$A\subseteq B$”是“$A\cup B=B$”的________；

(4)“$ab>0$”是“$a>0$,且 $b>0$”的________；

(5)“整数 n 能被 3 整除”是“整数 n 能被 6 整除”的________；

(6)“$x-2=0$”是“$(x+2)(x-2)=0$”的________；

(7)“$A=\varnothing$”是“$A\cap B=\varnothing$”的________；

(8)“$a=b$”是“$a^2+b^2\geqslant 2ab$”的________.

2. 判断下列说法是否正确：

(1) “$a\in \mathbf{N}$”是“$a\in \mathbf{Z}$”的充分条件；

(2) “$ab=0$”是“$a^2+b^2=0$”的充要条件；

(3) “两个三角形全等”是“两个三角形相似”的充分条件；

(4) “两个三角形中有两边及其中一边的对角分别相等”是“两个三角形全等”的充要条件.

3. 写出下列命题的否定：

(1) 一切分数都是有理数；

(2) 正方形都是菱形；

(3) $\exists x\in \mathbf{R}$，使 $x^2-2=0$；

(4) $\forall x\in \mathbf{R}$，有 $x^2+2x+2\leqslant 0$.

4. 请举出几个生活中的全称量词命题或存在量词命题，并写出这些命题的否定.

B 组

1. 填空：

(1) “一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 有实数根”的充要条件是________；

(2) “一元二次方程$(x-a)(x-a-1)=0$有一个正实数根和一个负实数根”的一个充分条件但不是必要条件的是________；

(3) “一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等的正实数根”的充要条件是____________.

2. 试用充分条件、必要条件或充要条件的语言梳理初中数学中有关“平行四边形”的结论，并与同学交流.

北京师范大学出版社

§ 3 不等式

在生活中，存在着形形色色的数量关系，既有相等关系，又有不等关系. 在数学中，用不等式来表示不等关系.

这里用 $x\ \mathrm{m}^2$ 和 $y\ \mathrm{m}^2$ 分别表示民用住宅的窗户面积和地板面积. 一般来讲，窗户面积比地板面积小. 显然，比值$\frac{x}{y}$越大，住宅的采光条件越好. 不等式 $\frac{x}{y}<\frac{x+l}{y+l}$ 表示的是：当同时增加相等的窗户面积 $l\ \mathrm{m}^2$ 和地板面积 $l\ \mathrm{m}^2$ 时，住宅的采光条件会得到改善.

3.1 不等式的性质

在初中数学中，可以利用数轴比较任意两个实数 a,b 的大小. 关于实数 a,b 大小的比较，有以下基本事实：**如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 等于 0，那么 $a=b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$. 反过来也成立.**

这个基本事实可以表示为

$$\boxed{\begin{aligned}&a>b \Leftrightarrow a-b>0;\\&a=b \Leftrightarrow a-b=0;\\&a<b \Leftrightarrow a-b<0.\end{aligned}}$$

北京师范大学出版社

性质 1 如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$.

分析 要证 $a>c$，只需证 $a-c>0$.

证明 因为 $a>b$，且 $b>c$，

所以 $a-b>0$，$b-c>0$，

从而 $a-c=(a-b)+(b-c)>0$，即 $a>c$.

性质 2 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

分析 要证 $a+c>b+c$，只需证$(a+c)-(b+c)>0$.

证明 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，

所以$(a+c)-(b+c)=a-b>0$，即 $a+c>b+c$.

性质 3 (1) 如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；

(2) 如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

分析 (1) 要证 $ac>bc$，只需证 $ac-bc>0$.

证明 (1) 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$.

又因为 $c>0$，所以$(a-b)c>0$，$ac-bc>0$，即 $ac>bc$.

试用(1)的方法完成(2)的证明.

例 1 试比较$(x+1)(x+5)$与$(x+3)^2$的大小.

解 因为 $(x+1)(x+5)-(x+3)^2$

$$=(x^2+6x+5)-(x^2+6x+9)$$

$$=-4<0,$$

所以$(x+1)(x+5)<(x+3)^2$.

例 2 试证明:若$0<a<b,m>0$,则$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

证明 $\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}=\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}$.

因为$a<b$,所以$b-a>0$.

又$b>0,m>0$,故$\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$.

因此$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

思考交流

请思考生活中还有哪些实例能用例 2 中的不等式解释.

北京师范大学出版社

性质 4 如果$a>b,c>d$,那么$a+c>b+d$.

证明 因为$a>b$,所以$a+c>b+c$.

又因为$c>d$,所以$b+c>b+d$.

由不等式的性质 1,得$a+c>b+d$.

性质 5 (1) 如果$a>b>0,c>d>0$,那么$ac>bd$;

(2) 如果$a>b>0,c<d<0$,那么$ac<bd$.

证明 (1)因为$a>b,c>0$,所以$ac>bc$.

又因为$c>d,b>0$,所以$bc>bd$.

由不等式的性质 1,得$ac>bd$.

试用(1)的方法完成(2)的证明.

特殊地,当$a>b>0$时,$a^n>b^n$,其中$n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2$.

性质 6 当$a>b>0$时,$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$,其中$n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2$.

证明 假设$\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$.

当$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$时,可得$(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n$,即$a<b$.与已知条件$a>b>0$矛盾.

当 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 时，可得 $(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n$，即 $a=b$. 与已知条件 $a>b>0$ 矛盾.

所以 $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$ 不成立，

即 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

以上不等式的性质是解决不等式问题的基本依据.

例 3 (1) 已知 $a>b$，$ab>0$，求证：$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

(2) 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

证明 (1) 因为 $ab>0$，所以 $\dfrac{1}{ab}>0$.

又因为 $a>b$，所以由不等式的性质 3，得 $a\cdot\dfrac{1}{ab}>b\cdot\dfrac{1}{ab}$，即 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

(2) 因为 $c<d$，所以 $-c>-d$.

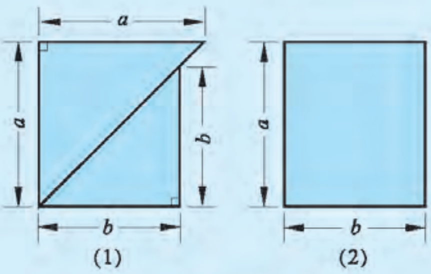
又因为 $a>b$，所以由不等式的性质 4，得 $a+(-c)>b+(-d)$，即 $a-c>b-d$.

北京师范大学出版社

练 习

1. 试举出现实生活中与不等式有关的几个例子.

2. 有如图所示的两种广告牌.图(1)由两个等腰直角三角形构成，图(2)是一个矩形. 试用直观的方法比较这两个广告牌面积的大小，并将这种大小关系用含字母 a，b 的不等式表示出来.



(第 2 题)

3. 试比较下面各组中两式的大小：

(1) $(x-2)^2$ 与 $(x-1)(x-3)$；

(2) x^2+2x 与 $3x-1$.

4. 某粮食收购站分两个等级收购小麦. 一级小麦 a 元/kg，二级小麦 b 元/kg$(b<a)$. 现有一级小麦 m kg，二级小麦 n kg，若以两种价格的平均数收购，是否合理，为什么？

5. 用“$>$”或“$<$”填空：

(1) $x+3$ ________ $x-3$；　　(2) $x+3$ ________ $y+3(x<y)$；

(3) $5a$ ________ $3a(a<0)$；　　(4) ma ________ $mb(a<b,m<0)$；

(5) $\dfrac{1}{m}$ ________ $\dfrac{1}{n}(m>n>0)$；　　(6) m^3 ________ $n^3(m>n>0)$.

6. 若 $a>b$，$c>d$，判断下列不等关系是否成立，并说明理由：

(1) $a-b>d-c$；　　(2) $a+d>b+c$；

(3) $a-c>b-d$；　　(4) $a-c<a-d$.

3.2 基本不等式

对于任意实数 x 和 y，$(x-y)^2\geqslant 0$ 总是成立的，即 $x^2-2xy+y^2\geqslant 0$，所以

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy\text{，当且仅当 } x=y \text{ 时，等号成立.}$$

设 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，取 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，代入上述不等式可得

$$\boldsymbol{\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}}\textbf{，当且仅当 } \boldsymbol{a=b} \textbf{ 时，等号成立.}$$

这个不等式称为**基本不等式**，其中，$\frac{a+b}{2}$称为 a，b 的**算术平均值**，$\sqrt{ab}$称为 a，b 的**几何平均值**. 因此，基本不等式又称为**均值不等式**，也可以表述为：

两个非负实数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值.

下面给出基本不等式的一种几何解释.

如图 1-14，AB 是半圆 O 的直径，点 C 在 AB 上，且 $AC=a$，$CB=b$. 过点 C 作 AB 的垂线，交$\overset{\frown}{AB}$于点 D，连接 AD，OD，BD. 显然 $OD=OA=\frac{a+b}{2}$；利用三角形相似，可证得$\triangle ACD\backsim\triangle DCB$，从而 $CD=\sqrt{ab}$.

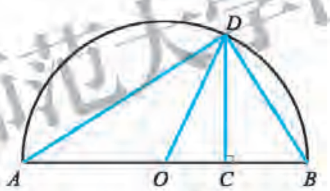


图 1-14

从图 1-14 中可以看出，$OD\geqslant CD$，当且仅当点 C 与圆心 O 重合时，等号成立，即“半径大于或等于半弦”.

利用基本不等式或类似上述几何图形，还可以推出一些其他的简单不等式.

例 4 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

证明 因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，所以由基本不等式，得

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\text{，当且仅当 } a=b \text{ 时，等号成立，}$$

$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}\text{，当且仅当 } b=c \text{ 时，等号成立，}$$

$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}\text{，当且仅当 } a=c \text{ 时，等号成立.}$$

上面三式相加，得 $2a+2b+2c\geqslant 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$，即

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\text{，当且仅当 } a=b=c \text{ 时，等号成立.}$$

北京师范大学出版社

思考交流

如图 1－15，AB 是半圆 O 的直径，点 C 在 AB 上，且 $AC=a$，$CB=b$. 过点 O 作 AB 的垂线，交$\overset{\frown}{AB}$于点 F，连接 FC. 请你利用 $FC\geqslant OF$ 写出一个关于 a，b 的不等式，并将这个不等式与基本不等式进行比较.

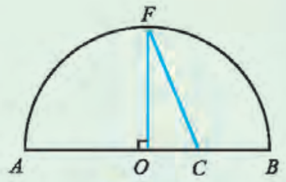
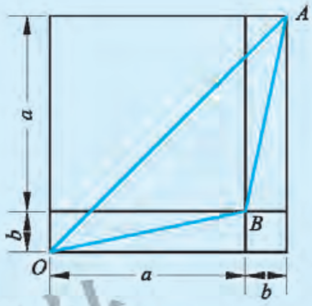


图 1－15

练 习

1. 如图，设正方形的边长为 $a+b(a>0,b>0)$，请你利用 $OA\leqslant OB+BA$ 写出一个含有 a，b 的不等式，与熟悉的不等式比较，并与同学交流.



（第 1 题）

2. 已知 $x>0$，求证：$x+\dfrac{4}{x}\geqslant 4$.

3. 设 $a>0,b>0$，求证：$\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

4. 已知 $a>1$，求证：$a+\dfrac{1}{a-1}\geqslant 3$.

实例分析

把一段长为 16 cm 的细铁丝弯成形状不同的矩形，试填写表 1－3，并思考当矩形的长、宽分别为何值时，面积最大.

表 1－3

方 案	长/cm	宽/cm	面积/cm^2
方案 1			
方案 2			
方案 3			
……			

设矩形的长为 x cm，宽为 y cm，则 $x+y=8$. 此时，由基本不等式，得$\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，即$\dfrac{8}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，所以 $xy\leqslant 16$. 又因为当 $x=y=4$ 时，$xy=16$（即不等式 $xy\leqslant 16$ 中的等号成立），由此可知，边长为 4 cm 的正方形的面积最大.

北京师范大学出版社

思考交流

类比上面的方法，说明：面积为 16 cm^2 的所有不同形状的矩形中，边长为 4 cm 的正方形的周长最小.

抽象概括

当 x,y 均为正数时，下面的命题均成立：

(1) 若 $x+y=s$(s 为定值)，则当且仅当 $x=y$ 时，xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$；

(2) 若 $xy=p$(p 为定值)，则当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$.

证明 (1) 由基本不等式 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ 和 $x+y=s$，得 $\frac{s}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

所以
$$xy\leqslant\frac{s^2}{4}.$$

当且仅当 $x=y=\frac{s}{2}$ 时，不等式中的等号成立，此时 xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$.

(2) 同理可证.

例 5 如图 1－16，动物园要围成 4 间相同面积的长方形禽舍，一面可利用原有的墙，其他各面用钢筋网围成.（接头处不计）

(1) 现有可围 36 m 长钢筋网的材料，当每间禽舍的长、宽各设计为多长时，可使每间禽舍面积最大？

(2) 若使每间禽舍面积为 24 m^2，则每间禽舍的长、宽各设计为多长时，可使围成四间禽舍的钢筋网总长最小？

图 1－16

解 (1) 设每间禽舍的长为 x m，宽为 y m，则 $4x+6y=36$，

即
$$2x+3y=18.$$

设 $S=xy(0<x<9,0<y<6)$. 应用基本不等式，有 $2x+3y\geqslant2\sqrt{2x\cdot3y}$，

即
$$2\sqrt{6}\cdot\sqrt{S}\leqslant18.$$

所以
$$S\leqslant13.5.$$

当且仅当 $2x=3y$ 时，不等式中的等号成立，此时 $\begin{cases}2x=3y,\\2x+3y=18,\end{cases}$

解得
$$\begin{cases}x=4.5,\\y=3.\end{cases}$$

因此，当每间禽舍的长、宽分别设计为 4.5 m 和 3 m 时，可使每间禽舍面积最大，最大面积为 13.5 m^2.

请你与同学合作，解决问题(2).

北京师范大学出版社

练 习

1. 已知 $0<x<\frac{3}{2}$，试用不同方法求函数 $y=x(3-2x)$ 的最大值.
2. 已知直角三角形的面积为 8 cm^2，当两条直角边各为多长时，两条直角边的长度和最小？最小值是多少？
3. 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园，当这个矩形的长、宽各为多少时，所用篱笆最短？最短的篱笆长度是多少？
4. 已知 x,y 均为正数，试求证：若 $xy=p$（p 为定值），则当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$.

习题 1－3

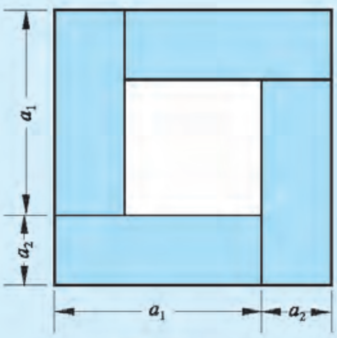
A 组

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

   (1) 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；　(2) 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

   (3) 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$；　(4) 若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. 设 $m=x^2+y^2-2x+2y$，$n=-3$，比较 m,n 的大小关系.
3. 如图，试用直观的方法比较以 a_1+a_2 为边长的正方形的面积与四个长为 a_1、宽为 a_2 的矩形面积之和的大小，把这种大小关系用不等式表示出来，并证明.



（第 3 题）

4. (1) 已知 $0>m>n$，$p<0$，求证：$\frac{p}{m}>\frac{p}{n}$；

   (2) 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证：$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

5. 设 $x>0$，$y>0$，求证下列不等式：

   (1) $x+\frac{4}{x+1}\geqslant 3$；　(2) $x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$；

   (3) $x(x-y)\geqslant y(x-y)$；　(4) $\sqrt{xy}\geqslant\frac{2xy}{x+y}$.

6. 已知三个不等式：

   (1) $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；　(2) $ab<0$；　(3) $bc<ad$.

   请思考依据其中哪两个不等式可以推出另一个不等式，并说明理由.

7. 设 x,y 是满足 $2x+y=20$ 的正数，求 xy 的最大值.
8. 制作一个面积为 1 m^2 且形状为直角三角形的铁支架，现有 4.6 m，4.8 m，5 m，5.2 m 四种长度的铁管供选择，较经济（够用，又耗材最少）的是哪一种？
9. 在直径为 d 的圆中，圆内接矩形的最大面积是多少？这样的矩形长、宽之比是多少？

10. 某工厂要建一个长方体形无盖蓄水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果该池底的造价为 150 元/m^2，池壁的造价为 120 元/m^2，那么怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少元？

B 组

1. 试比较$(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$与$(x^2-x+1)(x^2+x+1)$的大小.
2. 甲、乙两人同时从 A 地出发沿同一路线走到 B 地，所用时间分别为 t_1 s，t_2 s. 甲有一半的时间以 m m/s 的速度行走，另一半的时间以 n m/s 的速度行走；乙有一半的路程以 m m/s 的速度行走，另一半的路程以 n m/s 的速度行走，且 $m\neq n$.
   (1) 请用含 m,n 的代数式表示甲、乙两人所用的时间 t_1 和 t_2；
   (2) 比较 t_1 与 t_2 的大小，并判断甲、乙两人谁先到达 B 地.
3. 设计一幅宣传画，要求画面面积为 4 840 cm^2，画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽，才能使宣传画所用纸张面积最小？

阅读材料

弦 图

2002 年 8 月，中国成功主办了国际数学家大会(ICM 2002)，其会标的设计基础来自中国古代勾股圆方图中著名的弦图(如图 1－17).

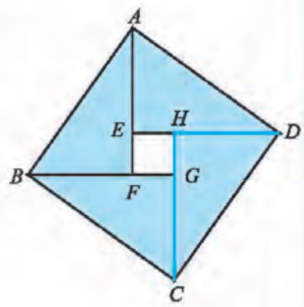


图 1－17

利用这个图，我们可以给基本不等式一个非常形象的几何解释.

如图1－17，设每个直角三角形的两直角边长分别为$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，易知正方形 $ABCD$ 的面积$\geqslant$4 个直角三角形面积之和，从而有

$$(\sqrt{a+b})^2\geqslant 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$

即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

弦图由我国三国时期的数学家赵爽(182—250)提出. 赵爽花费大量心血细致注释了《周髀》(唐初改名为《周髀算经》)，以超人的智慧，仅用勾股圆方图和 500 余字的评注，就简明扼要地总结出了中国古代勾股算术的深奥原理.

首届国家自然科学一等奖获得者、首届国家最高科学技术奖获得者吴文俊(1919—2017)曾经提出："在中国的传统数学中，数量关系与空间形式往往是形影不离地并肩发展着的."

北京师范大学出版社

§ 4 一元二次函数与一元二次不等式

4.1 一元二次函数

在初中，我们学习了一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，认识这个函数的过程是从 $y=x^2$ 开始的，是由简到繁的过程(如图 1-18).

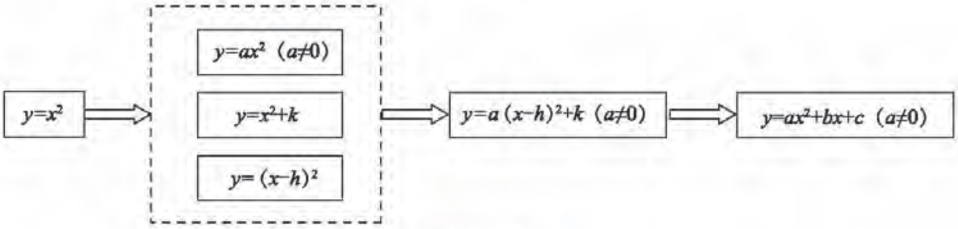


图 1-18

北京师范大学出版社

思考交流

请分析讨论函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象经过怎样的变换得到.

抽象概括

一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 都可以通过配方化为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

若设 $h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$，则有

$$y=a(x-h)^2+k.$$

通常把一元二次函数的图象叫作**抛物线**. 一元二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以由 $y=ax^2$ 的图象经过向左(或向右)平移 $|h|$ 个单位长度，再向上(或向下)平移 $|k|$ 个单位长度而得到. 如图 1-19，函数 $y=2(x-2)^2-1$ 的图象可以由函数 $y=2x^2$ 的图象平移而得到.

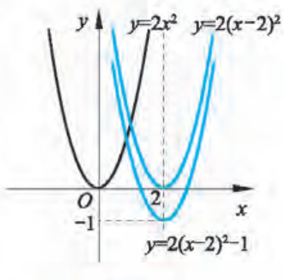


图 1-19

一元二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 有如下性质：

(1) 函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象是一条抛物线，顶点坐标是

(h,k)，对称轴是直线 $x=h$.

(2) 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；在区间 $(-\infty,h]$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；在区间 $[h,+\infty)$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大；函数在 $x=h$ 处有最小值，记作 $y_{\min}=k$.

当 $a<0$ 时，抛物线开口向下；在区间 $(-\infty,h]$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大；在区间 $[h,+\infty)$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；函数在 $x=h$ 处有最大值，记作 $y_{\max}=k$.

例 1 已知一元二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$.

(1) 指出它的图象可以由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的变换而得到；

(2) 指出它的图象的对称轴，试述函数值的变化趋势及函数的最大值或最小值.

解 (1) 配方，得

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}x^2+2x+5\\ &=\frac{1}{2}(x^2+4x)+5\\ &=\frac{1}{2}(x^2+4x+4-4)+5\\ &=\frac{1}{2}(x+2)^2+3. \end{aligned}$$

所以函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$ 的图象可以由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度而得到.

(2) 由(1)可知：该函数的图象开口向上，对称轴为直线 $x=-2$；在区间 $(-\infty,-2]$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，在区间 $[-2,+\infty)$ 上，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大；函数在 $x=-2$ 处取得最小值 3，即 $y_{\min}=3$.

练 习

1. 用配方法求出下列函数图象的对称轴及函数的最大值或最小值：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-5x+1$；　　(2) $y=-3x^2+12x-8$.

2. 已知一元二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x+2$.

(1) 指出它的图象可以由函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的变换而得到；

(2) 指出它的图象的对称轴，试述函数值的变化趋势及最大值或最小值.

北京师范大学出版社

4.2 一元二次不等式及其解法

一、一元二次不等式的概念

汽车在行驶过程中，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，一般称这段距离为“刹车距”. 刹车距 s(单位：m)与车速 x(单位：km/h)之间具有确定的函数关系，不同车型的刹车距函数不同. 它是分析交通事故的一个重要依据.

甲、乙两辆汽车相向而行，由于突发情况，两车相撞. 交警在现场测得甲车的刹车距超过 12 m，但不足 15 m，乙车的刹车距超过 11 m，但不足 12 m. 已知这两辆汽车的刹车距函数分别如下：

$$s_{甲}=0.01x^2+0.1x,$$
$$s_{乙}=0.005x^2+0.05x,$$

车速超过 40 km/h 属违法.

试问：哪一辆车违法超速行驶？

由题意，只需分别解出使不等式 $12<0.01x^2+0.1x<15$ 和 $11<0.005x^2+0.05x<12$ 成立的实数 x 的取值范围，即可确认两车的实际行驶速度是否违法.

一般地，形如 $ax^2+bx+c>0$，或 $ax^2+bx+c<0$，或 $ax^2+bx+c\geqslant 0$，或 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ (其中，x 为未知数，a,b,c 均为常数，且 $a\neq 0$) 的不等式叫作**一元二次不等式**. 使一元二次不等式成立的所有未知数的值组成的集合叫作这个**一元二次不等式的解集**.

二、一元二次不等式的求解方法

类比初中数学中用一次函数的图象求解一元一次不等式，我们可以利用一元二次函数的图象求一元二次不等式的解集.

以不等式 $x^2-2x-3<0$ 为例，画出一元二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象(如图 1-20)并观察，可知它与 x 轴交点的横坐标分别是 -1 和 3. 即当 $x_1=-1$，$x_2=3$ 时 $x^2-2x-3=0$. 进而，当 $-1<x<3$ 时，一元二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象在 x 轴的下方，满足 $y<0$. 也就是说，一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$.

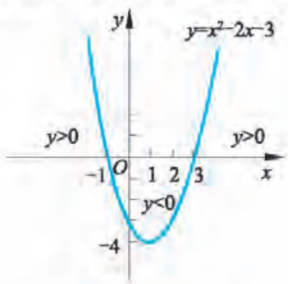


图 1-20

思考交流

完成表 1-4.

表 1-4

$y=ax^2+bx+c(a>0)$			
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根			
函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集			
不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集			

阐述 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根、不等式 $ax^2+bx+c>0$和 $ax^2+bx+c<0$ 的解集之间的关系.

北京师范大学出版社

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$的求解方法,如图 1-21.

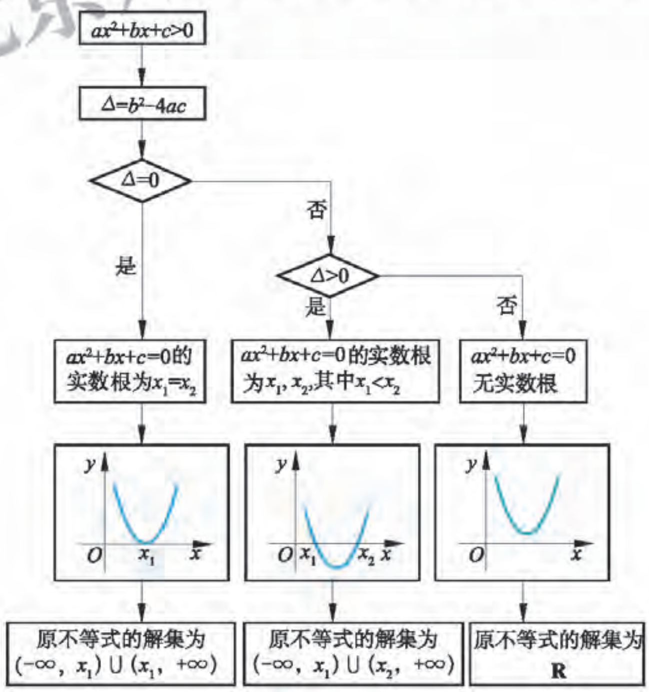


图 1-21

说明:图 1-21 中的函数图象仅为示意图.

例 2 求不等式 $9x^2-6x+1>0$ 的解集.

解 因为方程 $9x^2-6x+1=0$ 的 $\Delta=(-6)^2-4\times9\times1=0$，所以该方程有两个相等的实数根，解得 $x_1=x_2=\frac{1}{3}$.

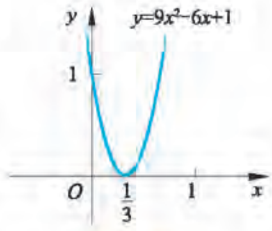


图 1-22

画出一元二次函数 $y=9x^2-6x+1$ 的图象（如图 1-22），可知该函数的图象是开口向上的抛物线，且与 x 轴仅有一个交点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

观察图象可得原不等式的解集为 $\left\{x \middle| x\neq\frac{1}{3}\right\}$.

例 3 求不等式 $3x^2+5x-2>0$ 的解集.

解法 1 因为方程 $3x^2+5x-2=0$ 的 $\Delta=5^2-4\times3\times(-2)>0$，所以该方程有两个不相等的实数根，解得 $x_1=-2,x_2=\frac{1}{3}$.

画出一元二次函数 $y=3x^2+5x-2$ 的图象（如图 1-23），可知该函数的图象是开口向上的抛物线，且与 x 轴有两个交点 $(-2,0)$ 和 $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

北京师范大学出版社

观察图象可得原不等式的解集为 $\left\{x \middle| x<-2,\text{或 } x>\frac{1}{3}\right\}$.

解法 2 因为方程 $3x^2+5x-2=0$ 的 $\Delta=5^2-4\times3\times(-2)>0$，所以该方程有两个不相等的实数根，解得 $x_1=-2$，$x_2=\frac{1}{3}$，因此 $3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$. 所以原不等式可以转化为

$$(x+2)(3x-1)>0,$$

即

$$\begin{cases}x+2>0,\\3x-1>0,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+2<0,\\3x-1<0.\end{cases}$$

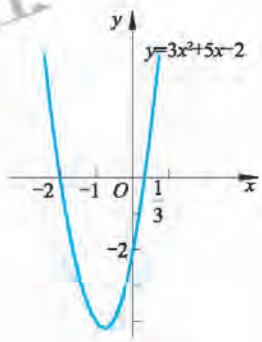


图 1-23

所以原不等式的解集为 $\left\{x \middle| x<-2,\text{或 } x>\frac{1}{3}\right\}$.

思考交流

1. 根据不等式 $3x^2+5x-2>0$ 的解集，你能得出不等式 $3x^2+5x-2\leqslant0$ 的解集吗？
2. 结合图 1-21，总结解一元二次不等式的一般步骤.

对于 $a<0$ 时的一元二次不等式，可以直接类比 $a>0$ 时的求解思路；也可以先把它化成二次项系数为正的一元二次不等式，再求解.

例 4 求关于 x 的不等式 $x^2+(1-a)x-a<0$ 的解集，其中 a 是常数.

解 依题意知方程 $x^2+(1-a)x-a=0$ 的实数根为 $x_1=-1$，$x_2=a$，且一元二次函数 $y=x^2+(1-a)x-a$ 的图象是开口向上的抛物线.

(1) 当 $a<-1$ 时，如图 1－24，一元二次函数 $y=x^2+(1-a)x-a$ 的图象与 x 轴从左至右有两个交点 $(a,0)$ 与 $(-1,0)$. 所以原不等式的解集为 $(a,-1)$.

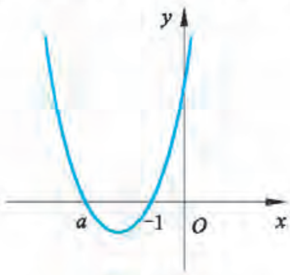


图 1－24

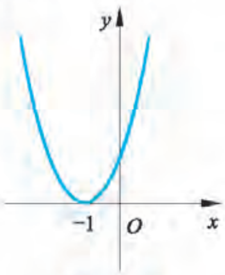


图 1－25

(2) 当 $a=-1$ 时，如图 1－25，一元二次函数 $y=x^2+(1-a)x-a$ 的图象与 x 轴只有一个交点 $(-1,0)$. 所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

(3) 当 $a>-1$ 时，如图 1－26，一元二次函数 $y=x^2+(1-a)x-a$ 的图象与 x 轴从左至右有两个交点 $(-1,0)$ 与 $(a,0)$. 所以原不等式的解集为 $(-1,a)$.

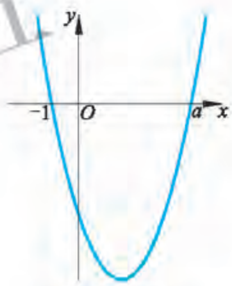


图 1－26

综上所述，当 $a<-1$ 时，原不等式的解集为 $(a,-1)$；

当 $a=-1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a>-1$ 时，原不等式的解集为 $(-1,a)$.

北京师范大学出版社

练 习

1. 画出下列函数的图象，并分别确定使 $y>0$ 的实数 x 的取值范围：

   (1) $y=x^2+3x+2$；　　(2) $y=4x^2-12x+9$；

   (3) $y=-2x^2+x+3$；　　(4) $y=-6x^2+5x+6$.

2. 求下列不等式的解集：

   (1) $2x^2-13x+20>0$；　　(2) $7x^2+5x+1<0$；

   (3) $4x^2-4x+1\leqslant 0$；　　(4) $-x^2+8x-2<0$；

   (5) $12x-4x^2-9<0$；　　(6) $(5-x)(x+4)\geqslant 18$.

3. 求关于 x 的不等式 $x^2-ax-2a^2>0$ 的解集，其中 a 是常数.

4. 参考图 1－21，画出当 $a<0$ 时，$ax^2+bx+c>0$ 的求解思路.

4.3 一元二次不等式的应用

一元二次不等式是重要的数学模型，在实际生活中有较广泛的应用.

例5 某农家院有客房20间，日常每间客房日租金为80元，每天都客满. 该农家院欲提高档次，并提高租金. 经市场调研，每间客房日租金每增加10元，客房出租数就会减少1间. 每间客房日租金不得超过130元，要使每天客房的租金总收入不低于1 800元，该农家院每间客房日租金提高的空间有多大?

解 设每间客房日租金提高 x 个10元，即每间客房日租金提高到 $(80+10x)$ 元，则客房出租数减少 $x(x\in\mathbf{N})$ 间，此时客房的租金总收入为 $(80+10x)(20-x)$ 元.

又因为每天客房的租金总收入不低于1 800元，所以

$$(80+10x)(20-x)\geqslant 1\,800.$$

化简，得

$$x^2-12x+20\leqslant 0.$$

解得

$$2\leqslant x\leqslant 10.$$

由题意可知：每间客房日租金不得超过130元，即 $80+10x\leqslant 130$，所以 $x\leqslant 5$. 因此，$x=2,3,4,5$，该农家院每间客房日租金提高的空间是20元，30元，40元，50元.

例6 为鼓励大学毕业生自主创业，某市出台了相关政策：由政府协调，本市企业按成本价提供产品给大学毕业生自主销售，成本价与出厂价之间的差价由政府承担. 大学毕业生袁阳按照相关政策投资销售本市生产的一种新型节能灯. 已知这种节能灯的成本价为每件10元，出厂价为每件12元，每月的销售量 y（单位：件）与销售单价 x（单位：元）之间的关系近似满足一次函数：$y=-10x+500$.

(1) 设袁阳每月获得的利润为 w（单位：元），写出每月获得的利润 w 与销售单价 x 的函数关系.

(2) 物价部门规定，这种节能灯的销售单价不得高于25元. 如果袁阳想要每月获得的利润不小于3 000元，那么政府每个月为他承担的总差价的取值范围是多少?

解 (1) 依题意可知每件的销售利润为 $(x-10)$ 元，每月的销售量为 $(-10x+500)$ 件，所以每月获得的利润 w 与销售单价 x 的函数关系为

$$w=(x-10)(-10x+500)\,(10\leqslant x\leqslant 50).$$

(2) 由每月获得的利润不小于3 000元，得

$$(x-10)(-10x+500)\geqslant 3\,000.$$

化简，得

$$x^2-60x+800\leqslant 0.$$

解得

$$20\leqslant x\leqslant 40.$$

又因为这种节能灯的销售单价不得高于25元，所以

$$20\leqslant x\leqslant 25.$$

设政府每个月为他承担的总差价为 p 元，则

$$p=(12-10)(-10x+500)=-20x+1\ 000.$$

由 $20\leqslant x\leqslant 25$，得 $500\leqslant -20x+1\ 000\leqslant 600$.

故政府每个月为他承担的总差价的取值范围为$[500,600]$元.

利用不等式解决实际问题的一般步骤如下：

(1) 选取合适的字母表示题中的未知数；

(2) 由题中给出的不等关系，列出关于未知数的不等式(组)；

(3) 求解所列出的不等式(组)；

(4) 结合题目的实际意义确定答案.

练　习

1. 某出版社以每本 25 元的价格发行一种图书，可发行 8 000 本. 经市场调研，一本书的定价每提高 1 元，发行量就减少 200 本. 要使发行总收入不低于 200 000 元，这种图书的最高定价是多少？
2. 已知汽车从踩刹车到停住所滑行的距离 s(单位：m)与速度 v(单位：km/h)的平方及汽车总质量成正比. 设某辆卡车不装货物以 59 km/h 的速度行驶时，从踩刹车到停住滑行了 20 m. 如果这辆卡车装着等于车重的货物行驶时，发现前面 20 m 处有障碍物，这时为了能在离障碍物 5 m 以外处停车，最大限制时速应是多少？(结果保留整数，设卡车司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 s)

北京师范大学出版社

习题 1－4

A　组

1. 判断下面四个不等式的解集是否为 $\mathbf{R}$，并说明理由：

(1) $-x^2+x+1\geqslant 0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{5}>0$；

(3) $x^2+6x+10>0$；　　(4) $2x^2-3x+4<0$.

2. 若 $x\in\mathbf{R}$，判断下列结论是否正确，并说明理由：

(1) 不等式 $x^2-16<0$ 的解集是 $\{x|x<4\}$；

(2) 不等式 $x^2\geqslant 4$ 的解集是 $\{x|x>\pm 2\}$；

(3) 不等式 $(x-1)^2<2$ 的解集是 $\{x|1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}\}$；

(4) 设 x_1,x_2 为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根，且 $x_1<x_2$，则不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$.

3. 求下列不等式的解集：

(1) $2x^2-x>0$；　　(2) $3x^2+x-10\leqslant 0$；

(3) $x+20\leqslant x^2$；　　(4) $-2x^2+3x+7<0$.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+3)x+k+3=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 k 的取值范围.

5. 某商店购进一批玩具魔方，若按每个 15 元的价格销售，每天能售出 30 个；若售价每提高 1 元，日销售量则减少 2 个. 为了使这批魔方每天的销售总收入不低于 400 元，销售价格最高是多少？

6. 阅读“4.2 一元二次不等式及其解法”开始时的问题，并判断哪辆汽车违法超速行驶.

B　组

1. 求关于 x 的不等式 $mx^2+(m-1)x-1\leqslant 0$ 的解集，其中 m 是常数.

2. 求下列关于 x 的不等式的解集，其中 a,m 是常数：

(1) $x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$；

(2) $x(x+a-1)\geqslant a$.

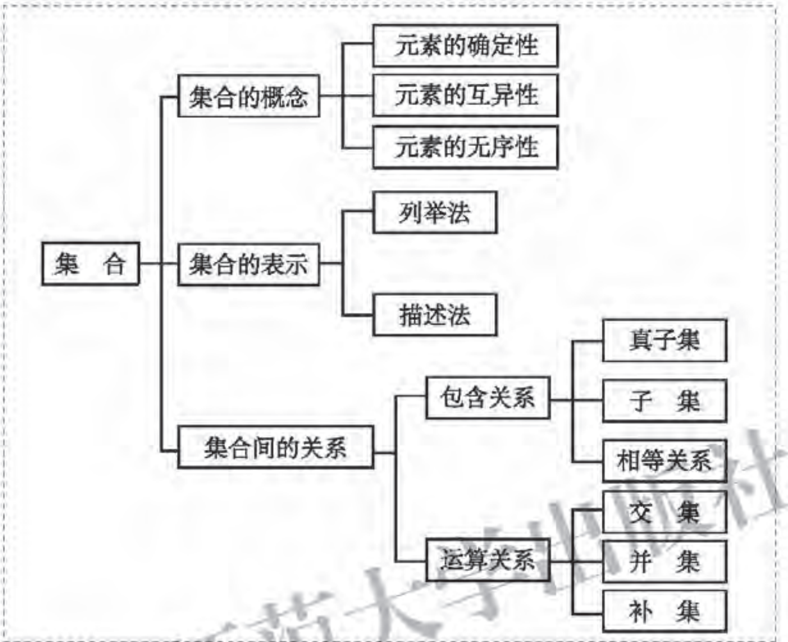
3. 设某水库的最大蓄水量为 128 000 m^3，原有水量为 80 000 m^3，泄水闸每天泄水量为 4 000 m^3，在洪水暴发时，预测注入水库的水量 S_n(单位：m^3)与天数 $n(n\in\mathbf{N},n\leqslant 10)$ 的函数关系是 $S_n=5\,000\sqrt{n(n+24)}$. 若山洪暴发的第一天就打开泄水闸，则这 10 天中堤坝会发生危险吗？若会，计算第几天发生危险；若不会，说明理由.(水库蓄水量超过最大蓄水量时，堤坝会发生危险)

北京师范大学出版社

本章小结

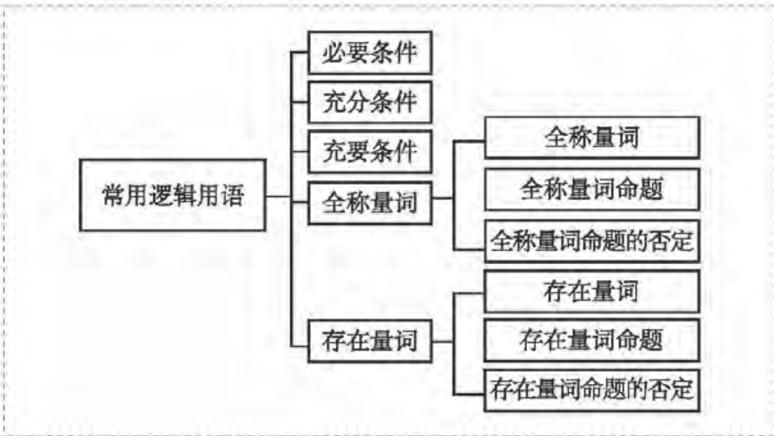
一、知识结构

学会用符号语言确切刻画研究对象.

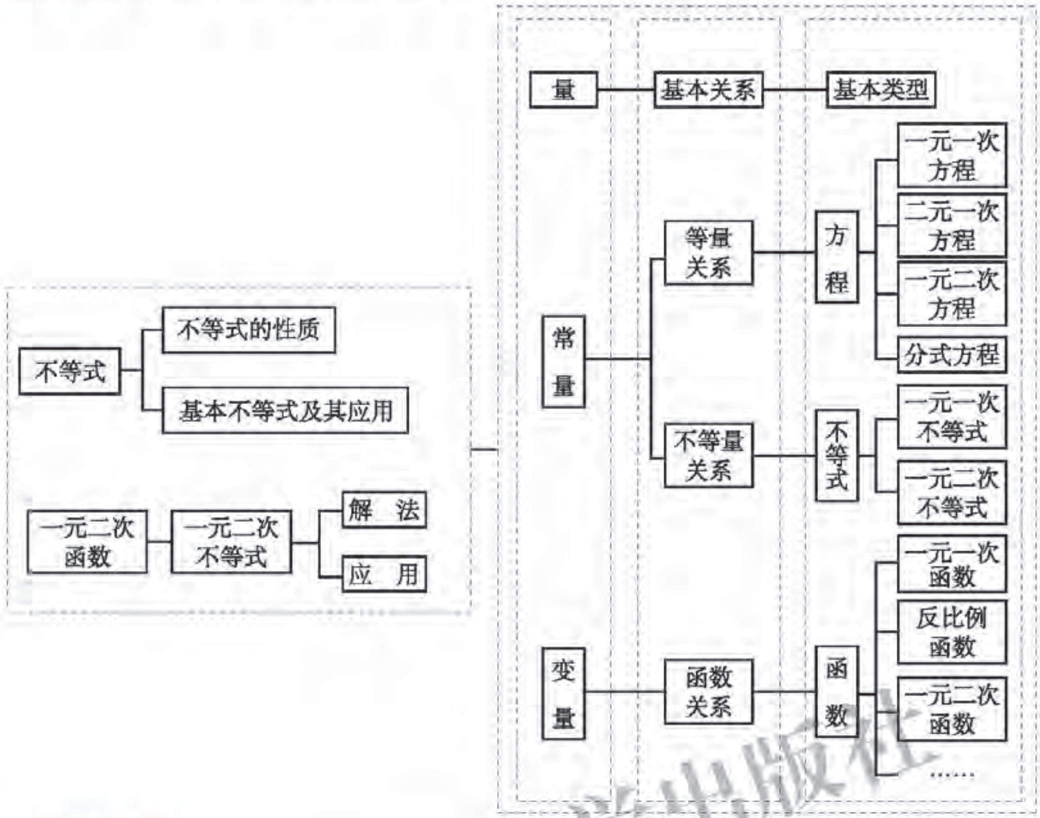


北京师范大学出版社

分析所学概念(定理)之间的逻辑关系,为建立知识体系奠定基础.



学会把学过的知识与新学的内容融为一体，梳理总结形成反映数学的本质的知识网络.



二、学习要求

1. 集合

(1) 集合的概念与表示

① 通过实例，了解集合的含义，理解元素与集合的属于关系.

② 针对具体问题，能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合.

③ 在具体情境中，了解全集与空集的含义.

(2) 集合的基本关系

理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.

(3)集合的基本运算

① 理解两个集合的并集与交集的含义，能求两个集合的并集与交集.

② 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集.

③ 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算，体会图形对理解抽象概念的作用.

2. 常用逻辑用语

常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具，是逻辑思维的基本语言. 本章的学习，可以帮助同学们使用常用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理，体会常用逻辑用语在表述数学内容和论证数学结论中的作用，提高交流的严谨性与准确性.

北京师范大学出版社

（1）必要条件、充分条件、充要条件

① 通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系.

② 通过对典型数学命题的梳理，理解充分条件的意义，理解判定定理与充分条件的关系.

③ 通过对典型数学命题的梳理，理解充要条件的意义，理解数学定义与充要条件的关系.

（2）全称量词与存在量词

通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义.

（3）全称量词命题与存在量词命题的否定

① 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定.

② 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

3. 相等关系与不等关系

相等关系、不等关系是数学中最基本的数量关系，是构建方程、不等式的基础. 本章的学习，可以帮助同学们通过类比，理解等式和不等式的共性与差异，掌握基本不等式.

（1）等式与不等式的性质

梳理等式的性质，理解不等式的概念，掌握不等式的性质.

（2）基本不等式

掌握基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a\geqslant0, b\geqslant0)$. 结合具体实例，能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

4. 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

用函数理解方程和不等式是数学的基本思想方法. 本章的学习，可以帮助同学们用一元二次函数认识一元二次方程和一元二次不等式. 通过梳理初中数学的相关内容，理解函数、方程和不等式之间的联系，体会数学的整体性.

（1）从函数观点看一元二次方程

会结合一元二次函数的图象，判断一元二次方程实数根的存在性及实数根的个数.

（2）从函数观点看一元二次不等式

① 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义. 能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集.

② 借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

三、需要关注的问题

1. 结合初中学习的内容，如何使用集合的语言刻画研究的对象？

2. 结合初中学习的内容，如何使用常用逻辑用语表达研究对象（或结论）之间的逻辑关系？

3. 借助对等量关系的认识，用类比的方法认识不等关系，它们有何共性与差异？

4. 借助“运用一次函数理解一元一次方程、一元一次不等式”，思考一元二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间有什么关系.

复习题一

A 组

1. 在下面每小题列出的选项中，选出符合题目要求的一项，并说明理由.

(1) 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -4<x-1<4$，且 $x\neq 1\}$ 的真子集的个数是(　　).

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

(2) 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{N}_+\mid -2<x<9\}$，$M=\{3,4,5\}$，$P=\{1,3,6\}$，那么 $\{2,7,8\}$ 是(　　).

A. $M\cup \complement_U P$　　B. $\complement_U(M\cap P)$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U P)$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)$

(3) $a+b>2c$ 的一个充分条件是(　　).

A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

(4) 已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是(　　).

A. $a>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$　　B. $a>b>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

C. $a>\dfrac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\dfrac{a+b}{2}>b$

2. 填空：

(1) 被 9 除余 2 的所有整数组成的集合可表示为________；

(2) 不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 0\leqslant x<3\end{cases}$ 的解集为 A，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$________；

(3) 已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$N=\{x\mid x<-1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)=$________；

(4) 满足 $\{x,y\}\cup B=\{x,y,z\}$ 的集合 B 的个数是________；

(5) 已知集合 $A=\{x\mid x<0$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 2\pi\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 与 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的关系是________.

3. 用“充分条件但不是必要条件”“必要条件但不是充分条件”或“充要条件”填空：

(1) “a 是有理数”是“a 是实数”的________；

(2) “$x^2-4=0$”是“$x=-2$”的________；

(3) “$x^2-4=0$”是“$|x|=2$”的________；

(4) “$A\cup B=B$”是“$A=\varnothing$”的________.

4. 写出下列各命题的否定：

(1) $\exists x\in\mathbf{R}$，x 有平方根；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，x 有立方根；

(3) 过直线 l 外一点 A，存在一条直线 m 垂直于 l；

(4) 过直线 l 外一点 A 的任意一条直线 m 与直线 l 有公共点.

5. 求下列不等式的解集：

(1) $2x^2-7x-15<0$；　　(2) $-x^2+4x-3\leqslant 0$；

北京师范大学出版社

(3) $(3x-1)^2-4\leqslant 0$;　　(4) $(3-2x)(x+2)>-4$.

6. 求关于 x 的不等式 $(a-x)(x+2)>0$ 的解集，其中 a 是常数.

7. (1) 把 64 写成两个正数的积，当这两个正数各取何值时，它们的和最小?

(2) 把 24 写成两个正数的和，当这两个正数各取何值时，它们的积最大?

8. 某地区去年用电量为 a kW・h，电价为 0.8 元/(kW・h)，今年计划将电价降到 0.55～0.75 元/(kW・h). 用户心理承受价位是 0.40 元/(kW・h). 下调电价后，实际价位和用户心理价位仍存在差距，假设新增的用电量与这个差值成反比(比例系数为 $0.2a$)，该地区的电力成本价为 0.3 元/(kW・h)，那么电价定为多少时仍可保证电力部门的收益增长率不低于 20%?

B 组

1. 某网店统计连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店：

(1) 第一天售出但第二天未售出的商品有________种;

(2) 这三天售出的商品最少有________种.

2. 某工厂拟造一座平面图(如图)为长方形且面积为 150 m² 的三级污水处理池. 由于地形限制，该处理池的长、宽都不能超过 16 m，且高度一定. 如果四周池壁的造价为 400 元/m²，中间两道隔墙的造价为248 元/m²，池底造价为 80 元/m²，那么如何设计该处理池的长和宽，才能使总造价最低?(池壁的厚度忽略不计)

(第 2 题)

北京师范大学出版社

3. “两组对边分别平行”是“四边形为平行四边形”的充要条件.

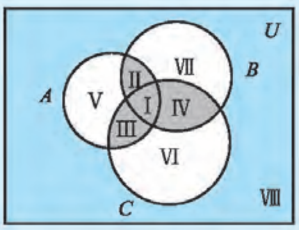
(1) 请尽量多地收集“四边形为平行四边形”的其他充要条件.

(2) 请根据对收集到的充要条件的分析，确定分类原则，并根据确定的原则进行分类.

(3) 结合对上述问题的思考，你对数学概念(定义)的认识有哪些新的体会?

C 组

1. 如图，三个圆形区域分别表示集合 A,B,C. 请用集合 U,A,B,C 分别表示图中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ八个部分所表示的集合.



(第 1 题)

2. 证明：“$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根”的充要条件是“$a+b+c=0$”.

学习指导

数学文化

学习数学，需要深入理解数学基础知识，掌握基本技能，感悟知识和技能中蕴含的数学思想，积累数学活动经验；需要不断发现、提出、分析和解决问题，做中学；除此之外，有时候还需要从具体学习对象中“跳”出来，对比其他学科，站在人类生活、科学技术、社会发展中，把数学作为人类文明的重要组成部分，从文化的角度来认识、理解、欣赏数学，体会数学的特点和作用，感悟数学的价值.

在中国数学教育发展中，孙小礼是最早注意数学文化的学者之一. 在她和邓东皋等 1992 年合编的《数学与文化》一书中汇集了许多数学名家的有关论述，从自然辩证法研究的角度记录了对数学文化的思考. 此外，齐民友从数学发展的历史阐述数学的文化价值，特别指出了数学思维的文化意义；有很多学者从数学推动人类文明、社会进步、科技发展的角度，揭示了数学的作用；2001 年顾沛在南开大学开设了“数学文化”课程，他从教育的角度普及数学文化. 这些工作都能帮助人们更全面、更深刻地理解数学.

进入 21 世纪之后，数学文化进入中小学教材，融入日常教学与学习，引导同学们不仅掌握数学知识、技能，更重要的是开拓见识. 本教材把数学文化的渗透作为教材建设重点之一，我们将结合学习的内容，介绍数学的思想、精神、语言、方法、观点；将从历史上考察数学的进步，数学在人类文明建设中所发挥的不可替代的作用；将介绍在社会进步、科学技术发展中，一些伟大的数学家所做出的贡献，以及他们所从事的文化活动；将与同学们一起反思数学教育在理性思维、智力发展中所发挥的作用. 每个国家都有自己的文化，也就一定有属于这个文化的数学. 如古希腊的数学和中国传统数学都有辉煌的成就、优秀的传统. 但中国的古代数学多半以“管理数学”的形式出现，目的是为了实现丈量田亩、兴修水利、分配劳力、计算税收、运输粮食等国家管理的目标，这些成就展现在《九章算术》等著作中，像负数的运用、开根法解方程、杨辉三角、祖冲之的圆周率计算、天元术等都是中国的贡献.

北京师范大学出版社

站在文化高度欣赏数学，会拉近同学们与数学的距离，会使数学变得更加亲切、平易近人，会让大家喜欢数学、热爱数学. 我们希望通过数学文化渗透，让同学们在学习数学过程中真正受到文化感染，产生文化共鸣，体会数学的文化品位，感悟社会文化和数学文化之间的互动，感悟中国文化兼收并蓄、海纳百川的胸怀，形成文化自信.

2 第二章 函 数

现实世界充满着变量，一些变量之间存在着依赖关系，函数是揭示变量间依赖关系的重要的数学概念，它是现代数学最基本的概念，在解决实际问题中发挥着重要作用.

函数已经成为高中数学课程的主线，贯穿高中数学学习始终.

本章在复习初中函数概念的基础上，以集合、对应的观点研究函数，加深对函数概念的理解，形成完整的认识；并通过具体实例，讨论一般函数的表示法和基本性质，为高中数学的学习打下基础，提升数学抽象和直观想象等核心素养.

北京师范大学出版社

函数的概念应该成为数学思维的心脏和灵魂，渗透到数学课程的每一个部分.

——克莱因(Christian Felix Klein，1849—1925)

§ 1 生活中的变量关系

例 1 图 2－1 是某高速公路加油站的图片，加油站在地下常用圆柱体储油罐储存汽油等燃料. 储油罐的长度 d、截面半径 r 是常量，油面高度 h、油面宽度 w、储油量 V 是变量.

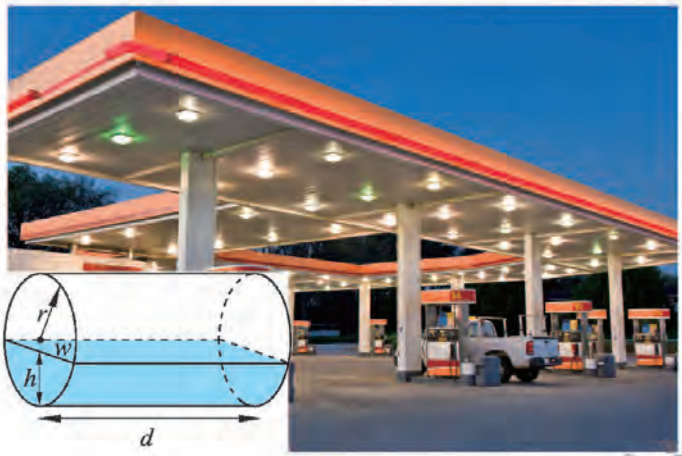


图 2－1

储油量 V 与油面高度 h 存在着依赖关系，也与油面宽度 w 存在着依赖关系.

对于油面高度 h 的每一个取值，都有唯一的储油量 V 和它对应. 但是，取一个油面宽度 w 的值，却对应着两个储油量 V.

北京师范大学出版社

例 2 自 2008 年京津城际列车开通运营以来，高速铁路在中国大陆迅猛发展. 截至 2017 年年底，中国高铁运营里程突破 25 000 km. 图 2－2 表示的是中国高铁年运营里程的变化.

高铁列车

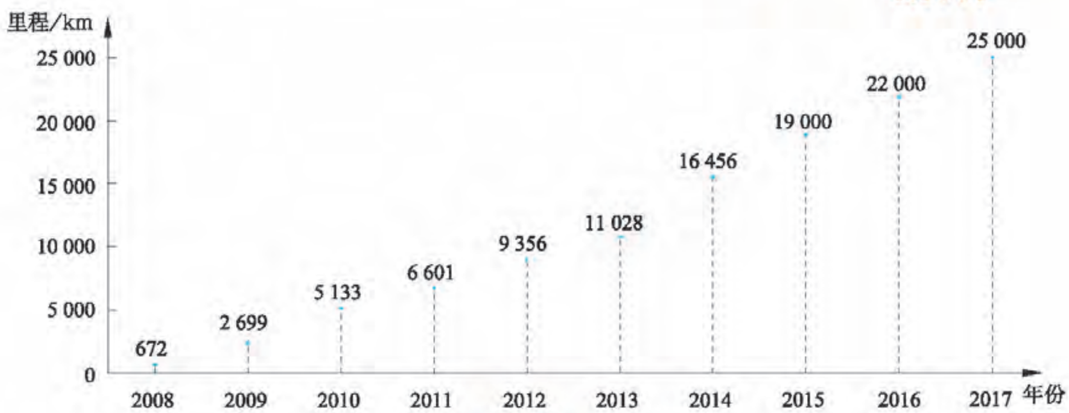


图 2－2

观察图 2－2，不难看出：

(1) 随着时间的变化，高铁运营里程在变化，它与年份存在着依赖关系；

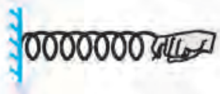
(2) 从 2008 年到 2017 年，高铁年运营里程是不断增加的，与前一年相比，2014 年增长得最多.

在初中数学中，我们曾学习过：如果在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量.

在现实生活中，凡是要确定两个变量具有函数关系，就要判断“对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应”.

依照这个概念，在以上两个例题中，储油量 V 是油面高度 h 的函数，高铁运营里程是年份时间的函数，但储油量 V 不是油面宽度 w 的函数.

例 3 弹簧的伸长量 x 与弹力 y 满足函数关系 $y=kx$，其中 k 为劲度系数. 对于变量“伸长量”的每一个值，变量“弹力”都有唯一确定的值和它对应，弹力 y 是伸长量 x 的函数.



例 4 表 2－1 记录了几个不同气压下水的沸点：

表 2－1

气压/(10^5 Pa)	0.5	1.0	2.0	5.0	10
沸点/℃	82	100	121	152	180

对于变量“气压”的每一个值，变量“沸点”都有唯一确定的值和它对应，沸点是气压的函数.

例 5 绿化可以改变小环境气候. 某市有甲、乙两个气温观测点，观测点甲的绿化优于观测点乙，图 2－3 是这两个观测点某一天的气温曲线图. 为了方便比较，将两条曲线画在了同一平面直角坐标系中. 每一条曲线都表示了一个函数关系，反映的都是对于“时间”的每一个值，都有唯一确定的“气温”值和它对应.

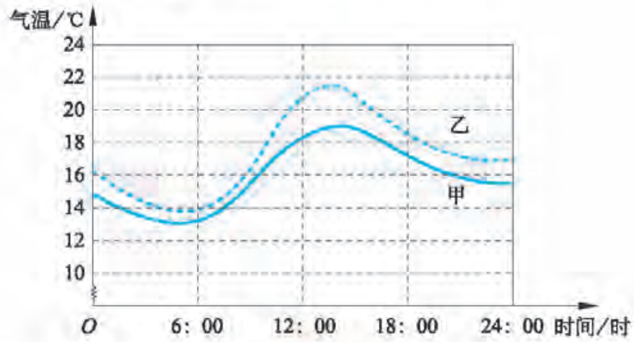


图 2－3

北京师范大学出版社

例 6 某地电力公司为鼓励市民节约用电，采取阶梯电价，即按月用电量分段计费办法. 居民每月应缴电费 y(单位:元)与用电量 x(单位:kW·h)的关系是

$$y=\begin{cases}0.488\,3x, 0\leqslant x\leqslant 240,\\ 0.538\,3x-12, 240<x\leqslant 400,\\ 0.788\,3x-112, x>400.\end{cases}$$

对于变量"用电量(x)"的每一个值，变量"应缴电费(y)"都有唯一的值与之对应，所以应缴电费是用电量的函数，如图 2-4.

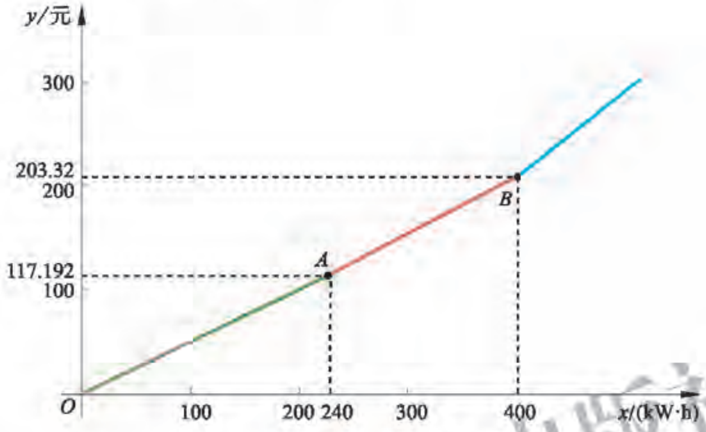


图 2-4

形如上述的函数，一般叫作**分段函数**. 在生活中，有很多可用分段函数描述的实际问题，如出租车的计费、个人所得税的税率等.

生活中存在着许许多多的函数关系. 在很多时候，正是函数概念中的关键词"每一个""唯一""对应"恰当地反映了事物特征. 例如：

一定量的水银，温度与其体积间存在函数关系，温度越高，水银的体积越大. 因此，可以用这个体积表示温度，这就是制造温度计的依据.

在银行，给定本金和利率后，活期存款的利息依存款的天数而定，利息是天数的函数，天数越多，利息就越多.

在田径比赛时，铅球运动员的掷远距离和出手速度、出手角度、出手高度均有关系. 当出手速度和出手高度确定之后，调整好出手角度，会使铅球掷得更远一些. 这时，运动员的掷远距离是出手角度的函数.

思考交流

1. 在例 1 储油罐的问题中还有很多量，如储油罐长度、油面面积等. 找出这些量中的常量和变量，并指出哪些变量之间是函数关系.

2. 选定超市、邮局、公路或其他一个场景，观察分析其中有哪些常量和变量，哪些变量之间是函数关系?

练 习

1. 某电器商店以 2 000 元/台的价格购进了一批电视机，然后以 2 100 元/台的价格售出. 随着售出台数的变化，商店的利润是怎样变化的？利润和售出的台数之间存在函数关系吗？
2. 坐电梯时，电梯距地面的高度与时间之间存在怎样的依赖关系？
3. 在一定量的水中加入蔗糖，糖水的质量分数与所加蔗糖的质量之间存在怎样的依赖关系？

习题 2－1

A 组

1. 下列变化过程中，变量之间存在怎样的依赖关系？其中哪些是函数关系？
   (1) 地球绕太阳公转的过程中，二者间的距离与时间的关系；
   (2) 在空中做斜抛运动的铅球，铅球距地面的高度与时间的关系；
   (3) 某超市一天的销售额与客流量之间的关系；
   (4) 某十字路口，通过汽车的数量与时间的关系；
   (5) 往烧杯中注水，杯中水的体积与注水时间的关系；
   (6) 抛掷一枚均匀硬币的次数与硬币正面朝上的次数之间的关系.
2. 在物理、化学等学科中，找出有函数关系的例子.
3. 找出五个以上生活中的函数关系的实例，并与同学交流.

B 组

1. 找出一个生活实例，说明两个变量之间存在依赖关系，但不是函数关系.

北京师范大学出版社

§2 函 数

2.1 函数概念

在初中，我们用函数刻画、分析了具体的“弹力”“匀速运动”等实际问题之后，学习了它们的一般形式——正比例函数. 正比例函数舍去了“弹力”“匀速运动”等实际背景，强化了数与数之间的对应关系，是抽象的函数模型.

初中学习了三个重要的函数类型：一次函数 $y=kx+b$、一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 和反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，其中 k,a,b,c 为常数，且 $k\neq 0, a\neq 0$. 对于每一个 x 的取值，都有唯一确定的 y 值和它对应，这是函数的基本特征.

现在，借助集合语言，给出如下的函数定义：

给定实数集 $\mathbf{R}$ 中的两个非空数集 A 和 B，如果存在一个对应关系 f，使对于集合 A 中的每一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就把对应关系 f 称为定义在集合 A 上的一个**函数**，记作 $y=f(x), x\in A$. 其中集合 A 称为函数的**定义域**，x 称为自变量，与 x 值对应的 y 值称为**函数值**，集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数的**值域**.

在这里，函数概念强调了数与数之间的对应关系，并且对应关系指的是对应的结果，而不是对应的过程. 比如，$y=\begin{cases}1, x>0,\\ -1, x<0\end{cases}$ 与 $y=\frac{x}{|x|}$ 是同一个函数.

一般情况下，当没有指明函数的定义域时，就认为它的定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围，如 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域就是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 如果涉及实际问题，函数的定义域还必须使实际问题有意义，如描述弹簧的伸长量 x 与弹力 y 的函数 $y=kx$，由于自变量 x 是伸长量，定义域就不可能包含负数了.

用 $f(a)$ 表示函数 $f(x)$ 当 $x=a$ 时的函数值. 例如，对于函数 $f(x)=3x^2+2x-1$ 来说，$f(5)=3\times 5^2+2\times 5-1=84$，其中 84 就是函数 $f(x)$ 当 $x=5$ 时的函数值.

例 1 下列各组中的两个函数是否为同一个函数？

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x)=x^2, g(x)=(x+1)^2$；

(3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}, g(x)=x-1$；

(4) $f(x)=x+\frac{1}{x}, g(t)=t+\frac{1}{t}$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，两个函数的定义域不同，所以不是同一个函数；

(2) 因为两个函数的对应关系不同，所以不是同一个函数；

(3) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $\{x \mid x \neq -1\}$，$g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，两个函数的定义域不同，所以不是同一个函数；

(4) $f(x)$ 和 $g(t)$ 虽然表示自变量的字母不同，但它们的定义域及对应关系都相同，所以是同一个函数.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=2x+3+\frac{1}{x-1}$；　(2) $y=\sqrt{x+3}+\frac{1}{x}$；　(3) $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{-x-3}$.

解 (1) 为使函数有意义，只需解析式中分式的分母不为零，即 $x-1\neq 0$，解得 $x\neq 1$.

所以函数 $y=2x+3+\frac{1}{x-1}$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 1\}$；

(2) 为使函数有意义，只需解析式中的被开方数非负，且分式的分母不为 0，即 $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x\neq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x\neq 0. \end{cases}$

所以函数 $y=\sqrt{x+3}+\frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x \mid x\geqslant -3, 且\ x\neq 0\}$；

(3) 为使函数有意义，只需解析式中的被开方数非负，即 $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ -x-3\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $x=-3$.

所以函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{-x-3}$ 的定义域是 $\{x \mid x=-3\}=\{-3\}$.

北京师范大学出版社

思考交流

1. 结合本章“§1 生活中的变量关系”中的例 1～例 3，谈谈对“对应关系 f”的理解.
2. 举出几个有关函数的例子，并用定义加以描述，指出函数的定义域和值域.
3. 如何判断两个函数是否是同一个函数？请举例说明.

练　习

1. 求下列函数的函数值：

(1) 已知 $f(x)=5x-3$，求 $f(4)$；　(2) 已知 $g(t)=4t^3+2t-7$，求 $g(2)$；

(3) 已知 $F(u)=u$，$M(u)=6u^2+u-3$，求 $F(3)+M(2)$.

2. (1) 函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\frac{x^2}{x}$ 是同一个函数吗？为什么？

(2) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和 $g(x)=\frac{x}{x^2}$ 是同一个函数吗？为什么？

2.2 函数的表示法

在初中,我们就知道,函数的表示方法通常有**解析法**、**列表法**和**图象法**. 实际上,本章"§1 生活中的变量关系"中的例 3、例 4 和例 5 就是分别用解析法、列表法、图象法表示的函数.

如果一个函数能用解析法表示出来,也就能较便利地利用代数工具研究其性质,如初中学习的一次函数、一元二次函数、反比例函数等都是用解析法表示的.

在实际中,一些非常明确的函数关系很难找到它的解析式,这时就要考虑使用其他方法来表示,通常有列表法、图象法.

列表法直接通过表格读数,不必通过计算,就表示出了两个变量之间的对应值,非常直观. 但任何一个表格内标出的数都是有限个,也就只能表示有限个数值之间的函数关系. 若自变量有无限多个数,则只能给出局部的对应关系.

图象法可以通过图象直观地显示函数的局部变化规律,比如心电图(如图 2-5),很难由图象得到每个自变量取值对应的精确函数值.

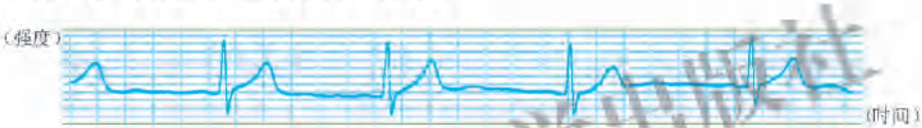


图 2-5

北京师范大学出版社

另外,并非所有的函数都能用图象表示,如狄利克雷函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

为了清楚地表示一个函数关系,需要有针对性地选择适当的表示方法,有时需要多种方法综合运用. 在实际问题中,还常常需要把函数的某种表示方法转化为另一种表示方法.

例 3 画出函数 $y=|x|$ 的图象.

解 由绝对值的意义,可知

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\-x, x<0.\end{cases}$$

其图象为第一、第二象限的角平分线,如图 2-6.

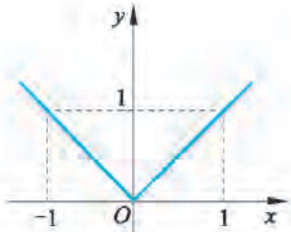


图 2-6

设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$,如当$x=3.14$ 时,$[x]=[3.14]=3$;当 $x=-3.14$ 时,$[x]=[-3.14]=-4$. 于是,我们把 $y=[x]$叫作取整函数.

例 4 画出取整函数$y=[x]$的图象.

解 依题意知函数 $y=[x]$的定义域为 $\mathbf{R}$,值域是 $\mathbf{Z}$.

它的图象如图 2 - 7.

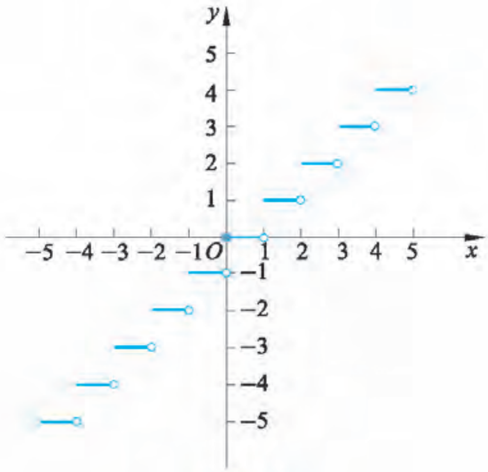


图 2 - 7

思考交流

下列各图都是函数图象吗? 为什么?

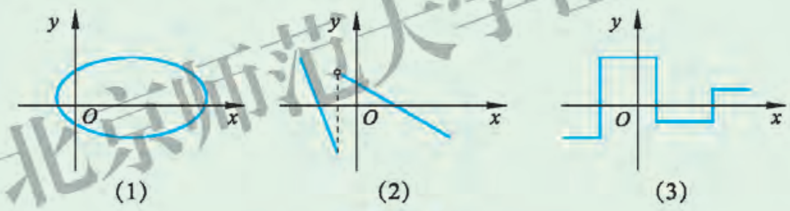


图 2 - 8

练 习

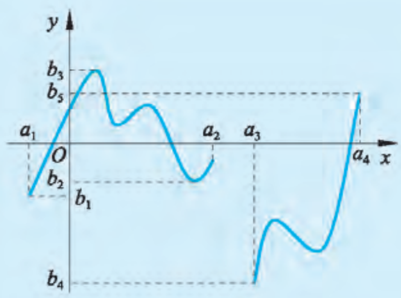
1. 写出下列函数的定义域、值域:

(1) $f(x)=3x+5$;

(2) $f(x)$的图象如右图;

(3) $f(x)$与 x 的对应关系如下表:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512



(第 1 题)

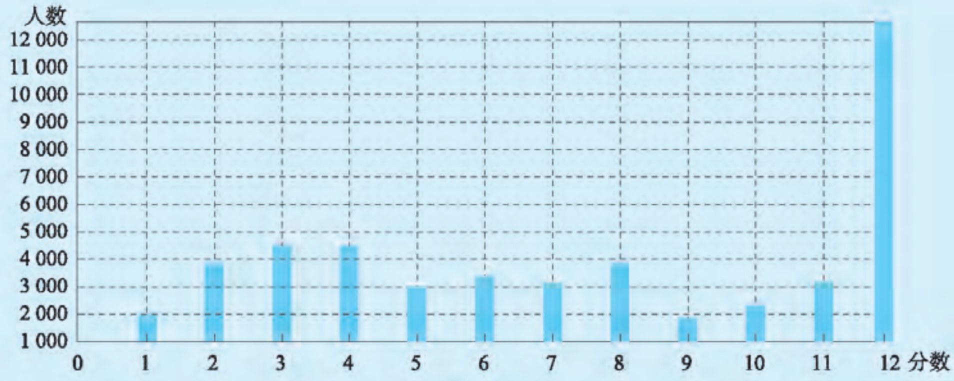
2. 下表列出的是一份数学测试选择题的答案表.

题 号	13	14	15	16
正确答案	C	A	D	D

它是使用列表法表示的函数吗? 为什么?

北京师范大学出版社

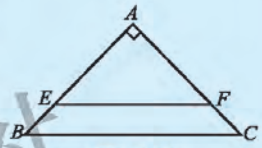
3. 下图是某地区入学考试中一道满分为 12 分试题的成绩分布图，这个图是使用图象法表示的函数吗？为什么？



（第 3 题）

4. 收集一些用列表法表示的函数.

5. 如图，$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形，$AB=AC=1$，点 E，F 分别在边 AB 和 AC 上，且 $EF/\!/BC$. 点 E 从点 A 开始沿线段 AB 向点 B 运动，写出点 A 到线段 EF 的距离 d 与线段 EF 的长度 l 之间的函数解析式，并画出函数图象.



（第 5 题）

北京师范大学出版社

习题 2－2

A　组

1. 函数可以有哪些表示方法？每一个函数关系都有对应的函数解析式吗？每一个函数解析式都有对应的图象吗？

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{3x-2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-2}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-2x-8}$；

(5) $f(x)=\dfrac{|x+3|}{\sqrt{x+1}}$.

3. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=3x-2, x\in(-1,2)$；

(2) $f(x)=x^2-3x+2, x\in[1,+\infty)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x>0,\\ 1-2x, x<0.\end{cases}$

4. 下列哪一组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数?

(1) $f(x)=x^0, g(x)=1$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0,\\ -1, x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, x\neq 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$

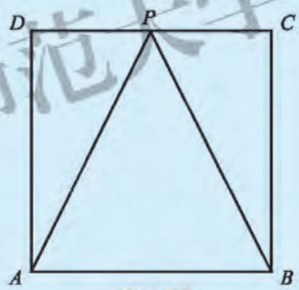
B 组

1. 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{x+3}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$,求函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的定义域.

2. 画出函数 $y=x-[x]$ 的图象.

3. 设集合 $A=\left[0,\dfrac{1}{2}\right), B=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, x\in A,\\ 2-2x, x\in B.\end{cases}$ 已知 $x_0\in A$,且 $f(f(x_0))\in A$,求实数 x_0 的取值范围.

4. 如图,动点 P 从边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的顶点 B 开始,顺次经过点 C, D, A 绕正方形的边界运动,最后回到点 B. 用 x 表示点 P 运动的路程,y 表示 $\triangle APB$ 的面积,求 y 关于 x 的函数解析式.(当点 P 在 AB 上时,规定 $S_{\triangle APB}=0$)



(第 4 题)

北京师范大学出版社

阅读材料

函数概念的起源

17 世纪早期,由于天文学和航海事业的发展,科学家以解释地球和天体运动作为研究课题,推动了函数概念的发展. 意大利科学家伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)第一个提出了函数或称为变量关系的这一概念. 1638 年,伽利略积数十年之力在《关于两个新科学的论述和数学演示》中以对话体裁和较朴素的文笔,总结了他在材料力学和动力学方面的研究成果,以及对力学原理的思考,讲述了几乎包括全部变量关系的这一

概念,用文字和比例的语言表达了函数的关系.

"function(函数)"这个词作为数学术语,最初是由微积分奠基人之一、德国哲学家、数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)在1673年的手稿中首次使用的.莱布尼茨所指的函数是现在的可导函数.1692年,莱布尼茨在《Acta Eruditorum(教师学报)》发表的论文中正式使用函数来表示变量之间的依赖关系.我们可以把莱布尼茨建立的概念看成是函数的第一个定义.

1859年,我国清代数学家李善兰(1811—1882)在翻译《代数学(Elements of Algebra)》时,把"function"译为"函数",他给出的理由是"凡此变数中函彼变数者,则此为彼之函数",即"函"为包含之意.

1905年,哥廷根数学学派的创始人、现代国际数学教育的奠基人、德国数学家克莱因在为中学数学教学起草的《数学教学要目(米兰大纲)》中明确提出:"应将养成函数思想和空间观察能力作为数学教学的基础."1908年,在巴黎国际数学家大会上,他倡导"函数的概念应该成为数学思维的心脏和灵魂,渗透到数学课程的每一个部分".在名著《高观点下的初等数学》中,他进一步强调函数应该成为中学数学的"基石",应该把算术、代数和几何方面的内容,通过几何的形式用以函数为中心的观念综合起来.

我国基础教育真正意义上的函数教学起始于1941年颁布的《修正初级中学数学课程标准》,教学目标中明确规定要"培养学生分析能力、归纳方法、函数观念及探讨精神".目前,函数已经成为中学数学中最基本、最重要的内容.

北京师范大学出版社

思考交流

1. 收集、阅读函数的形成与发展的历史资料.

2. 撰写小论文,论述函数发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献,并与同学交流.

§3 函数的单调性和最值

函数是刻画变量关系的. 研究函数 $y=f(x)$ 时比较关心的问题是：当自变量 x 变化时，函数值 $f(x)$ 随之怎样变化. 我们知道，一元一次函数 $y=kx+b$，当 $k>0$ 时，在 $\mathbf{R}$ 上 y 值随 x 值的增大而增大；当 $k<0$ 时，在 $\mathbf{R}$ 上 y 值随 x 值的增大而减小. 一元二次函数和反比例函数也有类似的性质. 可见，用增大或减小来刻画函数在一个区间的变化是非常重要的.

实例分析

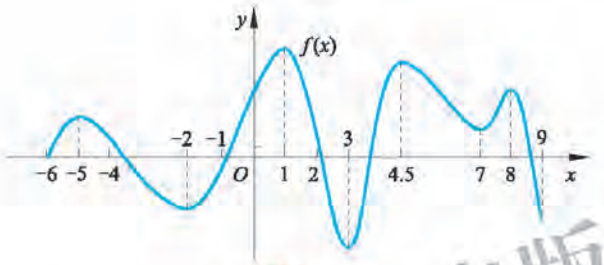


图 2-9

图 2-9 是函数 $f(x)(x\in[-6,9])$ 的图象. 直观上可以看出，对于区间 $[-6,-5]$，$[-2,1]$，$[3,4.5]$，$[7,8]$，每个区间上函数值 $f(x)$ 都随 x 值的增大而增大；对于区间 $[-5,-2]$，$[1,3]$，$[4.5,7]$，$[8,9]$，每个区间上函数值 $f(x)$ 都随 x 值的增大而减小.

北京师范大学出版社

思考交流

图 2-9 中，怎样用数学的符号语言表达函数值 $f(x)$ 在区间 $[-6,-5]$ 上随 x 值的增大而增大呢？

抽象概括

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D：

如果对于任意的 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 是**增函数**. 特别地，当 I 是定义域 D 上的一个区间时，也称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**.

如果对于任意的 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 是**减函数**. 特别地，当 I 是定义域 D 上的一个区间时，也称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上具有**单调性**. 此时，区间 I 为函数 $y=f(x)$ 的**单调区间**.

若存在实数 M，对所有的 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant M$，且存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)=M$，则称 M

为函数 $y=f(x)$ 的**最大值**.

同样地,可以定义函数 $y=f(x)$ 的最小值. 函数的最大值和最小值统称为**最值**.

例 1 设 $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$,画出 $f(x+3)\ (x<-3)$ 的图象,并通过图象直观判断它的单调性.

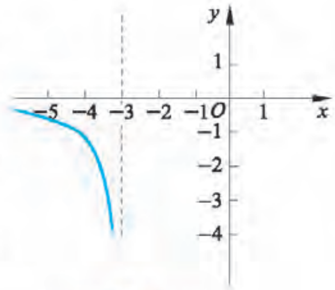


图 2-10

解 依题意知 $f(x+3)=\frac{1}{x+3}(x<-3)$,其图象可由 $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象向左平移 3 个单位长度得到(如图 2-10). 该函数在区间 $(-\infty,-3)$ 上单调递减.

例 2 根据函数图象直观判断 $y=|x-1|$ 的单调性,并求出最小值.

解 函数 $y=|x-1|$ 可以表示为 $y=\begin{cases}1-x, x\leqslant 1,\\ x-1, x>1.\end{cases}$

画出该函数的图象(如图 2-11).

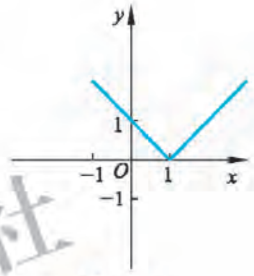


图 2-11

由图象可知该函数在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递减,在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x=1$ 时,$y=|x-1|$ 取得最小值,最小值为 0.

北京师范大学出版社

思考交流

对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 都是它的单调区间,并且函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在这两个区间上都是单调递减,那么能否说函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在整个定义域上是减函数?

练 习

1. 试举出几个有关函数单调性的具体例子.
2. 仿照函数最大值的定义,给出函数 $y=f(x)$ 的最小值的定义.
3. 请根据函数图象直观判断下列函数在给定区间上的单调性,并求出它们的最值:
   (1) $y=-5x, x\in[2,7]$;　　(2) $f(x)=3x^2-6x+1, x\in[3,4)$;
   (3) $f(x)=|x^2-2x|, x\in[-1,3]$.
4. 某型号汽车使用单位体积燃料行驶的路程 $f(x)$(单位:km)是行驶速度 x(单位:km/h)的函数. 由实验可知,这一函数关系是 $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$.
   (1) 求 $f(50)$,并说明它的实际意义;
   (2) 当速度 x 为多少时,汽车最省油?

我们已经感受到，判定函数的单调性时，函数的图象能够起到很大的作用. 严格地说，判定函数的单调性，要依据函数单调性的定义，尤其是用解析法表示的函数，要通过代数运算的结果证明其单调性. 有的函数很复杂，图象很难画出，这时代数运算的价值更加凸显.

例 3 判断函数 $f(x)=-3x+2$ 的单调性，并给出证明.

解 画出函数 $f(x)=-3x+2$ 的图象（如图 2－12）. 由图象可以看出，函数 $f(x)=-3x+2$在定义域 $\mathbf{R}$ 上可能是减函数.

下面利用函数单调性的定义证明这一结论.

任取 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

所以
$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(-3x_1+2)-(-3x_2+2)\\&=-3(x_1-x_2)>0,\end{aligned}$$
即
$$f(x_1)>f(x_2).$$

由函数单调性的定义可知，函数 $f(x)=-3x+2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

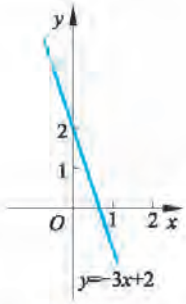


图 2－12

这个证明是在定义域内任取 $x_1<x_2$，通过计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，得到 $f(x_1)>f(x_2)$，从而由函数单调性的定义判断函数 $f(x)=-3x+2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

例 4 判断函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的单调性，并给出证明.

解 画出函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图象（如图 2－13）. 由图象可以看出，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上可能是增函数.

任取 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

由 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，可知 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

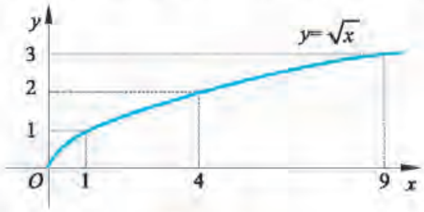


图 2－13

由函数单调性的定义可知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

这个证明是在定义域内任取 $x_1<x_2$，通过计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，得到 $f(x_1)<f(x_2)$，从而由函数单调性的定义判断函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

例 5 试用函数单调性的定义证明：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

证明 任取 x_1，$x_2\in(0,1]$，且 $x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$$
$$=x_1-x_2-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$
$$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$$
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}.$$

因为 $0<x_1<x_2\leqslant 1$，所以 $x_1-x_2<0$，$0<x_1x_2<1$，则 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

这表明函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减.

同理可证，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

在判断函数的单调性时，常常借助其图象，得到猜测. 证明函数 $f(x)$ 在一个区间上的单调性时，通常在这个区间上任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，然后计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，由其值大于 0 或小于 0 来判断 $f(x)$ 在该区间上的增减性.

北京师范大学出版社

练　习

1. 下列说法能否判断函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增？

   (1) 对于任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立；

   (2) 存在 $x_1, x_2\in(a,b)$，使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立；

   (3) 对于任意的 $a<x_1<x_2<\frac{a+b}{2}$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，并且对于任意的 $\frac{a+b}{2}\leqslant x_1<x_2<b$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 也恒成立.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2mx-3$ 在区间 $[1,2]$ 上单调，求实数 m 的取值范围.
3. 证明：函数 $y=2x+3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

习题 2－3

A　组

1. 讨论下列函数在给定区间上的单调性：

   (1) $y=2x-3$，$x\in(-\infty, 0]$；

(2) $y=-4x^2+2x-5, x\in[0, +\infty)$.

2. 求函数 $y=x^2+1$ 在下列各区间上的最值：

(1) $[1,4]$；　　(2) $[-6,-2]$；

(3) $[-2,2]$；　　(4) $[-2,4]$.

3. 已知函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b<0$. 请确定 $f(a)+f(b)$与 $f(-a)+f(-b)$的大小关系，并给出证明.

4. 已知下列函数在给定的区间上单调递减，求实数 k 的取值范围.

(1) $y=kx+2, x\in\mathbf{R}$；

(2) $y=\dfrac{k}{x}, x\in(-\infty,0)$；

(3) $y=kx^2-3x+1, x\in(1,+\infty)$.

5. 证明：函数 $y=1-\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

B　组

1. 探究函数 $f(x)=mx^2+b$ 的单调性，并证明你的结论.

2. 根据函数图象直观判断函数 $y=|x^2-4x+3|$的单调性.

3. 已知函数 $f(x)$对任意实数 x 都有 $f(1+x)=f(1-x)$，并且对任意 $x_1<x_2<1$，总有$f(x_1)<f(x_2)$，比较下列各组值的大小：

(1) $f(1.2)$和 $f(1.5)$；　　(2) $f(-1)$和 $f(3)$；

(3) $f(-2)$和 $f(2)$；　　(4) $f(-\sqrt{2})$和 $f(\sqrt{3})$.

4. 已知函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，下列函数在区间$(0,+\infty)$上是否一定单调递增？

(1) $f(x)+g(x)$；　　(2) $f(x)-g(x)$；

(3) $f(x)\cdot g(x)$；　　(4) $f(x)+[g(x)]^2$.

北京师范大学出版社

§ 4 函数的奇偶性与简单的幂函数

4.1 函数的奇偶性

实例分析

例 1 画出函数 $f(x)=x^3$ 的图象，并观察它的对称性.

解 先列表(如表 2-2)，然后描点、连线，得到函数 $f(x)=x^3$ 的图象(如图 2-14).

表 2-2

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$f(x)=x^3$	…	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	…

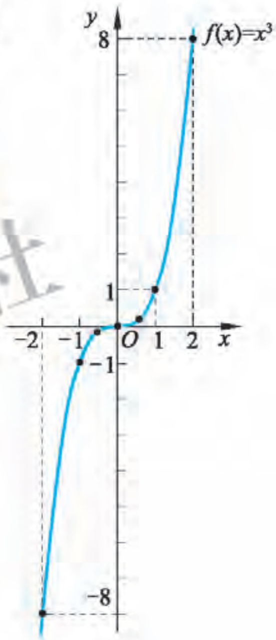


图 2-14

因为对任意的 x，都有

$$(-x)^3=-x^3,$$

即

$$f(-x)=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^3$ 的图象关于原点对称.

我们还知道，对任意的 x，都有

$$(-x)^2=x^2.$$

因此，对函数 $g(x)=x^2$ 来说，总有

$$g(-x)=g(x),$$

所以函数 $g(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称(如图 2-15).

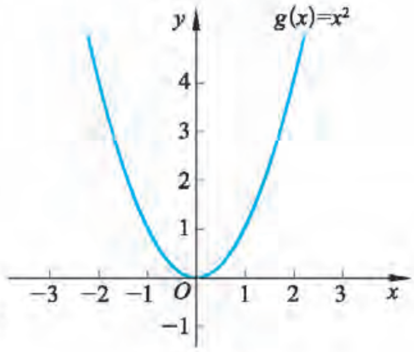


图 2-15

抽象概括

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域是 A，如果对任意的 $x\in A$，有 $-x\in A$，且 $f(-x)=-f(x)$，那么称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 奇函数的图象关于原点对称，反之亦然.

设函数 $f(x)$ 的定义域是 A，如果对任意的 $x\in A$，有 $-x\in A$，且 $f(-x)=f(x)$，那么称函数 $f(x)$ 为**偶函数**. 偶函数的图象关于 y 轴对称，反之亦然.

当函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数时，称 $f(x)$ 具有**奇偶性**. 奇函数和偶函数的定义域均关于

北京师范大学出版社

原点对称,如$(-\infty,+\infty)$,$(-a,a)$,$[-a,a](a>0)$等.

在研究函数时,如果知道它是奇函数或偶函数,就可以先研究它在非负区间上的性质,然后再利用对称性便可知它在非正区间上的性质,从而减少工作量.

1727年,欧拉(Léonhard Euler, 1707—1783)在提交给圣彼得堡科学院的旨在解决"反弹道问题"的一篇论文中,首次提出了奇偶函数的概念,其依据是正整数幂函数的指数的奇偶性.

例2 根据定义,判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=-2x^5$;　　(2) $g(x)=x^4+2$;

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$;　　(4) $m(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

解 (1) 依题意知函数 $f(x)=-2x^5$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(-x)=-2(-x)^5=2x^5,-f(x)=-(-2x^5)=2x^5,$$

即
$$f(-x)=-f(x).$$

所以函数 $f(x)=-2x^5$ 是奇函数.

(2) 依题意知函数 $g(x)=x^4+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有

$$g(-x)=(-x)^4+2=x^4+2,$$

即
$$g(-x)=g(x).$$

所以函数 $g(x)=x^4+2$ 是偶函数.

(3) 依题意知函数 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$的定义域为$\{x|x\neq0\}$,且对任意的 $x\in\{x|x\neq0\}$,有

$$h(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2},$$

即
$$h(-x)=h(x).$$

所以函数 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$是偶函数.

(4) 根据定义知,如果一个函数是奇函数或偶函数,它的定义域是关于原点对称的.而函数 $m(x)=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为$\{x|x\neq-2\}$,它不关于原点对称,所以函数 $m(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

4.2 简单幂函数的图象和性质

我们已经熟悉,$y=x$ 是正比例函数,$y=\dfrac{1}{x}$是反比例函数,$y=x^2$是一元二次函数,还有 $y=\sqrt{x}$,$y=x^3$,它们都是简单的幂函数.这里的 $y=\dfrac{1}{x}$和 $y=\sqrt{x}$在今后的学习中可以分别写成 $y=x^{-1}$和 $y=x^{\frac{1}{2}}$.一般地,形如 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)的函数,即底数是自变量、指数是常数的函数称为**幂函数**.

思考交流

1. 你画过 $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ 的图象吗？请将这5个函数的图象画在同一平面直角坐标系中，并填写表2-3.

表2-3

	$y=x$	$y=\dfrac{1}{x}$	$y=x^2$	$y=\sqrt{x}$	$y=x^3$
定义域					
值　域					
单调性					
奇偶性					

2. 在图2-16中，只画出了函数在 y 轴某一侧的图象，请你画出函数在 y 轴另一侧的图象，并说出画法的依据.

图2-16

北京师范大学出版社

练　习

1. 画出下列函数的图象，并判断其奇偶性：

(1) $f(x)=-\dfrac{3}{x}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$;

(3) $f(x)=2(x+1)^2+1$.

2. 构造出3个不同的奇函数.

习题 2-4

A 组

1. 根据定义证明：函数 $f(x)=3x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

2. 根据定义证明：函数 $f(x)=x^2+x^4$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是偶函数.

3. 判断下列函数的奇偶性，并加以证明：

(1) $f(x)=3x-x^3$；

(2) $f(x)=x^2+2x+1$；

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^2$；

(4) $f(x)=\frac{1}{x}+x$；

(5) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$；

(6) $f(x)=\frac{|x|}{x}$；

(7) $f(x)=\begin{cases}-x, x<-1, \\ 1, -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x, x>1;\end{cases}$

(8) $f(x)=\begin{cases}-(x+1)^2-1, x<-1, \\ x, -1\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)^2+1, x>1.\end{cases}$

4. 构造出 3 个不同的偶函数.

B 组

1. 下列函数中，哪些满足性质 T_1：$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 或 T_2：$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{x}$；

(2) $f(x)=x^3$；

(3) $f(x)=2x$；

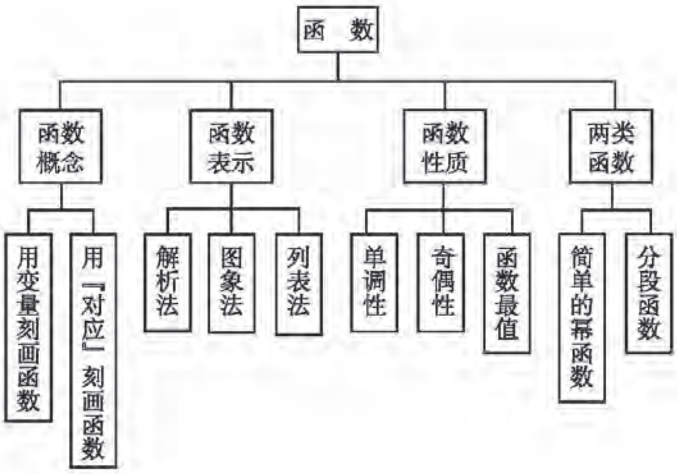
(4) $f(x)=1$；

(5) $f(x)=\frac{1}{x}$.

北京师范大学出版社

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

1. 函数概念与性质

(1) 函数概念

① 在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系刻画函数，建立完整的函数概念，体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用. 了解构成函数的要素，能求简单函数的定义域.

② 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数，理解函数图象的作用.

③ 通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用.

(2) 函数性质

① 借助函数图象，会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值，理解它们的作用和实际意义.

② 结合具体函数，了解奇偶性的概念和几何意义.

*(3) 函数概念的形成与发展

收集、阅读函数的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述函数发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

2. 幂函数

幂函数是一类最基本的、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础. 本章的学习，可以帮助同学们学会用函数图象和代数运算的方法研究函数的性质；理解函数中所蕴含的运算规律；运用函数建立模型，解决简单的实际问题，体会函数在解决实际问题中的作用.

北京师范大学出版社

通过具体实例，结合 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^3$ 的图象，理解它们的变化规律，了解幂函数.

三、需要关注的问题

1. 既然初中已经学过了函数概念，为什么在高中还要学习函数概念？

2. 函数图象给我们提供了函数的一种直观表示，虽然它不可能做到像解析式那样精确，但在粗略考察函数性质时，图象的优势比较明显. 回顾一下你认识函数的过程，其中图象发挥了怎样的作用？

3. 怎么理解函数的三种表示法各自的优势和不足？

4. 函数的基本性质有哪些？你认为哪个性质最重要？为什么？

北京师范大学出版社

复习题二

A 组

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$；

(3) $y=\dfrac{1}{|x|-1}$；

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

2. 求下列函数的函数值：

(1) 已知 $f(x)=3x-2$，求 $f\left(f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$；

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\geqslant 0,\\ x+2, x<0,\end{cases}$ 求 $f(-5)$，$f(f(-1))$；

(3) 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，$g(x)=-x+3$，求 $f(g(2))$，$g(f(2))$.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

4. 为了鼓励居民节约用气，某市对燃气收费实行阶梯计价，普通居民一般生活用气价格划分为三档：

第一档：每户每年的用气量不超过 350 m^3 时，执行 a 元/m^3 的价格；

第二档：每户每年的用气量超过 350 m^3，且不超过 500 m^3 的部分，执行 b 元/m^3 的价格；

第三档：每户每年的用气量超过 500 m^3 的部分，执行 c 元/m^3 的价格.

(1) 请写出普通居民一般生活用气的年度费用 y(单位：元)关于年度的用气量 x(单位：m^3)的函数解析式；

(2) 已知某户居民的用气价格 1 月—7 月按照第一档执行，8 月—10 月按照第二档执行，11 月—12 月按照第三档执行，且 7 月、9 月、12 月的用气量与缴费情况如下表，求 a，b，c 的值.

月　份	用气量/m^3	燃气费用/元
7	40	105.2
9	50	142.5
12	30	127.5

5. 试根据下面的“某水库蓄水量与水深的对照表”，分析水库的蓄水量 y(单位：m^3)随水深 x(单位：m)变化的趋势，并用图象表示出来，据此估计蓄水量为 2 000 000 m^3 时的水深.

水深/m	0	5	10	15	20	25	30	35
蓄水量/m^3	0	200 000	400 000	900 000	1 600 000	2 750 000	4 375 000	6 500 000

北京师范大学出版社

B 组

1. 对于三角形,你可能想到哪些量?如果一个三角形的周长不变,那么它的内切圆半径与面积之间是不是函数关系?如果是函数关系,请写出函数关系式.你还能举出其他的函数例子吗?

2. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$[0,2]$,求函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$的定义域.

3. 已知函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$的最小值为 3,求实数 a 的值.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求证:

   (1) $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}(x\neq\pm1)$;

   (2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)(x\neq-1$,且 $x\neq0)$.

5. 函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$可以看作两个幂函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$的差,请通过函数图象讨论这个函数的函数值符号的变化情况和单调性.

6. 初中学过哪些类型的函数?那时是怎样认识函数单调性的?经历了高中函数的研究,你对函数单调性有什么新的理解?

7. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x-a)$是偶函数,求实数 a 的值.

8. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$是偶函数,求证:$g(x)=ax^3+bx^2+cx(a\neq0)$是奇函数.

北京师范大学出版社

C 组

1. (1) 计算$(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

   (2) 求证:$f(x)=-x^3+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

2. 若函数 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$,且对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$成立,试判断 $f(x)$的奇偶性.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+3a,x\geqslant0,\\x^2-ax+1,x<0\end{cases}$在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数,求实数 a 的取值范围.

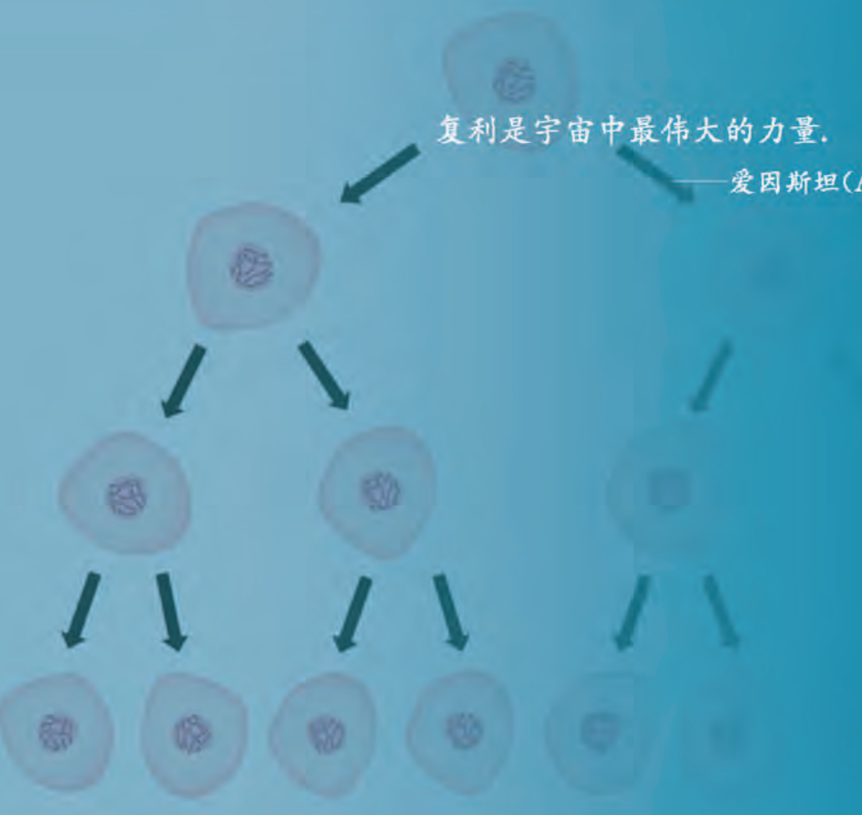
北京师范大学出版社

3 第三章 指数运算与指数函数

1987 年 7 月 11 日，地球人口达到 50 亿. 1990 年，联合国将每年 7 月 11 日定为“世界人口日”，以唤起人们对人口问题的关注. 1999 年和 2011 年世界人口分别达到 60 亿和 70 亿. 最新预测认为，世界人口在 2050 年将达到 98 亿，到 21 世纪末可能超过 110 亿. 在描述人口变化的规律、估计若干年后的人口总数时，往往会用到“指数增长”这一术语，它与指数函数的知识有关. 指数函数是一类重要的函数模型.

本章我们将把初中学习的整数指数幂拓展为实数指数幂，定义在实数集上的指数运算；同时，给出指数函数的概念，研究指数函数的图象和性质，提升数学运算和直观想象等核心素养.

北京师范大学出版社



复利是宇宙中最伟大的力量.

——爱因斯坦(Albert Einstein，1879—1955)

§1 指数幂的拓展

在初中，我们学习了整数指数幂. 给定正数 a 和正整数 n，有

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}},$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},$$

$$a^0=1.$$

在实际问题中，指数幂中的指数不一定都是整数.

问题提出

薇甘菊是热带、亚热带地区危害最严重的杂草之一，它所到之处，树木枯萎、花草凋零. 经测算，薇甘菊的侵害面积 S(单位：hm^2) 与年数 t 满足关系式 $S=S_0\cdot 1.057^t$，其中 S_0(单位：hm^2) 为侵害面积的初始值.

根据上述关系式，可以计算出10年后薇甘菊的侵害面积是 $S_0\cdot 1.057^{10}$ hm^2，其中 1.057^{10} 是整数指数幂的形式. 那么经过15.5年，薇甘菊的侵害面积是多少？可以表示为 $S_0\cdot 1.057^{\frac{31}{2}}$ hm^2 吗？如果可以，数 $1.057^{\frac{31}{2}}$ 表示什么含义呢？

抽象概括

给定正数 a 和正整数 m,n($n>1$，且 m,n 互素)，若存在唯一的正数 b，使得 $b^n=a^m$，则称 b 为 a 的 $\frac{m}{n}$ 次幂，记作 $b=a^{\frac{m}{n}}$. 这就是**正分数指数幂**.

例如，若 $b^5=2$，则 $b=2^{\frac{1}{5}}$；若 $t^6=5^{13}$，则 $t=5^{\frac{13}{6}}$.

若 $a^2=1.057^{31}$，则 a 就表示“问题提出”中的数 $1.057^{\frac{31}{2}}$，即 $a=1.057^{\frac{31}{2}}$.

当 k 是正整数时，分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 满足：

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{km}{kn}}.$$

有时，也把 $a^{\frac{m}{n}}$ 写成 $\sqrt[n]{a^m}$ 的形式. 例如，$8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$.

需要强调的是，在指数幂的概念中，总有 $a>0$. 于是，尽管有 $\sqrt[3]{-27}=-3$，但不可以写成 $(-27)^{\frac{1}{3}}=-3$ 的形式.

例 1 把下列各式中的正数 b 写成正分数指数幂的形式：

(1) $b^5=20$；　　(2) $b^4=2^5$；

(3) $b^n=3^m(m,n\in\mathbf{N}_+)$；　　(4) $b^{3n}=\pi^{9m}(m,n\in\mathbf{N}_+)$.

解 (1) $b=20^{\frac{1}{5}}$；　　(2) $b=2^{\frac{5}{4}}$；

(3) $b=3^{\frac{m}{n}}$；　　(4) $b=\pi^{\frac{9m}{3n}}=\pi^{\frac{3m}{n}}$.

类似负整数指数幂的定义，可以定义负分数指数幂. 给定正数 a 和正整数 $m,n(n>1$，且 m,n 互素)，定义

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

至此，指数幂已经从整数指数幂拓展到有理数指数幂了.

例 2 计算：

(1) $4^{\frac{3}{2}}$；　　(2) $27^{-\frac{1}{3}}$；　　(3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

解 (1) 设 $b=4^{\frac{3}{2}}$，由定义，得 $b^2=4^3=64$，$b=8(b>0)$，所以 $4^{\frac{3}{2}}=8$.

(2)由负分数指数幂的定义，得$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{27^{\frac{1}{3}}}$.

设 $b=27^{\frac{1}{3}}$，由定义，得 $b^3=27$，$b=3$，所以$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

(3) 由负分数指数幂的定义，得$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

设 $b=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$，由定义，得 $b^2=\left(\frac{1}{16}\right)^3=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^3=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^2=\left(\frac{1}{64}\right)^2$，即 $b=\frac{1}{64}(b>0)$，

所以$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}=64$.

北京师范大学出版社

问题提出

指数幂的范围还可以拓展到无理数指数幂吗？

分析理解

下面以 $10^{\sqrt{2}}$ 为例来认识无理数指数幂.

因为无理数$\sqrt{2}=1.414\ 213\cdots$，所以

$1.4<1.41<1.414<1.414\ 2<1.414\ 21<\cdots<\sqrt{2}<\cdots<1.414\ 22<1.414\ 3<1.415<$

$1.42<1.5$.

上述不等式中，$\sqrt{2}$左边的数称为$\sqrt{2}$的不足近似值，$\sqrt{2}$右边的数称为$\sqrt{2}$的过剩近似值.

把以 10 为底数、$\sqrt{2}$的不足近似值为指数的各个幂，由小到大排成一列数

$$10^{1.4},10^{1.41},10^{1.414},10^{1.4142},10^{1.41421},\cdots$$

同样，把以 10 为底数、$\sqrt{2}$的过剩近似值为指数的各个幂，由大到小排成一列数

$$10^{1.5},10^{1.42},10^{1.415},10^{1.4143},10^{1.41422},\cdots$$

借助计算器，可以得到表 3－1.

表 3－1

$\sqrt{2}$的不足近似值		$\sqrt{2}$的过剩近似值	
α	10^{α}	10^{α}	α
1.4	25.118 864 31…	31.622 776 60…	1.5
1.41	25.703 957 82…	26.302 679 91…	1.42
1.414	25.941 793 62…	26.001 595 63…	1.415
1.414 2	25.953 743 00…	25.959 719 76…	1.414 3
1.414 21	25.954 340 62…	25.954 938 25…	1.414 22
…	…	…	…

从表 3－1 可以看出，$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值相同的位数越多，即$\sqrt{2}$的近似值精确度越高，以其不足近似值和过剩近似值 α 为指数的幂 10^{α} 会越来越趋近于同一个数，我们把这个数记为 $10^{\sqrt{2}}$，即 $10^{\sqrt{2}}=25.954\cdots$.

一般地，给定正数 a，对于任意的正无理数 α，可以用类似的方法定义一个实数 a^{α}.

自然地，规定：

$$a^{-\alpha}=\frac{1}{a^{\alpha}}.$$

例如，$1^{-\sqrt{2}}=1$，$10^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$.

这样，指数幂中指数的范围就拓展到了全体实数.

练 习

1. 把下列各式中的 $b(b>0)$ 写成负分数指数幂的形式：

(1) $b^{-3}=32$；　　(2) $b^{-4}=3^{3}$；

(3) $b^{-2n}=\pi^{3m}(m,n\in\mathbf{N}_{+})$.

2. 计算：

(1) $8^{-\frac{1}{3}}$；　　(2) $27^{-\frac{2}{3}}$.

北京师范大学出版社

习题 3－1

A 组

1. 填空：

(1) 27 的 3 次方根表示为________；

(2) a^6 的 3 次方根表示为________；

(3) 16 的 4 次方根表示为________.

2. 计算：

(1) 2^{-3}；　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$；　(3) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$；　(4) $8^{\frac{1}{3}}$；

(5) $16^{\frac{3}{2}}$；　(6) $0.01^{-0.5}$；　(7) $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$；　(8) $1^{-\frac{2}{3}}$.

3. 某型号汽车在行驶 x km 以后蓄电池的存电比例可用下面的关系式表示：

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.000\,15x}.$$

求该型号汽车行驶 10 000 km 和 20 000 km 时的存电比例.

B 组

1. 用分数指数幂表示下列各式(式中的字母均为正实数)：

(1) $\sqrt[3]{m^2}$；　(2) $\sqrt{(m-n)^3}\ (m>n)$；　(3) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$.

北京师范大学出版社

§ 2 指数幂的运算性质

我们知道，整数指数幂有运算性质：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$，$(ab)^m = a^m b^m$，其中 a,b 是正数，m,n 是正整数.

对于这些性质，可以将 m,n 推广到实数. 也就是说，对于任意正数 a,b 和实数 α,β，实数指数幂均满足下面的运算性质：

> (1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$；
>
> (2) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$；
>
> (3) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.

例 1 计算：

(1) $(2^{-3})^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{2})^{-2}$；　　(2) $8^{-\frac{2}{3}} \times (\sqrt{4})^3$；　　(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} - 1^{-\frac{1}{3}}$.

解 (1) $(2^{-3})^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{2})^{-2} = 2^{-3\times\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}\times(-2)} = 2^{-1} \times 2^{-1} = 2^{-1-1} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$；

(2) $8^{-\frac{2}{3}} \times (\sqrt{4})^3 = (2^3)^{-\frac{2}{3}} \times 2^3 = 2^{-2} \times 2^3 = 2^{-2+3} = 2$；

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} - 1^{-\frac{1}{3}} = (3^{-2})^{\frac{1}{2}} + (2^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1^{\frac{1}{3}}} = 3^{-1} + 2^{-1} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{6}$.

例 2 计算：

(1) $\left(\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}\right)^2$；　　(2) $\left[(\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}$；　　(3) $(2^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$.

解 (1) $\left(\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$；

(2) $\left[(\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2} = (\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}\times(-2)} = \sqrt{2}$；

(3) $(2^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

例 3 化简(式中的字母均为正实数)：

(1) $a \cdot a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $(a^{\frac{1}{6}})^{-1} \cdot (a^{-2})^{-\frac{1}{3}}$；　　(3) $(x^{\alpha^{-1}} y)^\alpha \cdot (4y^{-\alpha})$.

解 (1) $a \cdot a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1-2+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $(a^{\frac{1}{6}})^{-1} \cdot (a^{-2})^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$；

(3) $(x^{\alpha^{-1}} y)^\alpha \cdot (4y^{-\alpha}) = (x^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha} y^\alpha) \cdot (4y^{-\alpha}) = (xy^\alpha) \cdot (4y^{-\alpha}) = 4xy^{\alpha-\alpha} = 4x$.

北京师范大学出版社

例 4 已知 $10^{\alpha}=3$，$10^{\beta}=4$，求 $10^{\alpha+\beta}$，$10^{\alpha-\beta}$，$10^{-2\alpha}$，$10^{\frac{\beta}{3}}$ 的值.

解 $10^{\alpha+\beta}=10^{\alpha}\times10^{\beta}=3\times4=12$；

$10^{\alpha-\beta}=10^{\alpha}\times10^{-\beta}=\dfrac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}=\dfrac{3}{4}$；

$10^{-2\alpha}=(10^{\alpha})^{-2}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$；

$10^{\frac{\beta}{3}}=(10^{\beta})^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}$.

例 5 已知实数 α，a，b，且 $a>0$，$b>0$，求证：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$.

证明 根据指数幂的定义和运算性质，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=(ab^{-1})^{\alpha}=a^{\alpha}(b^{-1})^{\alpha}=a^{\alpha}b^{-\alpha}=a^{\alpha}(b^{\alpha})^{-1}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}.$$

北京师范大学出版社

练习

1. 化简(式中的字母均为正实数)：

(1) $3^{2}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}$；　　(2) $(xy^{-1})^{\frac{1}{2}}\cdot(2x^{-\frac{1}{2}})\cdot(3y^{\frac{1}{2}})$.

2. 已知 $10^{\alpha}=2$，$10^{\beta}=3$，把下面的数写成底数是 10 的幂的形式：

(如 $6=2\times3=10^{\alpha}\times10^{\beta}=10^{\alpha+\beta}$)

(1) $\dfrac{2}{3}$；　　(2) 8；

(3) 24；　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

习题 3-2

A 组

1. 化简(式中的字母均为正实数)：

(1) $a\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $(xy^{-1}z^{2})^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\left(\dfrac{16s^{2}t^{-6}}{25r^{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2. 化简(式中的字母均为正实数)：

(1) $a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$；

(2) $(2a^{-1}b^{\frac{3}{2}})\cdot(-3ab)$；

(3) $\dfrac{-15a^{\frac{1}{3}}b^{3}c}{25abc^{\frac{1}{2}}}$；

(4) $\left(\dfrac{4a^{8}}{9b^{6}}\right)^{-\frac{1}{2}}$；

(5) $3x^{\frac{1}{3}}\cdot(2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}})$；

(6) $(-x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}})\cdot(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}})\cdot(-2x^{-\frac{1}{2}}y)$；

(7) $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^{2}$；

(8) $(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}})$.

3. 计算：

(1) $\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$；

(2) $\left[\dfrac{1}{4}\times(0.027^{\frac{2}{3}}+50\times0.001\,6^{\frac{3}{4}})\right]^{\frac{1}{2}}$.

4. 已知 $10^{\alpha}=2,10^{\beta}=3$，把下面的数写成底数是 10 的幂的形式：

(1) $\dfrac{9}{4}$；　(2) 12；　(3) 72；　(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5. 某科研小组培育一种水稻新品种，由第 1 代 1 粒种子可以得到第 2 代 120 粒种子，以后各代每粒种子都可以得到下一代 120 粒种子. 写出第 n 代得到的种子数与 n 的函数关系式，并求第 5 代得到的种子数. (结果写成 $a\times10^{n}(0<a<10,n$ 为正整数)的形式，a 精确到 0.01)

B 组

1. 用计算器求值(结果精确到 0.01)：

(1) $10^{2.36}$；　(2) $2.87^{3.2}$；　(3) $0.35^{-2.18}$；　(4) $\mathrm{e}^{-0.25}$.

2. 化简(式中的字母均为正实数)：

(1) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-1}$；

(2) $\dfrac{b^{2}-2+b^{-2}}{b^{2}-b^{-2}}$.

3. 已知 $x+x^{-1}=3(x>0)$，求下列各式的值：

(1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$；

(4) $x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

阅读材料

利用科学计算器计算函数值的近似值

有的科学计算器(如计算位数较少的科学计算器)无法直接计算很大的数，这时，需要我们设计一些计算方法，以便利用这些科学计算器进行近似计算. 例如，当 $x=500$ 时，函数 $y=2^{x}$ 的函数值的近似值，一般的科学计算器无法直接计算. 我们可以采取下面的步骤进行计算：

北京师范大学出版社

第一步，利用科学计算器算出

$$2^{10}=1\,024=1.024\times10^{3}.$$

第二步，再计算 2^{500}. 因为

$$2^{500}=(2^{10})^{50}=(1.024\times10^{3})^{50}=1.024^{50}\times10^{150},$$

所以我们只需要用科学计算器算出

$$1.024^{50}\approx3.273\,4,$$

从而算出

$$2^{500}\approx3.273\,4\times10^{150}.$$

在设计计算方法时，要考虑科学计算器能计算的位数. 如果函数值非常大，我们常常用科学记数法表示，并且根据需要保证一定的精确度.

北京师范大学出版社

§ 3 指数函数

3.1 指数函数的概念

根据指数幂的定义，当给定正数 a，且 $a \neq 1$ 时，对于任意的实数 x，都有唯一确定的正数 $y=a^x$ 与之对应. 因此，$y=a^x$ 是一个定义在实数集上的函数，称为**指数函数**. 由定义可知，指数函数 $y=a^x$ 具有以下基本性质：

(1) 定义域是 $\mathbf{R}$，函数值大于 0；

(2) 图象过定点(0，1).

3.2 指数函数的图象和性质

实例分析

北京师范大学出版社

先分析一个具体的指数函数 $y=2^x$.

列表(如表 3－2)、描点、连线，画出函数 $y=2^x$ 的图象(如图 3－1).

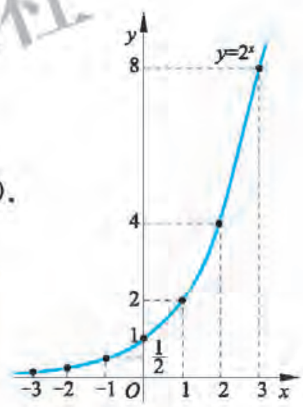


图 3－1

表 3－2

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

从图象可以看出：

函数 $y=2^x$ 的图象位于 x 轴的上方；从最左侧贴近 x 轴的位置逐渐上升，过点(0，1)，继续上升，函数值越来越大，图象越来越陡，直至无穷.

由此得到函数 $y=2^x$ 的性质：

函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且值域是$(0，+\infty)$.

再分析函数 $y=3^x$. 列表(如表 3－3)、描点、连线，画出函数 $y=3^x$ 的图象(如图 3－2).

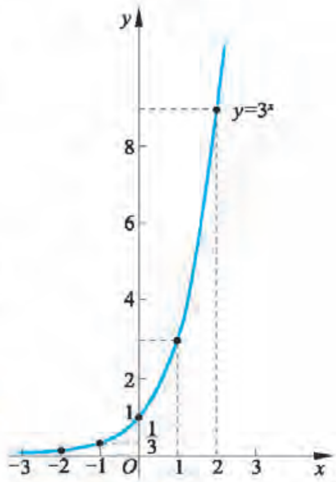


图 3－2

表 3－3

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=3^x$	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	…

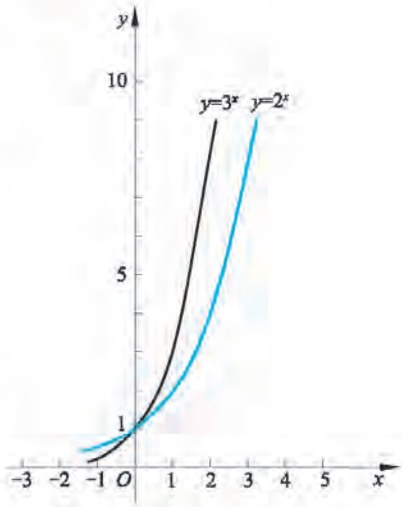


图 3-3

从图象可以看出：

函数 $y=3^x$ 的图象也是位于 x 轴的上方；从最左侧贴近 x 轴的位置逐渐上升，过点(0，1)，继续上升，函数值越来越大，图象越来越陡，直至无穷.

由此得到函数 $y=3^x$ 的性质：

函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且值域是 $(0,+\infty)$.

由此可见函数 $y=2^x$ 与 $y=3^x$ 的性质是类似的. 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=2^x$ 与 $y=3^x$ 的图象(如图 3-3)，可以看出：

在 y 轴左侧，函数 $y=3^x$ 的图象在函数 $y=2^x$ 的图象下方；在 y 轴右侧，函数 $y=3^x$ 的图象在函数 $y=2^x$ 的图象上方.

抽象概括

一般地，当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $(0,+\infty)$，过定点(0，1)，在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 当 x 值趋近于正无穷大时，函数值趋近于正无穷大；当 x 值趋近于负无穷大时，函数值趋近于 0.

对于函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x(a>b>1)$：

(1) 当 $x<0$ 时，$0<a^x<b^x<1$；
(2) 当 $x=0$ 时，$a^x=b^x=1$；
(3) 当 $x>0$ 时，$a^x>b^x>1$.

北京师范大学出版社

例 1 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $5^{0.8}$，$5^{0.7}$；　　(2) $7^{-0.15}$，$7^{-0.1}$.

解 (1) 因为函数 $y=5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且 $0.8>0.7$，所以 $5^{0.8}>5^{0.7}$；

(2) 因为函数 $y=7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且 $-0.15<-0.1$，所以 $7^{-0.15}<7^{-0.1}$.

例 2 (1) 求使不等式 $4^x>32$ 成立的实数 x 的集合；

(2) 已知方程 $9^{x-1}=243$，求实数 x 的值.

解 (1) 因为 $4^x=2^{2x}$，$32=2^5$，所以原不等式可化为 $2^{2x}>2^5$.

因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $2x>5$，即 $x>\frac{5}{2}$.

因此，使不等式 $4^x>32$ 成立的实数 x 的集合是 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

(2) 因为 $9^{x-1}=(3^2)^{x-1}=3^{2x-2}$, $243=3^5$, 所以原方程可化为 $3^{2x-2}=3^5$.

因为函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以 $2x-2=5$, 即 $x=\frac{7}{2}$.

练　习

1. 某种细胞分裂时, 由 1 个分裂为 2 个, 2 个分裂为 4 个……一直分裂下去, 请写出得到的细胞个数 y 与分裂次数 x 之间的函数关系式.
2. 利用指数函数 $y=2^x$ 的图象, 由下列给定的 x 值, 确定相应的函数值(结果精确到 0.1):

$$-4, -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 3,$$

并找出方程 $2^x=5$ 的近似解.

3. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $3^{-2.1}$, $3^{-2.7}$;　　(2) $2^{1.6}$, $2^{0.6}$.

前面研究了指数函数 $y=a^x(a>1)$ 的图象和性质, 那么当 $0<a<1$ 时, 函数 $y=a^x$ 又会有怎样的图象和性质呢?

北京师范大学出版社

实例分析

先分析指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

列表(如表 3-4)、描点、连线, 画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象(如图 3-4).

表 3-4

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…

从图象可以看出:

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象位于 x 轴的上方; 从最左侧无穷远处逐渐下降, 过点 $(0,1)$, 继续下降, 越来越逼近 x 轴.

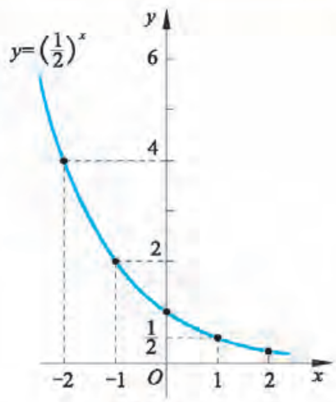


图 3-4

由此得到函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的性质:

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且值域是 $(0,+\infty)$.

再分析函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

列表(如表 3-5)、描点、连线,画出函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象(如图 3-5).

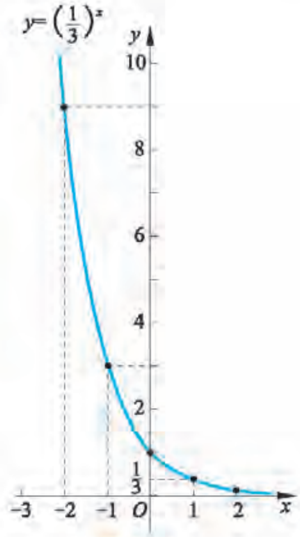


图 3-5

表 3-5

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	…	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	…

从图象可以看出:

函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象也是位于 x 轴的上方;从最左侧无穷远处逐渐下降,过点(0,1),继续下降,越来越逼近 x 轴.

由此得到函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的性质:

函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上是减函数,且值域是 $(0,+\infty)$.

在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象(如图 3-6),可以看出:

在 y 轴左侧,函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象在函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上方;在 y 轴右侧,函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象在函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象下方.

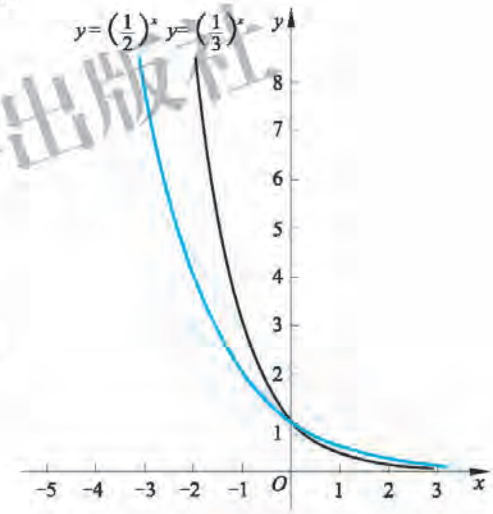


图 3-6

北京师范大学出版社

抽象概括

一般地,当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 **R**,值域是 $(0,+\infty)$,过定点(0,1),在 **R** 上是减函数. 当 x 值趋近于正无穷大时,函数值趋近于 0;当 x 值趋近于负无穷大时,函数值趋近于正无穷大.

对于函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ $(0<a<b<1)$,

(1) 当 $x<0$ 时,$a^x>b^x>1$;

(2) 当 $x=0$ 时,$a^x=b^x=1$;

(3) 当 $x>0$ 时,$0<a^x<b^x<1$.

例 3 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1.8}$，$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2.8}$；　　　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.3}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{1.3}$.

解 (1) 因为函数 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$-1.8>-2.8$，所以 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1.8}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-2.8}$；

(2) 因为函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$-0.3<1.3$，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.3}>\left(\frac{1}{3}\right)^{1.3}$.

例 4 求下列函数的值域：

(1) $y=2^{1-x}$；　　　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$，$x\in[-1,+\infty)$.

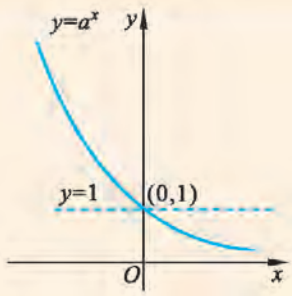
解 (1)因为 $y=2^{1-x}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，而函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的值域是 $(0,+\infty)$，所以函数 $y=2^{1-x}$ 的值域为 $(0,+\infty)$；

(2)因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}=3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$，而函数 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$，$x\in[-1,+\infty)$ 的值域为 $\left(0,3\times\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\right]$，即 $(0,27]$.

北京师范大学出版社

综上所述，指数函数的图象和性质如表 3-6：

表 3-6

<table>
<tr><td></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">(1) 定义域：$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 值域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3) 过定点 $(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td>(4) 当 $x<0$ 时，$0<y<1$；当 $x>0$ 时，$y>1$</td><td>(4) 当 $x<0$ 时，$y>1$；当 $x>0$ 时，$0<y<1$</td></tr>
<tr><td>(5) 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
当 x 值趋近于正无穷大时，函数值趋近于正无穷大；
当 x 值趋近于负无穷大时，函数值趋近于 0</td><td>(5) 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
当 x 值趋近于正无穷大时，函数值趋近于 0；
当 x 值趋近于负无穷大时，函数值趋近于正无穷大</td></tr>
</table>

练 习

1. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $2^{-1.5}$，$2^{1.5}$；　　(2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\sqrt{6}}$，$\left(\frac{1}{6}\right)^{-1.5}$；

(3) $8^{\sqrt{2}}$，$\left(\frac{1}{8}\right)^{-1.4}$；　　(4) $2^{0.1}$，$3^{0.2}$.

2. 求使下列不等式成立的实数 x 的集合：

(1) $3^{x-2}>\frac{1}{27}$；　　(2) $\left(\frac{1}{10}\right)^{x^2+1}<\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$.

我们分别研究了函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象和性质. 那么像这样底数互为倒数的两个指数函数，它们的图象与性质有什么区别和联系呢？

实例分析

我们将函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 放在一起来研究.

方法1 列表(如表 3-7).

北京师范大学出版社

表 3-7

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

再用描点法在同一平面直角坐标系中画出上述两个函数的图象(如图 3-7).

观察图象可知，函数 $y=2^x$ 的图象与函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

方法2 将函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的解析式改写为 $y=2^{-x}$ 的形式. 记 $y=2^x$ 为 $y=f(x)$，那么 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 就可以记为 $y=f(-x)$. 而函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

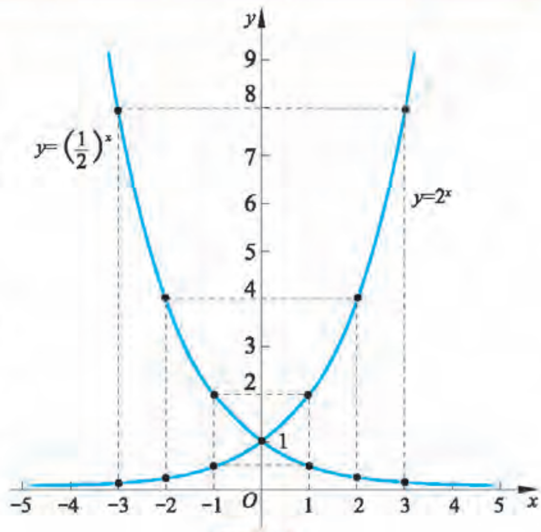


图 3-7

以上两种方法均可得出：函数 $y=2^x$ 与函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象关于 y 轴对称，且它们的单调性相反.

抽象概括

一般地，指数函数 $y=a^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象关于 y 轴对称，且它们在 $\mathbf{R}$ 上的单调性相反.

例 5 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $1.8^{0.6}$，$0.8^{1.6}$；　　(2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$，$3^{-\frac{3}{5}}$.

解 利用指数函数的性质对两个数进行比较.

(1) 设 $f(x)=1.8^x$，$g(x)=0.8^x$，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$1.8^{0.6}=f(0.6)$，$0.8^{1.6}=g(1.6)$. 由指数函数的性质可知 $f(0.6)>f(0)=1$，而 $g(1.6)<g(0)=1$，所以 $1.8^{0.6}>0.8^{1.6}$.

(2) 设 $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x$，$g(x)=3^x$，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$\left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}=f\left(-\frac{2}{3}\right)$，$3^{-\frac{3}{5}}=g\left(-\frac{3}{5}\right)$. 由指数函数的性质可知 $f\left(-\frac{2}{3}\right)>f(0)=1$，而 $g\left(-\frac{3}{5}\right)<g(0)=1$，所以$\left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}>3^{-\frac{3}{5}}$.

例 6 已知 $a>0$，比较 $a^{\sqrt{2}}$ 和 a^2 的大小，并说明理由.

解 设 $f(x)=a^x$.

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数. 因为$\sqrt{2}<2$，所以 $a^{\sqrt{2}}>a^2$.

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=1$，所以 $a^{\sqrt{2}}=a^2$.

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 因为$\sqrt{2}<2$，所以 $a^{\sqrt{2}}<a^2$.

思考交流

回顾本节的 3 个“实例分析”，你能从学习方法上谈谈感受吗？

北京师范大学出版社

练 习

1. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$，$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$；　　(2) $2^{0.1}$，0.3^2.

习题 3－3

A 组

1. 求下列函数的定义域和值域：

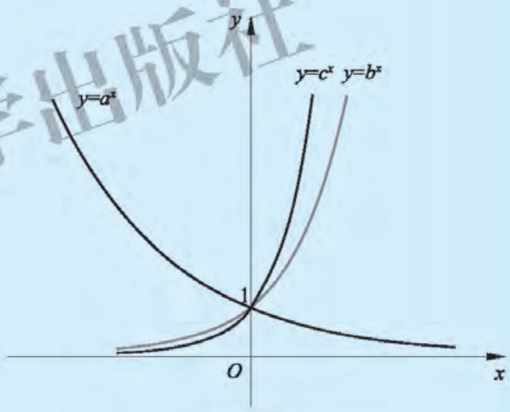
(1) $y=2^{3-x}$；　　(2) $y=5^{6x+1}$；　　(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$；

(4) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$；　　(5) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$；　　(6) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

2. 已知三个指数函数 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的图象如图.

(1) 试比较 a，b，c 的大小；

(2) 指数函数的底数越大，它的图象与直线 $x=1$ 的交点的纵坐标是越大还是趋近于 0？



（第 2 题）

北京师范大学出版社

3. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\pi^{-0.2}$，π^{-1}；

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1.1}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{1.1}$.

4. 比较下列各组数的大小：

(1) $3^{1.2}$，$3^{2.2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{3.2}$；

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$，$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{5}}$.

5. 已知下列不等式成立，比较 m，n 的大小：

(1) $2^m<2^n$；　　(2) $0.2^m<0.2^n$；

(3) $a^m>a^n(a>1)$；　　(4) $a^m>a^n(0<a<1)$.

6. 已知下列不等式成立，求实数 a 的取值范围（$a>0$，且 $a\neq1$）：

(1) $a^3<a^2$；　　(2) $a^{-0.9}<a$；

(3) $a^m>a^{0.3}(m<0.3)$；　　(4) $a^m<a^n(m>n)$.

7. 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图象，并讨论它们之间的关系：

(1) $y=0.2^x$；　　(2) $y=0.5^x$；

(3) $y=1.5^x$；　　(4) $y=3.5^x$.

B 组

1. 已知 $0<a<1,0<x<y<1$,判断下面结论的正误:

(1) $a^x<a^y$;　　(2) $a^{-x}>a^{-y}$;

(3) $a^{\frac{1}{x}}<a^{\frac{1}{y}}$;　　(4) $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{y}}$.

2. 已知 $0<x<y<1$,比较 x^x,x^y,x^{-x},x^{-y}的大小.

3. 设 $y_1=a^{3x+1},y_2=a^{-2x}$,其中 $a>0$,且 $a\neq1$. 当 x 为何值时,有:

(1) $y_1=y_2$;　　(2) $y_1>y_2$.

4. 设 $f(x)=3^x$,求证:

(1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$;　　(2) $\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

5. 在同一平面直角坐标系中画出下列各组函数的图象,并讨论它们之间的关系:

(1) $y=3^x,y=3^{x+3},y=3^{x-1}$;　　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2,y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=2^{\sqrt{x}}$;　　(2) $y=3^{\sqrt{-x}}$;

(3) $y=\sqrt{3^x-9}$;　　(4) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

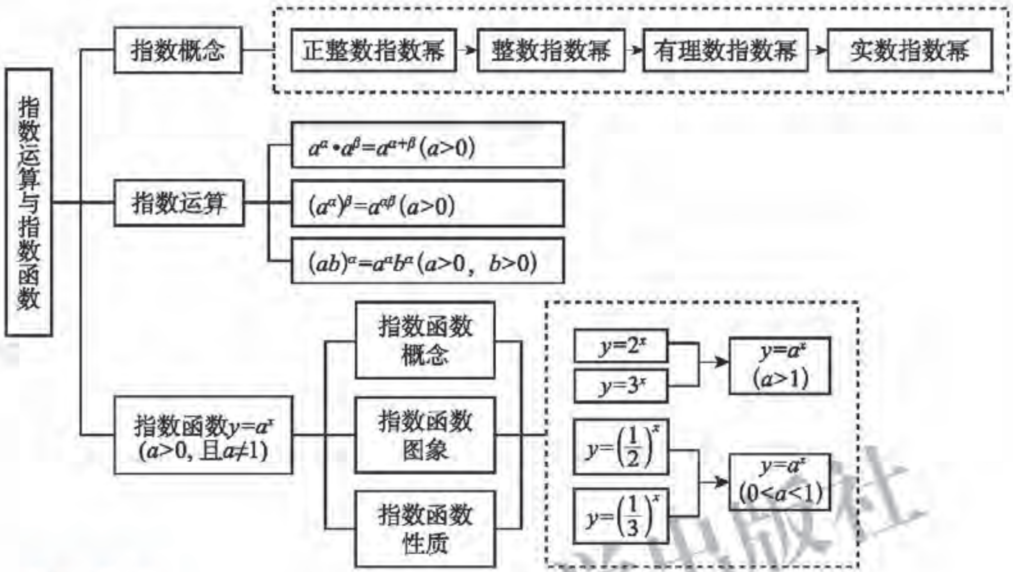
7. 对比以往学习的代数运算,指数运算有哪些特点?

北京师范大学出版社

本章小结

一、知识结构

学会研究一类数学问题——一类函数.



二、学习要求

1. 通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$（$a>0$，且 $a\neq1$；m,n 为整数，且 $n>0$）、实数指数幂 a^x（$a>0$，且 $a\neq1$；$x\in\mathbf{R}$）含义的认识，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质.

2. 通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念.

3. 能用描点法或借助计算工具画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

三、需要关注的问题

1. 如何通过指数幂的拓展过程认识有理数指数幂、实数指数幂？

2. 通过哪几个图象就能够全面掌握指数函数的性质？

北京师范大学出版社

复习题三

A 组

1. 求 x 的值：

(1) $2^{2x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$；　　(2) $0.3^{2x}=0.09^{5-x}$.

2. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $0.4^{-1.2}$，$0.4^{-0.6}$；　　(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$；

(3) $2^{-1.3}$，$0.2^{-0.3}$.

3. 计算：

(1) $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+0.125^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{4^0}{\sqrt{2}}+(\sqrt{2}-1)^{-1}-8^{\frac{2}{3}}$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=3^{\frac{1}{x+1}}$；　　(2) $y=\sqrt{1-3^{-x}}$；

(3) $y=\frac{1}{2^x-1}$；　　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{a^x-1}}$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

5. 已知下列不等式成立，比较 m，n 的大小：

(1) $9^m>9^n$；

(2) $0.1^m>0.1^n$；

(3) $a^m<a^n$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

6. 已知 $10^\alpha=2^{-\frac{1}{2}}$，$10^\beta=32^{\frac{1}{3}}$，求 $10^{2\alpha-\frac{3}{4}\beta}$的值.

7. 求下列函数的值域：

(1) $y=6-4^{1-x}$；　　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$（$-1\leqslant x\leqslant2$）.

8. 已知函数 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$的定义域；

(2) 判断函数 $f(x)$的奇偶性，并说明理由；

(3) 求证：$f(x)>0$.

B 组

1. 已知 $x+y=12$，$xy=9$，求$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$的值.

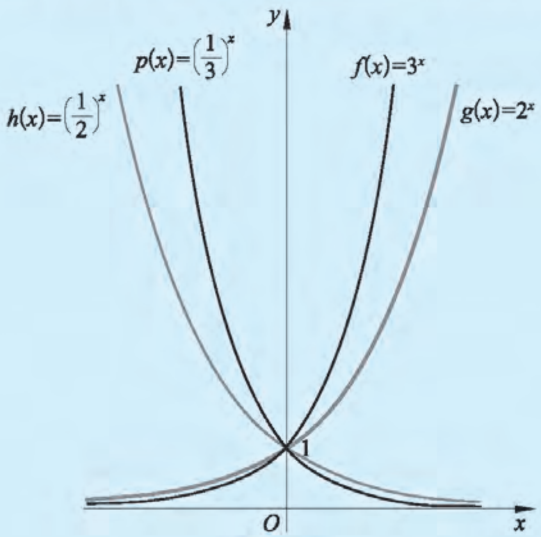
2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ g(x), & x>0\end{cases}$是奇函数，求 $g(2)$的值.

北京师范大学出版社

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x>0,\\ x+1, x\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $f(a)+f(1)=0$,求实数 a 的值.

4. (1) 从图中你能抽象出指数函数的哪些性质?

(2) 有的同学认为"理解了此图就掌握了指数函数的性质",谈谈你对该观点的看法.



(第 4 题)

C 组

1. 求函数 $y=4^x-3\cdot 2^x+5$ 在区间$[0,2]$上的最大值和最小值.

2. 已知函数 $f(x)=b\cdot a^x$(其中 a,b 为常量,且 $a>0,a\neq 1,b\neq 0$)的图象经过点 $A(1,6),B(3,24)$.

(1) 求函数 $f(x)$的解析式;

(2) 若不等式$\left(\frac{1}{a}\right)^x+\left(\frac{1}{b}\right)^x-m\geqslant 0$ 在区间$(-\infty,0]$上恒成立,求实数 m 的取值范围.

3. 富兰克林(Benjamin Franklin,1706—1790)是美国著名的政治家和物理学家,去世后留下的财产并不可观,大致只有1 000 英镑. 但令人惊奇的是,他竟然留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱! 这份遗嘱是这样写的:

"……1 000 英镑赠给波士顿的居民,如果他们接受了这 1 000 英镑,那么这笔钱应托付给一些挑选出来的公民,他们得把这钱按每年 5%的利率借给一些年轻的手工业者去生息,这笔钱过了 100 年增加到 131 000 英镑. 我希望那时候用 100 000 英镑来建立一座公共建筑物,剩下的 31 000 英镑拿去继续生息 100 年. 在第二个 100 年末了,这笔款增加到 4 061 000 英镑,其中 1 061 000 英镑还是由波士顿的居民来支配,而其余的 3 000 000 英镑让马萨诸塞州的公众来管理. 从此之后,我可不敢多作主张了."

你认为富兰克林的设想有道理吗? 为什么?

4. 请收集指数函数应用的实例,并与同学交流.

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社

第四章

4 对数运算与对数函数

恩格斯(Friedrich Engels,1820—1895)曾把对数的发明、微积分的建立和解析几何的创立称为17世纪数学最伟大的三项成就.

本章我们将在第三章“指数运算与指数函数”的基础上理解对数的概念,掌握对数的运算性质,研究对数函数的图象和性质;了解指数函数与对数函数互为反函数的关系,感受这些特殊函数在刻画现实问题中的作用,发展数学运算和直观想象等核心素养.

北京师范大学出版社

给我空间、时间和对数,我可以创造出一个宇宙.

——伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)

§1 对数的概念

问题提出

在第三章"§1 指数幂的拓展"中提到，经测算薇甘菊的侵害面积 S(单位：hm^2)与年数 t 满足关系式 $S=S_0\cdot 1.057^t$，其中 S_0(单位：hm^2)为侵害面积的初始值.

现在，设经过 t 年后，薇甘菊的侵害面积会增长到原来的 5 倍. 可得

$$S_0\cdot 1.057^t=5S_0,$$

即

$$1.057^t=5.$$

用什么样的方式表示出 t 的值呢？

抽象概括

一般地，如果 $a(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N，即 $a^b=N$，那么数 b 称为以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$\log_a N=b.$$

其中 a 叫作对数的**底数**，N 叫作**真数**.

例如，因为 $16^{\frac{3}{2}}=64$，所以 $\frac{3}{2}$ 是以 16 为底 64 的对数，记作 $\log_{16}64=\frac{3}{2}$.

因为 $1.057^t=5$，所以 $t=\log_{1.057}5$.

可以看出，给定底数后，对数运算是指数运算的逆运算.

显然，根据对数的定义，有 $a^{\log_a N}=N$.

当对数的底数 $a=10$ 时，通常称之为**常用对数**，并将 $\log_{10}N$ 简记为 $\lg N$.

在科学技术领域，常常使用以无理数 $e=2.718\ 281\cdots$ 为底数的对数，称之为**自然对数**，并将 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$.

思考交流

1. 对于任意的 $a>0$，且 $a\neq 1$，对数 $\log_a 1$，$\log_a a$，$\log_a \frac{1}{a}$ 的值有什么特点？

2. 对数 $\log_a N$ 中，底数 a 能不能是 0 或者负数？a 的值为什么不取 1？真数 N 的取值范围是什么？

北京师范大学出版社

例 1 将下列指数式改写为对数式:

(1) $5^3=125$; (2) $8^{\frac{2}{3}}=4$;

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$; (4) $6^{-2}=\frac{1}{36}$.

解 由对数的定义,得

(1) $\log_5 125=3$; (2) $\log_8 4=\frac{2}{3}$;

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$; (4) $\log_6 \frac{1}{36}=-2$.

例 2 将下列对数式改写为指数式:

(1) $\log_2 64=6$; (2) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$;

(3) $\lg 0.001=-3$; (4) $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$.

解 由对数的定义,得

(1) $2^6=64$; (2) $3^{-4}=\frac{1}{81}$;

(3) $10^{-3}=0.001$; (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

北京师范大学出版社

例 3 求下列各式中 x 的值:

(1) $\log_3 x=4$; (2) $\log_5 \frac{1}{25}=x$;

(3) $3^x=5$; (4) $\ln x=-1$;

(5) $\log_x 64=2$; (6) $2^{\log_2 3}=x$.

解 由对数的定义,得

(1) $x=3^4=81$;

(2) $5^x=\frac{1}{25}=5^{-2}$,所以 $x=-2$;

(3) $x=\log_3 5$;

(4) $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$;

(5) $x^2=64$,又 $x>0$,所以 $x=8$;

(6) $2^{\log_2 3}=3$,所以 $x=3$.

练　习

1. 将下列指数式改写为对数式：

(1) $2^{10}=1\ 024$；　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$；　(3) $10^{-4}=0.000\ 1$；　(4) $1.2^4=2.073\ 6$.

2. 将下列对数式改写为指数式：

(1) $\log_3 81=4$；　(2) $\lg 100\ 000=5$；　(3) $\ln e^3=3$；　(4) $\log_{\frac{1}{5}} 625=-4$.

3. 求值：

(1) $\log_2 16$；　(2) $\log_7 \frac{1}{49}$；　(3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$；　(4) $\ln e$；

(5) $\log_{\sqrt{2}} 2$；　(6) $\lg 10^6$；　(7) $\log_{1.1} 1.21$；　(8) $\log_3 (9\times 81)$.

习题 4-1

A　组

1. 将下列指数式改写为对数式：

(1) $3^6=729$；　(2) $2^{12}=4\ 096$；

(3) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}$；　(4) $64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

2. 将下列对数式改写为指数式：

(1) $\log_2 512=9$；　(2) $\log_{25} 125=\frac{3}{2}$；

(3) $\lg 0.000\ 001=-6$；　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 4.2=m$.

3. 求值：

(1) $\log_{17} 17$；　(2) $\log_9 \frac{1}{81}$；

(3) $\log_{0.4} 1$；　(4) $\log_{2.5} 6.25$；

(5) $\log_7 343$；　(6) $\log_5 (25\times 5^3)$.

B　组

1. 已知 $\log_{(2x^2-1)}(3x^2+2x-1)=1$，求 x 的值.

北京师范大学出版社

阅读材料

对数的起源

16,17世纪,社会各领域的科学知识迅速发展,随之而来的是庞大的数学计算需求,改进计算方法成了当务之急.苏格兰数学家纳皮尔(John Napier,1550—1617)在1614年出版了《奇妙的对数表的描述》,创造了对数.那时指数的概念尚未明确,那么纳皮尔是怎样不从指数出发而得到对数的呢?

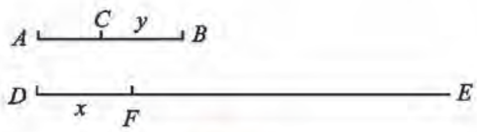


图4-1

如图4-1,AB是定长的线段,DE是以点D为端点的射线.点C,F分别是AB,DE上的动点,从A,D两点以相等的初速度出发,沿线段AB和射线DE运动.假设点C的运动速度始终与线段CB的长度相等,点F做匀速直线运动.

纳皮尔把DF定义为CB的对数,图4-1中,$x=DF$是$y=CB$的纳皮尔对数,用$\mathrm{Nap}\cdot\log y$来表示,即$x=\mathrm{Nap}\cdot\log y$,其中"Nap"指"纳皮尔".1619年,纳皮尔的遗作《奇妙的对数定理的构造》出版,书中曾用过"人造数(artificial number)"这一术语.后来,他又引入"对数(logarithm)"一词,由两个希腊文的词λόγος(拉丁文logos,意为"表示思想的文字或符号",在这里的意思是"比率"或"计算")和αριθμός(拉丁文arithmos,意思是"数")组合而成.

1648年,波兰传教士穆尼阁(波兰语:Jan Mikołaj Smogulecki,1610—1656)来到中国,向薛凤祚(1599—1680)等中国数学家传授对数,共同编译并出版了《比例对数表》.该书中,把"logarithm(对数)"翻译成"假数",而称纳皮尔对数$x=\mathrm{Nap}\cdot\log y$中的$y$为"真数",所以"真数与假数对列成表"也就是"对数表".这便是我国"对数"名称的由来.

思考交流

1. 收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料.

2. 撰写小论文,论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用,并与同学交流.

北京师范大学出版社

§2 对数的运算

2.1 对数的运算性质

对数与指数概念之间的联系，决定了对数运算与指数运算之间的密切相关性.

设 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$. 取 $\alpha=\log_a M$，$\beta=\log_a N$，则 $a^\alpha=M$，$a^\beta=N$.

根据指数幂的运算性质，得 $a^{\alpha+\beta}=a^\alpha\cdot a^\beta=M\cdot N$.

将它改写为对数形式，有 $\alpha+\beta=\log_a(M\cdot N)$，

所以
$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N.$$

类似地，由 $\frac{M}{N}=\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$，得

$$\log_a\frac{M}{N}=\alpha-\beta=\log_a M-\log_a N.$$

设 $b\in\mathbf{R}$，由指数幂的运算性质 $(a^\alpha)^b=a^{b\alpha}$，得 $M^b=a^{b\alpha}$，

所以
$$\log_a M^b=b\alpha=b\log_a M.$$

综上，若 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，$b\in\mathbf{R}$，则对数运算具有如下运算性质：

(1) $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^b=b\log_a M$.

例1 计算：

(1) $\log_2(64\times512)$；　(2) $\lg 0.000\ 1$；　(3) $\log_3\sqrt[5]{81}$.

解 (1) $\log_2(64\times512)=\log_2 64+\log_2 512=6+9=15$；

(2) $\lg 0.000\ 1=\lg 10^{-4}=-4\lg 10=-4$；

(3) $\log_3\sqrt[5]{81}=\log_3 3^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}\log_3 3=\frac{4}{5}$.

例2 已知 $\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$，用 a,b 表示下列各数的值：

(1) $\log_2 30$；　(2) $\log_2\frac{5}{9}$；　(3) $\log_2\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{20}}$.

解 (1) $\log_2 30=\log_2(2\times3\times5)=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5=1+a+b$；

(2) $\log_2\frac{5}{9}=\log_2 5-\log_2 9=\log_2 5-\log_2 3^2=\log_2 5-2\log_2 3=b-2a$；

北京师范大学出版社

$$(3)\ \log_2\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{20}}=\log_2 15^{\frac{1}{3}}-\log_2 20^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\log_2 15-\frac{1}{2}\log_2 20$$

$$=\frac{1}{3}(\log_2 3+\log_2 5)-\frac{1}{2}(\log_2 4+\log_2 5)$$

$$=\frac{1}{3}(a+b)-\frac{1}{2}(2+b)$$

$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{6}-1.$$

思考交流

1. 当 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$ 时，下列等式成立吗？如果不成立，请举一个反例.

(1) $\log_a(M\cdot N)=\log_a M\cdot\log_a N$；

(2) $\log_a\dfrac{M}{N}=\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$；

(3) $\log_a(M+N)=\log_a M+\log_a N$；

(4) $\log_a(M-N)=\log_a M-\log_a N$.

2. 对数的运算性质有什么特点？显示出什么优势？

北京师范大学出版社

练　习

1. 求下列各式中 x 的值：

(1) $\log_2 x=3$；　(2) $\log_5 x=-2$；　(3) $\log_x\dfrac{16}{9}=2$；

(4) $\log_x 6=1$；　(5) $\lg x=-1$；　(6) $10^{x+\lg 2}=2\ 000$.

2. 计算：

(1) $\log_2(64\times16)$；　(2) $\log_3(9\times27)$；　(3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{512}\right)^2$；

(4) $\log_3 36-\log_3 12$；　(5) $\log_7\dfrac{5}{9}+\log_7\dfrac{9}{35}$；　(6) $\lg 20+\lg 5$.

3. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xyz)$；　(2) $\lg(x^2yz^3)$；

(3) $\lg\dfrac{x^2y}{z^3}$；　(4) $\lg(x^{-\frac{1}{2}}yz^{\frac{2}{3}})$.

2.2 换底公式

问题提出

有些计算器上只有常用对数键“LOG”(即“lg”)和自然对数键“LN”(即“ln”). 对一般的底数 $a>0$,且 $a\neq1$ 和 $b>0$,要计算$\log_a b$,必须将它转换成常用对数或自然对数. 如何转换呢?

分析理解

例如,用计算器求 $\log_2 5$ 的值.

设$\log_2 5=x$,则

$$2^x=5.$$

在 $2^x=5$ 的两边取常用对数,得

$$x\lg 2=\lg 5,$$

所以
$$x=\frac{\lg 5}{\lg 2}.$$

这样就可以用计算器中的常用对数键“LOG”算出$\log_2 5$ 的值:

$$\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}\approx2.321\ 928\ 094\ 89.$$

因为计算器显示的数位是有限的,所以得到的结果一般是近似值.

同理可得
$$x=\frac{\ln 5}{\ln 2}.$$

这样就可以用计算器中的自然对数键“LN”算出$\log_2 5$ 的值.

抽象概括

一般地,若 $a>0,b>0,c>0$,且 $a\neq1,c\neq1$,则

$$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.}$$

这个结论称为对数的**换底公式**.

思考交流

你能用其他方法证明对数的换底公式吗?

例 3 计算：

(1) $\log_{27}81$；

(2) $\log_{16}25\cdot\log_5 8$；

(3) $\log_a b\cdot\log_b a\ (a>0,b>0,且\ a\neq1,b\neq1)$.

解 根据对数的换底公式，得

(1) $\log_{27}81=\dfrac{\log_3 81}{\log_3 27}=\dfrac{4}{3}$；

(2) $\log_{16}25\cdot\log_5 8=\dfrac{\lg 25}{\lg 16}\cdot\dfrac{\lg 8}{\lg 5}=\dfrac{2\lg 5}{4\lg 2}\cdot\dfrac{3\lg 2}{\lg 5}=\dfrac{3}{2}$；

(3) $\log_a b\cdot\log_b a=\dfrac{\ln b}{\ln a}\cdot\dfrac{\ln a}{\ln b}=1.$

例 4 计算：

(1) $\log_4\dfrac{25}{9}+\log_2 3-\log_{0.5}\dfrac{1}{5}$；

(2) $(\log_3 2+\log_2 3)^2-\dfrac{\log_3 2}{\log_2 3}-\dfrac{\log_2 3}{\log_3 2}$.

解 根据对数的换底公式，得

(1) $$\begin{aligned}\log_4\frac{25}{9}+\log_2 3-\log_{0.5}\frac{1}{5}&=\frac{\log_2\frac{25}{9}}{\log_2 4}+\log_2 3-\frac{\log_2\frac{1}{5}}{\log_2 0.5}\\&=\log_2\frac{5}{3}+\log_2 3-\log_2 5\\&=\log_2\left(\frac{5}{3}\times3\div5\right)=\log_2 1=0;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(\log_3 2+\log_2 3)^2-\frac{\log_3 2}{\log_2 3}-\frac{\log_2 3}{\log_3 2}&=\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2-\frac{\ln 2}{\ln 3}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 3}-\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\\&=\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^2+\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2+2-\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^2-\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2\\&=2.\end{aligned}$$

在对数运算中，要特别注意观察对数的特点，若是同底数对数的加减运算，通常运用对数的运算性质，先将对数之间的加减运算转化为真数之间的乘除运算，然后再进行对数运算；若不是同底数对数，则要考虑使用换底公式化为同底数对数再计算.

北京师范大学出版社

练　习

1. 仿照“用计算器求 $\log_2 5$ 的值”的方法，证明对数的换底公式.

2. 计算：

(1) $\log_9 8 \cdot \log_{32} 27$；　　(2) $\log_2 \dfrac{1}{125} \cdot \log_3 \dfrac{1}{32} \cdot \log_5 \dfrac{1}{3}$；

(3) $2\log_{18} 3+\dfrac{\lg 2}{\lg 2+\lg 9}$；　　(4) $\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}} 3-\log_{\sqrt{2}} 4$.

3. 分别计算下列各式，你能得出什么结论？

(1) $\log_2 5 \cdot \log_5 16$；　　(2) $\log_3 6 \cdot \log_6 9 \cdot \log_9 4$；

(3) $\log_{\sqrt{2}} 7 \cdot \log_7 \dfrac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 5 \cdot \log_5 \sqrt{2}$.

4. 求证：$\log_2 64=3\log_8 64$.

5. 设 $a>0, b>0, \alpha\neq 0$，且 $a\neq 1, b\neq 1$，利用对数的换底公式证明：

(1) $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha \log_b a}$；　　(2) $\log_{a^\alpha} b^\beta=\dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$.

6. 设 a, b 是正数，且 $a^b=b^a$，$b=3a$，求 a 的值.

习题 4-2

北京师范大学出版社

A　组

1. 填空：

指数式	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	$10^4=10\ 000$	$6^3=216$		$(\sqrt{5})^6=125$	
对数式				$\log_9 729=3$		$\ln \frac{1}{e^3}=-3$

2. 判断下列结论是否正确：

(1) 若 $\log_2 x=3$，则 $x=6$；　　(2) 若 $e=\ln x$，则 $x=e^2$；

(3) $\lg(\lg 10)=1$；　　(4) $\lg(\ln e)=0$；

(5) $5^{\log_5 \frac{1}{25}}=\sqrt{5}$.

3. 求值：

(1) $\log_5 25$；　　(2) $\log_3 \dfrac{1}{243}$；

(3) $\log_{\frac{1}{16}} 2$；　　(4) $\log_{\sqrt{3}} 9$；

(5) $\lg 100$；　　(6) $\log_{0.1} 10$；

(7) $\log_{15} \dfrac{1}{225}$；　　(8) $\log_7 \sqrt[3]{49}$.

4. 求下列各式中 x 的值：

(1) $\log_5 x=-1$；　　(2) $\log_5(\lg x)=0$；

(3) $\log_{15}x+\log_{15}3=1$；　　(4) $3^{1+\log_3 x}=\frac{1}{9}$.

5. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，请用 a，b 表示下列各数的值：

(1) $\lg 6$；　　(2) $\log_3 8$；

(3) $\log_2 24$；　　(4) $\lg\frac{27}{8}$.

6. 求值：

(1) $\ln e-\ln e^2$；　　(2) $\lg 8+\lg 125$；

(3) $2\log_3 6-\log_3 4$；　　(4) $\log_2(\log_2 16)$；

(5) $\frac{\log_8 27}{\log_4 9}$；　　(6) $2^{3+\log_2 5}$；

(7) $\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$；　　(8) $\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$.

7. 一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年，剩余质量约是原来的 75%. 经过多少年，该物质的剩余质量是原来的$\frac{1}{3}$？（$\lg 2\approx 0.301\ 0$，$\lg 3\approx 0.477\ 1$，结果精确到 0.001）

北京师范大学出版社

B 组

1. 填写下面的表格（必要的时候可以使用计算器，结果精确到 0.01），并观察数据，概括结论.

对数	$\log_2 0.5$	$\log_2 1$	$\log_2 1.5$	$\log_2 2$	$\log_2 2.5$	$\log_2 3$	$\log_2 3.5$	$\log_2 4$
对数值								
对数	$\log_2 4.5$	$\log_2 5$	$\log_2 5.5$	$\log_2 6$	$\log_2 6.5$	$\log_2 7$	$\log_2 7.5$	$\log_2 8$
对数值								

2. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}$；　　(2) $10^{\lg 3}-\sqrt{10}\log_4 1+\ln e^2$.

3. 求下列各式中 x 的值：

(1) $\lg(10x)+1=3\lg x$；　　(2) $3\ln x-6=\ln x$；

(3) $\lg\frac{x}{10}=-2-2\lg x$；　　(4) $\log_x(2x)=\frac{1}{2}$.

4. 已知 a，b 是方程 $2(\ln x)^2-3\ln x+1=0$ 的两个实数根，求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln b}$；　　(2) $\log_a b+\log_b a$.

5. 利用对数的换底公式计算：

(1) $\log_2 25\cdot\log_3 4\cdot\log_5 9$；　　(2) $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$.

6. 当 $N>0$，且 $N\neq 1$ 时，常用对数 $\lg N$ 和自然对数 $\ln N$ 可以互相转换，即存在实数 A，使得 $\lg N=A\cdot\ln N$. 你能推导出 A 的值吗？
7. 学习了对数运算，请对比指数运算，你有什么收获和体会？

阅读材料

指数的换底公式

请借助互联网或图书查阅“棋盘上的学问”“64 片金片在 3 根金针上移动”等故事，发现它们都涉及 2^{64} 这个数.

（1）你能用 64 个 2 相乘算出它的值吗？

（2）你会用计算器得出它的结果吗？

（3）如果恰好你手头没有计算器，又需要你马上估计出它的值，你有什么办法？

分析 （1）如果你愿意不厌其烦地计算，可以得出

$$2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616.$$

（2）使用科学计算器，可以算出

$$2^{64}\approx 1.844\ 674\ 407\times 10^{19}.$$

（3）若把 2^{64} 换成以 10 为底的幂，则便于估计它的值. 怎么转换呢？

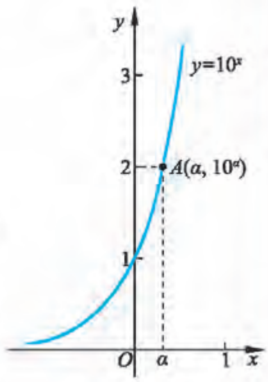


图 4－2

根据指数函数的性质，对于数 2 一定存在唯一的常数 α，使得 $2=10^{\alpha}$（如图 4－2）. 由对数的概念，得

$$\alpha=\lg 2.$$

因而 $$2^{64}=10^{64\alpha}=10^{64\lg 2}\approx 10^{64\times 0.301\ 0}=10^{19.264}.$$

也就是说，2^{64} 是 10^{19} 和 10^{20} 之间的数. 因此，2^{64} 秒大概是5 849亿年，而太阳的寿命大约是 100 亿年.

一般地，对于任意不为 1 的正数 a 和 b，有 $a=b^{\log_b a}$，所以对任意的实数 α，都有

$$a^{\alpha}=b^{\alpha\log_b a}.$$

这就是指数的换底公式.

例如，可以用上述公式把以 3 为底的幂转换为以 10 或以 e 为底的幂：

$$3^5=10^{5\lg 3},\ 3^5=e^{5\ln 3}.$$

§ 3 对数函数

3.1 对数函数的概念

我们知道，给定正数 a，且 $a\neq1$，指数函数 $y=a^x$ 是定义在 **R** 上、值域为 $(0,+\infty)$ 的单调函数. 所以对于每一个正数 y，都存在唯一确定的实数 x，使得 $y=a^x$. 由函数的定义，x 就是 y 的函数，称为以 a 为底的**对数函数**，记作 $x=\log_a y$.

习惯上，将自变量写成 x，函数值写成 y，因此，一般将对数函数写成 $y=\log_a x\,(a>0$，且 $a\neq1)$，其中 a 称为底数. 由定义可知，对数函数具有以下基本性质：

(1) 定义域是 $(0,+\infty)$；

(2) 图象过定点 $(1,0)$.

特别地，我们称以 10 为底的对数函数为**常用对数函数**，记作 $y=\lg x$；称以无理数 e 为底的对数函数为**自然对数函数**，记作 $y=\ln x$.

北京师范大学出版社

例 1 (1) 当 $x=1,2,4$ 时，求对数函数 $y=\log_2 x$ 的函数值；

(2) 当 $x=0.1,1,10$ 时，求对数函数 $y=\lg x$ 的函数值.

解 (1) 由 $2^0=1$，得 $\log_2 1=0$；

由 $2^1=2$，得 $\log_2 2=1$；

由 $2^2=4$，得 $\log_2 4=2$.

(2) 由 $10^{-1}=0.1$，得 $\lg 0.1=-1$；

由 $10^0=1$，得 $\lg 1=0$；

由 $10^1=10$，得 $\lg 10=1$.

指数函数 $y=2^x$ 和对数函数 $x=\log_2 y$ 刻画的是同一对变量 x，y 之间的关系，所不同的是：在指数函数 $y=2^x$ 中，x 是自变量，y 是 x 的函数，其定义域是 **R**；而在对数函数 $x=\log_2 y$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数，其定义域是 $(0,+\infty)$. 我们称对数函数 $x=\log_2 y$ 是指数函数 $y=2^x$ 的**反函数**，同时，也称指数函数 $y=2^x$ 是对数函数 $x=\log_2 y$ 的反函数.

习惯上，对数函数表示为 $y=\log_a x\,(a>0$，且 $a\neq1)$，指数函数表示为 $y=a^x\,(a>0$，且 $a\neq1)$. 因此，指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数，对数函数 $y=\log_a x$ 也是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 即它们互为反函数.

例 2 写出下列对数函数的反函数：

(1) $y=\lg x$；　　(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$.

解 (1) 因为对数函数 $y=\lg x$ 的底数是 10，所以它的反函数是指数函数 $y=10^x$；

(2) 因为对数函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的底数是 $\frac{1}{3}$，所以它的反函数是指数函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

例 3 写出下列指数函数的反函数：

(1) $y=5^x$；　　(2) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

解 (1) 因为指数函数 $y=5^x$ 的底数是 5，所以它的反函数是对数函数 $y=\log_5 x$；

(2) 因为指数函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 的底数是 $\frac{2}{3}$，所以它的反函数是对数函数 $y=\log_{\frac{2}{3}}x$.

练习

1. (1) 计算对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 当 $x=0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8$ 时的函数值；
   (2) 计算常用对数函数 $y=\lg x$ 当 $x=0.000\,01, 10\,000$ 时的函数值.
2. 指出下列各组函数之间的关系：
   (1) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 和 $y=\log_{\frac{4}{3}}x$；　(2) $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$；　(3) $y=e^x$ 和 $y=\ln x$.
3. 写出下列对数函数的反函数：
   (1) $y=\log_{2.5}x$；　(2) $y=\log_{\pi}x$；　(3) $y=\log_{\frac{1}{4}}x$.
4. 写出下列指数函数的反函数：
   (1) $y=4^x$；　(2) $y=1.4^x$；　(3) $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.

北京师范大学出版社

3.2 对数函数 $y=\log_2 x$ 的图象和性质

下面用两种不同的方法画出函数 $y=\log_2 x$ 的图象.

方法 1 描点法.

先列表(如表 4－1).

表 4－1

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\log_2 x$	…	-2	-1	0	1	2	3	…

再用描点法画出图象(如图 4-3).

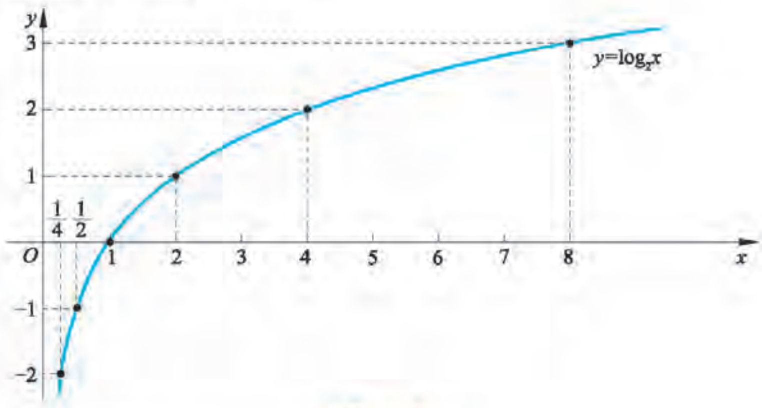


图 4-3

方法 2 由指数函数的图象得到对数函数的图象.

由于对数函数 $x=\log_a y$ 和指数函数 $y=a^x$ 所表示的 x 和 y 这两个变量之间的关系是一样的,因而在同一平面直角坐标系中函数 $x=\log_2 y$ 和 $y=2^x$ 的图象是一样的(如图 4-4(1)(2)).

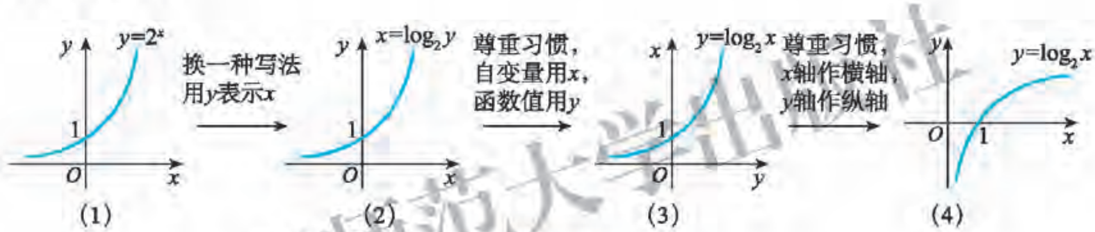


图 4-4

对于对数函数,习惯上,通常用 x 表示自变量,y 表示函数值,因此把 x 轴和 y 轴的字母表示互换,就得到$y=\log_2 x$的图象(如图 4-4(3)).

习惯上,x 轴在水平位置,y 轴在竖直位置,因此将图象翻转,使 x 轴在水平位置,得到通常的$y=\log_2 x$ 的图象(如图 4-4(4)).

从图象可以看出:

函数 $y=\log_2 x$ 的图象位于 y 轴的右边;从靠近 y 轴最下端的位置逐渐上升,过点(1,0),继续上升,函数值越来越大,直至无穷.

由此得到函数 $y=\log_2 x$ 的性质:

函数 $y=\log_2 x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是增函数,且值域为 **R**.

例 4 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $\log_2 0.25$,$\log_2 0.3$; (2) $\dfrac{1}{\log_2 4.5}$,$\dfrac{1}{\log_2 3.5}$.

解 (1) 因为函数 $y=\log_2 x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是增函数,且 $0.25<0.3$,所以 $\log_2 0.25<\log_2 0.3$;

(2) 因为函数 $y=\log_2 x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是增函数，且 $1<3.5<4.5$，所以 $0<\log_2 3.5<\log_2 4.5$，因此$\frac{1}{\log_2 3.5}>\frac{1}{\log_2 4.5}$.

例 5 (1) 求使不等式$\log_2 x>5$ 成立的实数 x 的集合；

(2) 已知$\log_2(2x-1)=\log_2(x^2-16)$，求 x 的值.

解 (1) 将不等式$\log_2 x>5$ 变形为$\log_2 x>\log_2 32$.

因为函数 $y=\log_2 x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是增函数，所以 $x>32$.

故使不等式 $\log_2 x>5$ 成立的 x 的集合为$\{x|x>32\}$.

(2) 由已知等式，得 $2x-1=x^2-16$. 解得 $x_1=-3$，$x_2=5$.

为使对数 $\log_2(2x-1)$和 $\log_2(x^2-16)$均有意义，需要 $2x-1>0$ 和 $x^2-16>0$. 因此 $x=-3$不合题意，舍去. 所以 x 的值为 5.

在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=2^x$ 的图象. 对函数 $y=\log_2 x$ 图象上的任意一点 $P(a,b)$，有 $b=\log_2 a$. 点 P 关于直线 $y=x$ 的对称点是 $Q(b,a)$，而 $a=2^b$，即点 Q 在函数 $y=2^x$ 的图象上(如图 4－5). 同样地，函数 $y=2^x$ 图象上的任意一点，它关于直线 $y=x$ 的对称点也在函数 $y=\log_2 x$ 的图象上. 所以，函数 $y=\log_2 x$ 的图象与函数 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

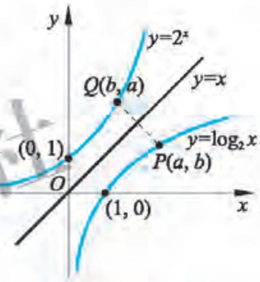


图 4－5

北京师范大学出版社

思考交流

1. 画出对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象，并说出它的性质.
2. 更一般地，当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 的图象有怎样的特征呢？
3. 当 $a>1$ 时，如何得到 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象？它有怎样的特征呢？

练 习

1. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\log_2 0.8$，$\log_2 0.3$；　　(2) $\log_{0.5} 0.1$，$\log_{0.5} 1.1$；

(3) $\log_3\sqrt{27}$，$\log_3 5$；　　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 0.8$，$\log_{\frac{1}{3}} 1.2$.

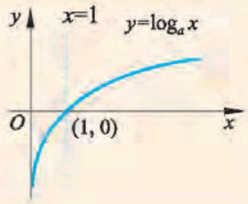
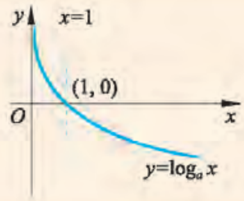
2. 求使下列不等式成立的实数 x 的集合：

(1) $\log_2(2-x)>-1$；　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$.

3.3 对数函数 $y=\log_a x$ 的图象和性质

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象和性质如表 4-2.

表 4-2

<table>
<tr><td></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">(1) 定义域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 值域：$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3) 过定点 $(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>(4) 当 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$</td><td>(4) 当 $x>1$ 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$</td></tr>
<tr><td>(5) 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数
当 x 值趋近于正无穷大时，函数值趋近于正无穷大；
当 x 值趋近于 0 时，函数值趋近于负无穷大</td><td>(5) 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是减函数
当 x 值趋近于正无穷大时，函数值趋近于负无穷大；
当 x 值趋近于 0 时，函数值趋近于正无穷大</td></tr>
</table>

北京师范大学出版社

例 6 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a x^2$；　　(2) $y=\log_a(4-x)$.

解 (1) 为使函数有意义，只需 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$；

(2) 为使函数有意义，只需 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域为 $\{x|x<4\}$.

例 7 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\log_2 5.3$，$\log_2 4.7$；　　(2) $\log_{0.2} 7$，$\log_{0.2} 9$；

(3) $\log_3 \pi$，$\log_\pi 3$；　　(4) $\log_a 3.1$，$\log_a 5.2$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

解 (1) 因为 $2>1$，所以函数 $y=\log_2 x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

由 $5.3>4.7$，得　　$\log_2 5.3>\log_2 4.7$.

(2) 因为 $0<0.2<1$，所以函数 $y=\log_{0.2} x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

由 $7<9$，得　　$\log_{0.2} 7>\log_{0.2} 9$.

(3) 因为 $3>1$，所以函数 $y=\log_3 x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

由 $\pi>3$，得　　$\log_3 \pi>\log_3 3=1$.

同理可得　　$1=\log_\pi \pi>\log_\pi 3$.

因此　　$\log_3 \pi>\log_\pi 3$.

(4) 对数函数的单调性取决于其底数是大于 1 还是大于 0 且小于 1，而已知条件中并未明确指出底数 a 与 1 哪个大，因此需要对底数进行分类讨论.

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数，此时由 $3.1<5.2$，得

$$\log_a 3.1<\log_a 5.2;$$

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是减函数，此时由 $3.1<5.2$，得

$$\log_a 3.1>\log_a 5.2.$$

思考交流

1. 根据表 4-3 中的数据(精确到 0.01 的近似值)，画出函数 $y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$ 和 $y=\log_5 x$ 的图象，并观察图象，说明三个函数图象的相同与不同之处.

表 4-3

x	0.5	1	1.5	2	3	4	…	1 000
$y=\log_2 x$	-1	0	0.58	1	1.58	2	…	9.97
$y=\log_3 x$	-0.63	0	0.37	0.63	1	1.26	…	6.29
$y=\log_5 x$	-0.43	0	0.25	0.43	0.68	0.86	…	4.29

2. 对数函数 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，讨论 a 的变化对函数图象的影响.

3. 请你猜想，对数函数 $y=\log_a x$，当 $0<a<1$ 时，a 的变化对函数图象有何影响?

北京师范大学出版社

例 8 人们早就发现了放射性物质的衰减现象. 在考古工作中，常用 ^{14}C 的含量来确定有机物的年代. 已知放射性物质的衰减服从指数规律：

$$C(t)=C_0 e^{-rt},$$

其中 t 表示衰减的时间，C_0 表示放射性物质的原始质量，$C(t)$ 表示经衰减了 t 年后剩余的质量.

为计算衰减的年代，通常给出该物质质量衰减一半的时间，称其为该物质的半衰期. ^{14}C 的半衰期大约是 5 730 年. 人们又知道，放射性物质的衰减速度与其质量成正比.

1950 年，在伊拉克发现一根古巴比伦王国时期刻有汉谟拉比王朝字样的木炭，当时测定，其 ^{14}C 的衰减速度为 4.09 个/(g · min)，而新砍伐树木烧成的木炭中 ^{14}C 的衰减速度为 6.68 个/(g · min). 请估算出汉谟拉比王朝所在年代.

解 因为 ^{14}C 的半衰期大约是 5 730 年，所以由衰减规律，得

$$\frac{1}{2}=e^{-5\,730r}.$$

解得 $r=\frac{\ln 2}{5\,730}$. 因此 ^{14}C 的衰减规律服从指数型函数

$$C(t)=C_0 e^{-\frac{\ln 2}{5\,730}\cdot t}=C_0\cdot 2^{-\frac{t}{5\,730}}.$$

设发现汉谟拉比王朝字样的木炭时(1950 年)，该木炭已衰减了 t_0 年. 因为放射性物质

的衰减速度与其质量成正比，所以 $\dfrac{C(t_0)}{C_0}=\dfrac{4.09}{6.68}$，

于是 $2^{-\frac{t_0}{5\,730}}=\dfrac{4.09}{6.68}$.

两边取以 2 为底的对数，得 $-\dfrac{t_0}{5\,730}=\log_2\dfrac{4.09}{6.68}$.

解得 $t_0=5\,730\log_2\dfrac{668}{409}\approx 5\,730\times 0.707\,7\approx 4\,055$.

所以该木炭已衰减了约 4 055 年，即汉谟拉比王朝大约存在于公元前 2100 年.

练 习

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，并说明这两个函数的相同性质和不同性质.
2. 求下列函数的定义域：

   (1) $y=\log_5(1-x)$；　(2) $y=\log_3\dfrac{1}{2x-1}$；　(3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.
3. 比较下列各题中两个数的大小：

   (1) $\lg 6$，$\lg 8$；　(2) $\log_{0.3}5$，$\log_{0.3}7$；　(3) $\log_a 2.5$，$\log_a 3.8$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

北京师范大学出版社

习题 4－3

A 组

1. 写出下列对数函数的反函数（用 x 表示自变量，用 y 表示函数）：

   (1) $y=\log_3 x$；　(2) $y=\log_{0.7} x$；　(3) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.
2. (1) 计算对数函数 $y=\log_3 x$ 当 $x=1,3,9$ 时的函数值；

   (2) 计算常用对数函数 $y=\lg x$ 当 $x=0.01,0.001,1\,000$时的函数值.
3. 求下列函数的定义域：

   (1) $y=\log_2(3-x)$；　(2) $y=\log_3\dfrac{3}{3x+4}$.
4. 比较下列各题中两个数的大小：

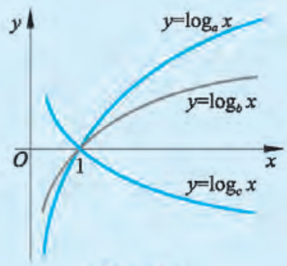
   (1) $\ln 5$，$\ln 9$；　(2) $\log_{0.3}1.6$，$\log_{0.3}1.5$；

   (3) $\log_{1.2}6$，$\log_{1.2}8$ ；　(4) $\log_a m$，$\log_a n$ （$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>n>0$）.
5. 已知下列不等式成立，比较正数 m，n 的大小：

   (1) $\ln m<\ln n$；　(2) $\log_{0.3}m>\log_{0.3}n$；

   (3) $\log_a m>\log_a n$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）.

6. 对数函数 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ ($a>0,b>0,c>0$, 且 a,b,c 均不为 1)的图象如图，试比较 a,b,c 的大小.



(第 6 题)

B 组

1. 已知 x,y 为非零实数，其中 $a>0$, 且 $a\neq1$, 试判定下列各式哪些一定成立，哪些不一定成立，并说明理由：

(1) $\log_a x^2=2\log_a x$;　　(2) $\log_a x^2=2\log_a|x|$;

(3) $\log_a|x\cdot y|=\log_a|x|\cdot\log_a|y|$;　　(4) $\log_a x^3>\log_a x^2$.

2. 已知放射性物质镭经过 100 年后，其剩余的质量为原来的 95.76%，求经过多少年后其剩余的质量为原来的 50%.

3. 已知 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，求证：当 $a,b\in(-1,1)$ 时，$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

北京师范大学出版社

信息技术应用

参数 a 对函数 $y=\log_a x$ 图象的影响

打开数学软件 GeoGebra，在输入框内输入参数“a”，回车，创建滑动条 a，选择 a 的“属性”，可自由设置其最小值、最大值、增量等.（注意参数 $a>0$，且 $a\neq1$.）根据对数的换底公式 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，在输入框内输入“$y=\ln(x)/\ln(a)$”，回车，在绘图区显示出当时参数 a 的值对应的函数$y=\log_a x$的图象(如图 4-6(1)).

当左右拖动滑动条中参数 a 的位置时，函数 $y=\log_a x$ 的图象就会随之发生变化(如图 4-6(2)).

拖动滑动条改变参数 a($a>0$，且 $a\neq1$)的值，可以发现：

(1) 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是增函数；固定 x 的值($x>1$)，a 的值越逼近 1，其函数值增长得越快；

(1) (2)

图 4-6

(2) 当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是减函数；固定 x 的值 $(0<x<1)$，a 的值越逼近 0，其函数值减少得越快.

你还能发现其他规律吗？

阅读材料

数学软件 GeoGebra

GeoGebra 最早是一个始于 2001 年的开源数学软件，其独特的名称来源于英文单词中“几何(Geometry)”与“代数(Algebra)”的组合，这个名字同时也反映了其最突出的特点：几何与代数的紧密结合.

最初，GeoGebra 只有一些基本的动态几何作图功能，但经过 GeoGebra 开源社区诸多贡献者的不懈努力，现在已经发展成为一个功能强大、跨平台、支持多种语言界面(包括中文)的综合数学教学与学习软件，在世界范围内有众多的使用者和贡献者，积累了十分丰富的数学学习资源.

GeoGebra 内置了多种针对数学学科学习和探究的工具，特别适合数学学习者用于探究几何、代数、概率统计、微积分和数学建模等内容. GeoGebra 可以按编辑模式、查看模式和网页模式等多种形式运行于不同类型的硬件平台上，包括 PC、平板电脑和智能手机等，其中以 PC 上的版本功能最全，使用也最为方便.

在本书中，我们将结合所学内容，通过丰富的案例和详细的操作步骤，带领大家由浅入深地逐渐熟悉这个软件，使大家在理解和复习所学数学知识的同时，轻松地掌握 GeoGebra 的各项主要功能，体验信息技术工具对数学学习的重要价值. 相信大家不但能熟练掌握书中介绍的例子和使用方法，也一定能将所学到的数学知识融会贯通，大胆创新，制作出更多、更精致的优秀作品，使 GeoGebra 真正成为你学习及探究数学的好帮手. 作为开源软件，GeoGebra 倡导免费使用、贡献共享的理念，我们在享受他人所贡献的丰富资源的同时，是不是也期待着能有所贡献呢？

§ 4 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

我们已经知道，给定常数 a,b,c，指数函数 $y=a^x(a>1)$、对数函数 $y=\log_b x(b>1)$、幂函数 $y=x^c(x>0,c>0)$都是增函数；而且当 x 的值趋近于正无穷大时，y 的值都是趋近于正无穷大的. 那么，这 3 个增函数的函数值的增长快慢有什么差别呢？

先举例比较一下幂函数与对数函数的增长情况. 观察表 4－4.

表 4－4

x	2^2	2^4	2^6	2^8	2^{10}	2^{12}	2^{14}	2^{16}
$y=x^{\frac{1}{2}}$	2	4	8	16	32	64	128	256
$y=\log_2 x$	2	4	6	8	10	12	14	16

可以看出，幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 比对数函数 $y=\log_2 x$ 增长快，而且快很多.

实际上，当 $b>1,c>0$ 时，即使 b 很接近于 1，c 很接近于 0，都有 $y=x^c$ 比 $y=\log_b x$ 增长快.

信息技术建议

可以借助信息技术画出动态的函数图象，直观地观察出函数的增长情况.

再举例比较一下指数函数与幂函数的增长情况. 观察表 4－5.

表 4－5

x	2^0	2^4	2^8	2^{10}	2^{14}	2^{20}
$y=2^x$	2	2^{16}	2^{256}	$2^{1\,024}$	$2^{16\,384}$	$2^{1\,048\,576}$
$y=x^{100}$	1	2^{400}	2^{800}	$2^{1\,000}$	$2^{1\,400}$	$2^{2\,000}$

可以看出，当 x 的值充分大时，指数函数 $y=2^x$ 比幂函数 $y=x^{100}$ 增长快，而且快很多.

实际上，当 $a>1,c>0$ 时，即使 a 很接近于 1，c 很大，都有 $y=a^x$ 比 $y=x^c$ 增长快.

思考交流

1. 结论“实际上，当 $b>1,c>0$ 时，即使 b 很接近于 1，c 很接近于 0，都有 $y=x^c$ 比 $y=\log_b x$ 增长快”“实际上，当 $a>1,c>0$ 时，即使 a 很接近于 1，c 很大，都有 $y=a^x$ 比 $y=x^c$ 增长快”的理由是什么呢？

2. 比较对数函数、一元一次函数、指数函数增长速度的差异.

北京师范大学出版社

至此，我们不仅知道 $y=a^x(a>1)$，$y=\log_b x(b>1)$ 和 $y=x^c(x>0,c>0)$ 这三个函数彼此之间增长快慢的比较，而且感受到：随着自变量 x 的增大，$y=a^x$ 的函数值增长远远大于 $y=x^c$ 的函数值增长；而 $y=x^c$ 的函数值增长又远远大于 $y=\log_b x$ 的函数值增长.

当底数 $a>1$ 时，由于指数函数 $y=a^x$ 的值增长非常快，人们称这种现象为“指数爆炸”.

练 习

1. 对于函数 $y=3^x$ 与 $y=x^3$：
   (1) 通过计算或借助绘图工具求这两个函数图象的交点个数；
   (2) $y=3^x$ 比 $y=x^3$ 增长得快，通过分析它们的图象解释其含义.

习题 4-4

1. 试比较函数 $y=x^{200}$，$y=e^x$，$y=\lg x$ 的增长情况.
2. 收集有关一元一次函数、指数函数、幂函数、对数函数的实际问题，分析其中函数增长的含义，写出你的体会，特别要体会“直线上升”“指数爆炸”“对数增长”的意义.

北京师范大学出版社

* § 5 信息技术支持的函数研究

前面我们研究了对数函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$的图象和性质. 如果将解析式中的 a,x 互换位置,底数变为自变量,即形如 $y=\log_x N(N>0$,且 $N\neq 1)$的函数,那么它的图象和性质是怎样的呢? 下面我们借助数学软件 GeoGebra 做进一步研究.

问题 1 根据函数 $y=\log_x N(N>0$,且 $N\neq 1)$的图象,判断它的单调性.

取 $N=2,0.5$,用 GeoGebra 分别画出函数 $y=\log_x 2$,$y=\log_x 0.5$ 的图象(如图4-7和图4-8).(在画函数图象输入解析式时,$y=\log_x 2$,$y=\log_x 0.5$ 需要利用对数换底公式分别改写为 $y=\dfrac{\ln 2}{\ln x}$,$y=\dfrac{\ln 0.5}{\ln x}$,或 $y=\dfrac{\lg 2}{\lg x}$,$y=\dfrac{\lg 0.5}{\lg x}$).

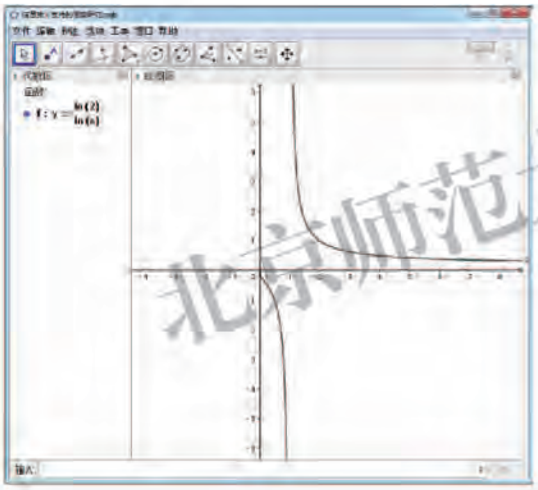


图 4-7

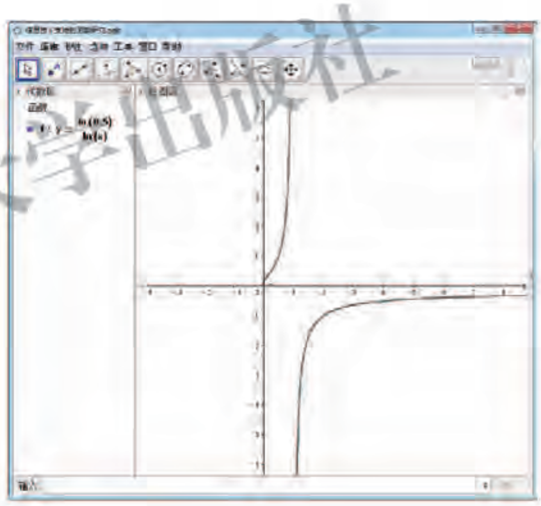


图 4-8

由图4-7知:$y=\log_x 2$ 在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上单调递减;由图4-8知:$y=\log_x 0.5$ 在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上单调递增.

一般地,$y=\log_x N(N>0$,且 $N\neq 1)$的单调性为:当 $N>1$ 时,在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上单调递减;当 $0<N<1$ 时,在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上单调递增.

问题 2 当 N 变化时,函数 $y=\log_x N(N>0$,且 $N\neq 1)$的图象有什么规律呢?

由前面的学习可知:当 $a>1$ 时,随着 a 的增大,对数函数 $y=\log_a x$(取$a=2,2.5,4,5$)图象的变化规律如图4-9(其中,$y=\log_2 x$ 可以不通过换底公式转换,直接输入解析式得到其图象);当 $0<a<1$ 时,随着 a

* 本节为选学内容,不作考试要求. 本套教材中所有出现"*"的部分,均为选学内容.

北京师范大学出版社

的增大，对数函数 $y=\log_a x$（取 $a=0.2, 0.25, 0.4, 0.5$）图象的变化规律如图 4－10.

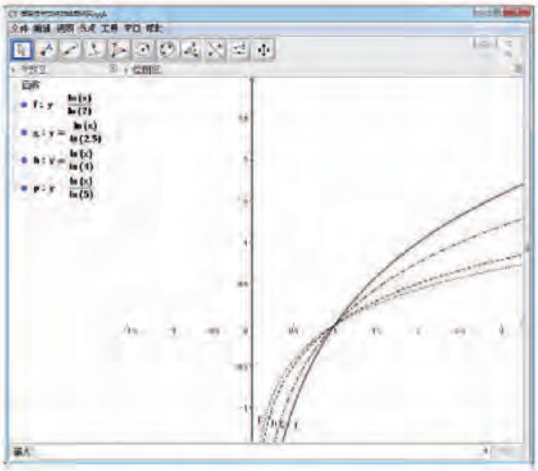


图 4－9

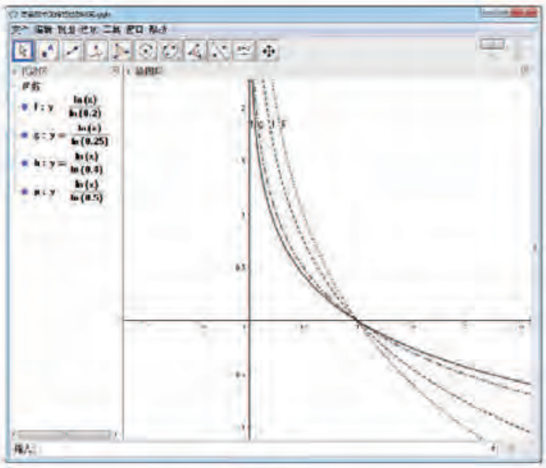


图 4－10

当 $N>1$ 时，以函数 $y=\log_x 2, y=\log_x 2.5, y=\log_x 4, y=\log_x 5$ 为例（如图 4－11）.

对于同一个自变量 x 的取值，当 $x>1$ 时，$y=\log_x N$ 的值随着 N 值的增大而增大；当 $0<x<1$ 时，$y=\log_x N$ 的值随着 N 值的增大而减小.

北京师范大学出版社

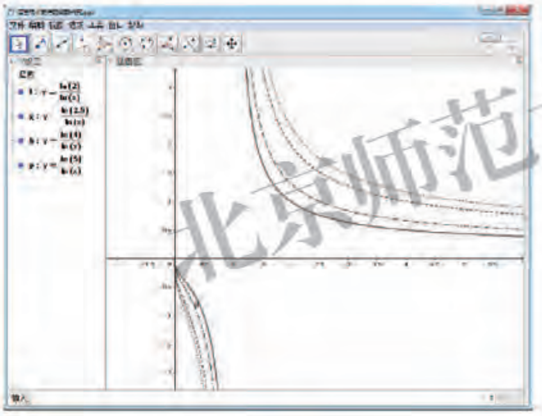


图 4－11

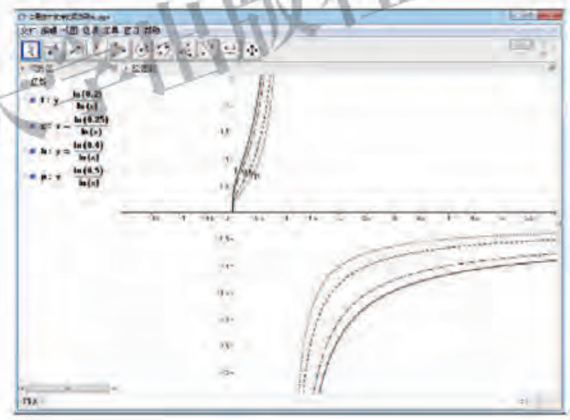


图 4－12

当 $0<N<1$ 时，以函数 $y=\log_x 0.2, y=\log_x 0.25, y=\log_x 0.4, y=\log_x 0.5$ 为例（如图 4－12）.

对于同一个自变量 x 的取值，当 $x>1$ 时，$y=\log_x N$ 的值随着 N 值的增大而增大；当 $0<x<1$ 时，$y=\log_x N$ 的值随着 N 值的增大而减小.

综上，无论是 $N>1$ 还是 $0<N<1$，函数 $y=\log_x N$ 的图象都分布在第一、第四象限，并且当 $x>1$ 时，对于同一个自变量的取值，函数值随着 N 值的增大而增大；当 $0<x<1$ 时，对于同一个自变量的取值，函数值随着 N 值的增大而减小.

问题 3 观察图 4－11，图 4－12，你还有什么发现？想一想，能否给出较为合理的解释呢？

对于函数 $y=\log_x N$（$x>0$，且 $x\neq 1$），不妨设 $f(x)=\log_x a$，$g(x)=\log_x \dfrac{1}{a}$（$a>0$），即 N 取一对互为

倒数的值. 因为 $g(x)=\log_x\frac{1}{a}=\log_x a^{-1}=-\log_x a=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\log_x a$ 的图象与函数 $g(x)=\log_x\frac{1}{a}$ 的图象关于 x 轴对称.

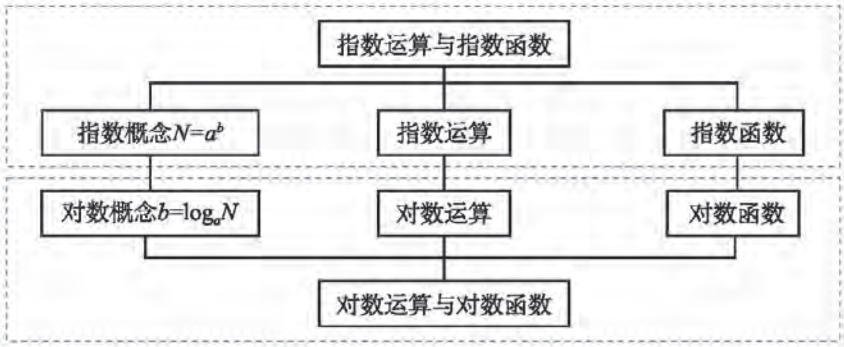
思考交流

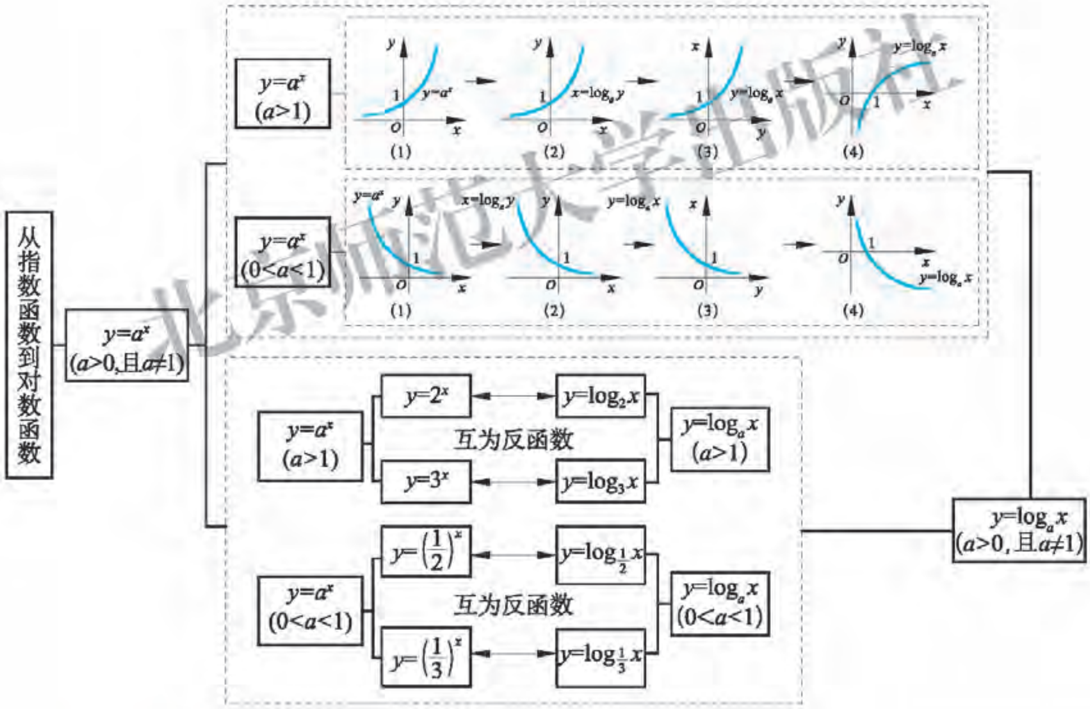
你的思路是怎样的呢? 是否还有其他的发现? 并与同学交流.

北京师范大学出版社

本章小结

一、知识结构





二、学习要求

1. 理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

2. 通过具体实例，了解对数函数的概念. 能用描点法或借助计算工具画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与图象的特殊点.

3. 知道对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数($a>0$,且 $a\neq1$).

*4. 收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料,撰写小论文,论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用.

三、需要关注的问题

1. 如何在指数的基础上引入对数的概念？如何通过指数幂的运算性质掌握对数的运算性质？如何通过指数函数的性质掌握对数函数的性质？

2. 指数函数与对数函数互为反函数的特性对学习对数函数有什么帮助？

3. 在已学的知识中,哪些知识有类似于反函数的“互为”特征？怎么理解？

北京师范大学出版社

复习题四

A 组

1. 将下列指数式改写为对数式($a>0$,且 $a\neq1$):

(1) $a^0=1$;　　(2) $a^1=a$;

(3) $a^2=N(N>0)$;　　(4) $a^{\frac{1}{3}}=m(m>0)$.

2. 将下列对数式改写为指数式($a>0$,且 $a\neq1$):

(1) $\log_a 12=2$;　　(2) $\log_a m=-2$;

(3) $\log_a(a+1)=\sqrt{2}$;　　(4) $\log_a 2a=-1$.

3. 求值:

(1) $\dfrac{\log_{27}16}{\log_3 8}$;　　(2) $\dfrac{\log_m(2a)-\log_m(2b)}{\log_m a-\log_m b}(a>0,b>0,a\neq b,m>0,m\neq1)$.

4. 判断下列各式是否恒等($a>0$,且 $a\neq1$):

(1) $(\log_a x)^2$ 和 $2\log_a x$;　　(2) $\log_a(x+y)$和 $\log_a x+\log_a y$;

(3) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$和 $\log_a\dfrac{x}{y}$;　　(4) $\dfrac{\log_a x}{n}$和 $\log_a\sqrt[n]{x}$.

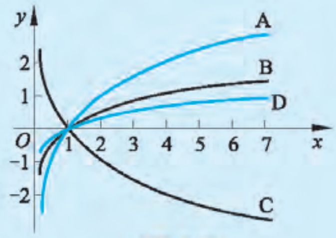
5. 如图,A,B,C,D 是 $y=\lg x$,$y=\log_4 x$,$y=\log_2 x$,$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 四个函数的图象,则

(1) 函数 $y=\lg x$ 的图象是________;

(2) 函数 $y=\log_4 x$ 的图象是________;

(3) 函数 $y=\log_2 x$ 的图象是________;

(4) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象是________.



(第 5 题)

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\lg(x+1)$;　　(2) $y=\sqrt{\log_3 x+1}$;

(3) $y=\lg\sqrt{2x-1}$;　　(4) $y=\log_2\dfrac{1}{1-3^x}$.

7. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $\log_6 0.7,\log_6 9.1$;　　(2) $\log_{0.2}7,\log_{0.2}9$;

(3) $\log_{0.3}5,\log_3 5$;　　(4) $\log_a 2,\log_a 6(a>0,a\neq1)$.

8. 已知下列不等式成立,比较 m,n 的大小:

(1) $\lg m>\lg n$;　　(2) $\log_2 m-\log_2 n>1$;

(3) $\log_{0.6}m^2>\log_{0.6}n^2$.

9. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\lg\dfrac{1}{x+1}$;　　(2) $y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$;

(3) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;　　(4) $y=\log_5(|x|+1)$;

北京师范大学出版社

(5) $y=\log_5(x+\sqrt{x^2+1})$.

10. 用 m,n 或 b,c 表示 x，其中 m,n,a,b,c 均大于 0，且 $a\neq1$.

(1) $\lg x=3\lg m+\lg n$；　　(2) $\log_a x=\log_a b^2-\log_a c$.

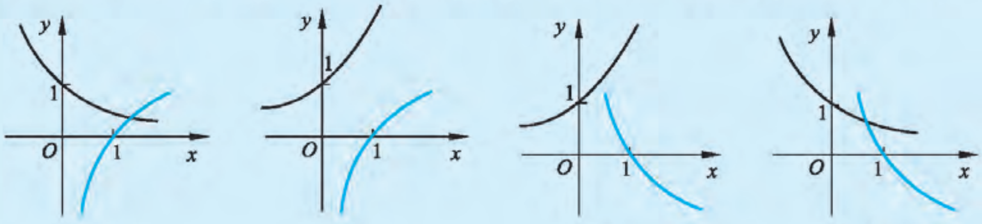
11. 选择题：

(1) 若 $b>a>1$，则函数 $y=\log_a(x+b)$ 的图象不经过(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 当 $a>1$ 时，在同一平面直角坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是(　　).



A　　B　　C　　D

12. 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v(单位：km/s)和所携带燃料的质量M(单位：kg)、火箭(除燃料外)的质量 m(单位：kg)的函数关系是 $v=2\ 000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可达到 12 km/s?

B　组

1. 已知函数 $y=\log_a x$，当 $x>2$ 时恒有 $|y|>1$，求实数 a 的取值范围.

2. 求下列各式中 x 的值：

(1) $(\lg x)^2-\lg x^2=3$；　　(2) $\log_3(1-2\cdot3^x)=2x+1$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\in(-\infty,1],\\ \log_{81}x, x\in(1,+\infty),\end{cases}$ 求满足 $f(x)=\dfrac{1}{4}$ 的 x 值.

4. 设 $y_1=\log_2 x, y_2=x^2, y_3=2^x$. 令 $x_1=2^n, x_2=2^{n+1}$.

(1) 请分别化简下列各式：① $\log_2 x_2-\log_2 x_1$；② $x_2^2-x_1^2$；③ $2^{x_2}-2^{x_1}$；

(2) 结合(1)中的化简结果，谈谈你对对数函数 y_1、幂函数 y_2、指数函数 y_3 变化的感受.

C　组

1. 已知 $2^x=3^y=12^z\neq1$，求证：$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$.

2. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)(a>0$，且 $a\neq1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；　　(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

3. 已知 $x=\ln\pi, y=\log_5 2, z=e^{-\frac{1}{2}}$.

(1) 比较 x,y 的大小；　　(2) 比较 y,z 的大小.

4. 已知 $a>0$，且 $a\neq1$，则指数函数 $y=a^x$ 的图象与对数函数 $y=\log_a x$ 的图象可能有几个交点？可以借助信息技术软件探索研究.

北京师范大学出版社

学习指导

利用信息技术学习数学

大家都知道，信息技术已经对我们日常生活产生了深刻影响，仔细看看周围，我们似乎每时每刻都离不开信息技术，在衣食住行、工作娱乐方方面面都享受着信息技术所带来的便利、高效及快乐.

信息技术手段和工具也能为我们的数学学习带来极大帮助，在数学学习中，同学们已经了解到图形计算器的价值. 除此之外，还有各种针对数学学科的软件和工具，其中既有著名的综合性商业数学软件 Mathematica, Matlab 和 Maple，也有开源的 Sage，还有专门用于辅助数学学习的工具，如 GeoGebra、几何画板和超级画板等. 这些软件工具功能强大、操作简单直观，既能帮助大家建立直觉、辅助计算和推导、发现规律、验证猜想，也有助于分组讨论探究、师生互动、交流分享，加深理解掌握、克服学习中遇到的各种困难.

在本书中，我们将以 GeoGebra、几何画板、Excel 为主，穿插介绍若干有代表性的信息技术工具. 通过绘制交互式图象、验证猜想和推导、探究函数性质、进行统计计算等典型案例，同学们将逐渐熟悉信息技术工具的应用，享受数学所带来的无限乐趣. 信息技术工具将成为同学们理解数学、欣赏数学、使用数学乃至探究数学的好帮手.

伴随着信息技术的学习和使用，同学们可以在此基础上从模仿到创新，一定能举一反三，熟能生巧，充分发挥信息工具的作用，做出自己满意的作品.

北京师范大学出版社

第五章

5 函数应用

函数是应用广泛的数学模型. 函数与许许多多其他的数学研究对象有着密切联系，如函数与方程、不等式、最值等. 在日常生活中，许多问题都可以借助函数表示出来，由此就可以对现象给予分析和解释，明确现象的规律和特征.

本章将从函数在解方程中的应用和在实际问题中的应用两方面展开，促进对函数的全面理解，发展应用数学的意识，提升数学建模的核心素养.

北京师范大学出版社

不管数学的任一分支是多么抽象，总有一天会应用在这实际世界上.

——罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevsky，1792—1856)

§1 方程解的存在性及方程的近似解

我们已经学过一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程，它们有相应的求解公式，并掌握了这些方程的求解方法. 而实际上，绝大部分方程没有求解公式. 本节我们就利用方程与函数的关系判断方程解的存在性，并给出方程近似解的求法.

1.1 利用函数性质判定方程解的存在性

实例分析

在初中数学中，我们已经学习了利用根的判别式判断一元二次方程实数根的情况，在这里换一种方法，从函数角度研究如何判定方程 $x^2-x-6=0$ 实数根的存在性.

观察函数 $f(x)=x^2-x-6$，容易得出，它的图象是开口向上的抛物线(如图 5－1)，且 $f(0)=-6<0$，$f(4)=6>0$，$f(-4)=14>0$.

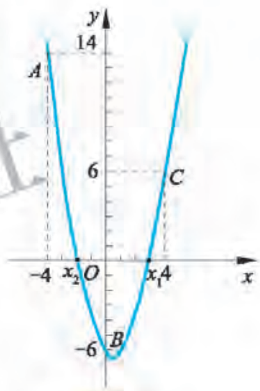


图 5－1

由于函数 $f(x)$ 的图象是连续的曲线，因此点 $B(0,-6)$ 与点 $C(4,6)$ 之间的那部分曲线必然穿过 x 轴，即在区间 $(0,4)$ 内必有一点 x_1，使 $f(x_1)=0$；同理，在区间 $(-4,0)$ 内也必有一点 x_2，使 $f(x_2)=0$. 因此，方程 $x^2-x-6=0$ 有两个不相等的实数根.

抽象概括

使得 $f(x_0)=0$ 的数 x_0 称为方程 $f(x)=0$ 的解，也称为函数 $f(x)$ 的**零点**. $f(x)$ 的零点就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

实际问题中，大部分函数的图象都是连续的曲线. 下面的零点存在定理提供了一种判断方程 $f(x)=0$ 解的存在性的方法.

零点存在定理　若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图象是一条连续的曲线，并且在区间端点的函数值一正一负，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内，函数 $y=f(x)$ 至少有一个零点，即在区间 (a,b) 内相应的方程 $f(x)=0$ 至少有一个解.

这里说“在区间 (a,b) 内，方程 $f(x)=0$ 至少有一个解”，只说明了方程 $f(x)=0$ 解的存在，并不能判断具体有多少个解.

当 $f(a)\cdot f(b)>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 也可能有解，如图5－2.

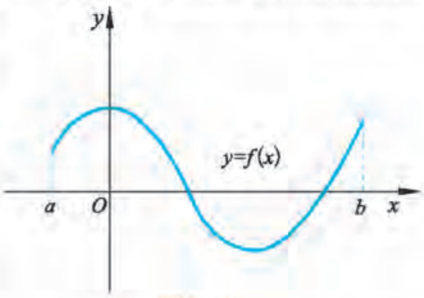


图 5－2

所以 $f(a)\cdot f(b)<0$ 是方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有解的充分条件而非必要条件.

例 1 方程 $3^x-x^2=0$ 在区间 $[-1,0]$ 内有没有解？为什么？

解 设函数 $f(x)=3^x-x^2$，在区间 $[-1,0]$ 上有

$$f(-1)=3^{-1}-(-1)^2=-\frac{2}{3}<0,$$

$$f(0)=3^0-0^2=1>0.$$

又因为函数 $f(x)=3^x-x^2$ 的图象是一条连续的曲线，所以由零点存在定理可知方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有解，即在区间 $[-1,0]$ 内有解，故方程 $3^x-x^2=0$ 在区间 $[-1,0]$ 内有解.

例 2 判定方程 $(x-2)(x-5)=1$ 有两个不相等的实数根，且一个根大于 5，另一个根小于 2.

解 设函数 $f(x)=(x-2)(x-5)-1$，显然有 $f(2)=f(5)=-1<0$.

画出函数 $f(x)=(x-2)(x-5)-1$ 的图象（如图 5－3），观察得

$$f(1)=(-1)\times(-4)-1=3>0,$$

$$f(6)=4\times1-1=3>0.$$

在区间 $[1,2]$ 和 $[5,6]$ 内分别应用零点存在定理，可知在区间 $(1,2)$ 和 $(5,6)$ 内，这个一元二次方程各有一个实数根（如图 5－3）.

北京师范大学出版社

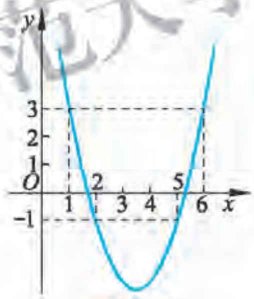


图 5－3

所以方程 $(x-2)(x-5)=1$ 有两个不相等的实数根，且一个根大于 5，另一个根小于 2.

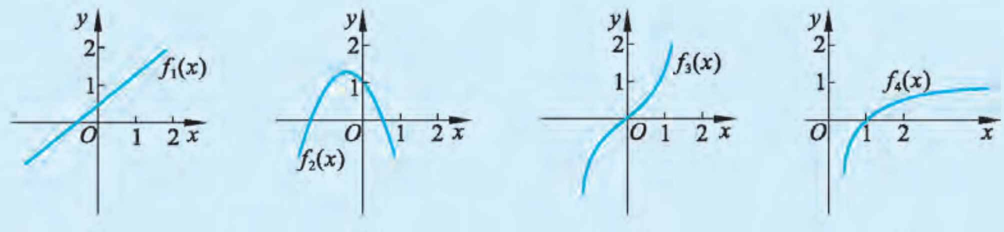
例 3 求证：对于任意一条封闭的曲线，都存在外切正方形.

证明 记封闭曲线为 Ω，在初始时刻的外切四边形为矩形 $ABCD$，它的边长分别为 $AB=a$ 和 $AD=b$. 若 $a=b$，则结论成立；若 $a\neq b$，不妨设 $a>b$.

现在，保持 Ω 不动，逆时针转动矩形 $ABCD$，转动过程中始终保持它与 Ω 外切. 设转动角为 θ，则 AB 与 AD 边长之差可以看成在 $[0°,90°]$ 上的连续函数 $f(\theta)$，且 $f(0°)=a-b>0$，$f(90°)=b-a<0$. 由函数的零点存在定理可知，一定存在 $\theta_0\in(0°,90°)$，使 $f(\theta_0)=0$. 这时，$AB=AD$，封闭曲线 Ω 的外切矩形是正方形.

练 习

1. 观察下面的四个函数图象，指出在区间$(-\infty,0)$内，方程$f_i(x)=0(i=1,2,3,4)$哪个有解，并说明理由.



(1)　(2)　(3)　(4)

（第1题）

2. 判定方程$4x^3+x-15=0$在区间$(1,2)$内解的存在性，并说明理由.

3. 说明下列方程存在解，并给出解的一个存在区间：

(1) $x-\dfrac{1}{x}=0$；

(2) $\lg x+x=0$.

北京师范大学出版社

1.2 利用二分法求方程的近似解

实例分析

绝大部分方程没有求解公式，而且在许多实际应用中，也不需要求出方程解的精确值，只要解满足一定的精确度就可以了. 设$\hat{x}$是方程$f(x)=0$的一个解，给定正数ε，若x_0满足$|x_0-\hat{x}|<\varepsilon$，就称$x_0$是满足精确度$\varepsilon$的近似解.

下面我们讨论方程$f(x)=0$近似解的求法.

对于一般的函数$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，若函数$y=f(x)$的图象是一条连续的曲线，$f(a)\cdot f(b)<0$，则方程$f(x)=0$在区间(a,b)内有解（如图5-4）.

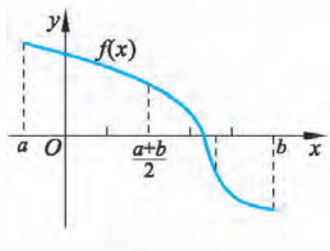


图5-4

依照如下方法，可以求出方程$f(x)=0$的近似解：

取区间(a,b)的中点$\frac{a+b}{2}$，若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$，则区间$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$内有方程的解.

再取区间$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$的中点……这样操作下去（如果取到某个区间的中点$x_0$，恰使$f(x_0)=0$，那么$x_0$就是所求的解；如果区间中点$x_0$的函数值不等于0，且区间某个端点的函数值与$f(x_0)$异号，那么$x_0$与这个端点组成新的区间的端点），经过有限次操作，就得到一串区间，其端点的函数值符号相反，且每次操作都使区间长度减小二分之一. 随着操作次数的增加，区间长度越来越小，端点逐步逼近方程$f(x)=0$的解，从而得到近似解.

像这样，对于一般的函数$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，若函数$y=f(x)$的图象是一条连续的曲线，$f(a)\cdot f(b)<0$，则每次取区间的中点，将区间一分为二，再经比较，按需要留下其中一个小区间的求方程近似解的方法称为**二分法**.

例4 求方程$2x^3+3x-3=0$的一个近似解.（精确度为0.01）

解 考察函数$f(x)=2x^3+3x-3$，基于零点存在定理，从一个两端点函数值异号的区间开始，应用二分法逐步缩小方程解所在区间.

经试算，$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，所以方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内有解.

取区间$(0,1)$的中点0.5，$f(0.5)=-1.25<0$，所以方程$f(x)=0$在区间$(0.5,1)$内有解.

如此下去，得到方程$f(x)=0$的解所在的区间（如表5-1）.

表5-1

次　数	左端点	左端点函数值	右端点	右端点函数值	区间长度
第1次	0	−3	1	2	1
第2次	0.5	−1.25	1	2	0.5
第3次	0.5	−1.25	0.75	0.093 75	0.25
第4次	0.625	−0.636 718 75	0.75	0.093 75	0.125
第5次	0.687 5	−0.287 597 656	0.75	0.093 75	0.062 5
第6次	0.718 75	−0.101 135 254	0.75	0.093 75	0.031 25
第7次	0.734 375	−0.004 768 372	0.75	0.093 75	0.015 625
第8次	0.734 375	−0.004 768 372	0.742 187 5	0.044 219 017	0.007 812 5

至此，可以看出，区间[0.734 375，0.742 187 5]的区间长度为0.007 812 5，它小于0.01. 而方程的解就在这个区间内，因此区间内的任意一个数都是满足精确度的近似解，例如，0.74就是方程$2x^3+3x-3=0$精确度为0.01的一个近似解.

抽象概括

二分法求方程近似解的思想来源于零点存在定理.

利用二分法求方程近似解的过程可以用图 5－5 表示，其中：

“初始区间”是一个两端点函数值异号的区间；

新区间的一个端点是原区间的中点，另一端点是原区间两端点中的一个，并且新区间两端点的函数值异号.

在用二分法求方程近似解的步骤中，初始区间的选定，往往需要通过分析函数的性质和试算. 初始区间选得不同，虽然不影响最终计算结果，但可能影响计算量的大小.

若方程 $f(x)=0$ 有多个解，则需要选取不同的初始区间来求得不同解的近似值.

随着进一步的学习，我们还可以学到方程近似解的其他求法.

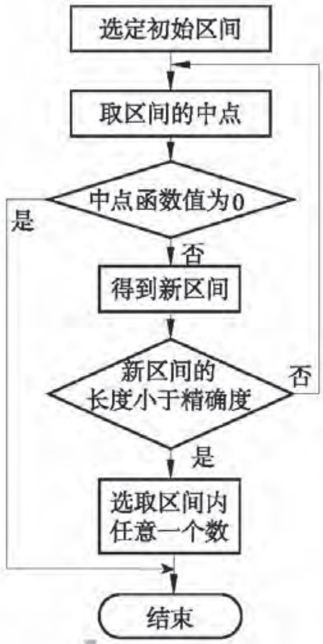


图 5－5

北京师范大学出版社

练 习

1. 用二分法求方程 $0.9^{x}-\frac{2}{21}x=0$ 的近似解.（精确度为 0.1，可以使用计算器）

习题 5－1

A 组

1. 判定下列方程在指定区间内是否存在实数根，并说明理由：

(1) $x^{2}-\frac{1}{x}=0$ 在区间$(-\infty,0)$内；

(2) $|x|-2=0$ 在区间$(-1,1)$内.

2. 判定下列方程存在几个实数根，并分别给出每个解的存在区间：

(1) $x^{2}+x-1=0$；

(2) $|\lg x|-\sqrt{2}=0$.

3. 已知函数 $f(x)=x^{3}+x-3$ 在区间$[1,2]$内有零点，求方程 $x^{3}+x-3=0$ 在区间$[1,2]$内的一个近似解.（精确度为 0.1）

B 组

1. 判定下列方程在区间(0,10)内是否存在实数根，并说明理由：

(1) $\frac{1}{2}x+\ln x=0$；　　(2) $x^2-\lg x=0$.

2. 根据图象是连续曲线的函数的性质以及函数增长快慢的差异，判断方程 $2^x=x^3$ 至少有两个实数根. 用二分法求方程 $2^x=x^3$ 的一个近似解.(精确度为 0.01)

北京师范大学出版社

§2 实际问题中的函数模型

2.1 实际问题的函数刻画

在现实世界里，事物之间存在着广泛的联系，当面对的实际问题中存在几个变量，并且它们之间具有依赖关系时，我们往往用函数对其进行刻画. 函数刻画的方法可以使用图象，但常见的还是使用解析式.

例 1 某公司设计了一种新型的几何模板. 经测算，每件产品的直接成本是 130 元，市场的合适售价是 190 元. 另外，还投入了 15 万元用于研发. 显然，这家公司一方面要尽力为使用者提供可信的产品，另一方面又要争取获得好的收益. 当这种新型几何模板畅销时，怎样计算总收益呢?（销售、仓储及维护等环节成本忽略不计）

解 (1) 首先看这个问题涉及的几个因素：

① 生产总成本（记作 C 元）与产量及单件产品的直接成本、研发费用有关系；

② 销售总收入（记作 R 元）与销售量及销售单价有关系；

③ 总收益（记作 L 元）与生产总成本及销售总收入有关系.

其中，销售单价、单件产品的直接成本和研发费用都是定量；当产品畅销时，销售量等于产量，产量是变量，可以设为 x 件.

(2) 再来看上述各因素之间满足的关系：

① 生产总成本 C 与产量 x 的关系为 $C=150\ 000+130x$；

② 销售总收入 R 与产量 x 的关系为 $R=190x$；

③ 总收益 L 与产量 x 的关系为

$$L=R-C=60x-150\ 000(x\geqslant 0).$$

L 关于 x 的函数图象如图 5-6.

从图中清晰可见：产量 2 500 件是关键点，若 $x<2\ 500$，则要亏损；若 $x=2\ 500$，则总收益为 0；若 $x>2\ 500$，则可盈利.

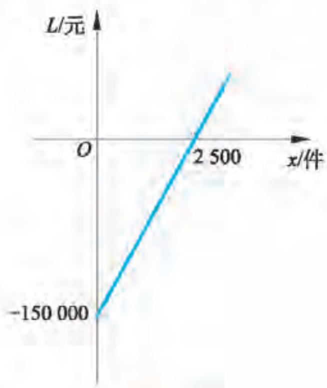


图 5-6

例 2 网购女鞋时，常常会看到一张女鞋尺码对照表（如表 5-2），第一行是脚长（新鞋码，单位：mm），第二行是我们习惯称呼的“鞋号（旧鞋码，单位：号）”.

表 5-2

脚长/mm	220	225	230	235	240	245	250	255	260
鞋号/号	34	35	36	37	38	39	40	41	42

北京师范大学出版社

(1) 求鞋号关于脚长的函数模型.

(2) 如果看到一款“30 号”的女童鞋，知道对应的脚长是多少吗？

(3) 一名脚长为 262 mm 的女篮球运动员，又该穿多大号的鞋呢？

解 (1) 观察表 5-2，设脚长(新鞋码)、鞋号(旧鞋码)分别为 x，y，将每一对数 x，y 对应的数对(x,y)用平面直角坐标系的点来表示(如图 5-7).

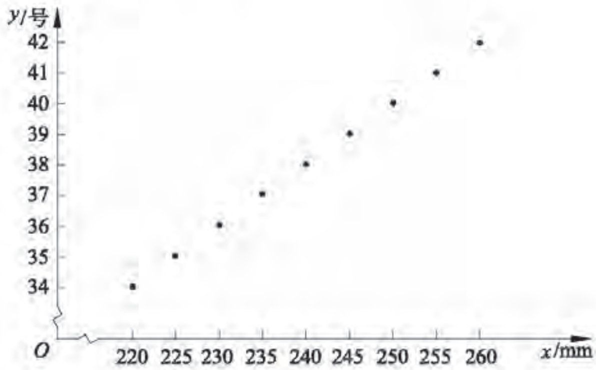


图 5-7

可以看出，这些点在一条直线上，不妨将这条直线表示为 $y=kx+b$. 利用表 5-2 中的任意两组数，得 $k=0.2$，$b=-10$. 因此

$$y=0.2x-10.$$

这就是鞋号关于脚长的函数模型.

(2) 当 $y=30$ 时，$x=200$，即能穿 30 号鞋的女童的脚长不超过 200 mm.

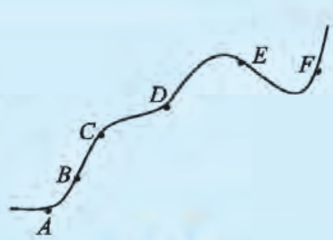
(3) 当 $x=262$ 时，$y=42.4$，即脚长为 262 mm 的女篮球运动员应穿 43 号的鞋.

> **注 意**
>
> 根据这个实际问题，此处取的是过剩近似值.

北京师范大学出版社

练 习

1. 如图，在一条弯曲的河道上，设置了 A,B,C,D,E,F 六个水文监测站. 现在需要在河边建一个情报中心，从各监测站沿河边分别向情报中心铺设专用通信电缆，怎样刻画专用通信电缆的总长度？



(第1题)

例 3 现有一把椅子，四条腿一样长且四脚连线成正方形，需放在起伏不平但光滑的地面上，问能否将这把椅子四脚同时落地放稳？

解 依照生活经验，如果一把椅子没放稳，只需前后挪动几下，或者旋转一下就能够放稳了. 也就是说答案应该是肯定的. 下面用函数的观点来给出理性的解释.

如图 5－8，记这把椅子四脚连线所形成的图形为正方形 $ABCD$，对角线的交点为 O；以点 O 为旋转中心，初始位置的 AC 转过 θ 角时，记 A，C 两点与地面距离之和为 $f(\theta)$，B，D 两点与地面距离之和为 $g(\theta)$. 因为任意位置的椅子都可以三只脚与地面接触，所以总有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$. 记 $F(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，显然函数 $F(\theta)$ 的图象是不间断的曲线.

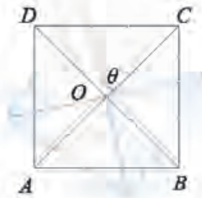


图 5－8

对于初始位置，不妨设 $f(0°)=0$，$g(0°)\geqslant 0$，那么 $F(0°)=-g(0°)\leqslant 0$. 椅子旋转 90°，点 D 转到点 A，$g(90°)=f(0°)=0$，$f(90°)=g(0°)\geqslant 0$，那么 $F(90°)=f(90°)\geqslant 0$.

于是，根据函数零点存在定理，可知在区间 $[0°,90°]$ 上存在 α，使得 $F(\alpha)=0$，即 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$，所以这把椅子四脚能够同时落地放稳.

这个例子告诉我们，零点存在定理的重要实用价值在于判断事物的存在性. 另外，用函数的观点观察生活，会对已知的事实或经验给出理性的解释.

在实际生活或工作中，从数学的视角发现事物的规律，并用数学模型明确表示出来，会给生活或工作带来方便.

例 4 加油站的汽油都存储在地下油槽中，由于比较容易测量槽中油料的高度，因此一般用油料的高度来监控油槽中的油料量. 现有一圆柱体油槽，横卧地下，其母线呈水平状态，纵截面是圆（如图 5－9），截面圆半径是120 cm，圆柱的长是 400 cm. 从资料可查出圆的弓形面积与圆面积比例系数表（如表 5－3），它给出了弓形面积占单位圆面积的比值 $C(k)$. 其中 $C(k)=\dfrac{\theta}{180}-\dfrac{1-k}{\pi}\sin\theta, k=\dfrac{h}{r}\ ,h\leqslant r$.

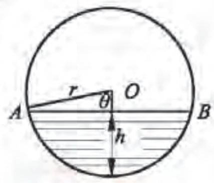


图 5－9

表 5－3

k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$C(k)$	0	0.019	0.052	0.094	0.142	0.196	0.252	0.312	0.374	0.436	0.5

为了方便加油站操作人员估计油槽中的油料量，请编制一份油料的液面高度 h（单位：cm）与油料量 V（单位：L）的对照表，该表的油料液面高度取值从 0 开始，最大为 120 cm，间隔12 cm.（π 取 3.14，油料量精确到 1 L）

解 如图 5－9，油槽截面的油料液面线为 AB，记油料液面高度 h 时的油料的面积为 $S(h)$. 依题意知

$$S(h)=\pi r^2\cdot\frac{\theta}{180}-(r-h)r\sin\theta$$
$$=\pi r^2\left(\frac{\theta}{180}-\frac{1-\frac{h}{r}}{\pi}\sin\theta\right)$$
$$=\pi r^2 C(k),$$

$$V(h)=400S(h).$$

这里 $r=120$ cm，于是可得到油料的液面高度 h 与油料量 V 的对照表(如表 5－4).

表 5－4

h/cm	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
S/cm^2	0	859.104	2 351.232	4 250.304	6 420.672	8 862.336	11 394.432	14 107.392	16 910.784	19 714.176	22 608
V/L	0	344	940	1 700	2 568	3 545	4 558	5 643	6 764	7 886	9 043

练　习

1. 在距 A 城市 45 km 的 B 地发现金属矿. 现知由 A 至某方向有一条直线铁路 AX，B 到该铁路的距离为 27 km. 欲运物资于 A，B 之间，拟定在铁路线 AX 上的某一地点 C 筑一公路到 B. 已知公路运费是铁路运费的 2 倍，则地点 C 到 A 地的距离为多少时，总运费最低?

北京师范大学出版社

2.2　用函数模型解决实际问题

数学模型是针对或参照某种事物的主要特征、主要关系，用形式化的数学语言，抽象概括地、简化近似地表述出来的一种数学结构. 其中，函数模型是应用最广泛的数学模型之一. 实际问题一旦被认定是函数关系，就可以通过研究这个函数的性质，使问题得到解决.

例 5　要建造一段 5 000 m 的高速公路，工程队需要把 600 人分成两组，一组完成一段 2 000 m 的软土地带公路的建造任务，同时另一组完成剩下的 3 000 m 的硬土地带公路的建造任务. 据测算，软、硬土地每米公路的工程量分别是 50 人・天和 30 人・天. 问：如何安排两组的人数，才能使全队筑路工期最短?

解　设在软土地带工作的人数为 x 人，则在硬土地带工作的人数为 $(600-x)$ 人. 根据题意，在软土地带筑路时间为

$$f(x)=\frac{50\times 2\ 000}{x},$$

在硬土地带筑路时间为

$$g(x)=\frac{30\times 3\ 000}{600-x},$$

其中 $x\in(0,600)$，$x\in \mathbf{N}_+$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,600)$ 上是减函数，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,600)$ 上是增函数，所以

全队筑路工期为
$$t(x)=\begin{cases}f(x),\ 当\ f(x)\geqslant g(x),\\ g(x),\ 当\ g(x)\geqslant f(x).\end{cases}$$

由 $f(x_0)=g(x_0)$，即$\dfrac{50\times 2\ 000}{x_0}=\dfrac{30\times 3\ 000}{600-x_0}$，得 $x_0=\dfrac{6\ 000}{19}$. 从而
$$t(x)=\begin{cases}\dfrac{50\times 2\ 000}{x},\ x\in(0,x_0],\\ \dfrac{30\times 3\ 000}{600-x},\ x\in[x_0,600),\end{cases}\quad 且\ x\in\mathbf{N}_+.$$

因为函数 $t(x)$ 在区间 $(0,x_0]$ 上递减，在区间 $[x_0,600)$ 上递增，所以 x_0 是函数 $t(x)$ 的最小值点. 但$\dfrac{6\ 000}{19}\approx 315.8$ 不是整数，于是计算 $t(315)$ 和 $t(316)$，其中较小者即为所求.

经计算，$t(315)\approx 317.46$，$t(316)\approx 316.90$.

于是，当安排 316 人到软土地带工作，284 人到硬土地带工作时，可以使全队筑路工期最短.

例 6 某公司每年需要某种计算机元件 8 000 个，每次购买元件需手续费 500 元，每个元件的库存费是每年 2 元. 若将这些元件一次购进，则可少花手续费，但即便不考虑资金占用，8 000 个元件的库存费也不少. 若多次进货，则可减少库存费，但手续费要增加. 现在需要确定：每年进货几次最经济（总费用最少）？

解 首先要做一些假设：

(1) 每天需同样多的元件；(2) 其他费用可以作为常数看待.

将 8 000 个元件所需的总费用记为 F 元，一年总库存费记为 E 元，购买元件总手续费记为 H 元，其他费用记为 C 元（C 为常数），则
$$F=E+H+C.$$

若每年平均进货 n 次 $(n\in\mathbf{N}_+)$，则每次的进货量为 $q=\dfrac{8\ 000}{n}$ 个. 假设用完 q 个元件的时间为 $\bar{t}=\dfrac{1}{n}$ 年，在 $[0,\bar{t}\,]$ 内，t 时刻的库存量为 $V(t)$，满足

$$V(t)=kt+b(0\leqslant t\leqslant\bar{t}\,),\quad V(0)=q,\quad V(\bar{t}\,)=0.$$

解得 $V(t)=-8\ 000t+q(0\leqslant t\leqslant\bar{t}\,)$.

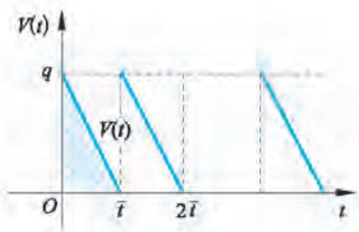


图 5-10

如图 5-10，阴影部分的面积是第一个 $\bar{t}$ 时间段内需支付库存费的库存量的总和，相当于在 $\bar{t}=\dfrac{1}{n}$ 年内每一时刻需支付库存费的库存量均为$\dfrac{\frac{1}{2}q\bar{t}}{\bar{t}}=\dfrac{4\ 000}{n}$（个）.

北京师范大学出版社

在 $\bar{t}=\frac{1}{n}$ 年内，每个元件的库存费为 $\frac{2}{n}$ 元，则 $\frac{4\ 000}{n}$ 个元件的库存费为

$$\frac{4\ 000}{n}\cdot\frac{2}{n}=\frac{8\ 000}{n^2}(\text{元}),$$

一年总库存费为

$$E=n\cdot\frac{8\ 000}{n^2}=\frac{8\ 000}{n}(\text{元}).$$

另外，$H=500n$ 元，所以

$$F=E+H+C=\frac{8\ 000}{n}+500n+C(n\in\mathbf{N}_+).$$

由基本不等式，得

$$F\geqslant 2\sqrt{\frac{8\ 000}{n}\cdot 500n}+C=4\ 000+C.$$

当且仅当 $\frac{8\ 000}{n}=500n$，即 $n=4$ 时，上面的不等式取等号，此时总费用最少，故每年进货 4 次最经济.

本例中的模型叫作存贮模型.

练习

1. 某商店进了一批服装，每件进价为 60 元. 每件售价为 90 元时，每天售出 30 件. 在一定的范围内这批服装的售价每降低 1 元，每天就多售出 1 件. 请写出每天的利润（单位：元）与售价（单位：元）之间的函数关系式，并求当售价是多少元时，每天的利润最大.

北京师范大学出版社

习题 5-2

A 组

1. 某罐装饮料厂为降低成本要将制罐材料减小到最少. 假设罐装饮料筒为圆柱体，上、下底半径均为 r，高为 h，体积为定值 V，上、下底厚度分别是侧面厚度的 2 倍. 试问：当 r 与 h 之比是多少时，用料最少？（可以到市场上进行调查，看看哪些罐装饮料大体上符合你的计算结果）

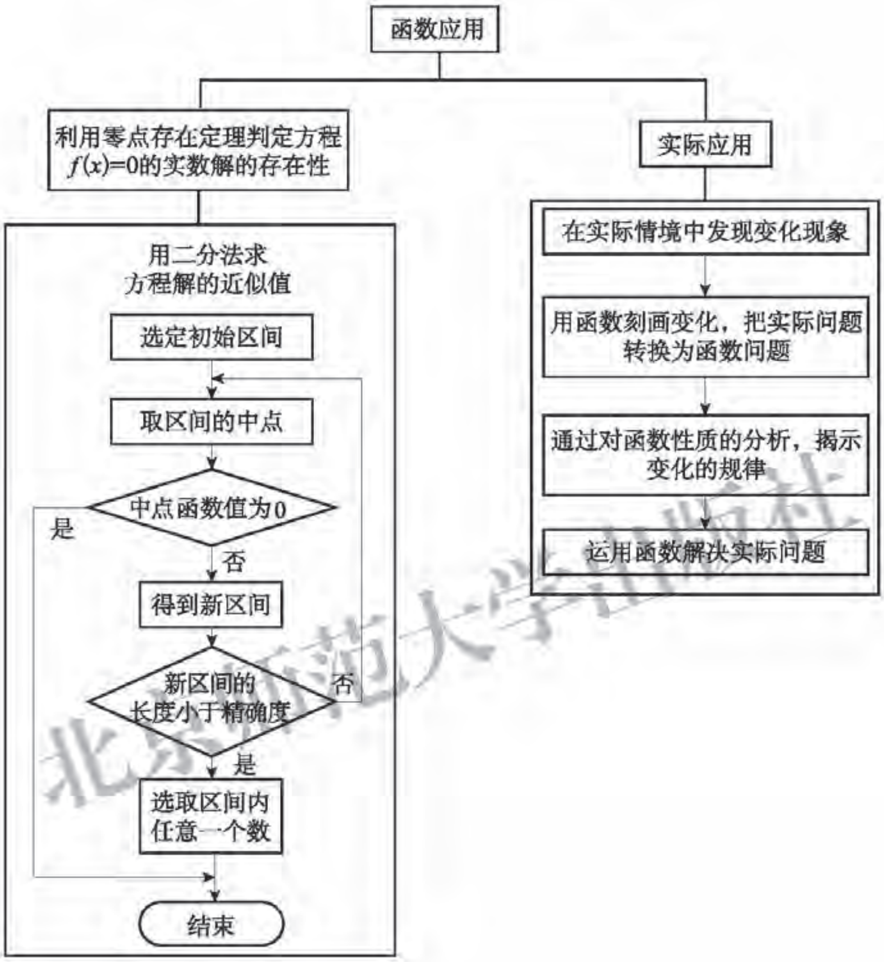
B 组

1. 通过独立思考或查阅资料，给出一般情况下的存贮模型，并画出存贮模型的函数图象.

本章小结

一、知识结构

学会运用数学知识解决其他的数学问题和实际问题.



二、学习要求

1. 二分法与求方程的近似解

(1) 结合学过的函数图象，了解函数零点与方程解的关系.

(2) 结合具体连续函数及其图象的特点，了解函数零点存在定理，探索用二分法求方程近似解的思路并会画程序框图，能借助计算工具用二分法求方程近似解，了解用二分法求方程近似解具有一般性.

2. 函数与数学模型

(1) 理解函数模型是描述客观世界中变量关系和规律的重要数学语言和工具. 在实际情境中，会选择合适的函数模型刻画现实问题的变化规律.

(2) 收集、阅读一些现实生活、生产实际或者经济领域中的数学模型，体会人们是如何借助函数刻画实际问题的，感悟数学模型中参数的现实意义.

三、需要关注的问题

1. 通过学习函数应用，你对学习函数(学习数学)有什么感悟?
2. 通过二分法，如何理解在实际问题的解决中，“近似”是绝对的?
3. 信息技术在函数应用的过程中有哪些应用?

北京师范大学出版社

复习题五

A 组

1. 判断方程 $x^3-x-1=0$ 在区间$[1,1.5]$内是否有解；如果有，求出一个近似解.（精确度为 0.1）
2. 经过市场调查分析，某地区一年的前 n 个月内，对某种商品的需求累计 $f(n)$万件，近似地满足下列关系：

$$f(n)=\frac{1}{90}n(n+2)(18-n),n=1,2,3,\cdots,12.$$

(1) 求这一年内，哪几个月需求量超过 1.3 万件？

(2) 若在全年销售，将该产品都在每月初等量投放市场，则为保证该产品全年不脱销，每月初最少投放多少万件？

B 组

1. 飞行员从飞机上跳伞，第 1 s 落下约 16 ft[①]，第 2 s 落下约 48 ft，第 3 s 落下约 80 ft，如果空气阻力不计，那么在第 10 s 内，飞行员落下的距离是多少？
2. 在测量某物理量的过程中，由于仪器和观察的误差，n 次测量值分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 规定所测量物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量：a 与各测量值的差的平方和最小. 依此规定，请用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 表示出 a.

C 组

1. 渔场中鱼群的最大养殖量为 m t，为了保证鱼群的生长空间，实际养殖量 x t 小于 m t，以便留出适当的空闲量. 已知鱼群的年增长量 y t 和实际养殖量与空闲率(空闲率是空闲量与最大养殖量的比值)的乘积成正比，比例系数为 $k(k>0)$.

(1) 写出 y 关于 x 的函数关系式，并指出该函数的定义域；

(2) 求鱼群年增长量 y 的最大值；

(3) 当鱼群年增长量 y 达到最大值时，求实数 k 的取值范围.

① “英尺”的英文表示为“foot”，简写为“ft”. 1 ft=12 in(英寸)=30.48 cm.

北京师范大学出版社

第六章 统　计

在日常生活中，存在着各种各样的数据，如计步器记录了已经走的步数，地图软件预测在路途上花费的时间，天气预报给出明天的温度、空气质量指数、穿衣指数、洗车指数等. 面对这些纷繁复杂的数据，从中获取所需要的信息是非常重要的.

统计是研究如何合理收集、整理、分析数据的学科，它可以帮助我们从数据中提取有用的信息，并为决策提供依据.

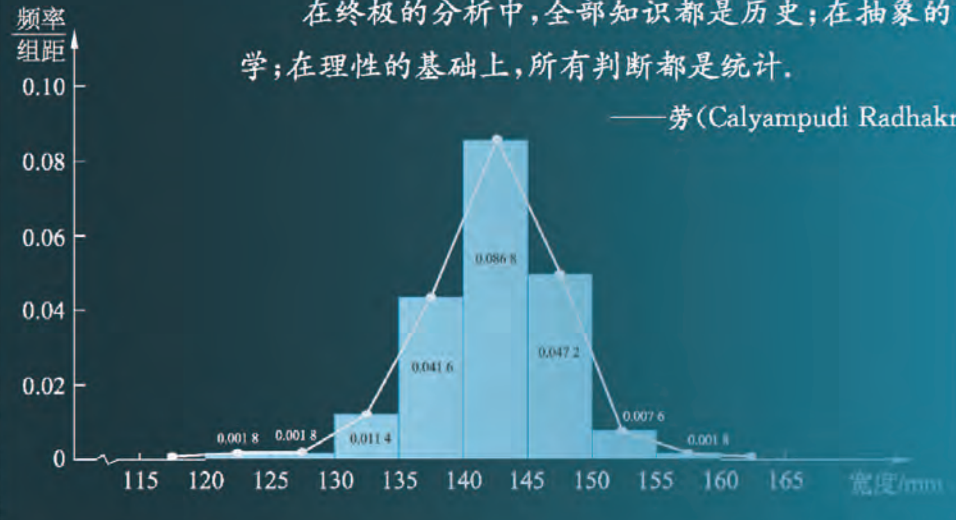
在某种意义上，经典数学有助于提高演绎能力，统计学有助于提高归纳能力.

本章将通过对具体问题的分析，体会用统计思想解决问题的方法，提升数据分析、逻辑推理等核心素养.

北京师范大学出版社

在终极的分析中，全部知识都是历史；在抽象的意义下，一切科学都是数学；在理性的基础上，所有判断都是统计.

——劳(Calyampudi Radhakrishna Rao，1920—　)



§1 获取数据的途径

生活中遇到的很多问题，都需要借助数据才可能得到答案. 例如，校园中每天产生多少可回收垃圾，食堂有多少人就餐，城市里的车辆有多少，公共汽车平均每天的载客量是多少，某旅游旺季有出门旅游意向的人有多少……要得到这些问题的答案，就需要获取相关数据.

本节我们一起来探讨如何获取数据.

1.1 直接获取与间接获取数据

对于需要使用数据的人而言，获取数据的方法有两种：直接获取与间接获取.

直接获取是指通过社会调查或观察、试验等途径获取数据. 直接获取的数据称为**直接数据**或**一手数据**.

在实际中，直接获取数据通常有问卷调查、试验收集等形式. 另外，在直接获取数据时，应注意数据来源的广泛性、代表性、均衡性.

如果需要获取的数据量较多，那么直接获取数据会消耗较多的人力、物力与时间，此时，可考虑间接获取数据.

间接获取是指借助各种媒介，包括报纸杂志、统计报表和年鉴、广播、电视或互联网等获取数据. 间接获取的数据称为**间接数据**或**二手数据**.

随着信息技术的发展，许多数据来源于间接数据，其中，通过互联网获取数据越来越成为获取间接数据的主要方式. 在生活中，恰当地运用间接数据往往能够节约大量的时间和费用，从而取得较好的效益.

与此同时，因为数据的来历和渠道的多样，所以质量会参差不齐. 因此，使用间接数据时，要注意以下两个方面：

(1) 对下载的数据进行多方的核实，确保数据的真实性、准确性；

(2) 引用间接数据时要注明数据来源，尊重他人的劳动成果，保护他人的知识产权.

1.2 普查和抽查

普查是为了掌握调查对象的整体情况，对全体调查对象进行研究的一种调查方式. 很多与国计民生相关的基本数据都需要通过普查的方式获得. 在我国，常见的普查有 10 年一次的人口普查，5 年一次的经济普查和农业普查等.

北京师范大学出版社

人口普查是一项规模宏大的政府工程.我国(大陆)以 2010 年 11 月 1 日零时为标准时点进行了第六次全国人口普查,2011 年 4 月 28 日发布公告,历时近 6 个月.

第六次全国人口普查的结果:全国总人口为 1 370 536 875 人,其中:普查登记的大陆 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的人口共 1 339 724 852 人,香港特别行政区人口为 7 097 600 人,澳门特别行政区人口为 552 300 人,台湾地区人口为 23 162 123 人.下面呈现了该报告提供的大陆 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的一些数据:

性别构成:男性人口为 686 852 572 人,占 51.27%;女性人口为 652 872 280 人,占 48.73%.粗算一下,我国男性比女性多 3 400 万.

人口增长:同第五次全国人口普查的 1 265 825 048 人相比,十年共增加 7 389 904 人,增长率为 5.84%,年平均增长率为 0.57%.

年龄构成:0~14 岁人口占 16.60%,比第五次全国人口普查下降 6.29 个百分点;60 岁及以上人口占 13.26%,比第五次全国人口普查上升 2.93 个百分点,其中 65 岁及以上人口占 8.87%,比第五次全国人口普查上升 1.91 个百分点.

人口的流动:与第五次全国人口普查相比,居住地与户口登记地所在的乡镇街道不一致且离开户口登记地半年以上的人口增加 116 995 327 人,增长 81.03%.

各种受教育程度人口:与第五次全国人口普查相比,每 10 万人中具有大学文化程度的由 3 611 人上升为 8 930 人;具有高中文化程度的由 11 146 人上升为 14 032 人;具有初中文化程度的由 33 961 人上升为 38 788 人;具有小学文化程度的由 35 701 人下降为 26 779 人.

登记误差:普查登记结束后,全国统一随机抽取 402 个普查小区进行了事后质量抽样调查.抽查结果显示,人口漏登率为 0.12%.

北京师范大学出版社

思考交流

参考以上材料,思考下列问题:

(1) 人口普查对一个国家的发展有什么作用?你能举例说明吗?

(2) 第六次全国人口普查中漏登的人数大约是多少?你对人口普查中的漏登率是如何认识的?

(3) 你认为普查的优势与不足分别是什么?根据你的生活经验,举例说明哪些情况不能进行普查.

在获取数据时,除了普查的方法外,人们也常采用抽查的方法.

例 1 医生是如何检验某人的血液中血脂含量是否偏高的？你觉得这样做的合理性是什么？

解 医生在检验人的血液中血脂含量是否偏高时，通常是抽取少量的血样进行检验，然后由此作出推断，确定该人血液中血脂含量的基本情况.

医生在检验时是不可能将一个人的血液都抽出来进行普查的.

例 2 在汽车的安全测试中，有一项碰撞试验，目的是评估当汽车遇到猛烈撞击时的损坏程度，给出相应的等级. 你觉得这项试验可以实施普查吗？

解 这里要调查的是：在汽车碰撞试验中，汽车的损坏程度. 这项试验不能实施普查，因为这项试验对汽车的破坏几乎是毁灭性的，所以只能从同款汽车中抽取若干辆汽车进行试验，然后由此作出推断，其前提是已经认为这一款汽车在经历猛烈撞击时的表现都是一样的.

经过对上面例题的分析，我们可以看出：在处理某些实际问题的过程中，有的很难获得全部数据，有的若获取全部数据需要付出很大的代价. 针对这样的调查，我们通常采用抽样调查的方法.

一般地说，在调查过程中，有两种获取数据的方法：普查和抽样调查. 从全体调查对象中，按照一定的方法抽取一部分对象作为代表进行调查分析，并以此推断全体调查对象的状况. 这种抽取一部分对象的调查方式叫作**抽样调查**，简称**抽查**.

与普查相比，抽查的主要优点有：迅速、及时，节约人力、物力和财力.

当然，因为抽查是由部分推及全体，所以其结果具有不确定性.

练 习

1. 某工厂要检测一批炮弹的哑弹率(哑弹指已经发射使用，但未爆炸的炮弹)，你认为应当怎样进行检验？并说明你的理由.
2. 动物学家想在某种鸟类身上安装卫星定位仪，以便考察该种鸟类的迁徙规律. 你认为这项试验可以实施普查吗？

1.3 总体和样本

实例分析

情境 1 国家为了解青少年身体发育和身体素质状况，对在校学生进行体质健康测试，

其中一个项目是测量学生的身高.

在这一情境中，总体是什么？

情境 2 某中学有 3 120 名学生，校长想了解学生对学校开展的研学旅行课程的喜爱程度.

情境 3 从已经生产出来的 10 万个灯泡中抽取一部分，以此来了解这 10 万个灯泡的寿命(使用时间).

在情境 2、情境 3 中，总体分别是什么？

分析理解

在情境 1 中，调查对象是全国在校学生的身高. 因此，这个统计问题的总体就是全国在校学生的身高.

每一位学生的身高对应着一个数值，当知道了每一个数值在全体调查对象中所占的百分比(也就是我们后面将学习的“概率”)，就了解了这个总体的分布.

在情境 2 中，调查对象是该学校 3 120 名学生对学校开展的研学旅行课程的喜爱程度，因此，总体是这所中学 3 120 名学生对开展的研学旅行课程的喜爱程度. 如果将喜爱程度量化，那么在知道这些量在 3 120 名学生中的比例之后，就了解了这个总体的分布.

在情境 3 中，调查对象是 10 万个灯泡的寿命，因此，总体是 10 万个灯泡的寿命.

有时候，对总体可以有更宽泛的理解. 例如，为了了解某工厂的生产状况，检查人员抽取了该工厂生产的一些产品，要考察的对象是该工厂现在和今后一段时间生产的所有产品. 此时，这些对象(有的还没有生产出来)的全体构成了检查人员要考察的总体.

抽象概括

一般地，当问题明确后，调查对象的范围也就随之确定. 调查对象的全体称为**总体**. 通常总体中的每个个体可以对应成数值，当知道了这些数值在总体中所占的比例(百分比)，就知道了总体的分布.

例如，在上述情境中总体分别是：全国在校学生的身高、学生对学校开展的研学旅行课程的喜爱程度、10 万个灯泡的寿命. 无论是身高、喜爱程度，还是寿命，都对应着一个数值，知道了这些数值在全体调查对象中相应的比例，也就知道了总体的分布.

在进行抽样调查时，从总体中抽取的部分称为**样本**，其过程称为**抽样**，样本中个体的数目称为**样本容量**，简称**样本量**.

北京师范大学出版社

思考交流

在抽取样本时，应该关注些什么呢？

例 3 某城市准备出台限制私家车的政策，以缓解城市的交通拥堵状况，为此要进行民意调查. 某小组调查了一些拥有私家车的市民，你认为这样的抽样是否具有代表性？

解 一个城市交通状况的好坏将直接影响着生活在这个城市中的每个人，关系到每个人的利益. 在这个问题中，总体应为全体市民的意见. 该调查小组选择的样本，只是拥有私家车的市民的意见，并不能很好地代表总体，所以结果一定是片面的.

例 4 为了解某校学生的消费能力，某小组选择在学校超市门口对购物的学生进行调查. 你认为这样的调查结果会怎样？

解 这项调查的总体应为该校全体学生的消费能力. 该调查小组选择的受访者为去学校超市购物的学生，而这部分学生的消费情况并不能很好地代表总体，所以结果是片面的.

上述两个例子表明，要想从样本出发，对总体作出基本合理的判断（由于样本是随机的，误差是不可避免的），就要求样本能够很好地代表总体. 例如，如果全校有 40%的学生常去学校超市购物，那么样本中常去学校超市购物的学生也应该近似占 40%.

在抽样调查中，首先需要确定调查对象，即明确总体. 对总体来说，人们最看重的是它的各类数据所占的百分比. 总体中各类数据的百分比都清楚了，这个总体也就清楚了. 总体中各类数据的百分比称为**总体的分布**. 其次，在抽取样本时，要尽可能地使得样本的分布（即样本中各类数据的百分比）与总体的分布相同. 所谓样本能很好地“代表”总体，就是指样本的分布与总体的分布近似相同.

练 习

1. 在抽样调查中，应当注意什么问题？
2. 什么样的样本才具有代表性？用具体的例子加以说明.
3. 如果现在有一项面对全市学生的日常花费的调查，你将如何完成这项调查？某同学采用了在朋友圈发问卷调查的方式，你觉得这样得到的数据具有代表性吗？

习题 6－1

A 组

1. 即将升入高二的同学面临着在物理、化学、生物、历史、地理、政治六个科目中选择三科作为等级性考试科目. 学校在选择物理的学生中抽取一部分学生的物理成绩进行调查. 这项调查的总体是什么？
2. 某航空公司为了利润最大化，希望获得旅客选择座位时的倾向，依据座位的受欢迎程度收取选座服务附加费. 这项调查的总体是什么？

B 组

1. 如果想调查左利手们(指生活中从事主要活动惯用左手的人)对社会公共设施的满意程度，需要调查的总体是什么？你计划如何开展这项调查？
2. 在规划大众健身器材时，需要考虑民众对现有器材的使用和满意程度. 这时的总体是什么？你计划如何开展这项调查？

北京师范大学出版社

阅读材料

选举的预测

美国一家有名的刊物《文学文摘(Literary Digest)》在预测 1936 年美国总统选举结果时发生了重大的失误. 当年有两位候选人，一位是民主党的罗斯福(Franklin Delano Roosevelt，1882—1945)，另一位是共和党的兰登(Alfred Mossman Landon，1887—1987). 当时，大多数民意测验、新闻机构和政治观察家都预测罗斯福会获胜，但《文学文摘》与众不同地预言兰登会以 57%∶43%的优势战胜罗斯福，在当时产生了很大的反响. 而实际情况是：罗斯福以 62%∶38%的压倒性优势战胜兰登当选总统. 正是由于这个重大失误，这家杂志不久即宣告破产.

当时，《文学文摘》作出这个预测，并非一种主观臆断，而是做了大样本(240 万份调查问卷)的民意测验. 为何根据这么大的样本却没有得到满意的结果呢？问题不是由于采用了抽样的方法而没有采用普查的方法造成的，而是出在样本的挑选上.

当时，《文学文摘》的访问对象是从电话号码簿和俱乐部会员名册上选取的. 但在 1936 年，美国的家庭电话尚未普及，只有 1 100 万部左右；尤其是有条件参加俱乐部的人，大多是经济上较富有、政治上保守、倾向于共和党的选民，这就造成了显著的系统误差. 当时，正值 1929 年至 1933 年美国经济大萧条结束后不久，较贫困的阶层人数不少，

失业人数多达 900 万. 与兰登相比,罗斯福要推行的新政较多地考虑了这些人的利益,由于这些选民的意见没有在样本中得到体现,导致《文学文摘》的预测产生如此大的偏差.

另外,《文学文摘》原计划要访问 1 000 万人,而实际回收的调查问卷只有 240 万份. 较富有的人,对当时现实抱比较满意的态度,做出回答的可能性要大些,这个倾向有利于共和党. 这是另一个系统误差. 比如,《文学文摘》向芝加哥地区三分之一的登记选民发放了调查问卷,只有 20%的人做了回答,其中半数以上有利于兰登. 但实际结果是:在芝加哥地区罗斯福具有 2∶1 的优势.

在《文学文摘》调查之后,盖洛普公司做过多次关于总统大选结果的民意测验,调查的人数不过几千人,但预测结果却相当成功. 盖洛普公司预测的具体情况如表 6-1.

表 6-1

年　份	样本量	当选者	盖洛普预测得票率	实际得票率
1952	5 385	艾森豪威尔	51.0%	55.4%
1956	8 144	艾森豪威尔	59.5%	57.5%
1960	9 015	肯尼迪	51.0%	50.1%
1964	6 625	约翰逊	64.0%	61.3%
1968	4 414	尼克松	43.0%	43.5%
1972	3 689	尼克松	62.0%	61.8%
1976	3 439	卡特	49.5%	51.1%

北京师范大学出版社

说明:本阅读材料改编自陈希孺的《机会的数学》.

§ 2 抽样的基本方法

在统计活动中，首先要从实际问题中明确统计的调查对象，即总体，并将总体量化成某个数值后，人们就可以收集样本数据，整理、分析数据，对总体进行估计.

本节主要介绍在统计全过程中抽样的方法.

显然，在获取数据的时候，首先应关注样本如何能更好地代表总体.

例如，在调查学校学生的身高时，按照每个学生被抽到的可能性相同的方法抽取，那么如果当身高在 190 cm 及以上的学生占全体学生的 0.1%时，抽取到身高在 190 cm 及以上的学生的可能性就是 0.1%；当身高在 160 cm～170 cm 的学生占 40%时，抽取到 160 cm～170 cm的学生的可能性也是 40%. 这样，样本的分布能近似于总体的分布. 此外，样本的容量越大，其近似程度越好.

在抽样调查中，每个个体被抽到的可能性均相同的抽样方法，称为**随机抽样**.

随机抽样有多种不同的方法，每种方法都有各自的优越性与局限性，针对不同的问题应当选择适当的抽样方法. 下面讨论两种比较典型的抽样方法：简单随机抽样和分层随机抽样.

北京师范大学出版社

2.1 简单随机抽样

实例分析

某班有 40 名学生，从中随机抽取 3 人作为代表去参加某项测试，应该怎样抽样？

因为每名学生都有学号，因此对于这个问题，总体可以看作全班学生的学号. 可以把全班学生的学号依次分别写在 40 张同样大小的纸条上，以同样的方式折叠后放进同一个不透明的容器中，搅拌均匀，然后逐张不放回地从中抽取 3 张.

这种方式可以保证每名学生被抽到的可能性是一样的.

抽象概括

一般地，从 N(N 为正整数)个不同个体构成的总体中，逐个不放回地抽取 $n(1\leqslant n<N)$

个个体组成样本，并且每次抽取时总体内的每个个体被抽到的可能性相等，这样的抽样方法通常叫作**简单随机抽样**. 简单随机抽样是一种最基本的抽样方法. 对于不知道某些特别信息的总体，往往采用简单随机抽样.

在解决实际问题时，如何实施简单随机抽样呢？

通常采用抽签法和随机数法(利用工具产生随机数).

抽签法：先把总体中的 N(N 为正整数)个个体编号，并把编号依次分别写在形状、大小相同的签上(签可以是纸条、卡片或小球等)，再将这些号签放在同一个不透明的箱子里搅拌均匀. 每次随机地从中抽取一个，然后将箱中余下的号签搅拌均匀，再进行下一次抽取. 如此下去，直至抽到预先设定的样本容量.

抽签法的具体步骤：

(1) 给总体中的每个个体编号；

(2) 抽签.

思考交流

抽签法有哪些优点和缺点？当个体数很多时，还方便使用抽签法吗？

北京师范大学出版社

随机数法：先把总体中的 N 个个体依次编码为 $0,1,2,\cdots,N-1$，然后利用工具(转盘或摸球、随机数表、科学计算器或计算机)产生 $0,1,2,\cdots,N-1$ 中的随机数，产生的随机数是几，就选第几号个体，直至选到预先设定的样本容量.

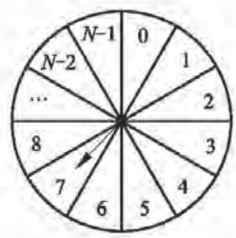


图 6-1

利用转盘产生随机数是比较简单的，就是先将转盘分成 N(N 为正整数)等份(如图 6-1)，分别标上整数 $0,1,2,\cdots,N-1$，再转动转盘，指针指向几就取第几号个体.(重复数字不计)

利用摸球产生随机数也是一样，就是先将 N(N 为正整数)个形状、大小、质地完全相同的球分别标上整数 $0,1,2,\cdots,N-1$，再放入一个不透明的容器中进行摸球(如图 6-2)，摸到几号球，就抽取相应标号的个体，然后将余下的球搅拌均匀，准备下一次摸球.


图 6-2

用随机数表产生随机数是一个常用的方法. 在上面的摸球试验中，取 $N=10$，并改用有放回的方式进行摸球. 每摸出一个球，就将球的号码按行、列的方式依次写在一个空白表中，这样就形成了一个**随机数表**. 历史上，第一个这样的随机数表是由英国统计学家梯培特(Leonard Henry Caleb Tippett，1902—1985)制作的，并于 1927 年出版. 表 6-2 呈现的是它的一部分.

表 6-2

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9243	4935	8200	3623	4869	6938	7481
2976	3413	2841	4241	2424	1985	9313	2322
8303	9822	5888	2410	1158	2729	6443	2943
5556	8526	6166	8231	2438	8455	4618	4445
2635	7900	3370	9160	1620	3882	7757	4950
3211	4919	7306	4916	7677	8733	9974	6732
2748	6198	7164	4148	7086	2888	8519	1620
7477	0111	1630	2404	2979	7991	9683	5125
5379	7076	2694	2927	4399	5519	8106	8501
9264	4607	2021	3920	7766	3817	3256	1640
5858	7766	3170	0500	2593	0545	5370	7814
2889	6628	6757	8231	1589	0062	0047	3815
5131	8186	3709	4521	6665	5325	5383	2702
9055	7196	2172	3207	1114	1384	4359	4488
7900	5870	2606	8813	5509	4324	0030	4750
3693	9212	0557	7369	7162	9568	1312	9438
0380	3338	0138	4560	4230	6496	3806	0347
0246	4469	9719	8316	1285	0357	2389	2390
7266	0081	6897	2851	4666	0620	4596	3400
9312	4779	5737	8918	4550	3994	5573	9229
6111	6098	0965	7352	6847	3034	9977	3770
2310	4476	9148	0679	2662	2062	0522	9234
9826	8857	8675	6642	5471	8820	4308	2105
6703	8248	6064	6962	0053	8188	6494	4509
1110	9486	6533	3954	1944	1516	1682	3404
9651	1456	5613	0357	4244	3341	9605	3567
8350	5728	4338	0824	7899	1307	5814	8688
6982	5126	7736	3383	6215	3441	8578	2277
6490	7644	7085	8361	5662	4141	9877	3747
8570	2150	8140	4355	5321	2548	0208	7543
9169	0408	4353	6122	8913	9930	4169	6032
2127	0162	6176	4969	8185	9312	8748	8575
8090	9872	1968	0263	0081	2662	6831	3106
2959	9011	1448	4346	7019	8148	1557	8400

北京师范大学出版社

由于随机数表中的每个数字都是随机产生的，因此可以利用随机数表来产生随机数.

利用随机数表进行抽样的具体步骤：

(1) 给总体中的每个个体编号；

(2) 在随机数表中随机抽取某行某列作为抽样的起点，并规定读取方法；

(3) 依次从随机数表中抽取样本号码，凡是抽到编号范围内的号码，就是样本的号码，并剔除相同的号码，直至抽满为止.

如果总体的编号是一位数，想随机选取 7 个个体，那么应该首先从随机数表中随机抽取一行一列的某一个数值，如表 6-2 中第 2 行第 5 列的数字 9，作为抽样的起始数字；然后横向依次读取一位数：9，2，4，3，4，9，3，5，8，2，0，…，其中 4，9，3，2 被重复抽取. 因此，最终抽取的样本编号为：9，2，4，3，5，8，0.

如果总体中个体的编号是两位数，那么先从随机数表中随机抽取某一行某一列的数字，作为抽样的起始数字；然后依次读取两位数，读取的规则既可以横向自左向右读取数字，也可以纵向自上向下读取数字. 抽到给定范围内的号码，就是样本的号码，并剔除相同的号码，直至抽满为止.

例 1 在由 80 个个体组成的总体中，利用随机数表随机地选取 10 个个体组成样本.

解 具体做法如下：

(1) 将总体中的每个个体进行编号：00，01，02，…，79；

(2) 在随机数表(如表 6-2)中随机抽取某一行某一列，如从第 3 行第 5 列开始，横向依次读取两个数字；

(3) 根据上述原则，得到 34，13，28，41，42，41，24，24，19，85，93，13，23，22，83，03，…，其中，41，24，13 重复出现，85，93，83 超过 79. 这样选出的 10 个样本编号为：34，13，28，41，42，24，19，23，22，03.

利用计算机软件、科学计算器或图形计算器产生随机数，对于总体容量很大时尤其显得方便. 很多科学计算器或计算机软件都有一种产生随机数的工具，只需一些简单的操作就可以得到比较理想的结果.

信息技术应用

随机数的产生

利用计算机软件和科学计算器都可以很方便地得到随机数.

在计算机软件(如 Excel)中有一个随机函数 RAND( )产生[0,1)之间的随机数. 只要运行一次，这个函数就产生一个随机数. 我们要做的工作，就是将产生的[0,1)之间

北京师范大学出版社

的实数变换成 $0,1,2,\cdots,N-1$ 这 N 个整数.

例如，一个 $N=100$ 的总体，当 RAND( )=0.321 454…时，我们只要做一个变换 Int(100 * RAND( ))（相当于把所取的随机数乘 100，然后取其整数部分），就把所产生的随机数变换成了 32. 一般地，我们只需对随机函数和取整函数做一个复合就可以了，也就是取 Int(N * RAND( )). 如果产生的随机数是 0，就认为取第 N 号个体，否则产生的随机数就可以对应个体的编号.

科学计算器中都有一个随机函数 RAND，它可以产生$[0,1)$之间的随机数. 有些科学计算器还提供了随机函数 RANDI，它可以产生任意两个整数之间的随机整数. 其操作步骤如下（用不同型号的计算器产生随机数，步骤略有不同）：按键 PRB，选 RANDI，再输入整数 a 和 $b(a<b)$，即可产生$[a,b)$上的随机整数.

另外，利用图形计算器也同样可以产生随机数. 产生随机数的方法是多种多样的，同学们可以根据自己的需要，选择不同的方法来得到随机数.

练 习

1. 某年级正准备组织某项课外活动，同学们都积极地要求参加，因此需要从全年级 300 名同学中随机抽取 20 名同学参加. 请用随机数表产生随机数的方法设计抽取方案.

北京师范大学出版社

2.2 分层随机抽样

实例分析

例 2 某学校开展学生对教师任教满意度的调查活动. 首先，通过问卷对全体学生进行普查，然后根据普查结果，抽取一部分学生进行访谈.

表 6－3 是该学校在普查中对某位教师任教的所有班级（4 个班级）的满意度调查结果：

表 6－3

班级编号	1	2	3	4
满意度/%	98	97	90	91

现在，想从这 4 个班级中选取一部分学生进行访谈. 有 4 名同学是这样操作的：

同学甲从 2 号班级、4 号班级中抽取一部分同学进行访谈.

同学乙从 1 号班级、2 号班级中抽取一部分同学进行访谈.

同学丙从 1 号班级、3 号班级中抽取一部分同学进行访谈.

同学丁从 3 号班级、4 号班级中分别抽取一部分同学进行访谈.

你认为哪名同学的调查更合理?

在这个调查中,总体是该教师任教班级每一名同学对其任教的满意度.从普查结果来看,总体的分布呈现了满意度“高高低低”的现象,因此,在选取访谈学生的抽样时,既不能只选择两个满意度高的班级,也不能只选择两个满意度低的班级,而是要让样本的分布与总体的分布近似相同,也就是说同学甲和同学丙的抽样更合理一些.

例 3 某市有大、中、小型的商店共 1 500 家,且这三种类型商店的数量之比为 $1:5:9$. 要调查全市商店的每日零售额情况,要求抽取 30 家商店进行调查,应当采用怎样的抽样方法?

在这个问题中,调查的总体是 1 500 家商店的每日零售额,而且在总体中,大、中、小型商店的比例是已知的.

在随机抽样过程中,抽取的样本中三种类型商店的比例,应与总体中三种类型的商店比例相同.因此,抽取的 30 家商店样本应按照 $1:5:9$ 的比例从大、中、小型商店中抽取,使样本比较好地代表总体的特征.

所以,可以抽取 $30\times\frac{1}{1+5+9}=2$(家)大型商店,$30\times\frac{5}{1+5+9}=10$(家)中型商店,$30\times\frac{9}{1+5+9}=18$(家)小型商店,组成样本.

抽象概括

如果总体是由差异明显的几类个体构成,并且知道每一类个体在总体中所占的百分比,那么按照这个比例抽取每一类个体,样本就能很好地反映总体的规律,也会提高对总体推断的准确性.

将总体按其属性特征分成互不交叉的若干类型(有时称作**层**),然后在每个类型中按照所占比例随机抽取一定的个体,这种抽样方法通常叫作**分层随机抽样**.

例 4 某地农田分布在山地、丘陵、平原、洼地不同的地形上,要对这个地区的农作物产量进行调查,应当如何抽样?

解 因为不同类型农田的产量有较大差异,所以应当采用分层随机抽样的方法,对不同类型的农田按其占总数的比例抽取样本.

北京师范大学出版社

例5 某公司有 1 000 名员工，其中 50 名属于高收入者，150 名属于中等收入者，800 名属于低收入者. 要对该公司员工的具体收入情况进行调查，欲抽取 100 名员工，应当怎样抽样比较合理?

解 可以采用分层随机抽样的方法. 按照该公司员工的收入水平分成三层：高收入者、中等收入者、低收入者. 高收入者为 50 名，占所有员工的比例为$\frac{50}{1\,000}=5\%$，为保证样本的代表性，在所抽取的 100 名员工中，高收入者所占的比例也应为 5%，即 $100\times5\%=5$，所以应抽取 5 名高收入者比较合理. 同理，抽取 15 名中等收入者、80 名低收入者，再对他们的具体收入状况分别进行调查.

在现实抽样时，我们可能并不清楚总体具备哪些特征. 比如，上一节阅读材料《选举的预测》中，《文学文摘》就是忽略了支持者的贫富差异. 所以在实际操作时往往先采用简单随机抽样抽取一小部分个体做预调查，考察总体是否具备分层随机抽样的特点，同时也要考虑如何分层才能更好地代表总体.

在解决实际问题时，大部分情况不止采用一种抽样方法，而会采用多种方法进行抽样调查. 在统计的全过程中，对数据来源的科学认识是至关重要的. 选取与实际问题相适宜的抽样方法，直接关系到数据的可靠性.

北京师范大学出版社

练 习

1. 一班有学生 54 人，二班有学生 42 人，现在要用分层随机抽样的方法从两个班中抽取一部分人参加4×4方队表演，则一班和二班被抽取的人数分别是多少?

习题 6－2

A 组

1. 某高校后勤处想调查学生对学校食堂新设水果窗口的意见. 已知男、女生对新设水果窗口的意见可能有较大差异，该校有男生 4 000 人，女生 3 000 人. 现需要从全校学生中抽取 490 名进行调查，则应该从男、女生中各抽取多少人比较合理?
2. 为了评估某校的教学水平，将抽取这个学校高三年级部分学生本学年的考试成绩进行考察. 为了全面反映实际情况，采取以下两种抽样方式(已知该校高三年级共有 10 个教学班 400 名学生，并且每个班的学生都已经按随机方式编好了学号，假定每班人数都相同)：

   方式 1：从全年级 10 个班中任意抽取一个班，考察他们的成绩；

方式 2：把该校高三年级的学生按成绩分成优秀、良好、普通三个级别(若按成绩分，该校高三学生中优秀学生有 60 名，良好学生有 180 名，普通学生有 160 名)，从中按比例抽取 40 名学生进行考察.

根据上面的叙述，试回答下列问题：

(1) 上面两种抽样方式各自采用何种抽取样本的方法?

(2) 分别写出上面两种抽样方式各自抽取样本的步骤.

B 组

1. 现在需要解决本校食堂每天应该准备多少米饭比较合适的问题. 如果采用从本校学生中抽样调查每个人的饭量来得到相关信息，那么是否存在某变量作为分层的主要考虑因素?
2. 现在想估计某寒带地区旅游城市一年的游客量，能采用在 1 月—3 月随机抽取 10 天的游客量作为全年每天游客量的一组样本，合理吗? 为什么? 如果这种抽样方法不合理，请你设计一个你认为合理的抽样方案.

北京师范大学出版社

§3 用样本估计总体分布

前面已经介绍了收集数据的一些方法．一旦数据被收集上来，就希望从中找出需要的信息．通过样本数据的特征，估计总体的相应特征，以便帮助人们做出恰当的判断或决策．

3.1 从频数到频率

问题提出

情境1 某工厂生产一批产品，经调查只有10个不合格品．

情境2 某工厂生产一批产品，经调查产品不合格率为1%．

上面哪一种情境能更好地反映工厂的生产情况？

分析理解

“生产了100个产品有10个不合格品”与“生产了10 000个产品有10个不合格品”，这两种情况虽然都是10个不合格品，但是工厂生产产品的数量却大不相同，因此只知道某个指标的频数是不够的，需要用频率来刻画．频率表示频数与总数的比值，能更好地反映样本和总体的相应特征．

北京师范大学出版社

例1 表6-4是某两名篮球运动员在中国男子篮球职业联赛(CBA)某个赛季的得分情况统计．

表6-4

	参赛场次	总得分	二分球命中总个数	二分球命中率	三分球命中总个数	三分球命中率	罚球命中总个数	罚球命中率
运动员甲	24	721	213	51%	44	37%	163	85%
运动员乙	24	676	160	52%	69	29%	149	86%

根据这些数据分析两名运动员的得分水平．

解 由表6-4的数据可以看出，两名运动员的参赛场次相同，甲的二分球命中总个数(频数)为213，乙的二分球命中总个数为160，甲比乙多，但甲的二分球命中率(频率)为51%，乙的二分球命中率为52%，甲比乙低，由此认为乙的二分球得分水平更高；甲的三分

球命中总个数小于乙的，但甲的三分球命中率高于乙的，由此认为甲的三分球得分水平更高.

从上面的分析可以看出，借助频率可以更科学地评价两名运动员在不同方面的水平.

例 2 下面给出了 2012 年—2016 年我国普通高等学校和高中新生录取人数及其相应的录取比例，请根据表 6－5 中的数据说明频数与频率的不同之处.

表 6－5

年份	普通高等学校招生数量/万人	普通高等学校招生比例	普通高中招生数量/万人	普通高中招生比例
2012	688.80	87.02%	844.60	50.86%
2013	699.80	87.58%	822.70	52.69%
2014	721.40	90.22%	796.60	56.36%
2015	737.80	92.49%	796.60	56.19%
2016	748.60	94.47%	802.90	56.39%

解 从 2012 年—2016 年，普通高等学校招生人数及其相应的招生比例都在逐年递增；普通高中招生人数基本呈逐年下降趋势，其相应的招生比例基本呈逐年上升趋势.

从频数来看，普通高中招生，2013 年是 822.70 万人，2014 年是 796.60 万人，较上一年减少了 26.10 万人. 但是从这两年的频率来看，2013 年—2014 年的频率却增长了 3.67%. 这说明只从频数一个角度分析实际问题是远远不够的，还需要从频率的角度分析问题.

北京师范大学出版社

抽象概括

频率反映了相对总数而言的相对强度，其所携带的总体信息远超过频数. 在实际问题中，如果总体容量比较小，频数也可以较客观地反映总体分布；当总体容量较大时，频率就更能客观地反映总体分布.

在统计中，经常要用样本数据的频率去估计总体中相应的频率，即对总体分布进行估计.

练 习

1. 2016 年 7 月 11 日，某新闻报道："英国政府 9 日发表声明，正式拒绝数百万公众要求就英国是否留在欧盟再次举行公投的请愿，理由是先前公投所体现的民意必须得到尊重. 截至 8 日，英国政府和议会请愿网站上要求举行'二次公投'的人数已经超过 412 万". 你认为 412 万人的态度能代表英国民众的意愿吗？

3.2 频率分布直方图

为了解本市居民的生活成本，同学甲利用假期对所在社区进行“家庭数”和“家庭每月日常消费额”的调查. 他把调查得到的消费额按大小进行分组，并计算出每组数据在整个数据中占的百分比——频率，结果如表 6－6.

表 6－6

消费额分组/元	频　率
[1 000,1 500)	0.1
[1 500,2 000)	0.2
[2 000,2 500)	0.4
[2 500,3 000)	0.2
[3 000,3 500]	0.1

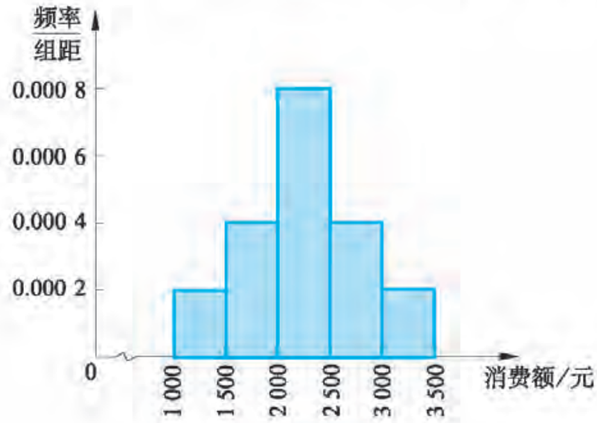


图 6－3

根据表 6－6 可以画出图 6－3. 图中每个小矩形的底边长是该组的组距，每个小矩形的高是该组的频率与组距的比，从而每个小矩形的面积等于该组的频率，即每个小矩形的面积$=$组距$\times\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}=$频率. 我们把这样的图叫作**频率分布直方图**. 不难发现，频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各个小组的频率的大小.

频率分布直方图的好处在于：首先，能清楚直观地显示各组频率分布情况及各组频率之间的差别；其次，当考虑数据落在若干个组内的频率之和时，可以用相应矩形面积之和来表示.

如何根据样本数据画出频率分布直方图呢?

实例分析

例 3　1895 年，在英国伦敦有 106 块男性头盖骨被挖掘出土. 经考证，这些头盖骨的主人死于 1665 年—1666 年的大瘟疫. 人类学家分别测量了这些头盖骨的宽度，数据如下(单位：mm)：

146	141	139	140	145	141	142	131	142	140	144	140
138	139	147	139	141	137	141	132	140	140	141	143
134	146	134	142	133	149	140	140	143	143	149	136
141	143	143	141	138	136	138	144	136	145	143	137

142	146	140	148	140	140	139	139	144	138	146	153
148	152	143	140	141	145	148	139	136	141	140	139
158	135	132	148	142	145	145	121	129	143	148	138
149	146	141	142	144	137	153	148	144	138	150	148
138	145	145	142	143	143	148	141	145	141		

请你估计在1665年—1666年,英国男性头盖骨宽度的分布情况.

解 这里,总体是1665年—1666年的英国男性头盖骨的宽度,我们要通过上面挖掘出土得到的样本信息,来估计总体的分布情况.因为总体分布是指总体中每类(组)个体所占的比例(百分比),所以我们需要将样本中每类(组)个体所占的比例整理、表达出来.

首先将数据排序(可以借助Excel软件),得到宽度的最大值是158 mm,最小值是121 mm.

为了更深入地挖掘数据蕴含的信息,得到总体分布信息,我们按照如下步骤处理数据.

(1) 计算极差:$158-121=37$ mm.这说明样本观测数据的变化范围是37 mm.

(2) 确定组距与组数:合适的组距和组数对发现数据分布规律有重要意义.组数过少会将很多分布的信息丢失;组数过多则可能会出现很多空档,无法反映实际的分布.当数据在120个以内时,通常按照数据的多少分成5组~12组.在实际操作中,一般要求各组的组距相等.分组时,可以先确定组距,也可以先确定组数.若取所有的组距为5 mm,则$\frac{极差}{组距}=\frac{37}{5}=7.4$,即可以将数据分为8组,这说明这个组距是比较合适的.

(3) 分组:由于组距为5 mm,8个组距的总长度超过极差,因此可以使第一组的左端点略小于数据中的最小值,最后一组的右端点略大于数据中的最大值.所以本例中的106个数据可按如下方式分为8组:

$$[120,125),[125,130),\cdots,[155,160].$$

(4) 列表:统计各组的信息(如表6-7).

表6-7

宽度分组/mm	频 数	频 率	$\frac{频率}{组距}$
[120,125)	1	0.009	0.001 8
[125,130)	1	0.009	0.001 8
[130,135)	6	0.057	0.011 4
[135,140)	22	0.208	0.041 6
[140,145)	46	0.434	0.086 8

续表

宽度分组/mm	频 数	频 率	$\frac{频率}{组距}$
[145,150)	25	0.236	0.047 2
[150,155)	4	0.038	0.007 6
[155,160]	1	0.009	0.001 8

(5) 画频率分布直方图:根据表 6－7 得到如图 6－4 的频率分布直方图.

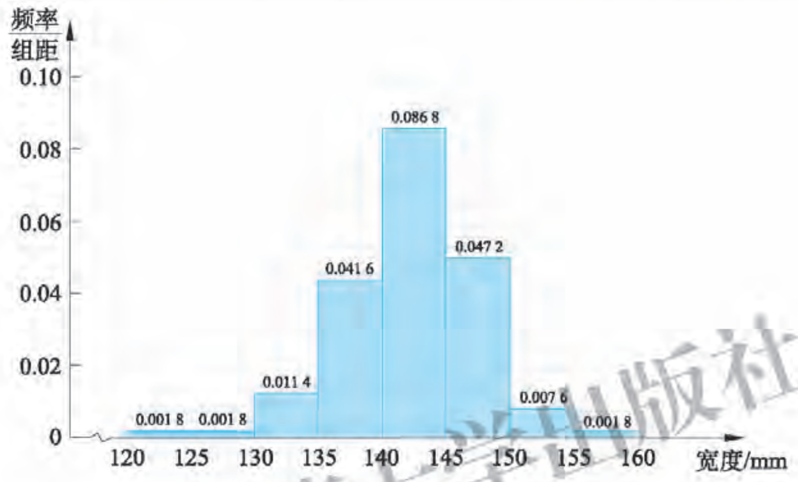


图 6－4

北京师范大学出版社

思考交流

观察图 6－4,回答下列问题:

(1) 头盖骨的宽度位于哪个区间的频率最大?

(2) 头盖骨的宽度在[140,145)的频率约是多少?

(3) 头盖骨的宽度小于 140 mm 的频率是多少?

从图 6－4 中可以得到头盖骨的宽度落在各个宽度区间内的频率(例如,宽度在[140,145)的头盖骨所占的频率为 43.4%),每个宽度区间内的频率值就是该宽度区间所对应的频率分布直方图的面积.图中所有小矩形的面积之和,就是头盖骨的宽度落在各个宽度区间内的频率之和,这个和等于 1.

当样本容量较大时,样本中落在每个区间内的个体的频率会稳定于总体在相应区间内取值的比例.因此,我们就可以用样本的频率分布直方图来估计总体在相应区间内取值的比例,也就得到了总体的分布情况.

通常,在频率分布直方图中,按照分组原则,再在左边和右边各加一个区间.从所加的左边区间的中点开始,用线段依次连接各个矩形的顶端中点,直至右边所加区间的中点,就可

以得到一条折线(如图 6－5),我们称之为**频率折线图**,有时也用它来估计总体的分布情况.

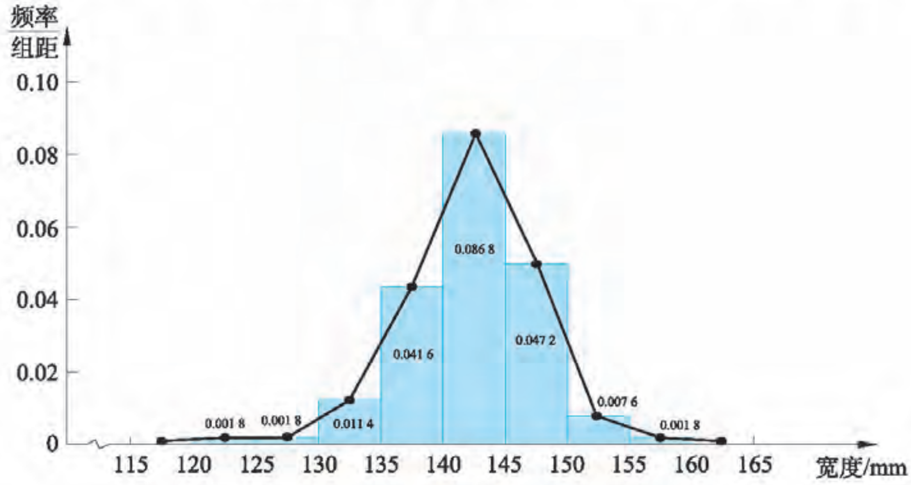


图 6－5

一般地,样本容量越大,用样本的频率分布去估计总体的分布就越精确. 随着样本容量的增大,所划分的区间数也可以随之增多,而每个区间的长度则会相应随之减小,相应的频率折线图就会越来越接近于一条光滑曲线.

北京师范大学出版社

练 习

1. 一位植物学家想要研究某类植物生长 1 年之后的高度. 他随机抽取了 60 株此类植物,测得它们生长 1 年之后的高度如下(单位:cm):

73	84	91	68	72	83	75	58	87	41
48	61	65	72	92	68	73	43	57	78
80	59	84	42	67	49	64	73	51	65
63	82	90	54	63	76	61	68	66	78
55	81	94	79	45	67	70	98	76	72
72	91	86	75	76	50	69	69	56	74

(1) 完成下表:

高度分组/cm	频 数	频 率	$\frac{频率}{组距}$
[40,50)			
[50,60)			
[60,70)			
[70,80)			
[80,90)			
[90,100]			

(2) 根据上表画出相应的频率分布直方图和频率折线图,并描述此类植物生长 1 年之后的高度分布情况.

习题 6-3

A 组

1. 某大型超市因为位置偏僻，顾客都开车前往. 该超市在制定停车收费政策时，需要考虑顾客停车时间的长短，现在该超市随机采集了如下数据(单位:min)：

7	65	13	31	38	45	80	48	107	12	233	947	142
2	813	6	241	98	165	131	88	4	783	182	272	114
15	343	12	35	15	66	18	16	1	741	54	37	55
16	492	60	115	143	147	56	56	47	17	1	307	998
141	43	64	17	65	40	73	8	397	11	676	126	44
8	965	157	160	6	378	4	347	72	4	111	367	44
53	93	58	6	312	279	138	57	38	55	106	143	133
3	556	915	1	773	103							

(1) 画出相应的频率分布直方图；

(2) 如果超市想奖励 25％的快速购物客户不收取停车费，那么应该允许顾客免费停车多长时间不收费?

(3) 出于类似考虑，超市希望对购物时间较长的 5％的顾客征收更高的停车费，那么超市需要考虑的是停车时间超过多少的顾客?

北京师范大学出版社

§4 用样本估计总体的数字特征

通常，人们利用样本的数字特征来估计总体的数字特征. 例如，用样本的平均数来估计总体的平均数，用样本的方差来估计总体的方差.

4.1 样本的数字特征

在统计问题中，当我们抽取了样本(数据)后，根据初中已经学过的知识，可以计算这组数据的平均数、中位数、众数、极差、方差等，它们从不同角度反映了数据的数字特征.

平均数是指这组数据的平均值. 一般地，将这组数据按从小到大的顺序排列后，“中间”的那个数据为这组数据的中位数，它使数据被分成的两部分的数据量是一样的. 众数是指这组数据中出现次数最多的数据. 在统计中，平均数是最常用的量. 但有时候，如数据中个别数据特别大或特别小时，用中位数会更合理.

极差和方差都刻画数据的离散程度. 极差是数据中最大值和最小值的差，它计算简单，但没有充分利用其他数据. 方差刻画的是数据偏离平均数的离散程度，由于方差的单位是原始数据单位的平方，而刻画离散程度的一种理想度量应当具有与原始数据相同的单位. 为此，计算方差的算术平方根，得

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}},$$

称之为**标准差**.

例 1 某赛季篮球运动员甲每场比赛的得分(单位：分)情况如表 6-8.

表 6-8

比赛场次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得　分	12	24	31	15	36	25	50	35	31	44	39	41	36

求在该赛季比赛中，这名运动员得分情况的平均数、中位数、众数、极差、方差和标准差.

解 平均数 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{13}}{13}=\frac{12+24+\cdots+36}{13}\approx 32.23$(分)；

中位数：35 分；

众数：31 分，36 分；

极差：$50-12=38$(分)；

$$\text{方差 } s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{13}-\bar{x})^2}{13}$$

$$=\frac{(12-32.23)^2+(24-32.23)^2+\cdots+(36-32.23)^2}{13}\approx 110.95;$$

标准差 $s\approx 10.53$ 分.

例 2 在 1996 年美国亚特兰大奥运会上,中国香港帆板运动员李丽珊,以惊人的耐力和斗志,勇夺金牌,实现了中国香港体育史上奥运金牌零的突破.这枚金牌能在比赛过程中预测出来吗?

在帆板比赛中,成绩以低分为优胜,共赛 11 场,并以最佳的 9 场成绩计算最终的名次.此次比赛前 7 场比赛结束后,排名前 5 位的选手积分如表6-9.

表 6-9

排 名	运动员	比赛场次											总 分
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	李丽珊(中国香港)	3	2	2	2	4	2	7					22
2	简度(新西兰)	2	3	6	1	10	5	5					32
3	贺根(挪威)	7	8	4	4	3	1	8					35
4	威尔逊(英国)	5	5	14	5	5	6	4					44
5	李科(中国)	4	13	5	9	2	7	6					46

北京师范大学出版社

根据前 7 场的比赛结果,能否预测谁将获得最后的胜利?

分析 由表 6-9,可以分别计算出 5 位运动员前 7 场比赛积分的平均数和标准差,作为判断各运动员比赛的成绩及稳定情况的依据,结果如表 6-10.

表 6-10

排 名	运动员	平均得分	得分标准差
1	李丽珊(中国香港)	3.14	1.73
2	简度(新西兰)	4.57	2.77
3	贺根(挪威)	5.00	2.51
4	威尔逊(英国)	6.29	3.19
5	李科(中国)	6.57	3.33

从表 6-10 中可以看出:李丽珊的平均得分及得分标准差都比其他运动员的小,也就是说,在前 7 场的比赛过程中,她的成绩最为优异,而且表现也最为稳定.

尽管此时还有 4 场比赛没有进行,但可以假定每位运动员在各自的 11 场比赛中发挥的水平大致相同(实际情况也确实如此),因而可以把前 7 场比赛的成绩作为总体的一组样本,并由此估计每位运动员最后比赛的成绩.所以,有足够的理由相信李丽珊在后面的 4 场比赛中会继续保持优异而稳定的成绩,获得最后的冠军.

根据运动员的现有比赛成绩，从平均数和标准差两个方面进行分析，对运动员的运动成绩进行预测，是数据分析素养的具体应用. 当然，事实也进一步验证了这一预测，李丽珊正是凭着自己优异而稳定的表现，成为中国香港首位奥运金牌得主.

例 3 有甲、乙两名射击运动员，10 次射击成绩(单位：环)如表 6－11.

表 6－11

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	7	7	8	9	8	9	10	9	9	9
乙	8	9	7	8	10	7	10	10	7	10

现要从两名运动员中选拔一人参加比赛，根据两名运动员的运动成绩，如何进行选拔?

分析 要从两名运动员中选拔一人参加比赛，首先应该根据不同的要求和状况确定选拔的标准，然后再根据标准和运动员的成绩进行决策.

当标准不同时，人们的决策会随之发生改变.

情境 1 如果 10 次射击成绩中，前 9 次都是个人独自进行训练的成绩，最后一次是教练在场的射击成绩，那么作为教练员，你最有可能根据什么成绩作为选拔的标准?

在情境 1 中，教练员可能会制订这样的标准，即标准 1：以两名运动员的最后一次射击成绩作为评价标准，选择成绩较高者参赛. 据此，显然应选择乙参加比赛.

情境 2 如果这 10 次射击成绩是大型比赛选拔赛中的射击成绩，作为教练员，你可能怎样制订选拔标准?

在情境 2 中，教练员可能会制订这样的标准，即标准 2：以两名运动员 10 次射击成绩的众数作为评价标准，选择众数较高者参赛. 甲射击成绩的众数是 9 环，乙射击成绩的众数是 10 环. 据此，选择乙参加比赛.

教练员也可能制订标准 3：以两名运动员 10 次射击成绩的中位数作为评价标准，选择中位数较高者参赛. 甲射击成绩的中位数是 9 环，乙射击成绩的中位数是 8.5 环. 据此，选择甲参加比赛.

教练员还可能制订标准 4：以两名运动员 10 次射击成绩的平均数作为评价标准，选择平均数较高者参赛. 甲射击成绩的平均数是 8.5 环，乙射击成绩的平均数是 8.6 环. 据此，选择乙参加比赛.

情境 3 教练员发现，按照上面的标准看，甲、乙两名运动员相差不大，并且该运动队的成绩已经超过其他同水平运动队，只要维持目前状态就能取得冠军. 因此，教练员需要选择一名运动水平相对稳定的队员参赛. 此时，通常会再提出其他的要求(即使运动员的成绩相差很大，也可以提出新的要求). 例如，分别按照数据的极差、标准差的大小给出标准.

标准 5：可以用两名运动员 10 次射击成绩的标准差作为评价标准，标准差越小成绩越稳定. 甲射击成绩的标准差 $s_{甲}\approx0.92$ 环，乙射击成绩的标准差 $s_{乙}\approx1.28$ 环. 据此，选择甲参加比赛.

北京师范大学出版社

从上述问题可以看出，根据问题的实际背景，利用数据的数字特征，可以帮助人们进行决策，从而真正发挥数据分析的作用.

值得注意的是，在这里，不同的标准没有对和错的问题，也不存在所谓唯一解的问题，而是根据需要来选择“好”的决策. 至于决策的好坏，是根据提出的标准而定的.

例如，甲、乙两名运动员，后者发挥极不稳定，有时成绩很好，有冲击金牌的可能，但有时又会很差，可能拿不到名次；前者没有冲击金牌的能力，但他成绩极其稳定，如果让他参加比赛，保证能拿到一块铜牌. 在这种情况下，如果运动队要先保奖牌，那么甲去参赛应该是更好的选择；反之，如果运动队已经得到了不少银牌和铜牌，最想要的是拿到一块金牌，这时可能就应该让乙参加比赛.

用样本的数字特征估计总体的数字特征时，如果抽样的方法比较合理，那么样本可以很好地反映总体的信息. 虽然从样本数据得到的数字特征并不是总体真正的数字特征，只是总体数字特征的一个估计，但这种估计是合理的. 样本容量越大，样本所包含的总体信息就越多，估计的合理性就越充分.

北京师范大学出版社

练 习

1. 报讯：“1997 年—2008 年，铁路执行儿童票的身高限制为 1.1 m～1.4 m. 此次是铁道部第二次修改儿童票限高标准. 2008 年 12 月 21 日，铁道部规定儿童票身高限制调整为 1.2 m～1.5 m，将儿童票上、下限都提高了 10 cm. 这意味着 12 月 21 日新规实行后，身高 1.2 m 以下的儿童可免票，身高 1.2 m～1.5 m 的儿童可购买半票.”阅读以上材料，请你说说儿童票限高标准的提高可能与什么有关，并借助互联网查阅相关原因.

4.2 分层随机抽样的均值与方差

一、分层随机抽样的平均数

如果经过分层随机抽样得到样本中的每一个数据，就可以算出样本平均数和样本方差.

但是，如果不知道样本中每一个数据，只知道分层随机抽样中各层的平均数和方差，以及各层所占的比例（权重），那么如何计算样本的平均数和方差？

例如，对某学校高一年级，如果只知道甲班和乙班的数学平均成绩和方差，以及甲班和乙班的人数，而缺少每名学生的成绩，如何计算整个高一年级数学的平均成绩和方差？

实例分析

例 4 某公司的高收入员工月平均工资是 11 000 元，中等收入员工月平均工资是 6 500 元，低收入员工月平均工资是 2 900 元. 能否认为该公司员工的月平均工资收入是 $\frac{11\ 000+6\ 500+2\ 900}{3}=6\ 800$(元)？这样计算平均数的方法合理吗？

解 在这个问题中，如果该公司有 1 000 名员工，其中 50 名属于高收入者，150 名属于中等收入者，800 名属于低收入者，那么由于每一类员工所占比例不同，特别是高收入者很少，他们的月平均工资对该公司员工的月平均工资影响较小. 因此，上述计算方法显然不合理.

例 5 甲、乙两位同学相约晚上在某餐馆吃饭. 他们分别在 A，B 两个网站查看同一家餐馆的好评率. 甲在网站 A 查到的好评率是 98%，而乙在网站 B 查到的好评率是 85%. 综合考虑这两个网站的信息，应该如何得到这家餐馆的总好评率？

解 好评率是由好评人数除以总评价人数得到的. 98%的好评率意味着如果有 100 人评价，那么其中 98 人给了好评.

设在网站 A 评价该餐馆的人数为 n_1，其中给出好评的人数为 m_1；在网站 B 评价该餐馆的人数为 n_2，其中给出好评的人数为 m_2. 由题目条件，$\frac{m_1}{n_1}=98\%$，$\frac{m_2}{n_2}=85\%$. 综合 A，B 两个网站的信息，这家餐馆的总好评率应为$\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$，化简得

$$\frac{0.98\,n_1+0.85\,n_2}{n_1+n_2}=0.98\cdot\frac{n_1}{n_1+n_2}+0.85\cdot\frac{n_2}{n_1+n_2}.$$

其中，$\frac{n_1}{n_1+n_2}$和$\frac{n_2}{n_1+n_2}$分别是各自的权重，总好评率等于相应的好评率与其权重乘积的和.

所以除非再知道 A，B 两个网站评价人数的比例关系，否则并不能求出总好评率.

由以上分析可知，当且仅当 $n_1=n_2$时，总好评率等于 $\frac{98\%+85\%}{2}=91.5\%$.

抽象概括

一般地，将样本 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和样本 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 合并成一个新样本，则这个新样本的平均数为

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n}{m+n}=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

于是，当已知上述两层构成的新样本中每层的平均数分别为 x_1 和 x_2 时，可得这个新样

北京师范大学出版社

本的平均数为$\frac{m}{m+n}\bar{x}_1+\frac{n}{m+n}\bar{x}_2$.

记 $w_1=\frac{m}{m+n}$，$w_2=\frac{n}{m+n}$，则这个新样本的平均数为 $w_1\bar{x}_1+w_2\bar{x}_2$，其中 w_1，w_2 称为权重.

更一般地，设样本中不同层的平均数和相应权重分别为 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 和 $w_1,w_2,\cdots,w_n$，则这个样本的平均数为 $w_1\bar{x}_1+w_2\bar{x}_2+\cdots+w_n\bar{x}_n$. 为了简化表示，引进求和符号，记作

$$w_1\bar{x}_1+w_2\bar{x}_2+\cdots+w_n\bar{x}_n=\sum_{i=1}^{n}w_i\bar{x}_i.$$

练 习

1. 在浙江省和青海省各取面积大小一样的 A，B 两块区域，分别调查人均可支配收入. 获得数据显示，浙江省的 A 区域的人均可支配收入为 35 537 元，青海省的 B 区域的人均可支配收入为 24 542 元. 能否得到这两个区域的人均可支配收入为$\frac{35\ 537+24\ 542}{2}=30\ 039.5$(元)？

北京师范大学出版社

二、分层随机抽样的方差

实例分析

例 6 甲、乙两班参加了同一学科的考试，其中甲班 50 人，乙班 40 人. 甲班的平均成绩为 80.5 分，方差为 500；乙班的平均成绩为 85 分，方差为 360. 那么甲、乙两班全部 90 名学生的平均成绩和方差分别是多少？

解 设甲班 50 名学生的成绩分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_{50}$，那么甲班的平均成绩、权重和方差分别为

$$\bar{x}_甲=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{50}}{50}=80.5(\text{分})，w_甲=\frac{50}{90},$$

$$s_甲^2=\frac{(a_1-\bar{x}_甲)^2+(a_2-\bar{x}_甲)^2+\cdots+(a_{50}-\bar{x}_甲)^2}{50}=500.$$

设乙班 40 名学生的成绩分别是 $b_1,b_2,\cdots,b_{40}$，那么乙班的平均成绩、权重和方差分别为

$$\bar{x}_乙=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{40}}{40}=85(\text{分})，w_乙=\frac{40}{90},$$

$$s_乙^2=\frac{(b_1-\bar{x}_乙)^2+(b_2-\bar{x}_乙)^2+\cdots+(b_{40}-\bar{x}_乙)^2}{40}=360.$$

如果不知道 $a_1,a_2,\cdots,a_{50}$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_{40}$，只知道甲、乙两班的平均成绩、方差及权重，那么根据前面的分析，全部 90 名学生的平均成绩应为

$$\overline{x}=w_{甲}\ \overline{x}_{甲}+w_{乙}\ \overline{x}_{乙}=\frac{50}{90}\times 80.5+\frac{40}{90}\times 85=82.5(分).$$

而全部 90 名学生的方差可以用式子

$$s^2=w_{甲}[s_{甲}^2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+w_{乙}[s_{乙}^2+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2] \quad ①$$

进行计算. 因此,

$$\begin{aligned} s^2 &= w_{甲}[s_{甲}^2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+w_{乙}[s_{乙}^2+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2] \\ &= \frac{50}{90}\times[500+(80.5-82.5)^2]+\frac{40}{90}\times[360+(85-82.5)^2] \\ &= \frac{50\times 500+50\times 4+40\times 360+40\times 6.25}{90}\approx 442.78. \end{aligned}$$

问题提出

根据方差的意义,全部 90 名学生的方差应为

$$\frac{1}{90}\left[\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x})^2\right].$$

它与运用式子①得出的结果是否一致呢?

分析理解

实际上,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x})^2 &= \sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲}+\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{50}[(a_i-\overline{x}_{甲})^2+2(a_i-\overline{x}_{甲})(\overline{x}_{甲}-\overline{x})+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2] \\ &= \sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})^2+2(\overline{x}_{甲}-\overline{x})\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})+50(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})=a_1+a_2+\cdots+a_{50}-50\overline{x}_{甲}=0$,

所以 $\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})^2+50(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2$.

同理 $\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x}_{乙})^2+40(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2$.

于是

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x})^2}{90} &= \frac{\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})^2+50(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x}_{乙})^2+40(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2}{90} \\ &= \frac{50}{90}\times\frac{\sum_{i=1}^{50}(a_i-\overline{x}_{甲})^2}{50}+\frac{50(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2}{90}+\frac{40}{90}\times\frac{\sum_{i=1}^{40}(b_i-\overline{x}_{乙})^2}{40}+\frac{40(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2}{90} \\ &= w_{甲}[s_{甲}^2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+w_{乙}[s_{乙}^2+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2]. \end{aligned}$$

北京师范大学出版社

抽象概括

设样本中不同层的平均数分别为 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$，方差分别为 $s_1^2,s_2^2,\cdots,s_n^2$，相应的权重分别为 $w_1,w_2,\cdots,w_n$，则这个样本的方差为

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}w_i[s_i^2+(\bar{x}_i-\bar{x})^2],$$ 其中 $\bar{x}$ 为这个样本的平均数.

练 习

1. 某歌手电视大奖赛中，七位评委为甲、乙两名选手打出了如下分数.

甲：7.9，8.1，8.4，8.5，8.5，8.5，9.9；

乙：7.0，8.4，8.4，8.4，8.6，8.7，9.0.

(1) 若评分规则为“根据七位评委的所有评分，计算选手得分的平均数”，求甲、乙两名选手的最终得分；

(2) 若评分规则为“去掉一个最高分和一个最低分后，计算选手得分的平均数”，求甲、乙两名选手的最终得分.

北京师范大学出版社

4.3 百分位数

当总体是长度、质量、时间等连续变量时，人们常常会考虑总体与样本的另一种数字特征——百分位数.

为了理解百分位数，先回顾中位数.

总体的中位数有这样的特点：总体数据中的任意一个数小于或等于它的可能性是 50%，因此也称中位数是 50%分位数.

类似地，总体的 25%分位数有这样的特点：总体数据中的任意一个数小于或等于它的可能性是 25%.

抽象概括

一般地，当总体是连续变量时，给定一个百分数 $p\in(0,1)$，总体的 **p 分位数**有这样的特点：总体数据中的任意一个数小于或等于它的可能性是 p.

25%，50%，75%分位数是三个常用的百分位数. 把总体数据按照从小到大排列后，这三个百分位数把总体数据分成了 4 个部分，在这 4 个部分取值的可能性都是 $\frac{1}{4}$. 因此这三个百

分位数也称为总体的**四分位数**.

其他常用的百分位数有 1%,5%,10%,90%,95%,99%.

总体的 p 分位数通常是未知的,人们用样本的 p 分位数来估计它,样本容量越大,估计越准确.

计算一组 n 个数据的 p 分位数的一般步骤如下:

第一步,按照从小到大排列原始数据;

第二步,计算 $i=np$;

第三步,若 i 不是整数,大于 i 的最小整数为 j,则 p 分位数为第 j 项数据;若 i 是整数,则 p 分位数为第 i 项与第($i+1$)项数据的平均数.

例如,表 6-12 记录了某地区一年之内的月降水量.

表 6-12

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月降水量/mm	58	48	53	46	56	56	51	71	56	53	64	66

把这组数据由小到大排序,得

46　48　51　53　53　56　56　56　58　64　66　71

根据上述步骤可以得出该地区的月降水量的三个百分位数(如表6-13).

表 6-13

25%分位数	50%分位数	75%分位数
52 mm	56 mm	61 mm

例 7　对于本章"3.2 频率分布直方图"中的头盖骨问题,分别求出 5%,25%,50%,75%和 95%分位数.

解　因为该样本共有 106 个数据,所以 $106\times5\%=5.3$,$106\times25\%=26.5$,$106\times50\%=53$,$106\times75\%=79.5$,$106\times95\%=100.7$.

将所有数据由小到大排列后,第 6 个数据是 133,从而得到 5%分位数为 133 mm. 同理,25%,50%,75%和 95%分位数分别为 139 mm,141 mm,145 mm 和 149 mm.

北京师范大学出版社

练 习

1. 欧洲联盟委员会和荷兰环境评估署于 2015 年 12 月公布了 20 个国家和地区的二氧化碳排放总量及人均二氧化碳排放量，结果如下表：

国家和地区	排放总量/吨	人均排放量/吨	国家和地区	排放总量/吨	人均排放量/吨
中国	10 330 000 000	7.4	巴西	480 000 000	2.0
美国	5 300 000 000	16.6	英国	480 000 000	7.5
欧盟	3 740 000 000	7.3	墨西哥	470 000 000	3.9
印度	2 070 000 000	1.7	伊朗	410 000 000	5.3
俄罗斯	1 800 000 000	12.6	澳大利亚	390 000 000	16.9
日本	1 360 000 000	10.7	意大利	390 000 000	6.4
德国	840 000 000	10.2	法国	370 000 000	5.7
韩国	630 000 000	12.7	南非	330 000 000	6.2
加拿大	550 000 000	15.7	波兰	320 000 000	6.2
印度尼西亚	510 000 000	2.6	沙特阿拉伯	490 000 000	16.6

(1) 这 20 个国家和地区人均二氧化碳排放量的中位数是多少?

(2) 针对这 20 个国家和地区，请你找出二氧化碳排放总量较少的前 15%的国家和地区.

北京师范大学出版社

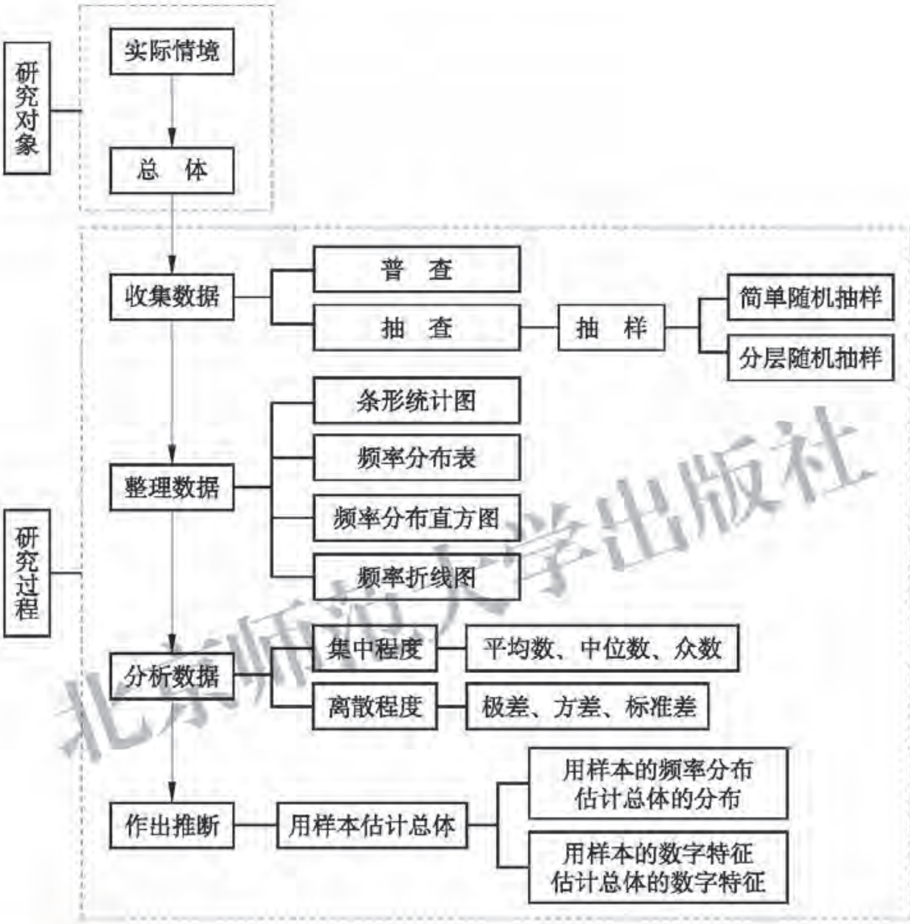
习题 6－4

1. 调查本校高三年级第一次模拟考试总成绩. 若用 5%，50%分位数分别预测学校高三年级升入专科、本科的分数线，则今年的各类分数线大约是多少?

本章小结

一、知识结构

用样本反映总体的规律体现了归纳的思维方式，这是数据分析的关键.



北京师范大学出版社

二、学习要求

1. 获取数据的基本途径及相关概念

(1) 知道获取数据的基本途径，包括：统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样、互联网等.

(2) 了解总体、样本、样本量的概念，了解数据的随机性.

2. 抽样

(1) 简单随机抽样

通过实例，了解简单随机抽样的含义及其解决问题的过程，掌握两种简单随机抽样方法：抽签法和随机数法. 会计算样本均值和样本方差，了解样本与总体的关系.

(2) 分层随机抽样

通过实例，了解分层随机抽样的特点和适用范围，了解分层随机抽样的必要性，掌握各层样本量比例分配的方法. 结合具体实例，掌握分层随机抽样的样本均值和样本方差.

(3) 抽样方法的选择

在简单的实际情境中，能根据实际问题的特点，设计恰当的抽样方法解决问题.

3. 统计图表

能根据实际问题的特点，选择恰当的统计图表对数据进行可视化描述，体会合理使用统计图表的重要性.

4. 用样本估计总体

(1) 结合实例，能用样本估计总体的集中趋势参数（平均数、中位数、众数），理解集中趋势参数的统计含义.

(2) 结合实例，能用样本估计总体的离散程度参数（极差、方差、标准差），理解离散程度参数的统计含义.

(3) 结合实例，能用样本估计总体的取值规律.

(4) 结合实例，能用样本估计百分位数，理解百分位数的统计含义.

三、需要关注的问题

1. 统计是一门研究什么问题的学科？

2. “利用样本估计总体的分布和数字特征”是如何体现“从数据中提取信息”的？

北京师范大学出版社

复习题六

A 组

1. 下表给出了某地区近年来 1 000 次火灾发生的不同原因，请你用自己的方式表示其中的数据.

原 因	烹 饪	电 器	明 火	吸 烟	纵 火	儿童玩火	其 他
次 数	168	270	80	176	140	60	106

2. 某产品售后服务中心随机选取了 20 个工作日，分别记录了每个工作日接到的客户服务电话的数量(单位:次)：

63 38 25 42 56 48 53 39 28 47

45 52 59 48 51 62 48 50 52 38

(1) 分别计算以上数据的平均数、中位数和众数；

(2) 根据以上结果，你能为该产品的售后服务中心提供什么建议?

3. 下表给出了 2016 年太原市和呼和浩特市的月降水量(单位:mm)：

月份 城市	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
太原市	2.5	4.2	3.6	40.7	23.6	74.0	209.4	71.7	21.3	62.0	4.9	10.5
呼和浩特市	0.3	3.0	0.7	3.2	34.6	108.8	140.2	115.0	74.7	48.6	0.5	1.7

(1) 请用适当的统计图表示上面的数据；

(2) 分别计算太原市和呼和浩特市 2016 年月降水量的平均数和标准差.

4. 某学校对男、女学生进行有关“习惯与礼貌”的评分，记录如下：

男:54,70,57,46,90,58,63,46,85,73,55,66,38,44,56,75,35,58,94,58;

女:77,55,69,58,76,70,77,89,51,52,63,63,69,83,83,65,100,74.

(1) 分别计算和比较男、女生得分的平均数和标准差；

(2) 分别计算男、女生得分的四分位数.

5. 为了解 A,B 两种轮胎的性能，某汽车制造厂分别从这两种轮胎中随机抽取了 8 个进行测试，下面列出了每一个轮胎行驶的最远里程(单位:10^3 km)：

轮胎 A:96,112,97,108,100,103,86,98;

轮胎 B:108,101,94,105,96,93,97,106.

(1) 分别计算 A,B 两种轮胎行驶的最远里程的平均数和中位数；

(2) 分别计算 A,B 两种轮胎行驶的最远里程的极差和标准差；

(3) 根据以上数据，你认为哪种轮胎性能更加稳定?

北京师范大学出版社

6. 为了解某种干电池的使用寿命，某电池厂随机抽取了 50 节干电池进行测试，下面列出了每一节电池的使用寿命(单位:h)：

11	14	25	13	11	20	15	30	9	16
13	10	14	11	10	16	19	12	0	20
16	10	15	14	22	19	10	33	3	12
16	19	23	15	20	11	17	14	23	15
12	15	12	10	13	11	9	8	13	17

(1) 完成下表，并画出相应的频率分布直方图.

使用寿命分组/h	频 数	频 率	$\frac{频率}{组距}$
[0,5)			
[5,10)			
[10,15)			
[15,20)			
[20,25)			
[25,30)			
[30,35]			

(2) 估计以上电池使用寿命的平均数、中位数.

7. 下面是 2016 年我国部分主要城市的年平均气温(单位:℃)：

城 市	年平均气温	城 市	年平均气温	城 市	年平均气温	城 市	年平均气温
北京	13.8	上海	17.6	武汉	17.3	昆明	15.8
天津	13.8	南京	16.8	长沙	17.5	拉萨	9.5
石家庄	14.6	杭州	18.2	广州	21.9	西安(泾河)	15.8
太原	11.2	合肥	17.0	南宁	22.3	兰州(皋兰)	8.2
呼和浩特	7.1	福州	21.0	海口	24.6	西宁	6.6
沈阳	8.8	南昌	19.0	重庆(沙坪坝)	19.5	银川	10.7
长春	6.6	济南	15.4	成都(温江)	16.8	乌鲁木齐	8.4
哈尔滨	5.0	郑州	16.4	贵阳	15.3		

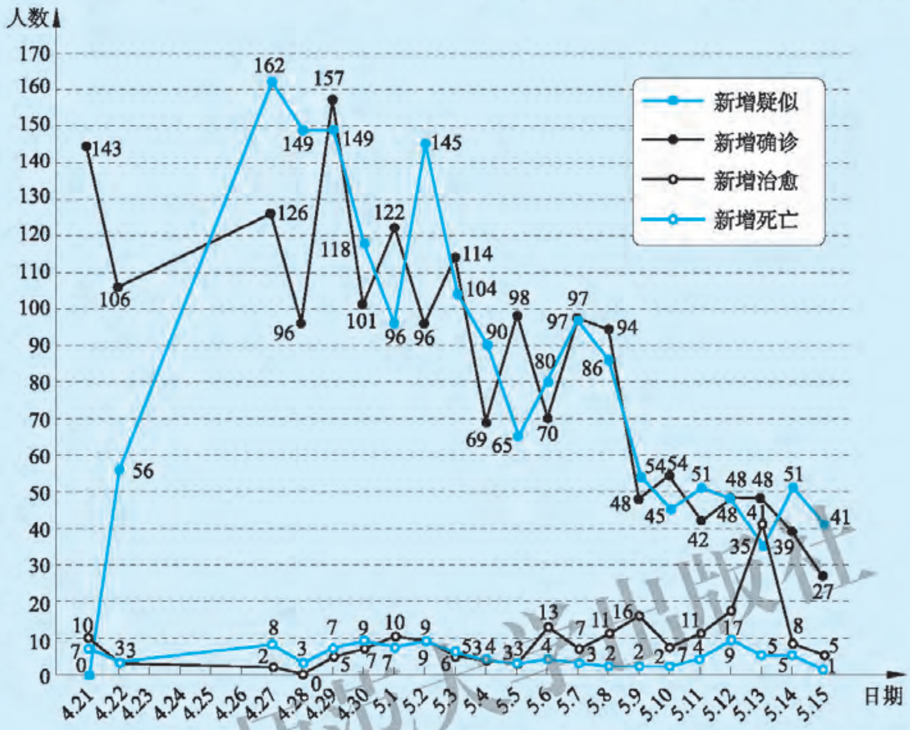
(1) 将以上数据进行适当分组，并画出相应的频率分布直方图.

(2) 以上各城市年平均气温在[0,10),[10,15),[15,20),[20,25]中，哪一个范围的最多?

北京师范大学出版社

B 组

1. 下面是 2003 年 4 月 21 日至 5 月 15 日上午 10 时，北京市非典型性肺炎疫情新增数据走势图.



（第 1 题）

北京师范大学出版社

(1) 哪一天新增确诊的人数最多？哪一天新增疑似的人数最多？

(2) 哪一天新增治愈的人数最多？哪一天新增死亡的人数最少？

(3) 从图中，你能预测这次北京市非典型性肺炎疫情的发展趋势吗？

2. 1798 年英国科学家卡文迪许（Henry Cavendish，1731—1810）对地球密度进行了测量，下面是地球的平均密度相对于水密度的测量值的记录结果：

5.50　5.61　4.88　5.07　5.26　5.55　5.36　5.29　5.79　5.10

5.27　5.39　5.42　5.47　5.58　5.65　5.57　5.53　5.62　5.29

5.44　5.34　5.63　5.34　5.46　5.30　5.75　5.68　5.85

请用适当的统计图表示上述测量数据，并估计地球的平均密度（单位：kg/m^3）.

7 第七章

概　率

在我们生活的世界上，处处充满了不确定性，无论是自然界中的风和日丽或地震、海啸，还是经济、政治、社会生活中的风险与机遇. 面对各种可能发生也可能不发生的事件，人们常常必须做出“选择”和“决策”，尽可能使损失减少到最小或收益达到最大.

早在几百年前，人们就已经开始研究这些不确定现象——通常称为随机现象. 用数学方法研究随机现象，是概率的任务.

本章将首先描述随机现象，引入样本空间，借助它刻画随机现象中所有可能出现的结果；进而，讨论随机事件以及随机事件之间的关系. 在此基础上，介绍一个最基本的概率模型——古典概率模型；通过大量的例子，感悟用频率估计概率的方法，并能解决简单的实际问题. 通过“概率”的学习和应用，发展数学抽象、逻辑推理等核心素养.

北京师范大学出版社

一门开始于研究赌博机会的科学，居然成了人类知识中最重要的学科（概率），这无疑是令人惊讶的事情.

——拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749—1827）

§1 随机现象与随机事件

1.1 随机现象

在自然界和人类社会中，普遍存在着两种现象. 一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**. 例如，太阳从东方升起；在标准大气压下，水在 100℃时会沸腾；同种电荷相互排斥；抛掷一颗石子，石子最终下落；在不受外力的条件下，物体保持静止或匀速直线运动状态；等等. 另一类则是在一定条件下，进行试验或观察会出现不同的结果，而且每次试验之前都无法预言会出现哪一种结果的现象，称为**随机现象**. 例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷前无法确定抛掷的结果是什么；明天是否刮风下雨；某商品下个月在线的销售量是多少；某种股票的价格会是多少；等等.

随机现象有如下两个特点：

(1) 结果至少有 2 种；

(2) 事先并不知道会出现哪一种结果.

北京师范大学出版社

1.2 样本空间

在概率与统计中，把观察随机现象或为了某种目的而进行的实验统称为试验，一般用 E 来表示，把观察结果或实验结果称为试验结果.

对于随机现象，当在相同的条件下重复进行试验时，尽管不能预知每次试验的具体结果，但这个试验的所有可能结果往往是明确可知的. 例如，抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数，该试验共有 6 种可能的结果：点数为 1，2，3，4，5，6. 但在每次抛掷之前，并不能确定骰子最终掷出的点数.

实例分析

1. 观察下列试验，请说出可能出现的试验结果.

E_1：抛掷一枚硬币 1 次，观察正面、反面出现的情况；

E_2：连续抛掷一枚硬币 3 次，观察正面、反面出现的情况.

在现实中，抛掷一枚硬币 1 次，虽然可能会出现硬币卡在某个位置等意外情况，但在这里我们认为，只出现“正面”与“反面”两种情况.

在试验 E_1 中，抛掷一枚硬币 1 次，虽然不能确定出现的结果是正面还是反面，但试验的所有可能结果共有 2 种：**正面**、**反面**，且在每一次试验中，上述 2 种结果有且只有一种出现.

在试验 E_2 中，连续抛掷一枚硬币 3 次，虽然不能预知出现的结果，但试验的所有可能结果可用图 7－1 来表示：

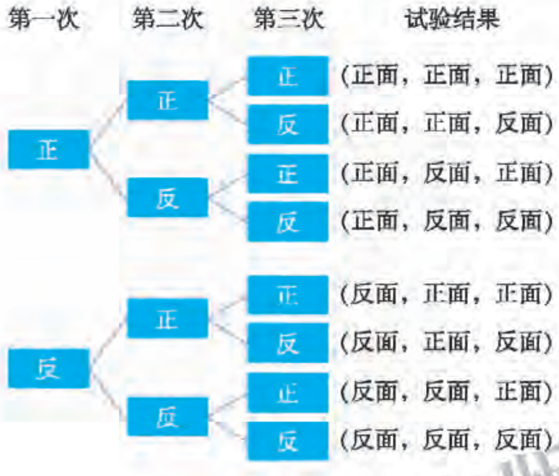


图 7－1

把一个试验所有可能的结果一一列举出来的方法叫作**列举法**. 列举法是计数问题中最基本的方法. 如图 7－1，用树状图的形式说明了列举一个试验的所有可能结果的方法.

由图 7－1 可知在试验 E_2 中，试验的所有可能结果共有 8 种，且在每一次试验中，上述 8 种结果有且只有一种出现.

2. 观察下列试验，请说出可能出现的试验结果.

E_3：射击一个目标 1 次，观察是否命中；

E_4：连续射击一个目标 10 次，观察命中的次数.

在试验 E_3 中，射击一个目标 1 次，虽然不能预知是否命中，但试验的所有可能结果共有 2 种：命中、未命中，且在每一次试验中，上述 2 种结果有且只有一种出现.

在试验 E_4 中，连续射击一个目标 10 次，虽然不能预知命中的次数，但命中次数的所有可能结果共有 11 种：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，且在每一次试验中，上述 11 种结果有且只有一种出现.

抽象概括

一般地，将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记作 Ω. 样本空间 Ω 的元素，即试验 E 的每种可能结果，称为试验 E 的**样本点**，记作 ω. 如果样本空间 Ω 的

华东师范大学出版社

样本点的个数是有限的，那么称样本空间 Ω 为**有限样本空间**.

例如，试验 E：抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数. 如果用 k 表示“掷出的点数为 k”这一结果，那么试验 E 的所有可能结果组成的集合为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，因此称集合 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 为试验 E 的样本空间；其中，1，2，3，4，5，6 分别称为试验 E 的样本点.

例 1 写出下列试验的样本空间：

(1) E_5：连续抛掷一枚骰子 2 次，观察每次掷出的点数；

(2) E_6：袋中有白球 3 个（编号为 1，2，3）、黑球 2 个（编号为 1，2），这 5 个球除颜色外完全相同，从中不放回地依次摸取 2 个，每次摸 1 个，观察摸出球的情况；

(3) E_7：连续射击一个目标直到命中为止，观察射击的总次数.

解 为了得到试验的相应样本空间，首先需要分析该试验所有可能出现的结果.

(1) 对于试验 E_5，用 (i,j) 表示抛掷的结果，其中 i 表示第一次掷出的点数，j 表示第二次掷出的点数，则所有可能的结果如表 7－1.

表 7－1

第二次掷出的点数 第一次掷出的点数	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

北京师范大学出版社

注意：这里的(1，2)和(2，1)是不同的样本点，分别表示连续抛掷一枚骰子 2 次，“第一次掷出的点数为 1，第二次掷出的点数为 2”和“第一次掷出的点数为 2，第二次掷出的点数为 1”. 于是，试验 E_5 共有 36 个样本点. 因此，该试验的样本空间为

$$\Omega_5=\left\{\begin{array}{llllll}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6)\\(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6)\\(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6)\\(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6)\\(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6)\\(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{array}\right\}.$$

(2) 对于试验 E_6，设摸到白球的结果分别记为 w_1, w_2, w_3，摸到黑球的结果分别记为 b_1, b_2，则该试验的所有可能结果如图 7－2.

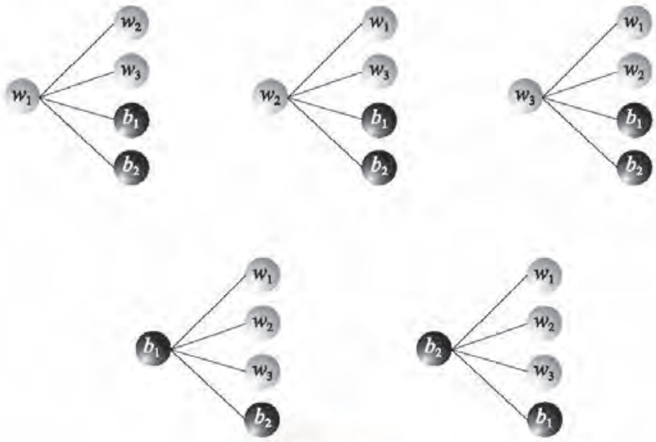


图 7－2

因此，该试验的样本空间为

$\Omega_6=\{w_1w_2, w_1w_3, w_1b_1, w_1b_2, w_2w_1, w_2w_3, w_2b_1, w_2b_2, w_3w_1, w_3w_2, w_3b_1, w_3b_2, b_1w_1, b_1w_2, b_1w_3, b_1b_2, b_2w_1, b_2w_2, b_2w_3, b_2b_1\}$.

(3) 对于试验 E_7，如果用 k 表示“直到命中目标为止，射击了 k 次”这个结果，那么该试验的所有可能结果构成的集合可以用正整数集表示，即该试验的样本空间为 $\Omega_7=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$.

北京师范大学出版社

练 习

1. 试举出实际生活中的确定性现象和随机现象各 3 个.
2. 动手完成本节中的试验 E_1, E_2, E_5, E_6 各 20 次，并将 20 次试验结果记录在下面的表格中.

随机试验	试验结果
E_1	
E_2	
E_5	
E_6	

3. 写出下列试验的样本空间：

(1) 连续抛掷一枚硬币 2 次，观察正面、反面出现的情况；

(2) 甲、乙、丙、丁四位同学参加演讲比赛，通过抽签确定演讲的顺序，记录抽签的结果；

(3) 连续抛掷一枚骰子 2 次，观察 2 次掷出的点数之和；

(4) 设袋中装有 4 个白球和 6 个黑球，从中不放回地逐个取出，直至白球全部取出为止，记录取球的次数.

1.3 随机事件

当进行试验时，人们不仅关心试验的所有结果，还常常关心满足某些特定要求的试验结果.

实例分析

在试验 E"抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数"中，有时会关心"出现偶数点"的情形.

由前面的分析可知试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以当"掷出偶数点"时，意味着子集 $A=\{2,4,6\}$ 中的一个样本点发生；反之，若子集 $A=\{2,4,6\}$ 中的一个样本点出现，则意味着事件"掷出偶数点"发生.

因此，可以用子集 $A=\{2,4,6\}$ 表示事件"掷出偶数点".

抽象概括

一般地，把试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，常用 A,B,C 等表示. 在每次试验中，当一个事件发生时，这个子集中的样本点必出现一个；反之，当这个子集中的一个样本点出现时，这个事件必然发生.

样本空间 Ω 是其自身的子集，因此 Ω 也是一个事件；又因为它包含所有的样本点，每次试验无论哪个样本点 ω 出现，Ω 都必然发生，因此称 Ω 为**必然事件**.

空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的一个子集，可以看作一个事件；由于它不包含任何样本点，它在每次试验中都不会发生，故称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

例 2 试验 E_2：连续抛掷一枚硬币 3 次，观察正面、反面出现的情况. 设事件 A 表示随机事件"第一次出现正面"，事件 B 表示随机事件"3 次出现同一面"，事件 C 表示随机事件"至少出现一次正面"，试用样本点表示事件 A,B,C.

解 由前面的分析可知，试验 E_2 的所有可能结果共有 8 种，下面用字母 H 表示出现正面，字母 T 表示出现反面，则试验 E_2 的样本空间可以记为

$$\Omega_2=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),$$
$$(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

因为事件 A 表示随机事件"第一次出现正面"，所以满足要求的样本点共有 4 个：$(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)$. 因此，事件 $A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$.

北京师范大学出版社

事件 B 表示随机事件"3 次出现同一面"，所以满足要求的样本点共有 2 个：(H,H,H)，(T,T,T). 因此，事件 $B=\{(H,H,H),(T,T,T)\}$.

事件 C 表示随机事件"至少出现一次正面"，所以满足要求的样本点共有 7 个：

$(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)$.

因此，事件$C=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$.

例 3 在试验 E_5"连续抛掷一枚骰子 2 次，观察每次掷出的点数"中，指出下列随机事件的含义：

(1) 事件 $A=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$；

(2) 事件 $B=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$；

(3) 事件 $C=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

解 由前面的分析可知试验 E_5 的样本空间为

$$\Omega_5=\left\{\begin{matrix}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6)\\(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6)\\(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6)\\(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6)\\(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6)\\(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{matrix}\right\}.$$

(1) 观察事件 A 中所含的样本点$(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)$可知，每个样本点中第二个数均为 1. 因此，若事件 A 中所含的样本点出现其中一个，则"第二次掷出的点数为 1"发生. 同时，由样本空间 Ω 可知，若"第二次掷出的点数为 1"发生，则事件 A 中的样本点必出现其中一个. 因此事件 A 的含义为：连续抛掷一枚骰子 2 次，第二次掷出的点数为 1.

(2) 观察事件 B 中所含的样本点$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$可知，每个样本点中第二个数均比第一个数大 1. 因此，若事件 B 中所含的样本点出现其中一个，则"第二次掷出的点数比第一次的大 1"发生. 同时，由样本空间 Ω 可知，若"第二次掷出的点数比第一次的大 1"发生，则事件 B 中的样本点必出现其中一个. 因此事件 B 的含义为：连续抛掷一枚骰子 2 次，第二次掷出的点数比第一次的大 1.

(3) 观察事件 C 中所含的样本点$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$可知，每个样本点中两个数的和均为 5. 因此，若事件 C 中所含的样本点出现其中一个，则"2 次掷出的点数之和为 5"发生. 同时，由样本空间 Ω 可知，若"2 次掷出的点数之和为 5"发生，则事件 C 中的样本点必出现其中一个. 因此事件 C 的含义为：连续抛掷一枚骰子 2 次，2 次掷出的点数之和为 5.

练 习

1. 在试验 E_4“连续射击一个目标 10 次，观察命中的次数”中，试用样本点表示事件 A“至少命中 6 次”.
2. 在试验 E_5“连续抛掷一枚骰子 2 次，观察每次掷出的点数”中，设事件 A 表示随机事件“第一次掷出的点数为 1”，事件 B 表示随机事件“2 次掷出的点数之和为 6”，试用样本点表示事件 A 和事件 B.
3. 在试验 E_6“袋中有白球 3 个(编号为 1,2,3)、黑球 2 个(编号为 1,2)，这 5 个球除颜色外完全相同，从中不放回地依次摸取 2 个，每次摸 1 个，观察摸出球的情况”中，摸到白球的结果分别记为 w_1,w_2,w_3，摸到黑球的结果分别记为 b_1,b_2. 设事件 A 表示随机事件“第一次摸出的是黑球”，事件 B 表示随机事件“至少有一次摸出的是黑球”，试用样本点表示事件 A 和事件 B.
4. 在上题的试验 E_6 中，指出下列随机事件的含义：

(1) 事件 $A=\{w_1w_2,w_1w_3,w_2w_1,w_2w_3,w_3w_1,w_3w_2\}$；

(2) 事件 $B=\{w_1b_1,w_1b_2,w_2b_1,w_2b_2,w_3b_1,w_3b_2,b_1w_1,b_1w_2,b_1w_3,b_2w_1,b_2w_2,b_2w_3\}$；

(3) 事件 $C=\{w_1b_1,w_1b_2,w_2b_1,w_2b_2,w_3b_1,w_3b_2\}$.

1.4 随机事件的运算

北京师范大学出版社

在试验中，一些随机事件往往存在一定的关系. 下面就来研究随机事件之间的关系.

实例分析

在试验 E“抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数”中，试验 E 的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 设事件 A 表示随机事件“掷出的点数为偶数”，事件 B 表示随机事件“掷出的点数大于 4”，则事件“掷出的点数为 6”与事件 A,B 有何关系？

若在一次抛掷骰子的试验中，事件 A 与事件 B 都发生，则意味着掷出的点数既是偶数又大于 4，因此“掷出的点数为 6”这个事件发生；反之，若在一次试验中“掷出的点数为 6”这个事件发生，因为 6 是偶数，所以事件 A 发生，又因为 6 大于 4，所以事件 B 也发生，即事件 A 与事件 B 都发生. 从集合运算的角度看，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{5,6\}$，$A\cap B=\{6\}$.

抽象概括

一般地，由事件 A 与事件 B 都发生所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**交事件**(或**积事件**)，记作 $A\cap B$(或 AB). 事件 $A\cap B$ 是由事件 A 和事件 B 所共有的样本点构成的集合.

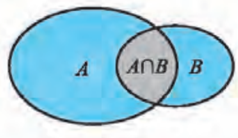


图 7-3

事件 A 与事件 B 的交事件可用 Venn 图(如图 7-3)表示.

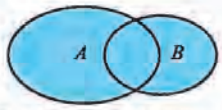
实例分析

在试验 E“抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数”中，设事件 A 表示随机事件“掷出的点数为偶数”，事件 B 表示随机事件“掷出的点数大于 4”. 事件“掷出的点数为 2，4，5，6 其中之一”与事件 A，B 有何关系？

若事件 A 和事件 B 至少有一个发生，则意味着掷出的点数要么是偶数，要么大于 4，因此“掷出的点数为 2，4，5，6 其中之一”这个事件发生；反之，若“掷出的点数为 2，4，5，6 其中之一”这个事件发生，则事件 A，B 至少有一个发生. 从集合运算的角度看，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{5,6\}$，$A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

抽象概括

一般地，由事件 A 和事件 B 至少有一个发生（即 A 发生，或 B 发生，或 A，B 都发生）所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**并事件**（或**和事件**），记作 $A\cup B$（或 $A+B$）. 事件 A 与事件 B 的并事件是由事件 A 或事件 B 所包含的样本点构成的集合.



$A\cup B$

图 7－4

事件 A 与事件 B 的并事件可用 Venn 图（如图 7－4）表示.

北京师范大学出版社

实例分析

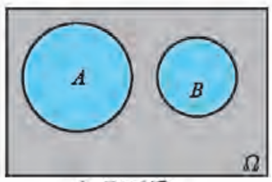
在试验 E“抛掷一枚骰子，观察骰子掷出的点数”中，设事件 A 表示随机事件“掷出的点数为偶数”，事件 B 表示随机事件“掷出的点数为 5”，则事件 A 与 B 能否同时发生？

显然，事件 A 所包含的样本点为 2，4，6，事件 B 所包含的样本点为 5. 因此，若事件 A 发生，则掷出的点数必为 2，4，6 之一，事件 B 不发生；反之，若事件 B 发生，则掷出的点数为 5，事件 A 不发生. 因此，事件 A 与事件 B 不能同时发生.

事件 A 与事件 B 不能同时发生，意味着这两个集合没有公共的样本点，即它们的交集是空集.

抽象概括

一般地，不能同时发生的两个事件 A 与 B（$A\cap B=\varnothing$）称为**互斥事件**. 它可以理解为 A，B 同时发生这一事件是不可能事件.



A，B 互斥

图 7－5

互斥事件可用 Venn 图（如图 7－5）表示.

给定事件 A,A 不发生也是一个事件,记为 B.

显然,每次试验要么 A 发生,要么 A 不发生(即 B 发生),故事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

即 $$\boxed{A\cup B=\Omega,\text{且 } A\cap B=\varnothing.}$$

例如,抛掷一枚骰子,A=“掷出的点数为偶数”$=\{2,4,6\}$,B=“掷出的点数为奇数”$=\{1,3,5\}$. 此时 A,B 必有一个发生,但不可能同时发生,因此它们是互斥事件,即

$$A\cup B=\Omega, A\cap B=\varnothing.$$

若 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**,事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

对立事件可用 Venn 图(如图 7-6)表示.

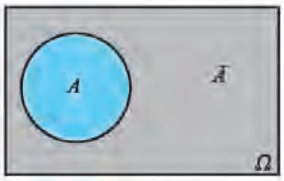


图 7-6

例 4 把标号为 1,2,3,4 的四张卡片分发给甲、乙、丙、丁四个人,每人 1 张,事件 A 表示随机事件“甲分得 1 号卡片”,事件 B 表示随机事件“乙分得 1 号卡片”.

(1) $A\cap B$,$A\cup B$ 分别指什么事件?

(2) 事件 A 与事件 B 是否为互斥事件?若是互斥事件,则是否互为对立事件?若不是对立事件,请分别说出事件 A、事件 B 的对立事件.

解 (1) 根据题意,事件 A 和事件 B 不可能同时发生,所以 $A\cap B$ 是不可能事件;$A\cup B$ 表示事件“甲分得 1 号卡片或乙分得 1 号卡片”.

(2) 由(1)可知事件 A 和事件 B 不可能同时发生,所以事件 A 与事件 B 是互斥事件. 又因为事件 A 与事件 B 可以都不发生($A\cup B\neq\Omega$),如甲分得 2 号卡片,同时乙分得 3 号卡片,所以事件 A 与事件 B 不是对立事件. 事件 A 的对立事件 $\overline{A}$ 是指事件“甲未分得 1 号卡片”,事件 B 的对立事件 $\overline{B}$ 是指事件“乙未分得 1 号卡片”.

例 5 在试验 E_5“连续抛掷一枚骰子 2 次,观察每次掷出的点数”中,事件 A 表示随机事件“第一次掷出的点数为 1”,事件 A_j 表示随机事件“第一次掷出的点数为 1,第二次掷出的点数为 j”,事件 B 表示随机事件“2 次掷出的点数之和为 6”,事件 C 表示随机事件“第二次掷出的点数比第一次的大 3”.

(1) 试用样本点表示事件 $A\cap B$ 与 $A\cup B$;

(2) 试判断事件 A 与 B,A 与 C,B 与 C 是否为互斥事件;

(3) 试用事件 A_j 表示随机事件 A.

解 由前面的分析可知试验 E_5 的样本空间为

$$\Omega_5=\left\{\begin{array}{llllll}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6)\\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6)\\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6)\\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6)\\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6)\\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{array}\right\}.$$

(1) 因为事件 A 表示随机事件“第一次掷出的点数为 1”，所以满足条件的样本点有 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$，即

$$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}.$$

因为事件 B 表示随机事件“2 次掷出的点数之和为 6”，所以满足条件的样本点有 $(1,5)$，$(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$，即

$$B=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

所以 $A\cap B=\{(1,5)\}$，$A\cup B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

(2) 因为事件 C 表示随机事件“第二次掷出的点数比第一次的大 3”，所以

$$C=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}.$$

因为 $A\cap B=\{(1,5)\}\neq\varnothing$，$A\cap C=\{(1,4)\}\neq\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，所以事件 A 与事件 B，事件 A 与事件 C 不是互斥事件，事件 B 与事件 C 是互斥事件.

(3) 因为事件 A_j 表示随机事件“第一次掷出的点数为 1，第二次掷出的点数为 j”，所以 $A_1=\{(1,1)\}$，$A_2=\{(1,2)\}$，$A_3=\{(1,3)\}$，$A_4=\{(1,4)\}$，$A_5=\{(1,5)\}$，$A_6=\{(1,6)\}$，所以

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6.$$

练 习

1. 从一副扑克牌(去掉大、小王，共 52 张)中随机选取 1 张，下列每组事件是否为互斥事件？若是互斥事件，则是否互为对立事件？若不是对立事件，请分别说出事件 A、事件 B 的对立事件.

   (1) A 表示“抽出的牌是红心”，B 表示“抽出的牌是方片”；

   (2) A 表示“抽出的牌是红心”，B 表示“抽出的牌是 K”；

   (3) A 表示“抽出的牌是红色牌”，B 表示“抽出的牌是黑色牌”；

   (4) A 表示“抽出的牌面是 2,3,4,6,10 之一”，B 表示“抽出的牌是方片”；

   (5) A 表示“抽出的牌面是 2,3,4,5,6,7,8,9,10 之一”，B 表示“抽出的牌面是 J,Q,K,A 之一”；

   (6) A 表示“抽出的牌面是 2,3,4,5,6,7 之一的一张方片”，B 表示“抽出的牌面是 8,9,10,J,Q,K,A 之一的一张方片”.

华东师范大学出版社

2. 在试验“甲、乙、丙三人各射击 1 次，观察中靶的情况”中，事件 A 表示随机事件“甲中靶”，事件 B 表示随机事件“乙中靶”，事件 C 表示随机事件“丙中靶”，试用 A,B,C 的运算表示下列随机事件：

(1) 甲未中靶；

(2) 甲中靶而乙未中靶；

(3) 三人中只有丙未中靶；

(4) 三人中至少有一人中靶；

(5) 三人中恰有两人中靶.

3. 在试验 E_2“连续抛掷一枚硬币 3 次，观察正面、反面出现的情况”中，设事件 A 表示随机事件“第一次出现正面”，事件 B 表示随机事件“3 次出现同一面”，事件 C 表示随机事件“至少 1 次出现正面”.

(1) 试用样本点表示事件 $A\cup B,A\cap B,A\cup C,A\cap C$；

(2) 试用样本点表示事件 $\overline{A}\cup B,\overline{A}\cap B,A\cup\overline{C},A\cap\overline{C}$；

(3) 试判断事件 A 与 B，A 与 C，B 与 C 是否为互斥事件.

习题 7－1

A 组

北京师范大学出版社

1. 在 12 件同类产品中，有 10 件正品和 2 件次品，从中任意抽出 3 件. 其中为必然事件的是(　　)，并说明理由.

A. 3 件都是正品　　B. 至少有 1 件是次品

C. 3 件都是次品　　D. 至少有 1 件是正品

2. 下列说法正确的是(　　)，并说明理由.

A. 互斥事件与对立事件含义相同　　B. 互斥事件必是对立事件

C. 对立事件必是互斥事件　　D. 对立事件可以是互斥事件，也可以不是互斥事件

3. 连续抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现的情况，事件“至少 2 次出现正面”的对立事件是(　　)，并说明理由.

A. 只有 2 次出现反面　　B. 至少 2 次出现正面

C. 有 2 次或 3 次出现正面　　D. 有 2 次或 3 次出现反面

4. 从一副扑克牌(去掉大、小王，共 52 张)中随机选取 1 张，记录它的花色. 事件 A 表示随机事件“抽出的牌是黑桃”，事件 B 表示随机事件“抽出的牌是红心”，事件 C 表示随机事件“抽出的牌是方片”，事件 D 表示随机事件“抽出的牌是草花”，下列说法中正确的序号是________.

(1) A,B,C,D 彼此互斥；

(2) A 与 D，B 与 C 是对立事件；

(3) A 的对立事件是 $B\cup C\cup D$；

(4) $A\cup B$ 的对立事件为 $C\cup D$；

(5) $A\cup C$ 与 $B\cup D$ 为互斥事件，但不是对立事件.

5. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 连续抛掷一枚硬币 5 次，记录正面出现的次数；

(2) 从一副扑克牌(去掉大、小王，共 52 张)中随机选取 1 张，记录它的花色.

6. 设某随机试验的样本空间 $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，事件 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，求下列事件：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$；

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$；　　(4) $A\cap(\overline{B\cap C})$.

B 组

1. 从装有除颜色外完全相同的 2 个红球(编号为 1,2)和 2 个白球(编号为 1,2)的口袋内任取 2 个球，那么互斥而不对立的两个随机事件是（　　），并说明理由.

A. 至少有 1 个白球，都是白球　　B. 至少有 1 个白球，至少有 1 个红球

C. 恰有 1 个白球，恰有 2 个白球　　D. 至少有 1 个白球，都是红球

2. 如果 A，B 是互斥事件，那么（　　），并说明理由.

A. 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 必不互斥　　B. $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是必然事件

C. A 与 $\overline{B}$ 可能互斥　　D. $A\cup B$ 是必然事件

3. 设某人向一个目标连续射击 3 次，用事件 A_i 表示随机事件"第 i 次射击命中目标"($i=1,2,3$)，指出下列事件的含义：

(1) $A_1\cap A_2$；

(2) $A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}$；

(3) $\overline{A_1\cup A_2}$；

(4) $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$.

北京师范大学出版社

§ 2 古典概型

2.1 古典概型的概率计算公式

在试验“抛掷一枚均匀的骰子，观察骰子掷出的点数”中，其样本空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$，共有6个样本点. 由于骰子几何形状的对称性，可以认为每个样本点出现的可能性相等.

在试验“连续抛掷一枚均匀的骰子2次，观察每次掷出的点数”的样本空间中，共有36个样本点，也可以认为每个样本点出现的可能性相等.

在上述两个试验中，样本空间中样本点的个数都是有限的，即试验所对应的样本空间Ω为有限样本空间，而且认为样本空间Ω中的各个样本点出现的可能性相等. 在这种情况下，任意一个随机事件发生的可能性该如何表示呢？

实例分析

1. 抛掷一枚均匀的骰子，“掷出偶数点”的可能性是多少？

2. 同时抛掷两枚均匀的骰子(编号为1,2)，“1号骰子掷出的点数为1”的可能性是多少？

3. 同时抛掷两枚均匀的骰子，“掷出的点数相同”的可能性是多少？

抛掷一枚均匀的骰子，其样本空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$，共有6个样本点，每个样本点出现的可能性相等，均为$\frac{1}{6}$；而“掷出偶数点”对应的事件为$\{2,4,6\}$，含有3个样本点，因此可以认为“掷出偶数点”的可能性是$\frac{3}{6}$，即$\frac{1}{2}$.

同时抛掷两枚均匀的骰子，其样本空间共有36个样本点，每个样本点出现的可能性相等，均为$\frac{1}{36}$；而“1号骰子掷出的点数为1”对应的事件为$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$，含有6个样本点，因此可以认为“1号骰子掷出的点数为1”的可能性是$\frac{6}{36}$，即$\frac{1}{6}$. 同样，“掷出的点数相同”对应的事件为$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$，含有6个样本点，因此可以认为“掷出的点数相同”的可能性是$\frac{6}{36}$，即$\frac{1}{6}$.

对于一个随机事件 A，我们通常用一个数 $P(A)(0\leqslant P(A)\leqslant 1)$ 来表示该事件发生的可能性的大小，这个数就称为随机事件 A 的**概率**. 概率度量了随机事件发生的可能性的大小，是对随机事件统计规律性的数量刻画.

抽象概括

一般地，若试验 E 具有如下特征：

(1) 有限性：试验 E 的样本空间 Ω 的样本点总数有限，即样本空间 Ω 为有限样本空间；

(2) 等可能性：每次试验中，样本空间 Ω 的各个样本点出现的可能性相等.

则称这样的试验模型为**古典概率模型**，简称**古典概型**.

对古典概型来说，如果样本空间 Ω 包含的样本点总数为 n，随机事件 A 包含的样本点个数为 m，那么事件 A 发生的概率为

$$\boxed{P(A)=\frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点总数}}=\frac{m}{n}.}$$

需要说明的是，在现实中不存在绝对均匀的硬币，也没有绝对均匀的骰子. 古典概率模型是从现实中抽象出来的一个数学模型，它有着广泛的应用.

北京师范大学出版社

思考交流

1. 向一条线段内随机地投射一个点，观察点落在线段上的不同位置. 你认为这个情境适合用古典概型来描述吗？为什么？

2. 某同学随机地向一靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中 10 环，命中 9 环……命中 1 环和脱靶. 你认为这个情境适合用古典概型来描述吗？为什么？

3. 有人认为，抛掷两枚均匀的骰子，掷出的点数之和可能为 2，3，4，…，12，共有 11 种可能的情形. 因此，“掷出的点数之和是 5”的可能性是 $\frac{1}{11}$. 这种说法是否正确？为什么？

例 1 在试验 E_6“袋中有白球 3 个(编号为 1，2，3)、黑球 2 个(编号为 1，2)，这 5 个球除颜色外完全相同，从中不放回地依次摸取 2 个，每次摸 1 个，观察摸出球的情况”中，摸到白球的结果分别记为 w_1，w_2，w_3，摸到黑球的结果分别记为 b_1，b_2. 求：

(1) 取到的两个球都是白球的概率；

(2) 取到的两个球颜色相同的概率；

(3) 取到的两个球至少有一个是白球的概率.

解 由前面的分析可知试验 E_6 的样本空间 $\Omega=\{w_1w_2, w_1w_3, w_1b_1, w_1b_2, w_2w_1, w_2w_3, w_2b_1, w_2b_2, w_3w_1, w_3w_2, w_3b_1, w_3b_2, b_1w_1, b_1w_2, b_1w_3, b_1b_2, b_2w_1, b_2w_2, b_2w_3, b_2b_1\}$，共有 20 个样本点，且每个样本点出现的可能性相同，可用古典概型来计算概率.

(1) 设事件 A 表示“取到的两个球都是白球”，则 $A=\{w_1w_2, w_1w_3, w_2w_1, w_2w_3, w_3w_1, w_3w_2\}$，共含有 6 个样本点，所以 $P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$，即取到的两个球都是白球的概率为 $\frac{3}{10}$；

(2) 设事件 B 表示“取到的两个球颜色相同”，则 $B=\{w_1w_2, w_1w_3, w_2w_1, w_2w_3, w_3w_1, w_3w_2, b_1b_2, b_2b_1\}$，共含有 8 个样本点，所以 $P(B)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，即取到的两个球颜色相同的概率为 $\frac{2}{5}$；

(3) 设事件 C 表示“取到的两个球至少有一个是白球”，则 $C=\{w_1w_2, w_1w_3, w_1b_1, w_1b_2, w_2w_1, w_2w_3, w_2b_1, w_2b_2, w_3w_1, w_3w_2, w_3b_1, w_3b_2, b_1w_1, b_1w_2, b_1w_3, b_2w_1, b_2w_2, b_2w_3\}$，共含有 18 个样本点，所以 $P(C)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$，即取到的两个球至少有一个是白球的概率为 $\frac{9}{10}$.

北京师范大学出版社

练 习

1. 如图，一个转盘被等分成 8 个扇形，转动该转盘，试求下列事件的概率：
   (1) 箭头指向 8；
   (2) 箭头指向 3 或 8；
   (3) 箭头不指向 8；
   (4) 箭头指向奇数；
   (5) 箭头指向 3 的倍数；
   (6) 箭头指向 24 的约数.

(第 1 题)

2. 连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，试求下列事件的概率：
   (1) 第一次掷出的点数恰好比第二次的大 3；
   (2) 第一次掷出的点数比第二次的大；
   (3) 2 次掷出的点数均为偶数.

2.2 古典概型的应用

古典概型在概率论的发展中占有相当重要的地位，在实际中有着广泛的应用.

例 2 书架上放有三套不同的小说，每套均分上、下册，共六本，从中任取两本，试求下列事件的概率：

(1) 取出的书不成套;

(2) 取出的书均为上册;

(3) 取出的书上、下册各一本,但不成套.

解 设取出第一套书的上、下册分别记为 A_1, A_2,取出第二套书的上、下册分别记为 B_1, B_2,取出第三套书的上、下册分别记为 C_1, C_2.

不区分取出的两本书的顺序,依题意可知样本空间 $\Omega=\{A_1A_2, A_1B_1, A_1B_2, A_1C_1, A_1C_2, A_2B_1, A_2B_2, A_2C_1, A_2C_2, B_1B_2, B_1C_1, B_1C_2, B_2C_1, B_2C_2, C_1C_2\}$,共含有 15 个样本点,可以认为这 15 个样本点出现的可能性是相等的,从而用古典概型来计算概率.

(1) 设事件 A 表示"取出的书不成套",则 $A=\{A_1B_1, A_1B_2, A_1C_1, A_1C_2, A_2B_1, A_2B_2, A_2C_1, A_2C_2, B_1C_1, B_1C_2, B_2C_1, B_2C_2\}$,样本点有 12 个,故 $P(A)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$;

(2) 设事件 B 表示"取出的书均为上册",则 $B=\{A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1\}$,样本点有 3 个,故 $P(B)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$;

(3) 设事件 C 表示"取出的书上、下册各一本,但不成套",则 $C=\{A_1B_2, A_1C_2, A_2B_1, A_2C_1, B_1C_2, B_2C_1\}$,样本点有 6 个,故 $P(C)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

北京师范大学出版社

例 3 口袋里共有 4 个球,其中有 2 个是白球,2 个是黑球,这 4 个球除颜色外完全相同. 4 个人按顺序依次从中摸出一个球(不放回),试计算第二个人摸到白球的概率.

解法 1 考察试验 E_8:4 个人按顺序依次从中摸出一个球,记录摸球的所有可能结果.

把 2 个白球编上序号 1,2,记摸到 1,2 号白球的结果分别为 w_1, w_2;2 个黑球也编上序号 1,2,记摸到 1,2 号黑球的结果分别为 b_1, b_2.

如图 7-7,试验 E_8 的样本空间 $\Omega_8=\{w_1w_2b_1b_2, w_1w_2b_2b_1, w_1b_1w_2b_2, w_1b_1b_2w_2, w_1b_2w_2b_1, w_1b_2b_1w_2, w_2w_1b_1b_2, w_2w_1b_2b_1, w_2b_1w_1b_2, w_2b_1b_2w_1, w_2b_2w_1b_1, w_2b_2b_1w_1, b_1w_1w_2b_2, b_1w_1b_2w_2, b_1w_2w_1b_2, b_1w_2b_2w_1, b_1b_2w_2w_1, b_1b_2w_1w_2, b_2w_1b_1w_2, b_2w_1w_2b_1, b_2w_2w_1b_1, b_2w_2b_1w_1, b_2b_1w_2w_1, b_2b_1w_1w_2\}$,共有 24 个样本点. 由于口袋内的 4 个球除颜色外完全相同,因此可以认为这 24 个样本点出现的可能性是相等的,从而用古典概型来计算概率.

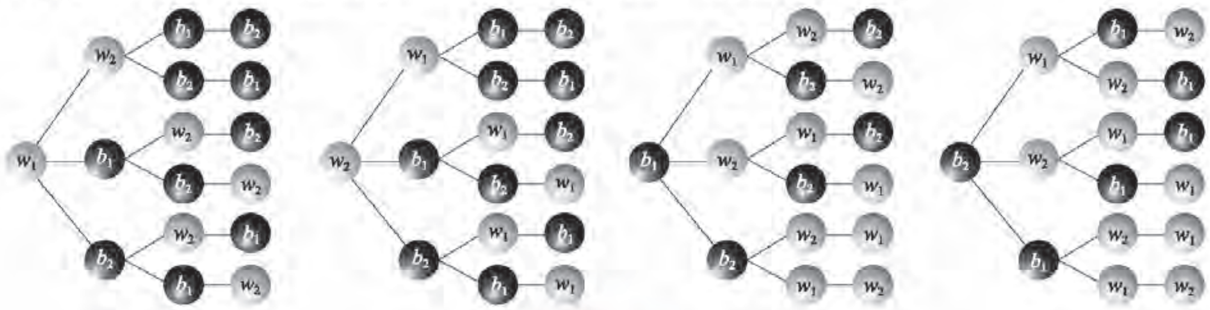


图 7-7

用事件 A 表示“第二个人摸到白球”，则此时事件 $A=\{w_1w_2b_1b_2, w_1w_2b_2b_1, w_2w_1b_1b_2, w_2w_1b_2b_1, b_1w_1w_2b_2, b_1w_1b_2w_2, b_1w_2w_1b_2, b_1w_2b_2w_1, b_2w_1b_1w_2, b_2w_1w_2b_1, b_2w_2w_1b_1, b_2w_2b_1w_1\}$，包含 12 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

即第二个人摸到白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

解法 2 因为是计算“第二个人摸到白球”的概率，所以只考虑前两个人摸球的情况. 考察试验 E_9：前两个人按顺序依次从中摸出一个球，记录摸球的所有可能结果.

前两个人按顺序依次从袋中摸出一个球的所有结果用树状图表示，如图 7－8.

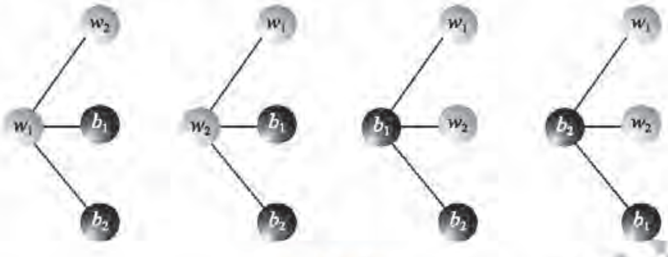


图 7－8

从上面的树状图可以看出，试验 E_9 的样本空间 $\Omega_9=\{w_1w_2, w_1b_1, w_1b_2, w_2w_1, w_2b_1, w_2b_2, b_1w_1, b_1w_2, b_1b_2, b_2w_1, b_2w_2, b_2b_1\}$，共有 12 个样本点. 由于口袋内的 4 个球除颜色外完全相同，因此可以认为这 12 个样本点出现的可能性是相等的，从而用古典概型来计算概率.

依题意可知此时事件 $A=\{w_1w_2, w_2w_1, b_1w_1, b_1w_2, b_2w_1, b_2w_2\}$，包含 6 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

即第二个人摸到白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

这里，我们根据事件“第二个人摸到白球”的特点，只考虑前两个人摸球的情况，从而简化了模型.

解法 3 因为口袋里的 4 个球除颜色外完全相同，因此可以对 2 个白球不加区别，对 2 个黑球也不加区别，由此得到另一种解法.

考察试验 E_{10}：4 个人按顺序依次从中摸出一个球，只记录摸出球的颜色. 试验 E_{10} 的所有可能结果用树状图表示，如图 7－9.

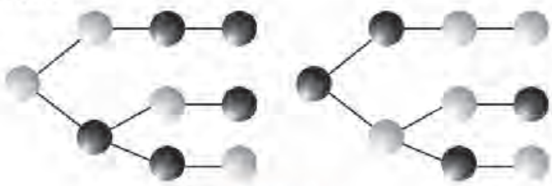


图 7－9

北京师范大学出版社

记摸到白球、黑球的结果分别为 w,b，试验 E_{10} 的样本空间 $\Omega_{10}=\{wwbb,wbwb,wbbw,bbww,bwwb,bwbw\}$，共有 6 个样本点. 由于口袋内的 4 个球除颜色外完全相同，因此可以认为这 6 个样本点出现的可能性也是相等的，从而用古典概型来计算概率.

依题意可知此时事件 $A=\{wwbb,bwwb,bwbw\}$，包含 3 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

即第二个人摸到白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

解法 4 进一步简化，只考虑第二个人摸球的情况.

考察试验 E_{11}：4 个人按顺序依次从中摸出一个球，只记录第二个人摸出球的情况.

把 2 个白球、2 个黑球分别编上序号 1，2，记摸到 1，2 号白球的结果分别为 w_1,w_2，记摸到 1，2 号黑球的结果分别为 b_1,b_2. 则试验 E_{11} 的样本空间 $\Omega_{11}=\{w_1,w_2,b_1,b_2\}$，共有 4 个样本点. 由于口袋内的 4 个球除颜色外完全相同，因此可以认为这 4 个样本点出现的可能性是相等的，从而用古典概型来计算概率.

依题意可知此时事件 $A=\{w_1,w_2\}$，包含 2 个样本点，因此，

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

即第二个人摸到白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

以上 4 种解法分别从不同的角度切入，选择了不同的古典概型.

这个问题表面上是一个摸球的问题，实际上它也是许多实际问题的一个模型. 例如，抽签问题、排序占位问题. 由这个问题的解答过程可以看出：不论第几次摸球，摸到白球的概率都是 $\frac{1}{2}$. 这说明，摸球时，中奖的可能性大小与顺序无关.

北京师范大学出版社

练 习

1. 袋中有 2 个白球和 2 个黑球，这 4 个球除颜色外完全相同，从中任意摸出 2 个，求至少摸出 1 个黑球的概率.
2. 同时抛掷两枚均匀的骰子，求：
   (1) “掷出的点数之和为 6”的概率；
   (2) “至少有一个点数是 5 或 6”的概率.

思考交流

1. 在试验 E“抛掷一枚均匀的骰子，观察骰子掷出的点数”中，设事件 A 表示“掷出的点数为偶数”，事件 B 表示“掷出的点数为 5”，试探究 $P(A)$，$P(B)$ 与 $P(A\cup B)$ 的关系.

2. 在试验 E_5“连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，观察每次掷出的点数”中，设事件 A 表示“第一次掷出的点数为 1”，事件 B 表示“第一次掷出的点数不是 1”，试探究 $P(A)$，$P(B)$ 与 $P(A\cup B)$ 的关系.

3. 在试验 E_{12}“从一副扑克牌(去掉大、小王，共 52 张)中随机选取 1 张，记录它的花色”中，设事件 A 表示“抽出的牌是黑桃”，事件 B 表示“抽出的牌是红心”，试探究 $P(A)$，$P(B)$ 与 $P(A\cup B)$ 的关系.

将上述探究的结果填入表 7－2.

表 7－2

	E	E_5	E_{12}
A 与 B 的关系			
$P(A)$			
$P(B)$			
$P(A\cup B)$			
$P(A)+P(B)$			

抽象概括

在一个试验中，如果事件 A 和事件 B 是互斥事件，那么有

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B).}$$

这一公式称为**互斥事件的概率加法公式.**

特别地，

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即 $P(A)+P(\overline{A})=1$，所以

$$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A).}$$

一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，那么有

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).}$$

互斥事件的概率加法公式和长度、面积、体积、质量等的加法公式本质上是一样的.

思考交流

当 A，B 不是互斥事件时，上述公式还成立吗？试举例说明.

北京师范大学出版社

例 4 某学校准备对秋季运动会的竞赛项目进行调整，为此，学生会进行了一次民意调查. 100 个人接受了调查，他们被要求在赞成调整、反对调整、对这次调整不发表看法中任选一项. 调查结果如表 7－3.

表 7－3

	男生人数	女生人数	总人数
赞 成	18	9	27
反 对	12	25	37
不发表看法	20	16	36
总 计	50	50	100

随机选取一个被调查者，他对这次调整表示反对或不发表看法的概率是多少？

解 用事件 A 表示“对这次调整表示反对”，事件 B 表示“对这次调整不发表看法”，则事件 A 和事件 B 是互斥事件，并且事件 $A\cup B$ 就表示“对这次调整表示反对或不发表看法”. 由互斥事件的加法公式，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{37}{100}+\frac{36}{100}=\frac{73}{100}.$$

因此，随机选取一个被调查者，他对这次调整表示反对或不发表看法的概率是$\frac{73}{100}$.

例 5 某网站登录密码由四位数字组成. 某同学注册时将自己生日的四个数字 0，3，2，5 重新编排了一个顺序作为密码. 由于长时间未登录该网站，他忘记了密码. 若登录时随机输入由 0，3，2，5 组成的一个四位数字，则该同学不能顺利登录的概率是多少？

解 用事件 A 表示“输入由 0，3，2，5 组成的一个四位数字，但不是密码”. 由于事件 A 比较复杂，可考虑它的对立事件 $\overline{A}$，即“输入由 0，3，2，5 组成的一个四位数字，恰是密码”，显然它只有一种结果. 四个数字 0，3，2，5 随机编排顺序，所有可能结果可用树状图表示，如图 7－10.

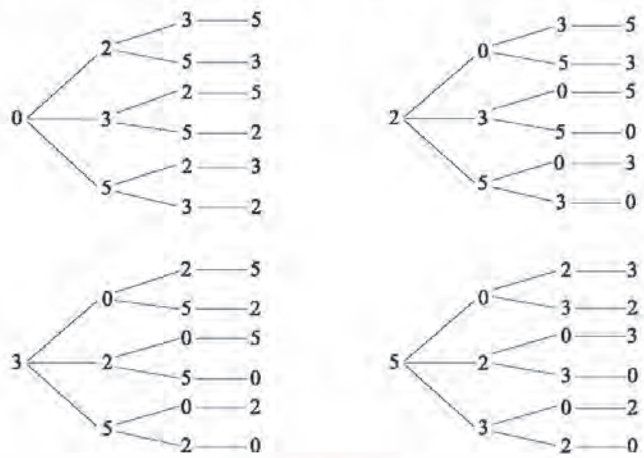


图 7－10

北京师范大学出版社

从上面的树状图可以看出，将四个数字 0，3，2，5 随机编排顺序，共有 24 种可能的结果，即样本空间共含有 24 个样本点，且 24 个样本点出现的结果是等可能的，因此可以用古典概型来解决. 由$P(\overline{A})=\frac{1}{24}$，得 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{23}{24}$. 因此，随机输入由 0，3，2，5 组成的一个四位数字，但不是密码，即该同学不能顺利登录的概率为$\frac{23}{24}$.

在概率计算的问题中，当事件 A 比较复杂而对立事件 $\overline{A}$ 比较简单时，我们往往通过计算 $P(\overline{A})$来求得 $P(A)$.

例 6 班级联欢时，主持人安排了跳双人舞、独唱和独奏节目，指定 3 个男生和 2 个女生来参与. 把五个人分别编号为 1，2，3，4，5，其中 1，2，3 号是男生，4，5 号是女生. 将每个人的编号分别写在 5 张相同的卡片上，放入一个不透明的箱子中，并搅拌均匀，每次从中随机取出一张卡片，取出谁的编号谁就参与表演节目.

(1) 为了选出 2 人来表演双人舞，连续抽取 2 张卡片，求选出的 2 人不全是男生的概率.

(2) 为了确定表演独唱和独奏的人选，抽取并观察第一张卡片后，又放回箱子中，充分混合后再从中抽取第二张卡片. 求：

① 独唱和独奏由同一个人表演的概率；

② 选出的不全是男生的概率.

解 把抽取 2 张卡片的结果记为(i,j)，其中 i 表示第一次抽取的卡片号，j 表示第二次抽取的卡片号.

(1) 依题意可知抽取的所有可能结果为

$$\begin{gathered}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),\\(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4).\end{gathered}$$

共有 20 种可能的结果. 因为每次都是随机抽取，所以可以认为每个结果出现的可能性相等，从而用古典概型来解决.

用事件 A 表示“选出的 2 人不全是男生”.

方法 1 依题意知事件 A 包含的样本点有(1，4)，(1，5)，(2，4)，(2，5)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，共有 14 种可能的结果. 因此，

$$P(A)=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}.$$

方法 2 依题意知事件 A 的对立事件$\overline{A}$“取出的 2 人全是男生”包含的样本点有(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，共有 6 种可能的结果. 因此，

北京师范大学出版社

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{6}{20}=\frac{7}{10}.$$

即选出的 2 人不全是男生的概率为$\frac{7}{10}$.

(2) 与(1)中的不放回的抽取不同的是，(2)中的抽取是有放回的抽取. 抽取的所有可能结果为

$$\begin{gathered}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5).\end{gathered}$$

共有 25 种可能的结果. 因为每次都是随机抽取，所以可以认为每个结果出现的可能性相等，从而用古典概型来解决.

① 设事件 B 表示“独唱和独奏由同一个人表演”，则事件 B 所包含的样本点有(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5)，共有 5 种可能的结果. 因此，

$$P(B)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.$$

即独唱和独奏由同一个人表演的概率为$\frac{1}{5}$.

② 设事件 C 表示“选出的不全是男生”，其对立事件 $\bar{C}$ 表示“选出的全是男生”，包含的样本点有(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，共有 9 种可能的结果. 因此，

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}.$$

即选出的不全是男生的概率为$\frac{16}{25}$.

练 习

1. 从一副扑克牌(去掉大、小王，共 52 张)中随机选取 1 张，试求下列事件的概率：
   (1) 这张牌是 A；　　(2) 这张牌是红色 A；
   (3) 这张牌是 K，Q 或 J；　　(4) 这张牌是草花.
2. 小军、小燕和小明是同班同学，假设他们 3 人早上到校先后的可能性相等，求：
   (1) 事件“小燕比小明先到校”的概率；
   (2) 事件“小燕比小明先到校，小明又比小军先到校”的概率.
3. 从甲、乙、丙、丁 4 位同学中选 2 名代表，假设每个人当选的可能性相等，则甲被选上的概率是多少？

北京师范大学出版社

习题 7－2

A 组

1. 某同学从 5 本不同的科技书和 7 本不同的文艺书中任选一本阅读，那么他选中科技书的概率是多少？
2. 从一副扑克牌（去掉大、小王，共 52 张）中随机选取 1 张，试求下列事件的概率：
   (1) 这张牌是红色牌；
   (2) 这张牌是黑色 A；
   (3) 这张牌是黑色 K、黑色 Q 或黑色 J；
   (4) 这张牌牌面是 5 的倍数且是红色；
   (5) 这张牌不是方片.
3. 随机安排李明、王红、刘凯 3 位同学在接下来的 3 天中值日，每人值日 1 天，那么李明第 1 天值日的概率是多少？
4. 从甲、乙、丙、丁 4 位同学中选取 2 位去参与一项公益活动，试求下列事件的概率：
   (1) 甲被选中；
   (2) 丁没被选中；
   (3) 甲、丁至少有 1 人被选中.
5. 甲、乙两位同学玩“石头、剪刀、布”的出拳游戏，在一次游戏中，求：
   (1) 平局的概率；
   (2) 甲赢的概率；
   (3) 乙赢的概率.
6. 连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，试求下列事件的概率：
   (1) 掷出的点数之和不大于 7；
   (2) 掷出的点数之和不小于 7；
   (3) 掷出的点数之和为 6 或 7；
   (4) 掷出的点数之和为奇数；
   (5) 掷出的点数之和为偶数；
   (6) 掷出的点数之和为 3 的倍数.

北京师范大学出版社

B 组

1. 袋中有红、黄两种颜色的球各 1 个，这 2 个球除颜色外完全相同，从中任取 1 个，有放回地抽取 3 次. 求：
   (1) 3 个全是红球的概率；
   (2) 3 个颜色全相同的概率；
   (3) 3 个颜色不全相同的概率.
2. 在 5 张卡片上分别写有数字 1，2，3，4，5，然后将它们混合，再任意排列成一行组成一个五位数，求得到的数能被 2 或 5 整除的概率.

3. 某次茶话会上，共安排 4 个节目，其中有 2 个歌唱节目、1 个舞蹈节目、1 个小品节目，按任意次序排出一个节目单，试求下列事件的概率：

(1) 舞蹈在最前或最后；

(2) 舞蹈和小品 1 个在最前、1 个在最后；

(3) 舞蹈和小品至少有 1 个在最前或最后；

(4) 两个歌唱节目相邻；

(5) 舞蹈排在小品之前.

4. 如果口袋中装有 m 个白球和 n 个黑球，这 $(m+n)$ 个球除颜色外完全相同，$(m+n)$ 个人按顺序依次从中摸出一个球，则第 $k(1\leqslant k\leqslant m+n)$ 个人摸到白球的概率是多少？

5. 分赌本问题是历史上有名的问题. 1654 年，职业赌徒德 · 梅累向法国数学家帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662)提出一个使他苦恼很久的分赌本问题：甲、乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 法郎，每局中无平局. 他们约定，谁先赢三局则得到全部 100 法郎的赌本. 当甲赢了两局，乙赢了一局时，因故要中止赌博. 那么这 100 法郎如何分才算公平？说说你的想法.

6. 甲、乙两人约定玩一种游戏，把一枚均匀的骰子连续抛掷 3 次，游戏规则有下述 3 种，这 3 种规则是否公平？对谁更有利？为什么？

(1) 若三次掷出的点数之和为奇数，则甲获胜；若三次掷出的点数之和为偶数，则乙获胜.

(2) 若三次掷出的点数为一奇两偶或两奇一偶，则甲获胜；若三次掷出的点数均为奇数或均为偶数，则乙获胜.

(3) 若三次掷出的点数之和为 3,4,5,6,7,14,15,16,17,18 其中之一，则甲获胜；否则乙获胜.

北京师范大学出版社

§ 3 频率与概率

问题提出

对于任何一位篮球运动员，在一次投篮中，命中与否是一个随机事件. 但是，我们经常能够听到球迷说某某球员投篮很准，这个“很准”是怎么得来的？是否有一个量化的标准？此外，我们经常能够看到在篮球比赛决定胜负的一投时，往往会将这决定胜负的一投交给“最有把握”的球员. 既然能否投中是一个随机事件，那么最后一投交给谁都应该一样，不都是听天由命吗？这里的“最有把握”是怎么得来的呢？

分析理解

在篮球比赛的统计中有一项技术指标叫“投篮命中率”，是用来衡量运动员投篮准确性的. “投篮命中率”往往用一个比值 $\frac{m}{n}$ 表示，其中 n 表示投篮的总次数，m 表示在这 n 次投篮中命中的次数. 在一般情况下，称 m 为投篮命中的频数，称 $\frac{m}{n}$ 为投篮命中的频率，简称投篮命中率. 显然，频率 $\frac{m}{n}$ 的值位于区间[0,1]之间，$\frac{m}{n}$ 的值可以反映运动员投篮的准确度，$\frac{m}{n}$ 的值越大，说明其投篮越准.

表 7－4 是某篮球运动员在 2016 年 3 月的 5 场比赛中的投篮命中率(结果精确到 0.001).

表 7－4

比赛场次	总投篮次数	投篮命中次数	投篮命中率
1	13	5	0.385
2	15	7	0.467
3	9	4	0.444
4	15	8	0.533
5	18	8	0.444
总　计	70	32	0.457

北京师范大学出版社

表 7－5 是该运动员五个赛季的投篮命中率(结果精确到 0.001).

表 7－5

赛 季	总投篮次数	投篮命中次数	投篮命中率
2011 年—2012 年	1 266	578	0.457
2012 年—2013 年	1 535	673	0.438
2013 年—2014 年	791	346	0.437
2014 年—2015 年	1 471	627	0.426
2015 年—2016 年	1 444	656	0.454
总 计	6 507	2 880	0.443

思考交流

观察表 7－4 和表 7－5,说说该运动员投篮命中的频率具有什么特征.

北京师范大学出版社

历史上曾有很多人做过抛掷硬币试验,试验结果如表 7－6(结果精确到 0.000 1).

表 7－6

试验者	总抛掷次数	正面朝上的次数	正面朝上的频率
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
布丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

与篮球运动员的投篮命中率类似,在抛掷硬币试验中,当抛掷次数较小时,由于受用力不均匀、桌面细微的凹凸不平等偶然因素的影响,使得正面朝上的频率并不稳定.但当抛掷次数逐渐增大时,试验逐渐摆脱了许多微小偶然因素的影响,而使正面朝上的频率有一种较好的稳定性,即正面朝上的频率稳定在 0.5 左右.

对大量新生婴儿的统计显示,出生婴儿是男孩的频率具有稳定性.著名数学家拉普拉斯对男婴和女婴的出生规律做了详细的研究.他对英国伦敦、俄罗斯圣彼得堡、德国柏林和法国各地的情形进行了分析,得到庞大的统计资料.这些资料显示,10 年间,男孩出生的频率在 $\frac{22}{43}$ 附近摆动.

表 7－7 是 20 世纪波兰的一些统计资料(结果精确到 0.001).

表 7－7

出生年份	出生总人数	男孩数	频　率
1927	958 733	496 544	0.518
1928	990 933	513 654	0.518
1929	994 101	514 765	0.518
1930	1 022 811	528 072	0.516
1931	964 573	496 986	0.515
1932	934 663	482 431	0.516
总计	5 865 814	3 032 452	0.517

从表 7－7 可以看出,它们与拉普拉斯得到的结果非常相近.

抽象概括

在相同条件下,大量重复进行同一试验时,随机事件 A 发生的频率通常会在某个常数附近摆动,即随机事件 A 发生的频率具有稳定性. 这时,把这个常数叫作随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$. 显然,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 我们通常用频率来估计概率.

北京师范大学出版社

思考交流

1. 随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是一个常数,这个常数是用来度量什么的? 有何意义?

2. 随机事件 A 发生的概率与 A 发生的频率有什么区别和联系?

练　习

1. 统计 26 个英文字母使用的频率:
   (1) 每位同学随机翻开一本英文书的两页,统计 26 个英文字母使用的频率;
   (2) 汇总全班同学的数据,统计 26 个英文字母出现的频率.
2. 问题辨析:
   (1) 天气预报:“明天降雨的概率是 80%”,明天出门是否一定遇上雨?
   (2) 彩票中奖率为 1%,你买 100 张彩票是否一定中奖?
   (3) 抛掷一枚均匀的硬币,出现正面的概率为 0.5,那么连续抛掷这枚硬币 2 次,一定是一次出现正面、一次出现反面吗?

习题 7 - 3

A 组

1. 我国古代数学名著《九章算术》有"米谷粒分"题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1 534 石（市制容量单位，10 斗为 1 石），验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（　　），并说明理由.

A. 134 石　　B. 169 石　　C. 338 石　　D. 1 365 石

2. "抛掷一枚均匀的骰子掷出的点数为 5 的概率为 $\frac{1}{6}$，那么连续抛掷这枚骰子 6 次会出现 1 次掷出的点数为 5."这种说法对吗？为什么？

3. 为调查某地区老年人是否需要志愿者提供帮助，用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人，结果如下（单位：人）：

是否需要志愿者 \ 性别	男	女
需　要	40	30
不需要	160	270

（1）试估计该地区老年人中，需要志愿者提供帮助的老年人的概率；

（2）通过以上数据能否说明该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关？

4. 一家保险公司想了解汽车挡风玻璃破碎的概率. 该公司收集了 20 000 辆汽车的信息，时间从某一年的 7 月 1 日到第二年的 6 月 30 日，共发现有 600 辆汽车的挡风玻璃破碎. 在一年时间内，一辆汽车的挡风玻璃破碎的概率大约是多少？

B 组

1. 一个盒子中装有除颜色外完全相同的白球和红球若干个，从中任意摸出一个球，记录颜色后放回盒中，混合均匀后再摸一球，记录颜色. 如此重复多次，统计摸得白球的次数，计算摸得白球的频率，估计摸得白球的概率. 之后将盒中所有球取出，看其中白球所占比例. 比较此比例与前面所得概率之间的关系.

2. 根据统计，某篮球运动员在 5 000 次投篮中，命中的次数为 2 348 次.

（1）求这名运动员的投篮命中率.

（2）若这名运动员要想投篮命中 10 000 次，则大概需要投篮多少次？（结果精确到 100）

（3）根据提供的信息，判断"该篮球运动员投篮 3 次，至少能命中 1 次"这一说法是否正确.

3. 同时抛掷两枚均匀的骰子，观察并记录两枚骰子掷出的点数之和.

（1）两枚骰子掷出的点数之和有多少种可能？

（2）重复抛掷两枚骰子 50 次，根据试验结果，分别估计"掷出的点数之和为 4""掷出的点数之和为 7""掷出的点数之和为 10"的概率.

北京师范大学出版社

(3) 汇总全班同学的数据，得到至少 500 次试验结果，用上述结果对上述概率重新进行估计.

(4) 为了对上述事件的概率给出比较好的估计，你需要怎么做?

(5) 你认为“掷出的点数之和为 4”“掷出的点数之和为 7”“掷出的点数之和为 10”的概率相等吗?

阅读材料

布丰投针问题

1777 年，法国数学家布丰(Georges-Louis Leclerc，Comte de Buffon，1707—1788)提出以下问题：在一个有平行且等距木纹的地板上随意抛一支长度比木纹之间距离小的针(如图7-11)，求针和其中一条木纹相交的概率.

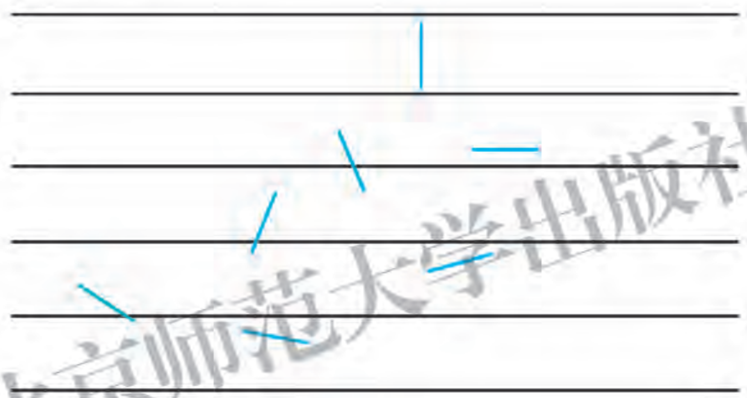


图 7-11

北京师范大学出版社

设木纹之间的距离都是 a，针的长度是 $l(l<a)$. 布丰证明了这个概率是

$$p=\frac{2l}{\pi a}\text{（其中 }\pi\text{ 为圆周率）}.$$

由于它与 π 有关，于是人们想到利用投针试验来估计圆周率的值. 如果针的长度 l 等于 $\frac{a}{2}$，那么这个概率为 $\frac{1}{\pi}$. 抛的次数越多，就能求出较为精确的 π 的值.

1901 年，意大利数学家拉兹瑞尼(Mario Lazzarini)做了 3 408 次投针试验，给出 π 的值为 3.141 592 9，准确到了小数点后 6 位. 通过几何、微积分、概率等不同渠道发现 π，这着实令人惊讶!

§4 事件的独立性

实例分析

探究 1 在试验 E_5"连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，观察每次掷出的点数"中，设事件 A 表示"第一次掷出 1 点"，事件 B 表示"第二次掷出 1 点".

(1) 试写出试验 E_5 的样本空间，并分别计算事件 A、事件 B 发生的概率；

(2) 事件 A 的发生与否对事件 B 发生的概率是否有影响？为什么？

(3) 事件 AB 的含义是什么？试探究 $P(A)$，$P(B)$ 与 $P(AB)$ 的关系.

探究 2 在试验 E_{13}"袋中有白球 3 个（编号为 1，2，3）、黑球 2 个（编号为 1，2），这 5 个球除颜色外完全相同，从中有放回地摸球，连续摸两次，每次摸 1 个，观察摸出球的情况"中，设事件 A 表示"第一次摸出白球"，事件 B 表示"第二次摸出白球".

(1) 试写出试验 E_{13} 的样本空间，并分别计算事件 A、事件 B 发生的概率；

(2) 事件 A 的发生与否对事件 B 发生的概率是否有影响？为什么？

(3) 事件 AB 的含义是什么？试探究 $P(A)$，$P(B)$ 与 $P(AB)$ 的关系.

将探究 1 和探究 2 得到的结果填入表 7-8 中.

北京师范大学出版社

表 7-8

	E_5	E_{13}
$P(A)$		
$P(B)$		
事件 A 的发生与否对事件 B 发生的概率是否有影响		
$P(AB)$		
$P(A)P(B)$		

抽象概括

事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫作**相互独立事件**.

两个相互独立事件同时发生的概率，等于这两个事件发生的概率的积，即

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B).}$$

若事件 A 与事件 B 相互独立，则

$$\begin{aligned}P(A)-P(AB)&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]\\&=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

又因为 $$P(A\overline{B})+P(AB)=P(A),$$

所以 $$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}).$$

上面的讨论表明，**如果两个事件相互独立，那么把其中一个换成它的对立事件，这样的两个事件仍然相互独立.** 于是，由事件 A 与事件 B 相互独立，可以得到事件 A 与事件 $\overline{B}$ 相互独立，事件 $\overline{A}$ 与事件 B 相互独立. 由事件 $\overline{A}$ 与事件 B 相互独立，再次利用上述结果，可以得到事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 相互独立.

例 1 甲、乙两人独立破译一个密码，他们能译出密码的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$，求：

(1) 两人都译出密码的概率；

(2) 两人都译不出密码的概率；

(3) 恰有一人译出密码的概率；

(4) 至多有一人译出密码的概率；

(5) 至少有一人译出密码的概率.

解 记"甲独立译出密码"为事件 A，"乙独立译出密码"为事件 B，A 与 B 为相互独立事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$.

(1) 设事件 C 表示"两人都译出密码"，则 $C=AB$. 因为 A 与 B 相互独立，所以

$$P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

即两人都译出密码的概率为 $\frac{1}{12}$.

(2) 设事件 D 表示"两人都译不出密码"，则 $D=\overline{A}\overline{B}$. 因为 A 与 B 相互独立，所以 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 因此，

$$\begin{aligned}P(D)=P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A})P(\overline{B})\\&=[1-P(A)][1-P(B)]\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

即两人都译不出密码的概率为 $\frac{1}{2}$.

(3) 设事件 E 表示"恰有一人译出密码"，事件 E 可以看作事件"甲译出密码且乙未译出密码"与事件"甲未译出密码且乙译出密码"的并事件，所以 $E=A\overline{B}\cup\overline{A}B$，且两个事件 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 彼此互斥，因此

$$P(E)=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)$$

$$\begin{aligned}&=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)\\&=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]+[1-P(A)]P(B)\\&=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

即恰有一人译出密码的概率为$\frac{5}{12}$.

(4) 设事件 F 表示“至多有一人译出密码”.

方法 1　事件 F 可以看作事件“两人都译不出密码”与“恰有一人译出密码”的并事件，所以 $F=D\cup E$，且 D 与 E 彼此互斥，因此

$$P(F)=P(D\cup E)=P(D)+P(E)=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}=\frac{11}{12}.$$

即至多有一人译出密码的概率为$\frac{11}{12}$.

方法 2　事件 F 的对立事件为“两人都译出密码”，所以 $\overline{F}=C$，因此

$$P(F)=1-P(\overline{F})=1-P(C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.$$

即至多有一人译出密码的概率为$\frac{11}{12}$.

(5) 设事件 G 表示“至少有一人译出密码”.

方法 1　事件 G 可以看作事件“两人都译出密码”与“恰有一人译出密码”的并事件，所以 $G=C\cup E$，且 C 与 E 彼此互斥，因此

$$P(G)=P(C\cup E)=P(C)+P(E)=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}.$$

即至少有一人译出密码的概率为$\frac{1}{2}$.

方法 2　事件 G 的对立事件为“两人都译不出密码”，所以 $\overline{G}=D$，因此

$$P(G)=1-P(\overline{G})=1-P(D)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

即至少有一人译出密码的概率为$\frac{1}{2}$.

练　习

1. 袋中有白球 3 个，黑球 2 个，这 5 个球除颜色外完全相同，从中进行不放回摸球，每次摸球 1 个，事件 A_1 表示“第一次摸得白球”，事件 A_2 表示“第二次摸得白球”，则事件 A_1 与事件 A_2 是否相互独立？若改为“有放回摸球”呢？

北京师范大学出版社

2. 甲、乙两人独立地解决同一问题，甲解出此问题的概率是$\frac{2}{3}$，乙解出此问题的概率是$\frac{4}{5}$，求：

(1) 甲、乙都解出此问题的概率；

(2) 甲、乙都未解出此问题的概率；

(3) 甲、乙恰有一人解出此问题的概率；

(4) 至少有一人解出此问题的概率.

习题 7－4

A 组

1. 甲、乙两人打靶，甲的命中率为 0.8，乙的命中率为 0.7. 若两人同时射击一个目标，则两人都命中的概率为(　　)，并说明理由.

A. 0.56　　B. 0.48　　C. 0.75　　D. 0.94

2. 已知 A，B 是相互独立事件，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，则 $P(\overline{A}B)=$__________.

3. 设 A，B 是同一试验的两个不同事件，用它们表示下列各事件：

(1) 仅 A 发生；

(2) A，B 都发生；

(3) A，B 均不发生；

(4) A，B 恰有一个发生；

(5) A，B 至少有一个发生.

4. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为$\frac{1}{2}$与$\frac{2}{5}$. 甲、乙两人在罚球线各投球 1 次，求恰好命中 1 次的概率.

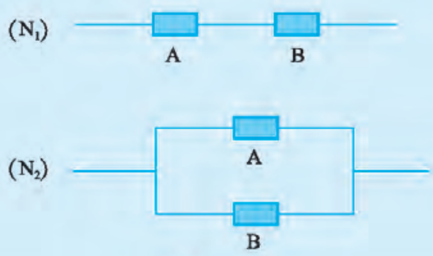
5. 在某项 1 500 m 体能测试中，甲、乙两人各自通过体能测试的概率分别是$\frac{2}{5}$和$\frac{3}{4}$，求：

(1) 两人都通过体能测试的概率；

(2) 恰有一人通过体能测试的概率；

(3) 至少有一人通过体能测试的概率.

6. 如图，用 A，B 两个不同的元件连接成系统 N_1 和 N_2，当元件 A，B 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A，B 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作. 已知元件 A，B 正常工作的概率分别为0.80和0.90，分别求系统 N_1，N_2 正常工作的概率.



(第 6 题)

北京师范大学出版社

B 组

1. 甲、乙两人独立地解决同一问题，甲解出此问题的概率是 P_1，乙解出此问题的概率是 P_2，那么至少有一人解出此问题的概率是(　　)，并说明理由.

A. P_1+P_2　　B. P_1P_2　　C. $1-P_1P_2$　　D. $1-(1-P_1)(1-P_2)$

2. 连续抛掷一枚均匀的骰子 3 次，则至少有一次掷出的点数为 1 的概率是多少?

3. 甲、乙、丙三台机床各自独立加工同一种零件. 已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率是 $\frac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\frac{2}{9}$. 求甲、乙、丙三台机床各自独立加工零件是一等品的概率.

4. 俗话说:“三个臭皮匠，赛过诸葛亮.”请从概率的角度谈谈对这句话的认识.

5. 已知事件 A,B 发生的概率分别为 $P(A)$，$P(B)$，分别在 A,B 互斥和独立的条件下，求出下列事件的概率并填入表中:

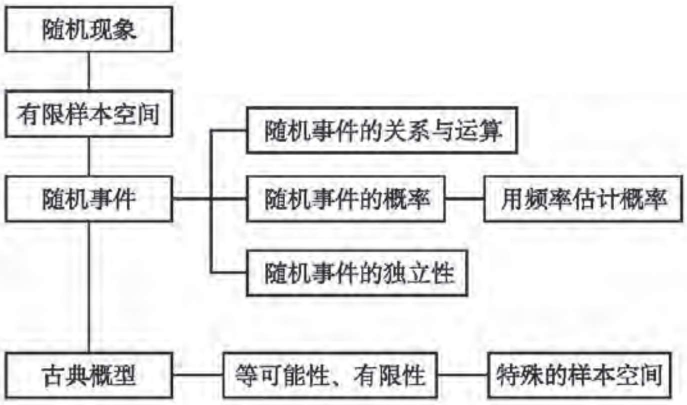
	A,B 互斥	A,B 独立
A,B 都发生		
A,B 都不发生		
A,B 恰有一个发生		
A,B 至少有一个发生		
A,B 至多有一个发生		

北京师范大学出版社

本章小结

一、知识结构

随机思想贯穿概率课程的始终.



二、学习要求

1. 随机事件与概率

(1) 结合具体实例,理解样本点和有限样本空间的含义,理解随机事件与样本点的关系.了解随机事件的并、交与互斥的含义,能结合实例进行随机事件的并、交运算.

(2) 结合具体实例,理解古典概型,能计算古典概型中简单随机事件的概率.

(3) 通过实例,理解概率的性质,掌握随机事件概率的运算法则.

(4) 结合实例,会用频率估计概率.

2. 随机事件的独立性

结合有限样本空间,了解两个随机事件独立性的含义.结合古典概型,利用独立性计算概率.

三、需要关注的问题

1. 生活中有很多的随机事件,通过本章的学习,你认为什么是随机事件?如何正确理解随机事件?

2. 本章学习的一些概念容易混淆(如频率与概率、互斥事件与对立事件),你明白它们的区别与联系吗?

3. 在选用列举法这一计数方法时,往往会出现遗漏或重复的问题.有序的思考、合理的分类是解决问题的关键,那么,你会有次序、有规律地列举样本点吗?

北京师范大学出版社

复习题七

A　组

1. 下列叙述错误的是(　　),并说明理由.

A. 频率是随机的,在试验前不能确定,随着试验次数的增加,频率一般会越来越接近概率

B. 若随机事件 A 发生的概率为 $P(A)$,则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

C. 互斥事件不一定是对立事件,但对立事件一定是互斥事件

D. 5 张奖券中一张有奖,甲先抽,乙后抽,那么乙与甲抽到有奖奖券的可能性相同

2. 口袋内装有一些红球、白球和黑球,其中它们除颜色外完全相同,从中摸出 1 个球,摸出红球的概率是 0.42,摸出白球的概率是 0.28,那么摸出黑球的概率是(　　),并说明理由.

A. 0.42　　B. 0.28　　C. 0.3　　D. 0.7

3. 将一枚均匀的硬币连续抛掷 4 次,设事件 A 表示"2 次出现正面,2 次出现反面",事件 B 表示"3 次出现正面,1 次出现反面",则事件 A 与事件 B 发生的概率哪个更大?

4. 若 A,B 为互斥事件,则(　　),并说明理由.

A. $P(A)+P(B)<1$　　B. $P(A)+P(B)>1$

C. $P(A)+P(B)=1$　　D. $P(A)+P(B)\leqslant 1$

5. 4 张卡片上分别写有数字 1,2,3,4,从这 4 张卡片中随机抽取 2 张,则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为(　　),并说明理由.

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 袋中装有 2 个白球和 3 个黑球,这 5 个球除颜色外完全相同.

(1) 采取有放回抽取方式,从中依次摸出两个球,求两球颜色不同的概率;

(2) 采取不放回抽取方式,从中依次摸出两个球,求两球颜色不同的概率.

7. A,B,C,D 这 4 名学生按任意次序站成一排,试求下列事件的概率:

(1) A 在边上;

(2) A 和 B 都在边上;

(3) A 或 B 在边上;

(4) A 与 B 相邻;

(5) A 在 B 的左侧(不一定相邻).

8. 一个小组的 3 名学生在分发数学作业时,从他们 3 人的作业中各自随机地取出了一份作业. 求:

(1) 每名学生恰好拿到自己作业的概率;

(2) 3 名学生不都拿到自己作业的概率;

(3) 每名学生拿的都不是自己作业的概率.

9. 甲、乙两名运动员的投篮命中率分别为 0.8 和 0.75,现甲、乙两名运动员各投篮一次,求至少有一人命中的概率.

北京师范大学出版社

B 组

1. 对于事件 A,B，下列命题不正确的是(　　)，并说明理由.

A. 如果 A,B 互斥，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互斥

B. 如果 A,B 对立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也对立

C. 如果 A,B 独立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也独立

D. 如果 A,B 不独立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也不独立

2. 若 A,B 是相互独立事件，但不是互斥事件，则事件 $A\cup B$ 的概率是(　　)，并说明理由.

A. $P(A)+P(B)$

B. $1-[1-P(A)][1-P(B)]$

C. $P(A)P(B)$

D. $1-P(A)P(B)$

3. 同时抛掷两枚均匀的骰子，求：

(1) 掷出的点数中一个恰是另一个 2 倍的概率；

(2) 掷出的点数相同的概率；

(3) 掷出的点数中一个是偶数，另一个是奇数的概率.

4. 战国时期，齐王与臣子田忌赛马，双方约定：

(1) 从各自上、中、下三等级马中各出一匹马；

(2) 每匹马参加且只参加一次比赛；

(3) 三场比赛后，以获胜场次多者为最终胜者.

已知高等级马一定强于低等级马，而在同等级马中，都是齐王的马强. 求田忌赢得比赛的概率.

5. 已知某种奖券的中奖率为 $\frac{1}{3}$，为了保证中奖概率大于 $\frac{9}{10}$，至少应该购买多少张奖券？

6. 某公司为了解用户对其产品的满意度，从甲、乙两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

甲地区：62　73　81　92　95　85　74　64　53　76

　　　　78　86　95　66　97　78　88　82　76　89

乙地区：73　83　62　51　91　46　53　73　64　82

　　　　93　48　65　81　74　56　54　76　65　79

根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为以下三个等级：

满意评分	低于 70 分	70 分～89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

设事件 C 表示“甲地区用户的满意度等级高于乙地区用户的满意度等级”，两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求事件 C 的概率.

7. 某学校校庆，给每班发了 5 张庆典门票. 班主任王老师准备采用抽签方式来决定哪 5 位同学参加，为此制作了 50 张卡片，其中 5 张写有“庆典”字样. 50 位同学轮流抽签，抽中写有“庆典”字样的同学参加学校庆典. 小明提出：“抽签有先后，第一名同学抽中的概率是 $\frac{5}{50}$. 如果第一名同学抽到，第二名同学抽到的概率只有 $\frac{4}{49}$，如果第一名同学未抽中，第二名同学抽中的概率为 $\frac{5}{49}$. 抽中的机会未必相等.”你认为王老师的抽签方法公平吗？小明的话又如何解释？

北京师范大学出版社

8

第八章

数学建模活动（一）

数学模型搭建了数学与外部世界联系的桥梁，是数学应用的重要形式.

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建数学模型解决问题的过程，也是推动数学发展的动力.

数学建模活动是微科研，研究过程包括选题（选定研究的问题）、开题（报告研究问题的数学表达，拟解决问题的思路、计划，预期结果等）、做题（包括建立模型、求解模型、得到结论等）、结题（报告研究过程和研究结果等）四个环节.

本章突出的核心素养是数学建模，使学习者初步感受数学建模，并获得数学建模的体验.

北京师范大学出版社

数学建模本身即是一种生活技能.

——加芬克尔（Solomon Garfunkel，1943—　）

§ 1 走近数学建模

实际问题一直是数学发展的重要源泉，解决实际问题也一直是数学价值的重要体现. 下面我们来看数学史上一个极具影响的数学建模实例.

实际问题

普莱格尔河穿过美丽的哥尼斯堡城(现为俄罗斯的加里宁格勒). 普莱格尔河有两个支流，在城市中心汇成大河，中间是岛区，在河上有七座桥，如图 8－1.

图 8－1

岛上有古老的哥尼斯堡大学、知名的大教堂，居民经常到河岸和桥上散步. 在 18 世纪初的一天，有人突发奇想：**如何才能走过这七座桥，而每座桥都只能经过一次，最后又回到原来的出发点？** 人们开始沉迷于这个问题，在桥上来来回回不知走了多少次，却始终不得其解. 这就是著名的哥尼斯堡七桥问题(Seven Bridges of Königsberg).

实际问题的数学表述

七桥问题引起了数学家欧拉(Léonhard Euler，1707—1783)的极大兴趣. 他想：经过这么多人的努力都没有找到一次不重复走完七座桥的路径，会不会根本不存在这样的走法?

欧拉

首先，欧拉想到的是列举法，就是把所有的走法都一一列出来，再一个一个验证. 但是，他很快发现这样做太麻烦了，因为对七座桥的不同走法就有 5 000 多种，并且这种方法不具有通用性.

经过反复思考，欧拉想到：岛的形状、大小，以及桥的长短、宽窄并不影响结果，重要的是陆地、桥与岛这三者之间的位置关系. 不妨把图中被河隔开的 4 块陆地看作 4 个

北京师范大学出版社

点,连接陆地的7座桥看作7条线,就得到如图8-2的图形.实际问题中的陆地、河流和桥梁景观就不见了,七桥问题就变成能否一笔画出此图形的问题.这就是欧拉对七桥问题建立起来的数学模型.

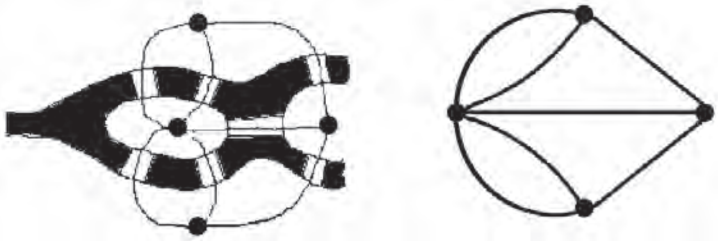


图8-2

数学问题的解决

欧拉注意到,如果这样的图形能一笔画成,那么除去起点和终点外,其他的点都是"经过点"."经过点"的特征是:只要从一条线进入这个点,就要从另一条线离开这个点.有进无出,只能是终点;有出无进,只能是起点.若以某一点为端点的线有偶数条,则称该点为偶点;否则称为奇点.显然"经过点"是偶点.如果起点和终点是同一个点,那么这个点也是偶点.

一笔画定理 一个由点和线组成的图形能一笔画完,必须符合以下两个条件:

(1) 图形是连在一起的,即是连通图形;

(2) 图形中的奇点个数为0或2.

北京师范大学出版社

用数学结论解答原问题

在七桥问题中,四个点全是奇点,不能一笔画,即不可能一次无重复地走完七座桥.

1735年,欧拉把研究论文"The solution of a problem relating to the geometry of position"提交到圣彼得堡科学院,1741年发表在《圣彼得堡科学院通讯》上,开创了图论和拓扑学两门新的学科.

欧拉对实际问题进行抽象概括,用数学的语言(模型)把实际问题转化为数学问题,又用数学的思想方法分析、解决了这个问题,这个过程就是数学建模.

思考交流

阅读上述内容,思考并回答下列问题:

(1) 实际问题是什么?

(2) 在转换成数学模型过程中,欧拉使用了哪些数学元素抽象地描述实际问题的元素?这种描述为什么不会对结果产生影响?

(3) 在欧拉解决问题的过程中,哪个步骤是关键步骤?

(4) "一笔画定理"还可以用在哪些问题解决中?

习题 8－1

1. 1981 年，生物学家根据触角长和翼长将蠓虫分为 Af 和 Apf 两类，已知 9 只 Af 蠓虫和 6 只 Apf 蠓虫的标本数据如下(单位：mm)：

Af 蠓虫	触角长	1.24	1.36	1.38	1.38	1.38	1.40	1.48	1.54	1.56
	翼　长	1.72	1.74	1.64	1.82	1.90	1.70	1.82	1.82	2.08

Apf 蠓虫	触角长	1.14	1.18	1.20	1.26	1.28	1.30
	翼　长	1.78	1.96	1.86	2.00	2.00	1.96

现另有三个蠓虫标本的触角长和翼长分别为(1.24，1.80)，(1.28，1.84)，(1.40，2.04)，请设法确定哪个是 Af 蠓虫，哪个是 Apf 蠓虫.(可以借助网络等资源查询相关资料，得到解决问题的思路)

北京师范大学出版社

§ 2 数学建模的主要步骤

在上一节，哥尼斯堡七桥问题的解决显示了数学建模的过程和意义，接下来我们再看一个生活中的问题，以展示数学建模的主要步骤.

提出问题

在一个十字路口，每次亮绿灯的时长为 15 s，那么，每次绿灯亮时，在一条直行道路上能有多少汽车通过十字路口？

建立模型

这个问题涉及车长、车距、车速、堵塞的干扰等多种因素. 而不同型号车的车长是不同的，驾驶员的习惯不同也会使车距、车速不同，行人和非机动车的干扰因素则复杂且不确定. 面对这些不同和不确定，就需要作出假设. 例如，虽然通过路口的车辆各种各样，但多数是小轿车，因此这次建模就只考虑小轿车的情况，它们的长度差距不大，可以假设车辆长度都相同.

> 这是建模的重要环节——假设.

经过对相关因素的分析，可以作出有利于建立模型、基本符合实际情况的几个假设：

(1) 通过路口的车辆长度都相等；

(2) 等待时，前后相邻两辆车的车距都相等；

(3) 绿灯亮后，汽车都是在静止状态下匀加速启动；

(4) 前一辆车启动后，下一辆车启动的延时时间相等；

(5) 车辆行驶秩序良好，不会发生堵塞.

将车辆长度记作 l，车距记作 d，经过实际调查，取 $l=5$ m，$d=2$ m 较为合理.

> 问题中涉及的数据要建模者收集.

另据调查，一般的汽车按照十字路口的加速状态，10 s 内可从静止加速到 21 m/s，加速度记作 a，计算可得 $a=2.1\ \mathrm{m/s^2}$，为了简化，这里取 $a=2\ \mathrm{m/s^2}$. 汽车加速到最高限速后，便以这个最高限速行驶.

资料显示，城市十字路口的限速 $v^*=40\ \mathrm{km/h}\approx 11.1\ \mathrm{m/s}$.

延时时间记作 T，经观察，取 $T=1$ s 较为合理. 用 t_n 表示第 n 辆汽车开始启动的时间，则$t_n=nT$. 用 t_n^* 表示第 n 辆车到达最高限速的时间，则汽车做匀加速运动的时间是

$$t_n^*-t_n=\frac{v^*}{a}=5.55(\text{s}).$$

为了简化，这里 $t_n^*-t_n$ 的值取 5.5 s.

用 $S_n(t)$表示时刻 t 第 n 辆汽车所在的位置，停车线位置记作 0，则 $S_n(0)=-(n-1)(l+d)$.

这样，实际问题就可以表述为数学问题：求满足 $S_n(15)>0$ 的 n 的最大值，其中

$$S_n(t)=\begin{cases}S_n(0),0\leqslant t<t_n,\\ S_n(0)+\frac{1}{2}a(t-t_n)^2,t_n\leqslant t<t_n^*,\\ S_n(0)+\frac{1}{2}a(t_n^*-t_n)^2+v^*(t-t_n^*),t\geqslant t_n^*.\end{cases}$$

求解模型

代入各个量的参数值，可以计算出绿灯亮至 15 s 时若干辆汽车的位置，如表 8－1.

表 8－1

汽车序号	1	2	3	4	5	6	7	8
位置/m	124.6	106.5	88.4	70.3	52.2	34.1	16.0	−2.1

由表可见，绿灯亮至 15 s 时，第 7 辆车已经驶过停车线 16.0 m，而第 8 辆车还距停车线 2.1 m，没有通过. 因此，15 s 的绿灯最多可以通过 7 辆汽车.

检验结果

到十字路口实地调查，对结论做检验. 若没有明显误差，就可以使用这个模型. 否则，再修改假设，重新建模.

思考交流

1. 从小学到中学，在数学学习中，做过不少“应用题”，比较上述实际问题的解决，说明用数学建模的方法解决实际问题和做应用题有什么联系和区别.

2. 总结数学建模的基本步骤.

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程. 主要过程包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确立参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题.

北京师范大学出版社

数学建模的一般步骤如下：

1. 提出问题

实际情境中的问题往往是模糊的和笼统的，原始的问题往往是一个希望得到优化的期待，或是某个不良现象的消失. 这就需要透过现象，明确地提出问题.

2. 建立模型

在一定的知识积累的基础上，预测建立的数学模型，抓住主要因素，摒弃次要因素，做出适当简化和假设.

在假设的基础上，用数学概念表示实际问题，用数学结构反映实际问题中各个量之间的关系. 从不同角度、用不同知识表示同样的问题，就会得到不同的模型.

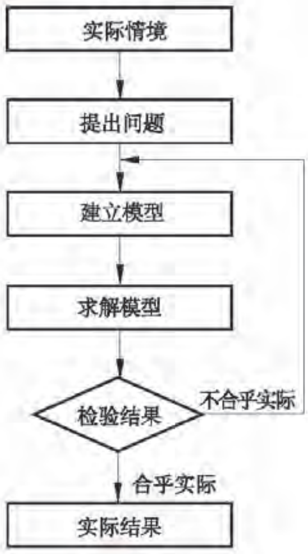


图 8－3

3. 求解模型

这个过程是求解数学问题. 值得注意的是，如果目标是求值，一般不容易求得精确值，这就要根据需要求近似解.

4. 检验结果

用实际现象或数据检验求得的解是否符合实际. 如果不符合实际情况，就要重新建模.

数学建模的过程可用图 8－3 的框图表示.

北京师范大学出版社

习题 8－2

1. 选择你熟悉的十字路口，具体调查它的通行能力，采用本节的方法尝试数学建模.
2. 在互联网上搜索一篇数学建模论文，并分析步骤，审视假设的合理性.

§ 3 数学建模活动的主要过程

中学的“数学建模活动”是运用模型思想解决实际问题的综合实践活动，以课题研究的形式开展，可以小组合作，也可以独立完成. 课题研究的过程包括“选题、开题、做题、结题”四个环节.

选题

“选题”就是选定研究的问题.

现实世界的问题很多，有意义的问题也很多. 在你发现的诸多问题中，你认为哪些问题具有研究价值？又有哪些问题可能是你有能力研究并解决的？

20 世纪中期，在国际数学界、数学教育界关于“What is the key in mathematics and mathematical education”展开了一场大讨论，经历一段时间讨论，数学家哈尔莫斯(Paul Richard Halmos，1916—2006)写了一篇总结性文章，文章的标题就是：问题是数学的灵魂. 在 21 世纪，大众创业、万众创新，创新是科学技术发展的核心，而问题是创新的起点.

现实世界的问题大致有三类：自然方面的问题(如大海的潮汐现象、放射物的衰变、蜂巢的结构)，社会方面的问题(如养老院的合理布局、传染病的传播机理)，生活方面的问题(如乘车路线的规划、营养餐的配置). 前人研究的成果已经归纳出了很多事物的规律，但还有更多事物的规律需要探索.

北京师范大学出版社

数学建模活动的开始就是选定研究的问题，那么，问题从哪里来呢？

在刚刚学习数学建模时，往往不知什么问题能做，什么问题做不了，此时可以先阅读别人的文章. 例如，有人做了“同一品牌不同质量的牙膏价格的研究”，你可以依照其中的研究方法，做“同一品牌的包装盒大小不同的饼干价格的研究”.

这就是选题来源之一：阅读已有的研究论文，用同样的方法研究类似的问题.

见识了一些论文之后，认真琢磨，会引发深入思考. 例如，有人做了“通过控制红绿灯的时间优化十字路口的汽车流量”的研究，你可以再从增加车道，或者改变直行、转弯车道的数量比等视角，试图增加汽车流量；还可以换个视角，研究这个路口所在主干线上几个相连路口绿灯的统一治理，使得主干线车流通畅.

这就是选题来源之二：研究已有的论文，换个视角、增加问题的复杂性，进一步研究相关的问题.

随着学习的深入,思路逐渐打开,视野逐渐放宽,这样就可以关注一些现实问题、热点问题、身边问题. 例如,随着社会的发展,出现了共享单车,新事物的诞生也引发了群雄逐鹿、管理混乱等问题. 于是,研究共享单车如何供需平衡、有序发展,就是很好的问题. 又如,可以研究某个区域的共享单车合适的投放数量,也可以研究共享单车的合理调度方案.

这就是选题来源之三:用数学的眼光观察世界,发现研究新的问题.

下面摘录一些中学生曾经研究过的问题供参考.

自然方面的问题:

公路上雪的融化速度;

都江堰宝瓶口的水有多深;

圭表与日晷原理的数学分析;

利用灯光促进植物生长的实验;

由氢键理论推算冰的密度;

从拼图游戏到人类基因组计划;

水草治理问题;

天体日、月相在旋转点阵屏上运行的数学模型;

云南白马雪山地区树木年轮宽度与气候变化的相关性研究;

植物叶表粗糙程度与吸附大气颗粒物能力的关系探究;

孔雀鱼体色基因类型初步研究.

社会方面的问题:

“110”巡警站的位置安排;

公路护栏的改良;

防错拨的城市电话号码设置方案;

对小区学生择校问题的研究;

如何使防护林达到最佳防护效果;

保安巡更路线方案及软件流程设计;

高峰期学校门前十字路口红绿灯周期时间的设计;

利用数码相机测量桥梁裂纹;

埙的容积对音高的影响;

考试焦虑的影响因素分析;

老年人免费乘公交车的社会成本;

“梦之队”组建的最优化选择;

汉字结构特征及其识别;

“月上柳梢头,人约黄昏后”——古诗中的天文学问题;

北京师范大学出版社

中国古建筑建造中“举折法”屋面曲线猜想；

泰森多边形在环境空气监测网络布设中的应用.

生活方面的问题：

流行歌曲的流行趋势分析；

地铁站旅客流通情况及优化方案；

暖瓶的最佳保温水位；

讨论适合拼音输入法的键盘布局；

游览卢浮宫的最佳路线；

抽取式面巾纸的包装盒优化设计；

汽车后视镜的角度分析及安装改进；

14 款笔记本电脑性价比报告；

地区加油站各区域分布数量方案；

为数独定难度；

太阳能电池板发电设备优化；

区域养老院规划；

城市周边地区住房入住率估算与分析；

碘酸钾碘盐在烹饪食物时碘损失率的研究.

北京师范大学出版社

思考交流

关注周围的生活以及当前的社会热点，提出几个值得研究并能够研究的新问题.

开题

“开题”是进一步明确研究的问题和设计解决问题的方案.

开题主要做的工作是：

(1) 明确研究的问题，说明问题研究的价值，估计可能的结果；

(2) 选择研究方法，确定人员分工，形成研究的实施方案；

(3) 完成开题报告.

一般的开题形式是开题讨论会，在这个会上，重点做以下两件事.

第一，提交开题报告并在会上介绍，重点讲述：研究的问题，选择此问题的原因及意义，预期研究成果，研究的方法与步骤，可能遇到的困难和对策.

第二，参会人员对开题报告进行讨论，中肯地提出意见和建议，共同完善研究设计.

实例分析

"驾驶摩托车飞跃黄河问题研究"的选题与开题.

高难度的摩托车骑手跨越障碍表演是极具挑战性的,它彰显摩托车骑手的智慧、能力和勇气.1999 年摩托车骑手在黄河壶口从山西省吉县岸边跃起,成功落到了黄河另一边的陕西省宜川县境内.这位摩托车骑手飞跃黄河遵循什么规律?能用数学刻画其规律吗?此实际问题可以从以下几个方面展开研究:

(1) 与此问题相关的因素有哪些?怎样获得这些因素的数据?

(2) 预期结果是什么?

(3) 需要准备哪些知识、方法、工具?

(4) 若采取小组研究,成员的分工是什么?

(5) 要记录和保存哪些过程的资料,最后如何呈现研究的结果?

(6) 可以分解出几个具体问题?能解决一些吗?

(7) 写出本组的开题报告(可以参考表 8-2).

北京师范大学出版社

表 8-2 开题报告表

要解决的问题	实际问题:1999 年摩托车骑手在黄河壶口从山西省吉县岸边跃起,成功落到了黄河另一边的陕西省宜川县境内.这位摩托车骑手飞跃黄河遵循什么规律?
选题的原因及意义	建立摩托车骑手飞跃黄河的基本模型,为今后的摩托车骑手跨越障碍表演提供依据.
建模问题的可行性分析	这个问题可以看作是一个"斜抛运动",相应的物理模型在运动学的学习中已经学过.
基本模型、解决问题的大体思路和步骤	讨论分析与飞跃黄河相关的因素→查阅资料,了解并确定相关因素的基本特征和数据→根据基本事实和科学原理建立数学模型(预设是函数模型)→根据模型解决一些相关的求值问题→进行实际检验.
预期结果和结果呈现方式	一个能够解释摩托车骑手飞跃黄河的数学模型,一份有求解过程的文字报告,一份可以在班内交流的"演示报告——PPT".
成员和分工	全组共同制订研究计划,商讨并确定数学模型,另分工如下: 黄××,组长,侧重组织讨论,把握工作方向; 李××,侧重信息采集、数据计算整理; 于××,侧重讨论记录、报告撰写、结果复核.
参考文献	物理教材:运动学——斜抛运动; 有关机动车飞跃的资料,摩托车飞跃黄河的资料.
其他说明	

做题

“做题”是研究者(研究小组)建立数学模型、用数学解决实际问题的实践活动.

这里的做题就是一项小课题研究，往往是团队式的研究，要发挥团队成员的各自特长，互相支持、相互配合. 由于这项实践活动是学习性的研究，每一个成员有必要参与所有任务的研究，除了熟知并完成自己承担的任务之外，还要清楚完成其他任务的思路、方法及解决过程. 做完题，每一个人都能完整复述和理解研究报告的主要内容.

在“做题”的实践活动中，应当按照数学建模的步骤实施，特别需要关注以下两个问题.

1. 建立恰当的数学模型

建立数学模型的关键是用数学准确地表达实际问题. 在表达一个实际问题时，可以用不同的数学形式，建立不同的数学模型. 如果建立的模型不当或所得结果与实际相差很多，这样的模型需要完善和改进，或者完全放弃这个模型.

思考交流

在解决下面问题的过程中，同学们建立了两个不同的模型，请分析这两个模型各自的特点.

问题 请预测今年中国内地18岁的人口数.

模型1 设今年中国内地18岁的人口数为 x，再通过模型 $\frac{c}{b}=\frac{x}{a}$ 算出.

其中，a 为去年中国内地的总人口数，b 为建模者居住的大楼里人口数，c 为这栋大楼里18岁的人口数.

模型2 今年中国内地18岁的人口数 $=a\cdot(1+k_1)\cdot(1+k_2)\cdot(1+k_3)$.

其中，a 为三年前中国内地15岁人口数，k_1，k_2，k_3 分别为四年前至三年前15岁～16岁、16岁～17岁、17岁～18岁的人口增长率.

2. 获取客观真实的数据

厘清与问题相关的影响因素之后，就需要得到这些因素的数据或特征. 获得数据或特征的方法往往是调查或实验.

实例分析

问题:“暖瓶中的水灌得越满，保温效果越好. ”这好像是“常识”. 但在生活中，人们会感觉到晚上将暖瓶灌满开水，到第二天早上暖瓶中的水温比没有灌满暖瓶的水温还要低. 难道

北京师范大学出版社

"常识"错了吗？如果是这样，那么往暖瓶里灌多少开水保温效果最好呢？

对暖瓶保温的物理分析无从下手，但显然的事实是：在给定保温时间和暖瓶环境温度的条件下，每一个暖瓶的水位都对应一个保温温度，如果按暖瓶内胆高度等分成不同的水位，知道足够多的不同水位的保温数据，就可以通过比较得到数据的最大值，这个最大值对应的水位可以近似地表示为最佳保温水位. 还可以利用已知的数据进行数据拟合，求出"最佳保温水位".

为了得到有限个不同水位的保温数据，建模者就需要做实验. 在设定的保温时间（如12 h）和基本相同的室温条件下，选择不同的水位进行实验：前一天晚上烧开一壶水，将开水及时灌入暖瓶达到事先定好的水位，保温时间一到，立刻记下水温数据. 当然，实验的次数多一些，数据也就多一些，不论是直接用它们的最大值还是做数据拟合，效果都会好一些.

结题

"结题"是研究小组向老师和同学们报告研究成果、进行答辩的过程. 一般来讲，结题会是结题的基本形式.

一项研究完成之后，要写出报告. 报告可以写成论文形式，也可以是如表 8－3 的研究报告表（内容部分被精简了）.

北京师范大学出版社

表 8－3　飞跃黄河的研究报告表

条　目	内　容
问　题	实际问题：1999 年摩托车骑手在黄河壶口从山西省吉县岸边跃起，成功落到了黄河另一边的陕西省宜川县境内. 这位摩托车骑手飞跃黄河遵循什么规律？
解决问题的方法	讨论分析与飞跃黄河相关的因素→查阅资料，了解并确定相关因素的基本特征和数据→根据基本事实和科学原理建立数学模型→根据数学模型对未知量求解.
相关因素分析及其假设	相关的因素有： 1. 摩托车起落点的高度差； 2. 摩托车完成飞跃的飞行水平距离； 3. 摩托车的安全落差（飞行的最高点与降落点的垂直距离）； 4. 摩托车沿跑道飞出时的仰角； 5. 摩托车飞离跑道时的速度. 假设： 1. 摩托车的起点与落点的高度差（落点高度减起点高度）记作 d； 2. 摩托车完成飞跃的飞行水平距离记作 s； 3. 摩托车的安全落差记作 r； 4. 摩托车沿跑道飞出时的仰角记作 θ； 5. 摩托车飞离跑道时的速度记作 v； 6. 摩托车被近似地看成一个质点； 7. 摩托车飞行中没有动力支持，没有空气阻力.

续表

条　目	内　容
建模、 求解的 主要过程	根据物理学知识,腾飞状态的摩托车的运动轨迹是抛物线,轨迹的参数方程是 $\begin{cases} x=vt\cos\theta, \\ y=vt\sin\theta-\frac{1}{2}\times 9.8t^2, \end{cases}$ 其中 x 是水平飞行距离,y 是相对于起始点的垂直高度,t 是飞行时间. 将轨迹方程改写为 $y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\cos\theta\cdot v)^2}\cdot 9.8x^2+\tan\theta\cdot x.$　① 根据假设,摩托车骑手飞跃黄河要满足安全落差,即 $y_{\max}-y_{落}\leqslant r.$　② ①和②就是摩托车骑手飞跃黄河遵循的规律,即数学模型. 经过分析照片和查找资料可得 $y_{落}=d=-1\ \mathrm{m}, s=35\ \mathrm{m}, r=10\ \mathrm{m}, \theta=12^\circ.$ 把 $\theta=12^\circ$代入方程①,得 $y=-5.121\,4\frac{x^2}{v^2}+0.212\,6x.$　③ 又因为 $x=s$ 时 $y_{落}=-1$,所以 $-1=-6\,273.715\,0\frac{1}{v^2}+7.441\,0.$ 由此可得 $v\approx 27.26(\mathrm{m/s})$. 所以摩托车飞离跑道时的速度为 27.26 m/s. 再看这个结果是否满足安全落差. 将已知 $v\approx 27.26$ m/s 代入方程③,可得 $y=-0.006\,9x^2+0.212\,6x,$ 从而 $y_{\max}=\frac{-0.212\,6^2}{4\times(-0.006\,9)}\approx 1.64(\mathrm{m}),$ $1.64-(-1)=2.64<10.$ 因此这个结果满足安全落差.
结果检验	因为没有条件做模拟实验,所以没有实际检验结果. 这个模型依据经典的物理学理论,摩托车骑手在起点比落点高 1 m,沿跑道飞出时的仰角为 12°,飞离跑道时的速度为 27.26 m/s 的情况下,即可完成“飞越 35 m 宽的黄河壶口”. 由于实际情况会有空气阻力,因此实际起跳速度还要大一些.
小组成员的分工和各自的主要贡献	全组共同制订研究计划,商讨并确定数学模型,另分工如下: 黄××,组长,侧重组织讨论,把握工作方向; 李××,侧重信息采集、数据计算整理; 于××,侧重讨论记录、报告撰写、结果复核.
研究的收获和感受,得到的帮助和致谢	对自己确定相关因素和“寻找”数据有了切身感受. 分工合作使我们理解了未来的学习和工作模式,学会了向别人学习,同时积极表达自己的想法. 感谢我们的数学、物理老师和家长提供的参考意见和对我们的鼓励.
主要参考文献	物理教材及专业书籍:运动学; 数学教材:参数方程; 有关机动车飞跃的资料,摩托车“飞跃黄河”的相关网页、新闻.

北京师范大学出版社

参加结题会要注意以下事项：

1. 报告人(或报告团队)要预先整理好显示成果的数据、软件、模型，文字报告，照片、视频或实物等；准备好报告提纲、PPT. 报告都是限时的，要突出重点、特点、亮点和创新点.

2. 报告人(或报告团队)以积极、认真的态度投入答辩，以平和的心情接受大家的质询和评价.

3. 参加结题会的每一个人都要仔细聆听报告人的演讲，欣赏他人的建模成果，审视研究过程，评判研究结论，捕捉要点，理出质疑点，深入参与讨论.

结题会上的各方发言要紧紧围绕数学建模的四个环节展开.

学习任务

自选一个实际问题，利用假期完成一个数学建模活动(可以小组合作完成，也可以独立完成)，并准备参加下学期的结题汇报.

习题 8－3

1. 请到商场观察，选定一种随着大小(型号)不同而价格不同的商品.

(1) 找出这种商品随着大小(型号)不同而价格变化的规律；

(2) 根据规律预测这种商品不同大小(型号)的价格；

(3) 根据规律给消费者或生产商提出建议.

在上面的解决问题过程中，做了哪些假设？为什么这样假设？

2. 阅读一篇关于中学生数学建模的论文，记录论文的格式和要点，对论文做出你的评价，提出你修改此论文的想法.

北京师范大学出版社

附录

部分数学专业词汇中英文对照表

中　文	英　文
集　合	set
元　素	element
属　于	belong to
数　集	set of numbers
有限集	finite set
无限集	infinite set
空　集	empty set
子　集	subset
真子集	proper subset
交　集	intersection of sets
并　集	union of sets
全　集	universal set
补　集	complement of a set
必要条件	necessary condition
充分条件	sufficient condition
充要条件	necessary and sufficient condition
全称量词	universal quantifier
存在量词	existential quantifier
基本不等式	inequality of arithmetic and geometric means
最小值	minimum
最大值	maximum
一元二次不等式	quadratic inequality in one variable
函　数	function
定义域	domain
值　域	range
分段函数	piecewise function
增函数	(strictly)increasing function
减函数	(strictly)decreasing function
奇函数	odd function

北京师范大学出版社

续表

中　文	英　文
偶函数	even function
幂函数	power function
指　数	exponent
指数函数	exponential function
对　数	logarithm
常用对数	common logarithm
自然对数	natural logarithm
对数函数	logarithmic function
反函数	inverse function
零　点	zero
二分法	bisection method
普　查	general survey
抽样调查	sampling survey
总　体	population
样　本	sample
样本量	sample size
简单随机抽样	simple random sampling
分层随机抽样	stratified random sampling
直方图	histogram
标准差	standard deviation
总体平均数	population mean
总体方差	population variance
百分位数	percentile
随机现象	random phenomenon
样本点	sample point
样本空间	sample space
随机事件	random event
必然事件	inevitable event
不可能事件	impossible event
概　率	probability
古典概率模型	classical models of probability
相互独立	mutually independent

北京师范大学出版社

后　记

为了全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，发展素质教育，推进教育公平，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人，根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，北师大版普通高中教科书《数学》教材编写组编写的普通高中教科书，强调了数学课程的基础性和整体性，突出了思想性和应用性，帮助学生掌握现代生活进一步学习必需的数学知识、技能、思想和方法；提升学生的数学素养，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界；促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展，探寻事物变化规律，增强社会责任感；在学生形成正确的人生观、价值观、世界观等方面发挥独特作用.

本套教材力求尊重学生的认知特点，关注学生的学习过程，创造多层次的学习活动，满足学生多样化的学习需求，促进学生全面而有个性的发展，为学生的终身发展奠定基础.

本套教材由众多学科专家、教育专家、心理学专家和特级教师参与编写，研究基础深厚，教育理念先进，一边编写一边实验，实验教师提出了很好的建议，在此特别表示感谢. 教材的建设是长期、艰苦的任务，需要每一位教师在教学实践中自主开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持.

本套教材主编王尚志、保继光，副主编张饴慈、李延林、张思明，编写组成员还有：董武、李红、关健、吴鹏、隋丽丽、汪香志、于伟东、白雪峰、黄延林、胡凤娟、薛文叙、梁丽平、李大永、任志瑜、赵春、顿继安、李军洪、马萍、吕建生、王建波、焦继红、赵敏.

本册教材由保继光、李延林担任主编，参与本册教材编写的人员还有：王尚志、张饴慈、张思明、董武、李红、关健、吴鹏、吕建生、赵敏；最终由保继光、张饴慈、李延林、张思明、薛文叙统稿，王尚志、保继光定稿.

本套教材是在原普通高中课程标准实验教科书的基础上进行的修订，在此向原实验教科书编写团队的各位专家、教师，特别是严士健教授，致以衷心的感谢. 很多地方教研员、一线教师为本次教材的修订提供了宝贵的意见，在此一并表示感谢.

在教材中可能会出现错误或不当之处，恳请广大使用者批评指正. 欢迎来电来函与我们联系：北京师范大学出版社基础教育国标教材出版中心(100088)，(010)58802811，shuxue3@bnupg. com.

北京师范大学出版社

北京师范大学出版社