



义务教育教科书
(五·四学制)

数学

八年级 上册

义务教育教科书(五·四学制)

数学

八年级上册

义务教育教科书(五·四学制)

责任编辑: 孙金栋
封面设计: 武斌
王琦
丽子



绿色印刷产品

义务教育教科书(五·四学制) 数学 八年级 上册
价格批准文号: 鲁发改价格核(2021)607009
举报电话: 12345

ISBN 978-7-5328-8327-1



9 787532 883271 >

定价: 10.01元

山东教育出版社

山东教育出版社



义务教育教科书

(五·四学制)

数学

八年级 上册



山东教育出版社

YIWU JIAOYU JIAOKESHU (WU · SI XUEZHI)

SHUXUE

BA NIANJI SHANG CE

义务教育教科书（五·四学制）

数学

八年级 上册

*

山东出版传媒股份有限公司

山东教育出版社出版

（济南市市中区二环南路2066号4区1号）

山东新华书店集团有限公司发行

山东新华印刷厂潍坊厂印装

*

开本：787毫米×1092毫米 1/16

印张：10.75 字数：215千 定价：10.01元（上光）

ISBN 978-7-5328-8327-1

2014年7月第1版 2021年7月第8次印刷

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

山东出版传媒股份有限公司教材中心售后服务电话：0531-82098188

走进数学新天地

亲爱的同学：

祝贺你步入八年级！

七年级的数学学习使你经历了许许多多：

体验了“数的扩张”过程——从有理数到实数，借助平面直角坐标系确定物体的位置，用一次函数、一元一次不等式、二元一次方程组解决了一些有趣的问题，初步形成了数形结合的意识；

探索了三角形全等的条件、轴对称的基本性质，体会到了勾股定理探索的困难和获得成功的喜悦；

理解了证明的必要性，从几个基本事实出发，证明有关平行线、三角形等一些简单几何图形的性质和判定方法，发展了逻辑思维能力；

能从数学的角度看待不确定事件。

在这本书里，你将学习更多的数学：

因式分解的基本方法等待着你去掌握；

结识一位新朋友——分式和分式方程，从中你将学到许多既有趣又有用的知识；

你将学会用不同的“数”来刻画一组数据的集中趋势和离散程度；

图形的变化也是你要继续研究的一个课题，在图形平移、旋转过程中什么是不变的？平移、旋转有什么基本性质？相信你也很好奇吧！

平行四边形有哪些基本性质？采用什么方法发现并证明这些性质？期待着你去思考。

数学有意思吗？你愿意学好数学吗？学数学不能只是模仿与记忆，也不能只是动手做一做，与别人议一议，它更需要思考与表达、猜测与推理、交流与反思。

让我们一起走进数学新天地！



目录 MULU

第一章 因式分解

1 因式分解	2
2 提公因式法	5
3 公式法	9
回顾与思考	16
复习题	16

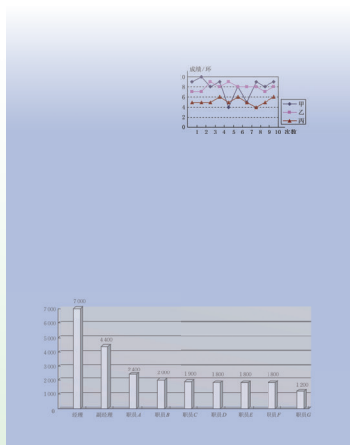


第二章 分式与分式方程

1 认识分式	20
2 分式的乘除法	25
3 分式的加减法	29
4 分式方程	37
回顾与思考	44
复习题	44

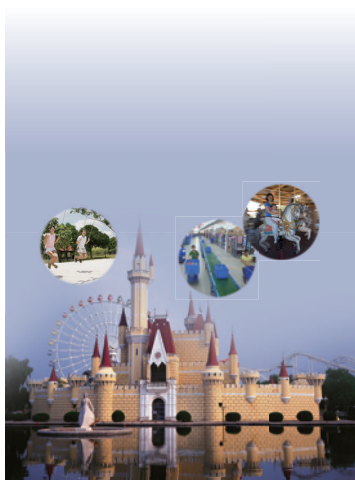
第三章 数据的分析

1 平均数	48
2 中位数与众数	54
3 从统计图分析数据的集中趋势	57
4 数据的离散程度	62
回顾与思考	70
复习题	71



综合与实践

哪个城市夏天更热 75



第四章 图形的平移与旋转

1 图形的平移	78
2 图形的旋转	91
3 中心对称	100
4 图形变化的简单应用	106
回顾与思考	113
复习题	113

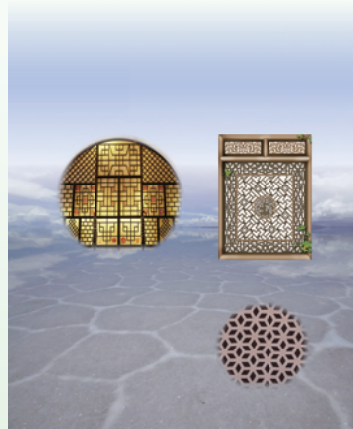
第五章 平行四边形

1 平行四边形的性质	120
2 平行四边形的判定	127
3 三角形的中位线	137
4 多边形的内角和与外角和	143
回顾与思考	148
复习题	149

综合与实践

平面图形的镶嵌 153

总复习题 158



第一章 因式分解

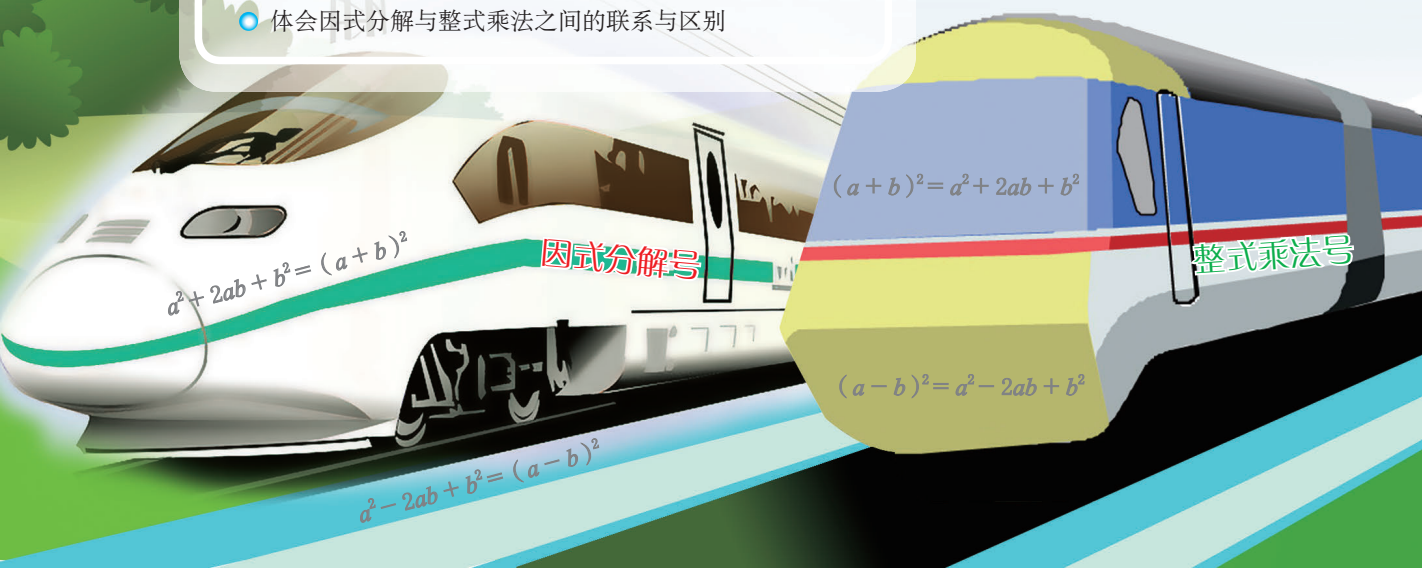
你能把 $99^3 - 99$ 化成几个整数的乘积的形式吗？类似地，你能把 $a^3 - a$ 化成几个整式的乘积的形式吗？

本章将研究如何把一个多项式分解成若干个整式的乘积的形式，你将体会到这一过程与整式乘法运算的联系。



学习目标

- 体会因式分解的意义
- 能运用提公因式法和公式法进行因式分解，发展运算能力
- 体会因式分解与整式乘法之间的联系与区别



1 因式分解

$99^3 - 99$ 能被 100 整除吗? 你是怎样想的? 与同伴进行交流.

小明是这样做的:

$$\begin{aligned} & 99^3 - 99 \\ &= 99 \times 99^2 - 99 \times 1 \\ &= 99(99^2 - 1) \\ &= 99 \times (99 - 1)(99 + 1) \\ &= 98 \times 99 \times 100. \end{aligned}$$

所以, $99^3 - 99$ 能被 100 整除.

$99^3 - 99$ 还能被
哪些正整数整除?

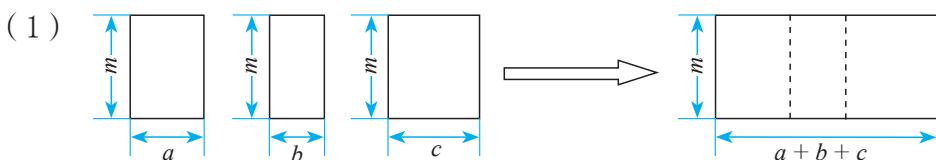
在这里, 解决问题的关键是把算式 $99^3 - 99$ 化成了几个数的积的形式.

议一议

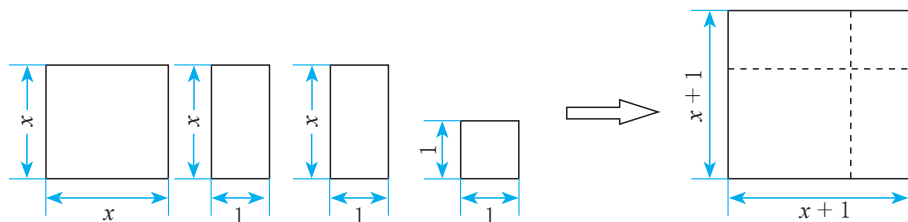
你能尝试把 $a^3 - a$ 化成几个整式的乘积的形式吗? 与同伴进行交流.

做一做

观察下面的拼图过程, 写出相应的关系式.



(2)



$$\underline{\hspace{10em}} = \underline{\hspace{10em}} .$$

把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫做**因式分解** (factorization). 例如， $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$ ， $am + bm + cm = m(a+b+c)$ ， $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ 都是因式分解. 因式分解也可称为分解因式.

做一做

计算下列各式：

(1) $3x(x-1) = \underline{\hspace{2em}}$; (2) $m(a+b-1) = \underline{\hspace{2em}}$;

(3) $(m+4)(m-4) = \underline{\hspace{2em}}$; (4) $(y-3)^2 = \underline{\hspace{2em}}$.

根据上面的算式填空：

(1) $3x^2 - 3x = (\quad)(\quad)$; (2) $ma + mb - m = (\quad)(\quad)$;

(3) $m^2 - 16 = (\quad)(\quad)$; (4) $y^2 - 6y + 9 = (\quad)(\quad)$.

做一做

举例说明因式分解与整式乘法之间的关系.

随堂练习

1. 连一连：

$x^2 - y^2$

$9 - 25x^2$

$x^2 + 2x + 1$

$xy - y^2$

$(x+1)^2$

$y(x-y)$

$(3-5x)(3+5x)$

$(x+y)(x-y)$

2. 下列由左边到右边的变形, 哪些是因式分解? 为什么?

- (1) $(a+3)(a-3) = a^2 - 9$; (2) $m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$;
 (3) $a^2 - b^2 + 1 = (a+b)(a-b) + 1$; (4) $2mR + 2mr = 2m(R+r)$.

习题 1.1

知识技能

1. 连一连:

$$x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$4x^2 - 1$$

$$x^2 - 1$$

$$x^2 - 4$$

$$(x+2)(x-2)$$

$$(x-1)(x+1)$$

$$(x-1)^2$$

$$(x+2)^2$$

$$(2x-1)(2x+1)$$

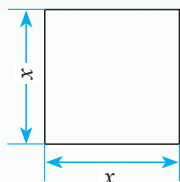
数学理解

2. 下列由左边到右边的变形, 哪些是因式分解?

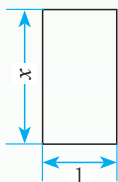
- (1) $a(x+y) = ax + ay$;
 (2) $10x^2 - 5x = 5x(2x-1)$;
 (3) $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$;
 (4) $t^2 - 16 + 3t = (t+4)(t-4) + 3t$.

3. 求代数式 $IR_1 + IR_2 + IR_3$ 的值, 其中 $R_1 = 16.2$, $R_2 = 32.4$, $R_3 = 35.4$, $I = 2.5$.

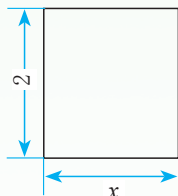
4. 将下列四个图形, 拼成一个大长方形, 再据此写出一个多项式的因式分解.



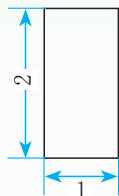
①



②



③



④

(第4题)

问题解决

5. (1) $1999^2 + 1999$ 能被 1999 整除吗? 能被 2000 整除吗?

(2) $16.9 \times \frac{1}{8} + 15.1 \times \frac{1}{8}$ 能被 4 整除吗?

2 提公因式法

多项式 $ab + bc$ 各项都含有相同的因式吗？多项式 $3x^2 + x$ 呢？多项式 $mb^2 + nb - b$ 呢？尝试将这几个多项式分别写成几个因式的乘积，并与同伴交流。

多项式 $ab + bc$ 的各项都含有相同的因式 b 。我们把多项式各项都含有的相同因式，叫做这个多项式各项的**公因式**（common factor）。如 b 就是多项式 $ab + bc$ 各项的公因式。

议一议

- (1) 多项式 $2x^2 + 6x^3$ 中各项的公因式是什么？
- (2) 你能尝试将多项式 $2x^2 + 6x^3$ 因式分解吗？与同伴进行交流。

如果一个多项式的各项含有公因式，那么就可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式乘积的形式。这种因式分解的方法叫做**提公因式法**。

例 1 把下列各式因式分解：

$$(1) 3x + x^3;$$

$$(2) 7x^3 - 21x^2;$$

$$(3) 8a^3b^2 - 12ab^3c + ab.$$

解：(1) $3x + x^3 = x \cdot 3 + x \cdot x^2 = x(3 + x^2)$;

(2) $7x^3 - 21x^2 = 7x^2 \cdot x - 7x^2 \cdot 3 = 7x^2(x - 3)$;

$$\begin{aligned} (3) 8a^3b^2 - 12ab^3c + ab &= ab \cdot 8a^2b - ab \cdot 12b^2c + ab \cdot 1 \\ &= ab(8a^2b - 12b^2c + 1). \end{aligned}$$

想一想

- (1) 提公因式法因式分解与单项式乘多项式有什么关系?
- (2) 如何确定多项式各项的公因式?

随堂练习

把下列各式因式分解:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| (1) $ma + mb$; | (2) $5y^3 + 20y^2$; |
| (3) $6x - 9xy$; | (4) $a^2b - 5ab$; |
| (5) $4m^3 - 6m^2$; | (6) $a^2b - 5ab + 9b$; |
| (7) $3a^2y - 3ay + 6ay^2$; | (8) $10a^2x - 15a^2y + 5a^2$. |

习题 1.2

知识技能

1. 把下列各式因式分解:

- | | |
|---|--|
| (1) $2x^2 - 4x$; | (2) $8m^2n + 2mn$; |
| (3) $a^2x^2y - axy^2$; | (4) $3x^3 - 3x^2 - 9x$; |
| (5) $12a^2b - 9ab^2 - 15a^2b^2$; | (6) $2a^2b^2c^3 - 4ab^2c^3 + 6a^2bc^3$; |
| (7) $56ax^2y + 14ax^2y^2 - 21a^2xy^2$; | (8) $15x^3y^3 + 5x^2y^2 - 20x^2y^3$. |

2. (1) 利用因式分解进行计算:

$$mR_1^2 + mR_2^2 + mR_3^2, \text{ 其中 } R_1 = 20, R_2 = 16, R_3 = 12, m = 3.14;$$

(2) 求 $xz - yz$ 的值, 其中 $x = 17.8, y = 28.8, z = \frac{7}{11}$;

(3) 已知 $ab = 7, a + b = 6$, 求多项式 $a^2b + ab^2$ 的值.

数学理解

3. 下列因式分解是否正确? 为什么?

- (1) $2n^2 - nm - n = 2n(n - m - 1)$;
- (2) $-ab^2 + 2ab - 3b = -b(ab - 2a - 3)$;
- (3) $x(x - y) - y(x - y) = (x - y)^2$;
- (4) $a^2 - a - 2 = a(a - 1) - 2$.

问题解决

4. 利用简便方法计算:

$$(1) 121 \times 0.13 + 12.1 \times 0.9 - 12 \times 1.21;$$

$$(2) 2.34 \times 13.2 + 0.66 \times 13.2 - 26.4.$$

例 2 把下列各式因式分解:

$$(1) a(x-3) + 2b(x-3);$$

$$(2) y(x+1) + y^2(x+1)^2.$$

解: (1) $a(x-3) + 2b(x-3) = (x-3)(a+2b);$

$$(2) y(x+1) + y^2(x+1)^2 = y(x+1)[1+y(x+1)] \\ = y(x+1)(xy+y+1).$$

做一做

请在下列各式等号右边的括号前填入“+”或“-”，使等式成立:

$$(1) 2 - a = \underline{\quad\quad\quad} (a - 2); \quad (2) y - x = \underline{\quad\quad\quad} (x - y);$$

$$(3) b + a = \underline{\quad\quad\quad} (a + b); \quad (4) (b - a)^2 = \underline{\quad\quad\quad} (a - b)^2;$$

$$(5) -m - n = \underline{\quad\quad\quad} (m + n); \quad (6) -s^2 + t^2 = \underline{\quad\quad\quad} (s^2 - t^2).$$

你发现了什么规律? 与同伴进行交流.

例 3 把 $-4m^3 + 12m^2 - 6m$ 因式分解.

解: $-4m^3 + 12m^2 - 6m$
 $= -(4m^3 - 12m^2 + 6m)$
 $= -(2m \cdot 2m^2 - 2m \cdot 6m + 2m \cdot 3)$
 $= -2m(2m^2 - 6m + 3).$

当多项式第一项的系数是负数时, 通常先提出“-”号, 使括号内第一项的系数成为正数. 在提出“-”号时, 多项式的各项都要变号.

例4 把下列各式因式分解:

$$(1) a(x-y) + b(y-x);$$

$$(2) 6(m-n)^3 - 12(n-m)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) a(x-y) + b(y-x) &= a(x-y) - b(x-y) \\ &= (x-y)(a-b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 6(m-n)^3 - 12(n-m)^2 &= 6(m-n)^3 - 12(m-n)^2 \\ &= 6(m-n)^2(m-n-2). \end{aligned}$$



随堂练习

把下列各式因式分解:

$$(1) x(a+b) + y(a+b);$$

$$(2) 3a(x-y) - (x-y);$$

$$(3) -a^2 + ab - ac;$$

$$(4) -2x^3 + 4x^2 + 2x;$$

$$(5) 6(p+q)^2 - 12(q+p);$$

$$(6) a(m-2) + b(2-m);$$

$$(7) 2(y-x)^2 + 3(x-y);$$

$$(8) mn(m-n) - m(n-m)^2.$$



习题 1.3



知识技能

1. 把下列各式因式分解:

$$(1) -24x^3 + 12x^2 - 28x;$$

$$(2) -4a^3b^3 + 6a^2b - 2ab;$$

$$(3) -2x^2 - 12xy^2 + 8xy^3;$$

$$(4) -3a^3m + 6a^2m - 12am.$$

2. 把下列各式因式分解:

$$(1) 7(a-1) + x(a-1);$$

$$(2) 3(a-b)^2 + 6(b-a);$$

$$(3) 2(m-n)^2 - m(m-n);$$

$$(4) x(x-y)^2 - y(y-x)^2;$$

$$(5) m(a^2 + b^2) + n(a^2 + b^2);$$

$$(6) (2a+b)(2a-3b) - 3a(2a+b);$$

$$(7) 18(a-b)^3 - 12b(b-a)^2;$$

$$(8) x(x+y)(x-y) - x(x+y)^2.$$

3. 先因式分解, 再计算求值:

$$(1) 4x(m-2) - 3x(m-2), \text{ 其中 } x=1.5, m=6;$$

$$(2) (a-2)^2 - 6(2-a), \text{ 其中 } a=-2.$$

问题 解决

4. 某大学有三块草坪，第一块草坪的面积为 $(a+b)^2 \text{ m}^2$ ，第二块草坪的面积为 $a(a+b) \text{ m}^2$ ，第三块草坪的面积为 $b(a+b) \text{ m}^2$ ，求这三块草坪的总面积。
5. 已知实数 a, b 满足 $ab=3, a-b=2$ ，求代数式 $-\frac{2}{3}a^4b^3 + \frac{2}{3}a^3b^4$ 的值。

3 公式法

观察多项式 $x^2 - 25, 9x^2 - y^2$ ，它们有什么共同特征？尝试将它们分别写成两个因式的乘积，并与同伴进行交流。

事实上，把乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 反过来，就得到

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

例 1 把下列各式因式分解：

$$(1) 25 - 16x^2; \quad (2) 9a^2 - \frac{1}{4}b^2.$$

解：(1) $25 - 16x^2 = 5^2 - (4x)^2 = (5 + 4x)(5 - 4x)$ ；

$$(2) 9a^2 - \frac{1}{4}b^2 = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}b\right)\left(3a - \frac{1}{2}b\right).$$

例 2 把下列各式因式分解：

$$(1) 9(m+n)^2 - (m-n)^2; \quad (2) 2x^3 - 8x.$$

解：(1) $9(m+n)^2 - (m-n)^2$
 $= [3(m+n)]^2 - (m-n)^2$
 $= [3(m+n) + (m-n)][3(m+n) - (m-n)]$

$$= (3m + 3n + m - n)(3m + 3n - m + n)$$

$$= (4m + 2n)(2m + 4n)$$

$$= 4(2m + n)(m + 2n);$$

$$(2) 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4)$$

$$= 2x(x^2 - 2^2)$$

$$= 2x(x + 2)(x - 2).$$

当多项式的各项含有公因式时，通常先提出这个公因式，再进一步因式分解。

随堂练习

1. 判断正误:

$$(1) x^2 + y^2 = (x + y)(x + y); \quad (\quad)$$

$$(2) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y); \quad (\quad)$$

$$(3) -x^2 + y^2 = (-x + y)(-x - y); \quad (\quad)$$

$$(4) -x^2 - y^2 = -(x + y)(x - y). \quad (\quad)$$

2. 把下列各式因式分解:

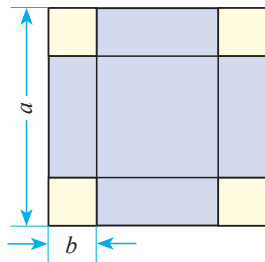
$$(1) a^2b^2 - m^2;$$

$$(2) (m - a)^2 - (n + b)^2;$$

$$(3) a^2 - (a + b - c)^2;$$

$$(4) -16x^4 + 81y^4.$$

3. 如图，从一张边长为 a cm 的正方形纸片的四个角处各剪去一个边长为 b cm 的正方形，求剩余部分的面积. 如果 $a = 3.6$, $b = 0.8$ 呢?



(第3题)

习题 1.4

知识技能

1. 把下列各式因式分解:

$$(1) a^2 - 81;$$

$$(2) 36 - x^2;$$

$$(3) 1 - 16b^2;$$

$$(4) m^2 - 9n^2;$$

$$(5) 0.25q^2 - 121p^2;$$

$$(6) 169x^2 - 4y^2;$$

$$(7) 9a^2p^2 - b^2q^2;$$

$$(8) \frac{49}{4}a^2 - x^2y^2.$$

2. 把下列各式因式分解:

$$(1) (m+n)^2 - n^2;$$

$$(2) 49(a-b)^2 - 16(a+b)^2;$$

$$(3) (2x+y)^2 - (x+2y)^2;$$

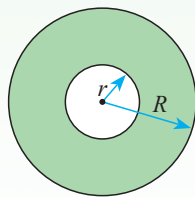
$$(4) (x^2+y^2)^2 - x^2y^2;$$

$$(5) 3ax^2 - 3ay^4;$$

$$(6) p^4 - 1.$$

问题 解决

3. 如图, 大圆和小圆的圆心相同, 已知它们的半径分别是 R cm 和 r cm, 求它们所围成的环形的面积. 如果 $R = 8.45$, $r = 3.45$ 呢? (π 取 3.14)



(第3题)

把乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 反过来, 就得到

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

由因式分解与整式乘法的关系可以看出, 如果把乘法公式反过来, 那么就可以用来把某些多项式因式分解. 通常我们把运用乘法公式进行因式分解的方法叫做公式法.

形如 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的式子称为完全平方式.

例3 把下列完全平方式因式分解:

$$(1) x^2 + 14x + 49;$$

$$(2) (m+n)^2 - 6(m+n) + 9.$$

解: (1) $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times 7x + 7^2 = (x+7)^2;$

(2) $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9 = [(m+n) - 3]^2 = (m+n-3)^2.$

例4 把下列各式因式分解:

$$(1) 3ax^2 + 6axy + 3ay^2;$$

$$(2) -x^2 - 4y^2 + 4xy.$$

解: (1) $3ax^2 + 6axy + 3ay^2 = 3a(x^2 + 2xy + y^2) = 3a(x + y)^2$;

(2) $-x^2 - 4y^2 + 4xy = -(x^2 + 4y^2 - 4xy)$
 $= -(x^2 - 4xy + 4y^2)$
 $= -[x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2]$
 $= -(x - 2y)^2$.

随堂练习

1. 下列多项式中, 哪几个是完全平方式? 请把是完全平方式的多项式因式分解:

(1) $x^2 - x + \frac{1}{4}$;

(2) $9a^2b^2 - 3ab + 1$;

(3) $\frac{1}{4}m^2 + 3mn + 9n^2$;

(4) $x^6 - 10x^3 - 25$.

2. 把下列各式因式分解:

(1) $x^2 - 12xy + 36y^2$;

(2) $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$;

(3) $-2xy - x^2 - y^2$;

(4) $4 - 12(x - y) + 9(x - y)^2$.

读一读

智慧数

如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差, 那么称这个正整数为“智慧数”. 例如, $16 = 5^2 - 3^2$, 16 就是一个智慧数. 在正整数中, 从 1 开始, 第 2 012 个智慧数是哪个数?

小颖的方法是一个一个找出来:

$$3 = 2^2 - 1^2, 5 = 3^2 - 2^2, 7 = 4^2 - 3^2,$$

$$8 = 3^2 - 1^2, 9 = 5^2 - 4^2, 11 = 6^2 - 5^2,$$

.....

小明认为小颖的方法太麻烦. 他想到:

设 k 是正整数, 由于

$$(k+1)^2 - k^2 = (k+1+k)(k+1-k) = 2k+1,$$

所以, 除 1 外, 所有的奇数都是智慧数.

又因为 $(k+1)^2 - (k-1)^2 = (k+1+k-1)(k+1-k+1) = 4k$,

所以, 除 4 外, 所有能被 4 整除的偶数都是智慧数.

还剩什么数没搞清楚呢? 还剩被 4 除余 2 的数.

试一下, 2, 6, 10 都不是智慧数. 能否下结论: 被 4 除余 2 的正整数都不是智慧数? 不行! 特殊不能代替一般. 那怎么办呢? 小明“卡壳”了!

小亮认为, 如果 $4k+2$ 是智慧数, 那么必有两个正整数 m 和 n , 使得

$$4k+2 = m^2 - n^2,$$

即 $2(2k+1) = (m+n)(m-n)$. (*)

因为 $m+n$ 和 $m-n$ 这两个数的奇偶性相同, 所以 (*) 式右边要么是 4 的倍数, 要么是奇数, 而左边一定是偶数, 但一定不是 4 的倍数, 可见左、右两边不相等. 所以 $4k+2$ 不是智慧数, 即被 4 除余 2 的正整数都不是智慧数.

至此, 问题就比较清楚了, 把从 1 开始的正整数依次每 4 个分成一组, 除第一组有 1 个智慧数外, 其余各组都有 3 个智慧数, 而且每组中第二个不是智慧数.

有了这些结论, 再找第 2 012 个智慧数就容易多了! 同学们, 你们知道这个智慧数是多少吗?

习题 1.5

知识技能

1. 把下列各式因式分解:

(1) $x^2y^2 - 2xy + 1$;

(2) $9 - 12t + 4t^2$;

(3) $\frac{x^2}{4} + xy + y^2$;

(4) $25m^2 - 80m + 64$;

(5) $4x^2 - 2xy + \frac{y^2}{4}$;

(6) $4a^2b^2 - 28ab + 49$.

2. 把下列各式因式分解:

(1) $(x+y)^2 + 6(x+y) + 9$;

(2) $a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2$;

(3) $4xy^2 - 4x^2y - y^3$;

(4) $-a + 2a^2 - a^3$.

数学理解

3. 已知多项式 $x^2 + 1$ 与一个单项式的和是一个整式的完全平方, 请你找出一个满足条件的单项式.

问题解决

4. 两个连续奇数的平方差能被 8 整除吗? 为什么?

想一想

多项式 $x(x+6)+9$ 能因式分解吗? 与同伴进行交流.

例 5 把 $y(y+4)-4(y+1)$ 因式分解.

$$\begin{aligned}\text{解: } & y(y+4)-4(y+1) \\ &= y^2+4y-4y-4 \\ &= y^2-4 \\ &= (y+2)(y-2).\end{aligned}$$

例 6 把 $(x^2+1)^2-4x^2$ 因式分解.

$$\begin{aligned}\text{解: } & (x^2+1)^2-4x^2 \\ &= (x^2+1)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2+2x+1)(x^2-2x+1) \\ &= (x+1)^2(x-1)^2.\end{aligned}$$

议一议

多项式因式分解的一般步骤是什么? 与同伴进行交流.

随堂练习

1. 把下列各式因式分解:

$$(1) a(a-2)+1;$$

$$(2) m(m+9)-9(m+1);$$

$$(3) x(4-x)-4.$$

2. 把下列各式因式分解:

$$(1) x^4-2x^2+1;$$

$$(2) (y^2+9)^2-36y^2;$$

$$(3) 2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-x^4.$$

读一读

可化为 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三项式的因式分解

利用多项式的乘法法则, 可以得到

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

反过来, 则有

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b).$$

这就是说, 对一个二次项系数为 1 的二次三项式 $x^2 + mx + n$, 如果能够把常数项 n 分解成两个因数 a, b 的积, 并且 a 与 b 的和恰好等于一次项的系数 m , 那么, 这个二次三项式就可以分解成 $(x+a)(x+b)$ 的积, 即

$$x^2 + mx + n = (x+a)(x+b),$$

其中, $ab = n, a + b = m$.

例 把二次三项式 $x^2 - 4x - 12$ 因式分解.

分析: 常数项 -12 可以分解为:

$$-12 = 1 \times (-12) = (-1) \times 12$$

$$= 2 \times (-6) = (-2) \times 6$$

$$= 3 \times (-4) = (-3) \times 4,$$

其中, 恰有 $2 + (-6) = -4$.

解: $x^2 - 4x - 12$

$$= (x+2)[x+(-6)]$$

$$= (x+2)(x-6).$$

利用上述方法, 可以将部分特殊的二次三项式便捷地解出来. 同学们可以仿照上述方法将二次三项式 $x^2 + 2x - 15$ 因式分解.

习题 1.6

知识技能

1. 把下列各式因式分解:

$$(1) (x+1)^2 - 4x;$$

$$(2) (m+n)^3 - 4(m+n);$$

$$(3) (x+1)(x-1) - 3;$$

$$(4) (x+2)(x+3) + \frac{1}{4}.$$

2. 把下列各式因式分解:

$$(1) x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4;$$

$$(2) (b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2;$$

$$(3) (x^2 - 2)^2 - 4;$$

$$(4) x^4 - 18x^2 + 81.$$

回顾与思考

1. 举例说明什么是因式分解.
2. 因式分解与整式乘法有什么关系?
3. 因式分解常用的方法有哪些?
4. 用适当的方式梳理本章的知识, 并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 把下列各式因式分解:

$$(1) 7x^2 - 63;$$

$$(2) a^3 - a;$$

$$(3) 3a^2 - 3b^2;$$

$$(4) y^2 - 9(x+y)^2;$$

$$(5) a(x-y) - b(y-x) + c(x-y);$$

$$(6) x(m+n) - y(n+m) + (m+n);$$

- (7) $(x+y)^2 - 16(x-y)^2$;
 (8) $a^2(a-b)^2 - b^2(a-b)^2$;
 (9) $(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2$;
 (10) $(x+y)^2 - 14(x+y) + 49$.

2. 把下列各式因式分解:

- (1) $a^2b^2 - 0.01$; (2) $x^2y - 2xy^2 + y^3$;
 (3) $16 - (2a+3b)^2$; (4) $(a^2+4)^2 - 16a^2$;
 (5) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$; (6) $a^2x^2 + 16ax + 64$;
 (7) $a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4$; (8) $9a^2 - 6a(a+b) + (a+b)^2$.

3. 先因式分解, 然后计算求值:

- (1) $9x^2 + 12xy + 4y^2$, 其中 $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$;
 (2) $(\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$, 其中 $a = -\frac{1}{8}$, $b = 2$.

4. 把下列各式因式分解:

- (1) $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$; (2) $(x+1)(x+2) + \frac{1}{4}$.

数学理解

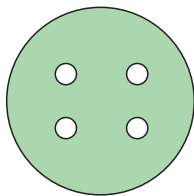
5. 利用因式分解说明: $25^7 - 5^{12}$ 能被 120 整除.
 6. 已知 $x+y=1$, 求 $\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$ 的值.

问题解决

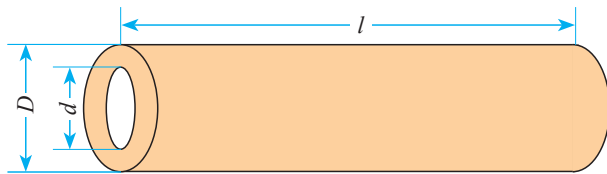
7. 利用因式分解计算:

- (1) $2^{2014} - 2^{2013}$; (2) $(-2)^{101} + (-2)^{100}$.

8. 如图, 在半径为 R 的圆形钢板上, 冲去半径为 r 的四个小圆, 利用因式分解计算当 $R = 7.8 \text{ cm}$, $r = 1.1 \text{ cm}$ 时剩余部分的面积 (π 取 3.14).



(第8题)



(第9题)

9. 如图, 某农场修建一座小型水库, 需要一种空心混凝土管道, 它的规格是内径 $d = 45$ cm, 外径 $D = 75$ cm, 长 $l = 300$ cm. 利用因式分解计算浇制一节这样的管道约需要多少立方米的混凝土 (π 取 3.14, 结果精确到 0.01 m^3).

10. 已知正方形的面积是 $9x^2 + 6xy + y^2$ ($x > 0, y > 0$), 利用因式分解写出表示该正方形的边长的代数式.

※11. 当 x 取何值时, 多项式 $x^2 + 2x + 1$ 取得最小值?

※12. 正方形 I 的周长比正方形 II 的周长长 96 cm, 它们的面积相差 960 cm^2 . 求这两个正方形的边长.

联系拓广

13. 当 k 取何值时, $100x^2 - kxy + 49y^2$ 是一个完全平方式?

※14. 计算下列各式:

$$(1) 1 - \frac{1}{2^2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

你能根据所学知识找到计算上面算式的简便方法吗? 请你利用你找到的简便方法计算下式:

$$(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \cdots (1 - \frac{1}{9^2})(1 - \frac{1}{10^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}).$$

※15. $2^{48} - 1$ 可以被 60 和 70 之间的某两个数整除, 求这两个数.

第二章 分式与分式方程

我们在数学学习中会遇到诸如 $\frac{a+1}{2a}$, $\frac{8}{a-x}$, $\frac{x+2}{y}$ 之类的式子, 你知道这些式子与整式有什么区别吗? 你认为 $\frac{x(x+2)}{xy}$ 与 $\frac{x+2}{y}$ 相等吗?

你见过类似于 $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x}$ 这样的方程吗? 你能求出它的解吗?

本章将学习分式的概念、性质和四则运算, 以及分式方程的解法, 并应用分式方程解决一些简单问题.

学习目标

- 了解分式的概念, 探索分式的基本性质
- 能进行分式的四则运算, 发展运算能力
- 会解可化为一元一次方程的分式方程
- 能运用分式方程解决一些简单的实际问题, 发展应用意识, 体会模型思想

$$\frac{y}{15x^2}$$

$$\frac{1}{4-x}$$

$$\frac{c}{ab}$$

$$\frac{a}{bc}$$

$$\frac{3-x}{x-4}$$

$$m+n$$

$$15x^2$$

$$\frac{5xy}{y}$$

$$\frac{a}{m-n}$$

$$\frac{3}{x}$$

$$x(x+2)$$

$$abc$$

$$x^2+4$$

1 认识分式



面对日益严重的土地沙化问题，某县决定在一定期限内固沙造林 2 400 公顷，实际每月固沙造林的面积比原计划多 30 公顷，结果提前完成原计划的任务.

如果设原计划每月固沙造林 x 公顷，那么

- (1) 原计划完成造林任务需要多少个月？
- (2) 实际完成造林任务用了多少个月？

做一做

(1) 2010年上海世博会吸引了成千上万的参观者，某一时段内的统计结果显示，前 a 天日均参观人数 35 万人，后 b 天日均参观人数 45 万人，这 $(a + b)$ 天日均参观人数为多少万人？

(2) 某书店库存一批图书，其中一种图书的原价是每册 a 元，现每册降价 x 元销售，当这种图书的库存全部售出时，其销售额为 b 元. 降价销售开始时，该书店这种图书的库存量是多少？

议一议

上面问题中出现了代数式 $\frac{2\,400}{x}$ ， $\frac{2\,400}{x+30}$ ， $\frac{35a+45b}{a+b}$ 和 $\frac{b}{a-x}$ ，它们有什么

么共同特征？它们与整式有什么不同？

一般地，用 A, B 表示两个整式， $A \div B$ 可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式. 如果 B 中含有字母，那么称 $\frac{A}{B}$ 为分式 (fraction)，其中 A 称为分式的分子， B 称为分式的分母. 对于任意一个分式，分母都不能为零.

例 1 (1) 当 $a = 1, -2$ 时，分别求分式 $\frac{a+1}{2a-1}$ 的值；

(2) 当 a 取何值时，分式 $\frac{a+1}{2a-1}$ 的值为零？

(3) 当 a 取何值时，分式 $\frac{a+1}{2a-1}$ 有意义？

解：(1) 当 $a = 1$ 时， $\frac{a+1}{2a-1} = \frac{1+1}{2 \times 1 - 1} = 2$ ；

当 $a = -2$ 时， $\frac{a+1}{2a-1} = \frac{-2+1}{2 \times (-2) - 1} = \frac{1}{5}$.

(2) 当分子的值为零，分母的值不为零时，分式的值为零.

由于 $a+1=0$ 时， $a=-1$ ，此时分母 $2a-1 \neq 0$. 所以，当 $a=-1$ 时，分式 $\frac{a+1}{2a-1}$ 的值为零.

(3) 当分母的值等于零时，分式没有意义，除此之外，分式都有意义.

由分母 $2a-1=0$ ，得 $a = \frac{1}{2}$.

所以，当 a 取 $\frac{1}{2}$ 以外的任何实数时，分式 $\frac{a+1}{2a-1}$ 都有意义.



随堂练习

1. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{8}{x-1}$;

(2) $\frac{1}{x+9}$.

2. 当 $x = 0, -2, \frac{1}{2}$ 时，分别求分式 $\frac{2x-1}{3x+2}$ 的值.

3. 把甲、乙两种饮料按质量比 $x : y$ 混合在一起，可以调制成一种混合饮料. 调制 1 kg 这种混合饮料需多少千克甲种饮料？

习题 2.1

知识技能

1. 下列各式中, 哪些是整式? 哪些是分式?

(1) $\frac{b}{2a}$; (2) $\frac{a+b}{2}$; (3) $-\frac{x+1}{4-x}$; (4) $\frac{1}{2}xy + x^2y$.

2. 当 x 取什么值时, 下列分式无意义?

(1) $\frac{x}{2x-3}$; (2) $\frac{x-1}{5x-10}$.

3. 当 $a = -1$, $b = \frac{2}{3}$ 时, 求分式 $\frac{a-b}{4a+3b}$ 的值.

问题解决

4. 列代数式:

- (1) 水果店购进一箱橘子需要 a 元, 已知橘子与箱子的总质量为 m 千克, 箱子的质量为 n 千克, 为了不亏本, 这箱橘子的零售价至少应定为每千克多少元?
- (2) 有两块棉田, 第一块 x 公顷, 收棉花 m 千克, 第二块 y 公顷, 收棉花 n 千克, 这两块棉田平均每公顷的棉产量是多少?
- (3) 一件商品售价 x 元, 利润率为 $a\%$ ($a > 0$), 则这种商品每件的成本是多少元?

你认为分式 $\frac{a}{2a}$ 与 $\frac{1}{2}$ 相等吗? $\frac{n^2}{mn}$ 与 $\frac{n}{m}$ 呢? 与同伴交流.

分式的基本性质 分式的分子与分母都乘 (或除以) 同一个不等于零的整式, 分式的值不变.

这一性质可以用式子表示为: $\frac{b}{a} = \frac{b \cdot m}{a \cdot m}$, $\frac{b}{a} = \frac{b \div m}{a \div m}$ ($m \neq 0$).

例 2 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1) $\frac{b}{2x} = \frac{by}{2xy}$ ($y \neq 0$); (2) $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$.

解: (1) 因为 $y \neq 0$, 所以 $\frac{b}{2x} = \frac{b \cdot y}{2x \cdot y} = \frac{by}{2xy}$;

(2) 因为 $x \neq 0$, 所以 $\frac{ax}{bx} = \frac{ax \div x}{bx \div x} = \frac{a}{b}$.

在例 2 (2) 中,
为什么 $x \neq 0$?

例 3 化简下列分式:

$$(1) \frac{a^2bc}{ab}; \quad (2) \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}.$$

解: (1) $\frac{a^2bc}{ab} = \frac{ab \cdot ac}{ab} = ac$;

$$(2) \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

例 3 中, $\frac{a^2bc}{ab} = ac$, 即分子、分母同时约去了整式 ab ; $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{x+1}{x-1}$, 即分子、分母同时约去了整式 $x-1$. 把一个分式的分子和分母的公因式约去, 这种变形称为分式的约分 (red ucing a fraction).

做一做

化简下列分式:

$$(1) \frac{5xy}{20x^2y}; \quad (2) \frac{a^2+ab}{b^2+ab}.$$

议一议

在化简 $\frac{5xy}{20x^2y}$ 时, 小颖和小明出现了分歧.



$$\frac{5xy}{20x^2y} = \frac{5x}{20x^2}.$$

$$\frac{5xy}{20x^2y} = \frac{5xy}{4x \cdot 5xy} = \frac{1}{4x}.$$



你对他们两人的做法有何看法? 与同伴交流.

在小明的化简结果中, 分子和分母已没有公因式, 这样的分式称为最简分式. 化简分式时, 通常要使结果成为最简分式或者整式.

想一想

- (1) $\frac{-x}{y}$ 与 $\frac{x}{-y}$ 有什么关系? $\frac{-x}{-y}$ 与 $\frac{x}{y}$ 有什么关系?
 (2) $\frac{-x}{y}$ 与 $-\frac{x}{y}$ 有什么关系? $\frac{x}{-y}$ 与 $-\frac{x}{y}$ 有什么关系?

随堂练习

1. 填空:

$$(1) \frac{2x}{x-y} = \frac{(\quad)}{(x-y)(x+y)} \quad (x+y \neq 0); \quad (2) \frac{y+2}{y^2-4} = \frac{1}{(\quad)}.$$

2. 化简下列分式:

$$(1) \frac{-14mn^2k}{4m^2n}; \quad (2) \frac{x-y}{(x-y)^3}; \quad (3) \frac{4-x^2}{x^2-2x}.$$

习题 2.2

知识技能

1. 化简下列分式:

$$(1) \frac{12x^2y^3}{9x^3y^2}; \quad (2) \frac{x^2+x}{x^2-1}; \quad (3) \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}.$$

2. 求下列各式的值:

$$(1) \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}, \text{ 其中 } x=100; \quad (2) \frac{x^2-2x}{2y-xy}, \text{ 其中 } x=-6, y=28.$$

数学理解

3. 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

$$(1) \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}; \quad (2) \frac{b}{x^2y} = \frac{bx}{x^3y};$$

$$(3) \frac{ab}{4a^2b} = \frac{1}{4a}; \quad (4) \frac{y}{2x} = \frac{aby}{2abx} \quad (ab \neq 0).$$

4. 写出一个能够约分的分式, 并进行约分.

2 分式的乘除法

观察下列运算：

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}, \quad \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{5 \times 2}{7 \times 9},$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}, \quad \frac{5}{7} \div \frac{2}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{2} = \frac{5 \times 9}{7 \times 2}.$$

猜一猜： $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = ?$ $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = ?$ 与同伴交流.

与分数乘除法的法则类似，分式乘除法的法则是：

两个分式相乘，把分子相乘的积作为积的分子，把分母相乘的积作为积的分母；

两个分式相除，把除式的分子和分母颠倒位置后再与被除式相乘.

这一法则可以用式子表示为： $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$ ， $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$.

例 1 计算：

$$(1) \frac{3a}{4y} \cdot \frac{2y^2}{3a^2};$$

$$(2) \frac{ab^2}{4c} \cdot \left(-\frac{2c}{3a^2b}\right).$$

解：(1) $\frac{3a}{4y} \cdot \frac{2y^2}{3a^2} = \frac{3a \cdot 2y^2}{4y \cdot 3a^2} = \frac{y}{2a};$

$$(2) \frac{ab^2}{4c} \cdot \left(-\frac{2c}{3a^2b}\right) = -\frac{ab^2 \cdot 2c}{4c \cdot 3a^2b} = -\frac{b}{6a}.$$

进行分式的乘除法运算时，结果应当是最简分式或整式.



想一想

$$(1) \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \left(\frac{b}{a}\right)^n = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \text{ 是正整数}).$$

例2 计算:

$$(1) 3xy^2 \div \frac{6y^2}{x};$$

$$(2) \left(-\frac{a^2}{b}\right) \div \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

$$(3) \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^3} \div \frac{2x}{y^2}.$$

解: (1) $3xy^2 \div \frac{6y^2}{x} = 3xy^2 \cdot \frac{x}{6y^2} = \frac{3xy^2 \cdot x}{6y^2} = \frac{1}{2}x^2;$

$$(2) \left(-\frac{a^2}{b}\right) \div \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(-\frac{a^2}{b}\right) \div \frac{a^2}{b^2} = \left(-\frac{a^2}{b}\right) \cdot \frac{b^2}{a^2} = -\frac{a^2 \cdot b^2}{b \cdot a^2} = -b;$$

$$(3) \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^3} \div \frac{2x}{y^2} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{y^2}{2x} = \frac{x^2}{2y^2}.$$

随堂练习

计算:

$$(1) \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a^2};$$

$$(2) 8xy^2 \div \frac{12xy}{7};$$

$$(3) \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{m};$$

$$(4) \frac{3y^2}{2x} \div (-3xy);$$

$$(5) \frac{a^2}{b} \cdot \frac{2}{b} \div \frac{a^2}{b^2};$$

$$(6) \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{m} \div \left(-\frac{m}{n^2}\right).$$

习题 2.3

知识技能

1. 计算:

$$(1) \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{2a}{b^2c};$$

$$(2) \left(\frac{a}{2c}\right)^2;$$

$$(3) \frac{4x^2y}{-3b} \cdot \frac{21b}{10xy^2};$$

$$(4) \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{2n^2}{3m}.$$

2. 计算:

$$(1) \frac{3y}{10x} \div \frac{6y^2}{5x^2};$$

$$(2) 4a^2b \div \left(-\frac{2a}{b}\right)^2;$$

$$(3) \left(\frac{b}{a}\right)^2 \div (-b^2);$$

$$(4) \frac{b^2c}{a} \cdot \frac{ac}{b} \div \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

数学理解

3. 对于 $a \div b \cdot \frac{1}{b}$, 小明是这样计算的: $a \div b \cdot \frac{1}{b} = a \div 1 = a$. 他的计算过程正确吗? 为什么?

问题解决

4. 由甲地到乙地的一条铁路全程为 s km, 火车全程运行时间为 a h; 由甲地到乙地的公路全程为这条铁路全程的 m 倍, 汽车全程运行时间为 b h. 那么火车的速度是汽车速度的多少倍?

想一想

(1) 怎样计算 $\frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a}$?

(2) 两个分式相乘时, 如果分子或分母是多项式, 应当怎样进行?

$$\begin{aligned} \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a} &= \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a(a+2)} \\ &= \frac{1}{a^2-2a}. \end{aligned}$$

在进行分式相乘时, 如果分子或分母是多项式, 应当先进行因式分解.



例3 计算:

$$(1) \frac{x-y}{10xy} \cdot \frac{50x^2y^2}{x^2-y^2};$$

$$(2) \frac{a-1}{a-2} \div \frac{a^2-1}{a^2-4};$$

$$(3) \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \left(\frac{x+2y}{x+y}\right)^2.$$

解: (1) $\frac{x-y}{10xy} \cdot \frac{50x^2y^2}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{10xy} \cdot \frac{50x^2y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{5xy}{x+y};$

$$(2) \frac{a-1}{a-2} \div \frac{a^2-1}{a^2-4} = \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-1} = \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{a+2}{a+1};$$

$$(3) \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \left(\frac{x+2y}{x+y}\right)^2 = \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{(x+2y)^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{x-2y}{x+2y}.$$

做一做

购买西瓜时,人们通常希望西瓜瓤占整个西瓜的比例越大越好.假如我们把西瓜看成球形,西瓜的半径为 r ,并且西瓜瓤的分布是均匀的,西瓜皮的厚度是 d .已知球的体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (其中 R 为球的半径),那么

- (1) 西瓜瓤与整个西瓜的体积各是多少?
- (2) 西瓜瓤与整个西瓜的体积的比是多少?
- (3) 你认为买大西瓜合算还是买小西瓜合算?与同伴交流.

随堂练习

计算:

$$(1) \frac{x^2-1}{y^2} \cdot \frac{y}{x+1};$$

$$(2) (a^2-a) \cdot \frac{a}{a-1};$$

$$(3) \frac{1}{m^2-1} \div \frac{1+m}{1-m};$$

$$(4) \frac{x^2-y^2}{xy} \div \left(\frac{x+y}{x}\right)^2.$$

习题 2.4

知识技能

1. 计算:

$$(1) \frac{b^2 - b}{a^2 - 9} \cdot \frac{a + 3}{b};$$

$$(2) \frac{a}{a - b} \cdot \left(\frac{a - b}{a}\right)^2;$$

$$(3) \frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a + b}{a - b};$$

$$(4) \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} \cdot \frac{1}{x^2 - 4}.$$

2. 计算:

$$(1) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} \div \frac{x + 3}{x - 2};$$

$$(2) \frac{x^2 + xy}{x - y} \div \frac{xy}{x - y};$$

$$(3) \frac{ab - a^2}{ab} \div \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b};$$

$$(4) \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{4x^2 - y^2} \div (2x - y);$$

$$(5) \frac{(x - y)^3}{x + y} \div \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2x + 2y};$$

$$(6) (xy - x^2) \div \frac{x - y}{xy}.$$

3 分式的加减法

星期天, 小明从家骑车到距家 3 km 处的新华书店, 然后以同样的速度骑车到距新华书店 2 km 处的姥姥家. 设小明骑车的速度是 v km/h, 那么

- (1) 小明从家到新华书店用了多长时间?
- (2) 小明从新华书店到姥姥家用了多长时间?
- (3) 小明从家到姥姥家在路上骑车一共用了多长时间?

想一想

- (1) 同分母的分数如何加减?

(2) 你会计算 $\frac{3}{v} + \frac{2}{v}$ 吗?

(3) 你认为, 同分母的分式应该如何加减?

与同分母的分数加减法法则类似, 同分母的分式加减法法则是:

同分母的分式相加减, 分母不变, 把分子相加减.

这一法则可以用式子表示为: $\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$.

例 1 计算:

$$(1) \frac{a+b}{ab} - \frac{a-b}{ab};$$

$$(2) \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2};$$

$$(3) \frac{m-2n}{m+n} - \frac{4m+n}{m+n};$$

$$(4) \frac{x-3}{x+1} + \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}.$$

解: (1) $\frac{a+b}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{a+b-(a-b)}{ab} = \frac{2b}{ab} = \frac{2}{a};$

(2) $\frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2;$

(3) $\frac{m-2n}{m+n} - \frac{4m+n}{m+n} = \frac{m-2n-(4m+n)}{m+n}$

$$= \frac{-3m-3n}{m+n}$$

$$= \frac{-3(m+n)}{m+n}$$

$$= -3;$$

结果要化成最简形式哟!

(4) $\frac{x-3}{x+1} + \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3+x+2-(x-1)}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$

例 2 计算:

$$(1) \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x};$$

$$(2) \frac{a^2}{a-1} - \frac{1-2a}{1-a}.$$

解: (1) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1;$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{a^2}{a-1} - \frac{1-2a}{1-a} &= \frac{a^2}{a-1} + \frac{1-2a}{a-1} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a-1} \\
 &= \frac{(a-1)^2}{a-1} = a-1.
 \end{aligned}$$

随堂练习

1. 下列运算正确吗? 如果不正确, 请改正.

$$(1) \quad \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{2m};$$

$$(2) \quad \frac{a}{x-y} - \frac{a}{y-x} = 0;$$

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{a} = \frac{2}{a};$$

$$(4) \quad \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+y} = 1.$$

2. 计算:

$$(1) \quad \frac{2}{a} - \frac{5}{a};$$

$$(2) \quad \frac{3b}{x} - \frac{b}{x};$$

$$(3) \quad \frac{2a}{2a-b} + \frac{b}{b-2a}.$$

习题 2.5

知识技能

1. 计算:

$$(1) \quad \frac{m-1}{x} + \frac{n-m}{x};$$

$$(2) \quad \frac{1}{m} + \frac{3}{m} - \frac{5}{m}.$$

2. 计算:

$$(1) \quad \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2+2ab}{a+b};$$

$$(2) \quad \frac{x-2y}{2x-y} - \frac{x+y}{2x-y};$$

$$(3) \quad \frac{m+2n}{n-m} + \frac{n}{n-m} - \frac{2n}{n-m};$$

$$(4) \quad \frac{x^2-5}{x-2} - \frac{x}{x-2} - \frac{1+x}{2-x}.$$

3. 先化简, 再求值:

$$\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}, \text{ 其中 } x = \frac{1}{100}.$$

问题解决

4. 某人用计算机录入汉字文稿的速度相当于手抄的3倍, 设他手抄的速度为 a 字/时, 那么他录入 3 000 字文稿比手抄少用多长时间?

你还记得异分母的分数如何加减吗？你认为异分母的分式应该如何加减？

比如 $\frac{3}{a} + \frac{1}{4a}$ 应该怎样计算？

议一议

小明认为，只要把异分母的分式化成同分母的分式，异分母分式的加减问题就变成了同分母分式的加减问题。小亮同意小明的这种看法，但他俩的具体做法不同。



$$\begin{aligned}\frac{3}{a} + \frac{1}{4a} &= \frac{3 \cdot 4a}{a \cdot 4a} + \frac{a}{4a \cdot a} \\ &= \frac{12a}{4a^2} + \frac{a}{4a^2} = \frac{13a}{4a^2} = \frac{13}{4a}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{a} + \frac{1}{4a} &= \frac{3 \times 4}{a \cdot 4} + \frac{1}{4a} \\ &= \frac{12}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{13}{4a}.\end{aligned}$$



你对这两种做法有何评论？与同伴交流。

根据分式的基本性质，异分母的分式可以化为同分母的分式，这一过程称为分式的**通分**。为了计算方便，异分母分式通分时，通常取最简单的公分母（简称**最简公分母**）作为它们的共同分母。

与异分母的分数加减法法则类似，异分母的分式加减法法则是：

异分母的分式相加减，先通分，化为同分母的分式，然后再按同分母分式的加减法法则进行计算。

$$\text{这一法则可以用式子表示为：} \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} \pm \frac{ad}{ac} = \frac{bc \pm ad}{ac}.$$

例3 计算:

$$(1) \frac{3}{a} + \frac{a-15}{5a}; \quad (2) \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}; \quad (3) \frac{2a}{a^2-4} - \frac{1}{a-2}.$$

解: (1) $\frac{3}{a} + \frac{a-15}{5a} = \frac{15}{5a} + \frac{a-15}{5a} = \frac{15+a-15}{5a} = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5};$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9} \\ &= \frac{6}{x^2-9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{2a}{a^2-4} - \frac{1}{a-2} &= \frac{2a}{(a-2)(a+2)} - \frac{a+2}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{2a-(a+2)}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{a-2}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{1}{a+2}. \end{aligned}$$

例4 小刚家和小丽家到学校的路程都是3 km, 其中小丽走的是平路, 骑车速度是 $2v$ km/h. 小刚需要走1 km的上坡路、2 km的下坡路, 在上坡路上的骑车速度为 v km/h, 在下坡路上的骑车速度为 $3v$ km/h. 那么

(1) 小刚从家到学校需要多长时间?

(2) 小刚和小丽谁在路上花费的时间少? 少用多长时间?

解: (1) 小刚从家到学校需要 $\frac{1}{v} + \frac{2}{3v} = \frac{5}{3v}$ (h).

(2) 小丽从家到学校需要 $\frac{3}{2v}$ h.

因为 $\frac{5}{3v} > \frac{3}{2v}$, 所以小丽在路上花费的时间少.

小丽在路上花费的时间比小刚少 $\frac{5}{3v} - \frac{3}{2v} = \frac{1}{6v}$ (h).

随堂练习

1. 将下列各分式通分:

$$(1) \frac{x-1}{3x^2}, \frac{2}{ax};$$

$$(2) \frac{3a}{2a-b}, -\frac{1}{b-2a};$$

$$(3) \frac{1}{a^2-9}, \frac{2}{a^2+6a+9};$$

$$(4) \frac{1}{x^2-4}, \frac{x}{4-2x}.$$

2. 计算:

$$(1) \frac{b}{3a} + \frac{a}{2b};$$

$$(2) \frac{1}{a-1} - \frac{2}{1-a^2}.$$

习题 2.6

知识技能

1. 计算:

$$(1) \frac{x}{a} + \frac{y}{b};$$

$$(2) \frac{1}{a^2b} - \frac{b}{ab^2};$$

$$(3) \frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc};$$

$$(4) \frac{3x}{(x-3)^2} - \frac{x}{3-x}.$$

问题解决

2. 临近春节, 甲厂决定包租一辆车送员工返乡过年, 租金为 3 000 元. 出发时, 乙厂有 3 名同乡员工也随车返乡, 总人数达到 x 名. 如果包租租金不变, 那么甲厂为每位员工平均每人支付车费可比原来少多少元?

3. 一项工程, 甲单独做 a h 完成, 乙单独做 b h 完成, 甲、乙两人一起完成这项工程需要多长时间?

例 5 计算:

$$(1) \frac{x^2}{x+1} - x + 1;$$

$$(2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) \div \frac{a}{a-b}.$$

解: (1) $\frac{x^2}{x+1} - x + 1 = \frac{x^2}{x+1} - (x-1)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\
 &= \frac{x^2 - (x-1)(x+1)}{x+1} \\
 &= \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x+1} \\
 &= \frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1} \\
 &= \frac{1}{x+1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) \div \frac{a}{a-b} &= \frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a-b}{a} \\
 &= \frac{2}{a+b}.
 \end{aligned}$$

例 6 已知 $\frac{x}{y} = 2$, 求 $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} - \frac{y^2}{x^2-y^2}$ 的值.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} - \frac{y^2}{x^2-y^2} &= \frac{x(x+y) - y(x-y) - y^2}{(x-y)(x+y)} \\
 &= \frac{x^2 + xy - xy + y^2 - y^2}{(x-y)(x+y)} \\
 &= \frac{x^2}{x^2-y^2}.
 \end{aligned}$$

因为 $\frac{x}{y} = 2$, 即 $x = 2y$,

$$\text{所以, 原式} = \frac{(2y)^2}{(2y)^2 - y^2} = \frac{4y^2}{3y^2} = \frac{4}{3}.$$

还有其他解法吗?

做一做

根据规划设计, 某工程队准备修建一条长 1 120 m 的盲道. 由于采用新的施工方式, 实际每天修建盲道的长度比原计划增加 10 m, 从而缩短了工期. 假设原计划每天修建盲道 x m, 那么

- (1) 原计划修建这条盲道需要多少天? 实际修建这条盲道用了多少天?
- (2) 实际修建这条盲道的工期比原计划缩短了几天?

随堂练习

1. 计算:

$$(1) \frac{1}{a^2-a} + \frac{a-3}{a^2-1}; \quad (2) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}; \quad (3) \frac{m+n}{2m-2n} - \frac{n}{m-n} + \frac{1}{2}.$$

2. 先化简, 再求值:

(1) 当 $a = \frac{1}{10}$ 时, 求 $\frac{a+1}{a^2-1} - \frac{a+1}{1-a}$ 的值;

(2) 设 $x = 3y$, 求 $\frac{4xy}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{x-y}$ 的值.

习题 2.7

知识技能

1. 计算:

$$(1) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2x+1}; \quad (2) 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1-x}{3-x};$$

$$(3) \frac{1}{x} - \frac{2}{3x} + \frac{x}{3x-2}; \quad (4) \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} + \frac{m^2}{n^2-m^2}.$$

2. 先化简, 再求值:

(1) 已知 $r = 100$, 求 $\frac{2r+2}{r^2+2r+1} + \frac{r-1}{r+1} + r$ 的值;

(2) 设 $m = \frac{1}{5}n$, 求 $\frac{2n}{m+2n} + \frac{m}{2n-m} + \frac{4mn}{4n^2-m^2}$ 的值.

3. 用两种方法计算 $(\frac{3x}{x-2} - \frac{x}{x+2}) \cdot \frac{x^2-4}{x}$.

问题解决

4. 某蓄水池装有 A, B 两根进水管, 每小时可分别进水 a t, b t. 若单独开放 A 进水管, p h 可将该水池注满. 如果 A, B 两根水管同时开放, 那么能提前多长时间将该蓄水池注满?

联系拓广

※5. 有一杯糖水的含糖量为 $\frac{a}{b}$ ($a < b$), 往杯中加入 c ($c > 0$) 克糖, 经验告诉我们现在糖水的含糖量比原来高了, 你能用所学的数学知识解释其中的道理吗?

4 分式方程

甲、乙两地相距 1 400 km, 从甲地到乙地乘高铁列车比乘特快列车少用 9 h, 已知高铁列车的平均行驶速度是特快列车的 2.8 倍.



(1) 你能找出这一问题中的所有等量关系吗?

(2) 如果设特快列车的平均行驶速度为 x km/h, 请列出关于 x 的方程.

(3) 如果设小明乘高铁列车从甲地到乙地需 y h, 请列出关于 y 的方程.

做一做

为了帮助遭受自然灾害的地区重建家园, 某学校号召同学们自愿捐款. 已知七年级同学捐款总额为 4 800 元, 八年级同学捐款总额为 5 000 元, 八年级捐款人数比七年级多 20 人, 而且两个年级人均捐款额恰好相等. 如果设七年级捐款人数为 x 人, 请列出关于 x 的方程.

议一议

由上面的问题, 你得到了哪些方程? 下列方程有什么共同特点?

$$\frac{1\ 400}{x} - \frac{1\ 400}{2.8x} = 9, \quad \frac{1\ 400}{y} = 2.8 \times \frac{1\ 400}{y + 9}, \quad \frac{4\ 800}{x} = \frac{5\ 000}{x + 20}.$$

分母中含有未知数的方程叫做分式方程 (fractional equation).

随堂练习

1. 据联合国《2010年世界投资报告》指出，中国2009年吸收外国投资额为950亿美元，比上一年减少了12%。设2008年我国吸收外国投资额为 x 亿美元，请列出关于 x 的方程。你能列出几个方程？其中哪些是分式方程？
2. “退耕还林还草”是在我国西部地区实施的一项重要生态工程。某地规划退耕面积共69 000公顷，退耕还林与退耕还草的面积比为5:3。设退耕还林的面积为 x 公顷，请列出关于 x 的分式方程。

习题 2.8

问题解决

1. 有两块面积相同的小麦试验田，第一块使用原品种，第二块使用新品种，分别收获小麦12 000 kg和14 000 kg，已知第一块试验田每公顷的产量比第二块少1 500 kg。如果设第一块试验田每公顷的产量为 x kg，请列出关于 x 的分式方程。
2. 某运输公司需要装运一批货物，由于机械设备没有及时到位，只好先用人工装运，6 h完成了一半任务；后来机械装运和人工装运同时进行，1 h完成了另一半任务。如果设单独采用机械装运 x h可以完成后一半任务，请列出关于 x 的分式方程。
3. 从甲地到乙地有两条公路：一条是全长600 km的普通公路，另一条是全长450 km的高速公路。某客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快30 km/h，从甲地到乙地由高速公路所需的时间是由普通公路所需时间的一半。如果设该客车从甲地到乙地由高速公路所需的时间为 x h，请列出关于 x 的分式方程。

还记得什么是方程的解吗？你能设法求出上一节课列出的分式方程

$$\frac{1\,400}{x} - \frac{1\,400}{2.8x} = 9$$
的解吗？

例 1 解方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x}$.

解：方程两边都乘 $x(x-2)$ ，得

$$x = 3(x-2).$$

解这个方程，得 $x = 3$.

检验：将 $x = 3$ 代入原方程的两边，

左边 = 1，右边 = 1.

因为 左边 = 右边，

所以， $x = 3$ 是原方程的根.

化成一元一次
方程来求解.



一般地，解分式方程时，先将方程两边同乘一个适当的整式（通常是各分式的最简公分母），约去分母，从而转化成整式方程，然后再解这个整式方程.

议一议

在解方程 $\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} - 2$ 时，小亮的解法如下：



方程两边都乘 $x-2$ ，得

$$1-x = -1-2(x-2).$$

解这个方程，得

$$x = 2.$$

你认为 $x = 2$ 是原方程的根吗？与同伴交流.

在这里， $x = 2$ 不是原方程的根，因为它使得原分式方程中分式的分母的值为零. 像这样，在方程变形中如果产生了不适合原方程的根，那么我们称它为原方程的增根.

上面的解法中，产生增根的原因是，我们在方程的两边同乘了一个整式 $x-2$ ，而解得的 $x = 2$ 恰好使这个整式的值为零.

因为解分式方程可能产生增根，所以解分式方程必须检验. 为了简便，通常只需检验所得的根是否使原方程中分式的分母的值等于零就可以了. 如果所得到的是原方程的增根，应当舍去.

例2 解方程： $\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$.

解：方程两边都乘 $x^2 - 1$ ，得

$$x + 1 = 2x.$$

解这个方程，得 $x = 1$.

检验：当 $x = 1$ 时，原方程中分式 $\frac{1}{x-1}$ 和 $\frac{2x}{x^2-1}$ 的分母的值为零，

所以 $x = 1$ 是原方程的增根，应舍去.

因此，原方程无解.



想一想

解分式方程一般需要经过哪些步骤？



随堂练习

1. 解方程：

$$(1) \frac{3}{x-1} = \frac{4}{x};$$

$$(2) \frac{x}{2x-3} + \frac{5}{3-2x} = 4.$$

2. 解上一节课“做一做”中所列的分式方程.



习题 2.9



知识技能

1. 解方程：

$$(1) \frac{6}{x+1} = \frac{x+5}{x(x+1)};$$

$$(2) \frac{3-x}{x-4} + \frac{1}{4-x} = 1;$$

$$(3) \frac{y-2}{y-3} = 2 - \frac{1}{3-y};$$

$$(4) \frac{x-1}{2x-1} = \frac{2-3x}{1-2x}.$$

数学理解

2. 小明解方程 $\frac{x-2}{2x-1} + 1 = \frac{1.5}{1-2x}$ 的过程如下:

方程两边都乘 $2x-1$, 得 $x-2+(2x-1)=-1.5$.

解这个方程, 得 $x = \frac{1}{2}$.

所以 $x = \frac{1}{2}$ 是原方程的根.

你认为小明的解法对吗? 为什么?

问题解决

利用分式方程解决下列问题 (第3—4题):

3. 某市为治理污水, 需要铺设一段全长为 3 000 m 的污水排放管道. 为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响, 实际施工时每天的工效比原计划增加 25%, 结果提前 30 天完成这一任务. 实际每天铺设多长管道?
4. 某质检部门抽取甲、乙两厂相同数量的产品进行质量检测, 结果甲厂有 48 件合格产品, 乙厂有 45 件合格产品, 甲厂的合格率比乙厂高 5%, 求甲厂的合格率.

做一做

某单位将沿街的一部分房屋出租, 每间房屋的租金相同. 已知每间房屋的租金第二年比第一年多 500 元, 所有房屋出租的租金第一年为 9.6 万元, 第二年为 10.2 万元.

- (1) 你能找出这一情境中的等量关系吗?
- (2) 根据这一情境你能提出哪些问题?
- (3) 你能利用方程求出这两年每间房屋的租金各是多少吗?

例 3 某市从今年 1 月 1 日起调整居民用水价格, 每立方米水费上涨原价的 $\frac{1}{3}$. 小丽家去年 12 月份的水费是 14.7 元, 而今年 7 月份的水费则是 28 元. 已知小丽家今年 7 月份的用水量比去年 12 月份的用水量多 3 米³, 求该市今年居民用水的价格.

分析：此题的主要等量关系是：

小丽家今年7月份的用水量 - 小丽家去年12月份的用水量 = 3 米³.

所以，首先要表示出小丽家这两个月的用水量，而用水量可以用水费除以水的单价得出.

解：设该市去年居民用水的价格为 x 元/米³，则今年的价格为 $(1 + \frac{1}{3})x$ 元/米³，根据题意，得

$$\frac{28}{(1 + \frac{1}{3})x} - \frac{14.7}{x} = 3.$$

解这个方程，得

$$x = 2.1.$$

经检验， $x = 2.1$ 是所列方程的根.

$$2.1 \times (1 + \frac{1}{3}) = 2.8 \text{ (元/米}^3\text{)}.$$

所以，该市今年居民用水的价格为 2.8 元/米³.

随堂练习

小明和同学一起去书店买书，他们先用 15 元买了一种科普书若干本，又用 15 元买了一种文学书若干本. 科普书的价格比文学书高出一半，因此他们所买的科普书比所买的文学书少 1 本. 这种科普书和这种文学书的价格各是多少？

习题 2.10

问题解决

利用分式方程解决下列问题（第 1—3 题）：

1. 甲种原料与乙种原料的单价比为 2 : 3，将价值 2 000 元的甲种原料与价值 1 000 元的乙种原料混合后，单价为 9 元，求甲种原料的单价.
2. 某商店销售一批服装，每件售价 150 元，可获利 25%. 求这种服装的成本价.
3. 某商店甲种糖果的售价为 20 元/千克，乙种糖果的售价为 16 元/千克. 为了促销，现将 10 千克乙种糖果和一包甲种糖果混合后（搅匀）销售，如果将混合后的糖果按 17.5 元/千克销售，那么混合销售与分开销售的销售额相同. 这包甲种糖果有多少千克？

例 4 一艘轮船顺水航行 40 km 所用的时间与逆水航行 30 km 所用的时间相同, 若水流速度为 3 km/h, 求轮船在静水中的速度.

解: 设轮船在静水中的速度为 x km/h, 则顺水航行的速度为 $(x+3)$ km/h, 逆水航行的速度为 $(x-3)$ km/h. 根据题意, 得

$$\frac{40}{x+3} = \frac{30}{x-3}.$$

解这个方程, 得

$$x = 21.$$

经检验, $x = 21$ 是所列方程的根.

所以, 轮船在静水中的速度是 21 km/h.



例 5 甲、乙两人都要走 3 km 的路, 甲的速度是乙的速度的 1.2 倍, 甲比乙少用 0.1 h. 甲、乙两人的速度各是多少?

解: 设乙的速度是 x km/h, 则甲的速度是 $1.2x$ km/h.

根据题意, 得

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{1.2x} = 0.1.$$

解这个方程, 得

$$x = 5.$$

经检验, $x = 5$ 是所列方程的根.

$$1.2x = 1.2 \times 5 = 6 \text{ (km/h)}.$$

所以, 甲、乙两人的速度分别是 6 km/h 和 5 km/h.

随堂练习

1. 甲、乙两个植树队参加植树造林活动. 已知甲队每小时比乙队少种 3 棵树. 甲队种 60 棵树与乙队种 66 棵树所用的时间相同. 甲、乙两队每小时各种多少棵树?
2. 八年级一班的团员人数与非团员人数之比为 2 : 1, 后来又有 5 名同学加入团组织, 班内的团员人数与非团员人数之比变为 7 : 2. 求原来班内团员人数.

习题 2.11

问题解决

利用分式方程解决下列问题（第1—3题）：

1. 甲、乙两个火车站相距 720 km，火车提速后，行驶速度是原来速度的 1.2 倍，从甲站到乙站的时间缩短 1.2 h，求火车原来的速度.
2. 小李做 90 个零件与小王做 120 个零件所用的时间相同，他俩每小时一共做 35 个零件. 小李、小王每小时各做多少个零件？
3. 某农场原有水田 400 公顷，旱田 150 公顷，为了提高产量，准备将部分旱田改为水田，改完之后，旱田的面积占水田面积的 10%. 应当把多少公顷旱田改为水田？

回顾与思考

1. 实际生活中的一些量可以用分式表示，一些问题可以通过列分式方程解决，请举一例.
2. 分式的基本性质及有关运算法则与分数有什么异同？分式的基本性质有哪些方面的应用？请举例说明.
3. 如何解分式方程？它与解一元一次方程有何联系与区别？
4. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 化简下列分式：

$$(1) \frac{-2ac^2}{14a^2bc};$$

$$(2) \frac{4-a^2}{a^2-2a};$$

$$(3) \frac{x^2-16}{2x+8}.$$

2. 计算:

$$(1) \frac{5x}{y} \cdot \frac{y}{15x^2}; \quad (2) \frac{2a^2b}{x} \div (-2bx); \quad (3) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x};$$

$$(4) \frac{c}{ab} - \frac{a}{bc}; \quad (5) \frac{a}{a^2-1} + \frac{3a+1}{a^2-1} + \frac{2a+3}{1-a^2}.$$

3. 先化简, 再求值:

$$(1) \frac{x^2-16}{8-2x}, \text{ 其中 } x = -2;$$

$$(2) \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}, \text{ 其中 } x = 110, y = 10.$$

4. 解方程:

$$(1) \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}; \quad (2) \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{x-1}{x-2}; \quad (3) \frac{2-x}{3+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x+3}.$$

※5. (1) 已知 $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$, 求 $\frac{m}{m+n} + \frac{m}{m-n} - \frac{n^2}{m^2-n^2}$ 的值;

(2) 已知 $x + \frac{1}{x} = 2$, 求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值;

(3) 已知 $\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, 求实数 A, B .

数学理解

6. 当 x 分别为何值时, 下列分式有意义?

$$(1) \frac{x+1}{1-x}; \quad (2) \frac{2x}{(1-x)^2}; \quad (3) \frac{ax}{x}.$$

7. “因为 $\frac{x^2}{x} = x$, 而 x 取任意实数 x 都有意义, 所以使分式 $\frac{x^2}{x}$ 有意义的条件是 x 为任意实数.” 你认为这种说法对吗? 为什么?

8. 分式 $\frac{a-b}{a+1}$ 的值为零时, 实数 a, b 应满足什么条件?

问题解决

9. (1) 如果某商品降价 $x\%$ 后的售价为 a 元, 那么该商品的原价为多少元?

(2) 某人打靶, 有 m 次打中 a 环, 有 n 次打中 b 环, 求此人平均每次中靶的环数.

利用分式方程解决下列问题(第10—12题):

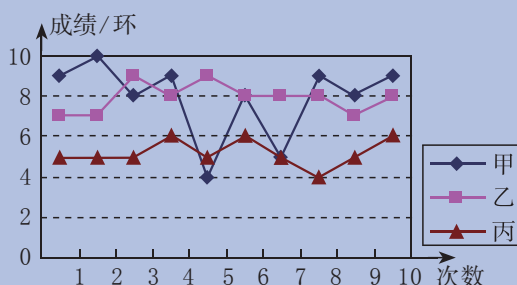
10. 甲、乙两地相距 360 km, 新修的高速公路开通后, 在甲、乙两地间行驶的长途客车平均车速提高了 50%, 而从甲地到乙地的时间缩短了 2 h. 试确定长途客车原来的平均车速.
11. 八年级一班学生周末乘汽车到游览区游览, 游览区距学校 120 km. 一部分学生乘慢车先行, 出发 20 min 后, 另一部分学生乘快车前往, 结果他们同时到达游览区. 已知快车的速度是慢车速度的 1.2 倍, 求慢车的速度.
12. 某车间加工 1 300 个零件后, 采用了新工艺, 工效提升了 30%, 这样加工同样多的零件就少用 10 h. 采用新工艺前、后每小时分别加工多少个零件?
13. 一个批发兼零售的文具店规定: 凡一次购买铅笔 300 支以上(不包括 300 支), 可以按批发价付款; 购买 300 支以下(包括 300 支)只能按零售价付款. 小明来该店购买铅笔, 如果给学校八年级学生每人购买 1 支, 那么只能按零售价付款, 需用 120 元; 如果多购买 60 支, 那么可以按批发价付款, 同样需用 120 元.
- (1) 这个学校八年级的学生总数在什么范围内?
- (2) 若按批发价购买 6 支与按零售价购买 5 支所付款相同, 那么这个学校八年级学生有多少人?
14. 某商厦进货员预测一种应季衬衫能畅销市场, 就用 8 万元购进这种衬衫, 面市后果然供不应求. 商厦又用 17.6 万元购进了第二批这种衬衫, 所购数量是第一批购进量的 2 倍, 但单价贵了 4 元. 商厦销售这种衬衫时每件定价都是 58 元, 最后剩下 150 件按八折销售, 很快售完. 在这两笔生意中, 商厦共赢利多少元?

联系拓广

- ※15. 某人沿一条河顺流游泳 l m, 然后逆流游回出发点, 设此人在静水中的游泳速度为 x m/s, 水流速度为 n m/s.
- (1) 求他来回一趟所需的时间 t ; (2) 用 t, x, n 的代数式表示 l .
- ※16. 某商品的标价比成本高 $p\%$, 当该商品降价出售时, 为了不亏本, 降价幅度最多为 $d\%$, 请用 p 表示 d .
- ※17. 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料. 两次饲料的价格有变化, 两位采购员的购货方式也不同, 其中, 甲每次购买 1 000 千克, 乙每次用去 800 元, 而不管购买多少饲料. 设两次购买的饲料单价分别为 m 元/千克和 n 元/千克 (m, n 是正数, 且 $m \neq n$), 那么甲、乙所购饲料的平均单价各是多少? 哪一个较低?

第三章 数据的分析

生活中，人们离不开数据，我们不仅要收集、整理和表示数据，还需要对数据进行分析，进而帮助我们更好地作出判断。



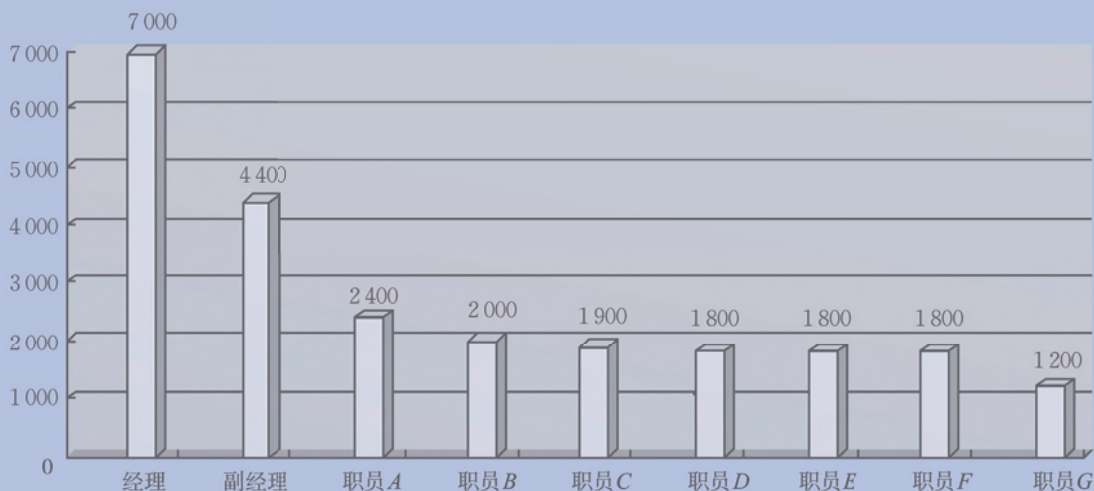
甲、乙、丙三人的射击成绩如图所示，谁的成绩更好？谁更稳定？你是怎么判断的？

除了直观感觉外，我们如何用量化的数据来刻画“更好”“更稳定”呢？类似地，在生活中我们还常听到“小亮的身高在班上中等偏上的”“A 篮球队队员比 B 队更年轻”……你思考过这些话的含义吗？你知道人们是如何作出这一判断的吗？

数学上，我们常借助平均数、中位数、众数、方差等来对数据进行分析 and 刻画。

学习目标

- 经历数据收集、整理、分析等活动过程，形成用数据说话的习惯
- 能根据实际需要，选择恰当的方法分析数据，解决问题
- 会计算一组数据的平均数、中位数、众数、方差等，在实际背景中体会它们的含义



1 平均数

在篮球比赛中，队员的身高、年龄都是影响球队实力的重要因素，如何衡量两个球队队员的身高？怎样理解“甲队队员的身高比乙队队员更高”？怎样理解“甲队队员比乙队队员更年轻”？

中国男子篮球职业联赛 2011—2012 赛季冠亚军球队队员身高、年龄如下：

冠军队			亚军队		
号码	身高/cm	年龄/岁	号码	身高/cm	年龄/岁
3	188	35	3	205	31
6	175	28	5	206	21
7	190	27	6	188	23
8	188	22	7	196	29
9	196	22	8	201	29
10	206	22	9	211	25
12	195	29	10	190	23
13	209	22	11	206	23
20	204	19	12	212	23
21	185	23	20	203	22
25	204	23	22	216	22
31	195	28	30	180	19
32	211	26	32	207	21
51	202	26	0	183	27
55	227	29			

上述两支篮球队中，哪支球队队员的身高更高？哪支球队的队员更为年轻？你是怎样判断的？与同伴交流.

在日常生活中，我们常用平均数表示一组数据的“平均水平”。

一般地，对于 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n ，我们把 $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 叫做这 n 个数的算术平均数 (mean)，简称平均数，记为 \bar{x} 。

本章数据可能比较复杂，别忘了使用计算器！

想一想

小明是这样计算冠军队队员的平均年龄的：

年龄/岁	19	22	23	26	27	28	29	35
相应的队员数	1	4	2	2	1	2	2	1

$$\begin{aligned} \text{平均年龄} &= (19 \times 1 + 22 \times 4 + 23 \times 2 + 26 \times 2 + 27 \times 1 + 28 \times 2 + 29 \times 2 \\ &\quad + 35 \times 1) \div (1 + 4 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1) \\ &= 25.4 \text{ (岁)}. \end{aligned}$$

你认为小明这样做对吗？试说明理由。

例 某广告公司欲招聘广告策划人员一名，对 A, B, C 三名候选人进行了三项素质测试。他们的各项测试成绩如下表所示：

成绩 项目	候选人			
		A	B	C
创 新		72	85	67
综合知识		50	74	70
语 言		88	45	67

(1) 如果根据三项测试的平均成绩确定录用人选，那么谁将被录用？

(2) 根据实际需要，公司将创新、综合知识和语言三项测试得分按 $4:3:1$ 的比例确定各人的测试成绩，此时谁将被录用？

解：(1) A 的平均成绩为 $\frac{1}{3}(72 + 50 + 88) = 70$ (分)。

B 的平均成绩为 $\frac{1}{3}(85 + 74 + 45) = 68$ (分)。

C 的平均成绩为 $\frac{1}{3}(67 + 70 + 67) = 68$ (分)。

因此候选人 A 将被录用。

(2) 根据题意, 三人的测试成绩如下:

$$A \text{ 的测试成绩为 } \frac{72 \times 4 + 50 \times 3 + 88 \times 1}{4 + 3 + 1} = 65.75 \text{ (分)}.$$

$$B \text{ 的测试成绩为 } \frac{85 \times 4 + 74 \times 3 + 45 \times 1}{4 + 3 + 1} = 75.875 \text{ (分)}.$$

$$C \text{ 的测试成绩为 } \frac{67 \times 4 + 70 \times 3 + 67 \times 1}{4 + 3 + 1} = 68.125 \text{ (分)}.$$

因此候选人 B 将被录用.

(1) (2)
的结果不一样说明了什么?

实际问题中, 一组数据里的各个数据的“重要程度”未必相同. 因而, 在计算这组数据的平均数时, 往往给每个数据一个“权”. 例如, 在例题中 4, 3, 1 分别是创新、综合知识、语言三项测试成绩的权, 而称 $\frac{72 \times 4 + 50 \times 3 + 88 \times 1}{4 + 3 + 1}$ 为 A 的三项测试成绩的**加权平均数** (weighted mean).

随堂练习

1. 某次体操比赛, 六位评委对某选手的打分 (单位: 分) 如下:

9.5, 9.3, 9.1, 9.5, 9.4, 9.3.

(1) 求这六个分数的平均分;

(2) 如果规定: 去掉一个最高分和一个最低分, 余下分数的平均值作为选手的最后得分, 那么该选手的最后得分是多少?

2. 某校规定学生的体育成绩由三部分组成: 早锻炼及体育课外活动表现占成绩的 20%, 体育理论测试占 30%, 体育技能测试占 50%. 小颖的上述三项成绩依次是: 92 分, 80 分, 84 分, 则小颖这学期的体育成绩是多少?

习题 3.1

知识技能

1. 某灯泡厂为了测定本厂生产的灯泡的使用寿命 (单位: h), 从中抽查了 400 只灯泡, 测得它们的使用寿命如下:

使用寿命/h	500 ~ 600	600 ~ 700	700 ~ 800	800 ~ 900	900 ~ 1 000	1 000 ~ 1 100
灯泡数/只	21	79	108	92	76	24

为了计算方便，把使用寿命介于 500 h 到 600 h 之间的灯泡的使用寿命均近似地看做 550 h……把使用寿命介于 1 000 h 与 1 100 h 之间的灯泡的使用寿命均近似地看做 1 050 h，这 400 只灯泡的平均使用寿命约是多少？

2. 八年级一班有学生 50 人，二班有学生 45 人，期末数学测试中，一班学生的平均分为 81.5 分，二班学生的平均分为 83.4 分，这两个班 95 名学生的平均分是多少？

数学理解

3. 某条小河平均水深 1.3 m，一个身高 1.6 m 的小孩在这条河里游泳是否一定没有危险？

问题解决

4. 为考察甲、乙两种农作物的长势，研究人员分别抽取了 10 株苗，测得它们的高度（单位：cm）如下：

甲：9, 14, 11, 12, 9, 13, 10, 8, 12, 8；

乙：8, 13, 12, 11, 9, 12, 7, 7, 9, 11.

你认为哪种农作物长得高一些？说明理由.

5. 抽样调查了 20 名同学的打字速度（字/分），结果如下：

15, 18, 10, 32, 8, 12, 13, 17, 9, 9,

27, 18, 4, 6, 11, 14, 16, 21, 25, 12.

求这 20 人打字的平均速度. 你可以尝试用计算器解决.

某学校进行广播操比赛，比赛打分包括以下几项：服装统一、进退场有序、动作规范、动作整齐（每项满分 10 分）.

其中三个班级的成绩分别如下：

	服装统一	进退场有序	动作规范	动作整齐
一班	9	8	9	8
二班	10	9	7	8
三班	8	9	8	9

(1) 若将服装统一、进退场有序、动作规范、动作整齐这四项得分依次按 10%, 20%, 30%, 40% 的比例计算各班的广播操比赛成绩, 那么哪个班的成绩最高?

(2) 你认为上述四项中, 哪一项更为重要? 请你按自己的想法设计一个评分方案. 根据你的评分方案, 哪一个班的广播操比赛成绩最高? 与同伴进行交流.

议一议

小明骑自行车的速度是 15 km/h, 步行的速度是 5 km/h.

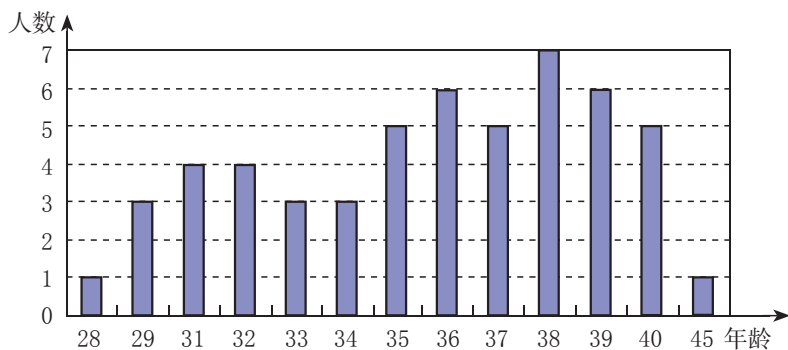
(1) 如果小明先骑自行车 1 h, 然后又步行了 1 h, 那么他的平均速度是多少?

(2) 如果小明先骑自行车 2 h, 然后步行了 3 h, 那么他的平均速度是多少? 你能从“权”的角度来理解这样的平均速度吗?

(3) 举出生活中加权平均数的几个实例, 与同伴进行交流.

随堂练习

1. 菲尔兹奖是数学领域的一项国际大奖, 每四年颁发一次, 从 1936 年到 2010 年共有 53 人获奖, 获奖者获奖时的年龄分布如下, 请计算获奖者的平均获奖年龄.



(第 1 题)

2. 面试时, 某人的基本知识、表达能力、工作态度的得分分别是 80, 70, 85, 若依次按 30%, 30%, 40% 的比例确定成绩, 则这个人的面试成绩是多少?

习题 3.2

知识技能

1. 在 A, B, C, D 四块试验田进行水稻新品种种植试验, 各块试验田的面积和所种水稻的单位产量如下表:

	A	B	C	D
单位产量 / (kg/hm^2)	8 250	7 875	7 125	6 375
面积 / hm^2	4	3	1	2

则四块试验田中水稻的平均单位产量是多少?

2. 在学校内随机调查 50 名男同学所穿运动鞋的尺码, 计算它们的平均数.

数学理解

- ※3. 某年级共有 4 个班, 各班学生的平均身高分别为 1.65 m, 1.63 m, 1.65 m, 1.66 m, 你能估计出该年级学生平均身高的范围吗? 你能具体计算出该年级学生的平均身高吗?
- ※4. 八年级一班共有学生 46 人, 学生的平均身高是 1.58 m, 小明身高 1.59 m, 但小明说他的身高在全班是中等偏下的, 班上有 25 位同学比他高, 20 位同学比他矮, 这可能吗?

问题解决

5. 某公司欲招收职员一名, 从学历、经验和工作态度等三个方面对甲、乙、丙三名应聘者进行了初步测试, 测试成绩如下表:

成绩 项目	应聘者		
	甲	乙	丙
学历	7	9	8
经验	8	7	7
工作态度	6	8	5

如果将学历、经验和工作态度三项得分按 1:2:2 的比例确定各人的最终得分, 并以此为依据确定录用者, 那么谁将被录用?

6. 某学校对各个班级的教室卫生情况的考查包括以下几项: 黑板、门窗、桌椅、地面. 一天, 三个班级的各项卫生成绩分别如下:

成绩 班级	项目			
	黑板	门窗	桌椅	地面
一班	95	90	90	85
二班	90	95	85	90
三班	85	90	95	90

- (1) 小明将黑板、门窗、桌椅、地面这四项得分依次按 15%，10%，35%，40% 的比例计算各班的卫生成绩，那么哪个班的卫生成绩最高？
- (2) 你认为上述四项中，哪一项更为重要？请你按自己的想法设计一个评分方案。根据你的评分方案，哪一个班的卫生成绩最高？

2 中位数与众数

某公司员工的月工资如下：

员 工	经理	副经理	职员 A	职员 B	职员 C	职员 D	职员 E	职员 F	职员 G
月工资 / 元	7 000	4 400	2 400	2 000	1 900	1 800	1 800	1 800	1 200



我们公司员工收入很高，月平均工资为 2 700 元。

我的工资是 1 900 元，在公司算中等收入。



我们好几个人工资都是 1 800 元。



这个公司员工收入到底怎样呢？



你怎样看待该公司员工的收入？

经理、职员 C、职员 D 从不同的角度描述了该公司员工的收入情况.

月平均工资 2 700 元, 指所有员工工资的平均数是 2 700 元, 说明公司每月将支付工资总计 $2\,700 \times 9 = 24\,300$ (元).

职员 C 的工资 1 900 元, 恰好居于所有员工工资的“正中间”(恰有 4 人的工资比他高, 有 4 人的工资比他低), 我们称它为中位数.

9 个员工中有 3 个人的工资为 1 800 元, 出现的次数最多, 我们称它为众数.



议一议

- (1) 你认为用哪个数据表示该公司员工收入的“平均水平”更合适?
- (2) 为什么该公司员工收入的平均数比中位数高得多?

一般地, n 个数据按大小顺序排列, 处于最中间位置的一个数据 (或最中间两个数据的平均数) 叫做这组数据的**中位数** (median). 一组数据中出现次数最多的那个数据叫做这组数据的**众数** (mode). 如一组数据 1.5, 1.5, 1.6, 1.65, 1.7, 1.7, 1.75, 1.8 的中位数是 $\frac{1}{2}(1.65 + 1.7)$, 即 1.675; 众数是 1.5 和 1.7.



做一做

- (1) 中国男子篮球职业联赛 2011—2012 赛季冠军队队员身高的平均数、中位数和众数分别是多少?
- (2) 你课前所调查的 50 名男同学所穿运动鞋尺码的平均数、中位数和众数分别是多少? 你认为学校商店应多进哪种尺码的运动鞋?



议一议

平均数、中位数和众数有哪些特征?

平均数、中位数和众数都是描述数据集中趋势的统计量.

计算平均数时，所有数据都参加运算，它能充分地利用数据所提供的信息，因此在现实生活中较为常用，但它容易受极端值的影响。如体操比赛评分时，个别裁判不公正打分将直接影响运动员的成绩。为此一般先去掉一个最高分和一个最低分，然后求其余得分的平均数作为运动员的得分。

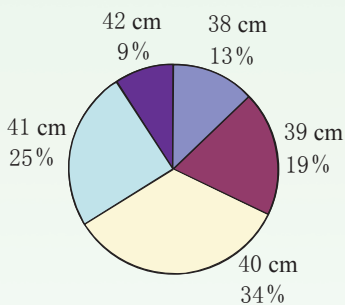
中位数的优点是计算简单，受极端值影响较小，但不能充分利用所有数据的信息。

一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往是人们尤为关心的一个量。如选举，就是选择名字出现次数最多的那个人，因而可以将当选者的名字当作“众数”。但各个数据的重复次数大致相等时，众数往往没有特别意义。

习题 3.3

知识技能

1. 某商店销售领口大小（单位：cm）分别为 38，39，40，41，42 的 5 种衬衫。为了调查各种领口大小衬衫的销售情况，商店统计了某周的销售情况，并绘制了如图所示的扇形统计图。你认为该商店应多进哪种领口大小的衬衫？



2. 两个人群的年龄如下（单位：岁）：

人群 A: 13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17;

人群 B: 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 54, 57.

(第 1 题)

- (1) 人群 A 年龄的平均数、中位数、众数分别是多少？你认为用哪一个数据可以较好地反映该人群年龄的集中趋势？
- (2) 人群 B 年龄的平均数、中位数、众数分别是多少？你认为用哪一个数据可以较好地反映该人群年龄的集中趋势？

数学理解

3. 中国男子篮球职业联赛 2011—2012 赛季亚军队队员的身高、年龄的平均数、中位数和众数分别是多少？你认为用平均数、中位数、众数中哪一个数据可以较好地反映亚军队队员身高的集中趋势？

问题解决

4. 一个小饭店所有员工的收入情况如下:

	经理	领班	迎宾	厨师	厨师助理	服务员	洗碗工
人数	1	2	2	2	3	8	2
收入/元	4 700	1 900	1 500	2 200	1 500	1 400	1 200

- (1) 该饭店所有员工的平均收入是多少元? 收入的中位数、众数呢?
- (2) 你认为用以上三个数据中的哪一个可以较好地反映该饭店员工收入水平的集中趋势? 说说你的理由;
- (3) 某天, 一个员工辞职了, 若其他员工的收入不变, 平均工资升高了. 你认为辞职的可能是哪个岗位上的员工呢?

3 从统计图分析数据的集中趋势

为了检查面包的质量是否达标, 随机抽取了同种规格的面包 10 个, 这 10 个面包的质量如图 3-1 所示.

这 10 个面包质量的众数是多少? 你能估计出一个这样的面包的平均质量吗? 你是怎么估计的?

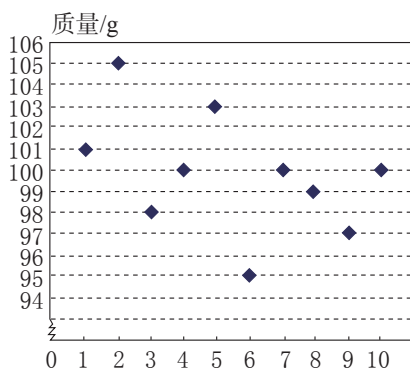


图 3-1

议一议

甲、乙、丙三支青年排球队各有 12 名队员, 三队队员的年龄情况如图 3-2 所示.

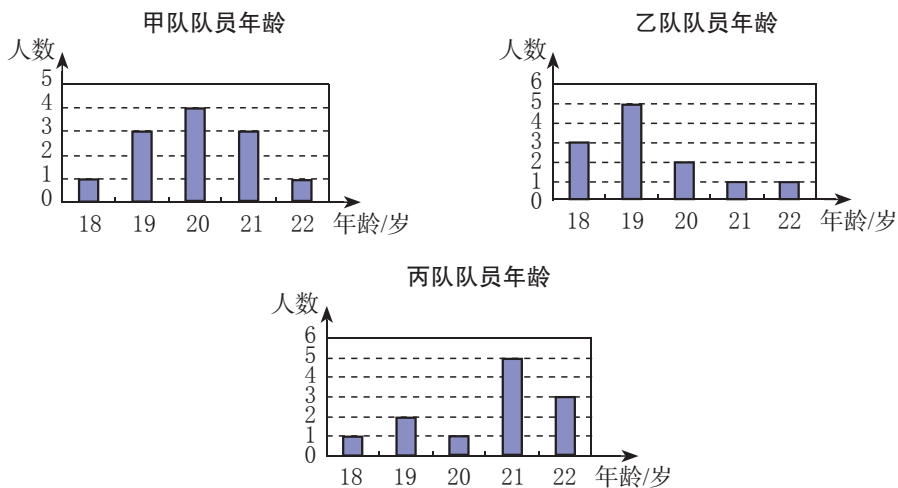


图 3-2

- (1) 观察图 3-2 中的三幅图，你能从图中分别看出三支球队队员年龄的众数吗？中位数呢？
- (2) 根据图 3-2 中的图，你能大致估计出三支球队队员的平均年龄哪个大、哪个小吗？你是怎么估计的？
- (3) 计算出三支球队队员的平均年龄，看看你的估计是否准确。

做一做

小明调查了班里 20 名同学本学期计划购买课外书的花费情况，并将结果绘制成了如图 3-3 所示的统计图。

- (1) 在这 20 名同学中，本学期计划购买课外书的花费的众数是多少？
- (2) 计算这 20 名同学计划购买课外书的平均花费是多少。你是怎么计算的？

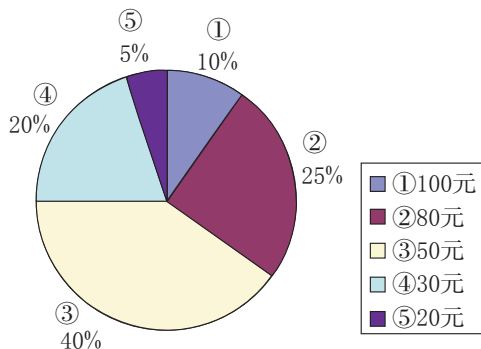


图 3-3

想一想

在上面的问题中，如果不知道调查的总人数，你还能求平均数吗？

例 某地连续 10 天高温，其中日最高气温与天数之间的关系如图 3-4 所示.

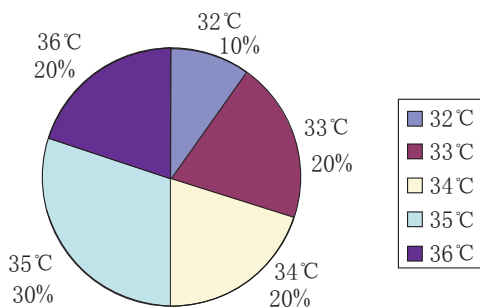


图 3-4

(1) 这 10 天中，日最高气温的众数是多少？

(2) 请计算这 10 天日最高气温的平均值.

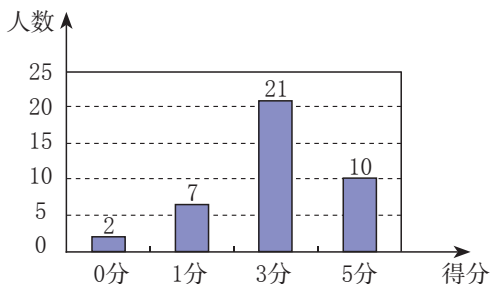
解：(1) 根据扇形统计图，35°C 的比重最大，日最高气温的众数是 35°C.

(2) 这 10 天日最高气温的平均值是 $32 \times 10\% + 33 \times 20\% + 34 \times 20\% + 35 \times 30\% + 36 \times 20\%$ ，即 34.3°C.

随堂练习

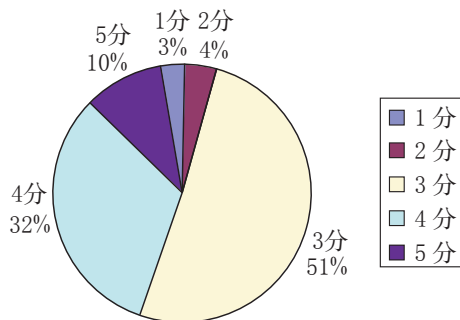
根据下列统计图，分别写出相应分数的平均数、中位数和众数.

某题（5分）的得分情况



(1)

学生给学校食堂的打分情况

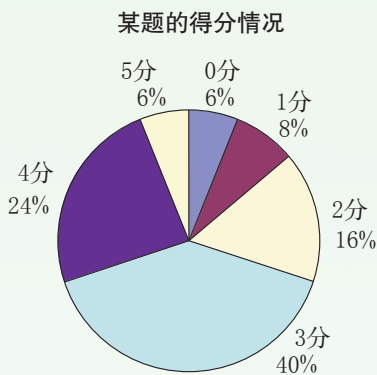


(2)

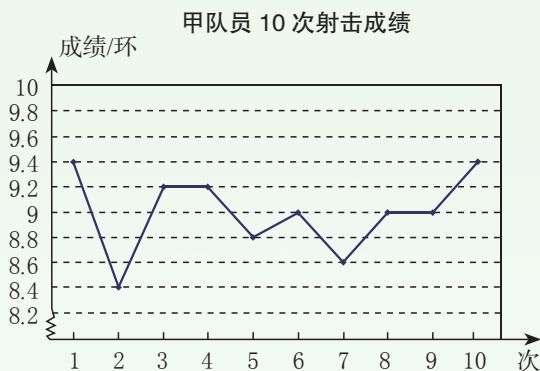
习题 3.4

知识技能

1. 光明中学八年级一班在一次测试中, 某题(满分为5分)的得分情况如图, 计算该题得分的众数、中位数和平均数.

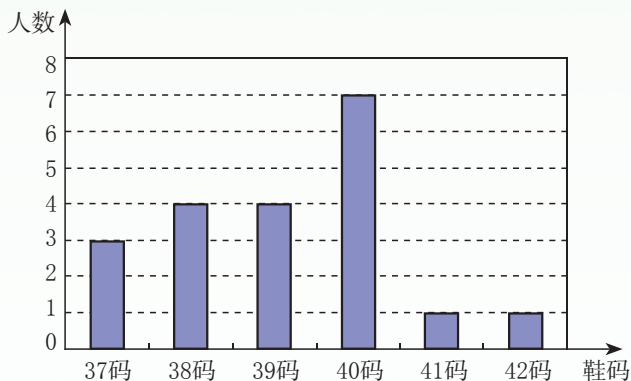


(第1题)



(第2题)

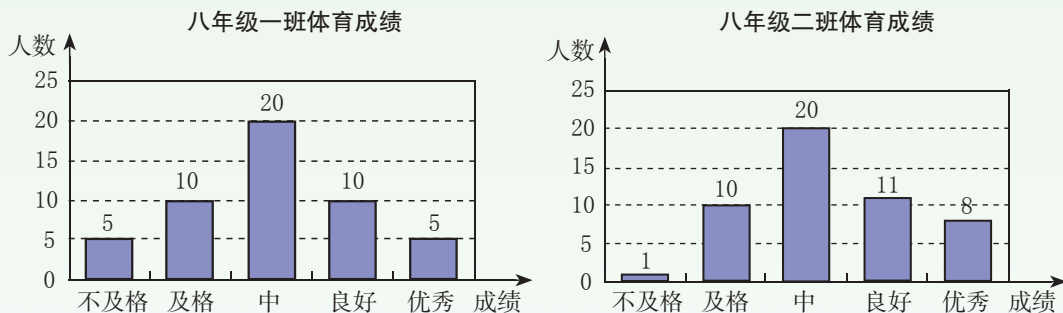
2. 某次射击比赛, 甲队员的成绩如图. 根据此统计图, 试求他的平均成绩.
3. 某鞋厂为了了解初中学生鞋子的鞋号情况, 对一中学八年级一班的 20 名男生所穿鞋号进行了调查, 结果如图.
- (1) 写出男生鞋号数据的平均数、中位数、众数;
- (2) 在平均数、中位数和众数中, 鞋厂最感兴趣的是哪一个?



(第3题)

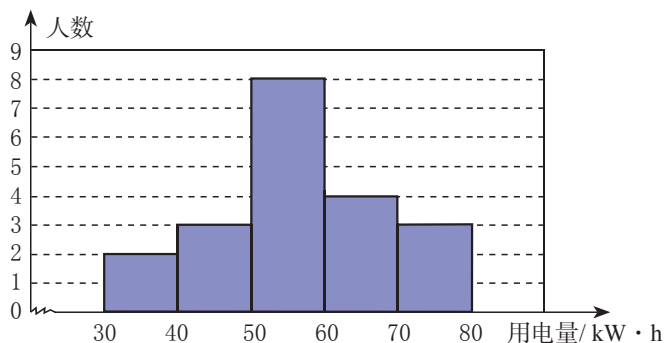
联系拓广

4. 下图反映了八年级两个班的体育成绩.



(第4题)

- (1) 不用计算, 根据条形统计图, 你能判断哪个班学生的体育成绩好一些吗?
 - (2) 你能从图中观察出各班学生体育成绩等级的“众数”吗?
 - (3) 如果依次将不及格、及格、中、良好、优秀记为 55 分、65 分、75 分、85 分、95 分, 先分别估算一下两个班学生体育成绩的平均值, 再算一算, 看看你估计的结果怎么样;
 - (4) 八年级一班学生体育成绩的平均数、中位数和众数有什么关系? 你能说说其中的理由吗?
5. 小明调查了班中 20 名同学某月的家庭用电量, 结果如图所示. 若把每组中各个用电数用这组数据的中间值代替 (如 30 ~ 40 kW·h 的中间值为 35 kW·h), 则这 20 名同学家该月的平均用电量是多少?



(第5题)

4 数据的离散程度

为了提高农副产品的国际竞争力，一些行业协会对农副产品的规格进行了划分。某外贸公司要出口一批规格为 75 g 的鸡腿，现有 2 个厂家提供货源，它们的价格相同，鸡腿的品质也相近。

质检员分别从甲、乙两厂的产品中抽样调查了 20 只鸡腿，它们的质量（单位：g）如下：

甲厂：75，74，74，76，73，76，75，77，77，74，

74，75，75，76，73，76，73，78，77，72；

乙厂：75，78，72，77，74，75，73，79，72，75，

80，71，76，77，73，78，71，76，73，75。

把这些数据表示成下图：

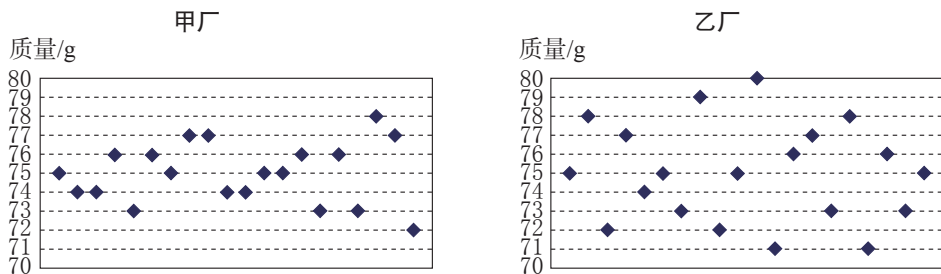


图 3-5

- (1) 你能从图 3-5 中估计出甲、乙两厂抽取的鸡腿的平均质量吗？
- (2) 从甲、乙两厂抽取的鸡腿的平均质量分别是多少？在上图中画出纵坐标等于平均质量的直线。
- (3) 从甲厂抽取的这 20 只鸡腿质量的最大值是多少？最小值又是多少？它们相差几克？乙厂呢？
- (4) 如果只考虑鸡腿的规格，你认为外贸公司应买哪个厂的鸡腿？

$(75 + 74 + 74 + 76 + 73 + 76 + 75 + 77 + 77 + 74 + 74 + 75 + 75 + 76 + 73 + 76 + 73 + 78 + 77 + 72) \div 20 = 75$.

各数值与 75 的差依次是

0, -1, -1, 1, -2, 1, 0, 2, 2, -1, -1, 0, 0, 1, -2, 1, -2, 3, 2, -3.

所以方差是

$$[0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2^2 + (-3)^2] \div 20 = 2.5.$$

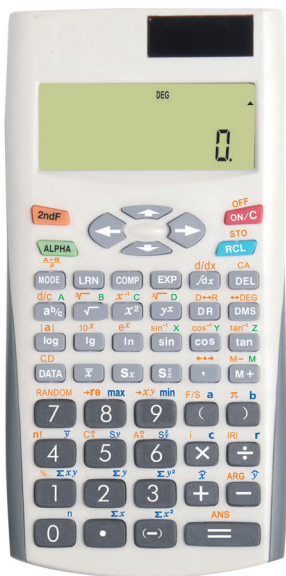
因此, 从甲厂抽取的 20 只鸡腿质量的方差是 2.5.

一般地, 用笔算的方式计算方差或标准差比较烦琐, 我们可以利用计算器的统计功能求标准差, 其大体步骤是: 进入统计计算状态, 输入数据, 按键得出标准差.

以图中所示的计算器为例, 按键 **MODE** **2** 即可进入统计计算状态.

请在你自己使用的计算器上探索计算标准差的具体操作步骤.

计算器一般不具有求方差的功能, 可以先求出标准差, 再平方, 即可求出方差.



随堂练习

1. 请用计算器计算丙厂抽取的 20 只鸡腿质量的方差, 结合例题, 说说甲、丙两厂哪家的产品更符合规格.
2. 甲、乙两支仪仗队队员的身高 (单位: cm) 如下:
甲队: 178, 177, 179, 179, 178, 178, 177, 178, 177, 179;
乙队: 178, 177, 179, 176, 178, 180, 180, 178, 176, 178.
哪支仪仗队更为整齐? 你是怎么判断的?

习题 3.5

知识技能

1. 某单位要买一批直径为 60 mm 的螺丝, 现有甲、乙两个螺丝加工厂, 它们生产的螺丝的材料相同, 价格也相同. 该单位分别从甲、乙两厂的产品中抽样调查了 20 个螺丝, 它们的直径 (单位: mm) 如下:

甲厂: 60, 59, 59.8, 59.7, 60.2, 60.3, 61, 60, 60, 60.5,
59.5, 60.3, 60.1, 60.2, 60, 59.9, 59.7, 59.8, 60, 60;

乙厂: 60.1, 60, 60, 60.2, 59.9, 60.1, 59.7, 59.9, 60, 60,
60, 60.1, 60.5, 60.4, 60, 59.6, 59.5, 59.9, 60.1, 60.

你认为该单位应买哪个厂的螺丝?

2. 甲、乙两台包装机同时分装质量为 400 g 的奶粉. 从它们分装的奶粉中各随机抽取了 10 袋, 测得它们的实际质量 (单位: g) 如下:

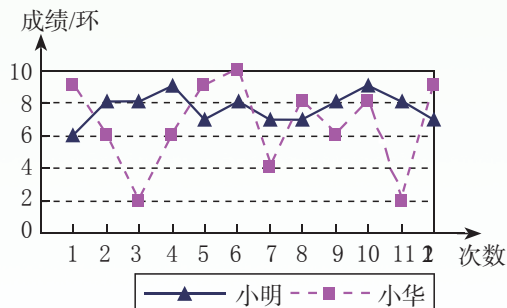
甲: 401, 400, 408, 406, 410, 409, 400, 393, 394, 394;

乙: 403, 404, 396, 399, 402, 401, 405, 397, 402, 399.

哪台包装机包装的奶粉质量比较稳定?

数学理解

3. 射箭时, 新手成绩通常不太稳定. 小明和小华练习射箭, 第一局 12 支箭射完后, 两人的成绩如图所示. 请根据图中信息估计小明和小华谁是新手, 并说明你这样估计的理由.



(第 3 题)

某日, A, B 两地的气温如图 3-7 所示.

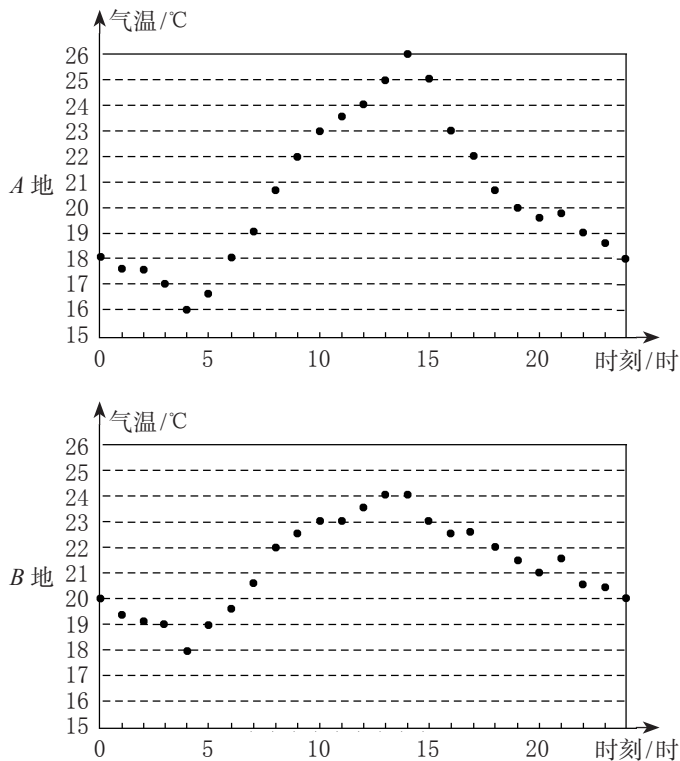


图 3-7

(1) 不计算, 说说 A, B 两地这一天气温的特点.

(2) 分别计算 A, B 两地这一天气温的平均数和方差, 与你刚才的看法一致吗?

议一议

某校要从甲、乙两名跳远运动员中挑选一人参加一项比赛. 在最近的 10 次选拔赛中, 他们的成绩 (单位: cm) 如下:

甲: 585, 596, 610, 598, 612, 597, 604, 600, 613, 601;

乙: 613, 618, 580, 574, 618, 593, 585, 590, 598, 624.

(1) 甲、乙的平均成绩分别是多少?

(2) 甲、乙这 10 次比赛成绩的方差分别是多少?

(3) 这两名运动员的运动成绩各有什么特点?

(4) 历届比赛成绩表明, 成绩达到 5.96 m 就很可能夺冠, 你认为为了夺

冠应选谁参加这项比赛？如果历届比赛成绩表明，成绩达到 6.10 m 就能打破记录，那么你认为为了打破记录应选谁参加这项比赛呢？

做一做

(1) 两人一组，在安静的环境中，一人估计 1 min 的时间，另一人记下实际时间，将结果记录下来。

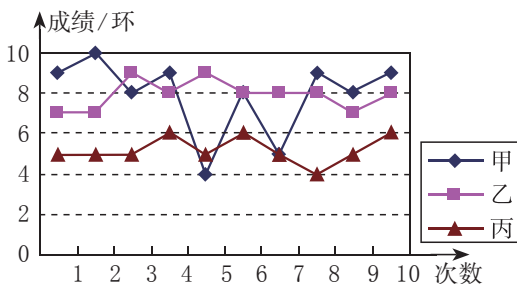
(2) 在嘈杂的环境中，再做一次这样的试验。

(3) 将全班的结果汇总起来，并分别计算安静状态和嘈杂环境下估计结果的平均值和方差。

(4) 两种情况下的结果是否一致？说说你的理由。

随堂练习

甲、乙、丙三人的射击成绩如图所示，三人中，谁射击成绩更好？谁更稳定？你是怎么判断的？



读一读

利用计算机分析数据

我们知道，利用 Microsoft Office 软件中的 Excel 可以很方便地制作统计图。其实，利用 Excel 同样可以很方便地求出平均数、中位数、众数和标准差等，进而更好地分析数据。下面以 Microsoft Office Excel 2003 举例说明其具体操作过程。

1. 打开 Excel，将本章第 2 节中提供的员工月工资依次输入 Excel 表中的第 1 列，一个数据占一格。输入完毕后，选中一个空白格作为给出答案的位置（如 C1），如图 3-8。

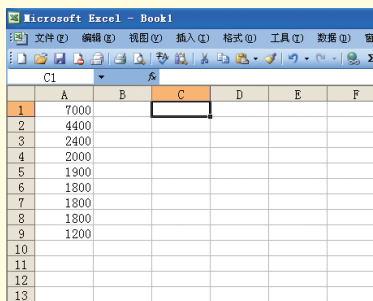


图 3-8

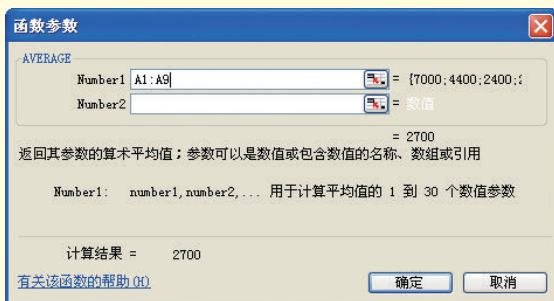


图 3-9

2. 在工具栏中，选择插入函数，然后在“选择类别”一栏中选中“统计”，并在“选择函数”一栏中选中“AVERAGE”，出现对话框如图 3-9。

因为求的是 A1 到 A9 中数据的平均数，只要在 Number1 中输入 A1:A9（或拖动鼠标选择 A1 到 A9），然后点击确定，即可在 C1 位置得到平均数，如图 3-10。

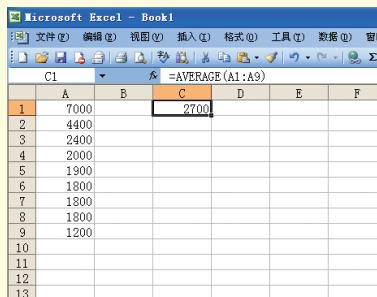


图 3-10

3. 若想得到这组数据的中位数（众数、方差或标准差），方法同上，只要在“选择函数”一栏中改选“MEDIAN”（“MODE”“VARP”或“STDEVP”），就可得到中位数（众数、方差或标准差）了。

习题 3.6

知识技能

1. 姚明在美国男子篮球职业联赛 2005—2006 赛季的常规赛中表现优异。下面是他在这个赛季中，分别与“超音速”和“快船”队各四场比赛中的技术统计。

场次	对阵“超音速”队			对阵“快船”队		
	得分	篮板	失误	得分	篮板	失误
第一场	22	10	2	25	17	2
第二场	29	10	2	29	15	0
第三场	24	14	2	17	12	4
第四场	26	10	5	22	7	2

- (1) 请分别计算姚明在对阵“超音速”和“快船”两队各四场比赛中，平均每场得分是多少；
- (2) 请你从得分的角度分析，姚明在与“超音速”和“快船”队的比赛中，对阵哪一个队的发挥比较稳定；
- (3) 如果规定“综合得分”为：平均每场得分 $\times 1$ +平均每场篮板 $\times 1.2$ +平均每场失误 $\times (-1)$ ，且综合得分越高表现越好，那么请你利用这种评价方法，比较姚明在与“超音速”和“快船”队的比赛中，对阵哪一个队时表现更好。

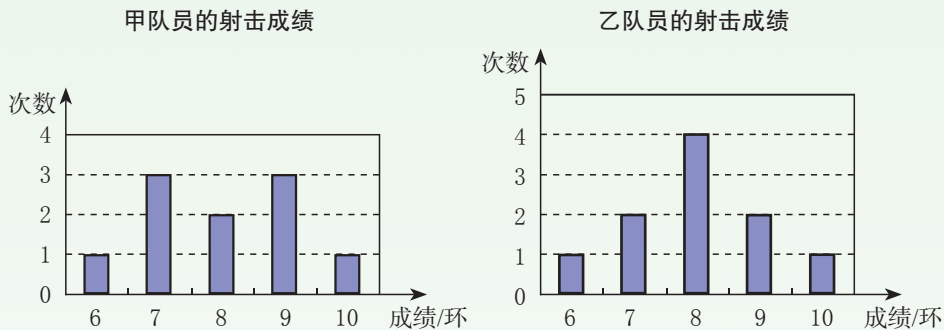
数学理解

2. 某校拟派一名跳高运动员参加一项校际比赛，对甲、乙两名跳高运动员进行了8次选拔比赛，他们的成绩（单位：m）分别如下：
- 甲：1.70, 1.65, 1.68, 1.69, 1.72, 1.73, 1.68, 1.67；
- 乙：1.60, 1.73, 1.72, 1.61, 1.62, 1.71, 1.70, 1.75.
- (1) 甲、乙两名运动员跳高的平均成绩分别是多少？
- (2) 谁的成绩更为稳定？
- (3) 经预测，跳高 1.65 m 就很可能获得冠军，该校为了获取跳高比赛的冠军，可能选哪位运动员参赛？若预测 1.70 m 方可夺得冠军呢？
3. 2012 年 8 月 6 日，我国选手吴敏霞、何姿分别获得伦敦奥运会女子三米板跳水冠军和亚军. 获得前 6 名的选手的决赛成绩如下：

姓名 \ 跳次	跳次				
	第一跳	第二跳	第三跳	第四跳	第五跳
吴敏霞（中国）	79.50	79.75	85.25	84.00	85.50
何姿（中国）	76.50	83.70	78.00	76.50	64.50
桑切斯·索托（墨西哥）	70.50	67.50	75.00	74.40	75.00
卡尼奥托（意大利）	76.50	69.00	68.20	72.00	76.50
斯特拉顿（澳大利亚）	70.50	67.50	66.65	69.00	72.00
阿贝尔（加拿大）	66.00	77.50	55.50	72.00	72.00

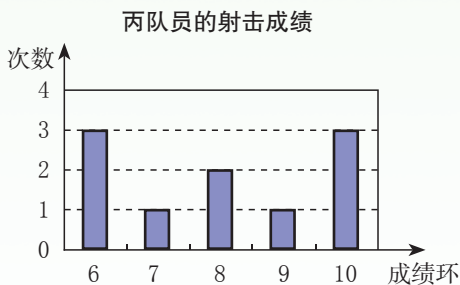
试计算各名选手 5 次跳水成绩的平均分和方差，并比较这 6 名选手的表现.

4. (1) 从下面两幅图中分别“读”出甲、乙两名队员射击成绩的平均数.



(第4(1)题)

- (2) 通过估计, 比较甲、乙两名队员射击成绩的方差的大小. 你是怎么估计的?
 (3) 分别计算甲、乙两名队员射击成绩的方差, 看看刚才自己的估计是否正确;
 (4) 如果丙队员的射击成绩如下, 三人射击成绩的方差谁的最大, 谁的最小?
 你是怎样判断的?



(第4(4)题)

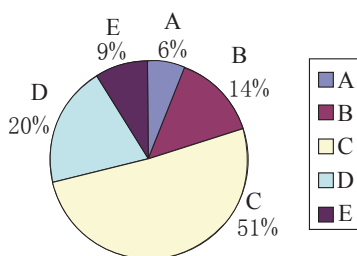
回顾与思考

1. 刻画数据集中趋势的统计量有哪些?
2. 举出生活中与平均数、中位数和众数有关的几个例子.
3. 平均数、中位数和众数各有什么特点? 举例说明.
4. 举出生活中与加权平均数有关的几个例子, 并说明算术平均数和加权平均数的区别与联系.
5. 刻画数据离散程度的统计量有哪些? 它们有什么作用? 举例说明.
6. 如何从统计图上直观地估计出相应的统计量? 举例说明.
7. 利用计算器怎样计算数据的平均数等统计量? 举例说明.
8. 用适当的方式梳理本章的知识, 并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

- 从一批零件毛坯中抽取 10 件，称得它们的质量（单位：g）如下：
400.0, 400.3, 401.2, 398.9, 399.8, 399.8, 400.0, 400.5, 399.7, 399.8.
求这 10 件零件的平均质量.
- 为了了解秦兵马俑的身高状况，某考古队随机调查了 36 尊秦兵马俑，它们的高度（单位：cm）如下：
172, 178, 181, 184, 184, 187, 187, 190, 190, 175, 181, 181,
184, 184, 187, 187, 190, 193, 178, 181, 181, 184, 187, 187,
187, 190, 193, 178, 181, 184, 184, 187, 187, 190, 190, 196.
(1) 这 36 尊秦兵马俑高度的平均数、中位数和众数分别是多少？
(2) 你能据此估计出秦兵马俑的平均高度吗？
- 学校小卖部有 A, B, C, D, E 五种冷饮销售，它们的单价依次是 5 元、3 元、2 元、1 元和 0.5 元，某天的冷饮销售情况如图所示，那么，这天该小卖部销售的冷饮的单价的平均值是多少元？
- 某校规定：学生的平时作业、期中检测、期末检测三项成绩分别按 40%，20%，40% 的比例计入学期总评成绩. 小亮的平时作业、期中检测、期末检测的数学成绩依次为 90 分、92 分、85 分，小亮这学期的数学总评成绩是多少？
- 现有两批苹果，从中各随机抽取 20 个，测得它们的直径（单位：mm）如下：
第一批：81, 85, 80, 75, 78, 76, 83, 82, 78, 84,
79, 76, 85, 79, 76, 83, 82, 81, 78, 79；
第二批：80, 81, 78, 74, 83, 88, 76, 75, 84, 83,
82, 80, 78, 84, 85, 78, 76, 77, 83, 77.
哪一批苹果的大小更为整齐？
- 某商场新进了一批直径为 12 mm 的螺丝，从中抽取了 20 个螺丝，并规定它们的标



(第3题)

准差若大于 0.2 mm, 就可要求退货. 这 20 个螺丝的直径 (单位: mm) 如下:

11.8, 11.7, 12.0, 12.1, 12.3, 12.2, 12.0, 11.5, 12.3, 12.1,

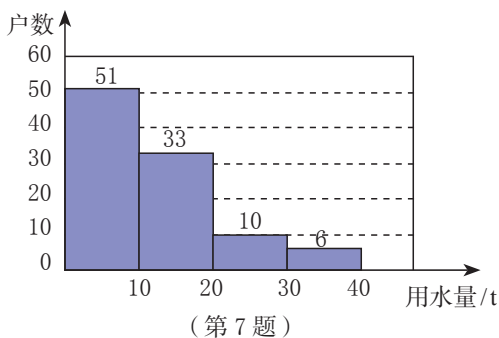
12.0, 12.2, 11.9, 11.7, 11.9, 12.1, 12.3, 12.4, 11.8, 11.9.

该商场是否可以要求退货?

7. 某小区随机抽取了 100 户人家, 调查了他们 5 月份的用水量情况, 如图.

(1) 试估计该小区用水量不高于 20 t 的户数占小区总户数的百分比;

(2) 该小区有 500 户, 若把每组中各个用水量值用该组的中间值 (如 0~10 的中间值为 5) 来代替, 估计该小区 5 月份的用水量.



数学理解

8. 小明所在班级学生的平均身高是 1.65 m, 小亮所在班级学生的平均身高是 1.60 m, 小颖说“小亮一定比小明矮”. 你认为小颖的说法正确吗? 说说你的理由.

9. 一段时间内, 一家鞋店销售了某种品牌的女鞋 30 双, 各种尺码的销售量如下表所示:

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

(1) 求出这 30 双女鞋尺码的平均数、中位数和众数;

(2) 在 (1) 中求出的三个数据中, 你认为鞋店老板最感兴趣的是哪一个? 说说你的理由.

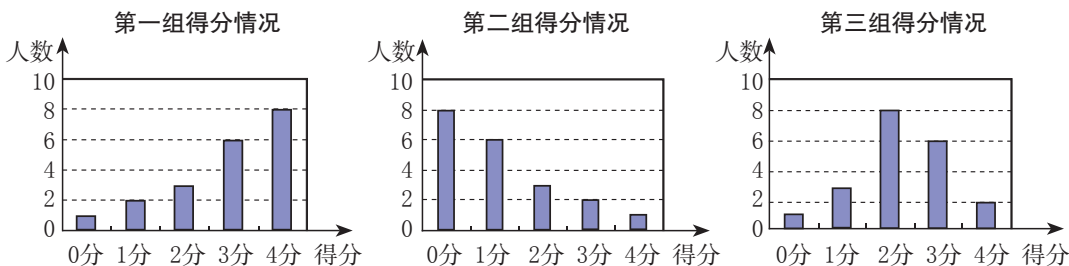
10. 某公司销售部有销售人员 15 人, 销售部为了制定某种商品的月销售定额, 统计了这 15 人某月的销售量, 如下表所示:

每人销售量/件	1 800	510	250	210	150	120
人数	1	1	3	5	3	2

(1) 求这 15 位销售人员该月销售量的平均数、中位数、众数;

(2) 假设销售部经理把每位销售人员的月销售额定为 320 件, 你认为是否合理? 为什么?

- ※11. 三个组每组都有 20 人, 一道满分为 4 分的题目, 三个组同学的得分情况如下:



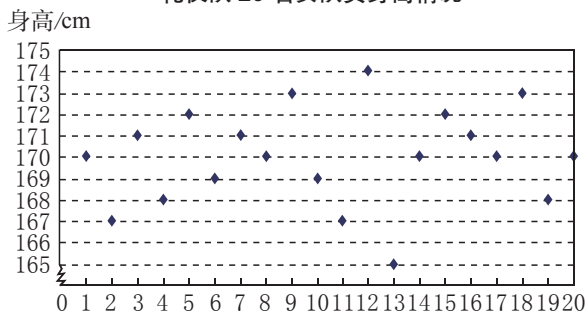
(第11题)

- (1) 请你分别计算三个组该题的平均得分和方差;
- (2) 观察这三个组的得分情况, 小明发现, “柱子的高度”总是1, 2, 3, 6, 8, 但是它们排列的顺序不同, 导致了平均数和方差发生了变化. 请你尝试将这些“柱子”重新排列一下, 使各组平均数最大, 再将这些“柱子”重新排列, 使各组方差最小.

问题 解决

12. 一个中学礼仪队的 20 名女队员的身高 (单位: cm) 如图所示, 你能大致估计出这些队员的平均身高吗? 能用一种简便的方法计算这些队员的平均身高吗?

礼仪队 20 名女队员身高情况



(第12题)

13. 用直尺测量你的“拃长”, 连续测量 10 次, 计算这 10 次“拃长”的平均数, 这样你就有了一把自己的“尺子”了, 试用这把“尺子”测量课桌的长度. 你还能在自己的身上找到其他的“尺子”吗?
14. 某厂用罐头分装机分装某种鱼罐头 (每个罐头的标准质量为 207 g). 为了监控分装质量, 该厂决定定期对罐头的质量进行抽样检查, 并规定抽检产品的平均质量与标准质量相差大于 5 g 或罐头质量的标准差大于 8 g 时, 就认为该分装机运行不正常, 将对它进行检修. 现抽取了 20 个罐头, 它们的质量 (单位: g) 如下:

200, 205, 208, 212, 223, 199, 193, 208, 204, 200,
208, 201, 215, 190, 193, 206, 215, 198, 206, 216.

该分装机运行是否正常?

15. 小明想调查某高速公路入口处每天的汽车流量(单位:辆),一天,他从上午8时至11时在该入口处每隔相等的一段时间做一次统计,共统计了8次,数据如下:

记录的次数	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次
3 min内通过的汽车数量	51	50	64	62	58	55	55	53

试估计这天上午这3 h内共有多少车次通过该入口.

- ※16. 小明和小亮家去年的饮食、教育和其他支出都分别是3 600元、1 200元、7 200元,小明家今年这三项支出比去年依次增长了10%, 20%, 30%,小亮家今年的这三项支出比去年依次增长了20%, 30%, 10%.小明和小亮家今年的总支出比去年增长的百分数相等吗?它们分别是多少?



哪个城市夏天更热



我要到长沙去出差，长沙挺热的。



我要到武汉去工作几天，武汉也很热。



长沙和武汉，哪个城市夏天更热？不妨考察一下7、8月份的数据吧！

××××年7月××城市											
日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
类别											
平均气温/℃	25	26	26	28	27	29	27	30	32	28	...
最高气温/℃											

议一议

- (1) 影响人体冷热感觉的因素有哪些？我们可以在上述小明设计的表格中增补哪些数据？
- (2) 如何制定适当的标准进行比较？
- (3) 为作出客观的判断，我们该收集哪个时间段内这两个城市的相关数据？

做一做

以小组为单位合作完成下列任务：

- (1) 制定适当的比较标准.
- (2) 收集某段时间内几个城市的相关数据.
- (3) 对调查数据进行处理，并完成调查报告.
- (4) 进行全班交流.

议一议

各组的结果一致吗？如果不一致，原因是什么？

习题

生活中还有一些问题，与“哪个城市夏天更热”有类似的情况，也需要制定标准进行比较。如：你能设法收集信息、制定标准来判断美国男子篮球职业联赛球员科比和韦德谁更适合得分后卫这个位置吗？……组成兴趣小组，选择某个感兴趣的问题进行研究，并形成调查报告，进行班级交流。

第四章 图形的平移与旋转

在小学的学习中，我们已经感知了生活中的平移、旋转现象，并在方格纸上认识了图形的平移和旋转，会运用平移和旋转在方格纸上设计简单的图案。

本章将在小学学习的基础上从图形变化的角度去进一步认识平移和旋转，探索平移、旋转的基本性质，认识并欣赏平移、中心对称在自然界和现实生活中的应用。



学习目标

- 经历平移与旋转的认识及应用的过程，发展空间观念
- 探索平移与旋转的基本性质
- 探索图形的平移与坐标变化之间的关系
- 增强观察、归纳、抽象、概括等能力

1 图形的平移

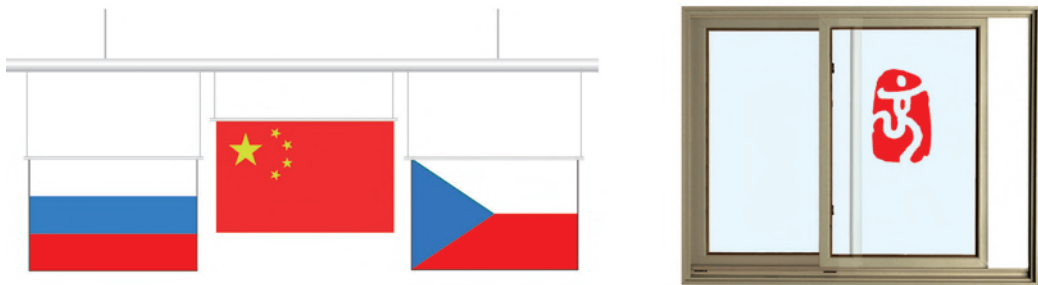


图 4-1

(1) 你在电视上看过奥运赛场上的颁奖仪式吗？当我国运动员夺冠后，五星红旗徐徐升起时，国旗做了怎样的移动？国旗的形状和大小是否发生了改变？

(2) 小明家的推拉窗上贴着一幅“中国印”的窗花，当推动推拉窗时，窗花在做怎样的移动？窗花的形状和大小是否发生了改变？

(3) 在平面内，将一个图形沿着某个方向移动，移动前后的图形是全等图形吗？

在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，图形的这种变化称为**平移** (translation)。由于一个图形和它经过平移所得到的图形是全等形，因此平移不改变图形的形状和大小。

如图 4-2，四边形 $ABCD$ 沿直线 AE 的方向平移，平移的距离为线段 AE 的长，得到四边形 $EFGH$ 。点 A, B, C, D 分别平移到了点 E, F, G, H 。 A 与 E 是一组对应点； AB 与 EF 是一组对应线段； $\angle BAD$ 与 $\angle FEH$ 是一组对应角。

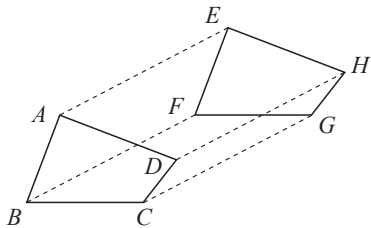


图 4-2

你还能从图 4-2 中找出其他的对应点、对应线段、对应角吗？

想一想

- (1) 在图 4-2 中, 线段 AE , BF , CG , DH 分别是对应点所连成的线段, 它们之间有怎样的关系?
- (2) 在图 4-2 中任意选一组对应线段, 这两条线段之间有怎样的关系?
- (3) 在图 4-2 中任意选一组对应角, 这两个角之间有怎样的关系?

议一议

- (1) 若点 P , Q 是边 AD 上的两点 (P 与 Q 不重合), 你能在图 4-2 中确定四边形 $ABCD$ 经过平移后所得到的对应点 P' , Q' 的位置吗? 你是怎样确定的?
- (2) 连接 PP' , QQ' , 你发现 PP' 与 QQ' 之间有怎样的关系? 由此你得到什么结论?
- (3) 如果将四边形 $ABCD$ 沿直线 BC 的方向向右平移, 平移后得到四边形 $EFGH$, 其中对应线段 BC 与 FG 有怎样的关系? 由此你又得到什么结论?

一般地, 我们可以得到:

一个图形和它经过平移所得的图形中, 对应点所连的线段平行 (或在同一条直线上) 且相等; 对应线段平行 (或在同一条直线上) 且相等, 对应角相等.

例 1 如图 4-3 所示, $\triangle ABC$ 沿射线 XY 的方向平移一定距离, $\triangle DEF$ 为平移后的图形. 找出图中三组平行且相等的线段和一组全等三角形.

解: 如图 4-3, 点 A , B , C 的对应点分别为点 D , E , F , 因为经过平移, 对应线段平行 (或在同一条直线上) 且相等, 所以 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $AC \parallel DF$, 且 $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.

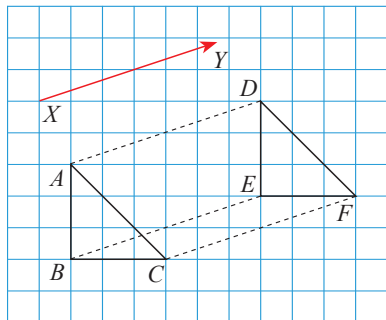


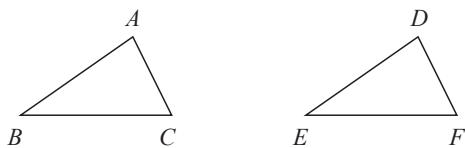
图 4-3

由于平移不改变图形的形状和大小，所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

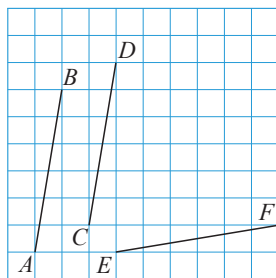
图 4-3 中还有哪些
平行且相等的线段？

随堂练习

1. 举出现实生活中平移的一些实例.
2. 如图， $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 经过平移得到的， $\angle ABC = 33^\circ$ ， $\angle ACB = 70^\circ$ ，求 $\triangle DEF$ 各角的度数.



(第 2 题)



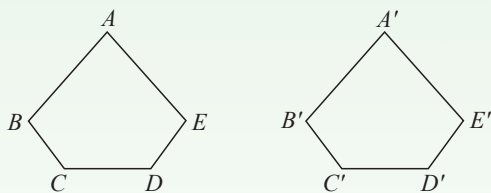
(第 3 题)

3. 如图，点 A, B, C, D, E, F 都在方格纸的格点上，你能平移线段 AB ，使得 AB 与 CD 重合吗？你能平移线段 AB ，使得 AB 与 EF 重合吗？

习题 4.1

知识技能

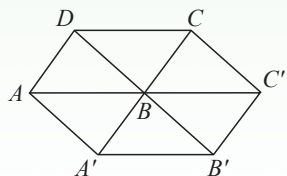
1. 如图，五边形 $A'B'C'D'E'$ 是五边形 $ABCDE$ 平移后的图形，请指出对应点、对应线段、对应角及平移的方向，并量出平移的距离.



(第 1 题)

数学理解

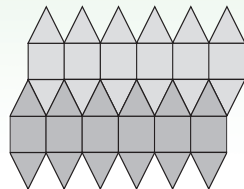
2. 如图，六边形的三条对角线将该六边形分成六个全等的三角形，找出 $\triangle ABD$ 经过平移后能够得到的三角形，并说出平移的方向和距离.



(第 2 题)

问题 解决

3. 如图所示的图案可以看做是由一个正方形和两个等边三角形组成的“基本图形”经过怎样的平移得到的？在图中标出平移的方向，并量出平移的距离。



(第3题)

如图 4-4，经过平移，线段 AB 的端点 A 移到了点 D ，你能画出线段 AB 平移后的图形吗？与同伴交流。

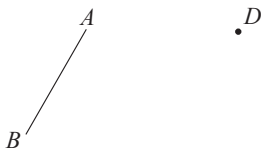


图 4-4

例 2 如图 4-5，将 $\triangle ABC$ 进行平移，使它的顶点 A 平移到点 D ，画出平移后的三角形。

分析： 设顶点 B, C 分别平移到了点 E, F ，根据“经过平移，对应点所连的线段平行（或在同一条直线上）且相等”，可知线段 BE, CF 与 AD 平行且相等。

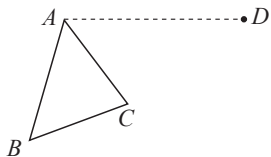


图 4-5

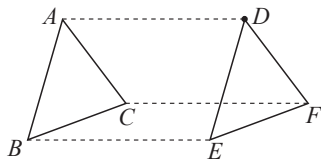


图 4-6

解： 如图 4-6，过点 B, C 分别作线段 BE, CF ，使 $BE \parallel CF \parallel AD$ ， $BE = CF = AD$ ，连接 DE, DF, EF ， $\triangle DEF$ 就是 $\triangle ABC$ 平移后的图形。

议一议

- (1) 在例 2 中，还有其它方法画出平移后的三角形吗？与同伴进行交流。
- (2) 确定一个图形平移后的位置，除需要原来的位置外，还需要什么条件？

例 3 如图 4-7, 将字母“A”按箭头所指的方向平移 3 cm, 画出平移后的图形.

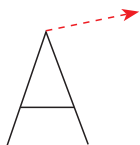


图 4-7

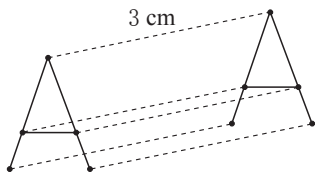
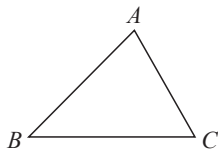


图 4-8

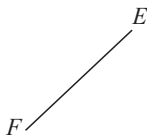
解: 在字母“A”上找出关键的 5 个点 (如图 4-8 所示), 分别过这 5 个点按箭头所指的方向画 5 条长 3 cm 的线段, 将所画线段的另 5 个端点按原来的方式连接, 即可得到字母“A”平移后的图形.

随堂练习

1. 如图, 将 $\triangle ABC$ 进行平移, 使它的边 AB 平移到 EF , 画出平移后的三角形, 你能给出几种画法?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 将图中的字母“N”按水平方向向右平移 4 cm, 画出平移后的图形.

习题 4.2

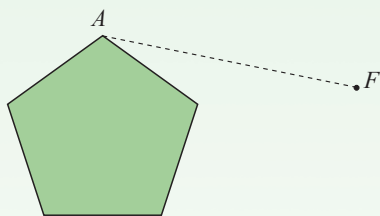
知识技能

1. 线段 CD 是线段 AB 平移后的图形, 点 D 是点 B 的对应点, 画出线段 AB .



(第 1 题)

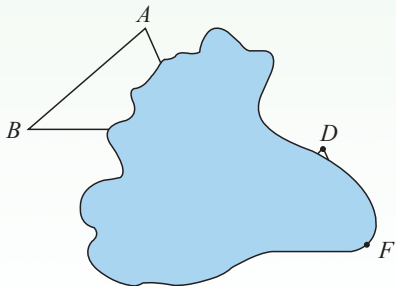
2. 如图, 经过平移, 五边形的顶点 A 移到了点 F . 画出平移后的五边形.



(第2题)

问题 解决

3. 平移 $\triangle ABC$, 使得边 AB 移到 DE 的位置. 下面是小刚的作业, 他的做法完全正确, 可由于不小心将一团墨汁沾染了作业本, 请设法帮小刚补全平移前后的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$.



(第3题)

想 一 想

在如图 4-9 所示的直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(-2, 1)$.

(1) 将点 A 的横坐标加 3, 纵坐标保持不变, 得到点 A_1 , 点 A_1 与点 A 相比有什么变化?

(2) 将点 A 沿 y 轴方向向下平移 3 个单位长度, 点 A 的横坐标、纵坐标分别有什么变化? 写出平移后得到的点 A_2 的坐标.

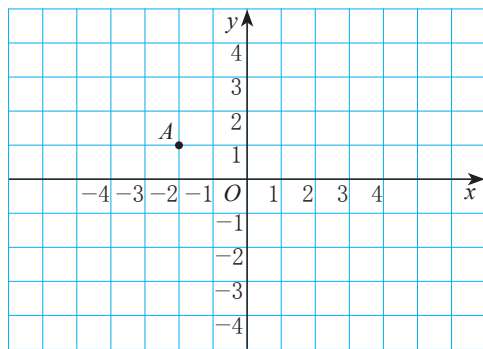


图 4-9

议 一 议

(1) 将直角坐标系中的点沿 x 轴方向向右 (或向左) 平移 h ($h > 0$) 个单位长度, 平移后的点的坐标有什么变化?

(2) 将直角坐标系中的点沿 y 轴方向向上 (或向下) 平移 k ($k > 0$) 个单位长度, 平移后的点的坐标有什么变化? 与同伴进行交流.

例 4 如图 4-10, 点 A 的坐标为 $(-3, 4)$, 点 B 的坐标为 $(3, 2)$, 将线段 AB 沿 x 轴方向向左平移 4 个单位长度, 得到线段 $A'B'$, 分别求点 A' 与 B' 的坐标, 并画出线段 $A'B'$.

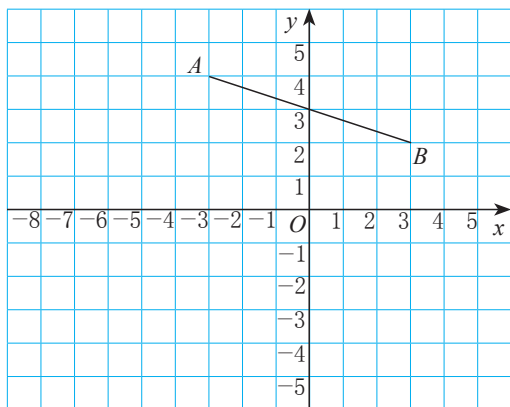


图 4-10

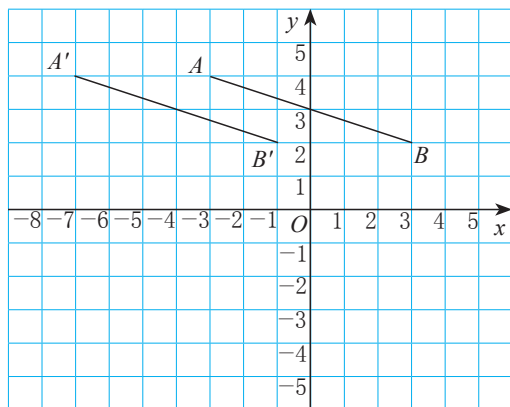


图 4-11

解: 将线段 AB 沿 x 轴方向向左平移 4 个单位长度, 得到线段 $A'B'$, 点 A' , B' 的坐标分别为 $A'(-3-4, 4)$, $B'(3-4, 2)$, 即 $A'(-7, 4)$, $B'(-1, 2)$.

作出点 $A'(-7, 4)$, $B'(-1, 2)$, 连接 $A'B'$ (如图 4-11).

线段 $A'B'$ 就是要求画的线段.

做一做

如图 4-12, 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 经过平移后得到 $\triangle DEF$ 和 $\triangle MNG$. 已知点 A, B, C, F, N 的坐标分别为 $(-3, 5)$, $(-5, 2)$, $(-1, 3)$, $(4, 3)$, $(-5, -3)$, 求点 D, E, M, G 的坐标, 并画出 $\triangle DEF$ 和 $\triangle MNG$.

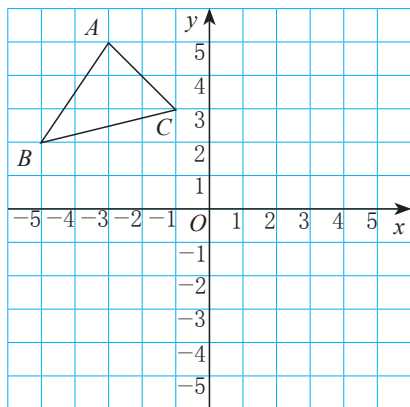


图 4-12

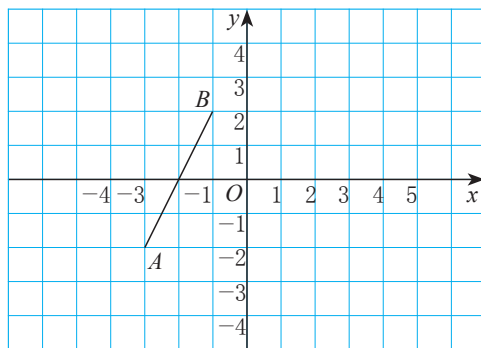
随堂练习

1. 在直角坐标系中, 已知 A, B 两点的坐标分别为 $A(3, -2), B(-1, -3)$.

- (1) 写出点 A 向右平移 6 个单位长度后所得点 A' 的坐标;
- (2) 写出点 B 向下平移 3.5 个单位长度后所得点 B' 的坐标.

2. 如图, 点 A, B 的坐标分别为 $(-3, -2), (-1, 2)$.

- (1) 将线段 AB 沿 x 轴方向向右平移 4 个单位长度得到线段 CD , 分别求点 C, D 的坐标, 并在该直角坐标系中画出线段 CD ;
- (2) 将线段 AB 沿 y 轴方向向下平移 2 个单位长度得到线段 EF , 分别求点 E, F 的坐标, 并在该直角坐标系中画出线段 EF .

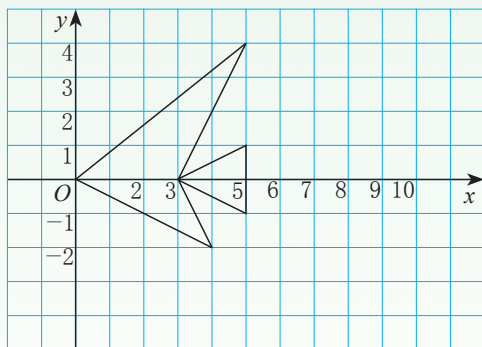


(第2题)

习题 4.3

知识技能

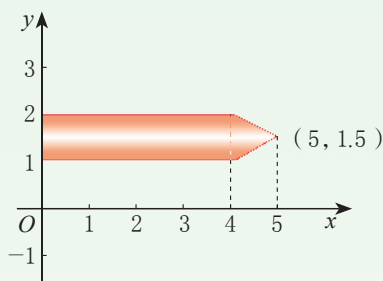
1. 图中的“鱼”是将坐标为 $(0, 0), (5, 4), (3, 0), (5, 1), (5, -1), (3, 0), (4, -2), (0, 0)$ 的点用线段依次连接而成的.



(第1题)

- (1) 如果图中“鱼”的每个“顶点”的横坐标保持不变, 纵坐标分别减 3, 所得的图案与原图案相比有什么变化?
- (2) 如果图中“鱼”的每个“顶点”的横坐标分别加 5, 纵坐标保持不变, 所得的图案与原图案相比有什么变化?

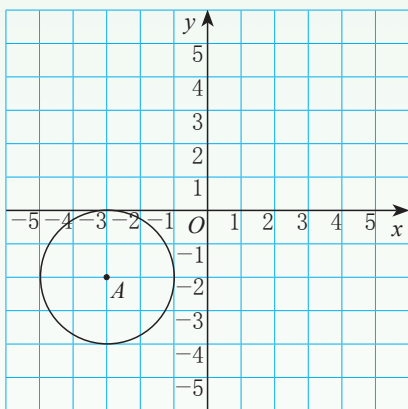
2. 如图, 铅笔图案的 5 个顶点的坐标分别是 $(0, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1.5)$, $(4, 2)$, $(0, 2)$. 将铅笔图案中各个点的横坐标保持不变, 纵坐标分别减 2, 所得图案与原图案相比有什么变化?



(第 2 题)

数学理解

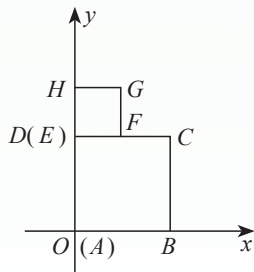
3. 四边形的顶点坐标分别为 $A(1, 8)$, $B(0, 6)$, $C(3, 4)$, $D(3, 7)$. 将四边形 $ABCD$ 平移后得到的四个对应顶点的坐标可能分别是 $A'(1, 5)$, $B'(0, 3)$, $C'(3, 1)$, $D'(3, 4)$ 吗? 可能分别是 $A'(8, 8)$, $B'(7, 6)$, $C'(9, 4)$, $D'(3, 7)$ 吗?
4. 如图, 点 A 的坐标为 $(-3, -2)$, $\odot A$ 的半径为 2, 将 $\odot A$ 沿 y 轴方向向上平移 4 个单位长度得到 $\odot A_1$. 求点 A_1 的坐标, 并画出 $\odot A_1$.



(第 4 题)

联系拓广

5. 如图, 在直角坐标系中, 正方形 $ABCD$ 的顶点 A 与原点 O 重合, 点 B 的坐标是 $(4, 0)$; 正方形 $EFGH$ 的边长为 2, 顶点 E 与 D 重合, 点 H 在 y 轴上.
- (1) 将正方形 $ABCD$ 沿坐标轴方向平移, 当点 A 与点 E 重合时, 正方形 $ABCD$ 平移的距离是多少? 这时点 C 到达点 C_1 处, 点 C_1 的坐标是什么?
- (2) 将正方形 $EFGH$ 沿坐标轴方向平移, 当点 F 与点 C 重合时, 正方形 $EFGH$ 平移的距离是多少? 点 G 到达点 G_1 处, 点 G_1 的坐标是什么?



(第 5 题)

图 4-13 中的“鱼” I 是将坐标为 $(0, 0)$, $(5, 4)$, $(3, 0)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(3, 0)$, $(4, -2)$, $(0, 0)$ 的点用线段依次连接而成的.

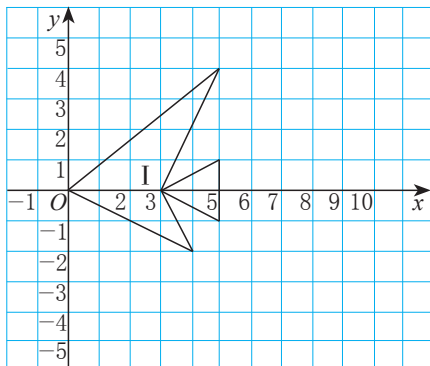


图 4-13

先将图中的“鱼” I 向下平移 2 个单位长度, 再向右平移 3 个单位长度, 得到新“鱼” II.

(1) 在图 4-13 所示的直角坐标系中画出“鱼” II.

(2) 能否将“鱼” II 看成是“鱼” I 经过一次平移得到的? 如果能, 请指出平移的方向和平移的距离, 并与同伴交流.

(3) 在“鱼” I 和“鱼” II 中, 对应点的坐标之间有什么关系?

改变“鱼” I 最初的平移方向(仍沿坐标轴方向)和平移距离, 再试一试, 并与同伴交流.



做一做

先将图 4-13 中“鱼” I 的每个“顶点”的横坐标分别加 2, 纵坐标保持不变, 得到“鱼” III; 再将“鱼” III 的每个“顶点”的横坐标保持不变, 纵坐标分别减 3, 得到“鱼” IV. “鱼” IV 与原来的“鱼” I 相比有什么变化? 能否将“鱼” IV 看成是原来的“鱼” I 经过一次平移得到的? 与同伴进行交流.

如果将“鱼” I 的每个“顶点”的横坐标分别加 2, 纵坐标分别减 3, 得到的“鱼”与“鱼” IV 相比, 你发现了什么?

议一议

一个图形依次沿 x 轴方向、 y 轴方向平移后所得图形与原来的图形相比，位置有什么变化？它们对应点的坐标之间有怎样的关系？

一个图形依次沿 x 轴方向、 y 轴方向平移后所得图形，可以看成是由原来的图形经过一次平移得到的。

例 5 如图 4-14，点 A, B, C 的坐标分别为 $A(1, -1), B(3, 1), C(2, 3)$ ，将 $\triangle ABC$ 平移后得到 $\triangle A'B'C'$ ，已知点 A 平移到点 $A'(-3, 1)$ 。

- (1) 写出 B', C' 两点的坐标；
- (2) 画出 $\triangle A'B'C'$ 。

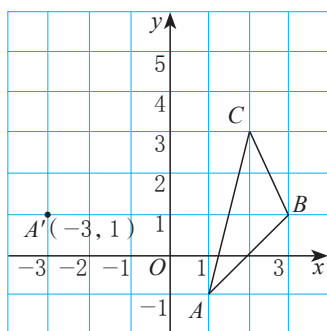


图 4-14

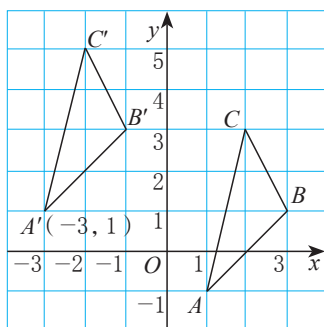


图 4-15

分析：点 $A(1, -1)$ 平移到点 $A'(-3, 1)$ 时，横坐标减小了 4，纵坐标增加了 2，所以 B', C' 两点的横坐标比 B, C 两点的横坐标也应分别减小 4，而纵坐标分别增加 2。

解：(1) 点 B' 的坐标为 $(3 - 4, 1 + 2)$ ，即 $(-1, 3)$ ；点 C' 的坐标为 $(2 - 4, 3 + 2)$ ，即 $(-2, 5)$ 。

(2) 画出点 B', C' ，分别连接 $A'B', B'C', C'A'$ (如图 4-15)， $\triangle A'B'C'$ 就是所求的三角形。

做一做

图 4-16 中的图案是从一个正方形中挖去一个半圆和一个等腰直角三角形得到的. 已知这个图案上的点 $M(0, 3)$ 经过平移后的对应点是 $M'(5, 0)$.

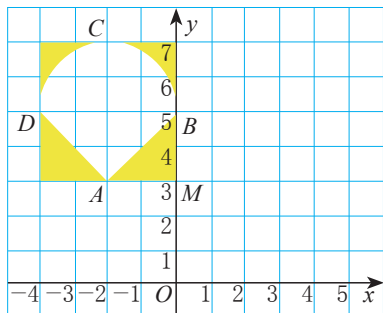


图 4-16

(1) 分别写出点 A, B, C, D 平移后得到的点 A', B', C', D' 的坐标.

(2) 画出该图案平移后的图案.

(3) 说明上述图案是通过怎样的平移得到的, 计算平移的距离, 并与同伴交流.

随堂练习

- (1) 在直角坐标系中描出点 $A(6, 0), B(10, 3), C(9, 1), D(12, 0), E(9, -1), F(10, -3)$, 然后用线段依次连接 A, B, C, D, E, F, A 各点;

(2) 将 (1) 中所画图形先向左平移 12 个单位长度, 再向上平移 5 个单位长度, 画出第二次平移后的图形;

(3) 如何将 (1) 中所画图形经过一次平移得到 (2) 中所画图形? 平移前后对应点的横坐标有什么关系? 纵坐标呢?
- 已知 $\triangle AOC$ 的顶点坐标分别为 $A(-3, 0), O(0, 0), C(-1, 3)$, 将 $\triangle AOC$ 平移后顶点 A 的对应点是 $A'(0, -1)$, 分别写出其他对应顶点的坐标.

习题 4.4

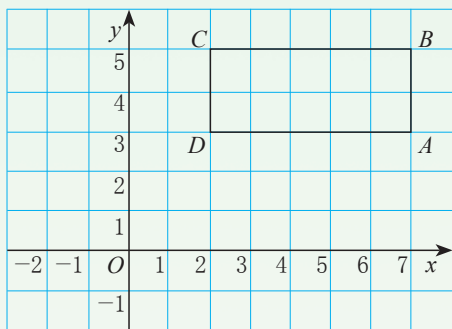
知识技能

- (1) 在直角坐标系中描出点 $A(-8, 7), B(-7, 3), C(-6, 7), D(-5, 3), E(-4, 7)$, 并将它们依次连接起来;

(2) 将 (1) 中所画图形先向右平移 5 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度, 画出第二次平移后的图形;

(3) 如何将(1)中所画图形经过一次平移得到(2)中所画图形? 平移前后对应点的横坐标有什么关系? 纵坐标呢?

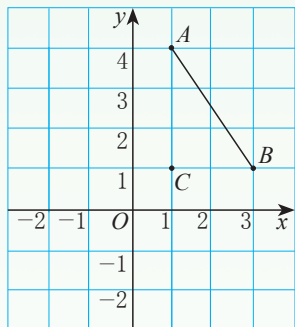
2. 如图, 长方形的顶点坐标分别为 $A(7, 3)$, $B(7, 5)$, $C(2, 5)$, $D(2, 3)$, 将点 A, B, C, D 的横坐标分别减3, 纵坐标分别减2, 再将所得的点用线段顺次连接起来, 你得到一个怎样的图形? 它可以看成是长方形 $ABCD$ 经过怎样的平移得到的?



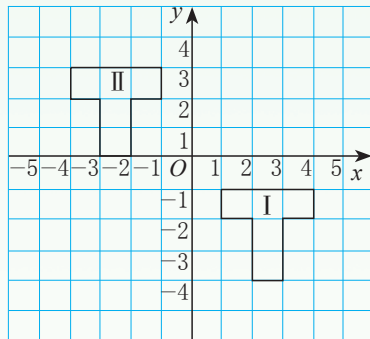
(第2题)

数学理解

3. 如图, 已知 A, B 两点的坐标分别为 $A(1, 4)$, $B(3, 1)$, 把线段 AB 平移, 使它的一个端点在点 $C(1, 1)$ 处, 求出点 D 的坐标, 并画出平移后的线段 CD .



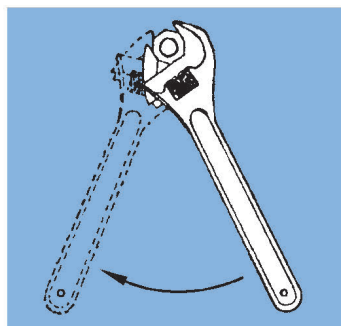
(第3题)



(第4题)

4. 如图, 图 I 与图 II 对应“顶点”的坐标之间有什么关系? 图 II 可以由图 I 经过怎样的变化而得到?
5. $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$. 小红把 $\triangle ABC$ 平移后得到了 $\triangle A'B'C'$, 并写出了它的三个顶点的坐标 $A'(0, 0)$, $B'(-2, -3)$, $C'(2, -3)$.
- (1) 你认为小红所写的三个顶点的坐标正确吗?
- (2) 如果小红所写三个顶点的纵坐标都正确, 三个顶点的横坐标中只有一个正确, 那么你能帮小红正确写出三个顶点的坐标吗?

2 图形的旋转



- (1) 说出上面情境中的转动现象，它们有什么共同特征？
- (2) 在上图中，钟表的指针、钟摆在转动过程中，其形状、大小、位置是否发生改变？汽车方向盘、扳手以及螺帽的转动呢？
- (3) 在平面内，将一个图形绕一个定点沿某个方向转动一个角度，转动前后的图形是全等图形吗？

在平面内，将一个图形绕一个定点按某个方向转动一个角度，图形的这种变化称为**旋转** (rotation)，这个定点称为**旋转中心**，转动的角称为**旋转角**。因为一个图形和它经过旋转所得到的图形是全等形，因此旋转不改变图形的形状和大小。

如图 4-17， $\triangle ABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度，得到 $\triangle DEF$ ，点 A 旋转到了点 D 。点 A 与点 D 是一组对应点，线段 AB 与线段 DE 是一组对应线段， $\angle BAC$ 与 $\angle EDF$ 是一组对应角。在这一旋转过程中，点 O 是旋转中心， $\angle AOD$ 是旋转角。

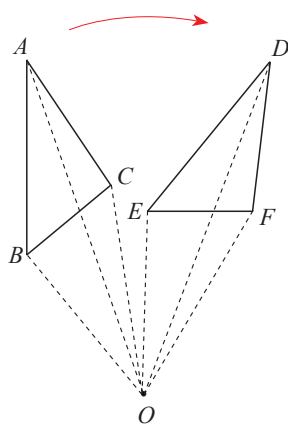


图 4-17

想一想

你还能从图 4-17 中找出其他的对应点、对应线段、旋转角吗?

做一做

如图 4-18, 两张透明纸上的四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 完全重合, 在纸上选取旋转中心 O , 并将其固定, 把其中一张纸片绕点 O 旋转一定角度 (如图 4-19).

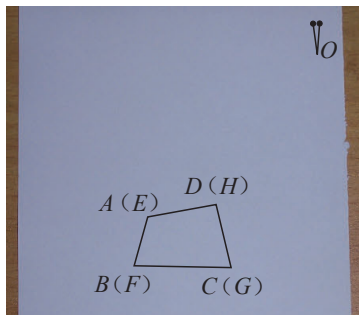


图 4-18

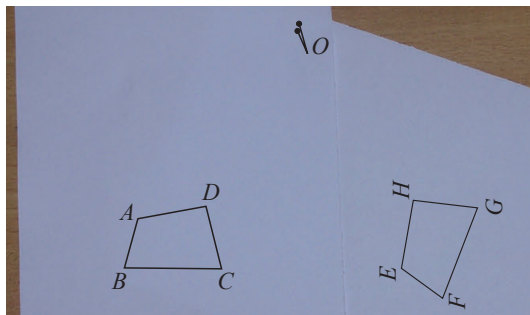


图 4-19

(1) 观察图 4-19 的两个四边形, 你能发现有哪些相等的线段和相等的角? 为什么?

(2) 连接 $AO, BO, CO, DO, EO, FO, GO, HO$, 你又能发现有哪些相等的线段和相等的角?

(3) 在图 4-19 中再取一些对应点, 画出它们与旋转中心所连成的线段, 你又能发现什么?

改变透明纸上所画图形的形状, 再试一试, 并与同伴交流.

一般地, 我们可以得到:

一个图形和它经过旋转所得到的图形中, 对应点到旋转中心的距离相等, 任意一组对应点与旋转中心的连线所成的角都等于旋转角; 对应线段相等, 对应角相等.

例 1 如图 4-20 所示, 如果把钟表的时针看做四边形 $AOBC$, 它绕点 O 按顺时针方向旋转得到四边形 $DOEF$. 在这个旋转过程中:

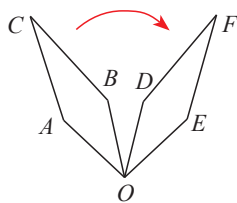


图 4-20

- (1) 写出它的旋转中心和旋转角;
- (2) 经过旋转, 点 A, C, B 分别到达什么位置?
- (3) AO 与 DO 的长有什么关系? 你还能在图 4-20 中找出相等的线段吗? 说明理由;
- (4) $\angle AOD$ 与 $\angle BOE$ 有什么大小关系? 你还能在图 4-20 中找出相等的角吗? 说明理由.

解: (1) 旋转中心是点 O , 旋转角是 $\angle AOD$.

(2) 点 A, C, B 分别旋转到点 D, F, E .

(3) $AO = DO, BO = EO, AC = DF, CB = FE$.

(4) $\angle AOD = \angle BOE, \angle A = \angle D, \angle C = \angle F, \angle B = \angle E, \angle AOB = \angle DOE$.

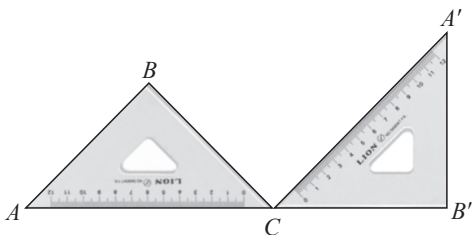
随堂练习

1. 钟表的分针旋转一周需要 60 分钟.

- (1) 指出它的旋转中心;
- (2) 经过 20 分钟, 分针旋转了多少度? 时针呢?



(第 1 题)

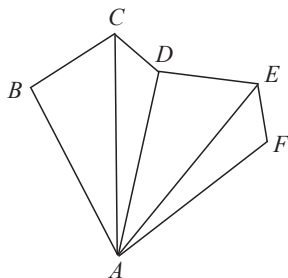


(第 2 题)

2. 如图, 等腰直角三角尺 ABC 在水平桌面上绕点 C 按顺时针方向旋转到 $A'B'C$ 的位置, 使 A, C, B' 三点在同一条直线上, 求旋转角的度数.

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 经过旋转后与四边形 $ADEF$ 重合.

- (1) 指出这一旋转的旋转中心和旋转角;
- (2) 写出图中相等的线段和相等的角, 并说明依据.



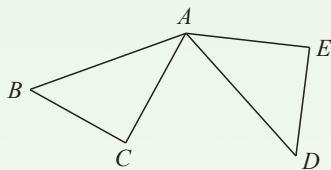
(第 3 题)

习题 4.5

知识技能

1. 如图, $\triangle ABC$ 按逆时针方向旋转得到 $\triangle ADE$.

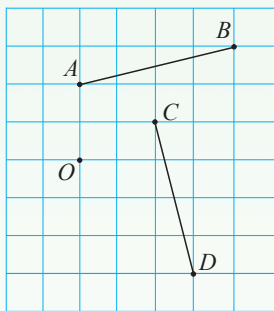
- (1) 指出图中的旋转中心;
- (2) 指出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的对应边;
- (3) 说出图中哪些角等于旋转角.



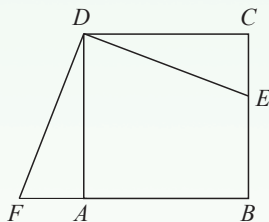
(第1题)

数学理解

2. 如图, 你能绕点 O 旋转, 使得线段 AB 与线段 CD 重合吗? 为什么?



(第2题)



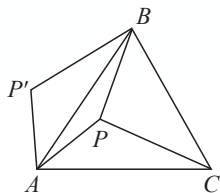
(第3题)

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 为 BC 边上的一点, 延长 BA 至 F , 使 $AF = CE$, 连接 DE, DF .

- (1) $\triangle DAF$ 可以看做是 $\triangle DCE$ 通过旋转得到的吗? 如果是, 旋转中心是哪一点? 旋转角是多少度?
- (2) 指出图中相等的线段、相等的角.

问题解决

※4. 如图, P 是等边三角形 ABC 内的一点, 且 $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 10$. 若将 $\triangle PAC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转后, 得到 $\triangle P'AB$, 则点 P 与点 P' 之间的距离为 _____, $\angle APB =$ _____.



(第4题)

例 2 如图 4-21, 已知线段 AB 和线段 AB 所在直线外的一点 O , 画出线段 AB 绕点 O 按逆时针方向旋转 45° 后的线段.

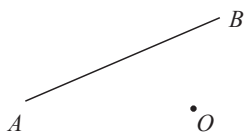


图 4-21

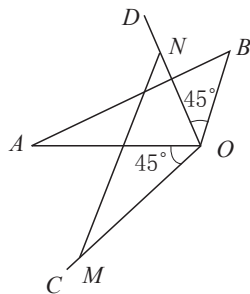


图 4-22

解: (1) 连接 OA , OB ;

(2) 以 OA 为一边在 OA 边的下方画 $\angle AOC = 45^\circ$, 并在 OC 上截取 $OM = OA$;

(3) 以 OB 为一边在 OB 边的左侧画 $\angle BOD = 45^\circ$, 并在 OD 上截取 $ON = OB$;

(4) 连接 MN . (如图 4-22)

线段 MN 就是线段 AB 绕点 O 按逆时针方向旋转 45° 后的线段.

例 3 如图 4-23, $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转后, 顶点 A 的对应点为点 D . 试画出顶点 B 的对应点, 以及旋转后的三角形.

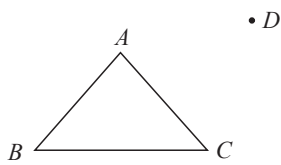


图 4-23

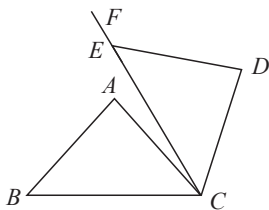


图 4-24

分析: 因为点 C 为旋转中心, 点 A 与点 D 是对应点, 所以 $\angle ACD$ 是旋转角. 假设顶点 B 的对应点为点 E , 则 $\angle BCE = \angle ACD$, 且 $CE = CB$.

解: (1) 连接 CD ;

(2) 以 CB 为一边作 $\angle BCF$, 使得 $\angle BCF = \angle ACD$;

(3) 在射线 CF 上截取 $CE = CB$;

(4) 连接 DE . (如图 4-24)

$\triangle DEC$ 就是 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转后的三角形.

议一议

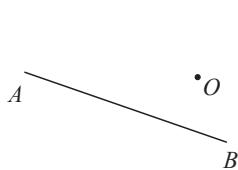
你还能用其他方法画出例 3 中的 $\triangle DEC$ 吗?

想一想

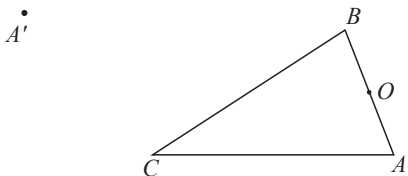
在旋转过程中, 确定一个图形绕一个定点旋转后的位置, 除需要这个图形原来的位置外, 还需要什么条件?

随堂练习

1. 如图, 线段 AB 绕点 O 旋转后, 点 A 旋转到点 A' . 画出线段 AB 绕点 O 旋转后所得的线段.



(第 1 题)



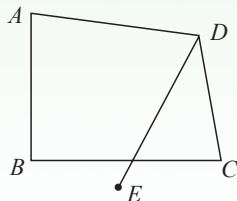
(第 2 题)

2. 如图, 画出 $\triangle ABC$ 绕边 AB 的中点 O 旋转 180° 后的图形.

习题 4.6

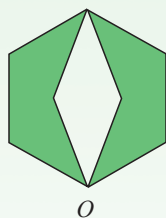
知识技能

1. 将一个等边三角形绕它的一个顶点按逆时针方向旋转, 分别画出旋转 30° , 60° , 90° , 120° 后的图形.
2. 如图, 四边形 $ABCD$ 绕点 D 旋转, 边 AD 旋转到了 ED 的位置, 画出旋转后的四边形.



(第 2 题)

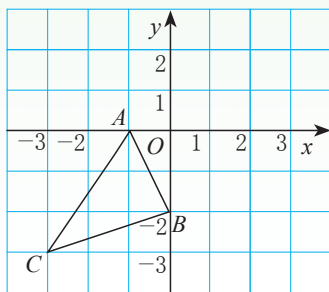
3. 将如图所示的图案绕点 O 按顺时针方向旋转 90° , 画出旋转后的图形.



(第3题)

问题解决

- ※4. 如图, 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(-1, 0)$, $B(0, -2)$, $C(-3, -3)$. 将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 90° .
- (1) 写出旋转后三角形各顶点的坐标;
 - (2) 画出旋转后的图形.



(第4题)

议一议

1. 如图 4-25, 正六边形 $ABCDEF$, 它可以看做是由线段 AB 绕某一点按同一方向旋转 5 次所得到的图形.

- (1) 你能画出旋转中心 O 吗?
- (2) 每次旋转的旋转角分别是多少度? 与同伴进行交流.

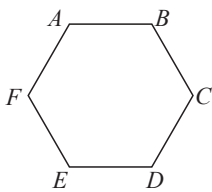


图 4-25

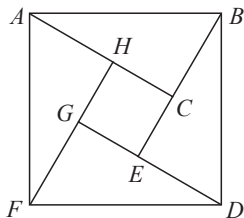


图 4-26

2. 如图 4-26 所示的“弦图”, 如果将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 看做是一个“基本图形”, 你能说出这个图形是通过怎样的旋转形成的吗? 你能画出它的旋转中心吗? 旋转角分别是多少度?

例 4 画一个腰长等于 3 的等腰直角三角形 ABC , 取一个锐角为 45° 的三角尺, 把三角尺的直角顶点放在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点 O 处, 并使三角尺

的一条直角边经过点 A ，另一条直角边经过点 B （如图 4-27（1））. 将三角尺绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度，记三角尺的两腰与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两腰 AB ， AC 的交点分别为 E ， F （如图 4-27（2））. 在三角尺按图 4-27 所示的方式绕点 O 旋转的过程中，线段 AE 与 CF 的长度有什么关系？ OE 与 OF 的长度有什么关系？证明你的结论.

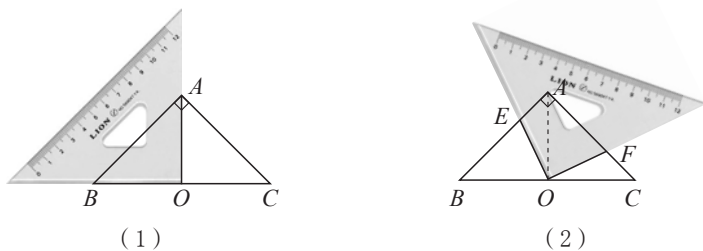


图 4-27

解： $AE = CF$ ， $OE = OF$.

证明如下：连接 AO ，在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle CFO$ 中，

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $AO \perp BC$ ，垂足为点 O ，

$\therefore \angle EAO = \angle C = 45^\circ$ ， $AO = OC$ ， $\angle EOA = \angle COF = 90^\circ - \angle AOF$ ，

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$ (ASA)，

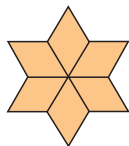
$\therefore AE = CF$ ， $OE = OF$.

想一想

在例 4 中， $\triangle COF$ 能否由 $\triangle AOE$ 旋转得到？其旋转中心是哪个点？旋转角是多少度？

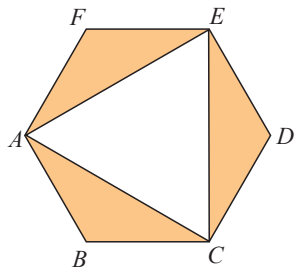
随堂练习

1. 如图所示的图案可以看做是一个四边形通过几次旋转得到的？每次需要旋转多少度？



(第 1 题)

2. 如图, 如果将 $\triangle ABC$ 看做“基本图形”, 分析这个图案是通过怎样的旋转形成的, 并画出它的旋转中心.

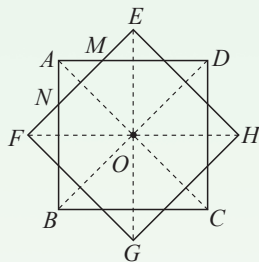


(第2题)

习题 4.7

知识技能

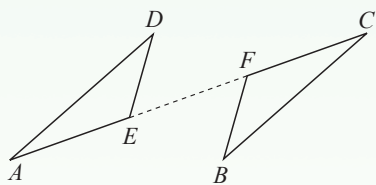
1. 如图, 正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ 的边长相等. 对于这个图案:
- (1) 能否看成是由 $\triangle AMN$ 经过几次旋转得到的? 若能, 每次最少旋转多少度? 旋转几次后, 便能得到整个图案?
 - (2) 能否看成是由线段 AD 经过几次旋转得到的呢?



(第1题)

数学理解

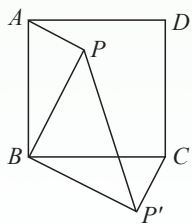
2. 如图, $\triangle ADE$ 是由 $\triangle CBF$ 经过一次旋转得到的, 请找出它的旋转中心, 并求出旋转角.



(第2题)

问题解决

3. 如图, P 是正方形 $ABCD$ 内一点, 将 $\triangle ABP$ 绕点 B 按顺时针方向旋转到 $\triangle CBP'$ 的位置, $PB = 1$, 求 PP' 的长.



(第3题)

3 中心对称

观察图 4-28 和图 4-29.

(1) 在图 4-28 中, 将半圆 M 绕点 O 旋转 180° 后, 它能与半圆 N 重合吗?

(2) 在图 4-29 中, 将 $\triangle ABC$ 绕点 P 旋转 180° 后, 它能与 $\triangle A'B'C'$ 重合吗?

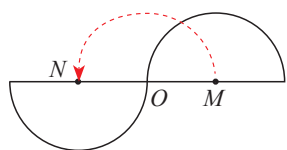


图 4-28

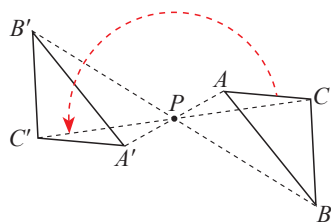


图 4-29

在平面内, 如果把一个图形绕某个点旋转 180° 后, 能与另一个图形重合, 那么就说这两个图形关于这个点成**中心对称** (central symmetry), 这个点叫做**对称中心** (center of symmetry). 两个图形上, 经过旋转 180° 后重合的两个点叫做**对应点**. 例如, 在图 4-28 中, 半圆 M 与半圆 N 关于点 O 成中心对称; 在图 4-29 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 P 成中心对称, 点 A 与点 A' 、点 B 与点 B' 、点 C 与点 C' 等都是对应点.

议一议

如图 4-29, 连接 AA' , BB' , CC' , 点 P 在线段 AA' 上吗? 在线段 BB' 上吗? 在线段 CC' 上吗? 线段 AP 与 PA' , BP 与 PB' , CP 与 PC' 分别有什么关系? 由此你能得出什么结论? 你能说明得出这些结论的理由吗?

事实上, 将点 A 绕点 P 旋转 180° 与点 A' 重合, 即线段 AP 绕点 P 旋转 180° 与线段 $A'P$ 重合, 所以线段 PA 与 PA' 在同一条直线上, 从而点 P 在线段 AA' 上, 也就是线段 AA' 经过点 P , 且 $PA = PA'$, 即点 P 是线段 AA' 的中点.

同理, 线段 BB' , CC' 都经过点 P , 且 $PB = PB'$, $PC = PC'$, 即点 P 是线段 BB' , CC' 的中点.

一般地, 我们可以得到:

成中心对称的两个图形中, 对应点的连线经过对称中心, 且被对称中心平分.

做一做

如图 4-30, 已知点 A 和点 O , 怎样画出点 A 关于点 O 成中心对称的对应点 A' ?



图 4-30

例 1 如图 4-31, 已知四边形 $ABCD$ 和点 O , 画出四边形 $A'B'C'D'$, 使它与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.

解: (1) 连接 AO , BO , CO , DO ;

(2) 分别延长 AO 到 A' , BO 到 B' , CO 到 C' , DO 到 D' , 使 $OA' = OA$, $OB' = OB$, $OC' = OC$, $OD' = OD$;

(3) 顺次连接点 A' , B' , C' , D' . (如图 4-32)

四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求的四边形.

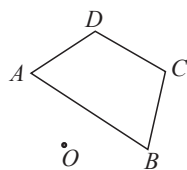


图 4-31

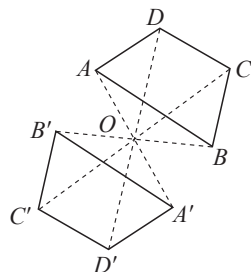
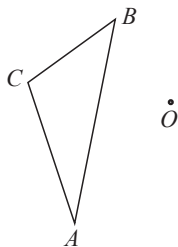


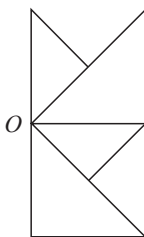
图 4-32

随堂练习

1. 如图，画出 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称的三角形.



(第1题)



(第2题)

2. 如图是由四个等腰直角三角形构成的图形，画出这个图形关于点 O 成中心对称的图形.

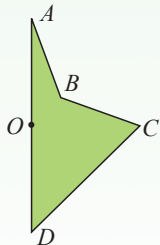
习题 4.8

知识技能

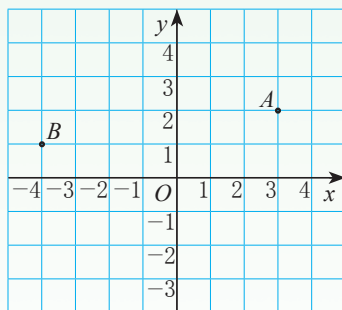
1. 按下列要求，画出线段 AB 关于点 O 成中心对称的线段.

- (1) 点 O 在线段 AB 上；
- (2) 点 O 在线段 AB 所在的直线外；
- (3) 点 O 在线段 AB 外但在线段 AB 所在的直线上.

2. 如图， $AO = DO$ ，画出这个图形关于点 O 成中心对称的图形.



(第2题)



(第3题)

数学理解

3. 如图， A, B 两点的坐标分别为 $(3, 2), (-4, 1)$ ，画出线段 AB 和它关于坐标原点 O 成中心对称的线段 $A'B'$.

观察图 4-33.

(1) 图中的图形有什么共同的特征?

(2) 你能将图中的一幅图绕其上的一点旋转 180° , 使旋转前后的图形完全重合吗? 另一幅图呢?

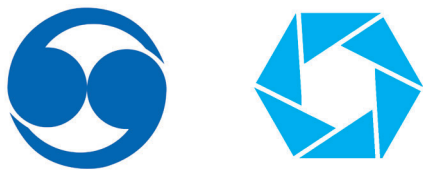


图 4-33

在平面内, 把一个图形绕某个点旋转 180° , 如果旋转前后的图形互相重合, 那么这个图形叫做**中心对称图形** (central symmetry figure), 这个点就是它的对称中心.

议一议

图 4-34 是一个以点 O 为对称中心的中心对称图形, 在该图形上任取一点 A , 你能画出点 A 关于点 O 成中心对称的点吗? 由此你发现了什么? 与同伴进行交流.

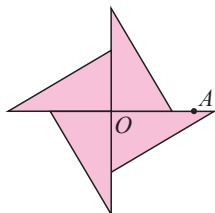


图 4-34



中心对称图形上的每一组对应点所连成的线段都被对称中心平分.

如图 4-35, 当线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180° 时, 它的两个端点 A 与 B 互换了位置, 旋转后的线段与原线段重合, 因此, 线段是中心对称图形, 线段的中点是它的对称中心.



图 4-35

做一做

- (1) 举出生活中的一些中心对称图形.
- (2) 图 4-36 中的扑克牌, 哪些牌的牌面图案是中心对称图形?



图 4-36

想一想

如图 4-37, 点 O 是线段 AE 的中点, 以点 O 为对称中心, 画出与五边形 $ABCDE$ 成中心对称的图形 $AD'C'B'E$ (如图 4-38). 图形 $ABCDEB'C'D'$ 是中心对称图形吗? 由此, 你发现了什么?

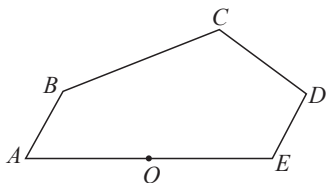


图 4-37

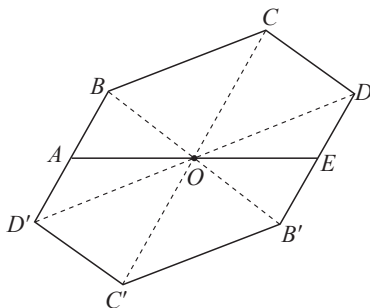
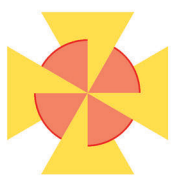


图 4-38

随堂练习

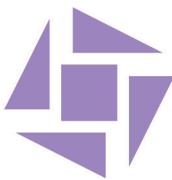
下面哪些图形是中心对称图形?



①



②



③



④



⑤

读一读

旋转对称图形

观察图 4-39 中的等边三角形，点 O 是它的角平分线的交点，将这个三角形绕着点 O 旋转 120° ，可以发现，旋转后的图形与旋转前的图形重合。

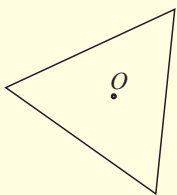


图 4-39

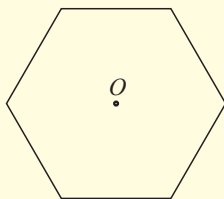


图 4-40

类似地，观察图 4-40 中的正六边形，点 O 是它的内角平分线的交点，将这个正六边形绕着点 O 旋转 60° ，旋转后的图形也与旋转前的图形重合。

一般地，如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度后，能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做旋转对称图形，这个点叫做它的对称中心，旋转的角度叫做旋转角。

上述等边三角形和正六边形都是旋转对称图形，下列图形也都是旋转对称图形。



(1)



(2)



(3)

图 4-41

想一想，在你学过的几何图形中，哪些图形是旋转对称图形？

你能设计一个旋转对称图形吗？（要求它不是中心对称图形）请你试一试。

习题 4.9

知识技能

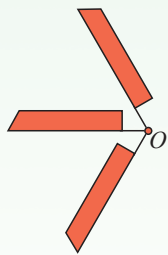
1. 在下面 26 个英文大写字母中，哪些字母是中心对称图形？

A B C D E F G H I J K L M
N O P Q R S T U V W X Y Z

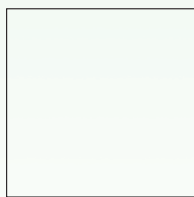
(第 1 题)

数学理解

- 有的图形是轴对称图形但不是中心对称图形，有的图形既是轴对称图形又是中心对称图形. 你能分别举出一些例子吗?
- 图中画出了六叶风车中的三个风叶，请以点 O 为对称中心，画出六叶风车的整体图形.



(第3题)



(第4题)

问题解决

- 在图中的空白正方形内部设计一个图案，使得设计的图案和正方形构成的整体既是中心对称图形，又是轴对称图形，并说明你所设计图案的含义.

4 图形变化的简单应用

图 4-42 是由 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 组成的中心对称图形.

- 请找出它的对称中心 P ;
- 过点 P 画一条直线 l ，并画出 $\triangle ABC$

关于直线 l 成轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$.

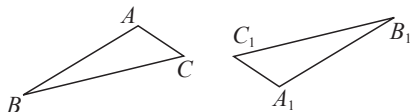


图 4-42

议一议

观察图 4-42 中 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ ，你有什么发现？与同伴进行交流.

想一想

- (1) 观察图 4-43 中的两个图形，它们有什么关系？
- (2) 将左边的图形进行怎样的变化可以得到右边的图形？采用平移变化可以吗？采用旋转变化呢？

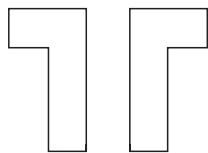


图 4-43

做一做

1. 如图 4-44，你能对甲图案进行适当的运动变化，使它与乙图案重合吗？写出你的操作过程。

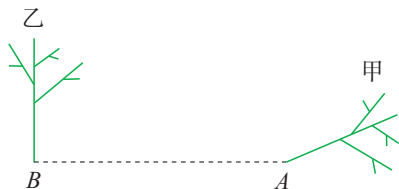


图 4-44

2. (1) 将图 4-43 中的左、右两图摆成图 4-45 的样子。在图 4-45 中，左上方的图形通过怎样的变化可以得到右下方的图形？与同伴进行交流。

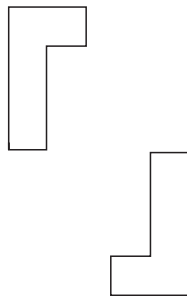
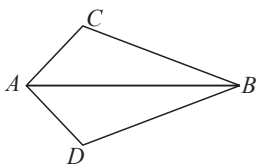


图 4-45

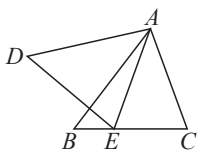
- (2) 如果将图 4-45 中的两个全等图形随便放置到同一平面上的两个不同的位置，你能通过适当的变化使其中一个图形与另一个图形重合吗？试试看。

随堂练习

1. 观察下面各图，分别说明是怎样将 $\triangle ABC$ 变成另一个与它全等的三角形的。

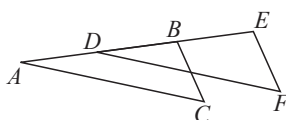


(1)

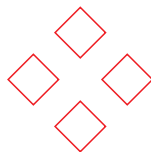


(2)

(第 1 题)

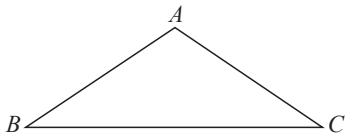


(3)



(第 2 题)

- 观察如图所示的图案，这个图案可以看做是由什么“基本图形”经过怎样的变化得到的？
- 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ 。请你用两个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形拼成一个四边形，并说明其中一个三角形怎样运动变化就可得到另一个三角形。

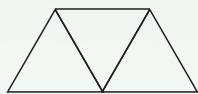


(第3题)

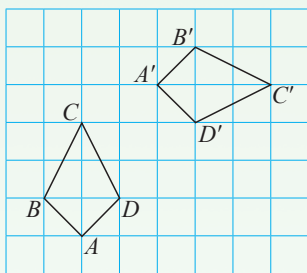
习题 4.10

知识技能

- 如图是由三个等边三角形拼成的图形，它可以看做是由其中一个等边三角形经过怎样的变化而得到的？

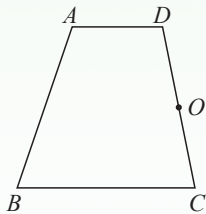


(第1题)

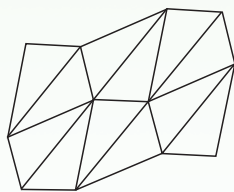


(第2题)

- 如图，方格纸上的四边形 $A'B'C'D'$ 是由四边形 $ABCD$ 经过变化得到的，试说出它的变化过程。
- 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ 。把四边形 $ABCD$ 绕 CD 的中点 O 按顺时针方向旋转 180° ，请画出旋转后的图形。



(第3题)



(第4题)

数学理解

- 如图所示的图案是由12个全等三角形组成的，利用平移、旋转或轴对称分析这个图案的形成过程。

在现实生活中，我们经常见到一些美丽的图案.

你能用平移、旋转或轴对称分析图 4-46 中各个图案的形成过程吗？你是怎样分析的？与同伴进行交流.

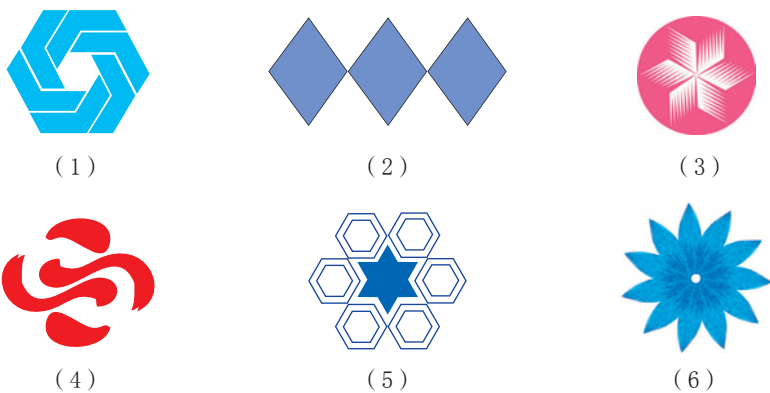


图 4-46

议一议

如图 4-47.

- (1) 你能分析小鱼 ⑤ ⑥ ⑦ 分别是由 ① 经过怎样的变化得到的吗？
- (2) 小鱼 ① 通过怎样的变化可以得到 ④ (不考虑颜色)？
- (3) 小鱼 ① 通过怎样的变化可以得到 ② (不考虑颜色)？还有其它方法吗？
- (4) 小鱼 ① 通过怎样的变化可以得到 ③？与同伴进行交流.

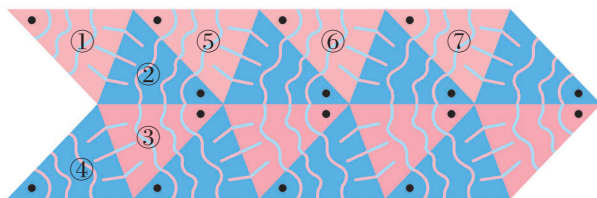


图 4-47

想一想

(1) 图 4-48 中是否存在这样的两个三角形，其中一个是由另一个通过旋转得到的？

(2) 你能利用图形的变化说明图 4-48 的形成过程吗？

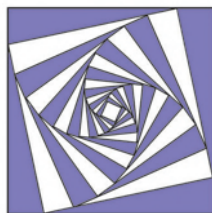


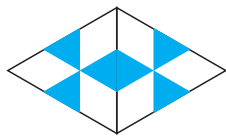
图 4-48

议一议

你能举出生活中利用图形的轴对称、平移或旋转设计图案的实例吗？分析其中一个图案的形成过程，并与同伴进行交流.

随堂练习

1. 请欣赏如图所示的图案，先找出组成该图案的“基本图形”，然后分析它的形成过程.
2. 利用旋转分析下列徽标图案，并设计一个你喜欢的徽标.



(第1题)



(1)



(2)



(3)



(4)

(第2题)

读一读

利用图形变化设计的优美图案

观察图 4-49 中的图案，这个图案的特点是：它可以通过左上角的“天鹅”图案经过向右和向下的平移便得到了整幅图。并且在平移的过程中，“天鹅”图案的大小、形状都不变，只是位置发生了变化.

(1) 你能解释其中的道理吗？

(2) 两只相邻的不同色的“天鹅”之间若不考虑颜色，你可以由其中的一只经过怎样的变化得到另一只？

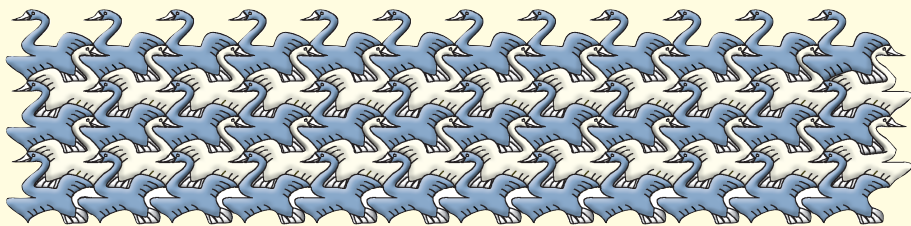


图 4-49

图 4-50 的“水兵合唱团”图案是由一个“水兵”通过平移得到的. 那么其中的一个“水兵”轮廓又是怎么得到的呢? 实际上, 一个“水兵”轮廓可以看做是网格中一个边长为 3 的正方形 (如图 4-51 (1)), 先将中下方格 (第 3 行第 2 个) 向上平移 3 个单位, 再将右上的直角三角形向左平移 3 个单位便可得到 (如图 4-51 (2)). 有了水兵的轮廓, 再加上线条并着色 (如图 4-51 (3)), 问题就解决了.

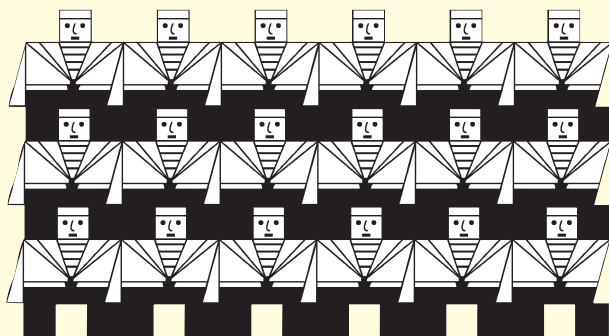


图 4-50

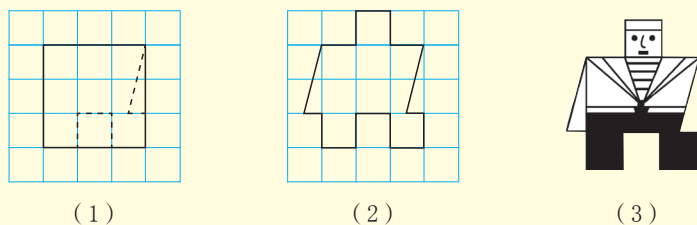


图 4-51

欣赏图 4-52 中的图案, 该图案可以看成是由三个图案组成的, 它们分别是三种不同颜色的“壁虎”(形状、大小完全相同).

在图中, 同色的“壁虎”之间是平移关系, 所有同色的“壁虎”可以由其中一只经过平移而得到; 相邻的不同色的“壁虎”之间可以通过旋转而得到, 其中, 旋转角度为 120° , 旋转中心为“壁虎”头(左侧)上、腿(右下腿)上或脚趾(左下脚趾)上的一点.



图 4-52

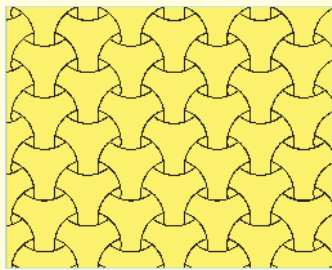


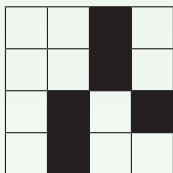
图 4-53

你能分析图 4-53 中的图案是如何形成的吗? 它是由哪个“基本图形”经过怎样的变化得到的? 你能画出这个“基本图形”吗?

习题 4.11

知识技能

1. 利用角、线段等基本图形，借助旋转、平移或轴对称设计一个图案，并简述你的设计意图。
2. 如图是 4×4 的正方形网格，请在其中选取一个白色的小正方形并涂黑，使图中黑色部分是一个中心对称图形。

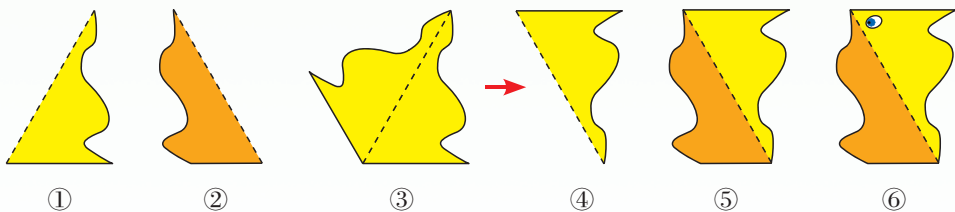


(第2题)

问题解决

3. 按下面的步骤，可以得到一个很别致的图案：
 - (1) 准备一张等边三角形纸片；
 - (2) 把纸片任意撕成两部分（图①、图②）；
 - (3) 以图①中原等边三角形的一边为对称轴，画出与图①成轴对称的图形（如图③），并将新画出的图形以等边三角形的一个顶点作为旋转中心旋转，得到图④（图②保持不动）；
 - (4) 把图④平移到图②的右边，得到图⑤；
 - (5) 对图⑤进行适当地修饰，便得到一个别致的图案⑥。

仿照上述步骤具体做一做，并将你的设计与同伴交流。



(第3题)

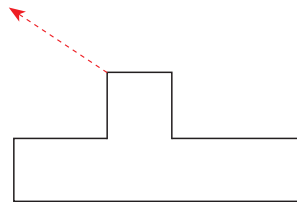
回顾与思考

1. 平移是否改变图形的位置、形状和大小？旋转呢？请举例说明.
2. 平移、旋转各有哪些基本性质？请举例说明.
3. 怎样按要求画出已知图形平移后的图形？怎样按要求画出已知图形旋转后的图形？
4. 在直角坐标系中，一个图形平移前后对应点的坐标之间有什么关系？请举例说明.
5. 中心对称图形与两个图形关于某个点成中心对称有什么区别和联系？
6. 两个成中心对称的图形有哪些特性？中心对称图形有哪些特性？你能举出中心对称图形的实例吗？
7. 收集生活中利用轴对称、平移、旋转设计而成的图案，体会设计者的意图.
8. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 如图所示的图形沿箭头所指方向平移了 4 cm，请画出平移后的图形.
2. 在直角坐标系中，将坐标为 $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(2, 0)$, $(4, 4)$ 的点用线段依次连接起来得到一个图案 N .
 - (1) 将图案 N 向左平移 3 个单位长度，画出平移后的图案；
 - (2) 将图案 N 向下平移 4 个单位长度，画出平移后的图案；
 - (3) 将图案 N 先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，画出第二次平移后的图案；
 - (4) 画出图案 N 关于横轴对称的图案；
 - (5) 画出图案 N 关于纵轴对称的图案；
 - (6) 以原点为对称中心，画出与图案 N 成中心对称的图案.
3. 在直角坐标系中，将坐标为 $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(2, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 2)$, $(3, 0)$, $(2, 0)$ 的点用线段依次连接起来得到一个图案.

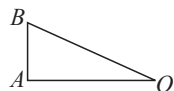


(第1题)

- (1) 每个点的横坐标分别加 5, 纵坐标保持不变, 再将所得到的各个点用线段依次连接起来, 所得的图案与原图案相比有什么变化?
- (2) 如果横坐标保持不变, 纵坐标分别加 7 呢?
- (3) 如果横坐标分别加 7, 纵坐标分别加 5 呢?
- (4) 如果横坐标分别乘 -1 , 纵坐标保持不变呢?
- (5) 如果横坐标保持不变, 纵坐标分别乘 -1 呢?
- (6) 如果横坐标、纵坐标都分别乘 -1 呢?

•G

4. 如图, $\triangle AOB$ 绕点 O 旋转后, 点 G 是点 B 的对应点, 画出 $\triangle AOB$ 旋转后的三角形.

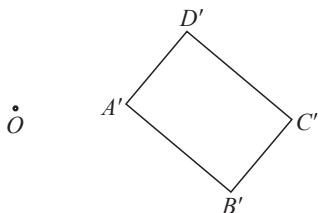


(第 4 题)

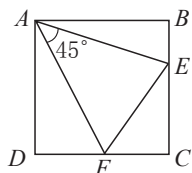
5. 任画一个 $\text{Rt}\triangle ABC$, 其中 $\angle B = 90^\circ$, 分别画出 $\triangle ABC$ 按如下条件旋转或平移后的图形:

- (1) 以点 B 为旋转中心, 按逆时针方向旋转 30° ;
- (2) 以点 B 为旋转中心, 按逆时针方向旋转 180° ;
- (3) 取三角形外一点 P 为旋转中心, 按逆时针方向旋转 180° ;
- (4) 将 $\triangle ABC$ 平移, 使得点 B 的对应点为点 A .

6. 如图, 长方形 $A'B'C'D'$ 是长方形 $ABCD$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 70° 后得到的, 请画出旋转前的长方形 $ABCD$.



(第 6 题)



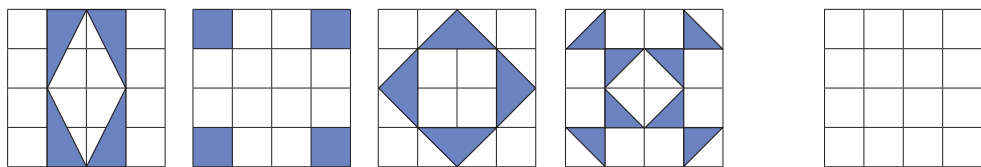
(第 7 题)

- ※7. 如图, 点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$.

- (1) 以点 A 为旋转中心, 将 $\triangle ABE$ 按顺时针方向旋转 90° , 画出旋转后得到的图形;
- (2) 已知 $BE = 2 \text{ cm}$, $DF = 3 \text{ cm}$, 求 EF 的长.

8. 已知点 $A(2, 7)$, $B(-5, 0)$, $C(0, -1)$, 在直角坐标系中, 以原点为对称中心, 画出与 $\triangle ABC$ 成中心对称的图形.

9. 如图 (1), 认真观察四个图中阴影部分构成的图案, 回答下列问题:



(1)

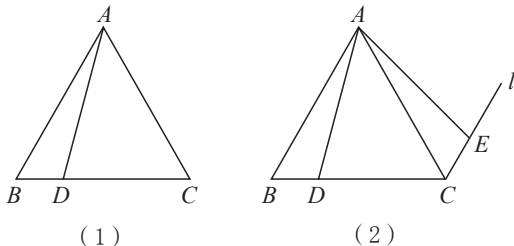
(2)

(第 9 题)

- (1) 请写出这四个图案都具有的两个共同特征;
 (2) 请在图(2)中设计出一个美丽的图案,使它也具备你所写出的上述特征.

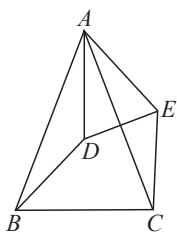
数学理解

10. 火车在一段笔直的铁轨上行驶,这个过程可以看成是车厢沿着铁轨的方向平移的过程.如果火车驶入弯道,这时还可以看成是平移吗?说说你的理由.
11. 如图(1),点 D 是等边三角形 ABC 的边 BC 上的一点,将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转,使得旋转后点 B 的对应点为点 C .
- (1) 在图(1)中画出旋转后的图形;
 (2) 小明是这样做的:如图(2),过点 C 画 BA 的平行线 l ,在 l 上取 $CE=BD$,连接 AE ,则 $\triangle ACE$ 即为 $\triangle ABD$ 旋转后的图形.你能说说小明这样做的道理吗?

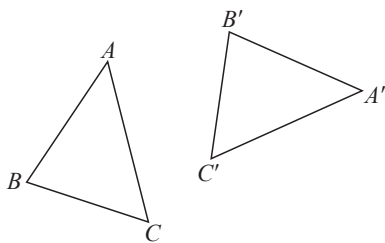


(第11题)

12. 如图, $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ 均是顶角为 42° 的等腰三角形, BC , DE 分别是底边, 图中的哪两个三角形可以通过怎样的旋转而相互得到?



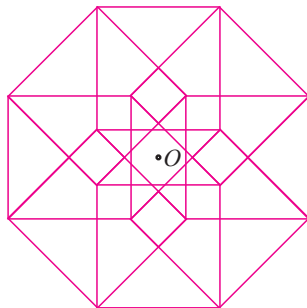
(第12题)



(第13题)

- ※13. 如图, $\triangle ABC$ 经过两次变化得到 $\triangle A'B'C'$, 请说明是如何进行变化的.

14. 如图, 该图案是由一个正方形绕点 O 旋转几次得到的? 旋转角分别是多少度?

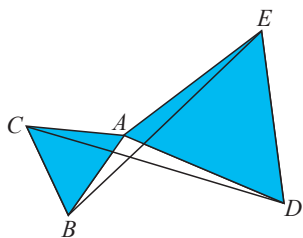


(第14题)

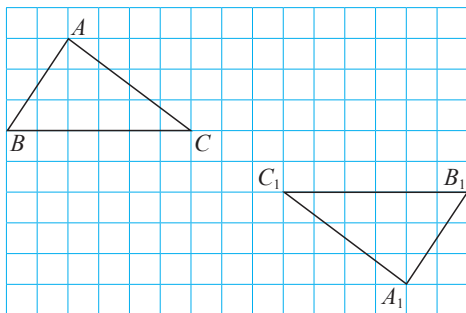
15. 判断正误:

- (1) 可以把半径相等的两个圆中的一个看成是由另一个平移得到的; ()
 (2) 可以把两个全等图形中的一个看成是由另一个平移得到的; ()
 (3) 经过旋转, 对应线段平行且相等; ()
 (4) 中心对称图形上每一组对应点所连成的线段都被对称中心平分. ()

16. 剪两张等边三角形纸片, 把它们的一个顶点固定在一起(如图), 旋转其中的一个三角形, 再分别连接 BE , CD , 并测量 BE , CD 的长度, 你发现了什么? 再旋转一个角度试一试, 看看有没有同样的规律.



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 方格纸上每个小方格的边长都是 1, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 成中心对称.

- (1) 画出对称中心 O ;
 (2) 画出将 $\triangle A_1B_1C_1$ 向上平移 6 个单位长度得到的 $\triangle A_2B_2C_2$;
 (3) $\triangle A_2B_2C_2$ 绕点 C_2 按顺时针方向至少旋转多少度, 才能与 $\triangle CC_1C_2$ 重合?

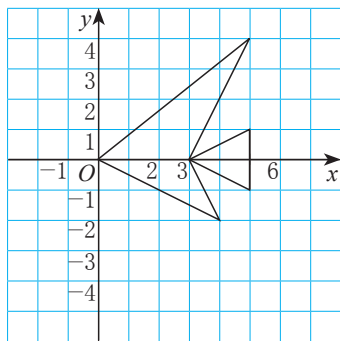
问题 解决

※18. 如图所示的“鱼”是将坐标为 $(0, 0)$, $(5, 4)$, $(3, 0)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(3, 0)$, $(4, -2)$, $(0, 0)$ 的点用线段依次连接而成的. 将这条“鱼”绕原点 O 按顺时针方向旋转 90° .

- (1) 画出旋转后的新“鱼”;
 (2) 写出旋转后新“鱼”各“顶点”的坐标.

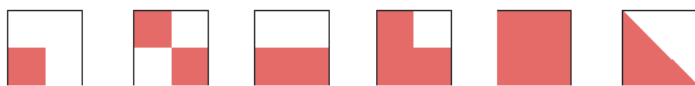
19. 利用平移、旋转、轴对称设计一个图案, 说明你所表达的含义, 并在班上展示你的作品.

20. 利用一个圆、一个正三角形, 通过 2 次旋转或平移设计一个图案, 说明你的设计意图.



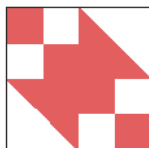
(第 18 题)

21. 现有如图所示的 6 种瓷砖, 请用其中的 4 块瓷砖 (允许有相同的) 设计出美丽的图案.



(第 21 题)

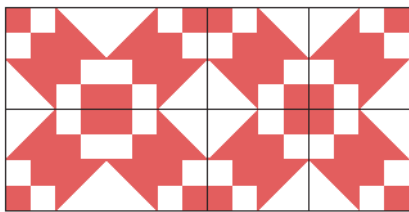
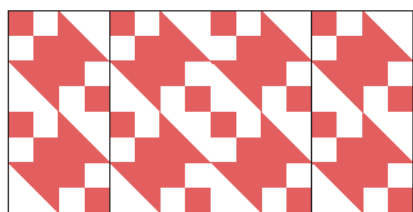
例如:



然后利用你设计的图案, 通过平移、旋转或轴对称, 设计出更加美丽、更加大型的图案. 例如:

(1) 通过平移得到的图案:

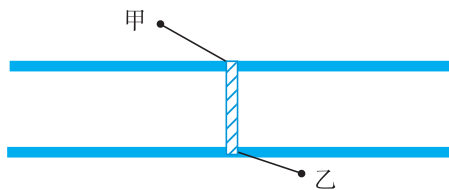
(2) 通过轴对称得到的图案:



※22. 如图, 甲、乙两个单位分别位于一条封闭式街道的两旁, 现准备合作修建一座过街天桥.

(1) 天桥建在何处才能使由甲单位到乙单位的路线最短? (注意: 天桥必须与街道垂直)

(2) 天桥建在何处才能使甲、乙两单位到天桥的距离相等?



(第 22 题)

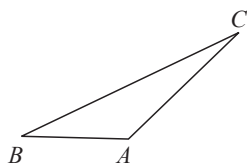
23. 如图, A, B 两点被大山阻隔, 为了改善山区的交通, 现拟开凿一条贯穿 A, B 的隧道, 修建一条高速公路. 请你设计出一个方案, 利用平移的有关知识测量出 A, B 之间的距离和隧道开凿的方向.



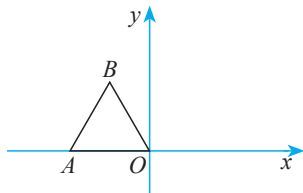
(第 23 题)

联系拓展

24. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle AB'C'$. 试判断 $\triangle ABB'$, $\triangle ACC'$ 的形状.



(第 24 题)



(第 25 题)

25. 如图, $\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形.

(1) 写出 $\triangle OAB$ 各顶点的坐标;

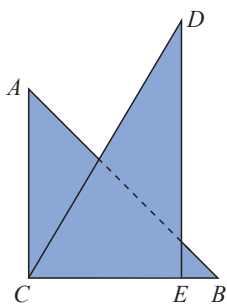
(2) 以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle OAB$ 按顺时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle OA'B'$, 写出点 A' , B' 的坐标.

※26. 把一副三角尺如图 (1) 所示放置, 其中 $\angle ACB = \angle DEC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, 斜边 $AB = 6$ cm, $DC = 7$ cm. 把三角尺 DCE 绕点 C 按顺时针方向旋转 15° 得到 $\triangle D_1CE_1$ (图 (2)), 这时 AB 与 CD_1 相交于点 O , 与 D_1E_1 相交于点 F .

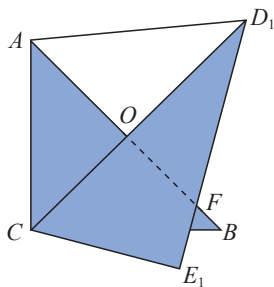
(1) 求 $\angle OFE_1$ 的度数;

(2) 求线段 AD_1 的长;

(3) 若把三角尺 D_1CE_1 绕着点 C 按顺时针方向再旋转 30° 得 $\triangle D_2CE_2$, 这时点 B 在 $\triangle D_2CE_2$ 的内部、外部还是边上? 说明理由.



(1)



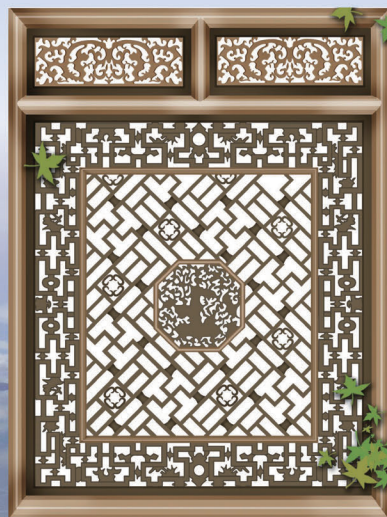
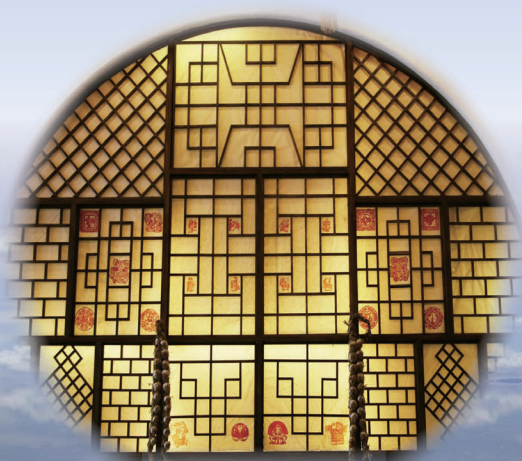
(2)

(第 26 题)

第五章 平行四边形

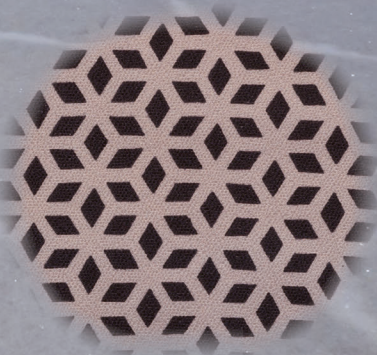
生活中有哪些物体的形状是平行四边形？平行四边形有哪些性质？能证明它们吗？用两对长度分别相等的细木条能搭出一个平行四边形吗？任意作一个四边形，依次连接它的各边中点，你能得到一个怎样的四边形呢？

本章将研究平行四边形的性质与判别方法，以及三角形中位线的性质，还将探索多边形的内角和、外角和的规律；经历操作、实验等几何发现之旅，享受几何证明之完美。



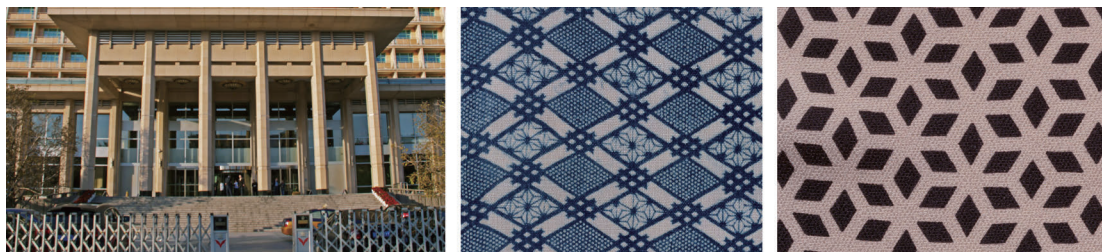
学习目标

- 探索并证明平行四边形的性质定理和判定定理
- 探索并证明三角形中位线定理
- 探索并掌握多边形内角和与外角和公式
- 积累数学活动经验，发展推理能力



1 平行四边形的性质

平行四边形是生活中常见的图形，你能举出一些实例吗？



两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形 (parallelogram). 平行四边形不相邻的两个顶点连成的线段叫做它的对角线 (diagonal). 如图 5-1, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 记作 $\square ABCD$, 读作“平行四边形 $ABCD$ ”. 线段 BD 就是 $\square ABCD$ 的一条对角线.

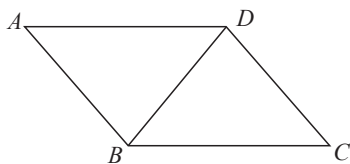


图 5-1

做一做

- (1) 平行四边形是中心对称图形吗？如果是，你能找出它的对称中心并验证你的结论吗？
- (2) 你还发现平行四边形有哪些性质？

平行四边形是中心对称图形，两条对角线的交点是它的对称中心.

我们还发现：平行四边形的两组对边分别相等，两组对角分别相等. 你能证明这些结论吗？

已知：如图 5-2 (1)，四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

求证： $AB = CD$ ， $BC = AD$ 。

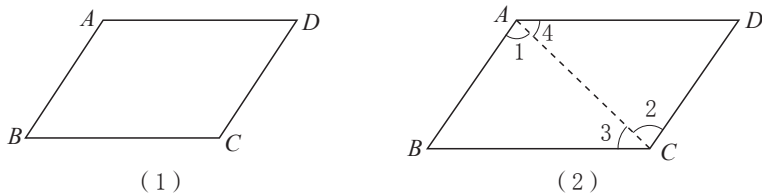


图 5-2

证明：连接 AC (如图 5-2 (2))。

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $BC \parallel AD$ (平行四边形的定义)。

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

$\because AC = CA$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ 。

$\therefore AB = CD$ ， $BC = AD$ 。

请你证明：平行四边形的两组对角分别相等。

定理 平行四边形的对边相等。

定理 平行四边形的对角相等。

例 1 已知：如图 5-3，在 $\square ABCD$ 中， E ， F 是对角线 AC 上的两点，并且 $AE = CF$ 。

求证： $BE = DF$ 。

证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$ (平行四边形的对边相等)，

$AB \parallel CD$ (平行四边形的定义)。

$\therefore \angle BAE = \angle DCF$ 。

又 $\because AE = CF$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。

$\therefore BE = DF$ 。

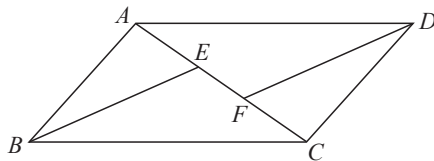
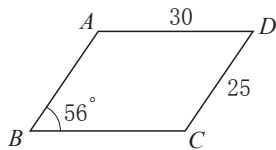


图 5-3

随堂练习

1. 小斌用一根 50 m 长的绳子围成一个平行四边形场地，其中一边长 16 m，求其他三边的长度.
2. 已知平行四边形一个内角的度数，能确定其他内角的度数吗？说说你的理由.
3. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 求：
 - (1) $\angle ADC$ 和 $\angle BCD$ 的度数；
 - (2) AB 和 BC 的长度.

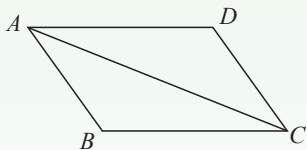


(第3题)

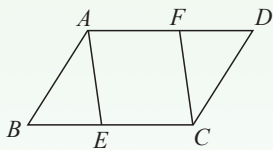
习题 5.1

知识技能

1. 在 $\square ABCD$ 中， $\angle A = 48^\circ$ ， $BC = 3$ cm，求 $\angle B$ ， $\angle C$ 的度数及 AD 边的长度.
2. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle ADC = 125^\circ$ ， $\angle CAD = 21^\circ$ ，求 $\angle ACB$ 和 $\angle CAB$ 的度数.



(第2题)

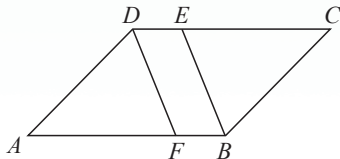


(第3题)

3. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， E ， F 分别是 BC 和 AD 上的点，且 $BE = DF$.
求证： $AE = CF$.

联系拓广

4. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 E ， $\angle ADC$ 的平分线交 AB 于点 F .
求证： $BF = DE$.



(第4题)

在上一课的“做一做”中，我们还发现：平行四边形的对角线互相平分. 你能证明这一结论吗？试一试.

已知：如图 5-4， $\square ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。

求证： $OA = OC$ ， $OB = OD$ 。

证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$ （平行四边形的对边相等），

$AB \parallel CD$ （平行四边形的定义）。

$\therefore \angle BAO = \angle DCO$ ， $\angle ABO = \angle CDO$ 。

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO$ 。

$\therefore OA = OC$ ， $OB = OD$ 。

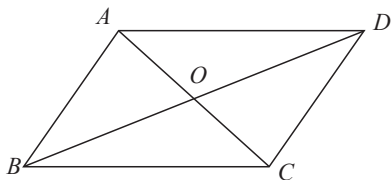


图 5-4

你还有其他证明方法吗？与同伴交流。

定理 平行四边形的对角线互相平分。

例 2 已知：如图 5-5， $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 O 的直线与 AD ， BC 分别相交于点 E ， F 。

求证： $OE = OF$ 。

证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DO = BO$ （平行四边形的对角线互相平分）。

$\because AD \parallel BC$ （平行四边形的定义），

$\therefore \angle ODE = \angle OBF$ 。

$\because \angle DOE = \angle BOF$ ，

$\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF$ 。

$\therefore OE = OF$ 。

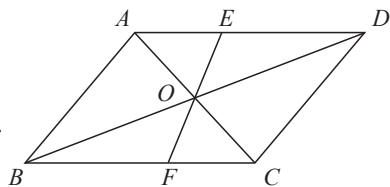


图 5-5

做一做

如图 5-6， $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。已知 $\angle ODA = 90^\circ$ ， $OA = 6$ ， $OB = 3$ 。求 AD 和 AB 的长度。

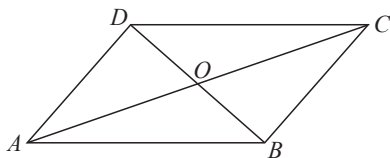


图 5-6

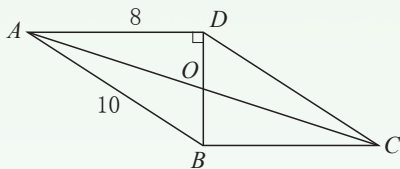
随堂练习

1. 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 O , OA, OB, AB 的长分别为 3, 4, 5, 求其他各边以及两条对角线的长度.
2. 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 O , OA, OB, AB 的长分别为 3, 5, 4. 求 AD 的长度.

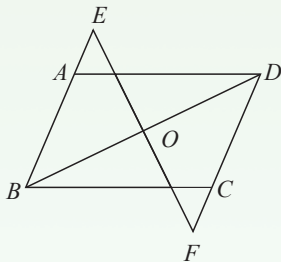
习题 5.2

知识技能

1. 在 $\square ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , 已知 $AC = 16 \text{ mm}$, $BD = 24 \text{ mm}$, $AD = 13 \text{ mm}$, 求 $\triangle OBC$ 的周长.
2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $BD \perp AD$, $AB = 10$, $AD = 8$. 求 OB 的长度及 $\square ABCD$ 的面积.



(第 2 题)

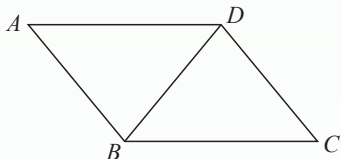


(第 3 题)

3. 已知: 如图, 点 O 为 $\square ABCD$ 的对角线 BD 的中点, 直线 EF 经过点 O , 分别交 BA 的延长线、 DC 的延长线于点 E, F .
求证: $AE = CF$.

数学理解

4. 如图, 直线 BD 可以将 $\square ABCD$ 分成全等的两部分, 这样的直线还有很多.
 - (1) 多画几条这样的直线, 看看它们有什么共同的特征;
 - (2) 尝试用中心对称图形的性质去解释你的发现.



(第 4 题)

在笔直的铁轨上，夹在两根铁轨之间的平行枕木是否一样长？你能说明理由吗？与同伴交流。



例3 已知：如图5-7，直线 $a \parallel b$ ， A, B 是直线 a 上任意两点， $AC \perp b$ ， $BD \perp b$ ，垂足分别为 C, D 。

求证： $AC = BD$ 。

证明： $\because AC \perp b, BD \perp b,$

$\therefore AC \parallel BD.$

$\because AB \parallel CD,$

\therefore 四边形 $ACDB$ 是平行四边形（平行四边形的定义）。

$\therefore AC = BD$ （平行四边形的对边相等）。

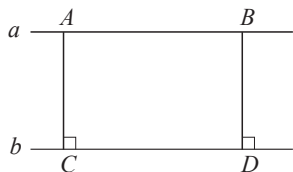


图 5-7

如果两条直线互相平行，则其中一条直线上所有各点到另一条直线的距离都相等。两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，就叫做这两条平行线之间的距离。图5-7中， AC （或 BD ）的长就是平行线 a, b 之间的距离。



想一想

夹在两条平行线之间的平行线段一定相等吗？为什么？

例4 已知 $\square ABCD$ ， $AB = 8 \text{ cm}$ ， $BC = 10 \text{ cm}$ ， $\angle B = 30^\circ$ 。

求 $\square ABCD$ 的面积。

解：过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为点 E （如图5-8）。

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

$\because \angle B = 30^\circ, AB = 8,$

$\therefore AE = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

$\therefore \square ABCD$ 的面积 $S_{\square ABCD} = BC \cdot AE = 10 \times 4 = 40 (\text{cm}^2).$

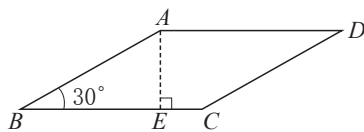


图 5-8

想一想

如图 5-9, 已知直线 $l \parallel AB$, 点 P_1, P_2, P_3 都在 l 上, $\triangle ABP_1, \triangle ABP_2, \triangle ABP_3$ 的面积是否相等? 为什么?

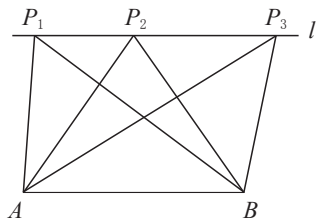
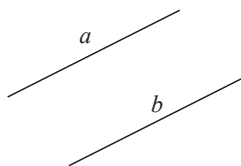


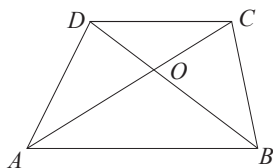
图 5-9

随堂练习

- 如图, 已知直线 $a \parallel b$, 度量 a, b 之间的距离.
- 如图, 已知 $AB \parallel CD$, AC, BD 相交于点 O , $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 的面积相等吗? 为什么?



(第 1 题)



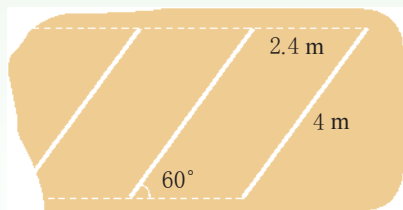
(第 2 题)

- 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 3, AD = \sqrt{2}, \angle B = 135^\circ$, 求 $\square ABCD$ 的面积.

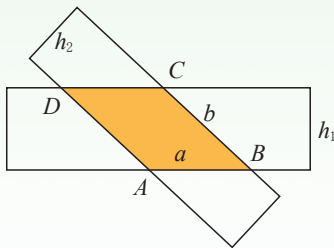
习题 5.3

知识技能

- 如图, 某停车场的停车位都是平行四边形, 根据图中的尺寸求每个停车位的占地面积 (精确到 0.1 m^2).



(第 1 题)

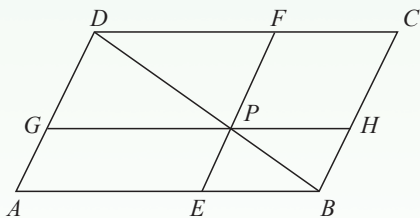


(第 2 题)

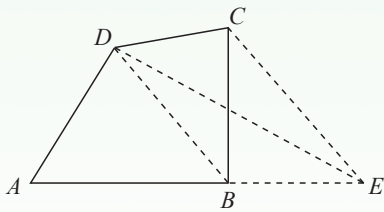
2. 如图, 小明将两张对边平行的纸条随意交叉叠在一起, 重合的部分构成了四边形 $ABCD$. 小明说: “如果 $AB = a$, $BC = b$, 两张纸条的宽分别为 h_1, h_2 , 那么等式 $ah_1 = bh_2$ 一定成立.” 小明说的对吗? 为什么?
3. 求证: 平行四边形两条对角线将平行四边形的面积四等分.

联系拓广

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, P 是对角线 BD 上的任意一点, 过点 P 作 $EF \parallel BC$, 分别与 AB, CD 相交于点 E, F ; 过点 P 再作 $GH \parallel AD$, 分别与 AD, BC 相交于点 G, H . 图中有几个平行四边形? 其中哪几对平行四边形面积相等? 为什么?



(第4题)



(第5题)

- ※5. 小颖对小明说, 你给我任意一个四边形 $ABCD$, 我都可以画出一个与你给的四边形面积相等的三角形, 方法如下: 连接 BD , 过点 C 作 $CE \parallel BD$, 交 AB 的延长线于点 E , 连接 DE , 则 $S_{\triangle AED} = S_{\text{四边形}ABCD}$. 她说的有道理吗?

2 平行四边形的判定

有两组长度分别相等的细木条, 能否在平面内将这四根细木条首尾顺次相接拼成一个平行四边形? 说说你的理由, 并与同伴交流.

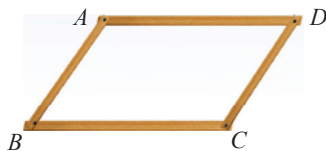


图 5-10

定理 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

已知：如图 5-11 (1)，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， $AD = CB$ 。

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

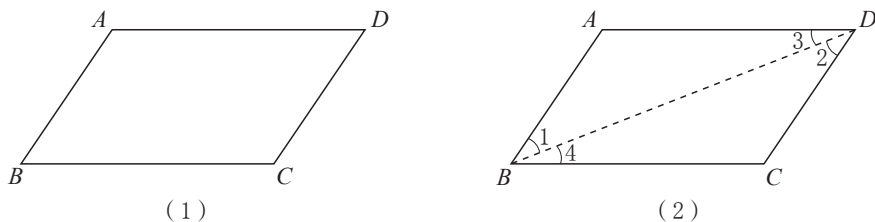


图 5-11

证明：如图 5-11 (2)，连接 BD 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$$\because AD = CB, AB = CD, BD = DB,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$$

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel CB.$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (平行四边形的定义)。

例 1 已知：如图 5-12， E, F, G, H 分别是 $\square ABCD$ 四条边上的点， $AE = CG$ ， $BF = DH$ 。

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle A = \angle C, AD = BC.$$

$$\because DH = BF,$$

$$\therefore AH = CF.$$

又 $\because AE = CG$,

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF.$$

$$\therefore EH = GF.$$

同理， $EF = GH$ 。

\therefore 四边形 $EFGH$ 是平行四边形 (两组对边分别相等的四边形是平行四边形)。

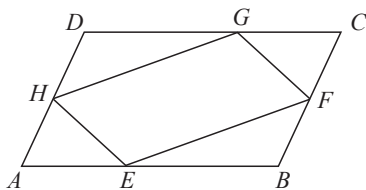


图 5-12

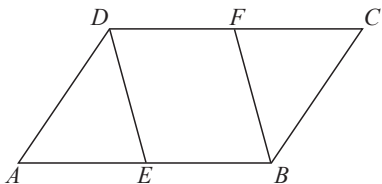
议一议

一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

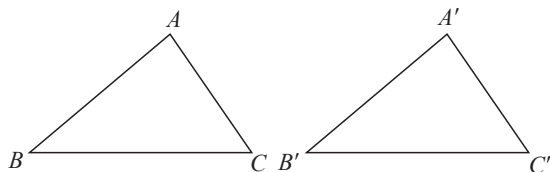
随堂练习

1. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E, F 分别是 AB, CD 的中点。

求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形。



(第1题)



(第2题)

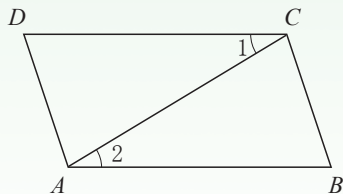
2. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 用这两个三角形可以拼成几个不同的四边形？其中有几个是平行四边形？拼一拼，试试看。

习题 5.4

知识技能

1. 已知：如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle B = \angle D$ 。

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。



(第1题)

联系拓广

2. 有一组对边平行，且有一组对角相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

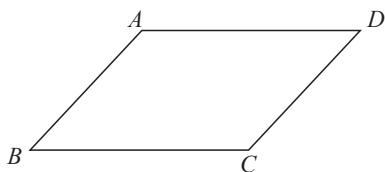
议一议

有两根长度相等的细木条，在平面内怎样摆放才能使它们的四个端点恰好是一个平行四边形的四个顶点？

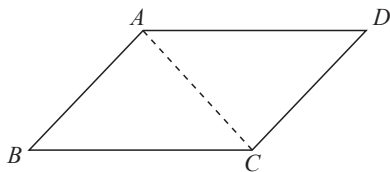
定理 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

已知：如图 5-13 (1)，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \underline{\underline{=}}^{\textcircled{1}} CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(1)



(2)

图 5-13

证明：如图 5-13 (2)，连接 AC .

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DCA.$$

$$\text{又} \because AB = CD, AC = CA,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

$$\therefore BC = DA.$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

你还有其他证
法吗？与同伴交流.

例 2 已知：如图 5-14，在 $\square ABCD$ 中，点 M, N 分别在 AD 和 BC 上，点 E, F 在 BD 上， $DM = BN, DF = BE$.

求证：四边形 $MENF$ 是平行四边形.

证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC \text{ (平行四边形的定义)}.$$

① 符号“ $\underline{\underline{=}}$ ”表示平行且相等，读作“平行且等于”.

$\therefore \angle MDF = \angle NBE.$
 $\because DM = BN, DF = BE,$
 $\therefore \triangle MDF \cong \triangle NBE.$
 $\therefore MF = NE, \angle MFD = \angle NEB.$
 $\therefore \angle MFE = \angle NEF.$
 $\therefore MF \parallel NE.$

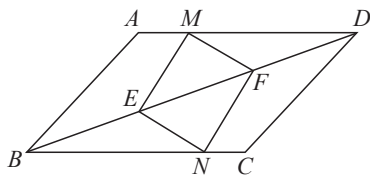


图 5-14

\therefore 四边形 $MENF$ 是平行四边形 (一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

做一做

如图 5-15, 以方格纸的格点为顶点用直尺画出三个平行四边形, 并说明你画图的方法和其中的道理.

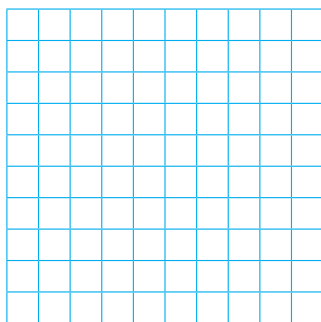
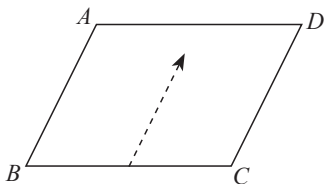


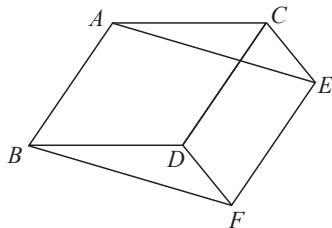
图 5-15

随堂练习

1. 如图, 线段 AD 是线段 BC 经过平移得到的, 分别连接 AB, CD , 四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗? 请说明理由.



(第 1 题)



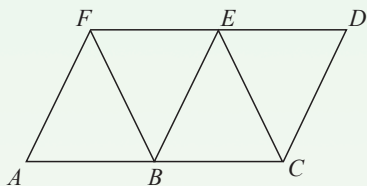
(第 2 题)

2. 已知: 四边形 $ABDC$ 与四边形 $DCEF$ 都是平行四边形.
 求证: 四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

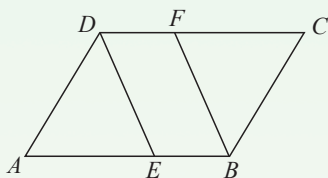
习题 5.5

知识技能

1. 如图, $AC \parallel DF$, 点 B 在 AC 上, 点 E 在 FD 上, 且 $AB = BC = DE = EF$. 找出图中的平行四边形, 并说明理由.



(第1题)

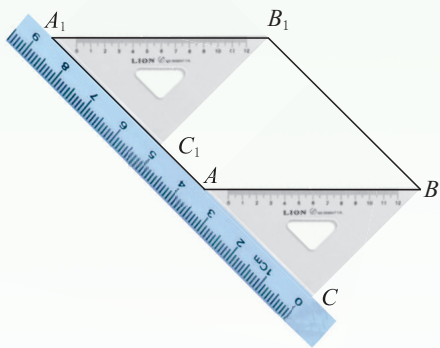


(第2题)

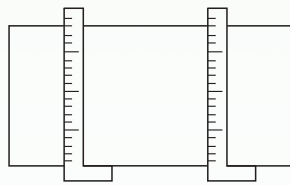
2. 已知: 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 AB 和 CD 上, $AE = CF$.
求证: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

数学理解

3. 小明是这样画平行四边形的: 如图, 将三角尺 ABC 的一边 AC 贴着直尺推移到 $A_1B_1C_1$ 的位置, 这时四边形 ABB_1A_1 就是平行四边形. 你能说说小明这样做的道理吗?



(第3题)



(第4题)

4. 如图, 为了检验一块木板相对的两个边缘是否平行, 木工师傅常常把两把曲尺的一边紧靠木板一个边缘, 再看木板另一边缘对应曲尺上的刻度是否相等. 如果刻度相等, 木工师傅就判断木板的两个边缘平行. 你能说说木工师傅这样做的道理吗?

前面我们已经得到了平行四边形的两个判定方法，你还能找到其他的判定方法吗？



如图 5-16，将两根木条 AC ， BD 的中点重叠，并用钉子固定，四边形 $ABCD$ 看起来是平行四边形. 于是我猜想：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

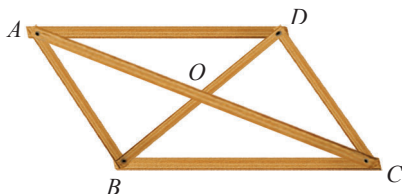


图 5-16

你同意小明的想法吗？你能证明他的猜想吗？试一试.

已知：如图 5-17，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，并且 $OA = OC$ ， $OB = OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

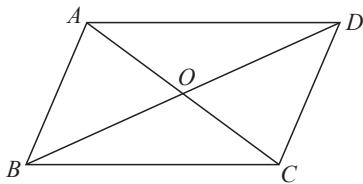


图 5-17

证明： $\because OA = OC$ ， $OD = OB$ ，
 $\angle AOD = \angle COB$ ，
 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$.
 $\therefore AD = CB$ ， $\angle ADO = \angle CBO$.
 $\therefore AD \parallel CB$.
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

定理 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例3 已知：如图 5-18 (1)， E, F 为 $\square ABCD$ 对角线 AC 上的两点，且 $AE = CF$ 。

求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形。

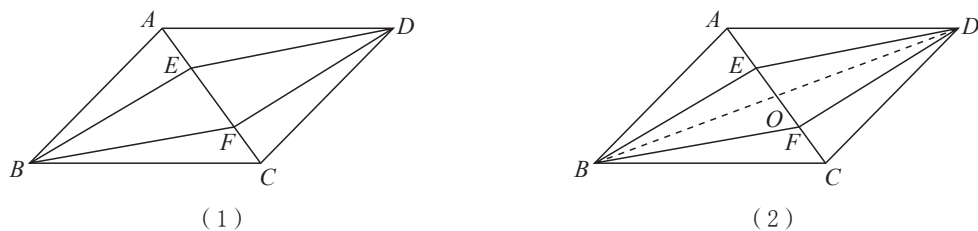


图 5-18

证明：如图 5-18 (2)，连接 BD ，交 AC 于点 O 。

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC, OB = OD$ (平行四边形的对角线互相平分)。

$\because AE = CF$,

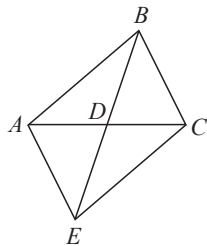
$\therefore OA - AE = OC - CF$ ，即 $OE = OF$ 。

\therefore 四边形 $BFDE$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形)。

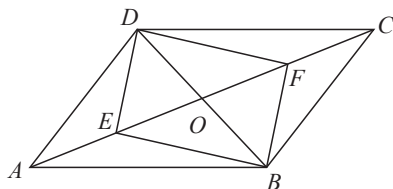
随堂练习

1. 已知：如图，延长 $\triangle ABC$ 的中线 BD 到点 E ，使 $DE = BD$ ，连接 AE, CE 。

求证： $\angle BAE = \angle BCE$ 。



(第1题)



(第2题)

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， E, F 分别是 OA 和 OC 的中点，四边形 $BFDE$ 是平行四边形吗？请说明理由。

读一读

生活中的平行四边形

平行四边形是日常生活中常见的图形，如折叠晾衣架、折叠拉门等。此外，如图 5-19 所示的缩放尺的结构也是平行四边形。

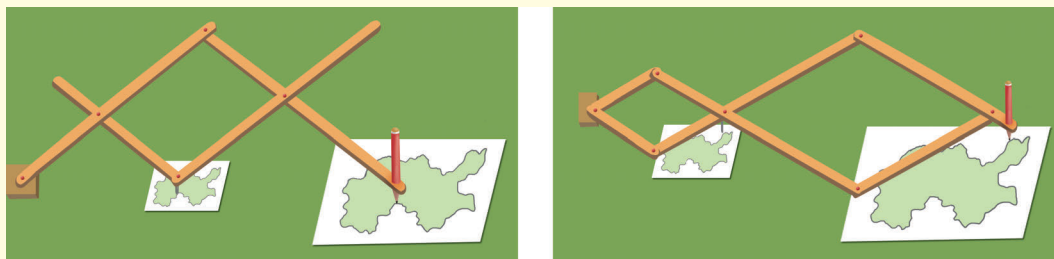


图 5-19

实际上，平行四边形连杆是机械结构中常见的一种部件。这种连杆在移动时，两对边始终保持平行，能方便地进行往复运动。

下面有三组平行四边形连杆机械的实例设计图（图 5-20），它们分别是：（A）指针式弹簧秤；（B）活动工具箱；（C）儿童荡板。每一组设计图中有一幅是合理的，有一幅有一点问题，你知道哪一幅有问题吗？

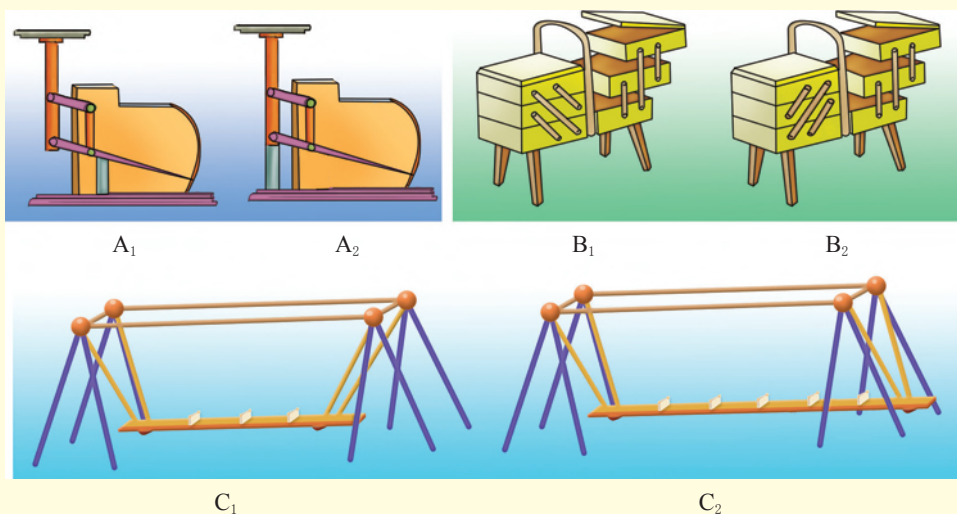
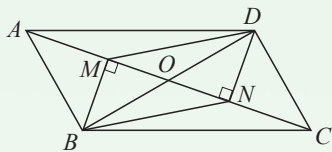


图 5-20

习题 5.6

知识技能

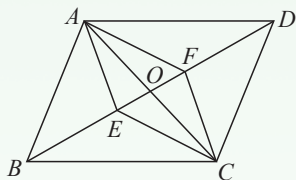
1. 已知: 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $BM \perp AC, DN \perp AC$, 垂足分别为 M, N .
求证: 四边形 $BMDN$ 是平行四边形.



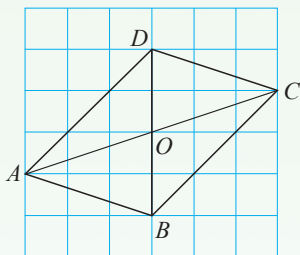
(第1题)

数学理解

2. 如图, 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E, F 是 BD 上的两点.
- (1) 当 BE, DF 满足什么条件时, 四边形 $AECF$ 是平行四边形? 请说明理由;
 - (2) 当 $\angle AEB$ 与 $\angle CFD$ 满足什么条件时, 四边形 $AECF$ 是平行四边形? 请说明理由.



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 点 A, B, C, D 都在正方形网格格点上, 试用多种方法说明四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

联系拓广

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E, F, G, H 分别是 AO, BO, CO, DO 上的点.

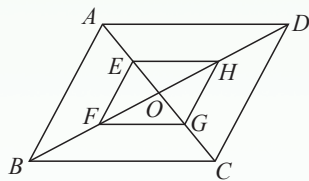
- (1) 如果 $AE = \frac{1}{2}AO, BF = \frac{1}{2}BO, CG = \frac{1}{2}CO,$
 $DH = \frac{1}{2}DO,$ 那么四边形 $EFGH$ 是平行四边形

吗? 证明你的结论;

- (2) 如果 $AE = \frac{1}{3}AO, BF = \frac{1}{3}BO, CG = \frac{1}{3}CO, DH = \frac{1}{3}DO,$ 那么四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗? 证明你的结论;

- (3) 如果 $AE = \frac{1}{n}AO, BF = \frac{1}{n}BO, CG = \frac{1}{n}CO, DH = \frac{1}{n}DO,$ 其中 n 为大于 1 的正整数, 那么上述结论还成立吗?

- (4) 如果 $AE = \frac{1}{m}AO, BF = \frac{1}{n}BO, CG = \frac{1}{m}CO, DH = \frac{1}{n}DO$ 呢?



(第4题)

3 三角形的中位线

你能将任意一个三角形分成四个全等的三角形吗？你能通过剪拼的方式，将一个三角形拼成一个与其面积相等的平行四边形吗？



如图 5-21 (1)，在 $\triangle ABC$ 中，连接每两边的中点，看上去就得到了四个全等的三角形。将 $\triangle ADE$ 绕点 E 按顺时针方向旋转 180° 到 $\triangle CFE$ 的位置（如图 5-21 (2)），这样就得到了一个与 $\triangle ABC$ 面积相等的 $\square DBCF$ 。

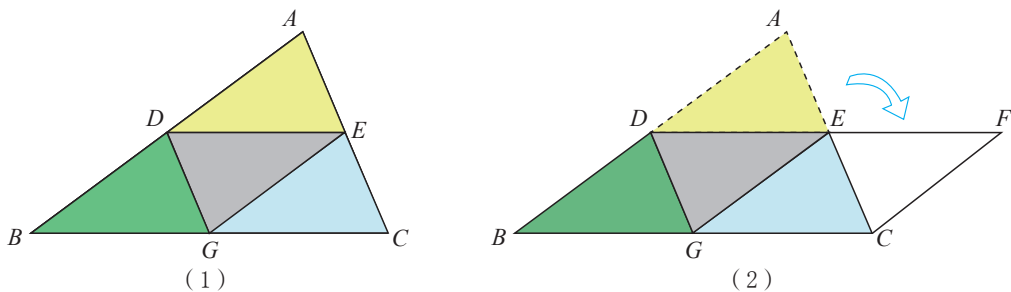


图 5-21

想一想

从小明的上述做法中，你能猜想出三角形两边中点的连线与第三边有怎样的关系？能证明你的猜想吗？

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。

三角形中位线定理 三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

已知：如图 5-22 (1)， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

求证： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$.

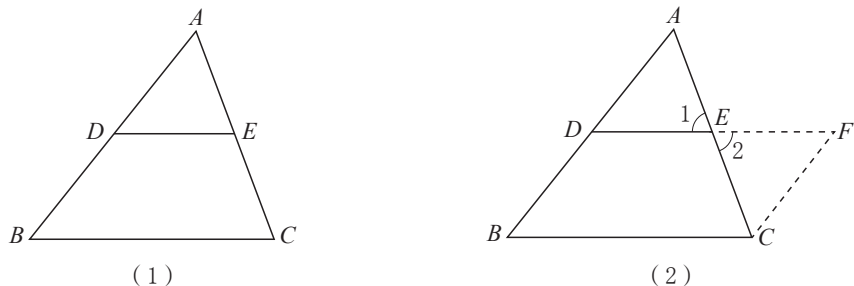


图 5-22

证明：如图 5-22 (2)，延长 DE 到 F ，使 $FE = DE$ ，连接 CF

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，

$$\because AE = CE, \angle 1 = \angle 2, DE = FE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE.$$

$$\therefore \angle A = \angle ECF, AD = CF.$$

$$\therefore CF \parallel AB.$$

$$\because BD = AD,$$

$$\therefore CF = BD.$$

\therefore 四边形 $DBCF$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

$$\therefore DF \parallel BC \text{ (平行四边形的定义)},$$

$$DF = BC \text{ (平行四边形的对边相等)}.$$

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC.$$

利用三角形中位线定理可以证明小明分割的四个小三角形全等.

议一议

如图 5-23, 任意画一个四边形 $ABCD$, 并将四边的中点 E, F, G, H 依次连接起来, 得到一个新四边形 $EFGH$, 四边形 $EFGH$ 的形状有什么特征? 请证明你的结论, 并与同伴交流.

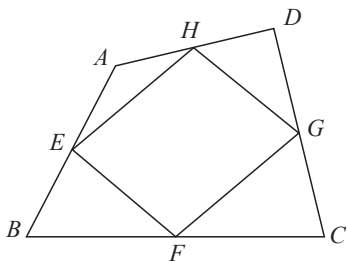
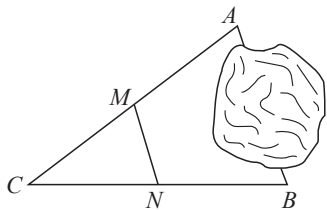


图 5-23

随堂练习

1. 已知三角形的各边长分别为 8 cm, 10 cm 和 12 cm, 求以各边中点为顶点的三角形的周长.
2. 如图, A, B 两地被池塘隔开, 在没有任何测量工具的情况下, 小明通过下面的方法估测出了 A, B 间的距离: 先在 AB 外选一点 C , 然后步测出 AC, BC 的中点 M, N , 并测出 MN 的长, 由此他就知道了 A, B 间的距离. 你能说说其中的道理吗?



(第 2 题)

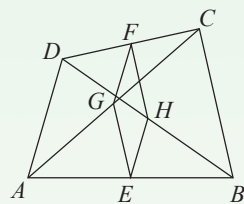
习题 5.7

知识技能

1. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 的中点.
求证: 四边形 $AFDE$ 的周长等于 AB 与 AC 的和.
2. 求证: 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

数学理解

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别为 AB, CD, AC, BD 的中点. 四边形 $EGFH$ 是平行四边形吗? 请证明你的结论.



(第3题)

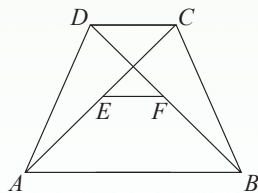
问题解决

4. 在本节随堂练习第2题中, 如果 M, N 两点之间还有阻隔, 你有什么解决办法? 说明你的理由.

联系拓广

5. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB > CD$.
 E, F 分别是 AC, BD 的中点.

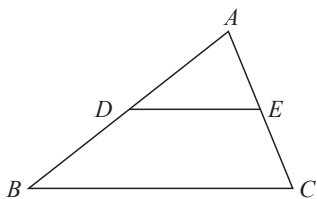
求证: $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$.



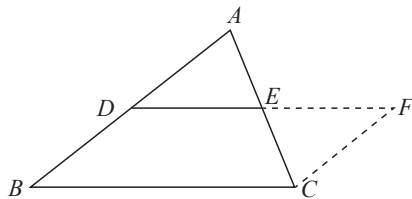
(第5题)

议一议*

如图 5-24 (1), 由三角形中位线定理可知, 在 $\triangle ABC$ 中, 若点 D, E 分别是 AB, AC 边的中点, 则 $DE \parallel BC$.



(1)



(2)

图 5-24

反过来, 若 D 是 AB 边的中点, $DE \parallel BC$, 交 AC 于点 E , 点 E 是 AC 边的中点吗? 如果是, 怎样证明? 你能从证明三角形中位线定理添加辅助线的方法

* 本节课为选学内容.

(如图 5-24 (2)) 中得到启发吗?

已知: 如图 5-24 (1), 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 边上, $AD = DB, DE \parallel BC$.

求证: $AE = EC$.

证明一: 过点 C 作 $CF \parallel AB$, 交 DE 的延长线于点 F , 如图 5-24 (2).

$\therefore DF \parallel BC, CF \parallel BD,$

\therefore 四边形 $BCFD$ 是平行四边形.

$\therefore DB = CF.$

$\therefore AD = DB,$

$\therefore AD = CF.$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CFE$ 中,

$\therefore CF \parallel AB,$

$\therefore \angle A = \angle ECF, \angle ADE = \angle F.$

又 $\therefore AD = CF,$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE.$

$\therefore AE = EC.$

证明二: 取 BC 的中点 F , 连接 DF (如图 5-25), 则 DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DF \parallel AC, AC = 2DF.$

又 $\therefore DE \parallel FC,$

\therefore 四边形 $FCED$ 是平行四边形.

$\therefore DF = EC.$

$\therefore AC = 2EC.$

$\therefore AE = EC.$

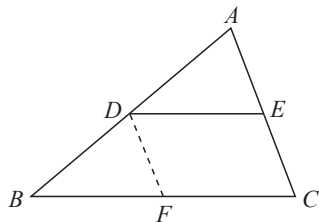


图 5-25



想一想

(1) 下面两种添加辅助线的方法可以证明“议一议”中的问题吗? 试一试.

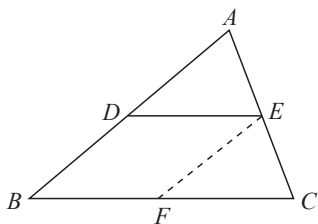


图 5-26

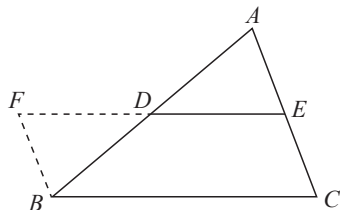


图 5-27

你还有其他添加辅助线的方法吗？

(2) 小明说，由上述证明可以得到一个真命题：经过三角形一边的中点且平行于另一边的直线，必平分三角形的第三边。他说的对吗？

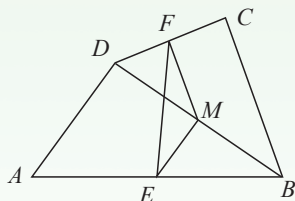
随堂练习

1. 本课证明一中，若改成如下添加辅助线的方法：“延长 DE 到 F ，使 $DF = BC$ ，连接 FC ”，怎样证明 $AE = EC$ ？
2. 本课证明二中，若改成如下添加辅助线的方法：“过点 D 作 $DF \parallel AC$ ，交 BC 于点 F ”，怎样证明 $AE = EC$ ？

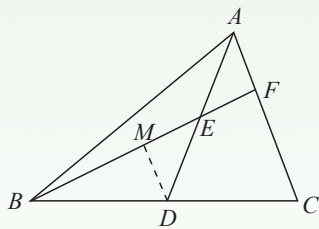
习题 5.8

知识技能

1. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， E, F, M 分别是 AB, CD, BD 的中点， $AD = BC$ 。
求证： $\angle EFM = \angle FEM$ 。



(第 1 题)



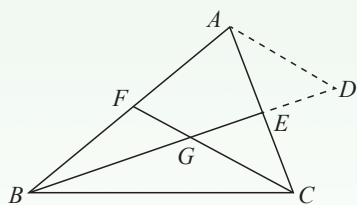
(第 2 题)

问题解决

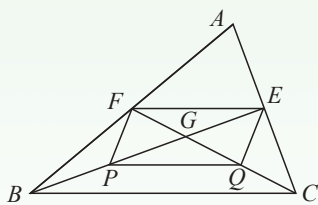
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边的中线， E 是 AD 的中点，连接 BE 并延长交 AC 于点 F 。用图中添加辅助线的方法（取 BF 的中点 M ，连接 MD ）证明： $AF = \frac{1}{2}FC$ 。

联系拓广

3. 如图, $\triangle ABC$ 的中线 BE , CF 相交于点 G , 用图中添加辅助线的方法 (延长 BE 到 D , 使 $GD = BG$, 连接 AD) 证明: $BG = 2GE$, $CG = 2GF$.



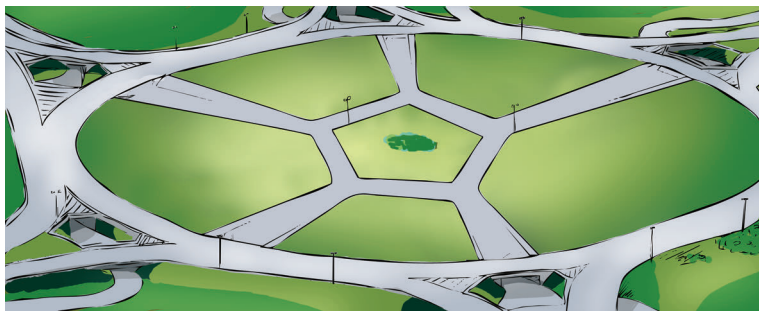
(第3题)



(第4题)

4. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 的中线 BE , CF 相交于点 G , P , Q 分别是 BG , CG 的中点.
求证: (1) 四边形 $EFPQ$ 是平行四边形;
(2) $BG = 2GE$, $CG = 2GF$.
5. 根据三角形中位线定理, 用反证法证明本节课“议一议”中的问题.

4 多边形的内角和与外角和



(1) 上图中广场中心的边缘是一个五边形, 你能设法求出它的五个内角的和吗? 与同伴交流.

(2) 小明、小亮分别利用图 5-28、图 5-29 求出了该五边形的五个内角的和. 你知道他们是怎样做的吗? 你还有其他的方法吗?

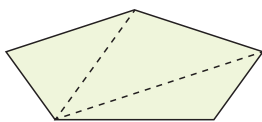


图 5-28

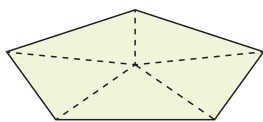


图 5-29

想一想

- (1) 按照图 5-28 的方法，六边形能分成多少个三角形？ n 边形呢？（ n 是大于或等于 3 的自然数）
- (2) 按照图 5-29 的方法，六边形能分成多少个三角形？ n 边形呢？
- (3) 你能确定 n 边形的内角和吗？

n 边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$.

例 1 如图 5-30，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A + \angle C = 180^\circ$. $\angle B$ 与 $\angle D$ 有怎样的关系？

解： $\because \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (4-2) \times 180^\circ$
 $= 360^\circ,$

$\therefore \angle B + \angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle C)$
 $= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$

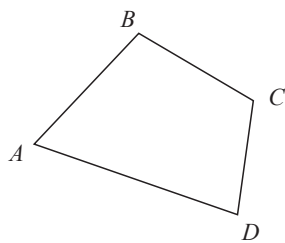


图 5-30

例 1 说明：如果四边形一组对角互补，那么另一组对角也互补.



想一想

正三角形、正四边形（正方形）、正五边形、正六边形、正八边形的内角分别是多少度？正 n 边形的内角是多少度？

议一议

剪掉一张长方形纸片的一个角后，纸片还剩几个角？剪下角后得到的多边形的内角和是多少度？与同伴交流。

随堂练习

- 从八边形 $ABCDEFGH$ 的顶点 A 出发，可以作多少条对角线？分别用字母表示出来；
 - 这些对角线将八边形分割成多少个三角形？
 - 你能求出八边形的内角和吗？
- 小彬求出一个正多边形的一个内角为 145° 。他的计算正确吗？如果正确，他求的是正几边形的内角？如果不正确，请说明理由。

习题 5.9

知识技能

- 过某个多边形一个顶点的所有对角线，将这个多边形分成 5 个三角形。这个多边形是几边形？它的内角和是多少？
- 一个多边形的内角和是 1440° ，它是几边形？

数学理解

- 如图所示是三个完全相同的正多边形拼成的无缝隙、不重叠的图形的一部分，这种多边形是几边形？为什么？



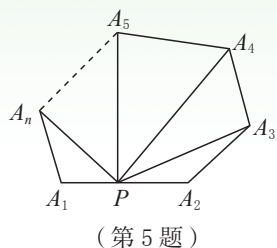
(第 3 题)

问题解决

- 设计一个实验（如剪纸、拼图），说明四边形的内角和是 360° 。

联系拓广

5. 如图, 在 n 边形的边上取一点, 连接这点与各顶点, 可以把 n 边形分成几个三角形? 你能利用这个图形求出 n 边形的内角和吗? 试一试.



如图 5-31, 小刚沿一个五边形广场周围的小路按逆时针方向跑步.

(1) 小刚每从一条小路转到下一条小路时, 跑步方向改变的角是哪个角? 在图上标出这些角.

(2) 他每跑完一圈, 跑步方向改变的角一共有几个? 它们的和是多少?



图 5-31

小刚是这样思考的:

如图 5-32, 跑步方向改变的角分别是 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$.

$$\because \angle 1 + \angle EAB = 180^\circ,$$

$$\angle 2 + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\angle 3 + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\angle 4 + \angle CDE = 180^\circ,$$

$$\angle 5 + \angle DEA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle EAB + \angle 2 + \angle ABC + \angle 3 + \angle BCD + \angle 4 + \angle CDE + \angle 5 + \angle DEA = 900^\circ.$$

$$\because \text{五边形的内角和为 } (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA = 540^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ.$$

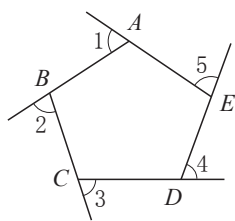


图 5-32

你的思路与小刚一样吗? 与同伴交流.

想一想

如果广场的形状是六边形、八边形，那么结果会怎样？

多边形内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角，叫做这个多边形的外角 (exterior angle). 在每个顶点处取这个多边形的一个外角，它们的和叫做这个多边形的外角和.

多边形的外角和都等于 360° .

例 2 一个多边形的内角和等于它的外角和的 3 倍，它是几边形？

解： 设这个多边形是 n 边形，则它的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，外角和等于 360° . 根据题意，得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 3 \times 360^\circ.$$

解得 $n = 8$.

所以，这个多边形是八边形.

随堂练习

1. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？如果这个多边形的每个内角都相等，那么每个内角等于多少度？
2. 一个多边形能否有 4 个锐角？为什么？

习题 5.10

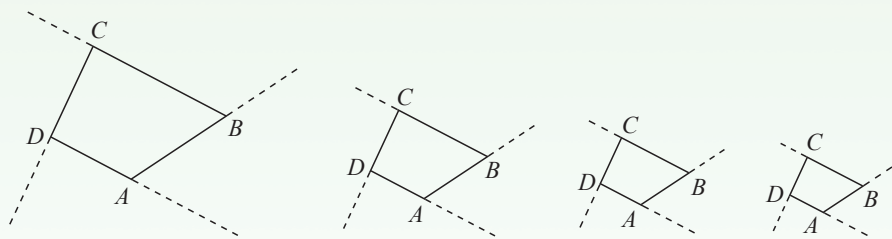
知识技能

1. 一个多边形的每个外角都等于与它相邻的内角，这个多边形是几边形？能确定它的每个外角的度数吗？
2. 是否存在一个多边形，它的每个外角都等于相邻内角的 $\frac{1}{5}$ ？简述你的理由.

3. 若两个多边形的边数相差 1, 则它们的内角和、外角和分别有什么异同?

数学理解

4. 如图, 下列四边形是同一个四边形不断缩小 (保持形状不变) 的结果.



(第 4 题)

- (1) 在图中标出各个四边形的外角;
 - (2) 在缩小的过程中, 四边形对应的各个外角的大小是否发生了变化?
 - (3) 如果保持四边形的形状不变, 将四边形不断缩小下去, 你能想象一下最终的形状吗? 你能借助上面的变化过程说明四边形的外角和吗?
 - (4) 你能类似地说明五边形、六边形……一般多边形的外角和吗?
5. 在四边形的四个内角中, 最多能有几个钝角? 最多能有几个锐角? 分别画出 1 个钝角最多的四边形和 1 个锐角最多的四边形.

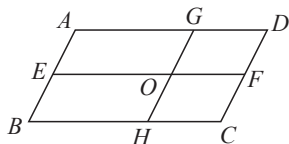
回顾与思考

1. 平行四边形是轴对称图形吗? 是中心对称图形吗? 此外, 平行四边形还有哪些性质?
2. 一个四边形满足什么条件时是平行四边形? 这些结论与平行四边形的性质之间有什么样的关系?
3. 你是怎样得到三角形中位线定理的?
4. 多边形的内角和与边数有什么关系? 内角和随着边数的增加有什么变化? 多边形的外角和呢?
5. 用适当的方式梳理本章的知识, 并与同伴进行交流.

复习题

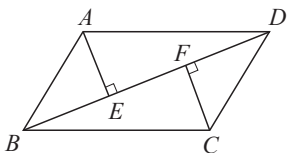
知识技能

1. 在 $\square ABCD$ 中, 已知 $AB=6$, AD 为 $\square ABCD$ 周长的 $\frac{2}{7}$, 求 BC 的长度.
2. 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=150^\circ$, $\angle C=30^\circ$, $AB=2$, 求 DC 的长度.
3. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, H, F, G 分别在边 AB, BC, CD, DA 上, $AD \parallel EF$, $CD \parallel GH$, EF 与 GH 相交于点 O . 图中共有多少个平行四边形?

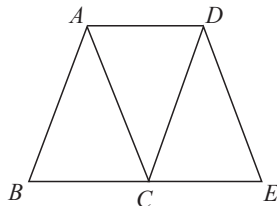


(第3题)

4. 在 $\square ABCD$ 中, $AB=17$, $AC=16$, $BD=30$, 求 BC 的长.
5. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E, F .
求证: $\angle BAE = \angle DCF$.

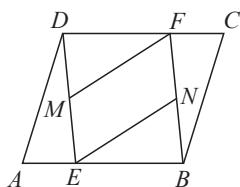


(第5题)

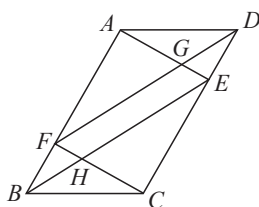


(第6题)

6. 已知: 如图, E 是 $\square ABCD$ 的边 BC 的延长线上的一点, 且 $CE=BC$.
求证: 四边形 $ACED$ 是平行四边形.
7. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别是 AB 和 CD 上的点, $AE=CF$, M, N 分别是 DE 和 BF 的中点.
求证: 四边形 $ENFM$ 是平行四边形.



(第7题)



(第8题)

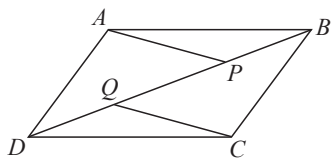
8. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别是边 CD 和 AB 上的点, $AE \parallel CF$, BE, DF 分别交 CF, AE 于点 H, G .

求证: 四边形 $FHEG$ 是平行四边形.

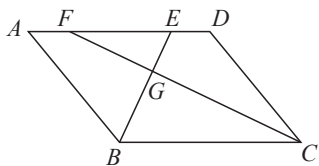
9. 画一个 $\square ABCD$, 使 $\angle B = 45^\circ$, $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$.

10. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, P, Q 是对角线 BD 上的两个点, 且 $BP = DQ$.

求证: AP 和 QC 互相平行且相等.



(第 10 题)

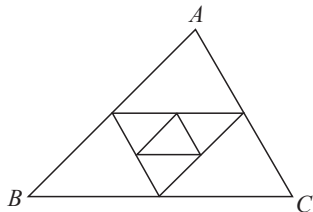


(第 11 题)

11. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E , $\angle BCD$ 的平分线交 AD 于点 F , 交 BE 于点 G .

求证: $AF = DE$.

12. 如图, $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 以它的三边中点为顶点组成一个新三角形, 以这个新三角形三边中点为顶点又组成一个小三角形. 求这个小三角形的周长.



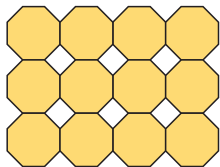
(第 12 题)

13. 分别确定一般三角形、四边形、五边形、六边形……的内角和, 以及正三角形、正四边形、正五边形、正六边形……内角的度数, 并填入下表:

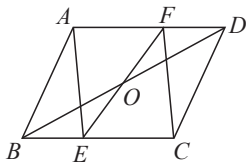
边数	3	4	5	6	...
多边形的内角和					
正多边形内角的度数					

14. 过多边形某个顶点的所有对角线, 将这个多边形分成 7 个三角形, 这个多边形是几边形?

15. 以正八边形为“基本图形”构成的一种图案如图所示. 图中的白色缝隙所形成的图形的轮廓是怎样的四边形?



(第 15 题)

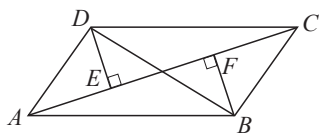


(第 16 题)

16. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别为 BC 和 AD 上的点, 且 $AE \parallel FC$.

求证: EF 过 BD 的中点 O .

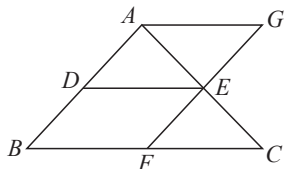
17. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$, 垂足分别为 E, F , $DE = BF$, $\angle ADB = \angle CBD$.
求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



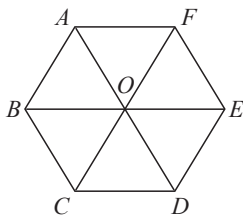
(第 17 题)

数学理解

18. 如图, $AG \parallel BC$, $FG \parallel AB$, AC 与 FG 相交于点 E , $AD = DB$, $AE = EC$. 利用平移或旋转的方法研究图中的线段 DE , BF , FC 之间的位置关系和数量关系.



(第 18 题)

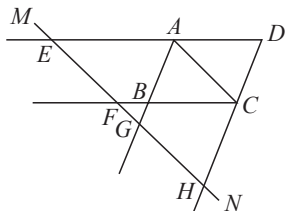


(第 19 题)

19. 用六个全等的正三角形拼成如图所示的图形, 请找出其中所有的平行四边形, 并选择其中之一加以证明.

20. 已知: 如图, 直线 MN 与 $\square ABCD$ 的对角线 AC 平行, 延长 DA , CB , AB , DC , 分别交 MN 于点 E , F , G , H .

求证: $EF = GH$.



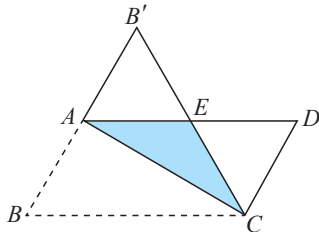
(第 20 题)

问题解决

21. 小华要做一个平行四边形木框, 他手头有七根木条, 长度分别为: ① 3 cm, ② 5 cm, ③ 3 cm, ④ 6 cm, ⑤ 5 cm, ⑥ 8 cm, ⑦ 9 cm. 请你帮他选一选, 哪四根木条可以组成一个平行四边形木框? 请说明理由.

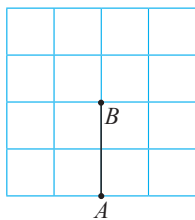
22. 如图, 在平行四边形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 3$ cm, 将纸片沿对角线 AC 对折, BC 边与 AD 边相交于点 E , 此时 $\triangle CDE$ 恰为等边三角形. 求:

- (1) AD 的长度;
- (2) 重叠部分的面积.



(第 22 题)

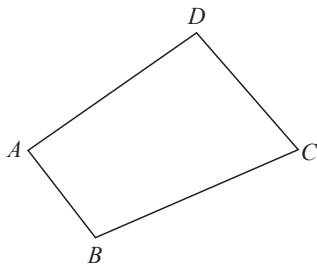
23. 如图，方格纸上小正方形的边长为 1， A, B 两点在格点上，请在格点上找到点 C ，使 $\triangle ABC$ 的面积为 2. 满足条件的点 C 有几个？



(第 23 题)

联系拓展

- ※24. 如图，某村有一个四边形池塘，它的四个顶点 A, B, C, D 处均有一棵大树，村里准备开挖池塘建鱼塘，想使池塘的面积扩大一倍，又想保持大树不动，并要求扩建后的池塘成平行四边形的形状，请问能否实现这一设想？若能，请你画出你设计的图形；若不能，请说明理由.

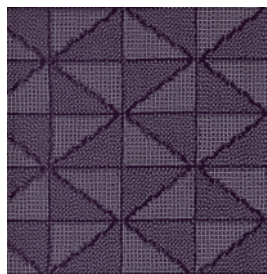


(第 24 题)



平面图形的镶嵌

生活中，我们所见到的地面、墙面、服装面料等，常常是由一种或几种形状相同的图形拼接而成的。



用形状、大小完全相同的一种或几种平面图形进行拼接，彼此之间不留空隙、不重叠地铺成一片，就是平面图形的镶嵌。

镶嵌平面的图形有很多，值得我们研究的问题也有许多！



做一做

1. 如果只用一种多边形镶嵌整个平面，那么这样的多边形可能有哪些？它们是如何镶嵌而成的？请你试一试。

2. (1) 用图 1 中的若干正三角形和若干正六边形能镶嵌整个平面吗? 如果能, 请你试一试. 如果用图 2 中的若干正三角形和若干正六边形呢?

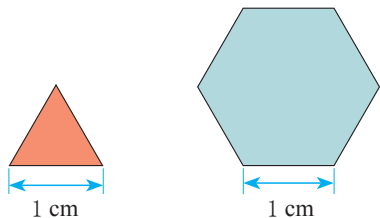


图 1

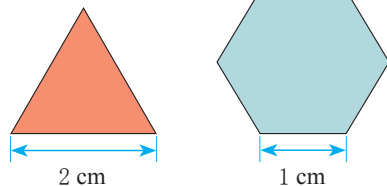


图 2

(2) 用其他两种正多边形能镶嵌整个平面吗?

议一议

(1) 用图 3 的两种图形若干, 能镶嵌整个平面吗? 请你试一试.

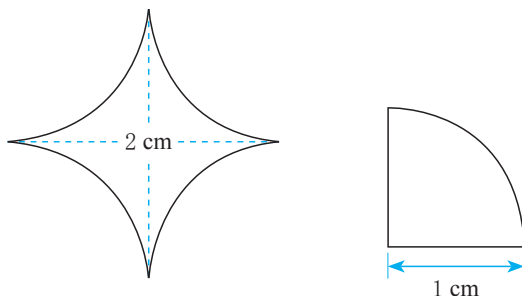


图 3

(2) 图 4 两种图形分别能镶嵌整个平面吗? 将它们与平行四边形的镶嵌图案比较, 两者之间分别有什么关系?



图 4

(3) 从问题 (2) 的解决过程中, 你获得了哪些启发?

(4) 设计一个自己喜欢的图形, 构造美丽的镶嵌图案, 与同伴交流你的设计过程和成果.

读一读

等腰梯形和直角梯形

两腰相等的梯形叫做等腰梯形，如图 5。等腰梯形是轴对称图形，且同一底上的两个角相等。

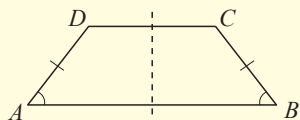


图 5

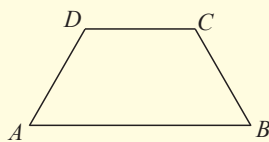


图 6

图 6 是一种特殊的等腰梯形，它的上底与腰相等，且下底等于上底的 2 倍。这种等腰梯形可以拼接出正六边形、等边三角形、等腰梯形、平行四边形、菱形（四边相等的四边形）等图形，如图 7。图 7（3）与图 6 形状相同。

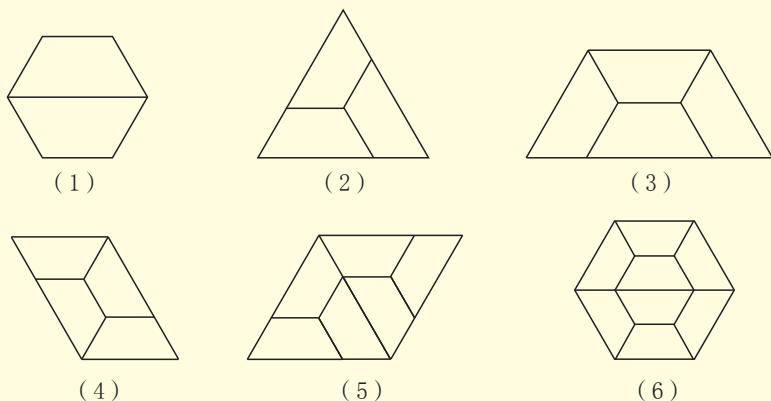


图 7

用图 6 所示的等腰梯形可以镶嵌整个平面（如图 8）。

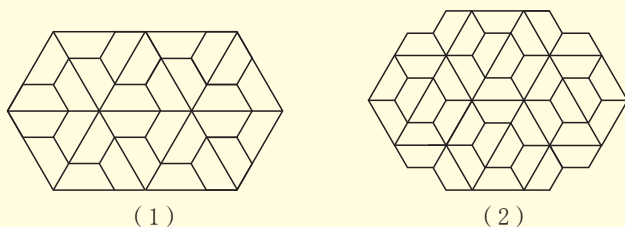


图 8

一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形，如图 9。

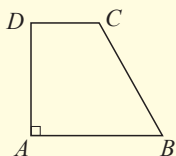


图 9

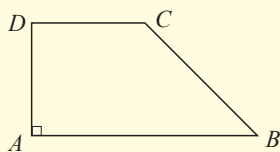


图 10

图 10 是一种特殊的直角梯形，它的上底与高相等，且下底等于上底的 2 倍. 这种等腰梯形可以拼接出等腰梯形、直角梯形和正方形等，如图 11. 图 11 (2) 与图 10 形状相同.

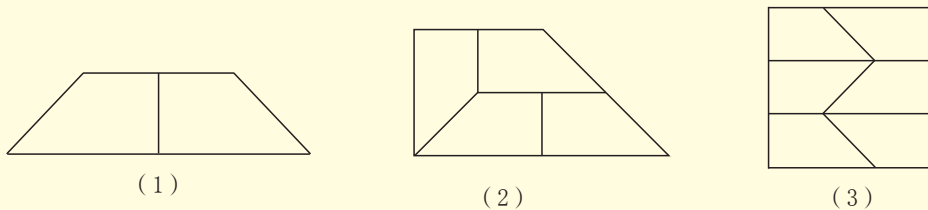


图 11

用图 10 所示的直角梯形也可以镶嵌整个平面 (如图 12).

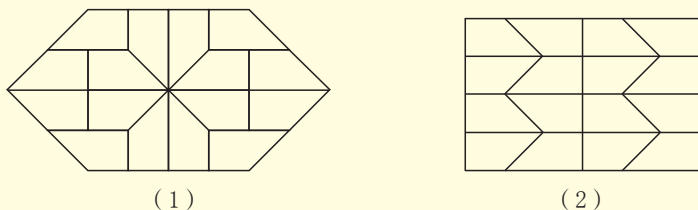
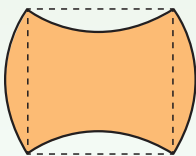


图 12

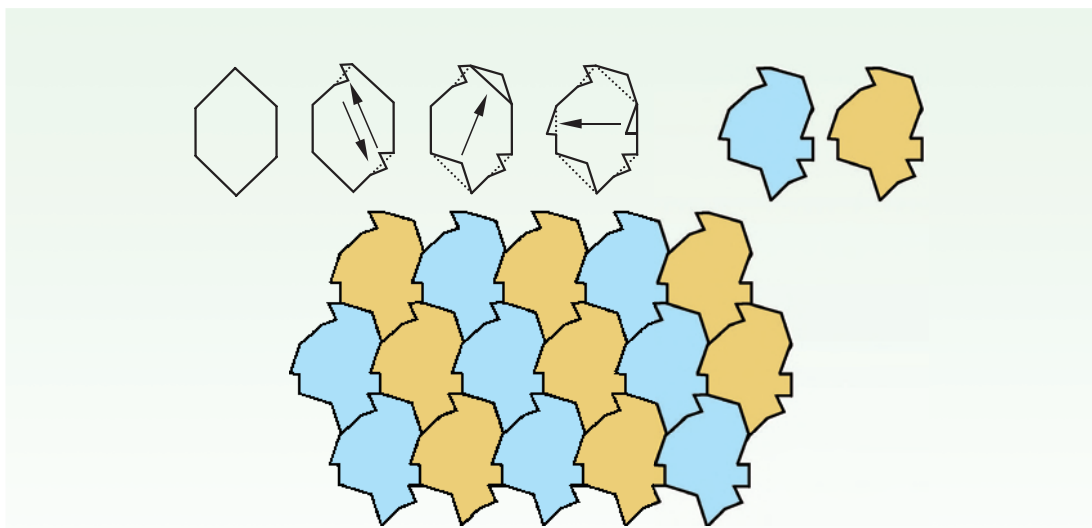
习题

1. 为了灵活地拼接书桌以举行各种活动，某学校阅览室特意设计了一种书桌，桌面形状如图所示.



(第 1 题)

- (1) 将 4 张这样的书桌拼接成一个图案，并与同伴交流；
 - (2) 你能说说这个桌面是如何设计的吗？请仿照这个桌面，设计一个可以随意拼接的桌面.
2. 如图是一个学生的作品，你能说说他绘制图案的过程吗？



(第2题)

3. 请你仿照第2题图案的绘制方法设计一个平面镶嵌图，并写一篇小论文与同伴交流你的设计过程和原理。

总复习题

- 整理本学期学过的数学内容，能用一张图把它们表示出来吗？与同伴进行交流。
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因。
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

知识技能

1. 把下列各式因式分解：

$$(1) xy(x-y) - x(x-y)^2; \quad (2) -a^2 + 1.96b^2; \quad (3) -12xy + x^2 + 36y^2;$$

$$(4) \frac{1}{4} + a^2 + a^4; \quad (5) a^2 - 8ab + 16b^2.$$

2. 把下列各式因式分解：

$$(1) (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2; \quad (2) \left(\frac{1}{36}a - \frac{1}{3}\right)a + 1.$$

3. 把下列各式因式分解：

$$(1) 2(a-1)^2 - 12(a-1) + 18;$$

$$(2) (x^2 - 2xy + y^2) + (-2x + 2y) + 1.$$

4. 已知： $x + y = 0.2$ ， $x + 3y = 1$ ，求 $3x^2 + 12xy + 12y^2$ 的值。

5. 先化简，再求值：

$$(1) \frac{(x+2)(x^2-6x+9)}{x^2-4}, \text{ 其中 } x=3; \quad (2) \frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}, \text{ 其中 } x=5.$$

6. 解方程：

$$(1) \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-16}; \quad (2) \frac{3}{x-1} - \frac{x+2}{x(x-1)} = 0;$$

$$(3) \frac{2-x}{x-3} + \frac{1}{3-x} = 1.$$

7. 某公司员工的月工资统计如下:

月工资/元	5 000	4 000	2 000	1 000	800	500
人数	1	2	5	12	30	6

求该公司员工月工资的平均数、中位数和众数.

8. 某超市招聘收银员一名. 对三名申请人进行了三项素质测试. 三名候选人的素质测试成绩如下表. 公司根据实际需要, 对计算机、语言、商品知识三项测试成绩分别赋予权 4, 3, 2, 这三人中谁将被录用?

素质测试	测试成绩		
	小赵	小钱	小孙
计算机	70	90	65
语言	50	75	55
商品知识	80	35	80

9. 为了掌握本地区年降雨量的分布情况, 某市气象局收集了该市 99 年的年降雨量数据 (见下表, 单位: mm).

1 184.4	1 113.4	1 203.9	1 160.7	975.4	1 462.3	947.8	1 416.0	709.2
1 147.5	935.0	1 016.3	1 031.6	1 105.7	849.9	1 233.4	1 008.6	1 063.8
1 004.9	1 086.2	1 022.5	1 330.9	1 439.4	1 236.5	1 088.1	1 288.7	1 115.8
1 217.5	1 320.7	1 078.1	1 203.4	1 480.0	1 269.9	1 099.2	1 318.4	1 192.0
946.0	1 508.2	1 159.6	1 021.3	986.1	794.7	1 318.3	1 171.2	1 161.7
791.2	1 143.8	1 602.0	951.4	1 003.2	840.4	1 061.4	958.0	1 025.2
1 285.0	1 196.5	1 120.7	1 659.3	942.7	1 123.3	910.2	1 398.5	1 208.6
1 305.5	1 242.3	1 572.3	1 416.9	1 256.1	1 285.9	984.8	1 390.3	1 062.2
1 287.3	1 477.0	1 017.9	1 127.7	1 197.1	1 143.0	1 018.8	1 243.7	909.3
1 030.3	1 124.4	811.4	820.9	1 187.1	1 107.5	991.4	901.7	1 176.5
1 133.5	1 272.9	1 200.3	1 508.7	772.3	813.0	1 392.3	1 006.2	1 108.8

现在打算通过对这些数据的分析找出年降雨量的大致分布情况.

- (1) 这 99 年年降雨量的最大值、最小值、极差分别是多少?
- (2) 将这 99 年的年降雨量分成下表的 10 组, 并分别计算各自的频数和频率:

年降雨量 x/mm	频 数	频 率
$670 \leq x < 770$		
$770 \leq x < 870$		
$870 \leq x < 970$		
$970 \leq x < 1\ 070$		
$1\ 070 \leq x < 1\ 170$		
$1\ 170 \leq x < 1\ 270$		
$1\ 270 \leq x < 1\ 370$		
$1\ 370 \leq x < 1\ 470$		
$1\ 470 \leq x < 1\ 570$		
$1\ 570 \leq x < 1\ 670$		

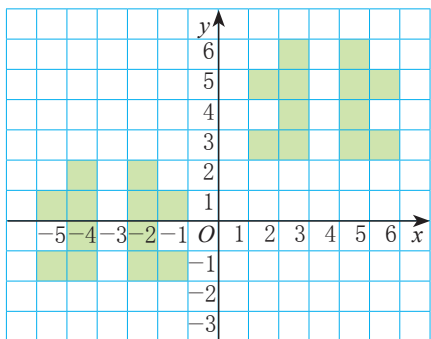
(3) 根据上表绘制相应的频数直方图.

10. 某农科所在我国 8 个不同的地方对 2 个小麦新品种进行种植试验. 连续几年试种的平均产量 (单位: kg/hm^2) 见下表:

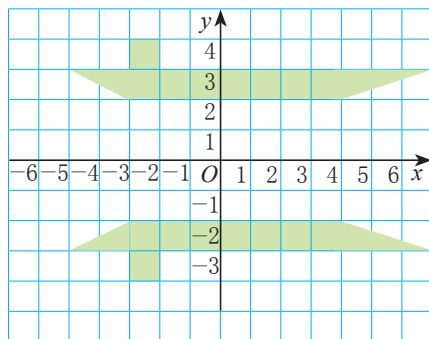
品 种 \ 试验区	试验区							
	A	B	C	D	E	F	G	H
甲	4 800	5 200	4 600	6 000	6 500	4 300	5 000	5 200
乙	5 200	5 400	4 800	5 500	5 200	4 900	5 300	5 300

你认为哪个品种的小麦对气候等条件的适应性较强?

11. 已知一个直角三角形的两条直角边长分别为 2 cm, 4 cm, 将这个三角形绕直角顶点按逆时针方向连续旋转三次, 每次都旋转 90° .
- 试画出每次旋转前后的三角形;
 - 将所得的所有三角形看成一个图形, 你将得到怎样的图形?
12. (1) 在直角坐标系中, 描出点 $(9, 1)$, $(11, 6)$, $(16, 8)$, $(11, 10)$, $(9, 15)$, $(7, 10)$, $(2, 8)$, $(7, 6)$, $(9, 1)$, 并将各点用线段依次连接起来, 观察这组点组成的图形, 你觉得它像什么? 它是轴对称图形吗? 是中心对称图形吗?
- 如果将 (1) 中各点的横坐标分别变为原来的相反数, 纵坐标保持不变呢?
 - 如果将 (1) 中各点的横坐标、纵坐标都分别变为原来的相反数呢?
 - 如果将 (1) 中各点的横坐标分别减 2, 纵坐标分别减 1 呢?
13. 图 (1) (2) 中各有两个图形, 其中一个图形是另一个图形经过某种简单的变化得到的, 在图 (1) (2) 中各选择三对对应点, 寻找每对对应点之间的坐标关系.



(1)

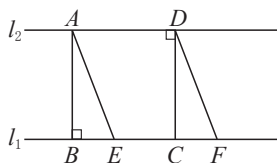


(2)

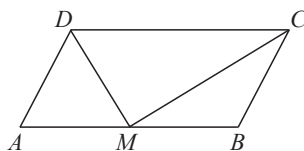
(第13题)

14. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形吗？证明你的结论。

15. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $AB \perp l_1$ ， $CD \perp l_2$ ，垂足分别是 B ， D ， AE ， DF 分别交 l_1 于点 E ， F ，且 $AE \parallel DF$ 。 BE 与 CF 相等吗？为什么？



(第15题)



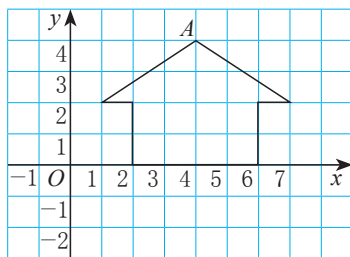
(第16题)

16. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 2AD$ ， M 为 AB 的中点，连接 DM ， MC 。
求证： $DM \perp MC$ 。

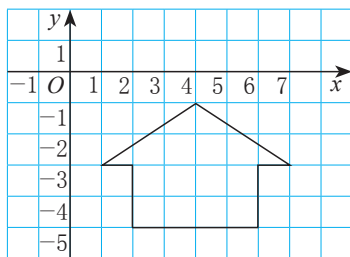
数学理解

17. 求证：当 n 为自然数时， $(n+7)^2 - (n-5)^2$ 能被 24 整除。

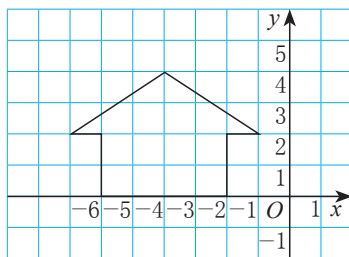
18. (1) 把图 (1) 中的图形平移后，“顶点” $A(4, 4)$ 的对应点是 $A'(4, 0)$ ，写出另外 6 个“顶点”的对应点的坐标；



(1)



(2)



(3)

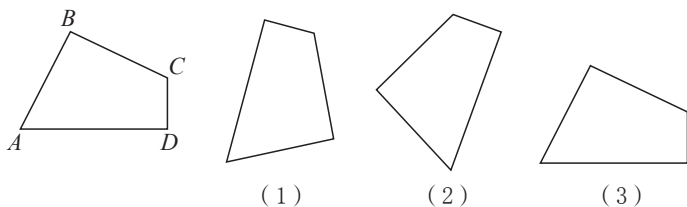
(第18题)

(2) 图(2)与图(1)对应“顶点”的坐标之间有怎样的关系?它可以由图(1)如何变化而来?

(3) 图(3)与图(1)对应“顶点”的坐标之间有怎样的关系?它可以由图(1)如何变化而来?

19. 已知四边形 $ABCD$ 四条边相等, 它的两个顶点坐标分别为 $A(3, 3)$, $B(1, 2)$, 对角线的交点为 $M(3, 2)$. 将四边形 $ABCD$ 平移后, 顶点 A 的对应点是 $A'(7, 6)$, 请写出点 B, C, D, M 对应点的坐标.

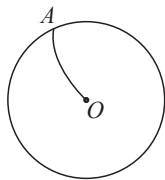
20. 如图所示的四个四边形全等, 在图(1)~(3)中, 哪个图形可以由四边形 $ABCD$ 经过平移或旋转得到?



(第20题)

21. (1) OA 是圆 O 的任意一条半径, 将 OA 绕点 O 按同一方向连续旋转三次, 每次旋转 90° , 依次得到半径 OB, OC, OD , 它们将圆分成四部分, 这四部分的形状和大小有什么关系?

(2) 如图, A 为圆周上一点, O 为圆心, 将曲线 OA 绕点 O 按同一方向连续旋转三次, 每次旋转 90° , 这样得到的四条曲线将圆分成了四部分, 这四部分的形状和大小又有什么关系? 你能利用旋转的有关知识进行说明吗?



(第21(2)题)

问题解决

22. 某农场原计划在 m 天内收割小麦 960 公顷, 实际每天比原计划多收割 40 公顷, 实际几天完成了任务?

23. 某工厂储存了 t 天用的煤 m 吨, 要使储存的煤比预定的时间多用 d 天, 每天应节约用煤多少吨?

24. 据《新华日报》报道, 东方航空公司江苏公司为了保证 1996 年 12 月初开始的 C 检工作正常进行, 事先组织机务人员到外地跟班学习 C 检工作, 后又具体分析研究, 周密地制订出 C 检的具体实施方案, 因而工作效率提高了 30%. 经过 31 名机务人员的艰苦努力, 终于提前 5 天完成了 C 检, 为公司节约了数十万元的维修费用. 请问: 原计划多少天完成 C 检? (根据飞机维护规定, 一架飞机每飞行 250 h, 要进行一次定期检查, 称为 A 检; 每飞行 3 000 h, 就要进行一次中大修性质的全面维护、保养、检查工作, 称为 C 检.)

※25. 在直角坐标系中描出点 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(3, 2)$, $D(4, 0)$.

先用线段依次连接点 O, A, B, C, D , 然后再用线段连接 A, C 两点.

(1) 你得到了一个什么图形?

(2) 填写表 1, 在直角坐标系中描出点 O_1, A_1, B_1, C_1, D_1 , 并按同样的方式连接各点. 这样得到的图形与 (1) 中的图形相比有什么变化?

(3) 如果把表 1 换成表 2 呢?

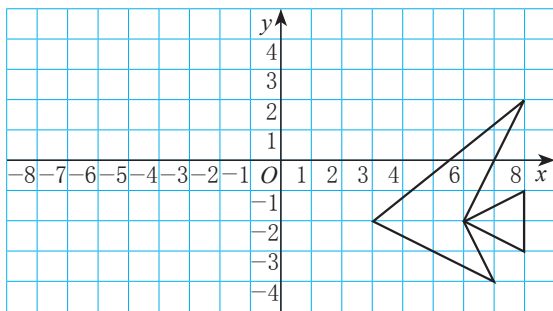
表 1

(x, y)	$O(0, 0)$	$A(1, 2)$	$B(2, 4)$	$C(3, 2)$	$D(4, 0)$
$(-y, x)$	$O_1(\quad, \quad)$	$A_1(\quad, \quad)$	$B_1(\quad, \quad)$	$C_1(\quad, \quad)$	$D_1(\quad, \quad)$

表 2

(x, y)	$O(0, 0)$	$A(1, 2)$	$B(2, 4)$	$C(3, 2)$	$D(4, 0)$
$(y, -x)$	$O_2(\quad, \quad)$	$A_2(\quad, \quad)$	$B_2(\quad, \quad)$	$C_2(\quad, \quad)$	$D_2(\quad, \quad)$

※26. 如图所示的“鱼”是将坐标为 $(3, -2)$, $(8, 2)$, $(6, -2)$, $(8, -1)$, $(8, -3)$, $(6, -2)$, $(7, -4)$, $(3, -2)$ 的点用线段依次连接而成的.



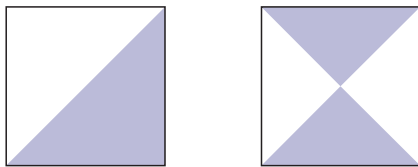
(第 26 题)

(1) 以原点 O 为对称中心, 画出与这条“鱼”成中心对称的新“鱼”;

(2) 写出新“鱼”各“顶点”的坐标.

※27. 在直角坐标系中将点 $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$ 用线段依次连接起来, 可以得到一个图形. 把这些点的横坐标、纵坐标都乘 -1 , 再将所得的各个点用线段依次连接起来, 所得的图形与原图形相比有什么变化?

28. 现有如图所示两种瓷砖, 请用其中 4 块瓷砖 (可以重复), 设计出美丽的“基本图案”, 然后利用“基本图案”, 通过平移、旋转或轴对称, 设计出更加美丽、更大的图案.



(第 28 题)

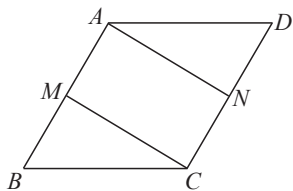
联系拓广

29. 已知: a, b, c 是三角形的三边, 且满足 $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.
 求证: 这个三角形是等边三角形.

30. (1) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AM = \frac{1}{2}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$,
 求证: 四边形 $AMCN$ 是平行四边形;

(2) 当 $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{3}CD$ 时, 四边形 $AMCN$ 是
 平行四边形吗?

(3) 如果 $AM = \frac{1}{m}AB$, $CN = \frac{1}{m}CD$ ($m > 1$) 呢?
 你能得出一个一般性的结论吗?

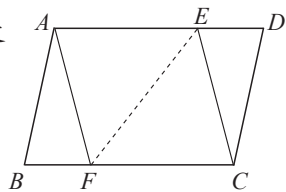


(第 30 题)

31. 先判断下列各命题的真假, 然后写出它们的逆命题, 并判断逆命题的真假:

- (1) 平行四边形相邻的两个角都相等;
- (2) 一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是平行四边形.

32. 已知: 如图, 将平行四边形纸片 $ABCD$ 折叠, 使得点 C 落在点 A 的位置, 折痕为 EF , 连接 AF , CE .
 求证: 四边形 $AFCE$ 为平行四边形.



(第 32 题)

33. 如图, 如果四边形 $ABCD$ 和 $BEFC$ 都是平行四边形, 那么四边形 $AEFD$ 是平行四边形吗? 小明认为四边形 $AEFD$ 是平行四边形, 并且给出了证明.

证明: \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$, ①

$AB = CD$. ②

又 \because 四边形 $BEFC$ 也是平行四边形,

$\therefore BC = EF$, ③

$BE = CF$. ④

由 ①③, 得

$AD = EF$. ⑤

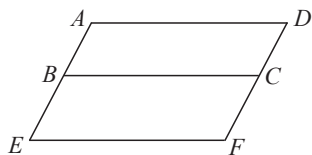
由 ②④, 得

$AB + BE = DC + CF$. ⑥

\therefore ⑤⑥ 成立,

\therefore 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

小明的考虑全面吗? 为什么? 你是怎样想的? 把你的想法写出来.



(第 33 题)