教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

八年级 下册

山东教育出版社

义务教育教科书（五·四学制） 数 学 八年级 下册 山东教育出版社

义务教育教科书（五·四学制）

责任编辑：孙金栋

封面设计：武 斌

王 琦

丽 子

绿色印刷产品

义务教育教科书（五 · 四学制） 数学 八年级 下册
价格批准文号：鲁发改价格核（2022）008006
举报电话：12345
ISBN 978-7-5328-8579-4
定价：8.93元

教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

八年级 下册

山东教育出版社

YIWU JIAOYU JIAOKESHU（WU-SI XUEZHI）
SHUXUE
BA NIANJI　XIA CE
义务教育教科书（五・四学制）
数学
八年级　下册
*
山东出版传媒股份有限公司
山东教育出版社出版
（济南市市中区二环南路2066号4区1号）
山东新华书店集团有限公司发行
山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司印装
*
开本：787毫米×1092毫米　1/16
印张：9.5　字数：190千
定价：8.93元（上光）
ISBN 978－7－5328－8579－4
2015年1月第1版　2021年12月第8次印刷

山东出版传媒股份有限公司教材中心售后服务电话：(0531) 82098188

走进数学新天地

亲爱的同学：

祝贺你跨入了新学期，并在数学世界里不断成长！

在此之前，你已经认识了有理数及其扩充——实数，体会到方程（组）和一次函数模型的作用，多角度分析了数据所蕴含的信息，知道了直角坐标系中的简单轴对称与坐标之间的关系，研究了为什么要证明、怎样证明一个命题是正确的……

在学习过程中，你不仅学到了丰富的数学知识，而且积累了观察、归纳、类比、猜想、证明等许多数学活动的经验，这将有助于你进一步发现和提出数学问题、分析和解决数学问题。

在本册教科书中，你将要学习一些新内容。

特殊的平行四边形——菱形、矩形、正方形的基本性质有哪些？采用什么方法发现并证明这些性质？从中你能获得什么？通过第六章的学习，相信你会找到答案。

一个正方形的面积为 S，它的边长如何表示？你将在“二次根式”中认识它。

你已经学习过一次方程（组）与分式方程，一元二次方程是一个新的数学模型，它所表示的数量关系更为复杂，当然也能更好地体现数学的重要价值。

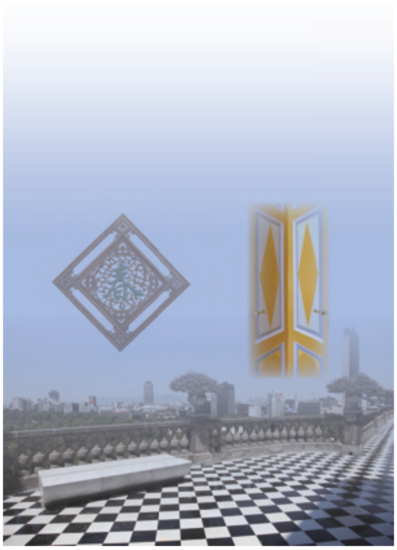
生活中我们常常可以见到“相似”的图形。“相似”是图形之间的一种特殊关系，与全等不一样，但又有着关联。数学里“相似”意味着什么？我们怎样从数学的角度去研究相似现象？在第九章中你会探个究竟。

你在以前的数学学习过程中可能已经体会到，有效的学习方法对于学好数学有很大的作用。继续尝试下面的方法吧：先自己想一想、做一做，再与同伴议一议，然后读一读教科书，听一听老师的讲解，再试一试解几个问题。

让我们一起走进数学新天地！

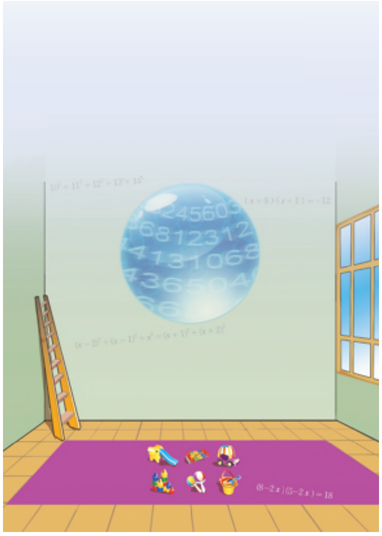
目　录 MULU

第六章　特殊平行四边形

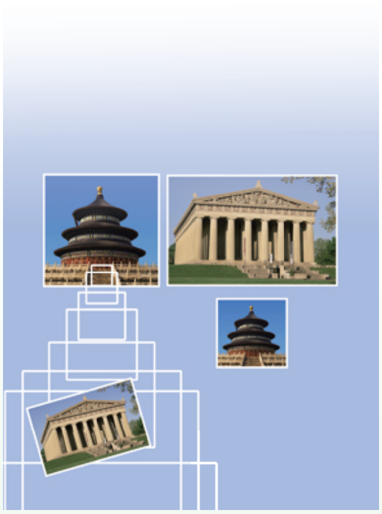


第七章　二次根式

第八章　一元二次方程



第九章　图形的相似



综合与实践

综合与实践

第六章　特殊平行四边形

将平行四边形的边或角进行适当变化，就会得到一些特殊的平行四边形：菱形、矩形、正方形．你知道它们有哪些特殊的性质吗？你对此有兴趣进行探究吗？你能证明这些特殊平行四边形的相关性质吗？

本章将对菱形、矩形、正方形进行更深入的认识，进一步丰富认识图形的经验．

学习目标

- 进一步获得对图形的性质进行探索、猜测和证明的经验
- 获得对菱形、矩形、正方形的基本认识
- 能够掌握综合法的证明方法
- 能证明菱形、矩形、正方形的性质定理和判定定理
- 体会菱形、矩形、正方形与平行四边形的关系
- 进一步理解一般与特殊的关系

1 菱形的性质与判定

观察下面几幅图片，我们不难发现其中包含一些平行四边形，但这些平行四边形又有哪些共同的特征呢？

一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

想一想

（1）菱形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质．你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为菱形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

做一做

用菱形纸片折一折，回答下列问题：

（1）菱形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？对称轴之间有什么位置关系？

（2）菱形中有哪些相等的线段？

通过上面的折纸活动，我们可以发现：菱形的四条边相等，对角线互相垂直．下面我们证明这些结论.

已知：如图 6–1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：（1）$AB=BC=CD=AD$；（2）$AC\perp BD$.

证明：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$（菱形的对边相等）.

又 $\because AB=AD$，

$\therefore AB=BC=CD=AD$.

（2）$\because AB=AD$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore OB=OD$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because OB=OD$，

$\therefore AO\perp BD$，

即 $AC\perp BD$.

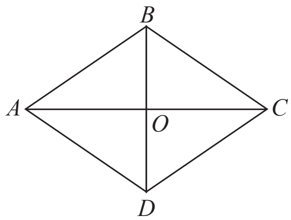


图 6–1

定理　菱形的四条边都相等.

定理　菱形的对角线互相垂直.

例 1　如图 6–2，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle BAD=60^\circ$，$BD=2$，求 AB 和 AC 的长.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD$（菱形的四条边都相等），

$AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$OB=OD=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}\times 2=1$（菱形的对角线互相平分）.

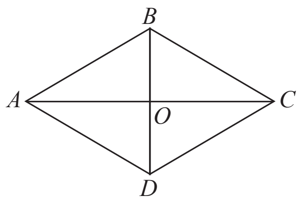


图 6–2

在等腰三角形 ABD 中，

$\because \angle BAD=60^\circ$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore AB=BD=2$.

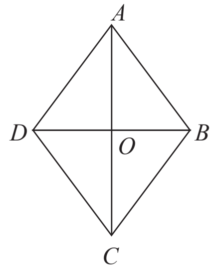
在 Rt$\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得

$$OA^2+OB^2=AB^2,$$

$$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore AC=2OA=2\sqrt{3}.$$

随堂练习



（第 1 题）

1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 已知 $AB=5$ cm，$AO=4$ cm，求 BD 的长.

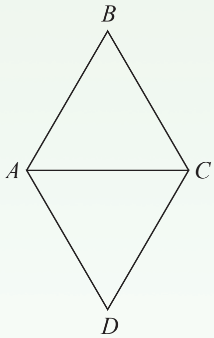
2. 菱形的两组对边的距离相等吗？为什么？

习题 6.1

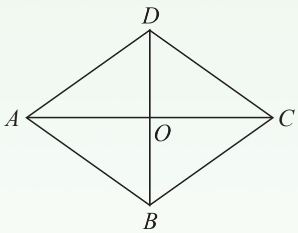
知识技能

1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=2\angle B$. 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

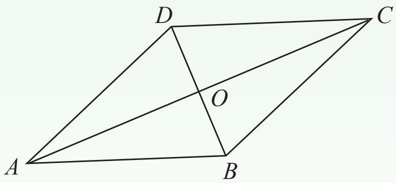
2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$BD=6$，$AC=8$，求菱形 $ABCD$ 的周长.



（第 1 题）



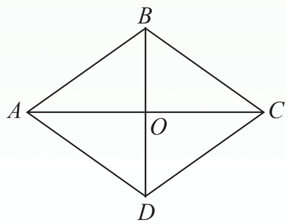
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.
求证：AC 平分$\angle BAD$ 和 $\angle BCD$，BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$.

数学理解



（第 4 题）

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，图中有多少个等腰三角形和直角三角形？

根据菱形的定义，邻边相等的平行四边形是菱形. 除此之外，你认为还有什么条件可以判断一个平行四边形是菱形？先想一想，再与同伴交流.

平行四边形的不少性质定理与判定定理都是互逆命题. 受此启发，我猜想：四边相等的平行四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

我觉得，对角线互相垂直的平行四边形有可能是菱形. 但“四边相等的平行四边形是菱形”嘛……实际上与“邻边相等的平行四边形是菱形”一样.

你是怎么想的？你认为小明的想法如何？

已知：如图 6−3，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC \perp BD$.

求证：▱$ABCD$ 是菱形.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OA = OC$.

又 $\because$ $AC \perp BD$，

$\therefore$ BD 所在的直线是线段 AC 的垂直平分线.

$\therefore$ $BA = BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形（菱形的定义）.

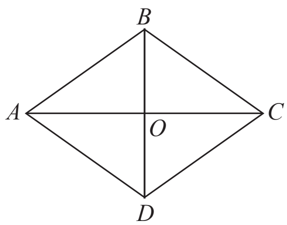


图 6−3

定理 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

议一议

已知线段 AC，你能用尺规作图的方法作一个菱形 $ABCD$，使 AC 为菱形的一条对角线吗？

如图 6−4，分别以 A，C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧，两条弧分别相交于点 B，D，依次连接 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 是菱形.

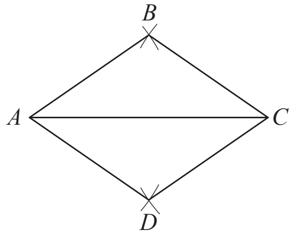


图 6−4

你是怎么做的？你认为小刚的做法正确吗？与同伴交流.

定理　四条边都相等的四边形是菱形.

请你完成这个定理的证明.

做一做

你能用折纸等办法得到一个菱形吗？动手试一试!

先将一张长方形的纸对折，再对折，然后沿图中的虚线剪下一个角并展开，就得到了一个菱形.

你能说说小颖这样做的道理吗？

如果给你一张不规则的纸，你也能通过折纸等办法得到一个菱形吗？

例 2　已知：如图 6−5，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$.

求证：$\square ABCD$ 是菱形.

证明：在 $\triangle AOB$ 中，

$\because AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$，

$\therefore AB^2 = AO^2 + OB^2$.

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形，$\angle AOB$ 是直角.

$\therefore AC \perp BD$.

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

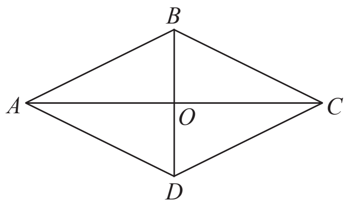


图 6-5

随堂练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 4 cm，6 cm.

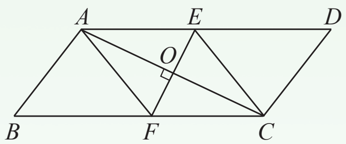
2. 证明：一条对角线平分一内角的平行四边形是菱形.

习题 6.2

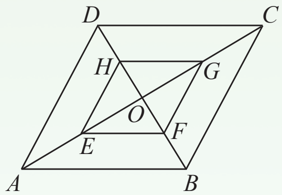
知识技能

1. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别与 AD，AC，BC 相交于点 E，O，F.

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.



（第 1 题）



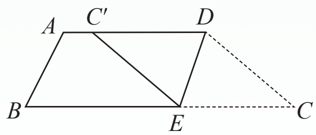
（第 2 题）

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.

数学理解

3. 如图，在四边形纸片 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD > CD$，将纸片沿过点 D 的直线折叠，使点 C 落在 AD 上的点 C' 处，折痕 DE 交 BC 于点 E，连接 $C'E$. 你能确定四边形 $CDC'E$ 的形状吗？证明你的结论.



（第 3 题）

例 3 如图 6-6，四边形 $ABCD$ 是边长为 13 cm 的菱形，其中对角线 BD 长 10 cm. 求：

（1）对角线 AC 的长度；

（2）菱形 $ABCD$ 的面积.

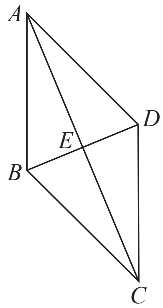


图 6-6

解：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，AC 与 BD 相交于点 E，

$\therefore$ $\angle AED = 90^\circ$（菱形的对角线互相垂直），

$DE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

$\therefore$ $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$（cm）.

$\therefore$ $AC = 2AE = 2 \times 12 = 24$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

（2）菱形 $ABCD$ 的面积

$= \triangle ABD$ 的面积 $+ \triangle CBD$ 的面积

$= 2 \times \triangle ABD$ 的面积

$= 2 \times \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 12$

$= 120$（cm^2）.

做一做

如图 6-7，两张等宽的纸条交叉重叠在一起，重叠的部分 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？

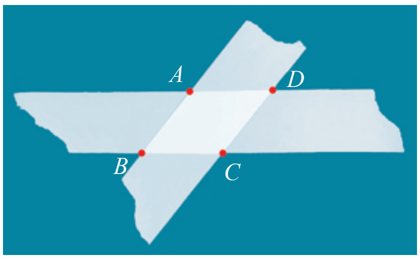


图 6-7

随堂练习

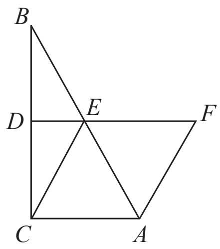
1. 菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm，它的一条对角线长 10 cm.

（1）求菱形的每一个内角的度数；

（2）求菱形另一条对角线的长.

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，BC 的垂直平分线分别交 BC 和 AB 于点 D，E，点 F 在 DE 的延长线上，且 $AF=CE$.

求证：四边形 $ACEF$ 是菱形.



（第 2 题）

读一读

筝　形

一条对角线所在直线垂直平分另一条对角线的四边形叫做筝形.

筝形可以分为两类：凸筝形和凹筝形. 每个内角都小于平角的筝形叫做凸筝形（如图 6−8（1））；有一个内角大于平角的筝形叫做凹筝形（如图 6−8（2））.

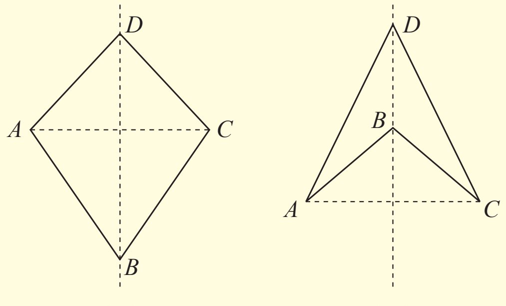


图 6−8

筝形有如下性质：

（1）筝形有两组邻边分别相等；

（2）筝形有一组对角相等；

（3）筝形是轴对称图形.

菱形是特殊的凸筝形.

一位英国数学家发现了一对特殊的筝形，他把它们称作“标枪”和“风筝”（如图6−9）.

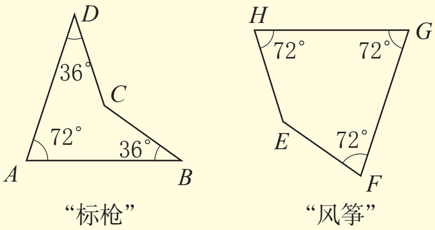


图 6−9

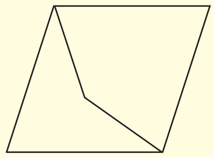


图 6−10

“标枪”和“风筝”的边长满足下面的关系：

$$AB = AD = GF = GH,$$

$$CB = CD = EF = EH.$$

“标枪”和“风筝”不仅可以拼凑成菱形（如图6−10），而且还可以拼凑成许多有趣的图案（如图6−11）.

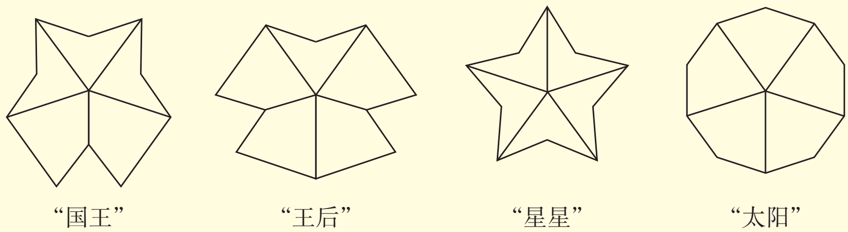


图 6−11

用这两种图形，可以镶嵌整个平面（如图6−12）.

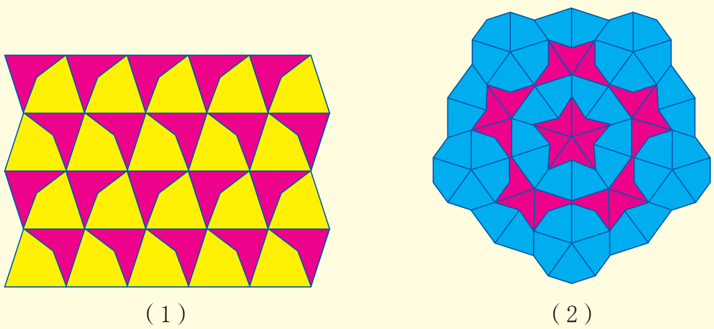


图 6−12

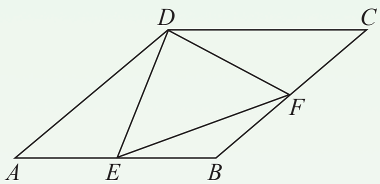
在图6−12（2）中，你能看到“国王”“王后”“星星”和“太阳”的图案吗？

习题 6.3

知识技能

1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 BC 上的点，且 $BE=BF$.

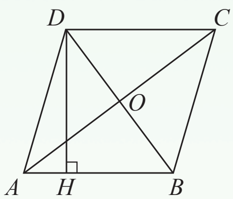
求证：(1) $\triangle ADE \cong \triangle CDF$；(2) $\angle DEF=\angle DFE$.



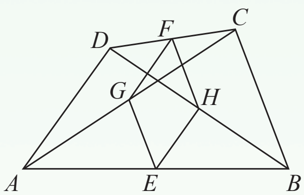
（第 1 题）

2. 证明：菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $AC=16$，$BD=12$，求菱形 $ABCD$ 的高 DH.



（第 3 题）



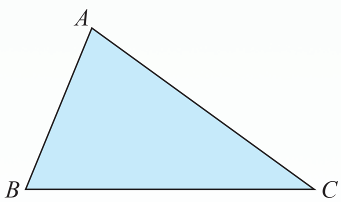
（第 4 题）

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，点 E，F，G，H 分别是 AB，CD，AC，BD 的中点.

求证：四边形 $EGFH$ 是菱形.

数学理解

5. 请用一张如图所示的三角形纸片 ABC 折出一个菱形，使 $\angle A$ 为菱形的一个内角，且菱形的一个顶点在 BC 边上.



（第 5 题）

2 矩形的性质与判定

观察下面的图片，我们能够发现其中包含了一些特殊的平行四边形，这些特殊的平行四边形有哪些共同的特征呢？



有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle）.

矩形是生活中常见的图形，你还能举出一些生活中矩形的例子吗？与同伴交流.

想一想

（1）矩形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质．你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为矩形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

通过观察，可以发现矩形的四个角都是直角，对角线相等．下面我们证明这些结论.

已知：如图 6−13，四边形 $ABCD$ 是矩形，$\angle ABC = 90^\circ$，对角线 AC 与 DB 相交于点 O.

求证：（1）$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$；（2）$AC = DB$.

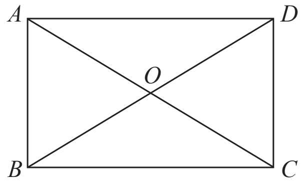


图 6−13

证明：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB \parallel DC$（矩形的对边平行），

$\angle ABC=\angle CDA$，$\angle BCD=\angle DAB$（矩形的对角相等）.

$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180^\circ$.

又 $\because \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle BCD=90^\circ$.

$\therefore \angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90^\circ$.

（2）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=DC$（矩形的对边相等）.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$\because AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore AC=DB$.

定理　矩形的四个角都是直角.

定理　矩形的对角线相等.

想一想

矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

矩形是轴对称图形.

议一议

如图 6−14，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，那么 BE 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中一条怎样的特殊线段？它与 AC 有什么大小关系？由此你能得到怎样的结论？

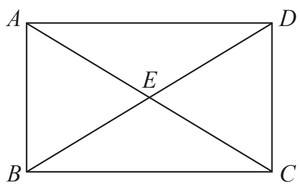


图 6−14

定理 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

你能证明这个定理吗?

例 1 如图 6–15，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线相交于点 O，$\angle AOD = 120^\circ$，$AB = 2.5$，求矩形对角线的长.

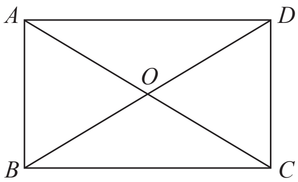


图 6–15

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD$（矩形的对角线相等），

$OA = OC = \dfrac{1}{2}AC$，$OB = OD = \dfrac{1}{2}BD$

（矩形的对角线互相平分）.

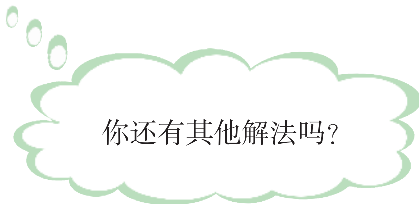
$\therefore OA = OD.$

$\because \angle AOD = 120^\circ$，

$\therefore \angle ODA = \angle OAD = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ.$

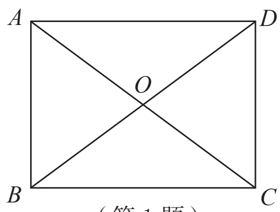
又 $\because \angle DAB = 90^\circ$（矩形的四个角都是直角），

$\therefore BD = 2AB = 2 \times 2.5 = 5.$



随堂练习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB = 6$，$OA = 5$. 求 BD 与 AD 的长.



（第 1 题）

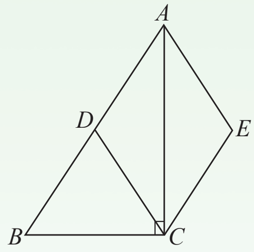
2. 一个矩形的两条对角线的一个夹角为 60°，对角线长为 15，求矩形较短边的长.

习题 6.4

知识技能

1. 一个矩形的对角线长为 2，对角线与一边的夹角是 45°，求矩形的各边长.

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为 AB 的中点，$AE/\!/CD$，$CE/\!/AB$，试判断四边形 $ADCE$ 的形状，并证明你的结论.



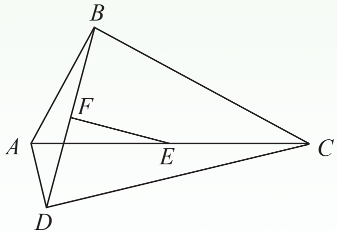
（第 2 题）

数学理解

3. 证明：如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$E$，$F$ 分别是 AC，BD 的中点.

求证：$EF\perp BD$.



（第 4 题）

做一做

如图 6−16，在一个平行四边形活动框架上，用两根橡皮筋分别套在相对的两个顶点上，拉动一对不相邻的顶点时，平行四边形的形状会发生变化.

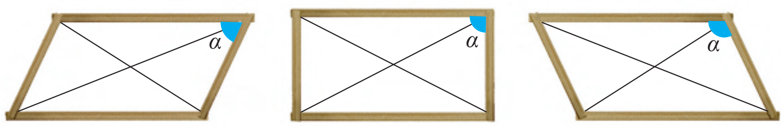


图 6−16

（1）随着 $\angle\alpha$ 的变化，两条对角线的长度将发生怎样的变化？

（2）当两条对角线的长度相等时，平行四边形有什么特征？由此你能得到一个怎样的猜想？

定理 对角线相等的平行四边形是矩形.

已知：如图 6−17，在 $\square ABCD$ 中，AC，DB 是它的两条对角线，$AC=DB$.

求证：$\square ABCD$ 是矩形.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = DC$，$AB /\!/ DC$.

又 $\because BC = CB$，$AC = DB$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$.

$\because AB /\!/ DC$，

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$.

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$.

$\therefore \square ABCD$ 是矩形（矩形的定义）.

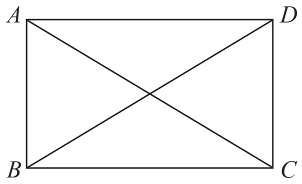


图 6-17

想一想

我们知道，矩形的四个角都是直角．反过来，一个四边形至少有几个角是直角时，这个四边形就是矩形呢？能证明你的结论吗？与同伴交流.

定理　有三个角是直角的四边形是矩形.

议一议

你有什么方法检查你家（或教室）刚安装的门框是不是矩形？如果仅有一根较长的绳子，你怎样检查？请说明检查方法的合理性，并与同伴交流.

例 2　如图 6-18，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\triangle ABO$ 是等边三角形，$AB = 1$，求 $\square ABCD$ 的面积.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC$，$OB = OD$.

又 $\because \triangle ABO$ 是等边三角形，

$\therefore OA = OB = AB = 1$，$\angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore OA = OB = OC = OD = 1$.

$\therefore AC = BD = 2AB = 2 \times 1 = 2$.

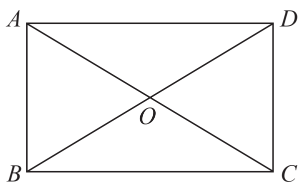


图 6-18

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$（矩形的四个角都是直角）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

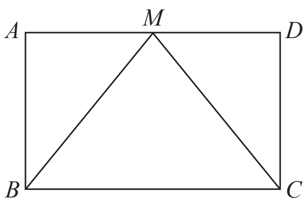
$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{▱ABCD} = AB \cdot BC = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

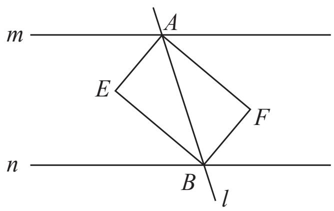
随堂练习

1. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，M 是 AD 边的中点，且 $MB = MC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，直线 l 与平行线 m，n 分别相交于点 A，B，两组同旁内角的平分线分别相交于点 E，F.

求证：四边形 $AEBF$ 是矩形.

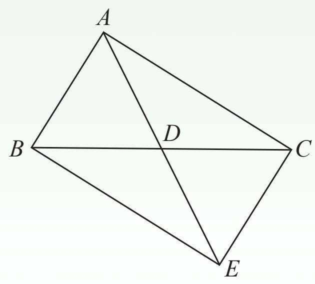
习题 6.5

知识技能

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，延长 AD 至 E，使 $DE = AD$，连接 BE，CE.

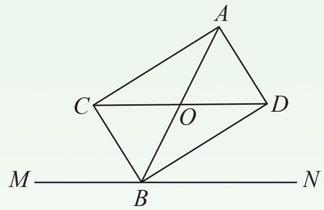
（1）试判断四边形 $ABEC$ 的形状；

（2）当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $ABEC$ 是矩形?



（第 1 题）

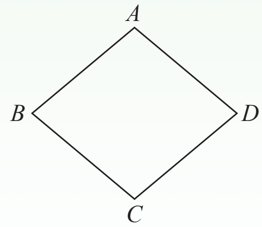
2. 如图，点 B 在直线 MN 上，过 AB 的中点 O 作 MN 的平行线，分别交 $\angle ABM$ 的平分线和 $\angle ABN$ 的平分线于点 C，D，连接 AC，AD. 试判断四边形 $ACBD$ 的形状，并证明你的结论.



（第 2 题）

问题解决

3. 如图，已知菱形 $ABCD$，作一个矩形，使得 A，B，C，D 四个点分别在矩形的四条边上，且矩形的面积为菱形 $ABCD$ 面积的 2 倍.



（第 3 题）

例 3 如图 6–19，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=6$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BD$，垂足为点 E，$ED=3BE$. 求 AE 的长.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AO=BO=DO=\dfrac{1}{2}BD$（矩形的对角线相等且互相平分），

$\angle BAD=90^\circ$（矩形的四个角都是直角）.

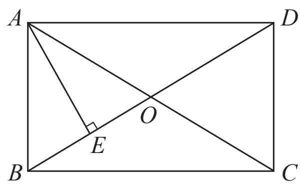


图 6–19

$\because ED=3BE$，

$\therefore BE=OE$.

又 $\because AE\perp BD$，

$\therefore AB=AO$.

$\therefore AB=AO=BO$，

即 $\triangle ABO$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABO=60^\circ$.

$\therefore \angle ADB=90^\circ-\angle ABO=30^\circ$.

在 Rt$\triangle AED$ 中，

$\because \angle ADE=30^\circ$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}\times 6=3$.

例 4 已知：如图 6−20，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 为∠BAC 的平分线，AN 为△ABC 的外角∠CAM 的平分线，$CE\perp AN$，垂足为点 E.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

证明：∵ AD 平分∠BAC，AN 平分∠CAM，

∴ $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle CAN=\frac{1}{2}\angle CAM$.

∴ $\angle DAE=\angle CAD+\angle CAN$

$=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAM)$

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ$

$=90^\circ$.

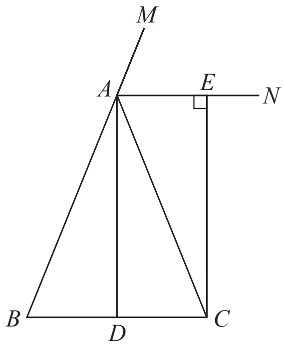


图 6−20

在△ABC 中，

∵ $AB=AC$，AD 为∠BAC 的平分线，

∴ $AD\perp BC$.

∴ $\angle ADC=90^\circ$.

又∵ $CE\perp AN$，

∴ $\angle CEA=90^\circ$.

∴ 四边形 $ADCE$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

想一想

在例 4 中，连接 DE，交 AC 于点 F（如图 6−21）.

（1）试判断四边形 $ABDE$ 的形状，并证明你的结论.

（2）线段 DF 与 AB 有怎样的关系？请证明你的结论.

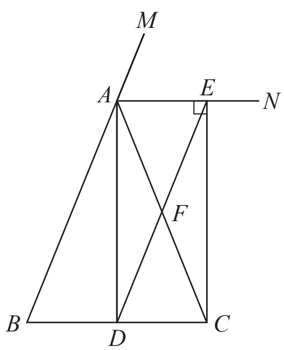
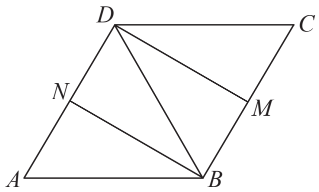


图 6−21

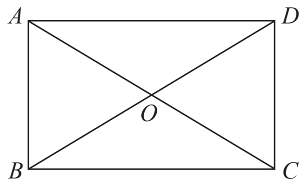
随堂练习

1. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是由两个全等的等边三角形 ABD 和 CBD 组成的，M，N 分别是 BC 和 AD 的中点.

求证：四边形 $BMDN$ 是矩形.



（第 1 题）



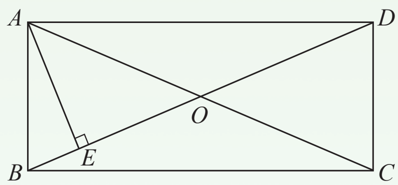
（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle ACB = 30^\circ$，$BD = 4$，求矩形 $ABCD$ 的面积.

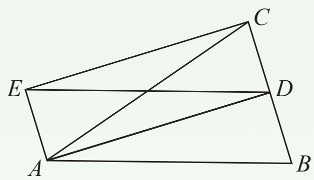
习题 6.6

知识技能

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 A 作 BD 的垂线，垂足为点 E. 已知 $\angle EAD = 3\angle BAE$，求 $\angle EAO$ 的度数.



（第 1 题）



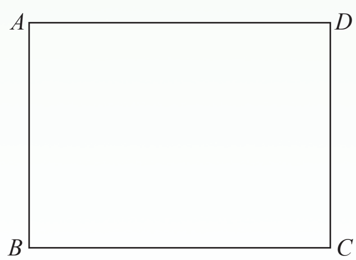
（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 为 BC 的中点，四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

问题解决

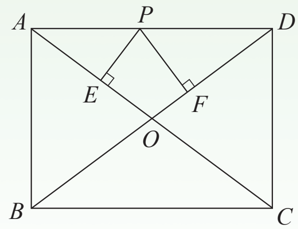
※**3.** 如图，有一矩形纸片 $ABCD$，$AB = 6$ cm，$BC = 8$ cm，将矩形纸片折叠，使点 C 与点 A 重合，请在图中画出折痕，并求折痕的长.



（第 3 题）

联系拓广

※**4.** 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，P 是 AD 上不与 A 和 D 重合的一个动点，过点 P 分别作 AC 和 BD 的垂线，垂足为点 E，F. 求 $PE+PF$ 的值.



（第 4 题）

3 正方形的性质与判定

图 6−22 中的四边形都是矩形，但有些矩形比较特殊，你能说出这些特殊矩形的特征吗?

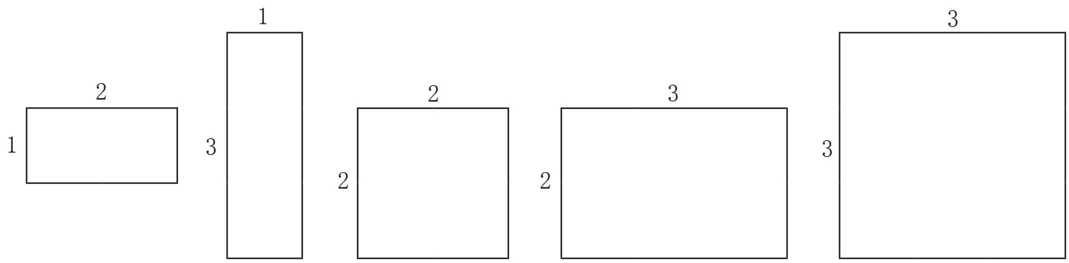


图 6−22

有一组邻边相等的矩形叫做**正方形**（square）.

议一议

（1）正方形是菱形吗?

（2）你认为正方形具有哪些性质? 与同伴交流.

正方形既是矩形，又是菱形，它具有矩形与菱形的所有性质.

定理 正方形的四个角都是直角，四条边都相等.

定理 正方形的对角线相等且互相垂直平分.

想一想

正方形有几条对称轴?

例 1 如图 6−23，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一点，F 为 BC 延长线上一点，且 $CE = CF$. BE 与 DF 之间有怎样的关系？请说明理由.

解：$BE = DF$，且 $BE \perp DF$. 理由如下：

（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC = DC$，$\angle BCE = 90^\circ$（正方形的四条边都相等，四个角都是直角）.

$\therefore \angle DCF = 180^\circ - \angle BCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\therefore \angle BCE = \angle DCF$.

又 $\because CE = CF$，

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$.

$\therefore BE = DF$.

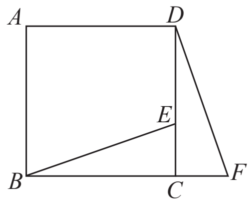


图 6−23

（2）延长 BE 交 DF 于点 M（如图 6−24）.

$\because \triangle BCE \cong \triangle DCF$，

$\therefore \angle CBE = \angle CDF$.

$\because \angle DCF = 90^\circ$，

$\therefore \angle CDF + \angle F = 90^\circ$.

$\therefore \angle CBE + \angle F = 90^\circ$.

$\therefore \angle BMF = 90^\circ$.

$\therefore BE \perp DF$.

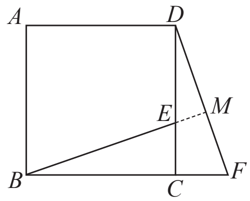


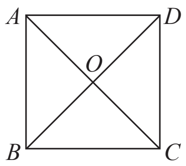
图 6−24

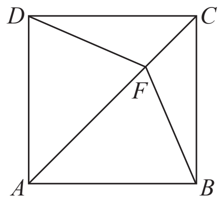
议一议

平行四边形、菱形、矩形、正方形之间有什么关系？你能用一个图直观地表示它们之间的关系吗？与同伴交流.

随堂练习

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，图中有多少个等腰三角形?


（第 1 题）


（第 2 题）

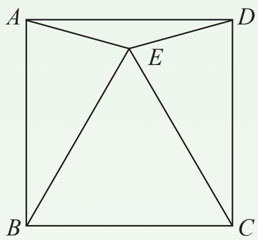
2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 F 为对角线 AC 上一点，连接 BF，DF. 你能找出图中的全等三角形吗? 选择其中一对进行证明.

习题 6.7

知识技能

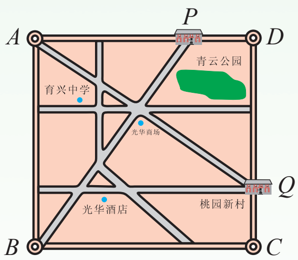
1. 对角线长为 2 cm 的正方形，边长是多少?

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle CBE$ 是等边三角形，求 $\angle AEB$ 的度数.


（第 2 题）

数学理解

3. 如图，A，B，C，D 四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上. 仓库 P 和 Q 分别位于 AD 和 DC 上，且 $PD = QC$. 证明两条直路 $BP = AQ$ 且 $BP \perp AQ$.



（第 3 题）

问题解决

※4. 在一个正方形的花坛上，欲修建两条直的小路，使得两条直的小路将花坛分成面积相等的四部分（不考虑道路的宽度）. 你有几种方法?（至少说出三种）

如图 6-25，将一张长方形纸对折两次，然后剪下一个角并展开. 怎样剪才能剪出一个正方形?

图 6-25

议一议

满足什么条件的矩形是正方形呢? 满足什么条件的菱形是正方形呢? 说说你的理由，并与同伴交流.

定理 对角线相等的菱形是正方形.

定理 对角线垂直的矩形是正方形.

定理 有一个角是直角的菱形是正方形.

例 2 已知：如图 6-26，在矩形 $ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，$BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$. 求证：四边形 $BECF$ 是正方形.

证明：$\because$ $BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$，

$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ $\angle ABC = 90^\circ$，$\angle DCB = 90^\circ$.

又 $\because$ BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，

$\therefore$ $\angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$，$\angle ECB = \frac{1}{2}\angle DCB = 45^\circ$.

$\therefore$ $\angle EBC = \angle ECB$.

$\therefore$ $EB = EC$.

$\therefore$ $\square BECF$ 是菱形（菱形的定义）.

在 $\triangle EBC$ 中，

$\because$ $\angle EBC = 45^\circ$，$\angle ECB = 45^\circ$，

$\therefore$ $\angle BEC = 90^\circ$.

$\therefore$ 菱形 $BECF$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）.

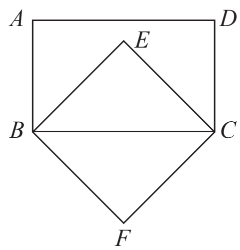


图 6-26

做一做

依次连接任意四边形各边的中点可以得到一个平行四边形，那么，依次连接正方形各边的中点（如图 6-27）能得到一个怎样的图形呢？先猜一猜，再证明.

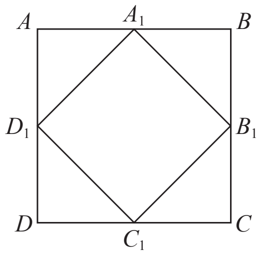


图 6-27

议一议

（1）依次连接菱形或矩形各边的中点能得到一个什么图形？先猜一猜，再证明.

（2）依次连接平行四边形各边的中点呢？

依次连接四边形各边的中点所得到的新四边形的形状与哪些线段有关系？有怎样的关系？

随堂练习

证明：

（1）有一个角是直角的菱形是正方形；

（2）对角线垂直的矩形是正方形.

读一读

四边形的对称性

我们知道，一般的四边形既不一定是轴对称图形，也不一定是中心对称图形；平行四边形都是中心对称图形，却不一定是轴对称图形；等腰梯形是轴对称图形，但不是中心对称图形；筝形是轴对称图形，但不一定是中心对称图形；所有的菱形和矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，而且它们至少都有两条对称轴.（如图 6-28 所示）请你想一想、画一画，什么情况下菱形和矩形只有两条对称轴？什么情况下它们有两条以上的对称轴？

通过想象或实际画图，可以发现，当菱形有一个角为直角时，它的对称轴的数量就增加了；当矩形有一组邻边相等时，它的对称轴的数量也增加了．换句话说，当菱形或矩形成为正方形时，它的对称轴就不止两条了．由此我们看到，当图形从一般情况向特殊情况变化时，它的对称性也可能随之发生了变化．

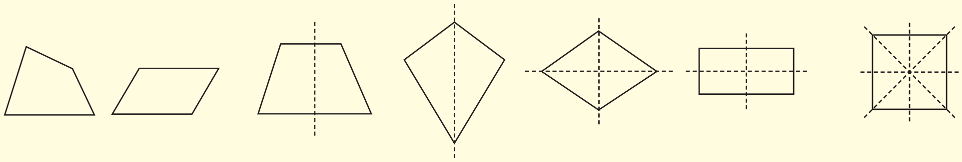


图 6-28

此外，我们还知道，如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度（小于360°）后，能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做旋转对称图形．请你想一想、试一试，平行四边形是旋转对称图形吗？菱形呢？矩形呢？正方形呢？

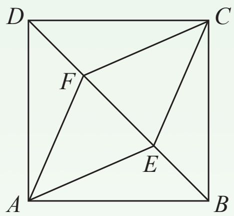
习题 6.8

知识技能

1. 证明：对角线相等的菱形是正方形．

2. 已知：如图，E，F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两点，且 $BE = DF$．

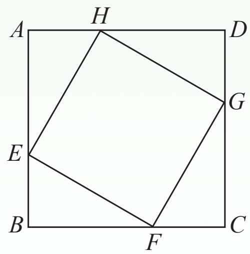
求证：四边形 $AECF$ 是菱形．



（第 2 题）

数学理解

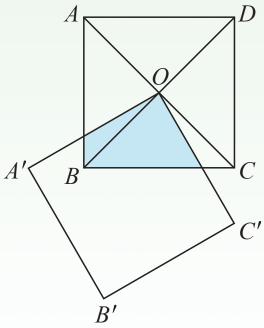
3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别在它的四条边上，且 $AE = BF = CG = DH$．四边形 $EFGH$ 是什么特殊四边形？你是如何判断的？



（第 3 题）

联系拓广

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，正方形 $A'B'C'O$ 与正方形 $ABCD$的边长相等. 在正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转的过程中，两个正方形重叠部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积有什么关系？请证明你的结论.



（第 4 题）

5. 对角线互相垂直且相等的四边形一定是正方形吗？为什么？

回顾与思考

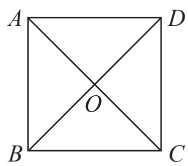
1. 说说平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，它们各有哪些性质？
2. 在菱形、矩形、正方形中，哪些图形是轴对称图形？哪些图形是中心对称图形？
3. 分别说说判定一个四边形是菱形、矩形、正方形的条件.
4. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 一个菱形的两条对角线的长分别为 4 cm 和 2 cm，求它的边长.

2. 如图，若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA=OB=OC=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，则四边形 $ABCD$ 是正方形吗？



（第 2 题）

3. 如果一个四边形是轴对称图形，而且有两条互相垂直的对称轴，那么这个四边形一定是菱形吗？为什么？

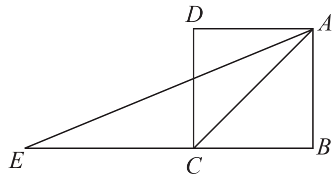
4. 一个菱形的周长是 200 cm，一条对角线长 60 cm，求：

（1）另一条对角线的长度；

（2）菱形的面积.

5. 证明：如果四边形两条对角线垂直且相等，那么依次连接它的四边中点得到一个正方形.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是一个正方形，E 是 BC 延长线上一点，且 $AC=EC$，求 $\angle DAE$ 的度数.



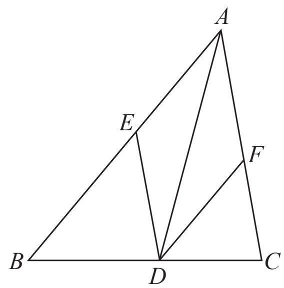
（第 6 题）

7.（1）如果一个菱形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个菱形是正方形吗？为什么？

（2）如果一个四边形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形吗？为什么？

8. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，过点 D 分别作 AC 和 AB 的平行线，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F.

求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.



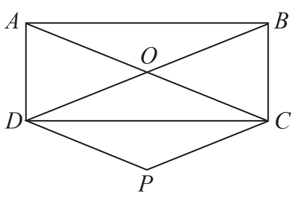
（第 8 题）

9. 已知：$\triangle ABC$ 的两条高分别为 BE，CF，点 M 为 BC 的中点.

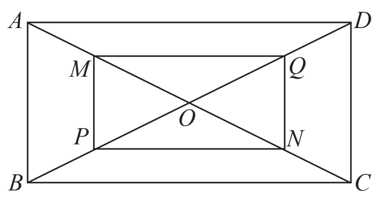
求证：$ME=MF$.

10. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 C 作 BD 的平行线，过点 D 作 AC 的平行线，两线相交于点 P.

求证：四边形 $CODP$ 是菱形.



（第 10 题）



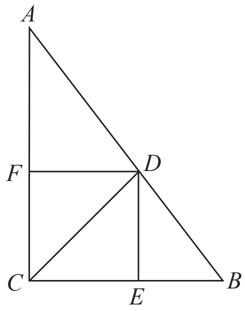
（第 11 题）

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 M，P，N，Q 分别在 AO，BO，CO，DO 上，且 $AM=BP=CN=DQ$.

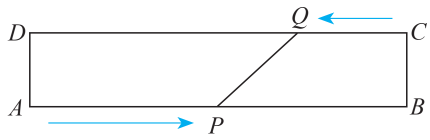
求证：四边形 $MPNQ$ 是矩形.

12. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F.

求证：四边形 $CEDF$ 是正方形.



（第 12 题）

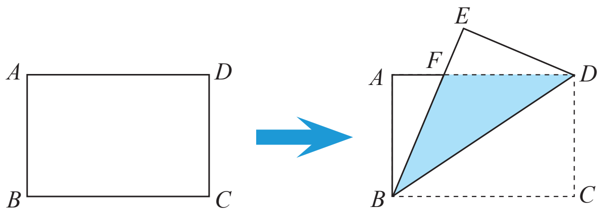


（第 13 题）

※**13.** 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=20$ cm．动点 P 从点 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，动点 Q 从点 C 开始沿 CD 边以 1 cm/s 的速度运动；点 P 和点 Q 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动．设动点的运动时间为 t s，则当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 是矩形？

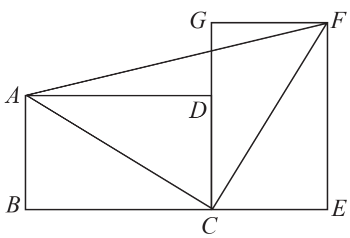
数学理解

14. 如图，把一张矩形纸片沿对角线折叠，重合部分是什么图形？试说明理由．

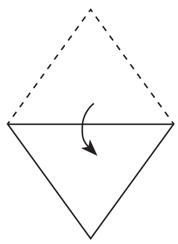


（第 14 题）

15. 如图，把两个大小完全相同的矩形拼成“L”形图案，求∠ACF，∠AFC 的度数．



（第 15 题）

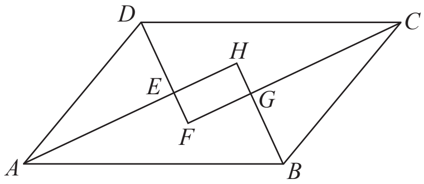


（第 16 题）

16. 小颖在商店里看到一块漂亮的方纱巾，非常想买，但当她拿起来时，又感觉纱巾不是正方形．商店老板看她犹豫的样子，马上过来将纱巾沿对角线对折，让小颖检验（如图）．小颖还是有些疑惑，老板又将纱巾沿另一条对角线对折，让小颖检验．小颖发现这两次对折后两个对角都能对齐，于是买下这块纱巾．你认为小颖买的这块纱巾一定是正方形吗？你认为用什么方法可以检验纱巾是不是正方形？

17. 已知：如图，▱$ABCD$ 各角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



（第 17 题）

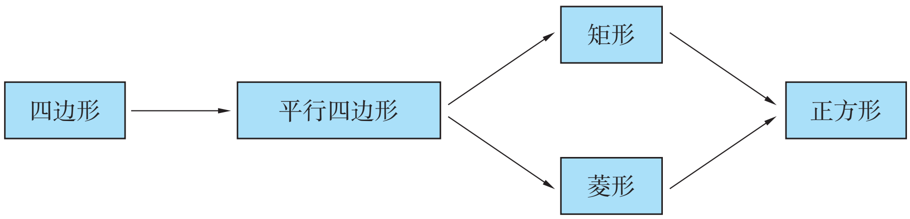
问题解决

18. 你能通过剪切和拼接下列图形得到一个矩形吗？在这些剪拼的过程中，剪下的图形是经过怎样的运动最后拼接在一起的？

（1）平行四边形；　　（2）三角形.

联系拓广

19. 将相应的条件填在相应的箭头上，使得下图能清楚地表达几种四边形之间的关系.



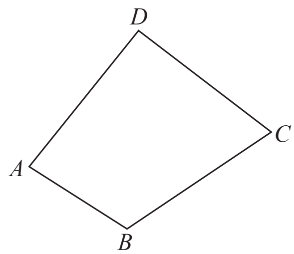
（第 19 题）

20. 已知两条对角线，利用尺规作一个菱形.

※**21.** 如图，画一个矩形 $EFGH$，并满足下列条件：

（1）点 A，B，C，D 分别在矩形 $EFGH$ 的四条边上；

（2）$S_{矩形\ EFGH}=2S_{四边形\ ABCD}$.



（第 21 题）

第七章　二次根式

一个正方形的面积为 S，它的边长可以用 $\sqrt{S}$ 表示.

一个物体从高度为 h m 的高处自由下落，如果不考虑空气的阻力，那么物体从开始下落到刚好落地所用的时间可以用式子 $\sqrt{\dfrac{h}{4.9}}$ s 来表示.

在数学和其他自然科学中，常常会遇到含有二次根式的式子，这就是本章我们所要研究的二次根式.

学习目标

- 了解二次根式的概念
- 探索二次根式的性质，会用二次根式的性质化去根号内的分母
- 了解最简二次根式、同类二次根式的概念
- 了解二次根式加、减、乘、除的运算法则，会用它们进行有关的简单四则运算

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$$

1 二次根式

议一议

（1）正方形的面积为 2，它的边长是多少？面积为 3 呢？面积为 S 呢？

（2）正方形的面积为 S，如果把它的面积增加 1，新正方形的边长是多少？

（3）观察问题（1）（2）所得到的式子，你发现它们有什么共同特点？

式子 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{S}$，$\sqrt{S+1}$ 的共同特点是：它们都是形如 $\sqrt{a}$ 的式子，并且被开方数都是非负数.

一般地，形如 $\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）的式子叫做**二次根式**（quadratic radical），其中 a 叫做被开方数.

我们知道，$\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）表示 a 的算术平方根，所以 $\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）是一个非负数，根据算术平方根的定义，它的平方等于 a. 用式子表示，就是

$$\sqrt{a} \geqslant 0\ (a \geqslant 0),\quad (\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0).$$

例 1 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{a+1}$；　　　　（2）$\sqrt{1-3a}$.

解：（1）如果 $\sqrt{a+1}$ 有意义，那么 $a+1 \geqslant 0$.

解不等式 $a+1 \geqslant 0$，得

$$a \geqslant -1.$$

所以，当 $a \geqslant -1$ 时，$\sqrt{a+1}$ 在实数范围内有意义.

（2）如果 $\sqrt{1-3a}$ 有意义，那么 $1-3a \geqslant 0$.

解不等式 $1-3a \geqslant 0$，得

$$a \leqslant \frac{1}{3}.$$

所以，当 $a \leqslant \frac{1}{3}$ 时，$\sqrt{1-3a}$ 在实数范围内有意义.

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{2.1})^2$；

(2) $(2\sqrt{3})^2$.

解：(1) $(\sqrt{2.1})^2 = 2.1$；

(2) $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.

随堂练习

1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{2a}$；　　(2) $\sqrt{5+a}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{7})^2$；　　(2) $\left(4\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2$.

读一读

方根符号

开方是最早产生的运算之一. 古埃及人以“┐”表示平方根；7 世纪印度人婆罗摩笈多以“c”（即 carani（平方根）的首个字母）表示平方根；15 世纪阿拉伯人盖拉萨迪以“ج”表示平方根.

2 世纪罗马人尼普萨斯以拉丁词语 latus（意即“正方形的边”）记平方根，该词的首个字母“l”后来成为欧洲重要的平方根符号之一. 法国数学家韦达也用过这个符号. 1624 年，英国人布里格斯分别以“l”“l_3”“ll”表示平方根、立方根及四次方根.

而另一个在欧洲被广泛采用的方根符号“℞”，也是源自拉丁词语“radix”（意即“平方根”）. 这个符号最先出现于由阿拉伯文译成拉丁文的欧几里得《几何原本》第 10 卷中，其后斐波那契和帕乔利等人均采用这个符号. 16～17 世纪，许多数学家用“℞”作为平方根符号.

德国人鲁多尔夫是较早以"$\surd$"表示平方根的人之一，他在 1557 年引入"$\surd$"后，又分别以"$\surd\!\!\!\!\!\!_{\small w}$"及"$\surd\!\!\!\!\!\!_{\small ww}$"表示三次方根及四次方根. 1637 年，笛卡儿采用"$\sqrt{\ }$"作为平方根符号. 1647 年，奥特雷德以"$\surd r$"表示平方根，以"$\surd[12]$"或"$\surd\boxed{12}$"表示十二次方根；1655 年，沃利斯以"$\surd^3R^2$"表示$\sqrt[3]{R^2}$；1721 年，哈顿分别以"$\sqrt[3]{}$"及"$\sqrt[4]{}$"表示三次方根及四次方根；1732 年，卢贝尔以$\sqrt[3]{25}$表示 25 的三次方根，与现代符号相同. 其后，各次方根都逐渐用这种形式的符号来表示，开始了现代符号的使用.

习题 7.1

知识技能

1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{2-a}$；　（2）$\sqrt{3-5a}$；　（3）$\sqrt{1+\frac{1}{2}a}$；　（4）$\frac{1}{\sqrt{a+1}}$.

2. 计算：

（1）$(\sqrt{16})^2$；　（2）$\left(-3\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2$.

数学理解

※**3.** 计算：

（1）$(\sqrt{3a^3})^2\ (a\geqslant 0)$；　（2）$(2\sqrt{5b+1})^2\ \left(b\geqslant -\frac{1}{5}\right)$.

2 二次根式的性质

议一议

（1）计算：$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{3^2}$，$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$，$\sqrt{0^2}$. 你发现了什么？

（2）猜一猜：当 $a\geqslant 0$ 时，二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的值是什么？

当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2} = a$.

利用二次根式的这一性质，我们可以计算、化简一些二次根式.

例 1 化简：

（1）$\sqrt{36}$；（2）$\sqrt{\frac{9}{4}}$.

解：（1）$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$；（2）$\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

做一做

计算下面的算式：

（1）$\sqrt{4 \times 9} =$ ________，$\sqrt{4} \times \sqrt{9} =$ ________；

（2）$\sqrt{121 \times 64} =$ ________，$\sqrt{121} \times \sqrt{64} =$ ________；

（3）$\sqrt{2 \times 3}$ 与 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 相等吗？为什么？

议一议

观察上面得到的运算结果，你发现了什么规律？你能用自己的语言表述吗？

一般地，

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

这就是说，积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

利用上面的二次根式性质，可以化简一些二次根式.

例 2 化简：

（1）$\sqrt{9 \times 25}$；（2）$\sqrt{300}$.

解：（1）$\sqrt{9\times25}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\times5=15$；

（2）$\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

如果一个二次根式的被开方数中有的因式（或因数）能开得尽方，可以利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）将这些因式（或因数）开出来，从而将二次根式化简.

想一想

式子 $\sqrt{(-4)\times(-9)}$ 有意义吗？如果有意义，它应该等于多少？

随堂练习

1. 判断下列各式是否成立：

（1）$\sqrt{(-2)^2\times3}=-2\sqrt{3}$；　　（2）$\sqrt{13^2-12^2}=5$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{4\times81}$；　（2）$\sqrt{12\times21}$；　（3）$-\sqrt{27\times15}$；　（4）$\sqrt{8\times27\times6}$.

习题 7.2

知识技能

1. 化简：

（1）$\sqrt{3^2}$；　（2）$\sqrt{64}$；　（3）$\sqrt{20}$；　（4）$\sqrt{240}$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{8\times18}$；　　（2）$\sqrt{3\times25\times225}$.

数学理解

※**3.** 化简：

（1）$\sqrt{4a^2b^3}$[1]；　　（2）$\sqrt{9(x+1)^2}$.

[1] 在本章中，如果没有特别说明，根号内的所有字母都表示正数.

联系拓广

※**4.** (1) 当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=$______；

(2) 当 a 为任意实数时，$\sqrt{a^2}=$______.

做一做

计算下面的算式：

(1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=$______，$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$______；

(2) $\sqrt{\frac{16}{25}}=$______，$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=$______；

(3) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ 与 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ 相等吗？为什么？

议一议

观察上面得到的运算结果，你发现了什么规律？你能用自己的语言表述吗？

一般地，

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

这就是说，商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

利用上面的二次根式性质，可以化去根号内的分母.

例 3 化简：

(1) $\sqrt{\frac{3}{25}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{45}{169}}$.

解：（1）$\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$；（2）$\sqrt{\frac{45}{169}}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{9\times5}}{\sqrt{13^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{13}$.

议一议

如何化去 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 根号内的分母？与同伴进行交流.

可以先利用分式的基本性质将 $\frac{1}{2}$ 的分子与分母同乘 2，使分母成为完全平方数，再利用商的算术平方根的性质化去根号内的分母，即

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\times2}{2\times2}}=\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 化去下列各式根号内的分母：

（1）$\sqrt{\frac{2}{5}}$；（2）$\sqrt{\frac{1}{7}}$.

解：（1）$\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{2\times5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$；

（2）$\sqrt{\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{7}{7^2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

例 3、例 4 的结果中，被开方数都不含分母，也不含开得尽的因数或因式. 一般地，被开方数不含分母，也不含能开得尽的因数或因式，这样的二次根式叫做**最简二次根式**.

一个二次根式如果不是最简二次根式，那么可以利用二次根式的性质，把它化成最简二次根式.

随堂练习

1. 化简：

（1）$\sqrt{\frac{1}{4}}$；（2）$\sqrt{\frac{2}{25}}$.

2. 化去下列各式根号内的分母：

（1）$\sqrt{\frac{1}{3}}$；　　（2）$\sqrt{\frac{2}{11}}$.

3. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{108}$；　　（2）$\sqrt{\frac{45}{4}}$；　　（3）$\sqrt{75}$；　　（4）$\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

习题 7.3

知识技能

1. 化简：

（1）$\sqrt{\frac{144}{169}}$；　　（2）$\sqrt{\frac{121}{49}}$；　　（3）$\sqrt{\frac{9}{25}}$；　　（4）$\sqrt{\frac{49}{16}\times\frac{64}{25}}$.

2. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{\frac{2}{27}}$；　　（2）$\sqrt{\frac{11}{12}}$.

数学理解

3. （1）已知直角三角形两条直角边的长分别为 3，6，求斜边的长；

（2）已知直角三角形的斜边长为 13，一条直角边的长为 7，求另一条直角边的长.

3 二次根式的加减

议一议

（1）如图 7−1，两个长方形的宽都是 $\sqrt{2}$ m，它们的长分别是 2 m 和 3 m，用不同方法求这两个长方形的面积的和．你有什么发现？

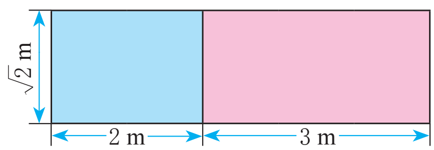


图 7−1

（2）如果两个正方形的面积分别是 18 和 8，那么大正方形的边长比小正方形的边长大多少？与同伴进行交流.

对于（1），把两个长方形的面积相加，可求出它们的和为 $(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})\ \mathrm{m}^2$，也可以直接求出大长方形的面积：$(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}\ (\mathrm{m}^2)$. 这说明 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}$. 这个结果也可由分配律得出：

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}.$$

对于（2），需要计算 $\sqrt{18}-\sqrt{8}$，但由于 $\sqrt{18}$，$\sqrt{8}$ 不是最简二次根式，先把它们化简：$\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$，$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$，再根据分配律，得

$$\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(3-2)\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

几个二次根式化简成最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，那么这几个二次根式是同类二次根式. 上面提到的 $2\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$，$\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{8}$ 都是同类二次根式. 同类二次根式可以像同类项那样进行合并.

一般地，二次根式相加减，先把各个二次根式分别化成最简二次根式，然后再将同类二次根式分别合并. 有括号时，要先去括号.

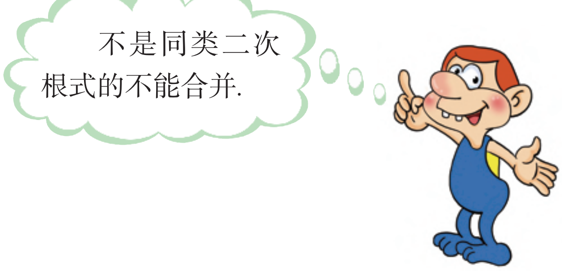
例 计算：

（1）$2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}$；（2）$\frac{1}{3}\sqrt{45}-\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5}\right)$.

解：（1）$2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}$

$$=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{3}+3\sqrt{2}；$$



（2）$\frac{1}{3}\sqrt{45}-\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{5}-5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=-\sqrt{5}$.

想一想

下列计算是否正确？为什么？

（1）$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$；

（2）$3+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；

（3）$a\sqrt{3}-b\sqrt{3}=\sqrt{3}(a-b)$；

（4）$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

随堂练习

1. 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$\sqrt{2}$，$\sqrt{75}$，$\sqrt{\frac{1}{50}}$，$\sqrt{\frac{1}{27}}$.

2. 计算：

（1）$5\sqrt{2}+\sqrt{8}-7\sqrt{18}$；

（2）$\sqrt{6}-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

习题 7.4

知识技能

1. 下列二次根式中，哪些与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式？

$\sqrt{18}$，$\sqrt{48}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{\frac{3}{4}}$.

2. 计算：

（1）$9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$；

（2）$6\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{27}$.

3. 计算：

（1）$(\sqrt{8}-\sqrt{125})-(\sqrt{18}+\sqrt{45})$；（2）$7\sqrt{2}-(2\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{2})$；

（3）$2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$；（4）$-\sqrt{48}-2\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{3}{16}}$.

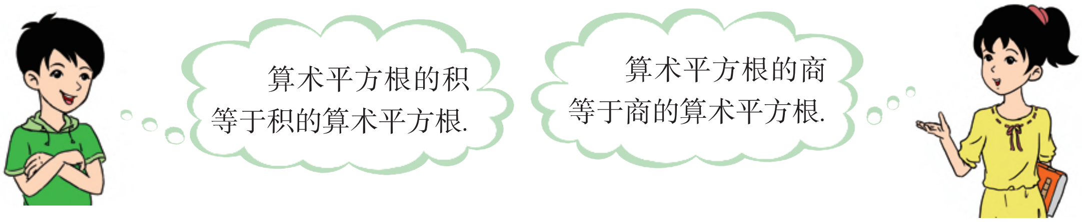
数学理解

※**4.** 计算：

（1）$a^2\sqrt{8a}-\frac{3a}{5}\sqrt{50a^3}$；（2）$2x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{9y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt{\frac{1}{y}}$.

4 二次根式的乘除

把 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$，$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$ 反过来，就可以得到二次根式的乘法和除法法则.



$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)；$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

利用上面的两个法则，可以进行二次根式的乘法和除法运算.

例 1 计算：

（1）$\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$；（2）$3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$；（4）$2\sqrt{6}\div 4\sqrt{3}$.

解：（1）$\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5\times 10}=\sqrt{5^2\times 2}=5\sqrt{2}$；

（2）$3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=3\times 2\times\sqrt{2\times 6}=6\sqrt{2^2\times 3}=12\sqrt{3}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\sqrt{\dfrac{21}{3^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$；

（4）$2\sqrt{6}\div 4\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{6}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

想一想

（1）你能说出例 1 中各题每步计算的依据吗？

（2）例 1（3）题还有其他解法吗？

例 2 计算：$\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}\div\sqrt{18}$.

解：$\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}\div\sqrt{18}=\sqrt{8\times 27}\div\sqrt{18}=\sqrt{\dfrac{8\times 27}{18}}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$.

随堂练习

1. 计算：

（1）$\sqrt{96}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{8}}$；（2）$6\sqrt{27}\cdot(-2\sqrt{3})$；

（3）$\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}$；（4）$10\sqrt{10}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}}$；（2）$\sqrt{\dfrac{16}{5}}\div\sqrt{\dfrac{5}{8}}$；

（3）$2\div\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；（4）$\sqrt{3}\div\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$.

习题 7.5

知识技能

1. 计算：

（1）$\sqrt{11}\cdot(-\sqrt{44})$；（2）$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}$；

（3）$\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{30}$；（4）$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6}$.

2. 计算：

（1）$\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$；（2）$5\sqrt{3}\div4\sqrt{12}$；

（3）$\frac{-3}{\sqrt{27}}$；（4）$\sqrt{5}\div\sqrt{10}$；

（5）$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\div\sqrt{30}$；（6）$\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt{3}\div\sqrt{\frac{1}{3}})$.

3. 设长方形的面积是 S，长是 a，宽是 b.

（1）已知 $a=\sqrt{8}$ m，$b=\sqrt{12}$ m，求 S；

（2）已知 $a=2\sqrt{7}$ m，$S=3\sqrt{28}$ m²，求 b.

数学理解

※**4.** 计算：

（1）$\frac{2y}{\sqrt{4xy}}$；（2）$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}$；（3）$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{\frac{1}{b}})$.

例 3 计算：

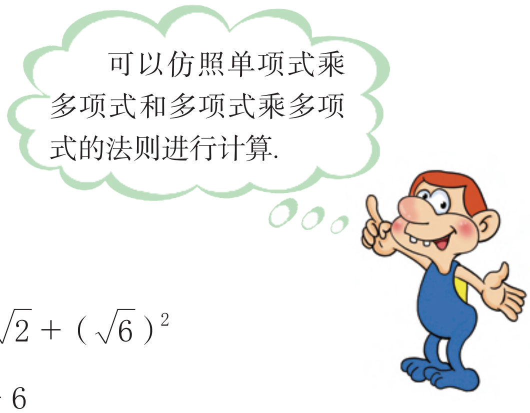
（1）$\sqrt{12}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}$；（2）$\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}$.

解：（1）$\sqrt{12}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}+\sqrt{48}=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

（2）$\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

想一想

例 3 中的各题还有其他解法吗?



例 4 计算:

(1) $\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})$;

(2) $(5+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

解: (1) $\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{6})^2$

$=\sqrt{12}+6$

$=6+2\sqrt{3}$;

(2) $(5+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=15\sqrt{2}-10\sqrt{3}+3\sqrt{12}-2\sqrt{18}$

$=15\sqrt{2}-10\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}-4\sqrt{3}$.

例 5 计算:

(1) $(2\sqrt{3}-1)^2$;

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

解: (1) $(2\sqrt{3}-1)^2$

$=(2\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}+1$

$=12-4\sqrt{3}+1$

$=13-4\sqrt{3}$;

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2$

$=1$.

随堂练习

1. 计算:

(1) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{6})$;

(2) $(2\sqrt{5}+3)(3\sqrt{5}-2)$.

2. 计算:

(1) $(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$;

(2) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)^2$;

(3) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$;

(4) $(\sqrt{6}+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$.

读一读

秦九韶公式

秦九韶（约 1202—1261）是我国南宋著名数学家．他知识渊博，精通星象、音律、算术等．在数学方面，他注重搜集生产、生活、商贸以及战争中的数学问题，“设为问答以拟于用”，终于在 1247 年完成数学巨著《数书九章》．

《数书九章》全书共 18 卷，81 题，分为大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市物九大类．此书卷五第二题就是为了解决大面积沙田的地亩测量而提出的：

“问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知为田几何．”秦九韶的解法是：“以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之．同乘于上，以小斜幂乘大斜幂，减上．余，四约之为实，开平方，得积．”答案是：“三百十五顷．”

若把大斜记为 a，小斜记为 b，中斜记为 c，面积记为 S，则秦九韶的解法实质上便是下面的公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}. \quad ①$$

上述公式称为秦九韶公式．

如果设 $p=\frac{a+b+c}{2}$，那么将秦九韶公式加以整理、变形，可以得到

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad ②$$

这便是著名的海伦公式．你能由①推导出②吗？试试看！

习题 7.6

知识技能

1. 计算：

（1）$\sqrt{6}\cdot(\sqrt{12}+5\sqrt{8})$；（2）$(\sqrt{48}+\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}$；

（3）$\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{3}$；（4）$\left(2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\cdot 3\sqrt{2}$；

（5）$(\sqrt{21}-2\sqrt{3})\div\sqrt{3}$；（6）$(\sqrt{48}+\sqrt{3})\div\sqrt{27}$．

2. 计算：

（1）$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$；（2）$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$．

数学理解

3. 计算：

（1）$(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})$；　　（2）$(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}+4\sqrt{3})$；

（3）$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$；　　（4）$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

回顾与思考

1. 什么是二次根式？什么是最简二次根式？什么是同类二次根式？举例说明.
2. 二次根式有哪些主要的性质？
3. 二次根式加减运算的实质是什么？
4. 进行二次根式的加、减、乘、除以及简单的混合运算时，应当注意哪些问题？
5. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. x 取什么值时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{x-4}$；　　（2）$\sqrt{1+x^2}$；　　（3）$\sqrt{4-6x}$；　　（4）$\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

2. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{150}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{14}{3}}$.

3. 计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-2$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$；

（3）$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$；　　（4）$2\sqrt{12}+3\sqrt{48}$；

（5）$\sqrt{\dfrac{1}{7}}+\sqrt{28}-\sqrt{700}$；　　（6）$\sqrt{32}-3\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{2}$.

4. 求代数式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 的值.

（1）$a=1$，$b=10$，$c=-15$；　　（2）$a=2$，$b=-8$，$c=5$.

5. 已知 $x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，求 x^2+xy+y^2 的值.

6. 已知直角三角形的两条直角边分别是 a，b，斜边是 c.

（1）如果 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$，求 c；

（2）如果 $a=8$，$c=2\sqrt{33}$，求 b 及直角三角形的面积.

7. 化简：

（1）$\frac{1}{4}\sqrt{3}\div 5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{12}$；　　（2）$(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})^2$.

8. 当 $a=3$，$b=2$ 时，求 $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}$ 的值.

数学理解

9. 观察下面的运算，你能发现什么规律？

由 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$；

由 $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$；

由 $(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}-3$；

……

请用含有自然数 n（$n\geqslant 1$）的式子将你发现的规律表示出来.

10. （1）判断下列各式是否成立：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$；（　　）　　$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$；（　　）

$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$；（　　）　　$\sqrt{5+\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$.（　　）

（2）根据（1）中的结果，你能发现什么规律？请用含有自然数 n 的式子将你发现的规律表示出来，并注明 n 的取值范围；

※（3）请说明你所发现的规律的正确性.

问题解决

11. 如果一个三角形的三边的长分别为 a，b，c，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有下列面积公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{（海伦公式）},$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}\text{（秦九韶公式）}.$$

（1）如果一个三角形的三边的长依次为5，6，7，利用两个公式分别求三角形的面积；

（2）如果一个三角形的三边的长依次为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，利用两个公式分别求三角形的面积.

第八章　一元二次方程

梯子下滑、铺设地毯和几个整数间的某些性质，这样几个看似风马牛不相及的问题，却有着某种内在的联系，你觉得奇妙吗？生活中还有许许多多的问题也蕴含着同样的规律.

本章将对一元二次方程进行全面的认识. 与一元一次方程和分式方程一样，一元二次方程也是刻画现实问题的有效的数学模型.

学习目标

- 积累从现实问题中抽象出数量之间的（相等）关系并加以表示的经验
- 领悟用一元二次方程刻画数量关系的意义和作用
- 能够用多种方法求解一元二次方程
- 体会解决方程问题中的方法与思想

1 一元二次方程

幼儿园活动教室矩形地面的长为 8 m，宽为 5 m，现准备在地面正中间铺设一块面积为 18 m^2 的地毯（如图 8-1），四周未铺地毯的条形区域的宽度都相同，你能求出这个宽度吗？

如果设所求的宽度为 x m，那么你能列出怎样的方程？

图 8-1

观察下面的等式：

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

你还能找到五个连续整数，使前三个数的平方和等于后两个数的平方和吗？

如果将这五个连续整数中的第一个数设为 x，那么怎样用含 x 的代数式表示其余四个数？根据题意，你能列出怎样的方程？

如图 8-2，一个长为 10 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的顶端距地面的垂直距离为 8 m．如果梯子的顶端下滑 1 m，那么梯子的底端向外滑动多少米？

你能计算出滑动前梯子底端距墙的距离吗？如果设梯子底端向外滑动 x m，那么你能列出怎样的方程？

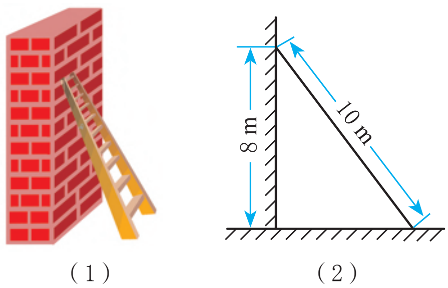


图 8-2

议一议

由上面三个问题，我们可以得到三个方程：

$$(8-2x)(5-2x)=18,$$

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2,$$

$$(x+6)^2+7^2=10^2.$$

这三个方程有什么共同特点？

上面的方程都是只含有一个未知数 x 的整式方程❶，并且都可以化成 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）的形式，这样的方程叫做**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown）.

我们把 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c为常数，$a\neq 0$）称为一元二次方程的一般形式，其中 ax^2，bx，c 分别称为二次项、一次项和常数项，a，b 分别称为二次项系数和一次项系数.

随堂练习

1. 根据题意列出方程：已知直角三角形的三边长为连续整数，求它的三边长.

2. 把方程 $(3x+2)^2=4(x-3)^2$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

习题 8.1

知识技能

1. 根据题意，列出方程：

（1）有一面积为 54 m^2 的长方形，将它的一边剪短 5 m，另一边剪短 2 m，恰好变成一个正方形. 这个正方形的边长是多少？

（2）三个连续整数两两相乘，再求和，结果为 242. 这三个整数分别是多少？

❶ 等号两边都是关于未知数的整式的方程，称为整式方程.

2. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$3x^2=5x-1$				
$(x+2)(x-1)=6$				
$4-7x^2=0$				

问题解决

3. 从前有一天，某人拿一竹竿对着大门比画：竹竿横着比门框宽 4 尺[1]，竖着比门框高 2 尺，斜着与门框的对角线长度相等. 你知道竹竿有多长吗?

请根据这一问题列出方程.

在前一课第一个问题中，四周未铺地毯部分的宽度 x（m）满足方程

$$(8-2x)(5-2x)=18,$$

也就是

$$2x^2-13x+11=0.$$

你能求出 x 吗?

（1）根据题目的已知条件，你能确定 x 的大致范围吗?

（2）x 可能小于 0 吗？可能大于 4 吗？可能大于 2.5 吗？说说你的理由.

（3）填写下表：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$2x^2-13x+11$						

[1] “尺”是我国一种传统的长度单位，3 尺 = 1 米.

（4）你知道所求宽度 x（m）是多少吗？还有其他求解方法吗？与同伴进行交流.

做一做

在前一课的问题中，梯子底端向外滑动的距离 x（m）满足方程

$$(x+6)^2+7^2=10^2,$$

也就是

$$x^2+12x-15=0.$$

（1）小明认为梯子底端也向外滑动了 1 m，他的说法正确吗？为什么？

（2）梯子底端向外滑动的距离可能是 2 m 吗？可能是 3 m 吗？为什么？

（3）你能猜出滑动距离 x（m）的大致范围吗？

（4）x 的整数部分是几？十分位是几？

小亮把他的求解过程整理如下：

x	0	0.5	1	1.5	2
$x^2+12x-15$	-15	-8.75	-2	5.25	13

所以 $1<x<1.5$.

进一步计算：

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$x^2+12x-15$	-0.59	0.84	2.29	3.76

所以 $1.1<x<1.2$.

因此 x 的整数部分是 1，十分位是 1.

你的结果怎样呢？

随堂练习

1. 五个连续整数，前三个数的平方和等于后两个数的平方和. 你能估算出这五个整数分别是多少吗？

2. 试估算方程 $x^2-3x-5=0$ 的根.

读一读

用二分法确定一元二次方程的近似解

本节课中，我们通过不断缩小范围得到了几个一元二次方程的近似解．数学学习和生产生活中，有很多这样通过缩小范围确定结果的例子，例如，估计无理数 $\sqrt{2}$ 的近似值，在某段线路上找出发生故障的那个点，在一定的范围内找出某种钢材的最佳淬火温度……

缩小范围的常用方法是二分法，具体做法是：找出初始范围的中间点，判断解在中间点的哪一侧，得到一个新的范围，然后对这个新的范围进行类似操作，如此往复，直到最终的结果符合实际问题的精确度要求．

我们通过一个例子感受一下．

比如，一个具体问题中，x 满足方程 $(x-10)(x-20)=140$，其中 $x>20$．

第一步：估计 x 的大致范围．根据题意，可知 $x>20$，且 x 越大，左边的值就越大．不妨假设 $x=30$，可以算出此时左边的值是 200．$200>140$，因此，可以确定 x 的范围是 $20<x<30$．

第二步：缩小 x 的范围．令 x 取 20 和 30 的中间值 25，此时左边的值是 75．$75<140$，因此，可以缩小范围为 $25<x<30$．

下面不断重复第二步的操作，不难依次得到 x 的范围：$27.5<x<30$，$27.5<x<28.75$，$27.5<x<28.125$……

最后按照实际需要确定近似解．如果实际问题中要求 x 精确到个位，则可得近似解为 $x=28$．如果需要精确度更高的结果，那么可以按照上面的方法继续做下去．

可以看出，二分法中缩小范围的时候，操作过程是完全类似的，因此，可以在计算机中借助程序进行“机械”操作．

习题 8.2

知识技能

1. 一个面积为 120 m^2 的矩形苗圃，它的长比宽多 2 m．苗圃的长和宽各是多少？

2. 有一条长为 16 m 的绳子，你能否用它围出一个面积为 15 m^2 的矩形？若能，则矩形的长、宽各是多少？

数学理解

3. 一名跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练，在正常情况下，运动员必须在距水面 5 m 以前完成规定的翻腾动作，并且调整好入水姿势，否则就容易出现失误. 假设运动员起跳后的运动时间 t（s）和运动员距离水面的高度 h（m）满足关系：$h=10+2.5t-5t^2$，那么他最多有多长时间完成规定动作？

2 用配方法解一元二次方程

怎样解一元二次方程呢？比如，解一元二次方程

$$x^2-9=0.$$

如果将常数项 -9 移到方程的右边，可以得到

$$x^2=9.$$

根据平方根的意义，x 就是 9 的平方根，而 9 的平方根是 $+3$ 和 -3，因此应该有 $x=\pm 3$.

这就是说，$x=3$ 是方程 $x^2-9=0$ 的一个根；同样，$x=-3$ 也是方程 $x^2-9=0$ 的一个根. 这时，我们说方程 $x^2-9=0$ 有两个根 $x_1=3$，$x_2=-3$.

议一议

$x^2=9$ 可以直接开平方，这样的方程有什么特征？你能借助这个经验解下面的两个方程吗？

（1）$4x^2-7=0$；　　（2）$(x-2)^2=9$.

你是怎么做的？与同伴进行交流.

如果一元二次方程的一边是一个含有未知数的一次式的完全平方式，而另一边是一个非负数，那么就可以根据平方根的意义，通过开平方求出这个方程的根.

例 1 解方程：$x^2+6x+9=25$.

解： 原方程就是 $(x+3)^2=25$.

开平方，得

$$x+3=\pm 5,$$

所以 $x_1=2$，$x_2=-8$.

随堂练习

1. 解下列方程：

（1）$49x^2=25$；（2）$0.01x^2-0.25=0$；

（3）$\frac{1}{2}t^2=45$；（4）$1.5-\frac{3}{5}x^2=0$.

2. 解下列方程：

（1）$(x+1)^2=16$；（2）$(x-2)^2=5$；

（3）$x^2-2x+1=4$；（4）$x^2+8x+16=3$.

习题 8.3

知识技能

1. 解下列方程：

（1）$2y^2=5$；（2）$3x^2-6=0$；

（3）$9a^2=16$；（4）$2x^2-25=0$.

2. 解下列方程：

（1）$(x-10)^2=3$；（2）$(x+5)^2=8$；

（3）$(x-1)^2=25$；（4）$4(x+3)^2=9$.

在上节中，我们已经求出了方程 $x^2+12x-15=0$ 的一个根的近似值，你能设法求出它的精确值吗？

议一议

解方程 $x^2+12x-15=0$ 的困难在哪里？你能将方程 $x^2+12x-15=0$ 转化成你会解的方程的形式吗？

解这个一元二次方程，关键是要设法将其转化为左边是含有未知数的一次式的完全平方式，而右边是一个常数的形式. 为此，将方程两边同时加上 51，得

$$x^2+12x+36=51,$$

即

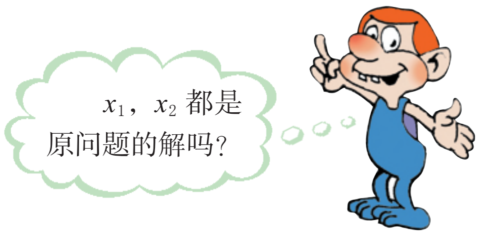
$$(x+6)^2=51.$$

两边开平方，得

$$x+6=\pm\sqrt{51}.$$

因此，方程 $x^2+12x-15=0$ 有两个根

$x_1=\sqrt{51}-6$，$x_2=-\sqrt{51}-6$.



这里，解一元二次方程的基本思路是将方程转化成 $(x+m)^2=n$ 的形式，当 $n\geqslant 0$ 时，两边开平方便可求出它的根.

做一做

填上适当的数，使下列等式成立：

$$x^2+12x+\underline{\qquad}=(x+6)^2;$$

$$x^2-4x+\underline{\qquad}=(x-\underline{\qquad})^2;$$

$$x^2+8x+\underline{\qquad}=(x+\underline{\qquad})^2.$$

在上面等式的左边，常数项和一次项系数有什么关系？

例 2 解方程：$x^2+8x-9=0$.

解： 可以把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+8x=9.$$

两边都加上 4^2（一次项系数 8 的一半的平方），得

$$x^2+8x+4^2=9+4^2,$$

即
$$(x+4)^2=25.$$

开平方，得
$$x+4=\pm 5,$$

即
$$x+4=5，或 x+4=-5.$$

所以 $x_1=1$，$x_2=-9$.

在例 2 中，我们通过配成完全平方式的方法得到了一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法称为**配方法**（solving by completing the square）.

随堂练习

1. 填上适当的数，使下列等式成立：

（1）x^2+4x+____ $=(x+$____$)^2$；

（2）x^2-10x+____ $=(x-$____$)^2$；

（3）x^2+x+____ $=(x+$____$)^2$；

（4）x^2-3x+____ $=(x-$____$)^2$.

2. 解下列方程：

（1）$x^2-10x+25=7$；（2）$x^2+6x=1$；

（3）$x^2-3x=-1$；（4）$x^2+\frac{1}{2}x=1$.

习题 8.4

知识技能

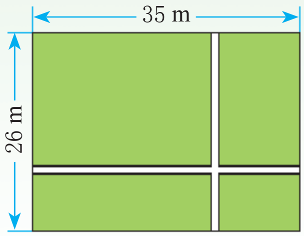
1. 解下列方程：

（1）$x^2+12x+25=0$；（2）$x^2+4x=10$；

（3）$x^2-6x=11$；（4）$x^2-2x-4=0$.

问题解决

2. 如图，在一块长 35 m、宽 26 m 的矩形地面上，修建同样宽的两条互相垂直的道路，剩余部分栽种花草，要使剩余部分的面积为 850 m^2，道路的宽应为多少？



（第 2 题）

例 3 解方程：$3x^2+8x-3=0$.

解： 两边都除以 3，得

$$x^2+\frac{8}{3}x-1=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{8}{3}x=1.$$

配方，得

$$x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

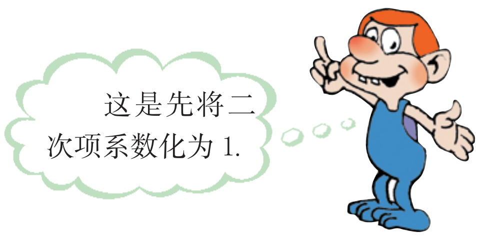
$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

即

$$x+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}, \text{ 或 } x+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-3.$$



做一做

一个小球以 15 m/s 的初速度竖直向上弹出，它在空中的高度 h（m）与时间 t（s）满足关系式：

$$h=15t-5t^2,$$

小球的高度何时能达到 10 m？

随堂练习

1. 解下列方程：

（1）$x^2-3x+1=0$；（2）$2x^2+6=7x$；

（3）$3x^2-9x+2=0$；（4）$2x^2+3x-2=0$.

2. 某辆汽车在公路上行驶，它行驶的路程 s（m）和时间 t（s）之间的关系为：$s=10t+3t^2$，那么行驶 200 m 需要多长时间？

读一读

一元二次方程的几何解法

你知道吗，对于一元二次方程，我国及其他一些国家的古代数学家还研究过其几何解法呢！

下面以方程 $x^2+2x-35=0$ 即 $x(x+2)=35$ 为例加以说明.

三国时期的数学家赵爽（公元 3～4 世纪）在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是：构造图 8-3，图中大正方形的面积是 $(x+x+2)^2$，另一方面，它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times35+2^2$. 据此易得 $x=5$.

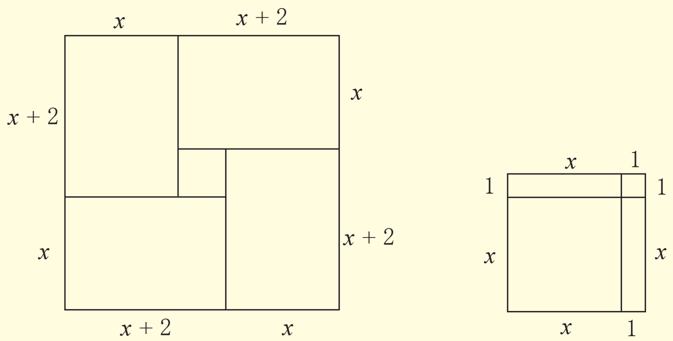


图 8-3　图 8-4

公元 9 世纪，阿拉伯数学家阿尔·花拉子米采用的方法是：构造图 8-4，一方面，正方形的面积为 $(x+1)^2$，另一方面，它又等于 $35+1$. 据此同样可得 $x=5$.

想一想，图 8-3 与图 8-4 有什么差别与联系？图 8-4 的方法与配方法又有什么联系？这样做，只得到了方程的一个根，为什么？

习题 8.5

知识技能

1. 解下列方程：

（1）$6x^2-7x+1=0$；　　（2）$5x^2-9x-18=0$；

（3）$4x^2-3x=52$；　　（4）$5x^2=4-2x$.

问题解决

2. 你能解决下面的问题吗？

印度古算书中有这样一首诗："一群猴子分两队，高高兴兴在游戏. 八分之一再平方，蹦蹦跳跳树林里；其余十二叽喳喳，伶俐活泼又调皮. 告我总数共多少，两队猴子在一起."

大意是说：一群猴子分成两队，一队猴子数是猴子总数的 $\frac{1}{8}$ 的平方，另一队猴子数是 12，那么猴子总数是多少？

3 用公式法解一元二次方程

我们发现，利用配方法解一元二次方程的基本步骤是相同的. 因此，如果能用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），得到根的一般表达式，那么再解一元二次方程时，就会方便简捷得多.

做一做

你能用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）吗？

因为二次项系数 $a \neq 0$，所以方程两边同除以 a，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

移项，得 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

配方，得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

因为 $a \neq 0$，所以 $4a^2 > 0$. 当 $b^2 - 4ac \geqslant 0$ 时，$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 是一个非负数.

开平方，得 $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

所以 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

一般地，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$），当 $b^2 - 4ac \geqslant 0$ 时，它的根是：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

即 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

上面这个式子称为一元二次方程的求根公式. 用求根公式解一元二次方程的方法称为**公式法**（solving by formular）.

利用这一求根公式解方程，只需把一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$）的系数 a，b，c 的值代入到求根公式中进行计算即可. 这样就把方程的求解问题转化为代数式的值的计算问题，从而可以简化解一元二次方程的过程.

例 1 解方程：

（1）$x^2 - 7x - 18 = 0$；（2）$2x^2 + 5x + 2 = 0$.

解：（1）这里 $a=1$，$b=-7$，$c=-18$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-18)=121>0$，

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{121}}{2\times1}=\dfrac{7\pm11}{2}$，

即 $x_1=9$，$x_2=-2$.

（2）这里 $a=2$，$b=5$，$c=2$.

$\because b^2-4ac=5^2-4\times2\times2=9>0$，

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{-5\pm3}{4}$，

即 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=-2$.

随堂练习

1. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-9x+8=0$；（2）$9x^2+6x+1=0$；

（3）$16x^2+8x=3$.

2. 一个直角三角形三边的长为三个连续偶数，求这个三角形的三条边长.

习题 8.6

知识技能

1. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-4x-1=0$；（2）$5x+2=3x^2$；

（3）$(x-2)(3x-5)=1$.

问题解决

2.《九章算术》“勾股”章有一题：“今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈.问户高、广各几何.”

大意是说：已知矩形门的高比宽多 6 尺 8 寸，门的对角线长 1 丈，那么门的高和宽各是多少？（1 丈 = 10 尺，1 尺 = 10 寸）

例 2 解方程：

（1）$(x+1)(3x-1)=1$；　　　　（2）$x^2+3=2\sqrt{3}x$.

解：（1）原方程经整理，得

$$3x^2+2x-2=0.$$

这里 $a=3$，$b=2$，$c=-2$.

$\because\ b^2-4ac=2^2-4\times 3\times(-2)=28>0$，

$\therefore\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{2\times 3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$，

即　$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

（2）原方程经整理，得

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0.$$

这里 $a=1$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=3$.

$\because\ b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times 1\times 3=0$，

$\therefore\ x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm 0}{2}$，

即　$x_1=x_2=\sqrt{3}$.

想一想

例 2 中，两个方程的解有什么不同？

随堂练习

1. 把下列方程化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，写出其中 a，b，c 的值，并计算 b^2-4ac 的值：

（1）$x^2-3x=4$；　　　　（2）$4x^2+1=4x$；

（3）$(2x+1)(x+2)=3$.

2. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-5x-1=0$；（2）$y^2+16=10y$；

（3）$t(t+2\sqrt{2})=-2$；（4）$x^2-x-1=0$.

3. 若两个连续奇数的积是 323，求这两个数.

习题 8.7

知识技能

1. 用适当的方法解下列方程：

（1）$3x^2=54$；（2）$x^2-4x=8$；

（3）$6x^2-4=3x$；（4）$x^2-\sqrt{6}x+1=0$.

问题解决

2. 两个正方形，小正方形的边长比大正方形边长的一半多 4 cm，大正方形的面积比小正方形面积的 2 倍少 32 cm^2，求这两个正方形的边长.

小明在解方程 $x^2-2x+3=0$ 时是这样做的：

将方程整理，得

$$x^2-2x=-3.$$

两边同时加 1，得

$$x^2-2x+1=-3+1.$$

即 $$(x-1)^2=-2.$$

这个方程有实数根吗？为什么？

议一议

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 在什么情况下有实数根？在什么情况下没有实数根？与同伴进行交流.

我们知道，方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 经过配方可以变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，这样由 b^2-4ac 就可以确定 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 是正数、零还是负数.

（1）如果 $b^2-4ac>0$，这时方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（2）如果 $b^2-4ac=0$，则 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$，这时方程有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

（3）如果 $b^2-4ac<0$，而 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 不可能是负数，这时方程没有实数根.

以上三个结论反过来也是正确的.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根的**判别式**（discriminant），通常用希腊字母“Δ”（读作 delta）表示.

例 3 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：

（1）$2x^2+x-4=0$；（2）$4y^2+9=12y$；

（3）$5(t^2+1)-6t=0$.

解：（1）这里，$a=2$，$b=1$，$c=-4$.

$\because \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 2\times(-4)=33>0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

（2）原方程化为一般形式，得

$$4y^2-12y+9=0.$$

这里，$a=4$，$b=-12$，$c=9$.

$\because \Delta = b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=0$，

$\therefore$ 原方程有两个相等的实数根.

（3）原方程化为一般形式，得

$$5t^2-6t+5=0.$$

这里，$a=5$，$b=-6$，$c=5$.

$\because \Delta = b^2-4ac=(-6)^2-4\times5\times5=-64<0$，

$\therefore$ 原方程没有实数根.

随堂练习

1. 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：

（1）$3x^2-5x-2=0$；　　（2）$t^2+3=2\sqrt{2}t$；

（3）$x^2=3(2x-3)$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-ax+a+3=0$ 有两个相等的实数根，求 a 的值.

习题 8.8

知识技能

1. 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：

（1）$2x^2+11x+5=0$；　　（2）$x(2x-5)=-4$；

（3）$y^2-4\sqrt{3}y=-12$.

数学理解

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(m+1)x+(m-2)^2=0$ 有两个相等的实数根.

（1）求 m 的值；

（2）求出这时方程的根.

4 用因式分解法解一元二次方程

一个数的平方与这个数的 3 倍有可能相等吗？如果相等，这个数是几？你是怎样求出来的？

小颖、小明、小亮都设这个数为 x，根据题意，可得方程 $x^2=3x$. 但他们的解法各不相同.

由方程 $x^2=3x$，得

$x^2-3x=0$.

因此 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9}}{2}$，

$x_1=0$，$x_2=3$.

所以这个数是 0 或 3.

方程 $x^2=3x$ 两边同时约去 x，得

$x=3$.

所以这个数是 3.

由方程 $x^2=3x$，得

$x^2-3x=0$，

即 $x(x-3)=0$.

于是 $x=0$，或 $x-3=0$.

因此 $x_1=0$，$x_2=3$.

所以这个数是 0 或 3.

如果 $a\cdot b=0$，
那么 $a=0$ 或 $b=0$.

议一议

他们做得对吗？为什么？你是怎么做的？

当一元二次方程的一边为 0，而另一边易于分解成两个一次因式的乘积时，我们就可以用小亮的方法求解. 这种解一元二次方程的方法称为**因式分解法**.

例 解下列方程：

（1）$5x^2=4x$；（2）$x-2=x(x-2)$.

解：（1）原方程可变形为

$$5x^2-4x=0,$$

$$x(5x-4)=0.$$

$$x=0，或 5x-4=0.$$

$$\therefore \quad x_1=0,\ x_2=\frac{4}{5}.$$

原来的一元二次方程转化成了两个一元一次方程.

（2）原方程可变形为

$$x-2-x(x-2)=0,$$

$$(x-2)(1-x)=0.$$

$$x-2=0，或 1-x=0.$$

$$\therefore \quad x_1=2,\ x_2=1.$$

想一想

你能用因式分解法解方程 $x^2-4=0$，$(x+1)^2-25=0$ 吗？

随堂练习

1. 用因式分解法解下列方程：

（1）$(x+2)(x-4)=0$；

（2）$4x(2x+1)=3(2x+1)$.

2. 一个数平方的 2 倍等于这个数的 7 倍，求这个数.

习题 8.9

知识技能

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(4x-1)(5x+7)=0$； (2) $3x(x-1)=2-2x$；

(3) $(2x+3)^2=4(2x+3)$； (4) $2(x-3)^2=x^2-9$.

2. 解下列方程：

(1) $5(x^2-x)=3(x^2+x)$； (2) $(x-2)^2=(2x+3)^2$；

(3) $(x-2)(x-3)=12$； (4) $2x+6=(x+3)^2$；

(5) $2y^2+4y=y+2$.

*5 一元二次方程的根与系数的关系

做一做

填写下面的表：

一元二次方程	方程的两个根	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2+5x+6=0$	$x_1=$　　$x_2=$		
$x^2-4x+3=0$	$x_1=$　　$x_2=$		
$2x^2-x-1=0$	$x_1=$　　$x_2=$		

议一议

上表中，一元二次方程两个根的和、两个根的积分别与它的系数有什么关

系？与同伴交流.

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$时，它的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

因此，两个根的和为

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}\\&=-\frac{b}{a};\end{aligned}$$

两个根的积为

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\&=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

于是得到

如果方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有两个实数根 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

例 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

(1) $x^2+7x+6=0$；　　(2) $2x^2-3x-2=0$.

解：(1) 这里 $a=1$，$b=7$，$c=6$.

$$\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times 1\times 6=49-24=25>0,$$

$\therefore$ 方程有两个实数根.

设方程的两个实数根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-7，x_1x_2=6.$$

（2）这里 $a=2$，$b=-3$，$c=-2$.

$$\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25>0,$$

∴ 方程有两个实数根.

设方程的两个实数根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=\frac{3}{2}，x_1x_2=-1.$$

做一做

以上例题中，你还能求出两根差的平方 $(x_1-x_2)^2$ 及两根的平方和 $x_1^2+x_2^2$ 的值吗？它们分别等于多少？

随堂练习

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x^2-3x-1=0$；（2）$3x^2+2x-5=0$.

2. 小明、小华、小亮分别求出了方程 $9x^2+6x-1=0$ 的根.

小明：$x_1=x_2=-\dfrac{1}{3}$；

小华：$x_1=-3+3\sqrt{2}$，$x_2=-3-3\sqrt{2}$；

小亮：$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{3}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{3}$.

谁的答案正确？说说你的判断方法.

3. 已知方程 $x^2-\dfrac{2}{3}x-7=0$ 的一个根是 3，求它的另一个根.

习题 8.10

知识技能

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x(3x-1)-1=0$；（2）$(2x+5)(x+1)=x+7$.

2. 解下列方程：

（1）$12x^2+7x+1=0$；（2）$0.8x^2+x=0.3$；

（3）$3x^2+1=2\sqrt{3}x$；（4）$(x+1)(x-3)=2x+5$.

数学理解

3. 已知方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是 2，求它的另一个根及 k 的值.

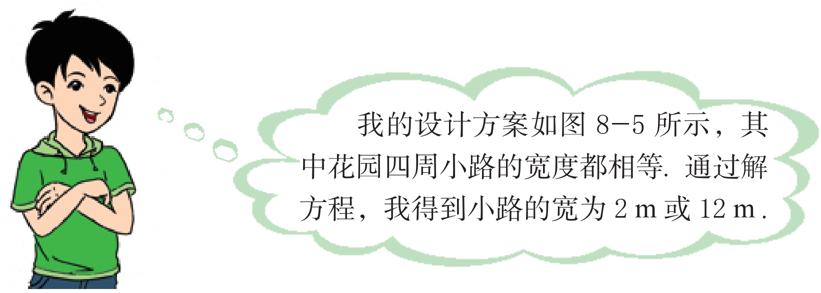
问题解决

4. 如果一个三角形两边的长分别等于一元二次方程 $x^2-17x+66=0$ 的两个实数根，那么这个三角形的第三边的长可能是 20 吗？为什么？

6 一元二次方程的应用

在一块长 16 m 、宽 12 m 的矩形土地上，要建造一个花园，并使花园所占面积为矩形土地面积的一半. 你能给出设计方案吗？

下面分别是小明和小亮的设计方案.



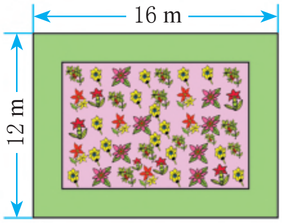


图 8-5

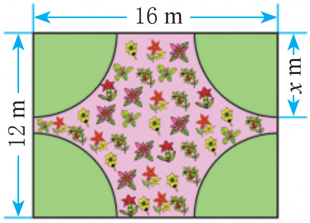
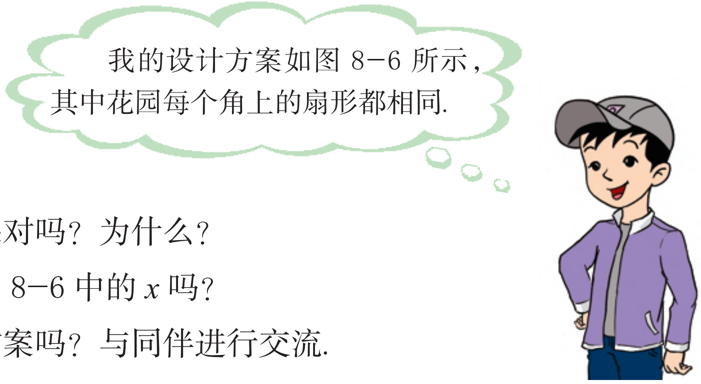


图 8-6



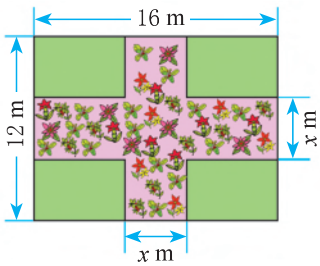
（1）你认为小明的结果对吗？为什么？

（2）你能帮小亮求出图 8-6 中的 x 吗？

（3）你还有其他设计方案吗？与同伴进行交流.

随堂练习

对于本节课的花园设计问题，小颖的设计方案如图所示，你能帮她求出图中的 x 吗？



习题 8.11

问题解决

1. 在一幅长 90 cm、宽 40 cm 的风景画的四周外围镶上一条宽度相同的金色纸边，制成一幅挂图，如果要求风景画的面积是整个挂图面积的 72%，那么金色纸边的宽应该是多少？

2. 某农场要建一个矩形养鸡场，鸡场的一边靠墙（墙长 25 m），另三边用木栏围成，木栏长 40 m .

（1）鸡场的面积能达到 180 m^2 吗？能达到 200 m^2 吗？

（2）鸡场的面积能达到 250 m^2 吗？

如果能，请你给出设计方案；如果不能，请说明理由.

例 1 机动车尾气污染是导致城市空气质量恶化的重要原因. 为解决这一问题，某市试验将现有部分汽车改装成液化石油气燃料汽车（称为环保汽车）. 按计划，该市将使全市的这种环保汽车由目前的 325 辆增加到两年后的 637 辆，求这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率.

分析： 如果设平均每年增长的百分率为 x，那么，一年后这种环保汽车的数量是 $(325+325x)$ 辆，就是 $325(1+x)$ 辆；两年后，其数量为 $[325(1+x)+325(1+x)x]$ 辆，就是 $325(1+x)^2$ 辆. 这样就可以根据题意列出方程.

解： 设这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率是 x，根据题意，得

$$325(1+x)^2=637,$$

就是 $(1+x)^2=1.96.$

于是 $1+x=\pm 1.4.$

解得 $x_1=0.4$，$x_2=-2.4.$

因为 $x=-2.4$ 不合题意，故舍去.

因此 $x=0.4=40\%.$

所以，这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率是 40%.

做一做

小明家承包的土地前年的粮食产量是 50 t，前年、去年、今年的总产量是 175 t. 小明家去年、今年平均每年粮食产量的增长率是多少？（精确到 1%）

随堂练习

某种药品两次降价后，每盒售价从 6.4 元降到 4.9 元. 平均每次降价百分之几？

习题 8.12

问题解决

1. 某农场的粮食产量从 2012 年的 600 t 增加到 2014 年的 726 t，平均每年增长的百分率是多少？

2. 某企业 2011 年底向银行贷款 200 万元用于生产某种新产品，约定 2013 年底到期时一次性还本付息，两年总利息为本金的 8%. 由于产销对路，两年到期时，该企业除还清贷款的本金和利息外，还盈余 72 万元. 假定该企业在生产这种新产品期间，每年资金增长的百分率相同，则这个百分率是多少？

3. 某市 2009 年底自然保护区覆盖率（即自然保护区面积占全市国土面积的百分比）仅为 4.85%，经过两年的努力，该市 2011 年底自然保护区覆盖率达到 8%，求该市这两年自然保护区面积的年均增长率（结果精确到 0.1%）.

例 2 新华商场销售某种冰箱，每台进价为 2 500 元. 市场调研表明：当售价为 2 900 元时，平均每天能售出 8 台；而当售价每降低 50 元时，平均每天就能多售出 4 台. 商场要想使这种冰箱的销售利润平均每天达到 5 000 元，每台冰箱的定价应为多少元？

分析： 本题的主要等量关系是：

每台冰箱的销售利润 × 平均每天销售冰箱的数量 = 5 000元.

如果设每台冰箱降价 x 元，那么每台冰箱的定价就是（$2\,900-x$）元，每台冰箱的销售利润为（$2\,900-x-2\,500$）元，平均每天销售这种冰箱的数量为（$8+4\times\frac{x}{50}$）台. 这样就可以列出一个方程，从而使问题得到解决.

解： 设每台冰箱降价 x 元，根据题意，得

$$(2\,900-x-2\,500)\left(8+4\times\frac{x}{50}\right)=5\,000.$$

解这个方程，得

$$x_1=x_2=150.$$

$$2\,900-150=2\,750.$$

所以，每台冰箱的定价应为 2 750 元.

做一做

某商场将进价为 30 元的台灯以 40 元售出，平均每月能售出 600 个. 调查表明：这种台灯的售价每上涨 1 元，其销售量就将减少 10 个. 为了实现平均每月 10 000 元的销售利润，这种台灯的售价应定为多少？这时商场每月能售出台灯多少个？

议一议

利用方程解决实际问题的关键是什么？

随堂练习

某商场礼品柜台春节期间购进大量贺年卡，一种贺年卡平均每天可售出 500 张，每张盈利 0.3 元. 为了尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施. 调查发现，如果这种贺年卡每张的售价每降价 0.1 元，那么商场平均每天可多售出 100 张. 商场要想通过销售这种贺年卡平均每天盈利 120 元，每张贺年卡应降价多少元？

习题 8.13

问题解决

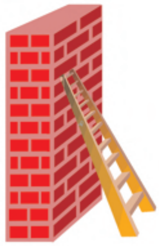
1. 某种服装，平均每天可销售 20 件，每件盈利 44 元. 在每件降价幅度不超过 10 元的情况下，若每件降价 1 元，则每天可多销售 5 件. 如果每天要盈利 1 600 元，每件应降价多少元？

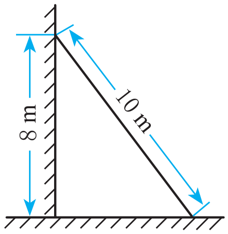
2. 一个农业合作社收获了某种农产品 80 吨，目前可以以 1 200 元/吨 的价格卖出. 如果储藏起来，每周会损失 2 吨，且每周需支付各种费用 1 600 元，但同时每周每吨的价格将上涨 200 元. 储藏多少个周出售这批农产品可获利 176 000元？

还记得本章开始时梯子下滑的问题吗？

（1）如图 8–7，在这个问题中，梯子顶端下滑 1 m 时，梯子底端向外滑动的距离大于 1 m，那么梯子顶端下滑几米时，梯子底端向外滑动的距离和它相等呢？

（2）如果梯子的长度是 13 m，梯子顶端与地面的垂直距离为 12 m，那么梯子顶端下滑的距离与梯子底端向外滑动的距离可能相等吗？如果相等，那么这个距离是多少？


（1）



（2）

图 8–7

例 3 如图 8–8，某海军基地位于 A 处，在其正南方向 200 n mile 处有一重要目标 B，在 B 的正东方向 200 n mile 处有一重要目标 C. 小岛 D 位于 AC 的中点，岛上有一个补给码头；小岛 F 位于 BC 的中点. 一艘军舰从 A 出发，经 B 到 C 匀速巡航，一艘补给船同时从 D 出发，沿南偏西方向匀速直线航行，欲将一批物品送达军舰.

已知军舰的速度是补给船的 2 倍，军舰在由 B 到 C 的途中与补给船相遇于 E 处，那么相遇时补给船航行了多少海里？（结果精确到 0.1 n mile）

解： 连接 DF.

$\because AD = CD$，$BF = CF$，

$\therefore DF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore DF /\!/ AB$，$DF = \dfrac{1}{2}AB$.

$\because AB \perp BC$，$AB = BC = 200$ n mile，

$\therefore DF \perp BC$，$DF = 100$ n mile，$BF = 100$ n mile.

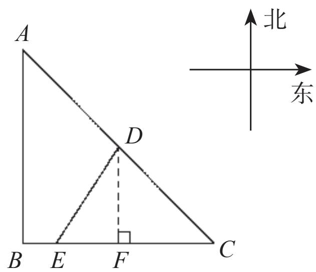


图 8–8

设相遇时补给船航行了 x n mile，那么

$DE = x$ n mile，$AB + BE = 2x$ n mile，

$EF = AB + BF - (AB + BE) = (300 - 2x)$ n mile.

在 Rt△DEF 中，根据勾股定理可得方程

$$x^2=100^2+(300-2x)^2,$$

整理，得

$$3x^2-1\ 200x+100\ 000=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=200-\frac{100\sqrt{6}}{3}\approx 118.4,$$

$$x_2=200+\frac{100\sqrt{6}}{3}\ (\text{不合题意，舍去}).$$

所以，相遇时补给船大约航行了 118.4 n mile.

随堂练习

《九章算术》“勾股”章有一题：“今有二人同所立. 甲行率七，乙行率三. 乙东行，甲南行十步而斜东北与乙会. 问甲、乙行各几何.”

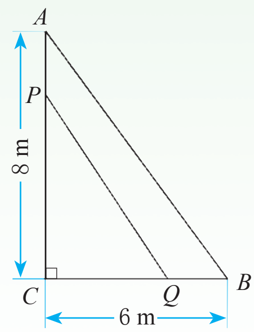
大意是说：已知甲、乙二人同时从同一地点出发，甲每单位时间走 7 步，乙每单位时间走 3 步. 乙一直向东走，甲先向南走 10 步，后又斜向北偏东方向走了一段后与乙相遇. 那么相遇时，甲、乙各走了多远？

习题 8.14

问题解决

1. 有这样一道阿拉伯古算题：有两笔钱，一多一少，其和等于 20，积等于 96，多的一笔被许诺赏给赛义德，那么赛义德得到多少钱？

2. 如图，在 Rt△ACB 中，$\angle C=90^\circ$，点 P，Q 同时由 A，B 两点出发，分别沿 AC，BC方向向点 C 匀速移动，它们的速度都是 1 m/s. 几秒后△PCQ 的面积为 Rt△ACB 面积的一半？



（第 2 题）

回顾与思考

1. 一元二次方程在生活中有哪些应用？请举例说明.
2. 在解决实际问题的过程中，怎样判断求得的结果是否合理？请举例说明.
3. 举例说明解一元二次方程有哪些方法. 配方法的一般过程是怎样的？
4. 如何利用一元二次方程根的判别式判断方程根的情况？请举例说明.

*5. 一元二次方程的根与系数有怎样的关系？

6. 利用方程解决实际问题的关键是什么？
7. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 两个数的差等于 4，积等于 45，求这两个数.

2. 解下列方程：

（1）$x(x-14)=0$；（2）$x^2+12x+27=0$；

（3）$x^2=x+56$；（4）$x(5x+4)=5x+4$；

（5）$4x^2-45=31x$；（6）$-3x^2+22x-24=0$；

（7）$(x+8)(x+1)=-12$；（8）$(3x+2)(x+3)=x+14$.

3. 解下列方程：

（1）$2(x+3)^2=x(x+3)$；（2）$x^2-2\sqrt{5}x+2=0$；

（3）$(x+1)^2-3(x+1)+2=0$.

4. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

（1）$2x^2+x-1=0$；（2）$4(x^2-x)=-1$；

（3）$7x^2+2x+3=0$.

※**5.** 利用一元二次方程的根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x^2-5x-6=0$；（2）$3x^2+5x+1=0$.

6.（1）当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值等于 0？

（2）当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值等于 42？

（3）当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值与代数式 $-4x^2+18$ 的值相等？

7. 某公司前年缴税 40 万元，今年缴税 48.4 万元. 该公司缴税的年平均增长率为多少？

8. 将一块正方形铁皮的四个角各剪去一个边长为 4 cm 的小正方形，做成一个无盖的盒子. 已知盒子的容积是 400 cm^3，求原正方形铁皮的边长.

9. 一块长方形草地的长和宽分别为 20 m 和 15 m，在它四周外围环绕着宽度相等的小路. 已知小路的面积为 246 m^2，求小路的宽度.

10. 某剧场共有 1 161 个座位，已知每行的座位数都相同，且每行的座位数比总行数少 16，求每行的座位数.

数学理解

11. 将一条长为 56 cm 的铁丝剪成两段，并把每一段铁丝做成一个正方形.

（1）要使这两个正方形的面积之和等于 100 cm^2，该怎么剪？

（2）要使这两个正方形的面积之和等于 196 cm^2，该怎么剪？

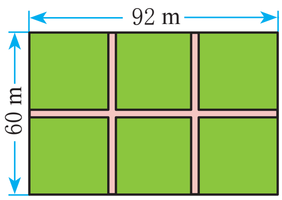
（3）正方形的面积之和可能等于 200 cm^2 吗？

12. 解方程 $(x-1)^2-5(x-1)+4=0$ 时，我们可以将 $x-1$ 看成一个整体，设 $x-1=y$，则原方程可化为 $y^2-5y+4=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=4$. 当 $y=1$ 时，即 $x-1=1$，解得 $x=2$；当 $y=4$ 时，即 $x-1=4$，解得 $x=5$. 所以原方程的解为 $x_1=2$，$x_2=5$. 请利用这种方法解方程：$(3x+5)^2-4(3x+5)+3=0$.

13. 已知 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根，求方程的另一个根及 c 的值.

问题解决

14. 如图，在一块长 92 m、宽 60 m 的矩形耕地上挖三条水渠（水渠的宽都相等），水渠把耕地分成面积均为 885 m^2 的 6 个矩形小块，水渠应挖多宽？



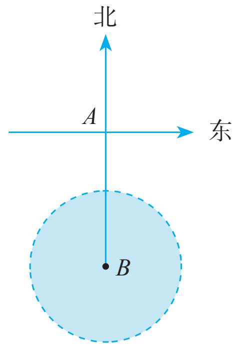
（第 14 题）

15. 我国是世界上受沙漠化危害最严重的国家之一，沙化土地面积逐年增长. 2000 年初我国沙化土地面积约为 261.5 万平方千米，到 2002 年初沙化土地面积已达近 262 万平方千米. 假设沙化土地面积每年的增长率相同，那么年增长率大约是多少？

16. 某果园有 100 棵桃树，一棵桃树平均结 1 000 个桃子，现准备多种一些桃树以提高产量. 试验发现，每多种一棵桃树，每棵桃树的产量就会减少 2 个，但多种的桃树不能超过 100 棵. 如果要使产量增加 15.2%，那么应多种多少棵桃树？（假设桃子大小不变）

17. 一个直角三角形的斜边长 7 cm，一条直角边比另一条直角边长 1 cm，求两条直角边的长度.

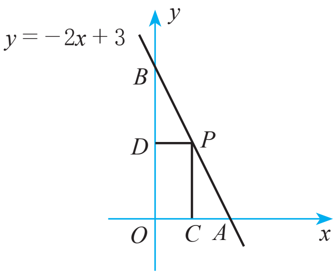
18. 某军舰以 20 n mile/h 的速度由西向东航行，一艘电子侦察船以 30 n mile/h 的速度由南向北航行，它能侦察出周围 50 n mile（包括 50 n mile）范围内的目标. 如图，当该军舰行至 A 处时，电子侦察船正位于 A 处正南方向的 B 处，且 $AB = 90$ n mile. 如果军舰和侦察船仍按原速度沿原方向继续航行，那么航行途中侦察船能否侦察到这艘军舰？如果能，最早何时能侦察到？如果不能，请说明理由.



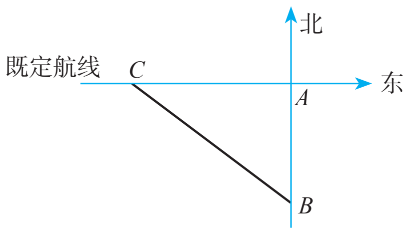
（第 18 题）

19. 一次会议上，每两个参加会议的人都相互握了一次手，有人统计一共握了 66 次手. 这次会议到会的人数是多少？

20. 如图，一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），过点 P 分别作 OA，OB 的垂线，垂足分别为点 C，D. 点 P 在何处时，矩形 $OCPD$ 的面积为 1？



（第 20 题）



（第 21 题）

21. 如图，一艘轮船以 30 km/h 的速度沿既定航线由西向东航行，途中接到台风警报，某台风中心正以 20 km/h 的速度由南向北移动，距台风中心 200 km 的圆形区域（包括边界）都属台风影响区. 当这艘轮船接到台风警报时，它与台风中心的距离 $BC = 500$ km，此时台风中心与轮船既定航线的最近距离 $BA = 300$ km.

（1）如果这艘轮船不改变航向，那么它会不会进入台风影响区？

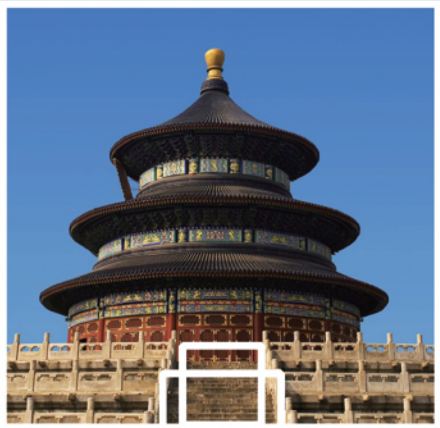
（2）如果你认为这艘轮船会进入台风影响区，那么从接到警报开始，经过多长时间它就会进入台风影响区？

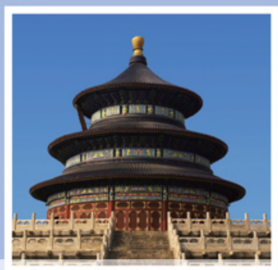
22. 某班级前年暑假将勤工俭学挣得的班费中的 2 000 元按一年定期存入银行，去年暑假到期后取出了 1 000 元捐给“希望工程”，将剩下的 1 000 元与利息继续按一年定期存入该银行，今年暑假毕业时全部捐给了母校. 假设该银行年利率无变化，且今年暑假到期后取得本息和 1 155 元，那么该银行一年定期存款的年利率是多少？

第九章　图形的相似

色彩斑斓的世界中有许多形状相同的图形，这就是相似图形. 你知道如何刻画图形的相似吗？你知道如何判定两个三角形相似吗？你知道如何将一个图形放大或缩小吗？

本章将研究图形的相似，探索三角形相似的条件，了解相似三角形的性质，并利用图形的相似解决一些简单的实际问题.





学习目标

- 认识图形的相似，进一步积累认识图形性质的经验
- 探索三角形相似的条件，了解相似三角形的性质，进一步发展推理能力
- 能够利用三角形的相似解决一些测量问题
- 了解图形的位似，能利用位似将一个图形放大或缩小

1 成比例线段

在现实生活中，我们经常会看到许多形状相同的图形.

你能从下面这些图形中找出形状相同的图形吗？这些形状相同的图形有什么不同？

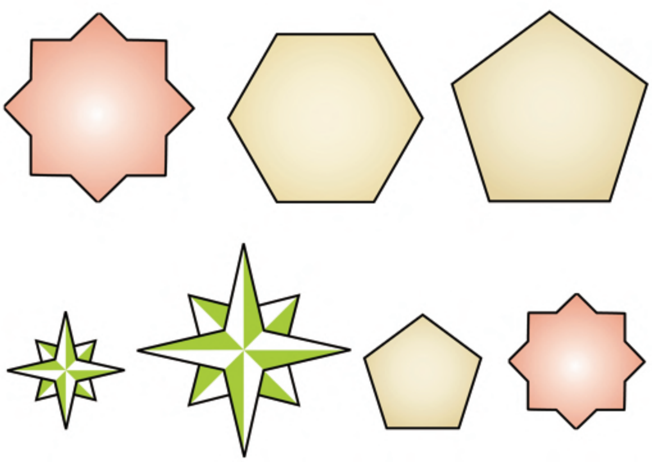


图 9−1

形状相同而大小不同的两个平面图形，较大的图形可以看成是由较小的图形“放大”得到的，较小的图形可以看成是由较大的图形“缩小”得到的．在这个过程中，两个图形上的相应线段也被“放大”或“缩小”．因此，对于形状相同而大小不同的两个图形，我们可以用相应线段长度的比来描述它们的大小关系．

如果选用同一个长度单位量得两条线段 AB，CD 的长度分别是 m，n，那么这**两条线段的比**（ratio of two line segments）就是它们长度的比，即 $AB : CD = m : n$，或写成 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$．其中，线段 AB，CD 分别叫做这个线段比的前项和后项．如果把 $\frac{m}{n}$ 表示成比值 k，那么 $\frac{AB}{CD}=k$，或 $AB=k\cdot CD$．两条线段的比实际上就是两个数的比．

如图 9−2，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 形状相同，$AB=5$ cm，$A'B'=3$ cm，$AB : A'B' = 5 : 3$，$\frac{5}{3}$ 就是线段 AB 与线段 $A'B'$ 的比，这个比值刻画了这两个五边形的大小关系．

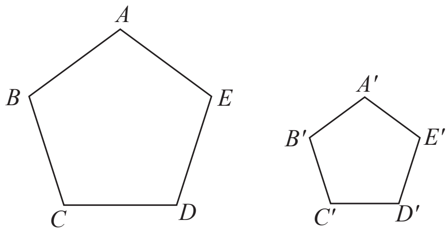


图 9−2

做一做

如图 9−3，设小方格的边长为 1，四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 的顶点都在格点上[1]，那么 AB，AD，EF，EH 的长度分别是多少？

分别计算 $\frac{AB}{EF}$，$\frac{AD}{EH}$，$\frac{AB}{AD}$，$\frac{EF}{EH}$ 的值，你发现了什么？

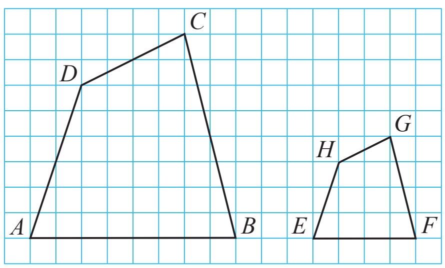


图 9−3

[1] 本章如无特别说明，方格纸上图形的顶点都在格点上．

四条线段 a，b，c，d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么这四条线段 a，b，c，d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**（proportional segments）. 在图 9-3 中，AB，EF，AD，EH 是成比例线段，AB，AD，EF，EH 也是成比例线段.

议一议

如果 a，b，c，d 四个数成比例，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$ 吗？反过来，如果 $ad=bc$，那么 a，b，c，d 四个数成比例吗？与同伴交流.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

如果 $ad=bc$（a，b，c，d 都不等于 0），那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

例 1 如图 9-4，一个矩形的长 $AB=a$ m，宽 $AD=1$ m，按照图中所示的方式将它分割成相同的三个矩形，且使分割出的每个矩形的长与宽的比与原矩形的长与宽的比相同，即 $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，那么 a 的值应当是多少？

解： 根据题意可知，$AB=a$ m，$AE=\frac{1}{3}a$ m，$AD=1$ m.

$\because \frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，

$\therefore \frac{\frac{1}{3}a}{1}=\frac{1}{a}$，

即 $\frac{1}{3}a^2=1$.

$\therefore a^2=3$.

开平方，得 $a=\sqrt{3}$（$a=-\sqrt{3}$ 舍去）.

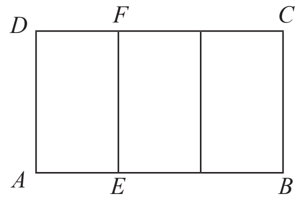


图 9-4

想一想

如果三个数 a，b，c（a，b，c 都不等于零）满足 $b^2=ac$，那么，a，b，b，c 是否成比例？

随堂练习

1. 你知道地图比例尺的含义吗？生活中还有哪些利用线段比的实例？

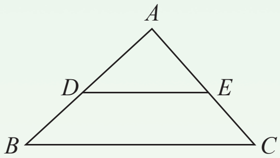
2. 一条线段的长度是另一条线段的 5 倍，求这两条线段的比.

3. a，b，c，d 是成比例线段，其中 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$c=6$ cm，求线段 d 的长.

习题 9.1

知识技能

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$ cm，$AE=6$ cm，$EC=5$ cm，且 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，求 AD 的长.



（第 1 题）

2. 已知线段 $a=1$ cm，$b=1.8$ cm，$c=3.5$ cm，$d=6.3$ cm，这四条线段是成比例线段吗？

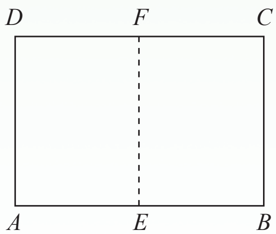
数学理解

3. 如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$a$，$b$，$c$，$d$ 都不等于零，那么下列各式成立吗？为什么？

（1）$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$；　（2）$\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$；　（3）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

问题解决

4. 如图，将一张矩形纸片沿它的长边对折（EF 为折痕），得到两个全等的小矩形. 如果小矩形长边与短边的比等于原来矩形长边与短边的比，那么原来矩形的长边与短边的比是多少？



（第 4 题）

观察图 9−5 和图 9−6，回答下列问题：

（1）在图 9−5 中，已知 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{1}{2}$，你能求出 $\dfrac{BD+AD}{AD}$ 与 $\dfrac{CE+AE}{AE}$

的值吗？它们有怎样的关系？如果 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CE}$，那么 $\dfrac{AB-BD}{BD}$ 与 $\dfrac{AC-CE}{CE}$ 有怎样的关系？在求解过程中，你有什么发现？

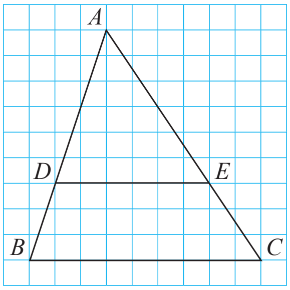


图 9-5

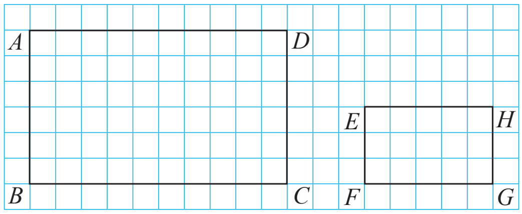


图 9-6

（2）在图 9-6 中，$\dfrac{AB}{EF}$，$\dfrac{BC}{FG}$，$\dfrac{CD}{GH}$，$\dfrac{AD}{EH}$ 的值相等吗？$\dfrac{AB+BC+CD+AD}{EF+FG+GH+EH}$ 的值又是多少？在求解过程中，你有什么发现？

议一议

已知 a，b，c，d，e，f 六个数.

（1）如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ 和 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$ 成立吗？为什么？

（2）如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\,(b+d+f\neq 0)$，那么 $\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=\dfrac{a}{b}$ 成立吗？为什么？

在问题（1）中，$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ 是成立的. 理由如下：

设 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，则 $a=kb$，$c=kd$，

$$\therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=\frac{(k+1)b}{b}=k+1,$$

$$\frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=\frac{(k+1)d}{d}=k+1.$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

你是怎么想的？请你尝试完成其他问题的解答，并与同伴交流.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}\ (b+d+\cdots+n\neq 0)$，那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

例 2 （1）已知 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，求 $\frac{a+b}{b}$ 与 $\frac{a-b}{b}$ 的值；

（2）在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，若 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{3}{4}$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 18 cm，求 $\triangle DEF$ 的周长.

解：（1）$\because \frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{2-3}{3}=-\frac{1}{3}$.

（2）$\because \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=\frac{AB}{DE}=\frac{3}{4}$.

$\therefore 4(AB+BC+CA)=3(DE+EF+FD)$，

即 $DE+EF+FD=\frac{4}{3}(AB+BC+CA)$.

又 $\because \triangle ABC$ 的周长为 18 cm，即 $AB+BC+CA=18$ cm，

$\therefore DE+EF+FD=\frac{4}{3}(AB+BC+CA)=\frac{4}{3}\times 18=24\ (\text{cm})$，

即 $\triangle DEF$ 的周长为 24 cm.

随堂练习

1. 已知 $\frac{a-b}{a}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a}{b}$ 的值.

2. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{2}{3}\ (b+d\neq 0)$，求 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值.

习题 9.2

知识技能

1. （1）已知 $\frac{a}{b}=2$，求 $\frac{a+b}{b}$ 与 $\frac{a-b}{b}$ 的值；

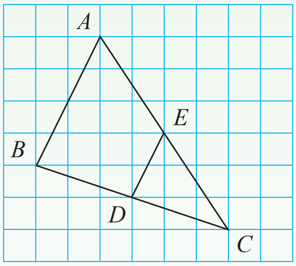
（2）已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{5}\ (b+d+f\neq 0)$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 的值.

2. 如图，已知每个小方格的边长均为 1.

（1）求 AB，DE，BC，DC，AC，EC 的长；

（2）求 $\frac{AB}{DE}$，$\frac{BC}{DC}$，$\frac{AC}{EC}$ 的值；

（3）计算 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 的周长比.



（第 2 题）

数学理解

3. 小明认为：

（1）如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ (a+b\neq 0,\ c+d\neq 0)$，那么 $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$；

（2）如果 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

这两个结论正确吗？为什么？

2 平行线分线段成比例

在图 9−7 中，小方格的边长均为 1，直线 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，分别交直线 m，n 于格点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3.

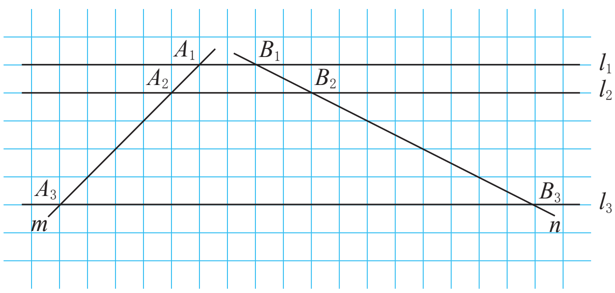


图 9−7

（1）计算 $\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3}$，$\dfrac{B_1B_2}{B_2B_3}$ 的值，你有什么发现？

（2）将 l_2 向下平移到图 9–8 的位置，直线 m，n 与 l_2 的交点分别为 A_2，B_2，你在问题（1）中发现的结论还成立吗？如果将 l_2 平移到其他位置呢？

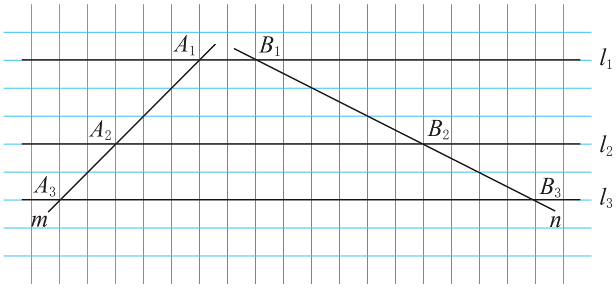


图 9–8

（3）在平面上任意作三条平行线，用它们截两条直线，截得的线段成比例吗？

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

本教科书将上述结论作为基本事实.

做一做

如图 9–9，直线 $a // b // c$，分别交直线 m，n 于点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3. 过点 A_1 作直线 n 的平行线 l，分别交直线 b，c 于点 C_2，C_3（如图 9–10），图 9–10 中 m 与 l 上有哪些成比例线段？

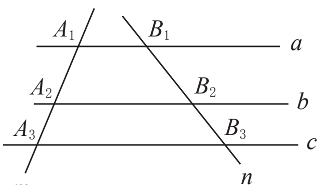


图 9–9

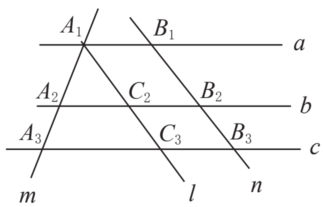


图 9–10

推论 平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例.

例 如图 9–11，在△ABC 中，E，F 分别是 AB 和 AC 上的点，且 $EF \parallel BC$.

（1）如果 $AE=7$，$EB=5$，$FC=4$，那么 AF 的长是多少？

（2）如果 $AB=10$，$AE=6$，$AF=5$，那么 FC 的长是多少？

解：（1）$\because EF \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$.

$\because AE=7$，$EB=5$，$FC=4$，

$\therefore AF=\dfrac{AE \cdot FC}{EB}=\dfrac{7\times 4}{5}=\dfrac{28}{5}$.

（2）$\because EF \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$.

$\because AB=10$，$AE=6$，$AF=5$，

$\therefore AC=\dfrac{AB \cdot AF}{AE}=\dfrac{10\times 5}{6}=\dfrac{25}{3}$.

$\therefore FC=AC-AF=\dfrac{25}{3}-5=\dfrac{10}{3}$.

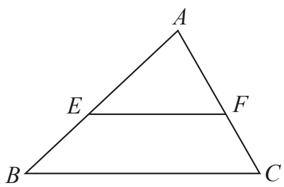
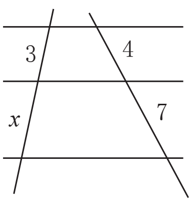


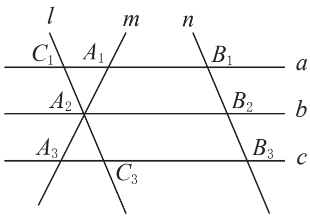
图 9–11

随堂练习

1. 已知两条直线被三条平行线所截，截得线段的长度如图所示，求 x 的值.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在图 9–9 中，过点 A_2 作直线 n 的平行线 l，分别交直线 a，c 于点 C_1，C_3，如图，你发现 m 与 l 上有哪些成比例线段？

读一读

计算机帮你做实验

我们知道，在方格纸上可以得出“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”的基本事实，但那只是在一些特殊情况下（平行线之间的距离为整数）得出的结论. 为了说明这一基本事实在任何情况下都正确，我们可以在计算机上做实验.

打开“几何画板”的绘图窗口，任意画三条平行线 a，b，c 和两条直线 m，n，使直线 m，n 分别与平行线 a，b，c 相交于点 A，B，C，D，E，F（如图 9−12），分别度量出线段 AB，BC，DE，EF 的长度，再计算出 $\frac{AB}{BC}$，$\frac{DE}{EF}$ 的值. 任意拖动平行线 a，b，c 和直线 m，n，我们发现 $\frac{AB}{BC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 的值总是相等，即总有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. 这就验证了任何情况下“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”都是正确的.

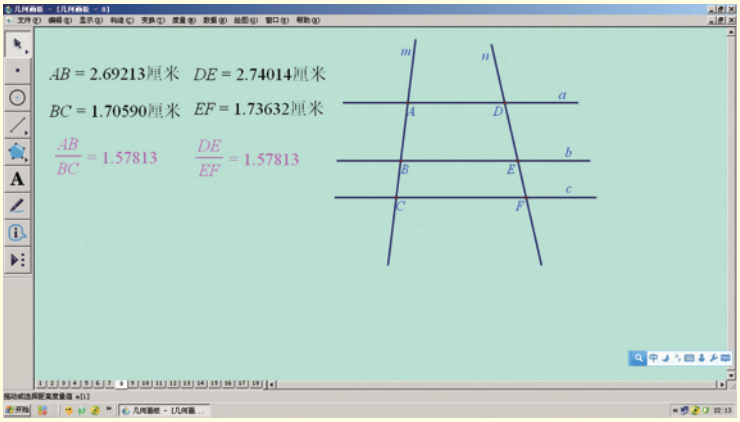


图 9−12

有兴趣的同学可以试一试!

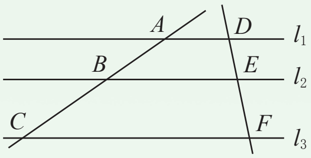
习题 9.3

知识技能

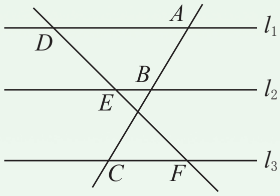
1. 如图，已知 $l_1 // l_2 // l_3$.

（1）在图（1）中，$AB=5$，$BC=7$，$EF=4$，求 DE 的长；

（2）在图（2）中，$DE=6$，$EF=7$，$AB=5$，求 AC 的长.



(1)



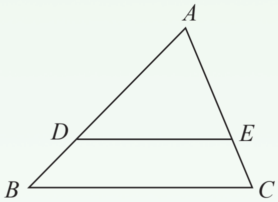
(2)

(第 1 题)

2. 如图，在△ABC 中，D，E 分别是 AB 和 AC 上的点，且 $DE /\!/ BC$.

(1) 如果 $AD = 3.2$ cm，$DB = 1.2$ cm，$AE = 2.4$ cm，那么 EC 的长是多少?

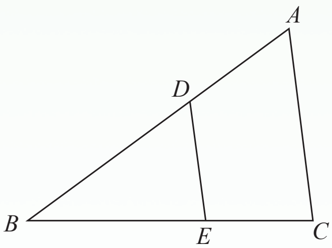
(2) 如果 $AB = 5$ cm，$AD = 3$ cm，$AC = 4$ cm，那么 EC 的长是多少?



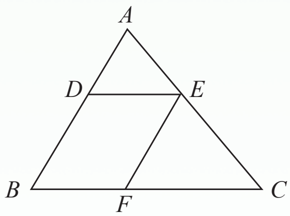
(第 2 题)

问题解决

3. 如图，在△ABC 中，D，E 分别是 AB 和 BC 上的点，且 $DE /\!/ AC$，$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EC}$，$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$，求 $\frac{AB}{BD}$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在△ABC 中，D，E，F 分别是 AB，AC，BC 上的点，且 $DE /\!/ BC$，$EF /\!/ AB$，$AD : DB = 2 : 3$，$BC = 20$ cm，求 BF 的长.

3 相似多边形

图 9−13 中的两个多边形分别是电脑屏幕上的多边形 $ABCDEF$ 和投射到银幕上的多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，它们的形状相同吗？

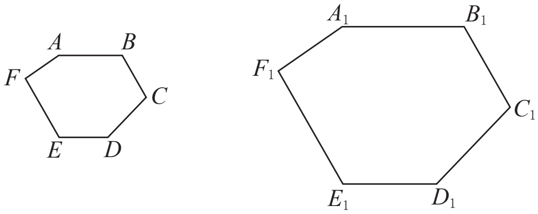


图 9−13

（1）在这两个多边形中，是否有相等的内角？设法验证你的猜测.

（2）在这两个多边形中，夹相等内角的两边是否成比例？

图 9−13 中的六边形 $ABCDEF$ 与六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是形状相同的多边形，其中 $\angle A$ 与 $\angle A_1$，$\angle B$ 与 $\angle B_1$，$\angle C$ 与 $\angle C_1$，$\angle D$ 与 $\angle D_1$，$\angle E$ 与 $\angle E_1$，$\angle F$ 与 $\angle F_1$ 分别对应相等，称为对应角；AB 与 A_1B_1，BC 与 B_1C_1，CD 与 C_1D_1，DE 与 D_1E_1，EF 与 E_1F_1，FA 与 F_1A_1 的比都相等，称为对应边.

各角分别相等、各边成比例的两个多边形叫做**相似多边形**（similar polygons）. 例如，在图 9−13 中，六边形 $ABCDEF$ 与六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，记作六边形 $ABCDEF \backsim$ 六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，“$\backsim$”读作“相似于”. 在记两个多边形相似时，要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

相似多边形对应边的比叫做**相似比**（similarity ratio）. 例如，五边形 $ABCDE$ $\backsim$ 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$，对应边 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}=\dfrac{DE}{D_1E_1}=\dfrac{EA}{E_1A_1}=\dfrac{4}{5}$，因此五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的相似比为 $k_1=\dfrac{4}{5}$，五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 与五边形 $ABCDE$ 的相似比为 $k_2=\dfrac{5}{4}$.

想一想

（1）任意两个等边三角形相似吗？任意两个正方形呢？任意两个正 n 边形呢？

（2）任意两个菱形相似吗？为什么？

（3）任意两个矩形相似吗？为什么？

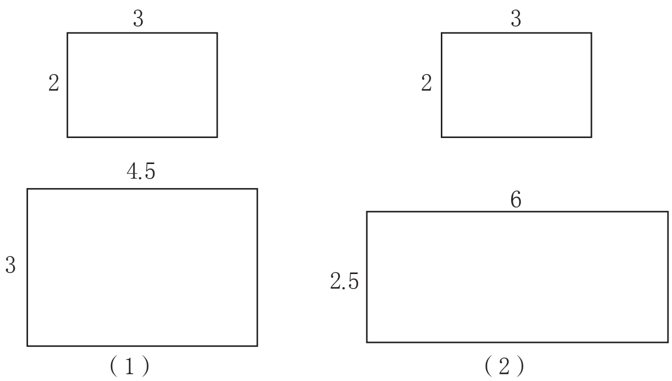
做一做

一块长 3 m、宽 1.5 m 的矩形黑板如图 9−14 所示，镶在其外围的木质边框宽 7.5 cm. 边框的内外边缘所围成的矩形相似吗？为什么？

图 9−14

随堂练习

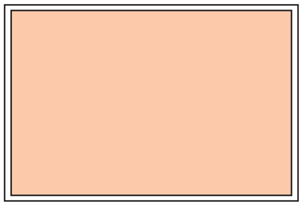
1. 图中每组两个矩形相似吗？说说你的理由.



（第 1 题）

2. 小明说长与宽的比相等的矩形都相似. 他说的对吗?

3. 如图, 一个矩形广场的长为 60 m, 宽为 40 m, 广场周围两条纵向小路的宽均为 1.5 m, 如果设两条横向小路的宽都为 x m, 那么当 x 为多少时, 小路内外边缘所围成的两个矩形相似?



(第 3 题)

读一读

纸张的大小

如图 9-15, 如果将一张长、宽之比等于 $\sqrt{2}$ 的矩形纸 $ABCD$ 依次不断对折, 可以得到矩形纸 $BCFE$, $AEML$, $GMFH$, $LGPN$.

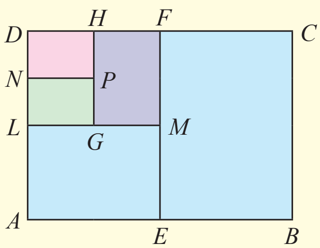


图 9-15

纸张尺寸表

规　格	尺寸 (mm × mm)
A_0	841 × 1 189
A_1	594 × 841
A_2	420 × 594
A_3	297 × 420
A_4	210 × 297
A_5	148 × 210
A_6	105 × 148
A_7	74 × 105
A_8	52 × 74
A_9	37 × 52
A_{10}	26 × 37

(1) 矩形 $ABCD$, $BCFE$, $AEML$, $GMFH$, $LGPN$ 的长与宽之比改变了吗?

(2) 你认为这些大小不同的矩形相似吗?

事实上, 这些矩形都是相似四边形, 它们的长与宽之比始终保持不变. 有趣的是, 印刷业经常提及的对开、4 开、8 开、16 开……的纸正是按照上面的方式, 将一整张平板纸依次不断对折所得到的.

纸张的大小有国际公认的规格, 即 A_0, A_1, …, A_{10}, A_1 的面积为 A_0 的一半, A_2 的面积又是 A_1 的一半, 依次类推.

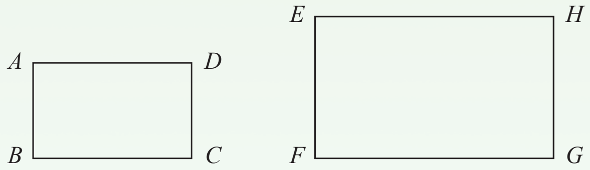
A_0 型纸的面积为 1 m^2, 其尺寸为 841 mm × 1 189 mm. 这样, A_1, A_2, …, A_{10} 各种规格的尺寸就确定了 (见上表).

测量一种报纸或一本书的长与宽, 计算出长与宽的比, 看看是不是约等于 $\sqrt{2}$.

习题 9.4

知识技能

1. 如图，矩形 $ABCD \backsim$ 矩形 $EFGH$，它们的相似比是 $2:3$，已知 $AB = 3$ cm，$BC = 5$ cm，求 EF，FG 的长.

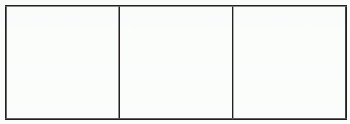


（第 1 题）

2. 在菱形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 中，$\angle A = \angle E$，这两个菱形相似吗？为什么？
3. 顺次连接正方形各边中点，得到一个新正方形，求新正方形与原正方形的相似比.

问题解决

4. 现有大小相同的正方形纸片 30 张，小亮用其中 3 张拼成一个如图所示的长方形，小芳也想拼一个与它形状相同但比它大的长方形，则她至少要用几张正方形纸片（不得把每个正方形纸片剪开）？你知道她可能拼出什么样的图形吗？请你试着画一画.



（第 4 题）

4 探索三角形相似的条件

根据相似多边形的定义，三角分别相等、三边成比例的两个三角形叫做**相似三角形**（simlar triangles）.

那么，两个三角形至少满足哪些条件就相似呢？能否类比两个三角形全等的条件，寻找判定两个三角形相似的条件呢？

想一想

如果两个三角形只有一个角相等，它们一定相似吗？如果有两个角分别相等呢？

做一做

与同伴合作，两个人分别画$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使得$\angle A$和$\angle A'$都等于$\angle\alpha$，$\angle B$和$\angle B'$都等于$\angle\beta$，此时，$\angle C$与$\angle C'$相等吗？三边的比$\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{AC}{A'C'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$相等吗？这样的两个三角形相似吗？

改变$\angle\alpha$，$\angle\beta$的大小，再试一试.

> 两角分别相等的两个三角形相似.

例 1 如图 9–16，D，E分别是$\triangle ABC$的边AB，AC上的点，$DE /\!/ BC$，$AB=7$，$AD=5$，$DE=10$，求BC的长.

解： $\because DE /\!/ BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$.

$\therefore BC=\dfrac{AB\cdot DE}{AD}=\dfrac{7\times 10}{5}=14$.

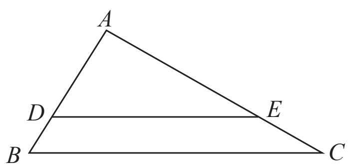


图 9–16

随堂练习

1. 有一个锐角相等的两个直角三角形是否相似？为什么？

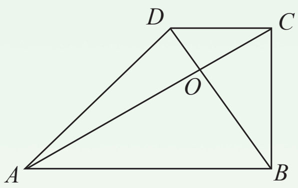
2. 顶角相等的两个等腰三角形是否相似？为什么？

习题 9.5

知识技能

1. 在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D=70^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle E=50^\circ$，这两个三角形相似吗？为什么？

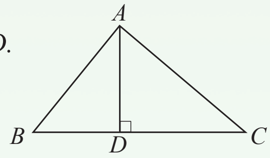
2. 如图，在梯形$ABCD$中，$AB /\!/ CD$，对角线AC与BD相交于点O. 找出图中的相似三角形，并说明理由.



（第 2 题）

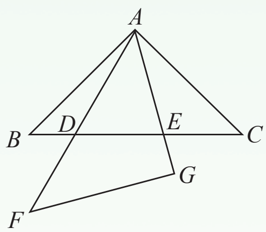
数学理解

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$，垂足为点D.
（1）请指出图中所有的相似三角形；
（2）你能得出$AD^2=BD\cdot DC$吗？
（3）你能得出$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=DC\cdot BC$吗？



（第 3 题）

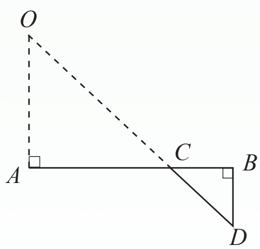
4. 将两个全等的等腰直角三角形摆成如图所示的样子（图中的所有点、线都在同一平面内），请在图中找出两对相似而不全等的三角形，并说明它们相似的理由.



（第 4 题）

问题解决

5. 如图，为了测量一个大峡谷的宽度，地质勘探人员在对面的岩石上观察到一个特别明显的标志点O，再在他们所在的这一侧选点A，B，D，使得$AB\perp AO$，$DB\perp AB$，然后确定DO和AB的交点C. 测得$AC=120$ m，$CB=60$ m，$BD=50$ m. 你能帮助他们计算出峡谷的宽AO吗？



（第 5 题）

（1）两个三角形有两边成比例，它们一定相似吗？

（2）如果不相似，再增加一个条件使它们相似，可以增加哪一个？

我们先来考虑增加一个角相等的情况.

相等的角可以是其中一边的对角，也可以是两边的夹角.

做一做

（1）画$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，使$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}$和$\dfrac{AC}{A'C'}$都等于给定的值k. 设法比较$\angle B$与$\angle B'$的大小（或$\angle C$和$\angle C'$）. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似吗？

（2）改变k值的大小，再试一试.

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例 2 如图 9−17，D，E分别是$\triangle ABC$的边AC，AB上的点，$AE=1.5$，$AC=2$，$BC=3$，且$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{4}$，求$DE$的长.

解： $\because AE=1.5$，$AC=2$，

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

$\because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

又$\because \angle EAD=\angle CAB$，

$\therefore \triangle EAD \backsim \triangle CAB$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{4}$.

由$BC=3$，得

$DE=\dfrac{3}{4}BC=\dfrac{3}{4}\times 3=\dfrac{9}{4}$.

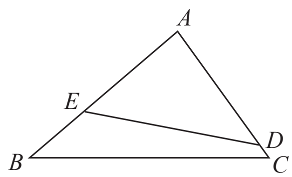


图 9−17

想一想

如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的两边成比例，且其中一边所对的角相等，那么这两个三角形一定相似吗？

小明和小颖分别画出了如图 9−18 所示的三角形，由此你能得到什么结论？

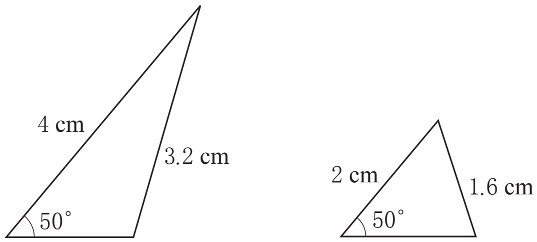
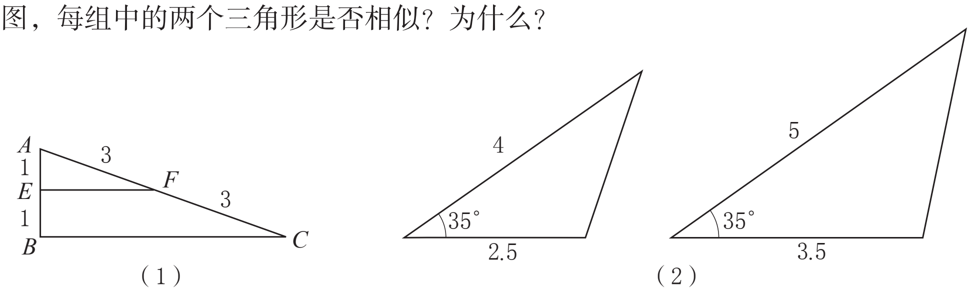


图 9−18

随堂练习

如图，每组中的两个三角形是否相似？为什么？



习题 9.6

知识技能

1. 一个直角三角形两条直角边的长分别为 6 cm，4 cm，另一个直角三角形两条直角边的长分别为 9 cm，6 cm，这两个直角三角形是否相似？为什么？

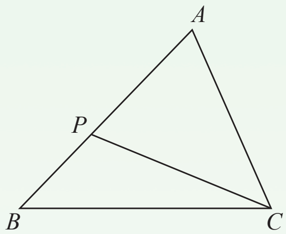
2. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=39^\circ$，$AB=1.8$ cm，$BC=2.4$ cm；在$\triangle DEF$中，$\angle D=39^\circ$，$DE=3.6$ cm，$DF=2.7$ cm. 这两个三角形相似吗？为什么？

数学理解

3. 如图，P 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点.

（1）如果 $\angle ACP=\angle B$，$\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？为什么？

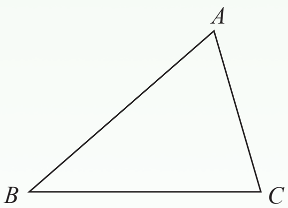
（2）如果 $\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$，$\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？为什么？如果 $\dfrac{AC}{CP}=\dfrac{BC}{AC}$ 呢？



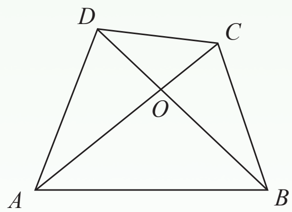
（第 3 题）

问题解决

4. 如图，画一个三角形，使它与 $\triangle ABC$ 相似，且相似比为 2.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$OA\cdot OC=OB\cdot OD$.

（1）找出图中的相似三角形；

（2）找出图中相等的角.

如果两个三角形的三边成比例，那么这两个三角形一定相似吗？

做一做

画 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，使 $\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$ 和 $\dfrac{AC}{A'C'}$ 都等于给定的值 k.

（1）设法比较 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 的大小；

（2）$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？说说你的理由.

改变 k 值的大小，再试一试.

三边成比例的两个三角形相似.

例 3 如图 9-19，在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，$\angle BAD=20^\circ$，求$\angle CAE$的度数.

解： $\because \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（三边成比例的两个三角形相似）.

$\therefore \angle BAC=\angle DAE.$

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，

即$\angle BAD=\angle CAE.$

$\because \angle BAD=20^\circ$，

$\therefore \angle CAE=20^\circ$.

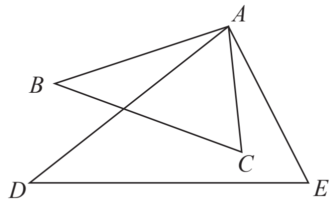


图 9-19

议一议

如图 9-20，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似吗？你有哪些判断方法？

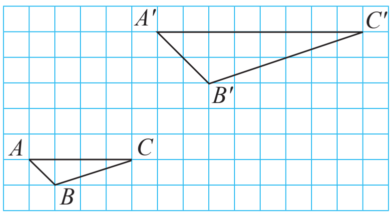
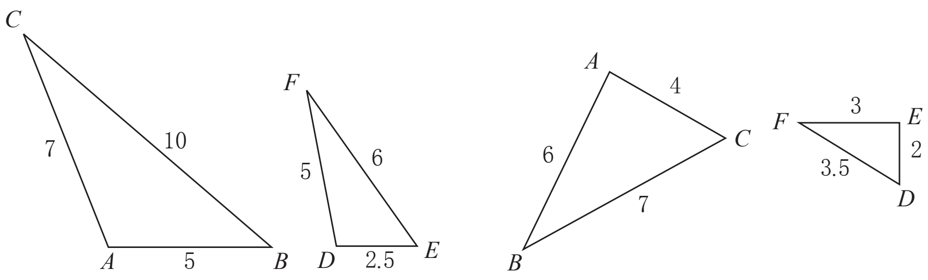


图 9-20

随堂练习

如图，每组中的两个三角形是否相似？为什么？

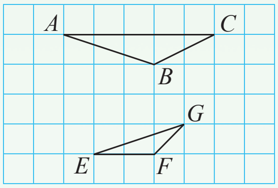


习题 9.7

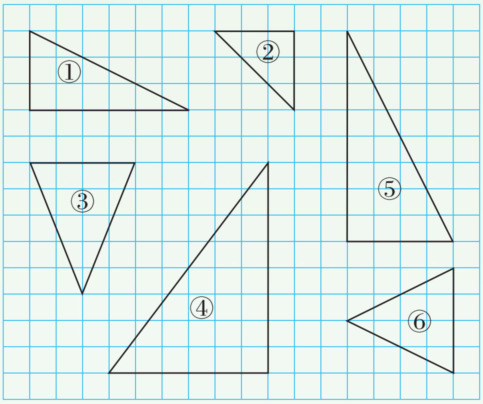
知识技能

1. 一个三角形三边的长分别为 6 cm，9 cm，7.5 cm，另一个三角形三边的长分别为 8 cm，10 cm，12 cm，这两个三角形相似吗？为什么？

2. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle EFG$ 相似吗？为什么？



（第 2 题）



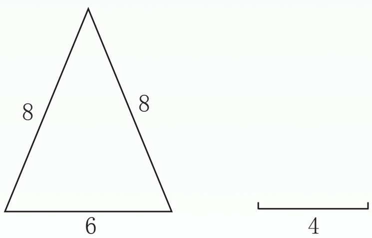
（第 3 题）

3. 如图所示的 6 个三角形中，哪些三角形相似？为什么？

数学理解

4. 在一张 8×8 的方格纸上连接三个格点，得到一个三角形．画出三对两两相似、大小不同的三角形，并指出它们的相似比．

5. 如图，已知一个等腰三角形和一条线段，以这条线段为边画三角形，使之与已知等腰三角形相似．你能画出几个形状不同的三角形？



（第 5 题）

*5 相似三角形判定定理的证明

在上一节中，我们探索了三角形相似的条件，本节我们将对它们进行证明.

定理 两角分别相等的两个三角形相似.

已知：如图 9−21，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

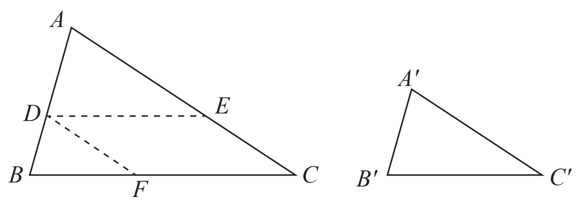


图 9−21

证明：在$\triangle ABC$的边AB上截取$AD=A'B'$，过点D作BC的平行线，交AC于点E，则

$\angle ADE=\angle B$，

$\angle AED=\angle C$，

$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$（平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例）.

过点D作AC的平行线，交BC于点F，则

$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CF}{CB}$（平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例）.

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{CF}{CB}$.

$\because DE /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形.

$\therefore DE = CF$.

$\therefore \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{CB}$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{CB}$.

而 $\angle ADE = \angle B$，$\angle DAE = \angle BAC$，$\angle AED = \angle C$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$\because \angle A = \angle A'$，$AD = A'B'$，$\angle ADE = \angle B = \angle B'$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

定理　两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

已知：如图 9−22，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A = \angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

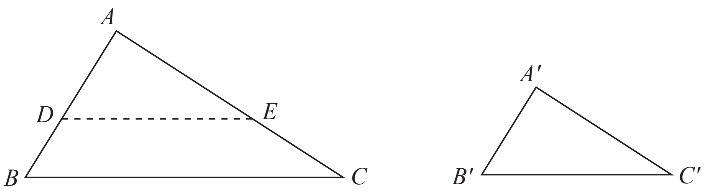


图 9−22

证明：在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上截取 $AD = A'B'$，过点 D 作 BC 的平行线，交 AC 于点 E，则

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{A'C'}$，

$\angle B = \angle ADE$，

$\angle C = \angle AED$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

$\therefore \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore AE=A'C'$.

又 $\angle A=\angle A'$，$AD=A'B'$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

定理 三边成比例的两个三角形相似.

已知：如图 9–23，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

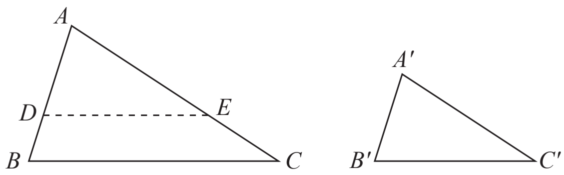


图 9–23

证明：在$\triangle ABC$的边 AB，AC 上分别截取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接 DE，则

$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

而$\angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}$.

又 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，$AD=A'B'$，

$\therefore \dfrac{BC}{DE}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

$\therefore DE=B'C'$.

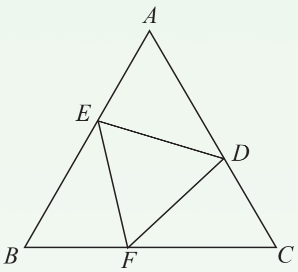
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

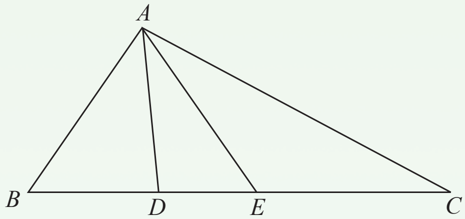
习题 9.8

知识技能

1. 如图，在等边三角形 ABC 中，D，E，F 分别是三边上的点，$AE = BF = CD$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？请证明你的结论.



（第 1 题）



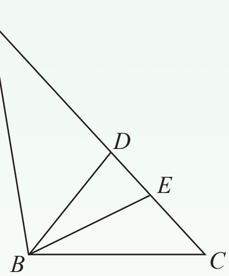
（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 是 BC 上的两点，$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AE}{BC}$.

求证：$AB = AE$.

3. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 上的一点，$\angle CBD$ 的平分线交 AC 于点 E，且 $AE = AB$.

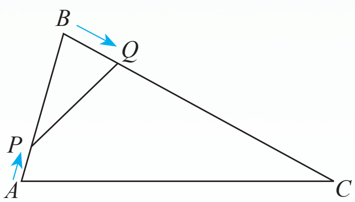
求证：$AE^2 = AD \cdot AC$.



（第 3 题）

问题解决

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 8$ cm，$BC = 16$ cm，动点 P 从点 A 开始沿 AB 边运动，速度为 2 cm/s；动点 Q 从点 B 开始沿 BC 边运动，速度为 4 cm/s. 如果 P，Q 两动点同时运动，那么何时由 P，B，Q 三点连成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？



（第 4 题）

6 黄金分割

图 9−24 是古希腊时期的巴台农神庙（Parthenom Temple），如果把图中用虚线表示的矩形画成图 9−25 所示的 $ABEF$，以矩形 $ABEF$ 的宽为边在其内部作正方形 $ACDF$，那么人们发现，$\frac{BE}{AB}=\frac{BC}{BE}$，也就是 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$.


图 9−24

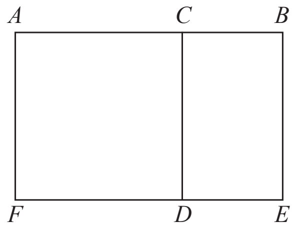


图 9−25

一般地，点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC（如图 9−26），如果 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C **黄金分割**（golden section），点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点，AC 与 AB 的比叫做黄金比.

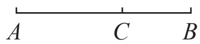


图 9−26

例 计算黄金比.

解： 由 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，得 $AC^2=AB\cdot BC$.

设 $AB=1$，$AC=x$，则 $BC=1-x$.

$\therefore x^2=1\times(1-x)$，

即 $x^2+x-1=0$.

解这个方程，得

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去）.

所以，黄金比 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

在图 9−25 中，点 C 就是线段 AB 的黄金分割点，矩形的宽 BE 与长 AB 的比等于黄金比 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

议一议

如图 9−27，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=108°$，D，E 在边 BC 上，AD，AE 将 $\angle BAC$ 三等分. 小明说，图中的点 D 是线段 BE 的黄金分割点，点 E 是线段 BC 的黄金分割点. 他说的对吗？为什么？与同伴交流.

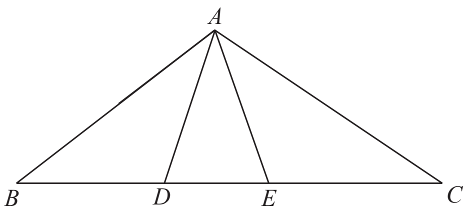
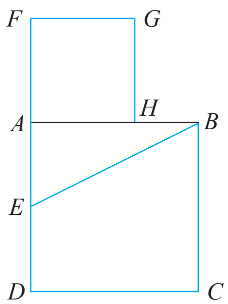


图 9−27

随堂练习

采用如下方法也可以得到黄金分割点：如图，设 AB 是已知线段，在 AB 上作正方形 $ABCD$；取 AD 的中点 E，连接 EB；延长 DA 至 F，使 $EF=EB$；以线段 AF 为边作正方形 $AFGH$，点 H 就是 AB 的黄金分割点. 任意作一条线段，用上述方法作出这条线段的黄金分割点. 你能说说这种作法的道理吗？



读一读

耐人寻味的 0.618

古希腊数学家、天文学家欧多克索斯（Eudoxus，约前 400—前 347）曾提出：能否将一条线段分成不相等的两部分，使较短线段与较长线段的比等于较长线段与原线段的比？这就是黄金分割问题，这个相等的比就是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\,033\,988\,749\,89\cdots$. 天文学家开普勒（Johannes Kepler，1571—1630）把这种分割线段的方法称为神圣分割，并指出，毕达哥拉斯定理（勾股定理）和黄金分割“是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠玉”. 历史上最早正式在书中使用“黄金分割”这个名称的是欧姆（Martin Ohm，1792—1872）. 19 世纪以后，“黄金分割”的说法逐渐流行起来.

在相当长的一段时期里，人们非常崇拜黄金分割. 比如，古希腊的许多矩形建筑中，宽与长的比都等于黄金比.

值得一提的是，优选法中的“0.618 法”与黄金分割紧密相关. 20 世纪 70 年代，这种方法经著名数学家华罗庚（1910—1985）的倡导在我国得到大规模推广，取得了很大的成果.

用下面的方法也可以作出一条已知线段 AB 的黄金分割点 C：

（1）经过点 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\frac{1}{2}AB$；

（2）连接 AD，在 DA 上截取 $DE=DB$；

（3）在 AB 上截取 $AC=AE$.

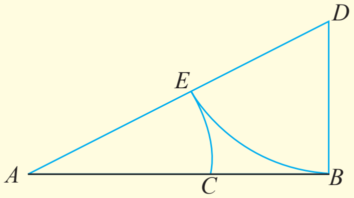


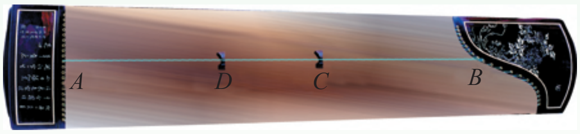
图 9-28

点 C 就是线段 AB 的黄金分割点. 你能说说其中的道理吗？

习题 9.9

问题解决

1. 如图，乐器上的一根弦 $AB=80$ cm，两个端点 A，B 固定在乐器板面上，支撑点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，支撑点 D 是靠近点 A 的黄金分割点. 试确定支撑点 C 到端点 B 的距离以及支撑点 D 到端点 A 的距离.



（第 1 题）

2. 宽与长的比等于黄金比的矩形也称为黄金矩形. 请设法作出一个黄金矩形.
3. 查阅有关黄金分割的资料，了解与之有关的意义.

7 利用相似三角形测高

活动课题： 利用相似三角形的有关知识测量旗杆（或路灯杆）的高度.

活动方式： 分组活动、全班交流研讨.

活动工具： 小镜子、标杆、皮尺等测量工具.

活动步骤：

方法 1： 利用阳光下的影子.

如图 9-29，每个小组选一名同学直立于旗杆影子的顶端处，其他人分为两部分，一部分同学测量该同学的影长，另一部分同学测量同一时刻旗杆的影长.

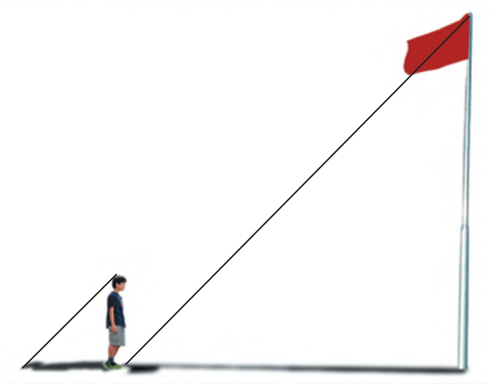


图 9-29

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

方法 2：利用标杆.

如图 9-30，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上直立一根高度适当的标杆. 观测者适当调整自己所处的位置，当旗杆的顶端、标杆的顶端与眼睛恰好在一条直线上时，其他同学立即测出观测者的脚到旗杆底端的距离，以及观测者的脚到标杆底端的距离，然后测出标杆的高.

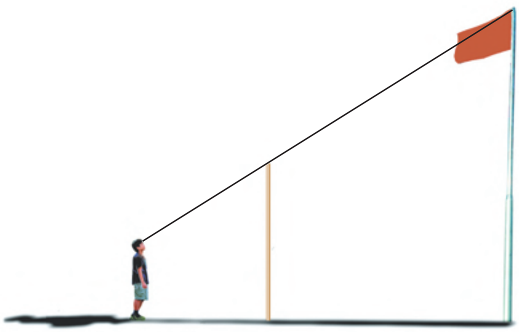


图 9-30

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

方法 3：利用镜子的反射.

如图 9-31，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上平放一面镜子，在镜子上做一个标记，观测者看着镜子来回移动，直至看到旗杆顶端在镜子中的像与镜子上的标记重合.

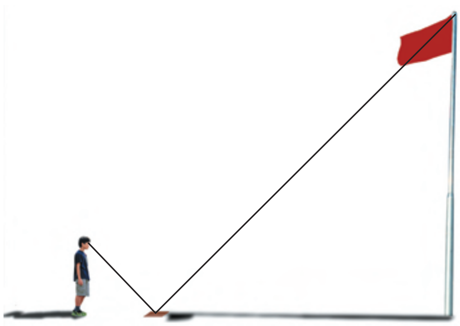


图 9-31

测量所需的数据，根据所测的结果你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

想一想

你还有哪些测量旗杆高度的方法?

议一议

上述几种测量方法各有哪些优缺点?

读一读

刘徽与《海岛算经》

刘徽，公元 3 世纪人，是中国历史上最杰出的数学家之一.《九章算术注》和《海岛算经》是他留给后世最宝贵的数学遗产.

刘 徽

《海岛算经》最早附于《九章算术注》之后，唐初开始单行. 刘徽在该书中精心选编了九个测量问题，都是利用测量的方法来计算高、深、广、远等问题的. 其中第一个问题是测算海岛的高、远问题，因此得名.《海岛算经》是中国最早的一部测量数学专著，也是中国古代高度发达的地图学的数学基础.

《海岛算经》第一个问题的大意是：如图 9-32，要测量海岛上一座山峰 A 的高度 AH，立两根高 3 丈的标杆 BC 和 DE，两杆之间的距离 $BD=1\ 000$ 步，D，B，H 成一线；从 BC 退行 123 步到 F，人的眼睛贴着地面观察 A 点，A，C，F 三点成一线；从 DE 退行 127 步到 G，人的眼睛贴着地面观察 A 点，A，E，G 三点也成一线. 试计算山峰的高度 AH 及 HB 的长（古制 1 步 = 6 尺，1 里 = 180 丈 = 1 800 尺 = 300 步，结果用里和步来表示）.

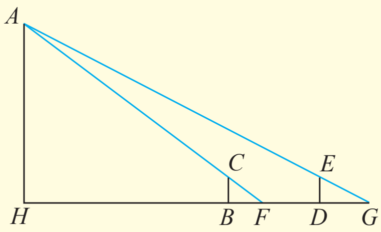


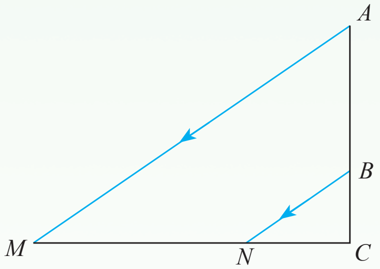
图 9-32

怎样利用相似三角形求得线段 AH 及 HB 的长呢？请你试一试！

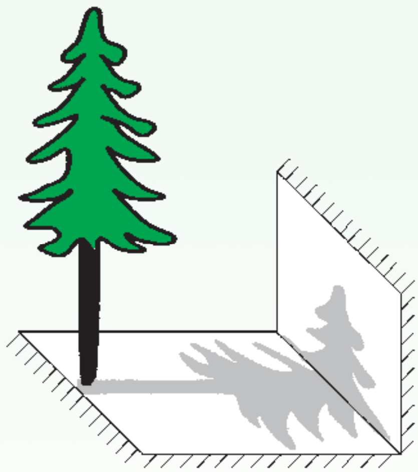
习题 9.10

问题解决

1. 高 4 m 的旗杆在水平地面上的影子长 6 m，此时测得附近一个建筑物的影子长 24 m，求该建筑物的高度.
2. 旗杆的影子长 6 m ，同时测得旗杆顶端到其影子顶端的距离是 10 m，如果此时附近小树的影子长 3 m，那么小树有多高？
3. 如图，AB 表示一个窗户的高，AM 和 BN 表示射入室内的光线，窗户的下端到地面的距离 $BC=1$ m. 已知某一时刻 BC 在地面的影长 $CN=1.5$ m，AC 在地面的影长 $CM=4.5$ m，求窗户的高度.



（第 3 题）


（第 4 题）

4. 教学楼旁边有一棵树，学习了相似三角形后，数学兴趣小组的同学们想利用树影测量树高. 课外活动时，他们在阳光下测得一根长 1 m 的竹竿的影长是 0.9 m，但当他们马上测量树高时，发现树的影子不全落在地面上，有一部分影子落在教学楼的墙壁上（如图）. 经过讨论，小组同学认为继续测量也可以求出树高. 他们测得落在地面上的影长是 2.7 m，落在墙壁上的影长是 1.2 m. 请你和他们一起算一下，树高为多少？

8 相似三角形的性质

如图 9−33，小王依据图纸上的$\triangle ABC$，以 1∶2 的比例建造了模型房的房梁$\triangle A'B'C'$，CD 和 $C'D'$ 分别是它们的立柱.

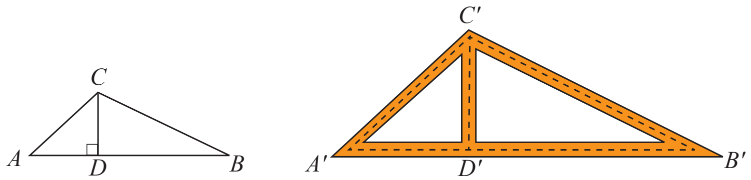


图 9−33

（1）$\triangle ACD$ 与$\triangle A'C'D'$ 相似吗？为什么？如果相似，指出它们的相似比.

（2）如果 $CD = 1.5$ cm，那么模型房的房梁立柱有多高？

想一想

已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k，它们对应高的比是多少？对应角平分线的比是多少？对应中线的比呢？为什么？

定理 相似三角形对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比都等于相似比.

议一议

如图 9−34，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k.

（1）若$\angle BAD = \frac{1}{3}\angle BAC$，$\angle B'A'D' = \frac{1}{3}\angle B'A'C'$，则 $\frac{AD}{A'D'}$ 等于多少？

（2）若 $BE = \frac{1}{3}BC$，$B'E' = \frac{1}{3}B'C'$，则 $\frac{AE}{A'E'}$ 等于多少？

（3）你还能提出哪些问题？与同伴交流.

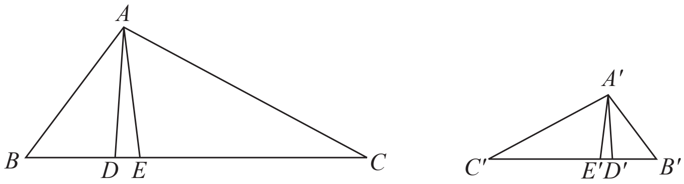


图 9-34

例 1 如图 9-35，AD 是$\triangle ABC$ 的高，点 P，Q 在 BC 边上，点 R 在 AC 边上，点 S 在 AB 边上，$BC=60$ cm，$AD=40$ cm，四边形 $PQRS$ 是正方形.

（1）$\triangle ASR$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？为什么？

（2）求正方形 $PQRS$ 的边长.

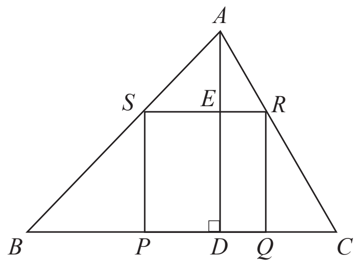


图 9-35

解：（1）$\triangle ASR \backsim \triangle ABC$. 理由如下：

$\because$ 四边形 $PQRS$ 是正方形，

$\therefore SR /\!/ BC$.

$\therefore \angle ASR=\angle B$，$\angle ARS=\angle C$.

$\therefore \triangle ASR \backsim \triangle ABC$（两角分别相等的两个三角形相似）.

（2）由（1）可知$\triangle ASR \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{SR}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

设正方形 $PQRS$ 的边长为 x cm，则 $AE=(40-x)$ cm.

$\therefore \dfrac{40-x}{40}=\dfrac{x}{60}$.

解得 $x=24$.

$\therefore$ 正方形 $PQRS$ 的边长为 24 cm.

随堂练习

1. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$BD$ 和 $B'D'$ 是它们的对应中线. 已知 $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{3}{2}$，$B'D'=4$ cm，求 BD 的长.

2. 两个相似三角形一组对应角平分线的长分别是 2 cm 和 5 cm，求这两个三角形的相似比. 在这两个三角形的一组对应中线中，如果较短的中线是 3 cm，那么较长的中线有多长？

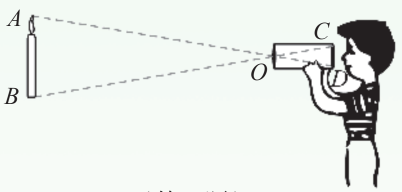
习题 9.11

知识技能

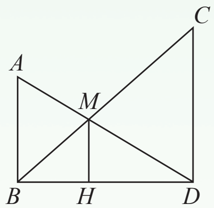
1. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$ 和 $A'D'$ 是它们的对应角平分线. 已知 $AD = 8$ cm，$A'D' = 3$ cm，求$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 对应高的比.

问题解决

2. 如图，小明自制了一个小孔成像装置，其中纸筒的长度为 15 cm. 他准备了一支长为 20 cm 的蜡烛，想要得到高度为 5 cm 的像，蜡烛应放在距离纸筒多远的地方？



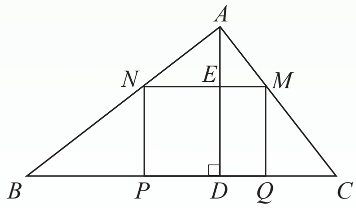
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，AB 和 CD 表示两根直立于地面的柱子，AD 和 BC 表示起固定作用的两根钢筋，AD 与 BC 的交点为 M. 已知 $AB = 10$ m，$CD = 15$ m，求点 M 离地面的高度 MH.

4. 如图，有一块三角形余料 ABC，它的边 $BC = 80$ cm，高 $AD = 60$ cm. 现在要把它加工成长与宽的比为 2 : 1 的矩形零件 $PQMN$，要求一条长边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上. 求矩形的长和宽.



（第 4 题）

如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 2，那么$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的周长之比是多少？面积之比呢？

如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，那么你能求出$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的周长之比和面积之比吗？

如图 9−36，由已知，得 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，

$\therefore \dfrac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k.$

分别作$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高 CD，$C'D'$.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot CD}{\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}\cdot\dfrac{CD}{C'D'}=k^2.$

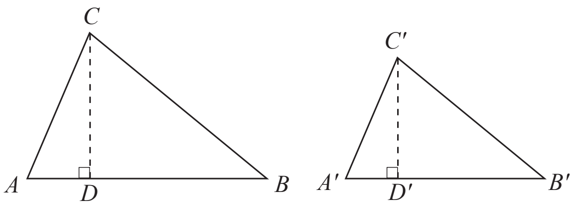


图 9−36

定理　相似三角形周长的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

议一议

两个相似四边形的周长的比等于相似比吗？面积的比等于相似比的平方吗？两个相似五边形的周长的比以及面积的比怎样呢？两个相似的 n 边形呢？

例 2　如图 9−37，将$\triangle ABC$沿 BC 方向平移得到$\triangle DEF$，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$重叠部分（图中阴影部分）的面积是$\triangle ABC$的面积的一半. 已知 $BC=2$，求$\triangle ABC$平移的距离.

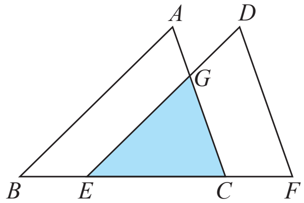


图 9−37

解：根据题意，可知 $EG/\!/AB$，

$\therefore \angle GEC=\angle B$，$\angle EGC=\angle A$.

$\therefore \triangle GEC \backsim \triangle ABC$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{EC}{BC}\right)^2=\frac{EC^2}{BC^2}$（相似三角形面积的比等于相似比的平方），

即 $\frac{1}{2}=\frac{EC^2}{2^2}$.

$\therefore EC^2=2.$

$\therefore EC=\sqrt{2}.$

$\therefore BE=BC-EC=2-\sqrt{2}$，

即$\triangle ABC$平移的距离为 $2-\sqrt{2}$.

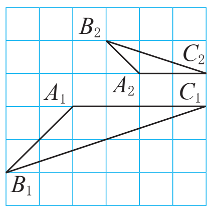
随堂练习

1. 判断正误：

（1）如果把一个三角形三边的长同时扩大为原来的 10 倍，那么它的周长也扩大为原来的 10 倍；（　　）

（2）如果把一个三角形的面积扩大为原来的 9 倍，那么它三边的长都扩大为原来的 9 倍.（　　）

2. 如图，在方格纸上有$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，这两个三角形是否相似？如果相似，$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的周长比和面积比分别是多少？



（第 2 题）

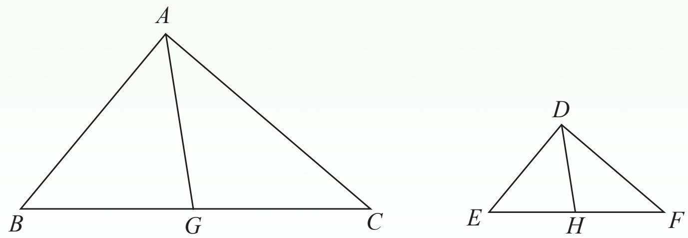
习题 9.12

知识技能

1. 如图，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，G，H分别是边BC和EF的中点，已知$AB=2DE$，$AC=2DF$，$\angle BAC=\angle EDF$.

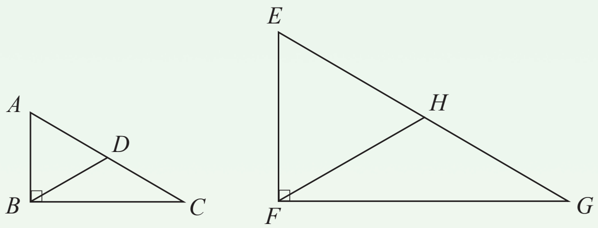
（1）中线AG与DH的比是多少？

（2）$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积比是多少？



（第 1 题）

2. 如图，Rt△ABC ∽ Rt△EFG，$EF = 2AB$，BD 和 FH 分别是它们的中线，△BDC 与△FHG 是否相似？如果相似，试确定其周长比和面积比.



（第 2 题）

问题解决

3. 一块三角形土地的一边长为 120 m，在地图上量得它的对应边长为 0.06 m，这边上的高为 0.04 m，求这块地的实际面积.

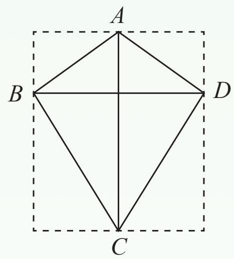
4. 小明同学把一幅矩形图片放大欣赏，经测量其中一条边由 10 cm 变成了 40 cm，那么这次放大的比例是多少？这幅画的面积发生了怎样的变化？

5. 一个小风筝与一个大风筝形状相同，它们的形状如图所示，其中对角线 $AC \perp BD$. 已知它们的对应边之比为 1 : 3，小风筝两条对角线的长分别为 12 cm 和 14 cm.

（1）小风筝的面积是多少？

（2）如果在大风筝内装设一个连接对角顶点的十字交叉形的支撑架，那么至少需用多长的材料？（不计损耗）

（3）大风筝要用彩色纸覆盖，而彩色纸是从一张刚好覆盖整个风筝的矩形彩色纸（如图中虚线所示）裁剪下来的，那么从四个角裁剪下来废弃不用的彩色纸的面积是多少？



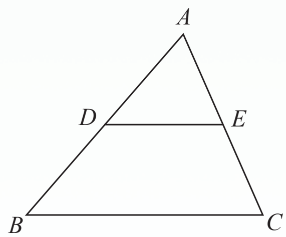
（第 5 题）

联系拓广

6. 如图，在△ABC 中，点 D，E 分别在边 AB 和 AC 上，且 $DE \parallel BC$.

（1）若 $AD : DB = 1 : 1$，则 $S_{\triangle ADE} : S_{梯形DBCE}$ 等于多少？

（2）若 $S_{\triangle ADE} = S_{梯形DBCE}$，则 $DE : BC$，$AD : DB$ 各等于多少？



（第 6 题）

9 利用位似放缩图形

图 9−38 是一幅电影的宣传海报，它由一组形状相同的图形组成. 在图片 ① 上取一点 A，它与另一张图片（如图片 ②）上相应的点 B 之间的连线经过镜头中心点 P. 在图片上换其他的点试一试，还有类似的规律吗？

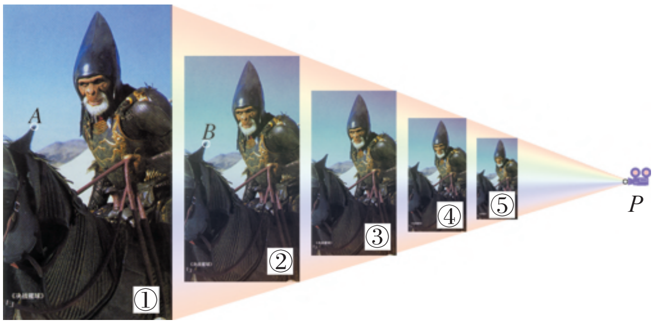


图 9−38

如果两个相似多边形每组对应顶点 A，A' 的连线都经过同一个点 O，且有 $OA' = k \cdot OA$（$k \neq 0$），那么这样的两个多边形叫做**位似多边形**（homothetic polygons），点 O 叫做**位似中心**（homothetic center）. 实际上，k 就是这两个相似多边形的相似比.

例如，下面每组中的两个多边形都是位似多边形.

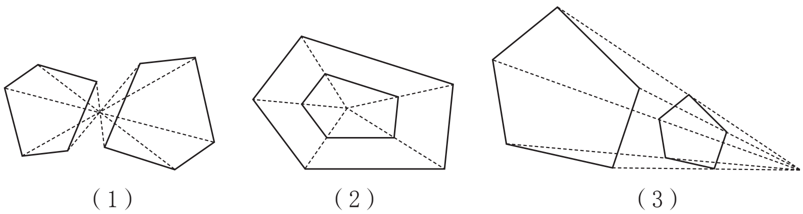


图 9−39

位似中心有时在两个对应点之间（如图（1）），有时在两个对应点连线的延长线上（如图（2）（3））.

例 如图 9-40，已知△ABC，以点 O 为位似中心画△DEF，使它与△ABC 位似，且相似比为 2.

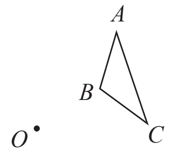


图 9-40

解： 如图 9-41，作射线 OA，OB，OC；在射线 OA，OB，OC 上分别取点 D，E，F，使 $OD=2OA$，$OE=2OB$，$OF=2OC$；顺次连接 D，E，F，则△DEF 与△ABC 位似，相似比为 2.

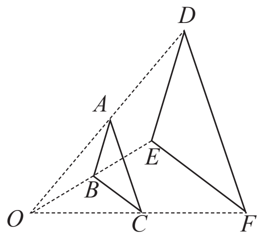


图 9-41

如果在射线 AO，BO，CO 上分别取点 D，E，F 呢？

想一想

用上面的方法画出的△DEF 为何与△ABC 相似.

做一做

利用下面的方法可以近似地将一个图形放大：

（1）将 2 根长短相同的橡皮筋系在一起，联结处形成一个结点.

（2）选取一个图形，在图形外取一个定点.

（3）将系在一起的橡皮筋的一端固定在定点，把一支铅笔固定在橡皮筋的另一端.

（4）拉动铅笔，使 2 根橡皮筋的结点沿所选图形的边缘运动，当结点在已知图形上运动一圈时，铅笔就画出了一个新的图形.

这个新图形与已知图形形状相同.

请你用这种方法把一个已知图形放大.

随堂练习

已知点 O 在△ABC 内，以点 O 为位似中心画一个三角形，使它与△ABC 位似，且相似比为 $\frac{1}{2}$.

习题 9.13

知识技能

1. 已知边长为 1 的正方形 $ABCD$，以它的两条对角线的交点为位似中心，画一个边长为 2 并与它位似的正方形.

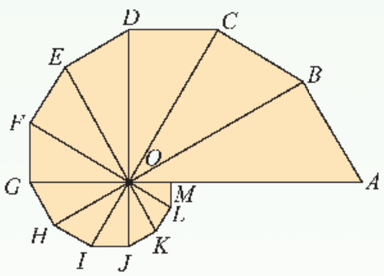
2. 画一个任意四边形 $ABCD$，在它的内部任取一点 O，以点 O 为位似中心，画一个四边形 $A'B'C'D'$，使它与四边形 $ABCD$ 位似，且相似比为 $\frac{1}{2}$.

数学理解

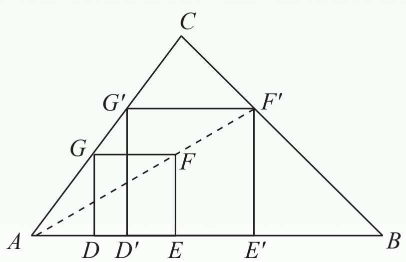
3. 相似多边形都是位似多边形吗？若不是请举反例，若是请说明理由.

联系拓广

4. 如图所示的图形是由 12 个有公共顶点 O 的直角三角形拼成的，$\angle AOB=\angle BOC=\cdots=\angle LOM=30°$. 你能从图中找出 $\triangle ABO$ 的位似图形吗？它们的相似比是多少？



（第 4 题）



（第 5 题）

※**5.** 如图，小明要在三角形木板 ABC 上锯下一个一边在 AB 上的面积最大的正方形，他采用了以下方法画线：

（1）在边 AC 上取一点 G，作 $GD\perp AB$，垂足为点 D，以 GD 为一边在 $\triangle ABC$ 内作正方形 $GDEF$；

（2）连接 AF 并延长，交 BC 于点 F'；

（3）过点 F' 作 AB 的平行线，交 AC 于点 G'，分别过 G'，F' 作 AB 的垂线，垂足为点 D'，E'. 所得到的四边形 $G'D'E'F'$ 就是满足条件的正方形.

小明的做法有道理吗？说说你的意见.

如图 9-42，在直角坐标系中，△OAB 三个顶点的坐标分别为 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$，$B(2, 3)$.

将点 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 2，得到三个点，以这三个点为顶点的三角形与△OAB 位似吗？如果位似，指出位似中心和相似比.

如果将 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 -2 呢？

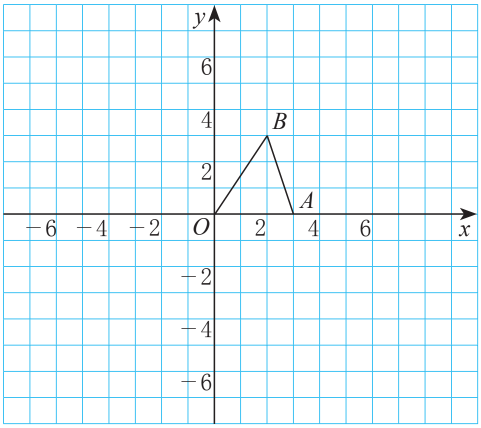


图 9-42

做一做

如图 9-43，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $O(0, 0)$，$A(5, 0)$，$B(5, 3)$，$C(2, 4)$. 将点 O，A，B，C 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$，得到四个点，以这四个点为顶点的四边形与四边形 $OABC$ 位似吗？如果位似，指出位似中心和相似比.

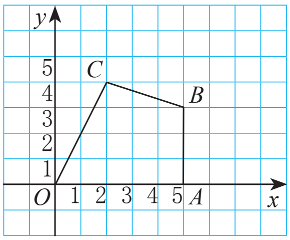


图 9-43

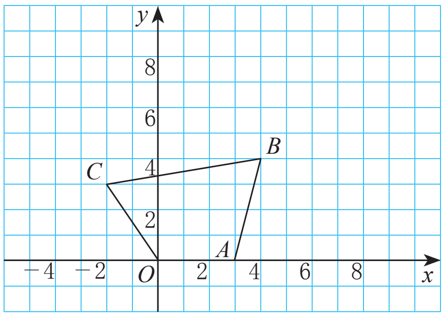
在直角坐标系中，将一个多边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘同一个数 k（$k \neq 0, 1$），所对应的图形与原图形位似，位似中心是坐标原点，它们的相似比为 $|k|$.

议一议

在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 O（0，0），A（6，0），B（3，6），C（−3，3）. 已知四边形 $O'A'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 是以原点 O 为位似中心的位似四边形，且相似比是 3∶2，请写出四边形 $O'A'B'C'$ 各个顶点的坐标. 与四边形 $OABC$ 相比，四边形 $O'A'B'C'$ 对应顶点的坐标发生了什么变化？

随堂练习

如图，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 O（0，0），A（3，0），B（4，4），C（−2，3），画出四边形 $OABC$ 以点 O 为位似中心的位似图形，使它与四边形 $OABC$ 的相似比是 2∶1.

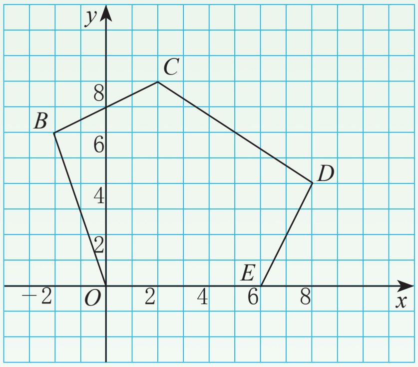


习题 9.14

知识技能

1. 在直角坐标系中，△OBC 各顶点的坐标分别是 O（0，0），B（6，0），C（8，4）. 将点 O，B，C 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$，得到三个点，以这三个点为顶点的三角形与△OBC 位似吗？

2. 如图，在直角坐标系中，以原点 O 为位似中心，画出五边形 $OBCDE$ 的位似图形，使它与 $OBCDE$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$. 比较两个图形对应点的坐标，你能发现什么？



（第 2 题）

数学理解

3. 在直角坐标系中，五边形 $OBCDE$ 与五边形 $OFGHJ$ 位似，位似中心是原点 O，相似比是 k，这两个五边形每组对应顶点到位似中心的距离之比是多少？

4. 在直角坐标系中，四边形 $OBCD$ 与四边形 $OEFG$ 位似，位似中心是原点 O. 已知 C 与 F 是对应顶点，且 O，C，F 的坐标分别是 $O(0,0)$，$C(3,7)$，$F(9,21)$，那么四边形 $OBCD$ 与四边形 $OEFG$ 的相似比是多少？四边形 $OEFG$ 与四边形 $OBCD$ 的相似比呢？

回顾与思考

1. 举例说明比例的性质.
2. 判定两个三角形相似的条件有哪些？你是如何得到它们的？三角形相似与三角形全等有怎样的关系？
3. 相似三角形有哪些性质？
4. 如何将一个图形放大或缩小？请举例说明.
5. 在直角坐标系中，如何利用多边形各顶点坐标的变化得到与其位似的多边形？请举例说明.
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

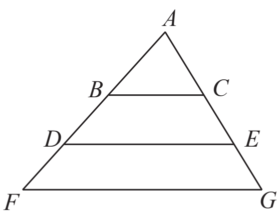
复习题

知识技能

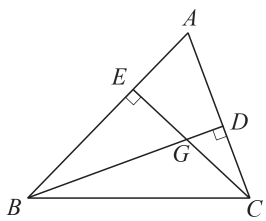
1. 若 A，B 两地在地图上的距离为 7 cm，地图的比例尺为 $1:5\,000$，求 A，B 两地间的实际距离.

2. 四条线段 a，b，c，d 成比例，其中 $b=3$ cm，$c=2$ cm，$d=6$ cm，求线段 a 的长.

3. 如图，$BC/\!/DE/\!/FG$，图中有几对相似三角形？你是怎样判断的？



（第 3 题）



（第 4 题）

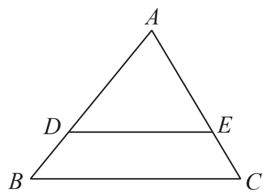
4. 如图，$\triangle ABC$ 的高 BD，CE 相交于点 G，找出其中的三对相似三角形.

5. 如图，已知 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$AD=2a$ cm，$DB=a$ cm，$BC=b$ cm，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=50^\circ$.

（1）求 $\angle ADE$ 的度数；

（2）求 $\angle AED$ 的度数；

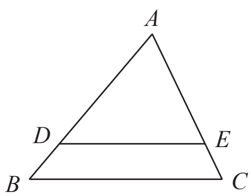
（3）求 DE 的长.



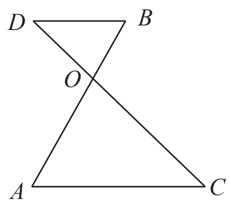
（第 5 题）

6. 如果两个相似三角形面积的比为 $4:9$，那么这两个相似三角形对应边的比是多少？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $DE/\!/BC$，$AD=3BD$，$S_{\triangle ABC}=48$，求 $S_{\triangle ADE}$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，AB 与 CD 相交于点 O，且 $AC/\!/BD$. $OA\cdot OD=OC\cdot OB$ 成立吗？为什么？

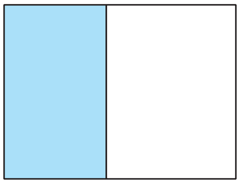
9.（1）在直角坐标系中描出点 $A(4,2)$，$B(2,4)$，$C(0,4)$，$D(0,2)$，$E(2,0)$，顺次连接点 A，B，C，D，E，A，得到一个五边形 $ABCDE$.

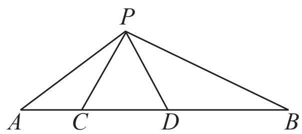
（2）将点 A，B，C，D，E 的横坐标和纵坐标都除以 2，得到五个新的点，顺次连

接这五个点，得到一个新的五边形．这两个五边形相似吗？如果将点 A，B，C，D，E 的横坐标和纵坐标都乘 3 呢？

10. 公园中的儿童游乐场是两个相似三角形地块，相似比为 2 : 3，面积的差为 30 m^2，它们的面积之和为多少？

11. 如图，在长 8 cm、宽 6 cm 的矩形中，截去一个矩形（图中阴影部分所示），使留下的矩形与原矩形相似，那么留下的矩形面积为多少？


（第 11 题）



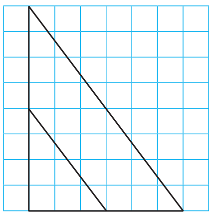
（第 12 题）

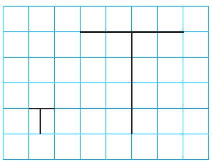
12. 如图，点 C，D 在线段 AB 上，$\triangle PCD$ 是等边三角形，且 $\triangle ACP \backsim \triangle PDB$.

（1）求 $\angle APB$ 的度数；

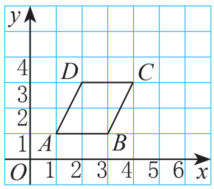
（2）若 $AC=4$，$BD=9$，求 $\triangle PCD$ 的边长.

13. 如图，每组中的两个图形是位似图形吗？如果是，求它们的相似比，并画出位似中心；如果不是，请说明理由.


（1）


（2）

（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，在直角坐标系中，以原点为位似中心，画出 $\square ABCD$ 的位似图形，要求它与 $\square ABCD$ 的相似比为 2. 比较两个图形的顶点坐标，你发现了什么？

数学理解

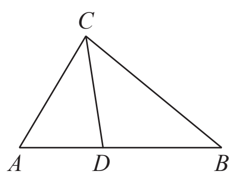
15. 如图，D 是 AB 上一点，能保证使 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 相似的条件是（　　）.

（A）$AC : CD = AB : BC$

（B）$CD : AD = BC : AC$

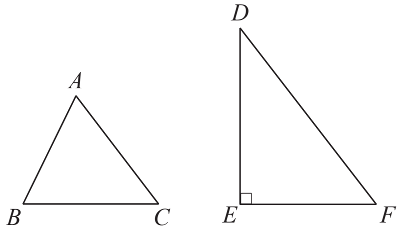
（C）$AC^2 = AD \cdot AB$

（D）$CD^2 = AD \cdot DB$



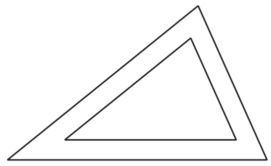
（第 15 题）

16. 如图，BC 与 EF 在一条直线上，$AC /\!/ DF$. 将图（2）的三角形截去一块，使它变为与图（1）相似的图形，且 EF 是这个图形的一条边，应该怎样截？



（1）　（2）

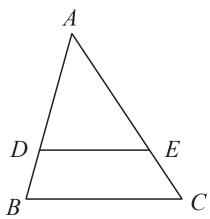
（第 16 题）



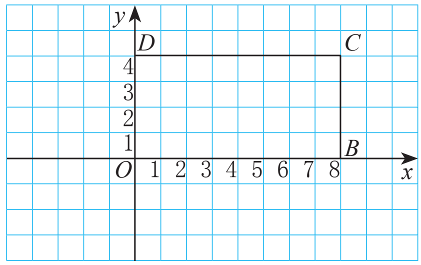
（第 17 题）

17. 将三角形各边向外平移 1 个单位并适当延长，得到如图所示的图形，变化前后的两个三角形相似吗？

18. 如图，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，除了 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的对应边成比例之外，你还能发现哪些线段成比例？请写出这些比例式.



（第 18 题）



（第 19 题）

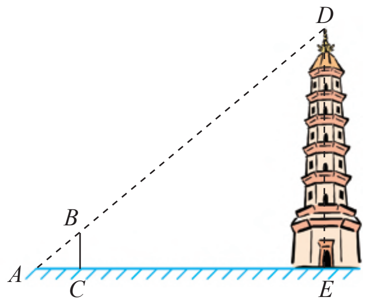
19. 如图，在直角坐标系中，以原点为位似中心，画出矩形 $OBCD$ 的位似图形，要求它与矩形 $OBCD$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$. 你有几种方法？画出所有满足条件的图形.

问题解决

20. 如图，小明欲测量一座古塔的高度. 他站在该塔的影子上前后移动，直到他自己影子的顶端正好与塔的影子的顶端重叠，此时他距离该塔 18 m. 已知小明的身高是 1.6 m，他的影长是 2 m.

（1）图中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是否相似？为什么？

（2）求古塔的高度.



（第 20 题）

21. 如图，为了测量一条河的宽度，测量人员在对岸岸边 P 点处观察到一根柱子，再在他们所在的这一侧岸上选点 A 和 B，使得 B，A，P 在一条直线上，且与河岸垂直．随后确定点 C，D，使 $BC \perp BP$，$AD \perp BP$，由观测可以确定 CP 与 AD 的交点 D．他们测得 $AB = 45$ m，$BC = 90$ m，$AD = 60$ m，从而确定河宽 $PA = 90$ m．你认为他们的结论对吗？还有其他测量方法吗？

（第 21 题）

联系拓广

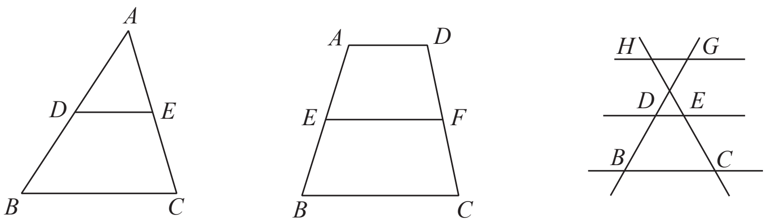
22. 如果一个直角三角形一条直角边和斜边分别是 4 cm 和 6 cm，另一个直角三角形的一条直角边和斜边分别是 6 cm 和 9 cm，这两个三角形相似吗？为什么？

23.（1）如图（1），D，E 分别是△ABC 边 AB 和 AC 上的点，且 $DE /\!/ BC$，△ADE 与△ABC 相似吗？你能写出几组成比例的线段吗？

（2）在（1）中，若 D 为 AB 的中点，则线段 AE 和线段 EC 有什么关系？

（3）如图（2），在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，E 为 AB 的中点，且 $EF /\!/ BC$，线段 DF 和线段 FC 有什么关系？为什么？

（4）如图（3），直线 $GH /\!/ DE /\!/ BC$，若点 D 为 GB 的中点，则线段 HE 和线段 EC 有什么关系？为什么？



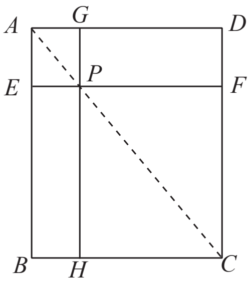
（1）　（2）　（3）

（第 23 题）

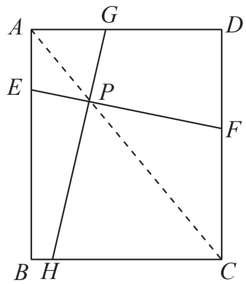
※**24.**（1）某广告公司设计员李叔叔设计的一份矩形样图如图（1）所示，他在矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意取一点 P，过点 P 分别作 $EF /\!/ BC$，$GH /\!/ DC$，EF 和 GH 把矩形 $ABCD$ 分为四个小矩形．他这样设计的目的是：使左上角矩形和

右下角矩形相似，给人一种和谐的感觉. 他的设计方法能使左上角矩形和右下角矩形相似吗？如果能，请说明理由.

（2）如图（2），在设计过程中，李叔叔又尝试着过对角线上一点 P 画了两条斜线，分别与矩形 $ABCD$ 两组对边相交于点 E，F，G，H，此时四边形 $AEPG$ 与四边形 $CFPH$ 还相似吗？为什么？

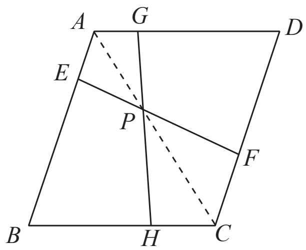


（第 24（1）题）



（第 24（2）题）

（3）赵叔叔认为，如图（3），只要四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么过对角线 AC 上任意一点 P 作两条直线分别与两组对边相交于点 E，F，G，H，上述结论都成立. 你认为他说的对吗？



（第 24（3）题）

综合与实践

制作视力表

视力表对我们来说并不陌生．但你想过吗，视力表中蕴含着一定的数学知识．

有一种视力表，它是以能否分辨出“E”的开口朝向为依据来测定视力的．换句话说，它的测试依据是能否看清楚“E”的两个空白缺口（如图 1 中 AB，CD 两个缺口）．

图 1

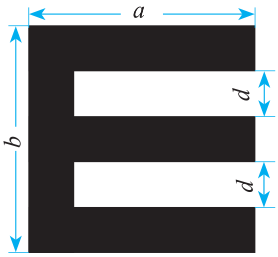


图 2

下面我们以“标准对数视力表”为例，探索视力表中的奥秘．

1．度量视力表中视力为 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，0.6，0.8，1.0，1.2，1.5，2.0 所对应的“E”的长 a、宽 b、空白缺口宽 d（见图2），并填写下表：

视力	a / mm	b / mm	d / mm
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

续表

视力	a/mm	b/mm	d/mm
0.6			
0.8			
1.0			
1.2			
1.5			
2.0			

（1）观察上表，你发现了什么？

（2）视力表中的各“E”形图之间有什么关系？

2. 用硬纸板复制视力表中视力为 0.1，0.2，0.3，0.5，1.0 所对应的“E”，并依次编号为①②③④⑤.

取编号为①②的两个“E”，按图 3 的方式把它们放置在水平桌面上.

图 3

如图 4，将②号“E”沿水平桌面向右移动，直至从右侧点 O 看去，点 P_1，P_2，O 在一条直线上为止. 这时我们说，在 D_1 处用①号“E”测得的视力与在 D_2 处用②号“E”测得的视力相同.

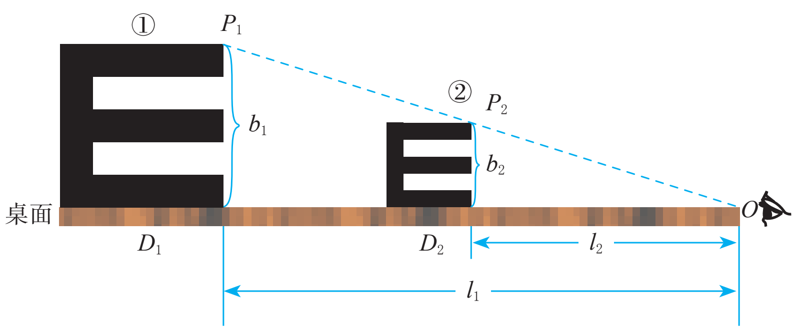


图 4

从图 4 你发现了什么？与同伴交流.

3. 按照上述方式，将 ①～⑤ 各个“E”排列成如图 5 所示的样子.

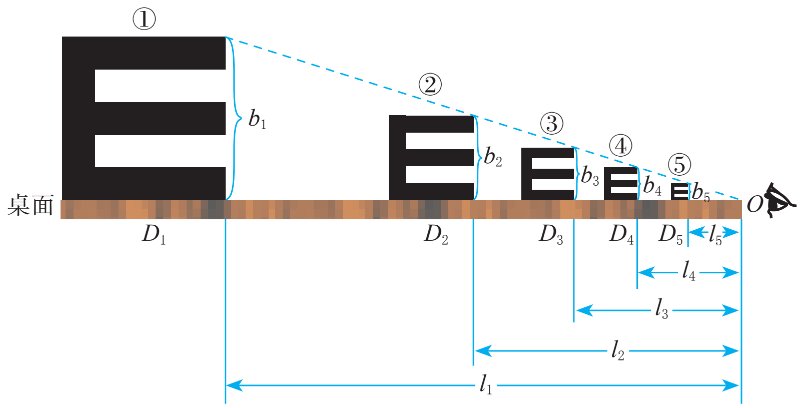


图 5

从图 5 你能得到什么结论？

4. 现有一个标准视力表，它要求的测试距离[1]为 5 m. 根据这个视力表，怎样制作一个测试距离为 3 m 的视力表？如果要求测试距离为 8 m 呢？

习题

到有关单位进行调查，目前较为通用的视力表有哪几种？它们与我们上面讨论的视力表是一种什么换算关系？整理调查结果并写出调查报告.

[1] 测试距离指被测者与视力表之间的水平距离.

综合与实践

直觉的误导

将一个正方形纸片剪成四块，能拼成一个比原来正方形面积大的矩形，你相信吗？

做一做

（1）两人一组，分别从硬纸上剪下一张 8 cm × 8 cm 的正方形纸片，并按图 1 所示的尺寸画线，然后剪成两个梯形和两个直角三角形纸片.

（2）将剪出的 4 张纸片按图 2 所示的方式拼接成四边形 $ABCD$.

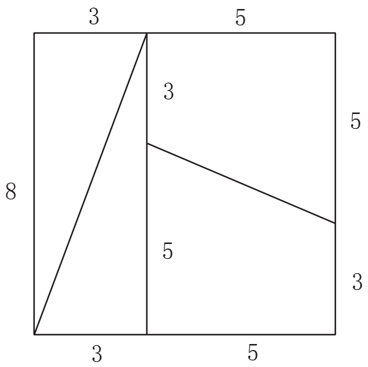


图 1

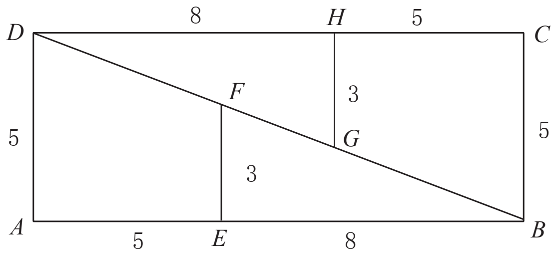


图 2

想一想

（1）四边形 $ABCD$ 是矩形吗？为什么？

（2）分别计算图 1 和图 2 的面积，你发现什么问题？你认为问题出在哪里？

议一议

（1）有的同学认为图 2 拼接成的四边形 $ABCD$ 虽然对边相等，但左上角和右下角可能不是直角，四边形 $ABCD$ 是平行四边形但可能不是矩形，所以按矩形计算面积会算多了. 他的想法有道理吗？

（2）有的同学怀疑 4 块纸片并没有铺满图 2 中的四边形 $ABCD$，而是留有缝隙. 他的怀疑有道理吗？你能发现你们拼的四边形中间有缝隙吗？

（3）如果有缝隙，缝隙在何处？是什么形状？你能证明这个结论吗？

做一做

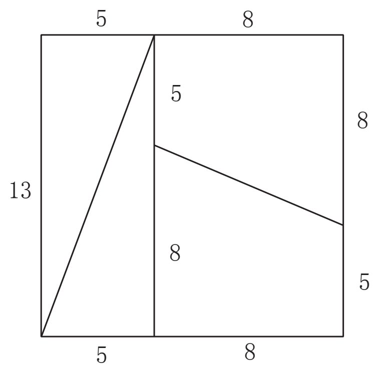


图 3

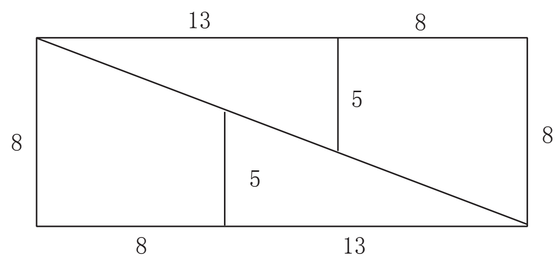


图 4

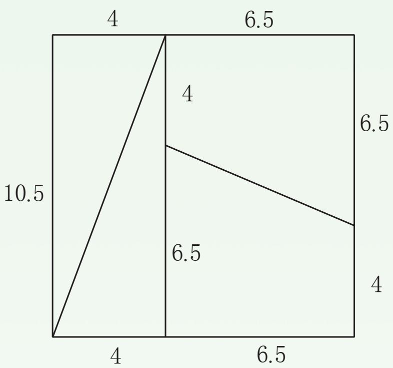
（1）从一张硬纸上剪下一个 13 cm × 13 cm 的正方形纸片，按图 3 的方式裁剪，再按图 4 的方式拼接，分别计算图 3 和图 4 中图形的面积.

（2）解释两个图形面积不同的原因.

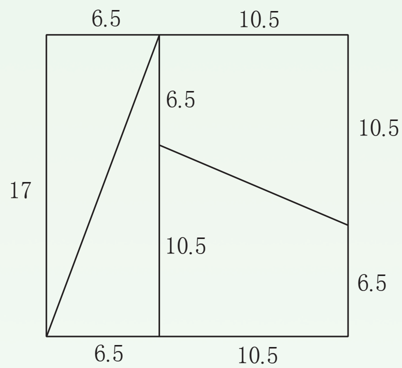
以上是两个直觉与逻辑不符的例子，拼接图形时，由于拼接处留下的空隙或重叠的部分很小，我们不易察觉，因而出现“多出”或“丢失”一小块面积的错觉，直觉误导了我们.

习题

1. 下面分别是 10.5 cm × 10.5 cm 和 17 cm × 17 cm 的两个正方形，请按图上的尺寸准确画图并剪开，分别拼成矩形，解释拼成的矩形为什么与原来的正方形面积不同.



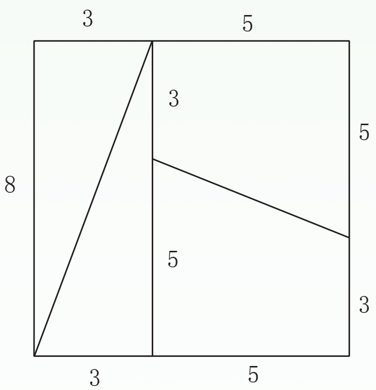
（1）



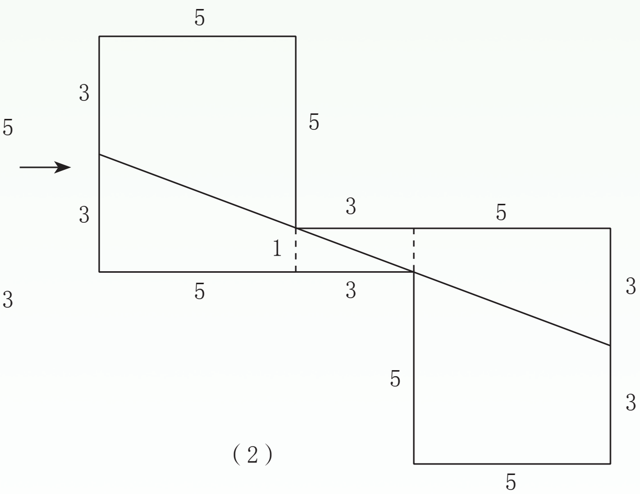
（2）

（第 1 题）

2. 将 8 cm × 8 cm 的正方形硬纸片按图（1）的方法剪开拼成图（2）. 图（2）可以看做是由两个大矩形和一个小矩形组成的. 计算图（2）的面积，你发现了什么问题？问题出在哪里？



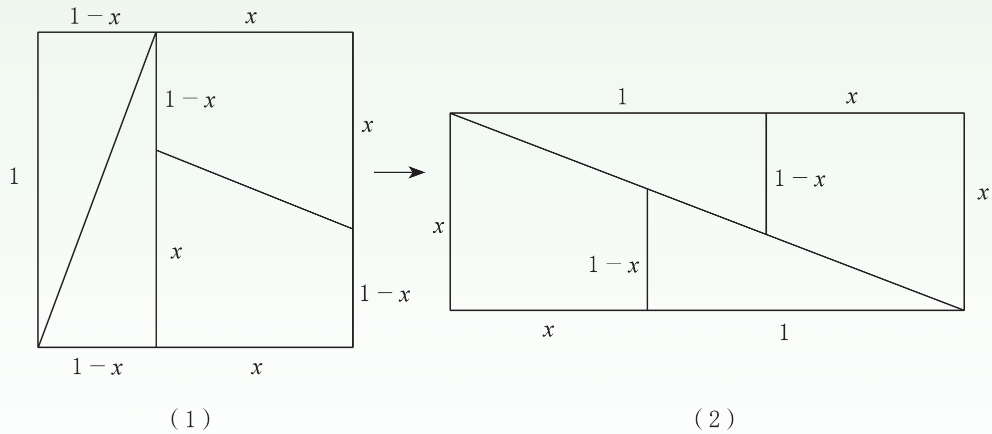
（1）



（2）

（第 2 题）

3. 将边长为 1 dm 的正方形硬纸片按适当的比例剪成图（1）所示的 4 块，恰好能拼成图（2）所示的面积为 1 dm^2 的矩形，求 x 的近似值（精确到 0.001 dm）.



（第 3 题）

总复习题

- 整理本学期学过的知识与方法，并与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题的活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

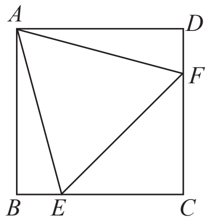
知识技能

1. 已知菱形的两条对角线的长分别为 6 cm 和 8 cm，求菱形的周长和面积.

2. 从菱形的钝角的顶点向对边作垂线，垂线平分对边，求菱形各角的度数.

3. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，等边三角形 AEF 的顶点 E，F 分别在 BC 和 CD 上.

求证：$\angle CEF=\angle CFE$.



（第3题）

4. x 取什么值时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{\frac{x}{2}-5}$；（2）$\sqrt{5-3x}$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{2+3x}}$；（4）$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$.

5. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{200}$；（2）$\sqrt{\frac{16}{3}}$；

※（3）$\sqrt{28x}$；※（4）$\sqrt{5ab^3}$.

6. 计算：

（1）$\sqrt{24}-\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{6}\right)$；

（2）$\sqrt{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\div\frac{\sqrt{6}}{2}$；

（3）$\left(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$；

※（4）$7\sqrt{a}+2\sqrt{a^2x}-5a\sqrt{\frac{4}{a}}-6a\sqrt{\frac{x}{9}}$.

7. 已知两个连续整数的积为 272，求这两个整数.

8. 一个两位数的十位数字比个位数字大 2，把这个两位数的个位数字和十位数字互换后平方，所得的数值比原来的两位数大 138，求原来的两位数.

9. 在一块面积为 888 cm^2 的矩形材料的四角，各剪掉一个大小相同的正方形（剪掉的正方形作废料处理，不再使用），做成一个无盖的长方体盒子，要求盒子的长为 25 cm，宽为高的 2 倍. 盒子的宽和高应为多少？

10. 解下列方程：

（1）$(4x+3)(5-x)=0$；（2）$(x-1)^2+2x(x-1)=0$；

（3）$2x^2-4x-5=0$；（4）$-3x^2-4x+4=0$；

（5）$3x(x-1)=2-2x$；（6）$(x-1)(x+2)=70$；

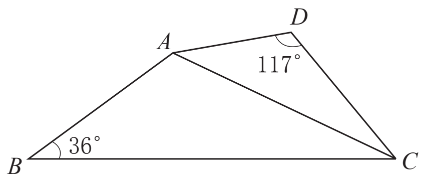
（7）$x(x+6)=7$；（8）$(3-x)^2+x^2=9$.

11. 沿一张矩形纸较长两边的中点将纸一分为二，所得的两张矩形纸的边缘形状仍然与原来的矩形纸相似，那么这种矩形纸的长、宽之比是多少？

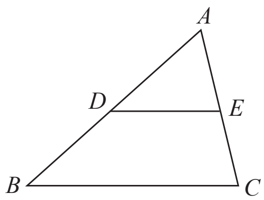
12. 如图，已知 $AD=a$ cm，$AC=b$ cm，$2BC=3AC$，$\angle B=36°$，$\angle D=117°$，$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$.

（1）求 AB 的长；（2）求 DC 的长；

（3）求 $\angle BAD$ 的大小.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，已知 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$DE$ 与 BC 具有怎样的位置关系？为什么？

14. 在直角坐标系中，将点 $(1, 1)$，$(2, 0)$，$(3, 0)$，$(2, 2)$，$(0, 3)$，$(1, 1)$ 用线段顺次连接，得到一个五边形，然后再将这五个点的横、纵坐标同时扩大到原来的 2 倍，并用同样的方式连接得到一个新的五边形，新五边形与原五边形相似吗？如果相似，相似比是多少？周长比呢？面积比呢？

数学理解

15. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ 的值.

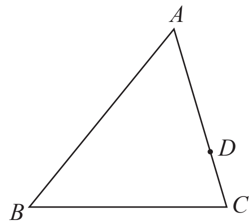
16. 求下列各式中 a，b 的值：

（1）$\sqrt{a^2-4}+\sqrt{a-b}=0$；

（2）$\sqrt{2a-3b-1}+(a-2b)^2=0$.

17. 已知线段 a，b，c，d（$b \neq d$），如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+c}{b+d}$ 成立吗？为什么？

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，过 AC 上一点 D 作直线 DE 交 AB 于点 E，使所得的三角形与原三角形相似，这样的直线可作多少条？

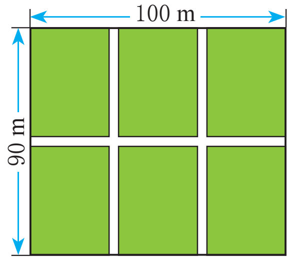


（第18题）

19. 任意画一个三角形，设法将这个三角形分成四个小三角形，使得它们都与原来的三角形相似.

问题解决

20. 如图，要在长 100 m、宽 90 m 的长方形绿地上修建宽度相同的道路，6 块绿地的面积共 8 448 m^2，求道路的宽.



（第20题）

21. 一个高尔夫球手击出一个高尔夫球，水平距离 d（m）和球上升的高度 h（m）满足关系：

$$h=d-0.004d^2.$$

（1）当球水平方向飞了 90 m 远时，它上升的高度是多少？

（2）当球第一次达到 50 m 高处时，它在水平方向飞了多远？（精确到 1 m）

22. 一个人的血压与其年龄及性别有关. 对女性来说，正常的收缩压 p（毫米汞柱[1]）与年龄 x（岁）大致满足关系：$p=0.01x^2+0.05x+107$；对男性来说，正常的收缩压 p（毫米汞柱）与年龄 x（岁）大致满足关系：$p=0.006x^2-0.02x+120$.

（1）利用公式计算你的收缩压；

（2）如果一个女性的收缩压为 120 毫米汞柱，那么她的年龄大概是多少？

（3）如果一个男性的收缩压为 130 毫米汞柱，那么他的年龄大概是多少？

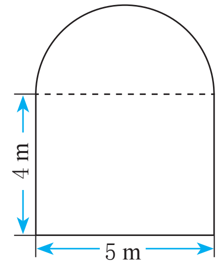
23. 李先生存入银行 1 万元，先存一个一年定期，一年后将本息自动转存为另一个一年定期，年利率不变，两年后共得本息 1.04 万元. 存款的年利率为多少？

---

[1] “毫米汞柱”是血压的一种计量单位. 我国目前采用的血压的法定计量单位为“帕”，1 毫米汞柱 = 133.322 4 帕.

24. 某果园今年栽种果树 200 棵，现计划扩大栽种面积，使今后两年的栽种量都比前一年增长一个相同的百分数，这样三年（包括今年）的总栽种量为 1 400 棵．求这个百分数．

25. 一辆卡车装满货物后，它的高比宽多 2 m，且恰好通过如图所示的隧道（上部为半圆形）．卡车有多高？（结果精确到 0.1 m）



（第 25 题）

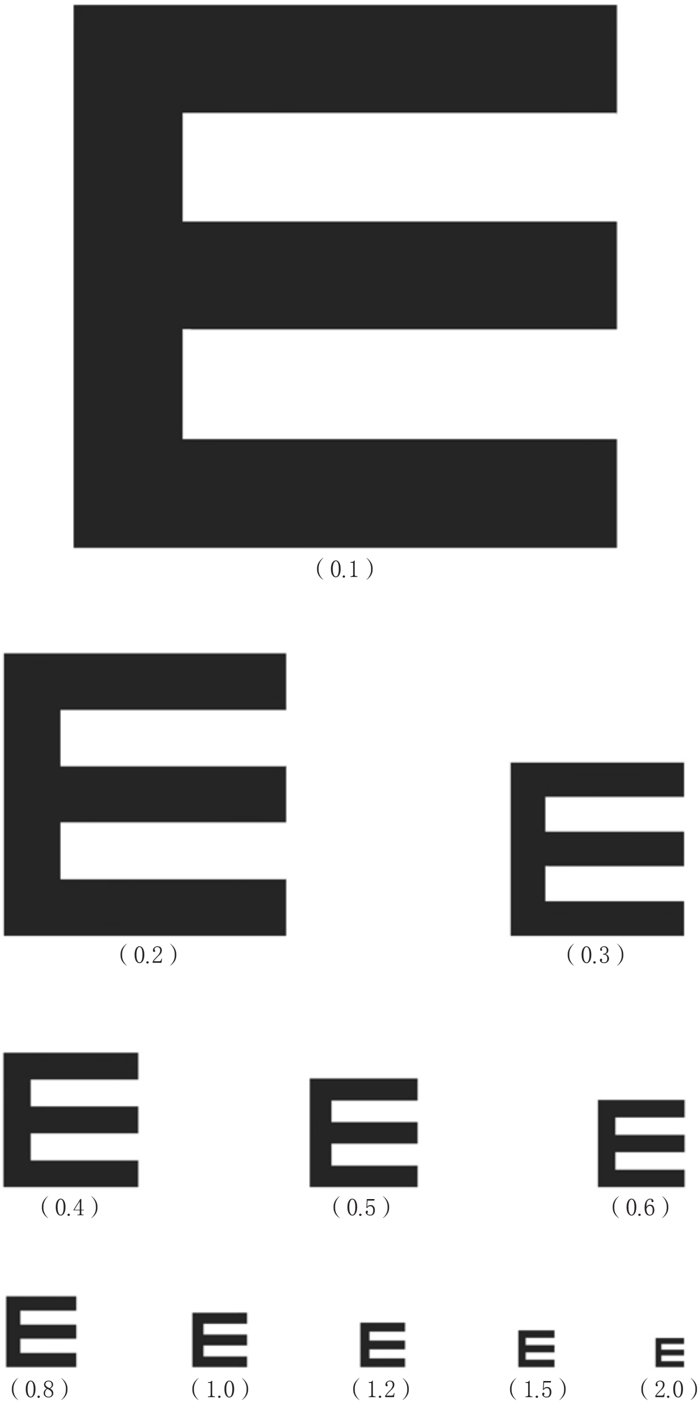
26. 利用相似三角形设计一种测量建筑物高度的方案，并具体实施你的方案．

联系拓广

27. 选一个你认为漂亮的图案，利用橡皮筋放大图形的方法将它的边缘图案放大．如果有条件，请在计算机上将一个图案放大．

28. 一个容器盛满纯药液 20 L，第一次倒出若干升后，用水加满；充分混合后第二次又倒出同样体积的溶液，这时容器里溶液中的纯药液只剩下 5 L．每次倒出的液体是多少升？

附：标准对数视力表中的“E”形图



出版说明

为了更好地满足五四学制实验区义务教育教学的需要，2003年山东省教育厅决定以全国中小学教材审定委员会初审通过的义务教育课程标准实验教科书为基础，委托山东教育出版社等单位改编、出版一套五四学制的义务教育课程标准实验教科书。该套实验教科书经全国中小学教材审定委员会初审通过后供山东省的烟台、威海、淄博、莱芜等五四学制地区的学生选用，受到了广大师生的欢迎和肯定。

2011年7月，教育部启动了义务教育课程标准实验教科书的修订送审工作，为了做好五四学制实验教科书初中《数学》的修订送审工作，山东教育出版社与北京师范大学出版社签署了合作协议。五四学制实验教科书《数学》（六～九年级）的修订、编写依据教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011年版）》，以马复主编的北师大版六三学制义务教育教科书《数学》（七～九年级）为基础，吸取了五四学制实验区多年来在教学实践中探索、积累的丰硕成果。

本套教科书经教育部审定通过，供五四学制地区的学生选用。参加本册改编的人员有马复、韩际清、刘崇渭、王德刚、辛珍文、云鹏、柳圣明、赵水祥、陈杰，由马复、韩际清主编。

本书的改编、出版得到了山东省教育厅、山东出版集团、山东省教学研究室、烟台市教育科学研究院、威海市教育教学研究中心、淄博市教研室、莱芜市教研室以及泰安、青岛、济宁等教研单位的领导，特别是北京师范大学出版社的领导和学科专家的大力帮助和支持，在此表示由衷的感谢。

欢迎广大师生在使用过程中提出修改意见和建议，以利于教科书的不断改进和完善。

山东教育出版社