教育部审定
2013

首届全国教材建设奖

全国优秀教材一等奖

义务教育教科书

数学

SHU XUE

八年级 下册

江苏凤凰科学技术出版社

义务教育教科书

数学

SHU XUE

八年级 下册

杨裕前 董林伟 主编

江苏凤凰科学技术出版社 · 南京

致同学

亲爱的伙伴：

年轮的旋转，带给大地一片新绿．把握青春的脉搏，继续怀着好奇去求知，去探索，以毅力去克服困难，在成功的体验中更加自信地走进新学期的新课本．

这册课本奉献给你的是数学的又一片“新绿”，明天的收获就在你的手中！

“数据的收集、整理、描述”将引导你学习收集、整理、描述数据的一些方法，学会从数据中获取信息．

“认识概率”将让你在富有情趣的活动中，初步了解事件发生的“可能性”，并用实验的方法估计一些事件的概率．

“中心对称图形——平行四边形”将引导你用数学的眼光观察、欣赏生活中许多漂亮的图案，把摩天轮、风车的转动等现象与图形的旋转联系起来；在探索中心对称性质的基础上，进一步探索并证明平行四边形的性质．

在探索“分式”的性质及其运算的过程中，你将进一步感受“类比”的思想方法．

从小学数学中的“反比例关系”到“反比例函数”，将使你对这类数量的变化关系认识得更加深刻，并学会用反比例函数解决一些实际问题．

在“二次根式”里，你将认识一种新的式子，并学习二次根式的加、减、乘、除运算．

当你学完这册课本，在经历数学学习的艰辛、享受数学学习的愉悦的过程中，你将变得更加自信、更加聪明，乐于探索，善于思考．

这册课本将是你不断成长的又一见证！

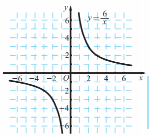
目　录

第 7 章　数据的收集、整理、描述

第 8 章　认识概率

第 9 章　中心对称图形——平行四边形

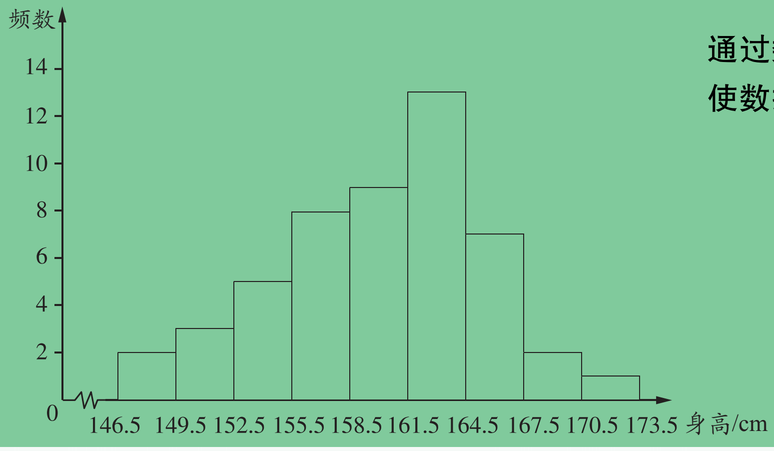
第 10 章　分　式



第 11 章　反比例函数

第 12 章　二次根式

第7章 数据的收集、整理、描述



通过数据的收集、整理、描述，
使数据提供的信息更清晰、更直观.

为了解全校同学的课外体育活动情况，需要开展调查．

设计一张调查表，调查你所在班级的同学最喜爱的课外体育活动项目，将调查的数据填入表中，并用适当的统计图来描述这些数据．

最喜爱的课外体育活动项目	学生人数	占全班人数的百分比

本章将学习通过普查和抽样调查收集数据，利用扇形统计图、条形统计图、折线统计图、频数分布表和频数分布直方图整理、描述数据．

7.1　普查与抽样调查

数据可以帮助我们了解周围的世界，做出正确的判断和合理的决策．

调查是收集数据的一种重要方法．

如何进行下列各项调查？你认为做这些调查有什么作用？

一批灯泡使用寿命的调查

你校学生身高的调查

“新闻联播”收视率的调查

新学年开始时，某校对每一位学生的身高进行测量．像这样，为一特定目的而对所有考察对象所做的调查叫做**普查**（thorough survey）．

某校为了解全校学生做家务的情况，对该校的部分学生（例如100名学生）进行“每周做家务的时间”的问卷调查．像这样，为一特定目的而对部分考察对象所做的调查叫做**抽样调查**（简称抽样）（sampling survey）．

我们把所考察对象的全体叫做**总体**（population），把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**（element），从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个**样本**（sample），样本中个体的数目叫做**样本容量**（size of a sample）．

例如，为了解某市八年级学生的体重情况，对该市八年级全体学生的体重进行调查就是普查，而对其中的部分学生（例如1 000名学生）的体重进行调查就是抽样调查．该市八年级学生体重的全体是总体，每个八年级学生的体重是个体，从中抽测的1 000名学生的体重是总体的一个样本，样本容量是1 000.

交流

1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．

（1）全班学生家庭1周内收看“新闻联播”的次数；

（2）某品牌灯泡的使用寿命；

（3）长江中现有鱼的种类．

2. 你认为普查和抽样调查各有什么优、缺点？举例说明．

普查通过调查总体中每个个体来收集数据，调查的结果准确，但往往花费多，工作量大，而且有些调查也不宜使用普查．抽样调查通过调查样本中每个个体来收集数据，花费较少，工作量较小，便于进行，但样本的抽取是否得当，直接关系到对总体的估计．为了获得较为准确的调查结果，抽样时要注意所选样本的代表性．

下列各项调查是普查，还是抽样调查？如果是抽样调查，请指出总体、个体、样本和样本容量．

(1) 调查你班每位同学所穿鞋子的尺码；

(2) 从一批洗衣机中抽取 5 台，调查这批洗衣机的使用寿命；

(3) 调查一个社区所有家庭的年收入；

(4) 从一批袋装食品中抽取 10 袋，调查这批食品中防腐剂的含量．

某校计划成立下列学生社团：

社团名称	文学社	英语俱乐部	动漫创作社	合唱团	航模工作室	生物实验小组	健美协会
社团代号	A	B	C	D	E	F	G

为了解同学们对上述学生社团的喜爱情况，应开展调查，收集数据．

(1) 你准备采用普查还是抽样调查？

(2) 怎样通过调查获得数据？

调查一般采用“书面问卷”的形式进行．

小明设计了如下调查问卷，并抽取了 50 名同学进行调查．

调查问卷　　　　______年______月______日

班级	你最喜爱的一个学生社团(只写代号)

调查结果：

E	C	F	D	A	B	D	A	C	D
A	D	B	A	E	B	C	A	D	C
G	B	B	G	C	D	C	D	C	C
B	D	F	A	E	D	D	C	D	F
B	C	A	B	C	E	C	A	D	F

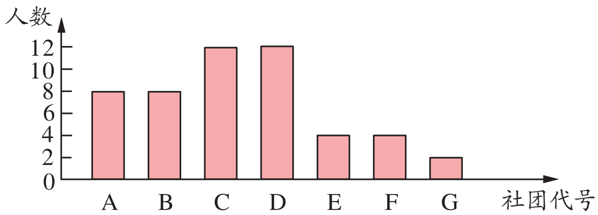
我们可以用统计表对调查结果进行整理.

喜爱各社团的学生人数统计表

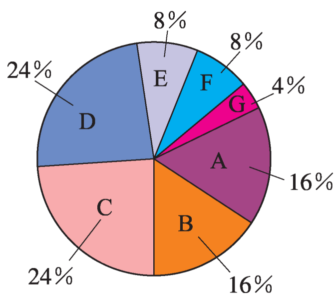
社团代号	A	B	C	D	E	F	G
划　记							
人　数	8	8	12	12	4	4	2
百分比	16%	16%	24%	24%	8%	8%	4%

根据上面的统计数据，可以画出如下的条形统计图和扇形统计图：

喜爱各社团的学生人数条形统计图



喜爱各社团的学生人数分布扇形统计图



从上面的条形统计图、扇形统计图中你能获得哪些信息?

设计一份调查问卷，在本班开展“每天用于课外阅读的时间”的调查，并整理调查结果，列出统计表，画出条形统计图.

7.1 习题

1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．
   （1）一批电视机的使用寿命；
   （2）全校学生最喜爱的体育运动项目；
   （3）全市学生的家庭 1 周内丢弃塑料袋的数量．
2. 指出下列调查中的总体、个体、样本和样本容量．
   （1）为了解某市八年级学生每天做家庭作业所用的时间，从该市八年级学生中抽取 100 名学生进行调查；
   （2）为了解一批零件的尺寸与标准尺寸的误差，从这批零件中抽取 10 件进行调查．
3. 举例说明哪些调查适合普查，哪些调查适合抽样调查．
4. 利用下面的调查问卷对全班同学去学校的方式进行调查，并整理调查结果，列出统计表，画出条形统计图．

调查问卷　　________年____月____日

去学校的方式（代号）	乘公共汽车（A）	骑自行车（B）	步行（C）	乘私人汽车（D）	其他（E）

7.2 统计图的选用

中华人民共和国从 1953 年到 2020 年共进行了 7 次全国人口普查．根据第 2 次到第 7 次全国人口普查结果，全国总人口数及我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数情况如下：

第 2 次全国人口普查

1964 年全国总人口为 723 070 269 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 416 人，具有高中文化程度的 1 319 人，具有初中文化程度的 4 680 人，具有小学文化程度的 28 330 人．

第 3 次全国人口普查

1982 年全国总人口为 1 031 882 511 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 615 人，具有高中文化程度的 6 779 人，具有初中文化程度的 17 892 人，具有小学文化程度的 35 237 人．

第 4 次全国人口普查

1990 年全国总人口为 1 160 017 381 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 1 422 人，具有高中文化程度的 8 039 人，具有初中文化程度的 23 344 人，具有小学文化程度的 37 057 人．

第 5 次全国人口普查

2000 年全国总人口为 1 295 330 000 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 3 611 人，具有高中文化程度的 11 146 人，具有初中文化程度的 33 961 人，具有小学文化程度的 35 701 人．

第 6 次全国人口普查

2010 年全国总人口为 1 370 536 875 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 8 930 人，具有高中文化程度的 14 032 人，具有初中文化程度的 38 788 人，具有小学文化程度的 26 779 人．

第 7 次全国人口普查

2020 年全国总人口为 1 443 497 378 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 15 467 人，具有高中文化程度的 15 088 人，具有初中文化程度的 34 507 人，具有小学文化程度的 24 767 人．

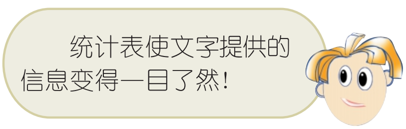
根据第 2～7 次全国人口普查的数据，可以列出统计表、绘制统计图，使数据信息显示得更直观、更清晰．

我国总人口数统计表

年份	全国总人口数
1964	723 070 269
1982	1 031 882 511
1990	1 160 017 381
2000	1 295 330 000
2010	1 370 536 875
2020	1 443 497 378

数据来源：第 2～7 次全国人口普查

从上面的统计表中，可以清楚地看出全国总人口数及人口增加情况．



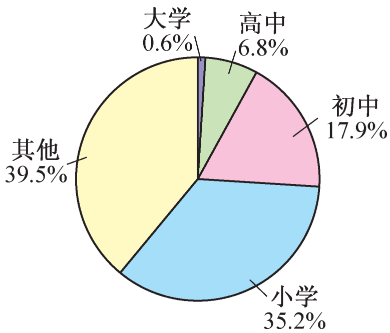
我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的统计表

文化程度 / 人数 / 年份	大学	高中	初中	小学	其他
1964	416	1 319	4 680	28 330	65 255
1982	615	6 779	17 892	35 237	39 477
1990	1 422	8 039	23 344	37 057	30 138
2000	3 611	11 146	33 961	35 701	15 581
2010	8 930	14 032	38 788	26 779	11 471
2020	15 467	15 088	34 507	24 767	10 171

数据来源：第 2～7 次全国人口普查

从上面的统计表中，可以清楚地看出我国公民具有各类文化程度的人数及变化情况．

1982 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数分布的扇形统计图



数据来源：第 3 次全国人口普查

图 7－1

图 7－1 清楚地反映了 1982 年我国具有各类文化程度的人数在总人数中所占的百分比．

扇形统计图中，整个圆表示统计项目的总体，每一统计项目分别用圆中不同的扇形来表示，扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相同．

思考

在图 7 - 1 中，各统计项目占总体的百分比与相应扇形的圆心角（顶点在圆心的角）的大小有怎样的关系？

在扇形统计图中，扇形圆心角＝该统计项目占总体的百分比×360°.

尝试

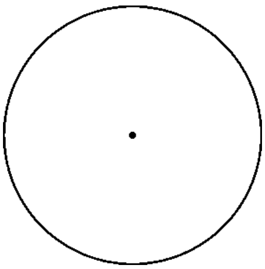
小明平均每天用于学习、睡眠、参加班级的各类活动、用餐及其他的时间如下：

项　目	时间/h	占全天时间的百分比（精确到 1%）	扇形的圆心角
学　习	8	$\frac{8}{24}\times100\%\approx33\%$	$360^\circ\times\frac{8}{24}=120^\circ$
睡　眠	9		
活　动	4		
用　餐	1		
其　他	2		
合　计	24		

（1）填写上面的统计表；

（2）根据统计表中的数据，用量角器在圆中画出各个扇形；

__________统计图



数据来源：__________

（3）在各个扇形上，标明相应名称和百分比；

（4）写出扇形统计图简明的标题，并注明数据来源 .

练习

1. 某市各类学校占该市学校总数的百分比如下：

幼儿园	小学	中学	高等院校	其他
40%	30%	20%	5%	5%

(1) 画扇形统计图表示表中的信息；

(2) 如果该市高等院校有 40 所，那么该市共有学校多少所？中学有多少所？

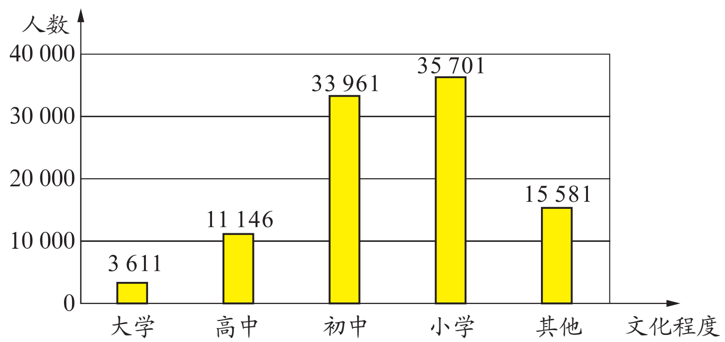
2. 根据下列统计表制作扇形统计图，表示各大洲陆地面积占地球陆地总面积的百分比.

世界七大洲陆地面积统计表

洲　名	面积/万平方千米	占地球陆地总面积的百分比（精确到 0.1%）
亚　洲	4 400	
非　洲	3 020	
北美洲	2 422.8	
南美洲	1 797	
南极洲	1 400	
欧　洲	1 016	
大洋洲	897	

条形统计图、扇形统计图、折线统计图可以把数据表示得非常直观.

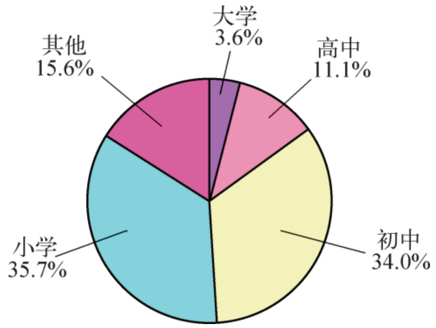
2000 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的条形统计图



数据来源：第 5 次全国人口普查

图 7－2

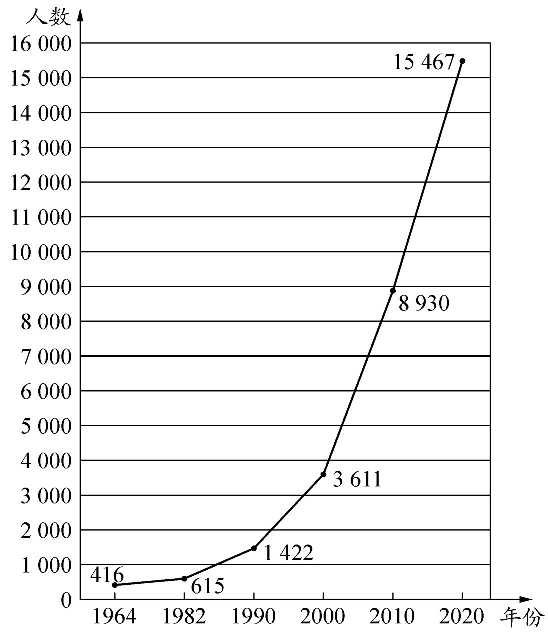
2000 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数分布的扇形统计图



数据来源：第 5 次全国人口普查

图 7 - 3

1964～2020 年我国每 10 万人中具有大学文化程度人数的折线统计图



数据来源：第 2～7 次全国人口普查

图 7 - 4

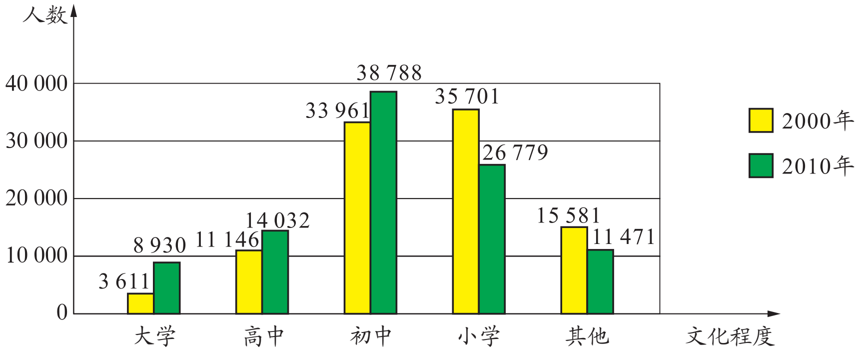
条形统计图、扇形统计图、折线统计图各有怎样的特点？

条形统计图用宽度相同的“条形”的高度描述各统计项目的数据；扇形统计图用圆中各扇形的面积描述各统计项目占总体的百分比；折线统计图用折线描述数据的变化过程和趋势.

在解决实际问题时，应根据实际需要选用合适的统计图.

我们还可以在同一个条形统计图中描述两组数据的变化情况．

2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的条形统计图



数据来源：第 5 次、第 6 次全国人口普查

图 7－5

从图 7－5 中，不仅可以看出 2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数变化情况，而且便于对这两组数据进行比较．

(1) 用同一个条形统计图描述 2010 年、2020 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数变化情况，并对这两组数据进行比较；

(2) 根据第 2～7 次全国人口普查的数据，用同一个折线统计图描述我国每 10 万人中具有大学、高中文化程度的人数的变化过程和趋势，并对这两组数据进行比较．

1. 用合适的统计图表示下列信息：

(1) 2000 年某市平均每人每月消费性支出中，食品占 40.6%，衣着占 12.2%，家庭设备用品及服务占7.0%，医疗保健占 5.9%，交通和通信占 8.7%，娱乐、教育、文化服务占 12.7%，居住占 8.6%，其他占 4.3%；

(2) 鸡、鸭、鹅、鸽子的孵化期分别为 21 天、30 天、30 天、16 天；

(3) 我国不同年份的国内生产总值如下：

年　份	1970	1980	1990	2000	2010	2020
国内生产总值/亿元	2 279.7	4 587.6	18 872.9	100 280.1	412 119.3	1 015 986.2

数据来源：中国国家统计局

2. 我国 2000～2004 年进出口额如下：

年　份	2000	2001	2002	2003	2004
出口额/亿美元	2 492	2 661	3 256	4 382	5 933
进口额/亿美元	2 251	2 436	2 952	4 128	5 612

数据来源：中国国家统计局

分别用同一个条形统计图和同一个折线统计图描述这两组数据，并进行比较．

用计算机画统计图

利用 Microsoft Office 软件中的 Excel（电子表格程序）可以方便地画统计图．

试以下面“小明某星期在校体育活动时间统计表”中的数据为例，用 Excel 工作表画出统计图．

小明某星期在校体育活动时间统计表（单位：min）

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
25	30	45	20	50

1. 打开计算机，在 Windows 桌面上点击屏幕左下角的“开始”菜单，在“程序”行，点击子菜单“Microsoft Office”中“Excel 2003”程序（图 1），启动电子表格程序打开工作簿（图 2）．

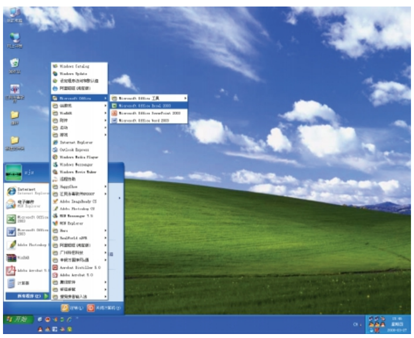


图 1

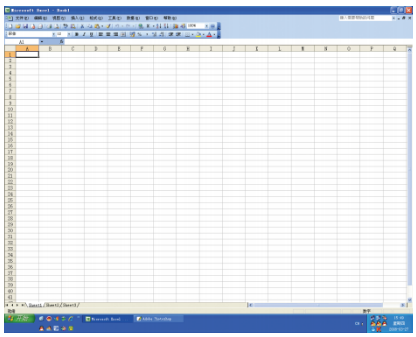


图 2

2. 在 Excel 工作表中，移动光标选择某一个单元格作为表格的起始单元格，输入小明某星期在校体育活动时间统计表及其中的所有数据（图 3）．

3. 拖动鼠标，选中输入表中的所有数据(如本例图中的C3到G4)，点击工作表第2行工具栏中的“图表向导”(或点击“插入”菜单打开“图表”对话框)，显示“图表向导”(图4).

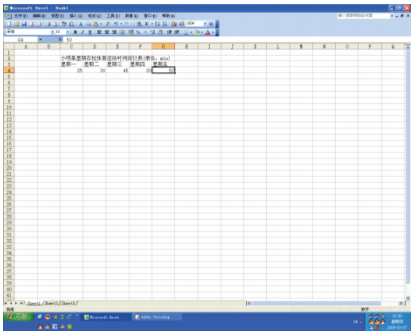


图3

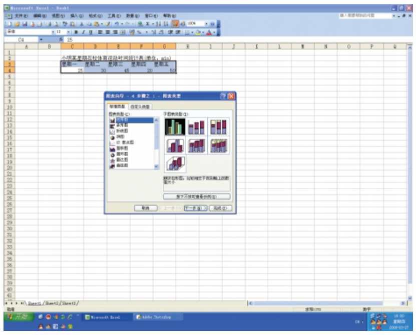


图4

4. 在“图表向导”左侧的“图表类型”中选择“饼图”、右侧的“子图表类型”中选择“饼图”，点击“下一步”按钮(图5).

5. 点击“下一步”，按照图表向导的提示和指引，在“图表标题”中输入标题“小明某星期在校体育活动时间统计表(单位：min)”(图6).

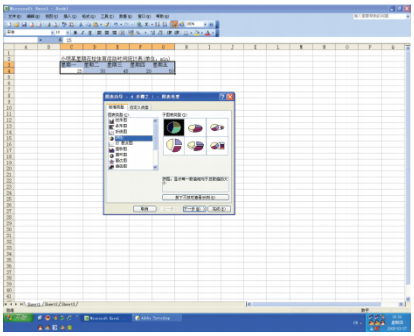


图5

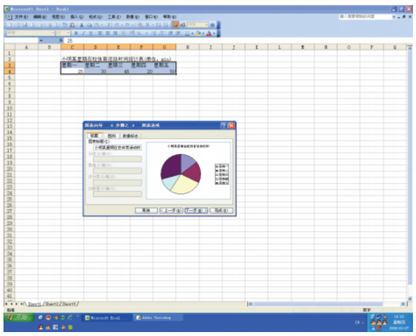


图6

6. 点击“完成”按钮，则所画的扇形统计图出现在电子表格的工作表中，移动光标到表格的空白单元格位置，如单元格P24，点击鼠标左键，即可把所画统计图在工作表中的位置确定下来(图7).

7. 把光标移动到饼图的某一色块上，如黄色，这时会出现与该色块对应的数据和解释(图 8)．

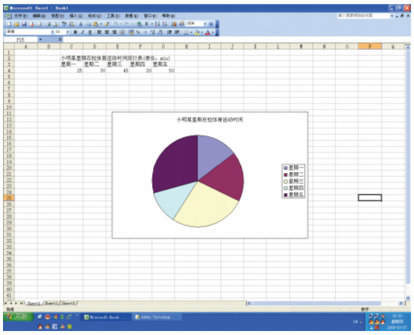


图 7

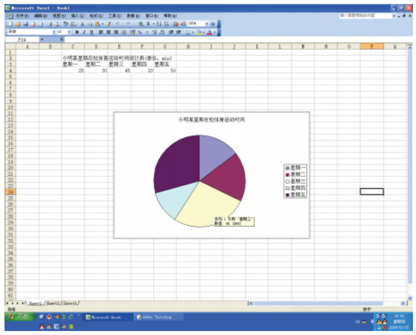
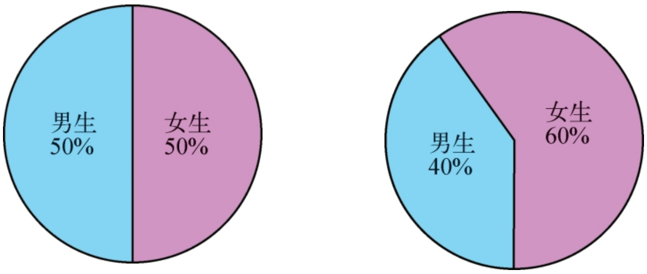


图 8

试按以上示范步骤，画出小明某星期在校体育活动时间的条形统计图和折线统计图．

7.2 习题

1. 根据下列两个扇形统计图，能否判断哪一所学校的男生人数多？为什么？



A 校　　B 校

（第 1 题）

2. 用扇形统计图表示下列信息：

（1）全班 48 名同学中，6 人最喜欢打篮球，18 人最喜欢打乒乓球，12 人最喜欢踢足球，12 人最喜欢打排球；

（2）全年级 384 名同学中，48 人最喜欢打篮球，144 人最喜欢打乒乓球，96 人最喜欢踢足球，96 人最喜欢打排球．

观察所画的扇形统计图，你发现了什么？

3. 用合适的统计图表示下列信息：

(1) 空气的成分(除去水汽、杂质等)是：氮气约占 78%，氧气约占 21%，其他微量气体(如氩气、氖气、氦气、二氧化碳等)约占 1%；

(2) 某中学有 1 500 名学生，他们去学校的方式为：步行 300 人，骑自行车 950 人，乘公共汽车 200 人，其他 50 人；

(3) 2003～2007 年我国粮食产量如下：

年　份	2003	2004	2005	2006	2007
粮食产量/万吨	43 070	46 947	48 402	49 804	50 414

数据来源：中国国家统计局

4. 在 2008 年北京奥运会上，我国体育健儿取得了辉煌的成绩．

2008 年北京奥运会金牌榜

国　家	中国	美国	俄罗斯	英国	德国	澳大利亚	其他
金牌数/枚	51	36	23	19	16	14	143

分别画出上述国家和地区在 2008 年北京奥运会上所获金牌数的条形统计图和扇形统计图(所计算的百分数精确到 0.1%)．

5. 两支篮球队进行 4 场对抗赛的结果如下(单位：分)：

场次 得分 球队	第 1 场	第 2 场	第 3 场	第 4 场
球队 1	66	72	88	90
球队 2	95	90	89	80

(1) 你认为用哪种统计图反映这两支篮球队 4 场对抗赛的结果比较合适？画出你选用的统计图；

(2) 你是怎样评价这两支球队的？如果再进行一场比赛，你预测结果会如何？

7.3　频数和频率

数学实验室

为了增强环保意识，学校规定每个班级选举 1 名学生当“环保卫士”．八年级(1)班有 4 名学生参加竞选，由全班学生投票选出“环保卫士”，办法如下：

（1）每人在选票上写 1 名自己认为最合适的候选人姓名，并将选票投入票箱；

（2）由全班推选的 3 位同学分别唱票、监票、记录；

（3）填写表格，得票最多的学生当选“环保卫士”．

候选人	唱票记录	得票数	得票率

在统计数据时，各个对象出现的次数有多有少，或者说出现的频繁程度不同，某个对象出现的次数称为该对象的**频数**(absolute frequency)，频数与总次数的比值称为**频率**(relative frequency)．

例如，在选举“环保卫士”活动中，每名候选人的得票数是该候选人得票的频数；每名候选人的得票率是该候选人得票的频率．

尝试

国家环保总局公布的 47 个重点城市某日的空气质量如下：

城市	郑州	武汉	长沙	广州	深圳	珠海	汕头	湛江	南宁	桂林	北海
污染指数	85	99	107	119	94	78	67	51	111	52	62

海口	成都	重庆	贵阳	昆明	拉萨	西安	兰州	西宁	银川	乌鲁木齐	北京
49	114	174	96	74	76	128	128	97	65	205	64

天津	石家庄	秦皇岛	太原	呼和浩特	沈阳	大连	长春	哈尔滨	上海	南京
81	98	73	125	124	138	68	90	98	86	74

苏州	南通	连云港	杭州	宁波	温州	合肥	福州	厦门	南昌	济南	青岛	烟台
89	79	71	92	80	82	81	79	66	101	93	73	53

国家环保总局规定：空气污染指数 1～50 为Ⅰ级，51～100 为Ⅱ级，101～200 为Ⅲ级，201～300 为Ⅳ级．请按城市空气质量级别填表，并用合适的统计图表示．

空气污染指数	Ⅰ级	Ⅱ级	Ⅲ级	Ⅳ级
划　记				
频　数				
频　率（精确到 0.001）				

练习

1. 国际奥委会确定奥运会举办城市的投票规则是：参与投票的国际奥委会委员每轮投票只能选择候选城市中的一个城市；投票后，只要某个申办城市获得超过 50% 的选票，即被确定为举办城市；如果没有一个城市得到超过 50% 的选票，那么进行第二轮投票……在多轮投票的情况下，每一轮淘汰一个得票最少的城市，直到最终确定一个举办城市．

   国际奥委会于 2001 年 7 月 13 日在莫斯科举行会议，通过投票确定 2008 年奥运会举办城市．在第 2 轮投票中，北京获得总计 105 张选票中的 56 票，得票率超过 50%，取得了 2008 年奥运会举办权．在第 2 轮投票中，北京得票的频数是多少？频率是多少（精确到0.001）？

2. 从全班学生中抽取 20 名学生，测量了他们 800 m 赛跑后 1 min的脉搏次数，结果如下（单位：次）：

   144　150　156　165　141　149　162　160　135　159
   150　164　168　153　158　142　161　157　154　147

填写表格：

脉搏次数 x（次/分）	$130\leqslant x<140$	$140\leqslant x<150$	$150\leqslant x<160$	$160\leqslant x<170$
划　记				
频　数				
频　率				

7.3 习题

1. 某射手在一次射击训练中，共射了 40 发子弹，结果如下（单位：环）：

8	7	7	8	9	8	7	7	7	8
8	9	7	8	8	8	9	8	9	8
10	9	9	8	9	8	10	10	9	8
8	9	9	10	9	9	10	10	9	9

填写表格：

环　数	7	8	9	10
频　数				
频　率				

2. 小丽调查了全班 50 名同学的身高，结果如下（单位：cm）：

141	154	149	154	162	165	168	150	155	163
144	168	150	157	155	171	155	160	145	163
145	155	152	160	148	145	169	152	160	163
158	157	159	160	168	150	157	152	158	155
157	157	159	162	145	150	158	144	155	172

填写表格：

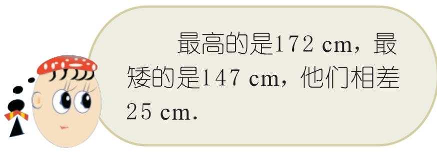
身高/cm	145.5 以下	145.5～150.5	150.5～155.5	155.5～160.5	160.5～165.5	165.5～170.5	170.5 以上
频　数							
频　率							

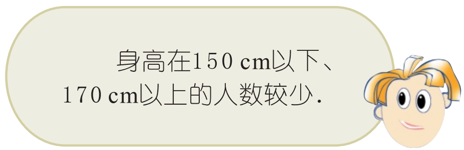
7.4 频数分布表和频数分布直方图

某校为了解八年级学生身高的范围和整体分布情况，抽样调查了八年级 50 名学生的身高，结果如下(单位：cm)：

150	148	159	156	157	163	156	164	156	159
169	163	170	162	163	164	155	162	153	155
160	165	160	161	166	159	161	157	155	167
162	165	159	147	163	172	156	165	157	164
152	156	153	164	165	162	167	151	161	162

怎样描述这 50 名学生身高的分布情况？





这 50 个数据中，最小值是 147，最大值是 172，它们相差25．由此可知，这 50 个数据分布在 147～172 的范围内．

为了更精确地描述这些数据的整体分布情况，我们采用如下的方法：

首先，把这些数据分成若干组．例如，把相差不超过 3 的数据分为一组，$\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$，于是把这些数据分为 9 组，组距为 3．为使每个数据都能分到某一组内，我们取比“147”小其末位半个单位的数，即 146.5 作为分组的最小值，这样分成的 9 组为：

146.5～149.5　　149.5～152.5　　152.5～155.5

155.5～158.5　　158.5～161.5　　161.5～164.5

164.5～167.5　　167.5～170.5　　170.5～173.5

其次，把这 50 个数据分别“划记”到相应的组中，统计每组中相

应数据出现的频数(如下表)：

身高分组	划　记	频　数
146.5～149.5	丅	2
149.5～152.5	下	3
152.5～155.5	正	5
155.5～158.5	正下	8
158.5～161.5	正正	9
161.5～164.5	正正下	13
164.5～167.5	正丅	7
167.5～170.5	丅	2
170.5～173.5	一	1
合　计		50

像这样的表格称为**频数分布表**(frequency distribution table)．

最后，根据频数分布表，用横轴表示各分组数据，用纵轴表示各组数据的频数，绘制条形统计图(如图7-6)．

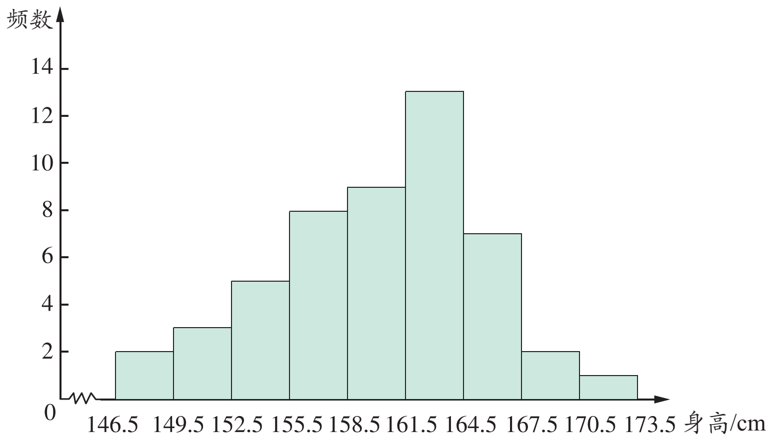


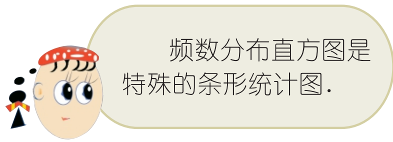
图 7－6

像图 7－6 这样的条形统计图，直观地呈现了频数的分布特征和变化规律，称为**频数分布直方图**(frequency distribution histogram)．

根据上面的频数分布表、频数分布直方图，你能对该校八年级学生身高的整体分布情况做出怎样的估计?

交流

条形统计图、频数分布直方图，能从不同的角度直观、形象地描述数据．试比较它们各自的特点，并与同学交流．



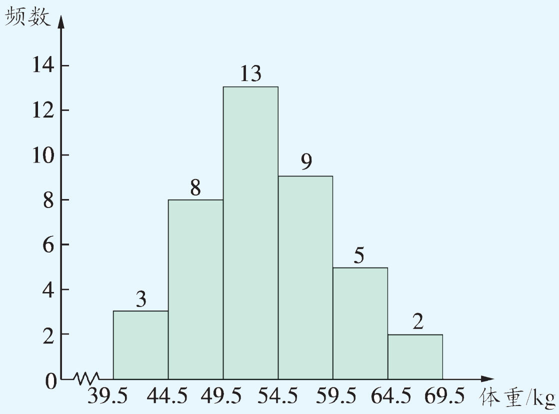
在条形统计图中，横轴表示考察对象的类别，纵轴表示各类对象的数量．在频数分布直方图中，横轴表示考察对象数据的变化范围，纵轴表示相应范围内数据的频数．

练习

1. 根据某班 40 名学生体重的频数分布直方图，回答下列问题：

   (1) 体重在哪个范围内的人数最多？

   (2) 体重超过 59.5 kg 的学生占全班学生的百分之几？



（第 1 题）

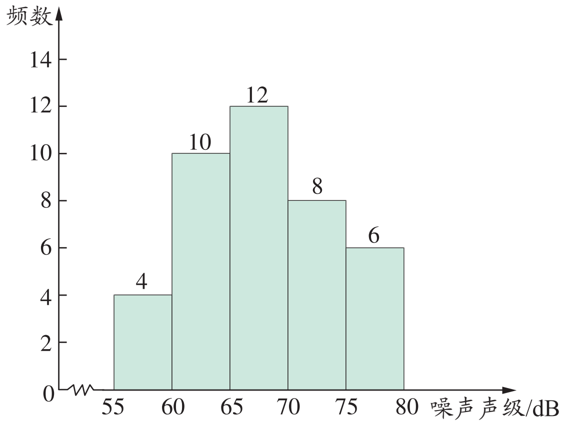
2. 100 个数据的分组及各组的频数如下：

数据分组	59.5～61.5	61.5～63.5	63.5～65.5	65.5～67.5	67.5～69.5	69.5～71.5	71.5～73.5	73.5～75.5	75.5～77.5	77.5～79.5
频数	2	5	9	15	21	19	13	9	5	2

画出这组数据的频数分布直方图.

7.4
习题

1. 为了调查某市噪声污染情况，该市环保局抽样调查了 40 个噪声测量点的噪声声级，结果如下（每组含起点值，不含终点值）：



（第 1 题）

（1）在噪声最高的测量点，其噪声声级在哪个范围？

（2）噪声声级低于 65 dB 的测量点有多少个？

2. 为了研究 400 m 赛跑后学生心率的分布情况，测量了全班 45 名学生赛跑后 1 min 的脉搏次数，结果如下：

132	136	138	141	143	144	144	146	146	147	148	149
149	151	151	152	153	153	154	154	154	156	156	157
157	157	158	158	158	159	159	161	161	162	162	163
163	164	164	164	164	166	168	159	159			

（1）按组距为 5 将上述数据分组，并列出频数分布表，绘制频数分布直方图；

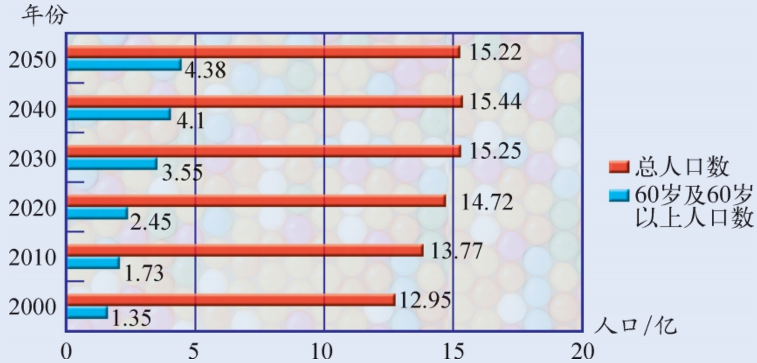
（2）根据频数分布表、频数分布直方图，你能获得哪些信息？

阅读

学会读统计图

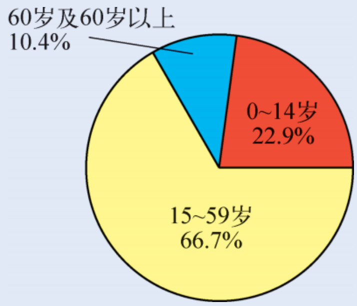
人们在日常生活中经常看到各种统计图，我们要学会从“图”中获取有价值的信息．例如，图(1)、图(2)是某家媒体公布的中国人口发展情况预测图和2000年中国人口年龄结构扇形统计图，你能从中获得哪些信息？你能根据这些信息描述中国人口的变化情况吗？

中国人口发展情况预测图



图(1)

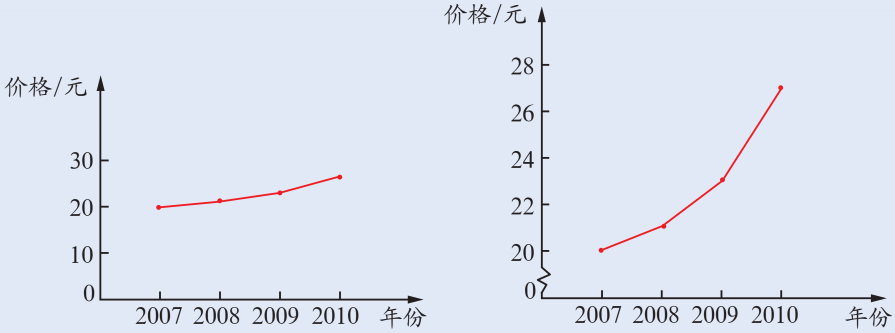
2000年中国人口年龄结构扇形统计图



图(2)

我们还要学会分析数据信息．例如，图(3)中的两幅折线统计图表示的是同一个公司股票价格的变化情况，由于选取的单位长度不同，给人以增长幅度差异很大的误导．

年　份	2007	2008	2009	2010
股票最高价格/元	20	21	23	27



图(3)

因此，生活中，我们不仅要能从数据、图表中获取尽可能多的信息，而且要能对数据的来源、描述数据的方法、得出的结论等进行合理的分析．

数学活动

丢弃了多少塑料袋

在我们丢弃的塑料袋中，有些即使经过几十年也不会被分解成无害物质，因此大量的塑料袋垃圾会造成环境污染．

1．记录自己家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量．

2．设计一个调查问卷，调查全班每个同学的家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量，并根据收集的数据制作统计图．

3．全班同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋数量有多少？全校同学的家庭呢？

4．如果将全班同学的家庭 1 周内丢弃的塑料袋铺开，大约占多大面积？1 年呢？

如果将全校同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋铺开，大约占多大面积？

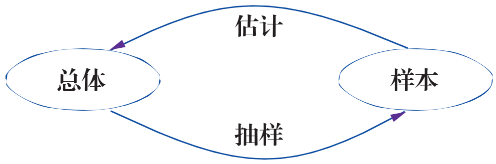
小结与思考

1. 数据可以帮助我们了解世界，收集、整理、描述数据可以使我们获取更多的信息，有助于研究、解决问题．其过程如下：

$\boxed{\text{提出问题}}$——$\boxed{\text{收集数据}}$——$\boxed{\text{整理、描述数据}}$

2. 调查有普查和抽样调查两种方式．普查通过调查总体中每个个体来收集数据，抽样调查通过调查样本中每个个体来收集数据．普查和抽样调查的优、缺点各是什么？

3. 在统计里，我们通常从总体中抽取样本，并根据样本的某种特性去估计总体的相应特性：



为了使对总体特性的估计、推断更加准确，抽样时要注意样本的代表性．

4. 利用统计图表对收集到的数据加以整理、描述，可以使我们了解数据的整体分布情况．常见的统计图表有哪些？它们各有什么特点？

5. 频数是指统计数据时，某个对象出现的次数或落在某个组别中的数据的个数；频率是指频数与总次数（数据总数）的比值．我们把各个组别中相应的频数分布用表格的形式表示出来就得到频数分布表．根据频数分布表绘制成的条形统计图称为频数分布直方图，它直观地呈现了频数的整体分布情况．

6. 统计与生活息息相关，打开报纸、杂志或互联网常常会看到一些统计图表．选择一些统计图表，对其中的数据来源、描述数据的方法、得出的结论等进行分析．

复习题

复习巩固

1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．

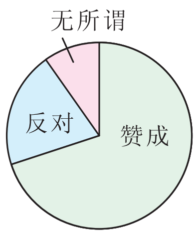
（1）夏季冷饮市场上冰淇淋的质量；

（2）某本书中的印刷错误；

（3）对学校建立英语角的看法；

（4）公民保护环境的意识．

2. 为了鼓励学生课外阅读，学校公布了“阅读奖励”方案，征求了所有学生的意见，赞成、反对、无所谓三种意见的人数之比为 7∶2∶1，并画出扇形统计图．

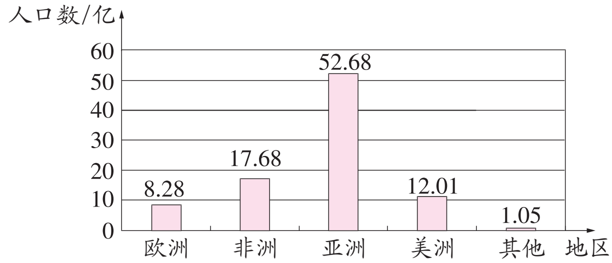


（第 2 题）

(1) 如果持反对意见的有 240 人，那么这个学校共有多少名学生?

(2) 求图中各个扇形的圆心角的度数．

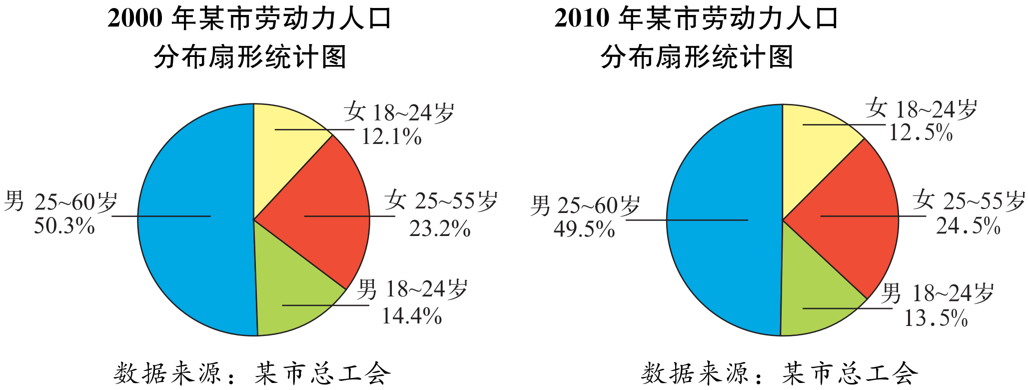
3. 预测 2050 年世界人口数的条形统计图如下：



(第 3 题)

根据图中的数据绘制扇形统计图，并比较扇形统计图与条形统计图的区别．

4. 某市 2000 年有劳动力 2 400 000 人，2010 年有劳动力 2 800 000 人．该市 2000 年和 2010 年劳动力人口分布情况如图：



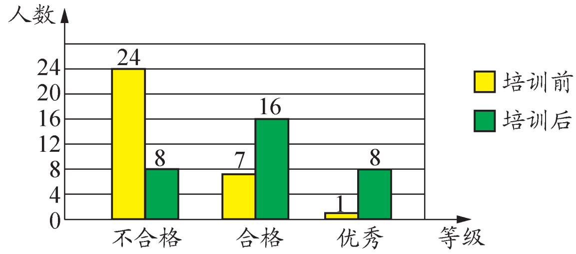
(第 4 题)

(1) 该市 2010 年劳动力人口比 2000 年增加了百分之几?

(2) 该市 2000 年和 2010 年男性劳动力人口各占百分之几?

(3) 该市 2010 年男性劳动力人口比 2000 年增加了多少? 该市男性劳动力人口的百分数也增加了吗?

5. 某校八年级 640 名学生在“计算机应用”培训前、后各参加了一次水平相同的测试，并以同一标准分成“不合格”、“合格”、“优秀”3 个等级．为了解培训效果，用抽样调查的方式从中抽取 32 名学生的 2 次测试等级，并绘制成条形统计图：



（第 5 题）

（1）这 32 名学生经过培训，测试等级“不合格”的百分比比培训前减少了多少？

（2）估计该校八年级学生中，培训前、后测试等级为“合格”与“优秀”的学生各有多少名？

6. 小明统计了他家 5 月份打电话的次数及通话时间，并列出频数分布表：

通话时间 x/min	频数（通话次数）
$0<x\leqslant 5$	24
$5<x\leqslant 10$	16
$10<x\leqslant 15$	8
$15<x\leqslant 20$	10
$20<x\leqslant 25$	16

（1）小明家 5 月份一共打了多少次电话？

（2）求通话时间不超过 15 min 的频数和频率．

7. 据报道：2011 年中国科学院新增院士 51 名．其中，年龄最大的 75 岁，最小的 41 岁，平均年龄 52.69 岁，60 岁（含 60 岁）以下 50 岁以上 14 人，50 岁（含 50 岁）以下 29 人．

（1）填写表中的空格：

年龄/岁	60 岁以上	50～60 岁（含 60 岁）	50 岁以下（含 50 岁）
院士人数			
百分比（精确到 0.1%）			

（2）你认为用哪种统计图反映新增院士的年龄分布情况比较合适？画出你选用的统计图．

8. 小明在某长途汽车站抽样调查了部分旅客的等车时间，并列出频数分布表如下：

等车时间 t/min	$0<t\leqslant5$	$5<t\leqslant10$	$10<t\leqslant15$	$15<t\leqslant20$	$20<t\leqslant25$	$25<t\leqslant30$
频数	5	6	9	10	13	7

(1) 小明共抽样调查了多少名旅客？

(2) 绘制相应的频数分布直方图.

灵活运用

9. 农业科研人员在试验田里种植了新品种大麦，为了考察麦穗长度的分布情况，抽取了 100 个麦穗，量得长度如下(单位：cm)：

6.3	5.8	5.5	5.3	6.0	6.4	6.8	6.2	5.8	6.5
5.7	5.3	6.2	6.4	5.4	5.8	6.0	5.4	5.5	6.4
6.8	7.0	6.1	5.7	6.5	5.9	6.3	5.0	6.0	6.7
6.1	6.0	5.3	6.7	6.0	5.7	5.5	5.0	6.5	5.8
4.5	6.0	6.2	6.2	6.8	6.8	5.0	6.8	5.1	5.9
5.6	5.9	6.8	5.6	5.8	6.6	6.3	6.0	6.5	5.9
6.3	5.4	6.6	6.0	6.3	6.0	5.2	5.0	5.3	5.2
6.0	6.0	4.7	6.7	6.0	6.4	5.7	5.9	4.0	6.0
5.8	5.2	5.7	6.7	6.3	5.7	7.0	6.0	5.5	5.4
6.3	6.0	5.7	6.0	5.6	7.4	6.4	5.5	5.8	4.6

(1) 指出这次调查的总体、个体、样本和样本容量；

(2) 列出样本的频数分布表，绘制频数分布直方图；

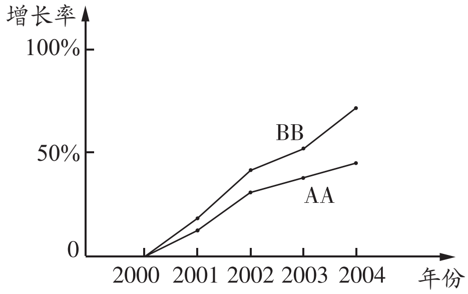
(3) 根据样本的频数分布表、频数分布直方图，你能获得哪些信息？对该品种大麦麦穗长度的分布情况做出怎样的估计？

10. 某人 1～6 月的收入和支出情况如下：

月份	1	2	3	4	5	6
收入/元	2 000	1 700	1 950	2 400	2 100	2 050
支出/元	1 400	1 250	1 100	1 650	1 500	1 350

分别用同一个条形统计图和同一个折线统计图描述这两组数据，并进行比较.

11. 两种品牌方便面销售增长率折线统计图如下：



（第 11 题）

（1）BB 牌方便面的销售量比 AA 牌多吗？为什么？你认为要做出这样的推断还需要什么信息？

（2）从折线统计图中你能获得哪些信息？

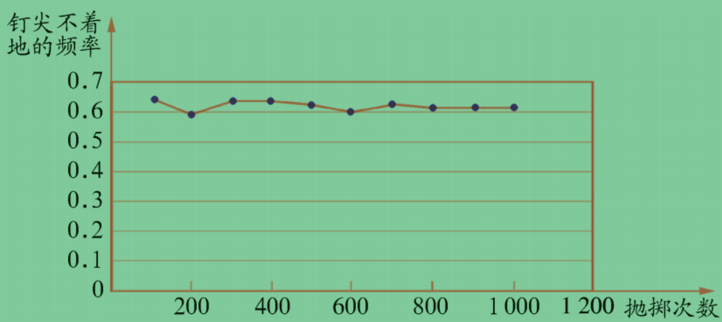
探索研究

12. （1）调查全班每位同学 1 min 的跳绳次数（3 人 1 组，1 人跳绳，1 人计时，1 人记录），然后全班汇总；

（2）将全班同学 1 min 的跳绳次数适当分组、整理，列出频数分布表，绘制频数分布直方图；

（3）分析全班同学 1 min 的跳绳次数的总体分布情况．

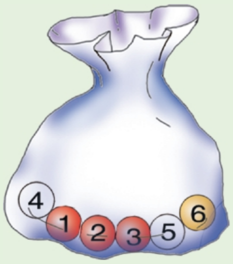
第8章　认识概率



事件发生的可能性有大有小．

概率度量事件发生可能性的大小．

如图，一只不透明的袋子中装有 3 个红球、2 个白球和 1 个黄球，这些球除颜色外都相同．



(1) 从袋子中任意摸出 1 个球，摸到的球可能是什么颜色？

(2) 从袋子中任意摸出 1 个球，摸到哪种颜色的球的可能性最大？

(3) 如果将每个球都编上号码，分别记为 1 号(红)、2 号(红)、3 号(红)、4 号(白)、5 号(白)、6 号(黄)，那么摸到 1～6 号球的可能性一样吗？

本章将研究事件发生的可能性大小，并通过大量重复试验，用事件发生的频率来估计概率．

8.1　确定事件与随机事件

在某次国际乒乓球单打比赛中，甲、乙两名中国选手进入最后决赛．

（1）该项比赛的冠军属于中国选手吗？

（2）该项比赛的冠军属于外国选手吗？

（3）该项比赛的冠军属于中国选手甲吗？

在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这样的事情是**不可能事件**（impossible event）．例如，“上述比赛中，冠军属于外国选手”以及“明天太阳从西方升起”等都是不可能事件．在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定会发生，这样的事情是**必然事件**（certain event）．例如，“上述比赛中，冠军属于中国选手”以及“抛出的篮球会下落”等都是必然事件．必然事件和不可能事件都是确定事件．

太阳从东方升起

抛掷硬币

在一定条件下，很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是**随机事件**（random event）．例如，“上述比赛中，冠军属于中国选手甲”以及“抛掷 1 枚质地均匀的硬币正面朝上”等都是随机事件．

交流

举出一些生活中的必然事件、不可能事件和随机事件.

练习

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：

(1) 没有水分，种子发芽；

(2) 367 人中至少有 2 人的生日相同；

(3) 小丽到达公共汽车站时，12 路公交车正在驶来；

(4) 打开电视，正在播广告；

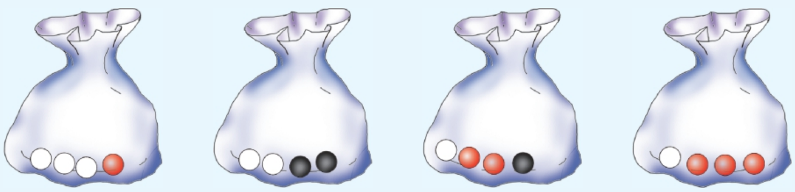
(5) 小明家买彩票将获得 500 万元大奖；

(6) 3 天内将下雨；

(7) 在某妇幼保健医院里，下一个出生的婴儿是女孩；

(8) 你最喜爱的篮球队将夺得 CBA 冠军.

2. 4 只不透明的袋子中都装有一些球，这些球除颜色外都相同，将球摇匀. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件，并说明理由.



① ② ③ ④

（第 2 题）

(1) 从第①只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；

(2) 从第②只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；

(3) 从第③只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；

(4) 从第④只袋子中任意摸出 1 个球，该球不是黑球；

(5) 从这 4 只袋子中各摸出 1 个球，其中有 2 个红球、1 个白球、1 个黑球.

8.1 习题

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：

(1) 在标准大气压下，温度低于 0 ℃时冰融化；

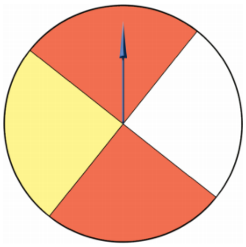
(2) 一只不透明的袋子中装有红球、白球、黑球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出的 1 个球是红球；

(3) 转动如图所示的转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)，当转盘停止转动时指针落在红色区域(若指针落在交界线上，则重转一次)；

(4) 一只不透明的袋子中装有 2 个红球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出 2 个球，其中有红球；

(5) 买一张电影票，座位号是奇数号；

(6) 在同一年出生的 13 名学生中，至少有 2 人出生在同一个月．



(第1(3)题)

(第2题)

2. 一枚质地均匀的骰子的 6 个面上分别刻有 1～6 的点数，抛掷这枚骰子：

(1) 向上一面的点数可能是 6 吗？可能是 0 或 8 吗？

(2) 向上一面可能出现哪些点数？能事先确定出现哪一种结果吗？

8.2 可能性的大小

数学实验室

1. 如图 8－1，质地均匀的小立方体的 2 个面上标有数字 1，4 个面上标有数字 2.

(1) 抛掷这个小立方体 1 次，猜想“向上一面的数字为 1”与“向上一面的数字为 2”这两个事件中，哪一个发生的可能性大?

(2) 全班同学每人抛掷这个小立方体 1 次，记录向上一面的数字，并将试验结果填入下表：

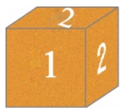


图 8－1

试验结果	划　记	频　数	频　率
向上一面的数字为 1			
向上一面的数字为 2			

(3) 你做出的猜想与试验结果一致吗?

2. 转动如图 8－2 的转盘(转盘中各个扇形的面积都相等).

(1) 猜一猜，当转盘停止转动时指针落在哪种颜色区域的可能性最大? 落在哪种颜色区域的可能性最小?

(2) 全班同学每人转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，记录指针所落区域的颜色，并将试验结果填入下表：

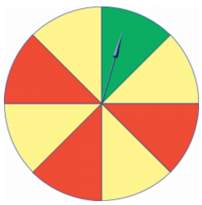


图 8－2

试验结果	划　记	频　数	频　率
指针落在红色区域			
指针落在黄色区域			
指针落在绿色区域			

(3) 你做出的猜想与试验结果一致吗?

在上面的抛掷质地均匀小立方体的试验中，“向上一面的数字为 1”与“向上一面的数字为 2”都是随机事件. 由于小立方体上标有数字 1 或 2 的面数不等，所以“向上一面的数字为 1”与“向上一面的

数字为 2”发生的可能性是不一样的．

在上面的转动转盘的试验中，当转盘停止转动时，指针落在不同颜色区域是随机的．由于不同颜色区域的面积不等，所以指针落在不同颜色区域的可能性也不一样．

一般地，随机事件发生的可能性有大有小．

如图 8－3，5 只不透明的袋子中各装有 10 个球，这些球除颜色外都相同．

（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

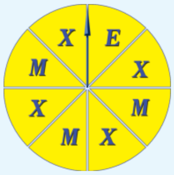
图 8－3

（1）将球搅匀，分别从每只袋子中任意摸出 1 个球，摸到白球的可能性一样大吗？为什么？

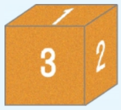
（2）将袋子的序号按摸到白球的可能性从小到大的顺序排列．

1. 估计下列事件发生的可能性的大小，将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列：
   （1）一只不透明的袋子中装有 1 个红球和 2 个黄球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出的 1 个球是白球；
   （2）抛掷 1 枚质地均匀的骰子，向上一面的点数是偶数；
   （3）随意调查商场中的 1 位顾客，他是闰年出生的；
   （4）随意调查 1 位青年，他接受过九年制义务教育；
   （5）在地面上抛掷 1 个小石块，石块会下落．
2. （1）转动如图①的转盘（转盘中各个扇形的面积都相等），当转盘停止转动时，指针落在标有字母的区域有哪几种不同的结果？哪种结果出现的可能性最大？

(2) 如图②，质地均匀的小立方体的 3 个面上标有数字 3，2 个面上标有数字 2，1 个面上标有数字 1．抛掷这个小立方体，向上一面的数字有哪几种不同的结果？哪种结果出现的可能性最大？



①



②

（第 2 题）

8.2 习题

1. 从一副扑克牌中任意抽取 1 张．

(1) 这张牌是“A”；

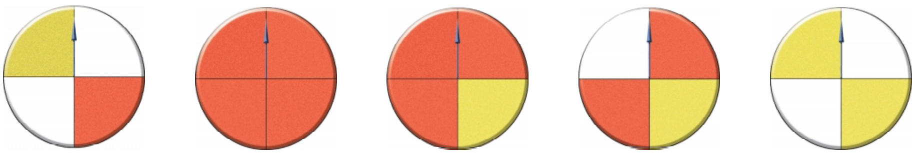
(2) 这张牌是“红心”；

(3) 这张牌是“大王”；

(4) 这张牌是“红色的”．

估计上述事件发生的可能性的大小，将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列．

2. 转动如图所示的各个转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)，当转盘停止转动时，估计“指针落在红色区域”的可能性的大小，并将转盘的序号按事件发生的可能性从小到大的顺序排列．



① ② ③ ④ ⑤

（第 2 题）

8.3　频率与概率

飞机失事会给旅客造成意外伤害．一家保险公司要为购买机票的旅客进行保险，应该向旅客收取多少保险费呢？为此，保险公司必须计算飞机失事的可能性有多大．

日常生活中也有许多类似这样的问题，例如：

明天下雨的可能性有多大？

买一张彩票中奖的可能性有多大？

抛掷 1 枚质地均匀的硬币，正面朝上的可能性有多大？

从装有若干个彩球（这些球除颜色外都相同）的袋子中，任意摸出的 1 个球是红球的可能性有多大？

抛掷 1 枚质地均匀的骰子，向上一面的点数是 6 的可能性有多大？

⋮

随机事件发生的可能性有大有小．一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件发生的**概率（probability）**．如果用字母 A 表示一个事件，那么 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率．

通常规定，必然事件 A 发生的概率是 1，记作 $P(A)=1$；不可能事件 A 发生的概率是 0，记作 $P(A)=0$；随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是 0 和 1 之间的一个数．

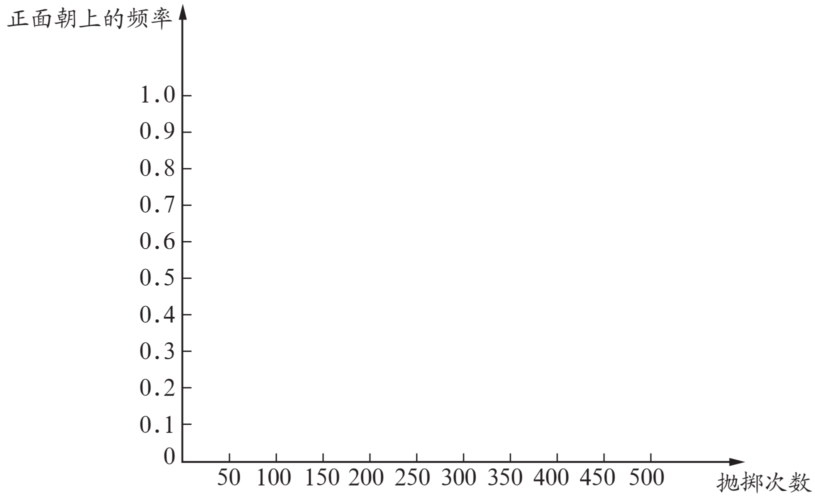
一个随机事件发生的概率是由这个随机事件自身决定的，并且是客观存在的．概率是随机事件自身的属性，它反映这个随机事件发生的可能性大小．

做“抛掷质地均匀的硬币试验”，每人 10 次．

（1）分别汇总 5 人、10 人、15 人……的试验结果，并将获得的数据填入下表：

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	…
正面朝上的频数 m											
正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

（2）根据上表，画出折线统计图：



（3）观察所画的折线统计图，你发现了什么？与同学交流．

下面是小明和同学做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据及绘制的折线统计图．

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
正面朝上的频数 m	20	53	70	98	115	156	169	202	219	244
正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$	0.40	0.53	0.47	0.49	0.46	0.52	0.48	0.51	0.49	0.49

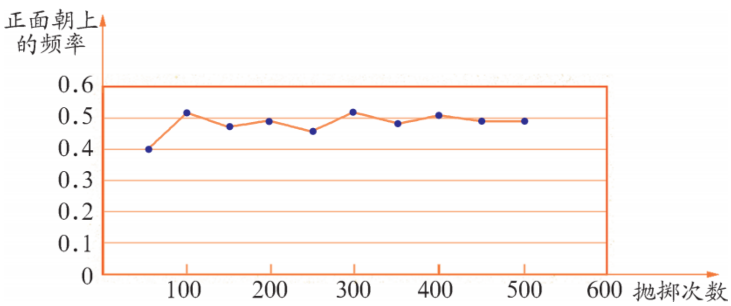


表 1 是自 18 世纪以来一些统计学家做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据．

表 1 统计学家历次做“抛掷质地均匀的硬币试验”的结果

试验者	试验次数 n	正面朝上的频数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

从表 1 可以看出，当试验次数很大时，“正面朝上”的频率在 0.5 附近摆动.

探索

表 2 是某批足球质量检验获得的数据.

表 2 某批足球质量检验结果

抽取的足球数 n	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品的频数 m	46	93	192	472	953	1 902
优等品的频率 $\frac{m}{n}$						

(1) 填写表中的空格；

(2) 画出优等品频率的折线统计图；

(3) 当抽取的足球数很大时，你认为优等品的频率会在哪个常数附近摆动?

通常，在多次重复试验中，一个随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动，并且趋于稳定. 这个性质称为频率的稳定性.

练习

某地区从某年起几十年内的新生婴儿数及其中的男婴数如下：

时间范围	10 年内	20 年内	30 年内	40 年内	50 年内
新生婴儿数 n	55 440	96 070	135 200	171 900	211 030
男婴出生的频数 m	28 830	49 700	69 940	88 920	109 160
男婴出生的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）					

(1) 填写表中的空格；

(2) 画出男婴出生频率的折线统计图；

(3) 你认为该地区男婴出生的频率稳定吗？它会在哪个常数附近摆动？

数学实验室

在硬地上抛掷 1 枚图钉，通常会出现两种情况：

钉尖着地

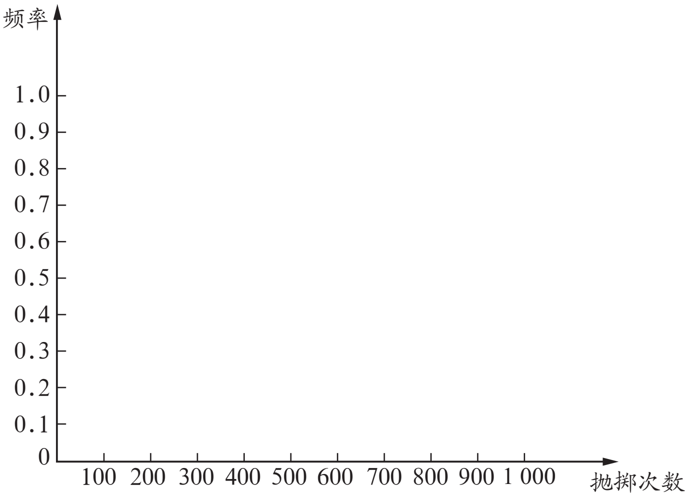
钉尖不着地

(1) 任意抛掷 1 枚图钉，你认为是“钉尖着地”的可能性大，还是“钉尖不着地”的可能性大？

(2) 做抛掷图钉试验，每人抛掷 1 枚图钉 20 次，分别汇总 5 人、10 人、15 人……的试验结果，并将获得的数据填入下表：

抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	…
钉尖不着地的频数 m											
钉尖不着地的频率 $\frac{m}{n}$											

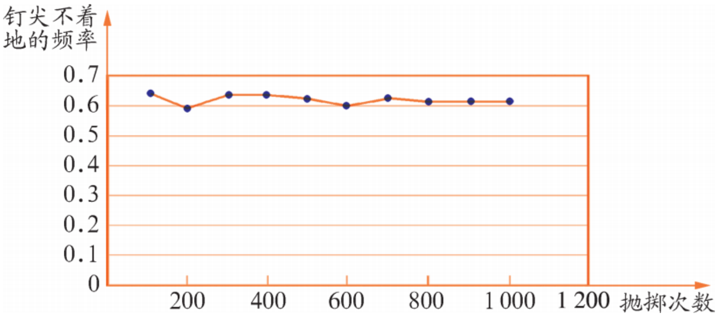
(3) 根据上表，画出折线统计图：



(4) 观察所画的折线统计图，你发现了什么？与同学交流．

下面是小明和同学做“抛掷图钉试验”获得的数据及绘制的折线统计图.

抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
钉尖不着地的频数 m	64	118	189	252	310	360	434	488	549	610
钉尖不着地的频率 $\frac{m}{n}$	0.64	0.59	0.63	0.63	0.62	0.60	0.62	0.61	0.61	0.61



从上表可以看出，当试验次数很大时，“钉尖不着地”的频率在 0.61 附近摆动.

一般地，在一定条件下大量重复进行同一试验时，随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动. 在实际生活中，人们常把这个常数作为该随机事件发生的概率的估计值. 例如，根据统计学家历次做“抛掷质地均匀的硬币试验”的结果，可以估计“正面朝上”的概率为 0.5；根据“某批足球质量检验”的结果，可以估计“从这批足球中，任意抽取的一只足球是优等品”的概率为 0.95；根据“抛掷图钉试验”的结果，可以估计“钉尖不着地”的概率为 0.61.

事实上，在抛掷硬币试验中，假设硬币的质地是均匀的，“正面朝上”与“反面朝上”出现的机会均等，试验的结果就具有等可能性；在抛掷图钉试验中，显然钉帽的质量较大，因而“钉尖着地”与“钉尖不着地”出现的机会不均等，试验的结果不具有等可能性.

某种绿豆在相同条件下发芽试验的结果如下：

每批粒数 n	2	5	10	50	100	500	1 000	1 500	2 000	3 000
发芽的频数 m	2	4	9	44	92	463	928	1 396	1 866	2 794
发芽的频率 $\frac{m}{n}$ (精确到 0.001)										

（1）填写表中的空格；

（2）画出这种绿豆发芽频率的折线统计图；

（3）这种绿豆发芽的概率的估计值是多少？

练习

某种油菜籽在相同条件下发芽试验的结果如下：

每批粒数 n	100	300	400	600	1 000	2 020	3 000
发芽的频数 m	96	283	380	571	948	1 912	2 848
发芽的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）							

（1）填写表中的空格；

（2）画出这种油菜籽发芽频率的折线统计图；

（3）这种油菜籽发芽的概率的估计值是多少？

8.3 习题

1. 某射手在相同条件下进行射击训练，结果如下：

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数 m	9	19	36	44	91	179	454	905
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$								

（1）填写表中的空格；

（2）画出该射手击中靶心频率的折线统计图；

（3）当射击次数很大时，你认为该射手击中靶心的频率稳定吗？它会在哪个常数附近摆动？

2. 某批篮球的质量检验结果如下：

抽取的篮球数 n	100	200	400	600	800	1 000	1 200
优等品的频数 m	93	192	380	561	752	941	1 128
优等品的频率 $\frac{m}{n}$							

（1）填写表中的空格；

（2）画出优等品频率的折线统计图；

（3）从这批篮球中，任意抽取的一只篮球是优等品的概率的估计值是多少？

阅读

概率小故事

概率主要研究不确定现象，是随着保险业的发展而产生的，但引起数学家思考概率问题的却是一个赌博的输赢问题．

传说，17 世纪中叶，法国贵族公子梅雷参加赌博，和赌友各押赌注 32 枚金币．双方约定：抛掷 1 枚质地均匀的硬币，正面朝上，梅雷得 1 分；反面朝上，赌友得 1 分，先积满 10 分者赢全部赌注．赌博进行了一段时间，梅雷已得 8 分，赌友得 7 分．这时，梅雷接到通知，要他马上陪国王接见外宾，赌局只好中断．于是，就产生了一个问题：应该怎样分配这 64 枚金币才算公平合理？梅雷为这个问题苦恼多时，最后不得不请求法国数学家帕斯卡帮助做出公正的裁判，这就是历史上著名的“分赌注”问题．

为了解决这类问题，人们对不确定现象进行了大量的研究，从而产生了概率论这门学科．人们在生产和生活实践中经常会遇到“某事件发生的可能性大小”的问题，概率论在实践中不断发展并得到了广泛的应用．

数学活动

摸球试验

一只不透明的袋子中装有 3 个白球和 1 个红球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出 1 个球，记录颜色后将球放回袋中并摇匀．

(1) 猜想：从袋子中任意摸出 1 个球，是“摸到白球”的可能性大，还是“摸到红球”的可能性大？“摸到白球”与“摸到红球”的概率各是多少？

(2) 做试验：每人摸球 30 次，把试验结果填入下表．

摸球次数	“摸到白球”的频数	“摸到红球”的频数
30		

(3) 汇总全班同学的试验结果，估计“摸到白球”与“摸到红球”的概率．

你做出的猜想与试验结果一致吗？

小结与思考

1. 必然事件和不可能事件都是确定事件．举例说明什么是不可能事件，什么是必然事件．

2. 在日常生活中，有很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是随机事件．随机事件发生的可能性有大有小．一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件发生的概率．列举生活中的一些随机事件，并指出这些事件发生的可能性哪个较大？哪个较小？

3. 通常，在多次重复试验中，一个随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动，并且趋于稳定，这个性质称为频率的稳定性．在实际生活中，人们常把这个常数作为该随机事件发生的概率的估计值．

4. 用频率估计一个随机事件发生的概率，通常要经历“试验并收集、整理、描述数据—计算频率—做出估计”的过程．应当注意，这里的“试验”，必须在相同条件下进行，并且试验的次数要足够多．

复习题

复习巩固

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：

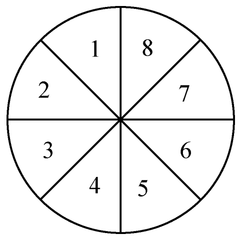
(1) 如果 a、b 都是实数，那么 $a+b=b+a$；

(2) 10 张相同的小标签分别标有数字 1～10，从中任意抽取 1 张，抽到 8 号签；

(3) 同时抛掷两枚质地均匀的骰子，向上一面的点数之和为 13；

(4) 射击 1 次，中靶．

2. 如图，转盘中 8 个扇形的面积都相等，任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，估计下列事件发生的可能性的大小，并将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列：



（第2题）

(1) 指针落在标有 5 的区域内；

(2) 指针落在标有 10 的区域内；

(3) 指针落在标有偶数或奇数的区域内；

(4) 指针落在标有奇数的区域内．

3. 甲、乙、丙三个事件发生的概率分别为 0.5、0.1、0.9．下面的三句话分别描述哪个事件？

(A) 发生的可能性很大，但不一定发生；

(B) 发生的可能性很小；

(C) 发生与不发生的可能性一样大．

4. 生活中，为了强调某件事情一定会发生，有人会说“这件事百分之二百会发生”．这句话正确吗？

5. 某批乒乓球的质量检验结果如下：

抽取的乒乓球数 n	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品的频数 m	48	95	188	471	946	1 426	1 898
优等品的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）							

(1) 填写表中的空格；

(2) 画出优等品频率的折线统计图；

(3) 从这批乒乓球中，任意抽取的一只乒乓球是优等品的概率的估计值是多少？

灵活运用

6. (1) 在一个小立方体的 6 个面上分别写上数字．抛掷这个小立方体，使“向上一面的数字为 1”比“向上一面的数字为 8”出现的可能性大；

(2) 设计一个转盘，使转盘停止转动时，“指针落在红色区域”与“指针落在白色区域”出现的可能性一样大．

7. 一只不透明的袋子中装有 1 个白球、2 个黄球和 3 个红球，这些球除颜色外都相同，将球摇匀，从中任意摸出 1 个球．

(1) 能事先确定摸到的这个球的颜色吗？

(2) 你认为摸到哪种颜色的球的概率最大？

(3) 怎样改变袋子中白球、黄球、红球的个数，使摸到这三种颜色的球的概率相等？

8. 通常，选择题有 4 个选择支，其中有且只有 1 个选择支是正确的．现有 20 道选择题，小明认为只要在每道题中任选 1 个选择支，就必有 5 题的选择结果是正确的．你认为小明的说法正确吗？说说你的理由．

探索研究

9. 与同伴合作，做抛掷 2 枚质地均匀的硬币的试验．

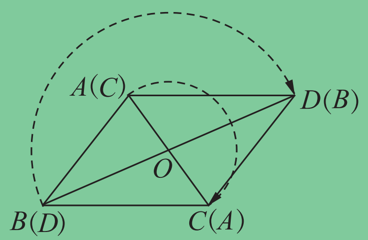
(1) 同时抛掷 2 枚质地均匀的硬币，记录试验结果并填表；

抛掷次数 n	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	500
2 枚硬币的正面都朝上的频数 m											
2 枚硬币的正面都朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

(2) 画出“2 枚硬币的正面都朝上”的频率的折线统计图；

(3) 估计“2 枚硬币的正面都朝上”的概率．

第9章 中心对称图形——平行四边形

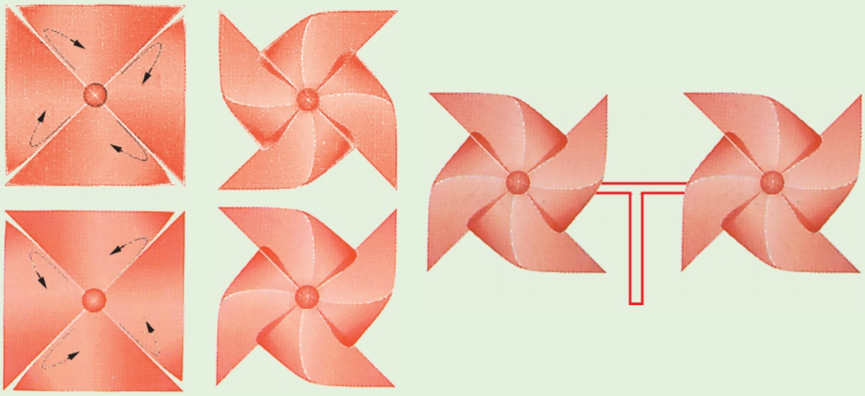


$OA=OC,OB=OD$

雪花、风车……展示着中心对称的美；
利用中心对称，可以探索并证明图形的性质.

香港特别行政区区旗中央的紫荆花图案由 5 个相同的花瓣组成．怎样改变其中一瓣的位置，使它先后与其余四瓣完全重合？

让我们一起来做风车．



本章将学习图形的旋转、中心对称图形及其性质，研究平行四边形、矩形、菱形、正方形等图形的性质和判定方法，探索三角形中位线的性质．

9.1　图形的旋转

上述情境中的旋转现象，生活中还有类似的例子吗？

将三角尺 ABC 绕点 C 按逆时针方向旋转到 DEC 的位置（图 9－1）.

$\angle ACD$ 与 $\angle BCE$ 相等吗？

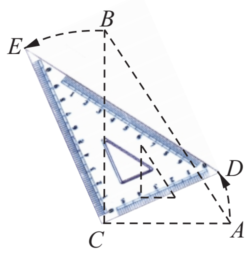


图 9－1

将图形绕一个定点转动一定的角度，这样的图形运动称为图形的**旋转**(circumgyration)．旋转不改变图形的形状、大小．

在图 9－1 中，点 A 绕点 C 旋转到点 D，点 C 称为旋转中心，点 A 与点 D 称为对应点，$\angle ACD$ 是旋转角．类似的，点 B 与点 E 是对应点，$\angle BCE$ 是旋转角．

如图 9－2，$\triangle ABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转到 $\triangle A'B'C'$ 的过程中，它的形状、大小没有改变．图 9－2 中还有哪些相等的线段、相等的角？

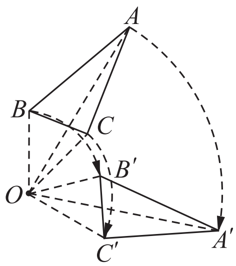
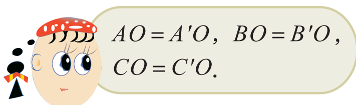
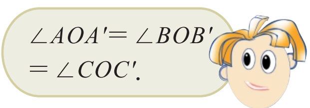


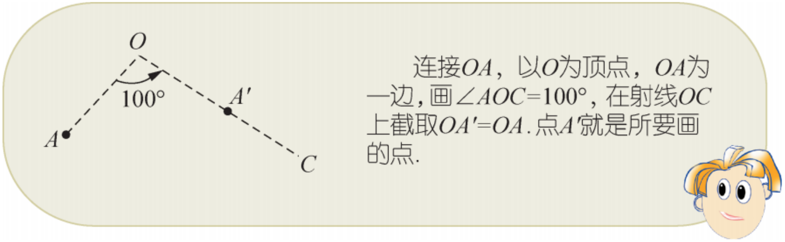
图 9－2



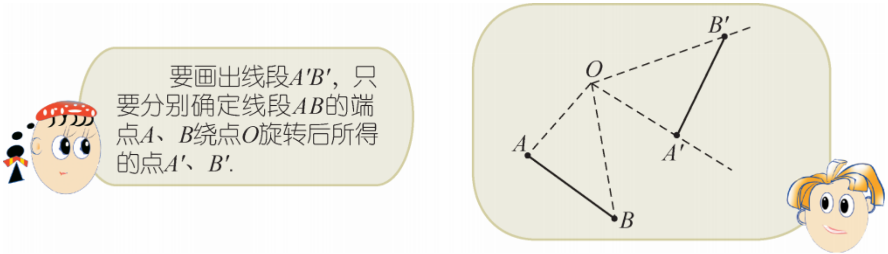


一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等．

1．画出点 A 绕点 O 按逆时针方向旋转 100°所得到的点 A'；



2．画出线段 AB 绕点 O 按逆时针方向旋转 100°所得到的线段 $A'B'$．



画一个图形绕一个点旋转后所得的图形，关键是确定某些点绕这个点旋转后所得到的对应点．

在图 9－3 中，画出将△ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转 120°后所得到的三角形．

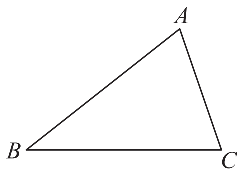
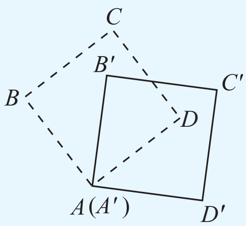


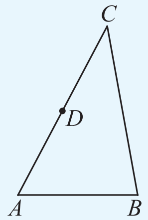
图 9－3

1．如图，正方形 $A'B'C'D'$ 是正方形 $ABCD$ 按顺时针方向旋转一定的角度而得到的．请指出图中的哪一点是旋转中心，并度量旋转角的度数．



（第 1 题）

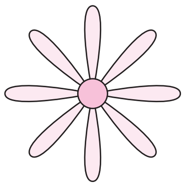
2. 如图，D 是 AC 的中点，画出 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90°$ 所得到的三角形，以及点 D 的对应点 D'.



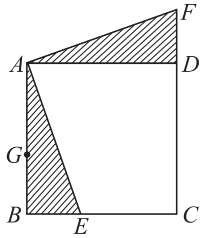
（第 2 题）

9.1 习题

1. 图中的菊花图案，绕旋转中心旋转多少度后能与原来的图案互相重合？

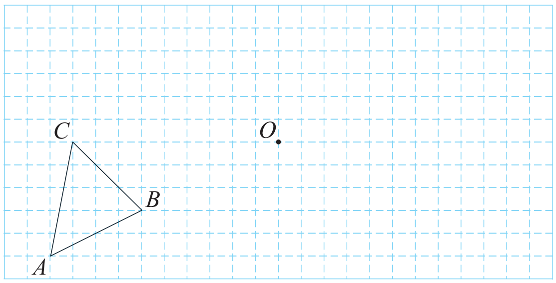


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、G 分别在 BC、AB 上，$\triangle ABE$ 经过旋转后得到 $\triangle ADF$.
（1）旋转中心是哪一点？
（2）旋转角为多少度？
（3）在图中画出点 G 的对应点 G'.
3. 按下列要求在方格纸中画图：
$\triangle ABC$ 向右平移 11 格所得到的 $\triangle A_1B_1C_1$；$\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$ 所得到的 $\triangle A_2B_2C_2$.



（第 3 题）

9.2 中心对称与中心对称图形

“双鱼”剪纸作品是由两个形状、大小完全相同的图案组成的，这两个图案的位置有怎样的特殊关系？怎样改变其中一个图案的位置，可以使它与另一个图案重合？

1. 用透明纸覆盖在图 9－4 上，描出四边形 $ABCD$.

2. 用大头针钉在点 O 处，把四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，你发现了什么？

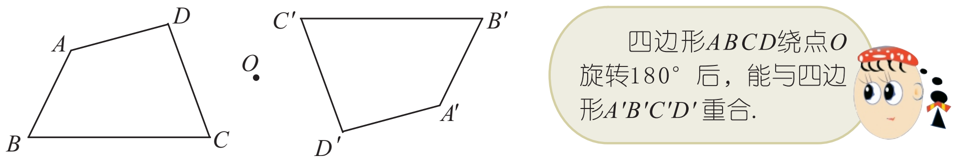


图 9－4

一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这点对称，也称这两个图形成**中心对称**(central symmetry)．这个点叫做**对称中心**(symmetric centre)．

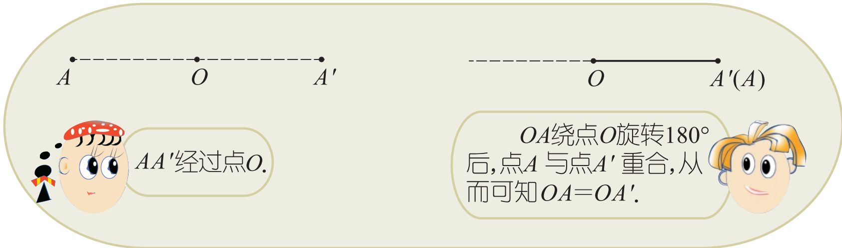
如图 9－4，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 关于点 O 对称，点 O 是对称中心．

一个图形绕着某一点旋转 180°是一种特殊的旋转，成中心对称的两个图形具有图形旋转的一切性质．

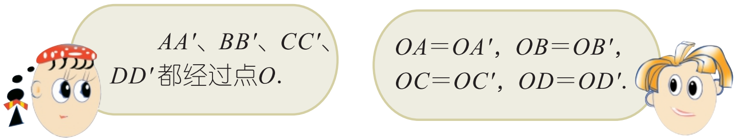
思考

1. 如图 9 – 5，点 A 与点 A' 关于点 O 对称．如果连接 AA'，你能发现什么？

图 9 – 5



2. 在图 9 – 4 中，分别连接 AA'、BB'、CC'、DD'，你发现了什么？

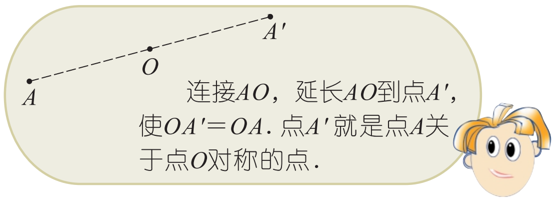


成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分．

操作

1. 在图 9 – 6 中，画点 A 关于点 O 对称的点．

图 9 – 6



2. 在图 9 – 7 中，画线段 AB 关于点 O 对称的线段．

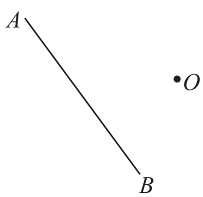


图 9 – 7

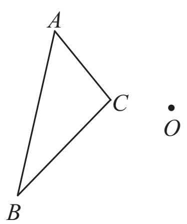


图 9 – 8

3. 在图 9 – 8 中，画△ABC 关于点 O 对称的三角形．

下列图案有什么共同特征?

(1)　　(2)　　(3)

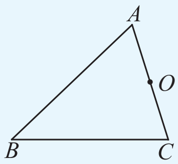
图 9-9

在日常生活中,你还见到过具有这种特征的图案吗?试举例说明.

把一个图形绕某一点旋转 180°,如果旋转后的图形能够与原来的图形互相重合,那么这个图形叫做**中心对称图形**(central symmetric figure).这个点就是它的对称中心.

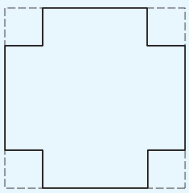
我们已经知道,轴对称与轴对称图形既有联系又有区别.类似的,中心对称与中心对称图形有怎样的联系和区别呢?

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,O 是 AC 的中点,画 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$.



(第 1 题)

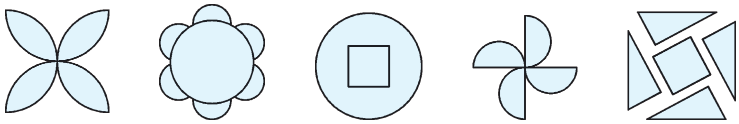
2. 线段是中心对称图形吗?如果是,说出它的对称中心.
3. 在正方形的 4 个角上剪去 4 个相同的小正方形(如图),剩余部分是中心对称图形吗?如果是,画出它的对称中心.



(第 3 题)

9.2 习题

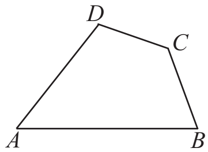
1. 下列图形中，哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？请画出它们的对称中心或对称轴．



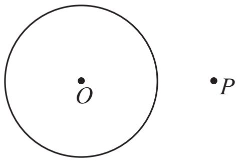
① ② ③ ④ ⑤

（第 1 题）

2. 按下列要求分别画出与四边形 $ABCD$ 成中心对称的四边形：
   （1）以顶点 A 为对称中心；
   （2）以 BC 的中点 O 为对称中心．

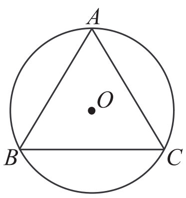


（第 2 题）

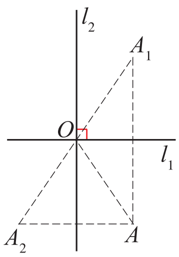


（第 3 题）

3. （1）圆是中心对称图形吗？如果是，说出它的对称中心；
   （2）如图，P 是圆 O 外的一个定点，画圆 O 关于点 P 对称的圆 O_1．
4. 如图，等边三角形 ABC 的 3 个顶点都在圆 O 上，这个图形是中心对称图形吗？如果是，指出它的对称中心；如果不是，试把它补成一个中心对称图形．



（第 4 题）



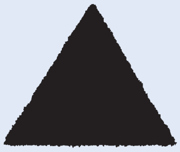
（第 5 题）

5. 如图，直线 $l_1 \perp l_2$，垂足为 O，点 A_1 与点 A 关于直线 l_1 对称，点 A_2 与点 A 关于直线 l_2 对称．点 A_1 与点 A_2 有怎样的对称关系？你能说明理由吗？

读一读

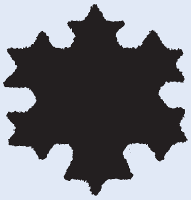
分形与中心对称图形

画 1 个等边三角形(如图(1)),将它的 3 条边三等分,各取中间的一段,并以此为边分别在原三角形外作 3 个小等边三角形,得图(2).同样地,分别将图(2)中 6 个小等边三角形的 2 条边三等分,并以中间的一段为边向形外分别作 12 个更小的等边三角形,得图(3).

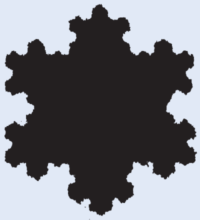


图(1)

图(2)



图(3)

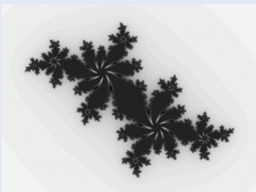


图(4)

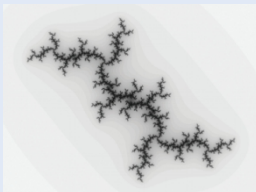
依照上述方法不断画下去,这个图形外缘曲线的构造越来越精细,好像一片理想的雪花(如图(4)),所以被称为雪花曲线.

像雪花曲线这样,局部与整体的形状相同的图形,数学家芒德勃罗(B. B. Mandelbrot)称之为“分形”(fractal).雪花曲线是分形中的中心对称图形.

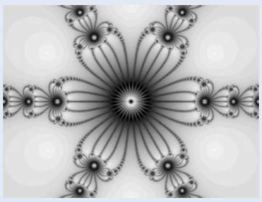
欣赏一组中心对称的分形图案.



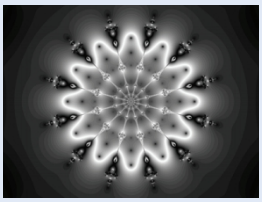
图(5) 稳定的固态型



图(6) 树枝状

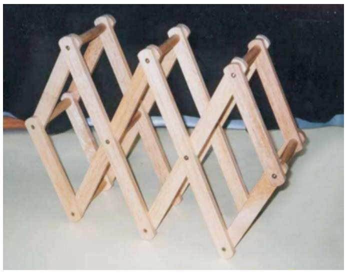


图(7) Newton 分形



图(8) Nova 分形

9.3　平行四边形



上面的图片中有你熟悉的图形吗?

两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**(parallelogram).

图 9－10 中的四边形 $ABCD$ 是平行四边形，记作“▱$ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

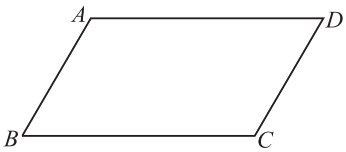


图 9－10

如图 9－11，O 是▱$ABCD$ 对角线 AC 的中点．用透明纸覆盖在图 9－11 上，描出▱$ABCD$，再用大头针钉在点 O 处，将透明纸上的▱$ABCD$ 旋转 180°．你有什么发现?

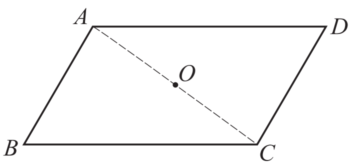
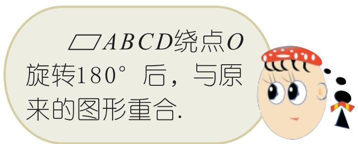


图 9－11



下面，我们来证实▱$ABCD$ 是中心对称图形.

把图 9－12（1）中的▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°：

因为 O 是 AC 的中点，所以点 A 与点 C 重合，点 C 与点 A 重合；

因为 $AB \parallel CD$，可知$\angle 1=\angle 2$，所以 AB 落在射线 CD 上；同样的，因为 $AD \parallel BC$，可知$\angle 3=\angle 4$，所以 CB 落在射线 AD 上．由两条直线相交只有一个交点，可知 AB 和 CB 的交点 B 与 CD 和 AD 的交点 D 重合．同理，点 D 与点 B 重合．

▱$ABCD$ 是中心对称图形．

连接 BD，因为点 B 与点 D 关于点 O 对称，所以 BD 经过点 O，且被点 O 平分(如图 9－12（2))．

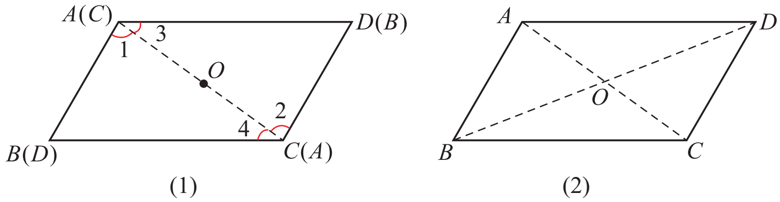
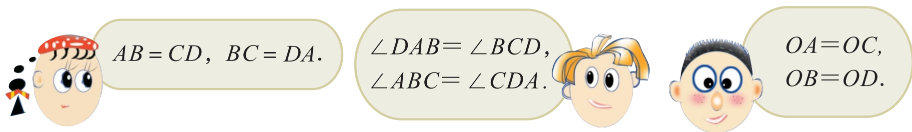


图 9－12

由此可知，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心．

从证实▱$ABCD$ 是中心对称图形的过程中，你发现平行四边形还有哪些性质？



于是，我们得到如下定理：

平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分．

例 1　已知：如图 9－13，点 A、B、C 分别在$\triangle EFD$ 的各边上，且 $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CA \parallel FD$.

求证：A、B、C 分别是$\triangle DEF$ 各边的中点．

证明： ∵ $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，

∴ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形)．

∴ $AE=BC$(平行四边形的对边相等)．

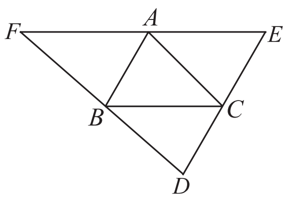


图 9－13

∵ $CA \parallel FD$，$BC \parallel EF$，

∴ 四边形 $AFBC$ 是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形).

∴ $AF = BC$(平行四边形的对边相等).

∴ $AE = AF$.

同理　$BD = BF$，$CD = CE$.

∴ A、B、C 分别是 $\triangle DEF$ 各边的中点.

证明的途径

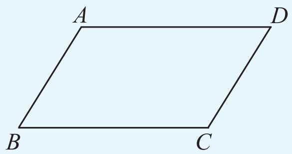
由 $AB \parallel DE$、$BC \parallel EF$、$CA \parallel FD$，可知四边形 $ABCE$、$AFBC$ 都是平行四边形.

所以 $AE = BC$、$AF = BC$.

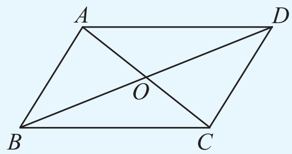
从而 $AE = AF$.

在图 9－13 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的内角分别相等吗？为什么？你还能得到哪些结论？证明你的结论.

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle B = 50^\circ$. 求这个四边形的其他内角的度数.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O，$BC = 7$ cm，$BD = 10$ cm，$AC = 6$ cm. 求 $\triangle AOD$ 的周长.

在方格纸上画两条互相平行并且相等的线段 AD、BC，连接 AB、DC.

你能证明所画四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？

已知：如图 9－14，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD = BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：连接 AC.

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$.

在 $\triangle BCA$ 和 $\triangle DAC$ 中，

$$\begin{cases} CB = AD, \\ \angle BCA = \angle DAC, \\ CA = AC, \end{cases}$$

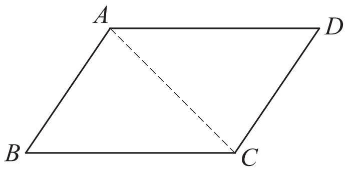


图 9－14

$\therefore \triangle BCA \cong \triangle DAC$.

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$.

$\therefore AB \parallel CD$.

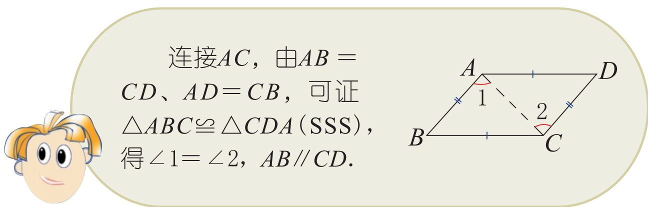
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

于是，我们得到如下定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$.

四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？证明你的结论.



于是，我们得到如下定理：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

例 2　已知：如图 9 - 15，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 分别在 AD、BC 上，且 $AE=CF$.

求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形 .

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD \parallel BC$（平行四边形的对边平行且相等）.

∵ $AE=CF$，

∴ $AD-AE=BC-CF$，

即　$DE=BF$.

∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

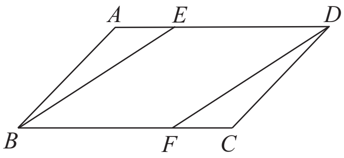


图 9 - 15

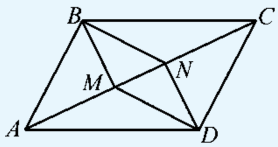
证明的途径

由 ▱$ABCD$、$AE=CF$，可证 $DE=BF$，$DE \parallel BF$，于是四边形 $BFDE$ 是平行四边形 .

还有其他方法证明例 2 的结论吗？

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$\angle A=\angle C$. 四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？证明你的结论 .
2. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形吗？如果是，加以证明；如果不是，举出反例 .
3. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的平分线分别交对角线 AC 于点 M、N.

   求证：四边形 $BMDN$ 是平行四边形 .



（第 3 题）

1. 画两条相交直线 a、b，设交点为 O.
2. 在直线 a 上截取 $OA=OC$，在直线 b 上截取 $OB=OD$，连接 AB、BC、CD、DA.

你能证明所画四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？

已知：如图 9 - 16，直线 AC、BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

证明：在△AOB 和△COD 中，

$$\begin{cases} OA = OC, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OB = OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore AB = CD$.

同理 $AD = CB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

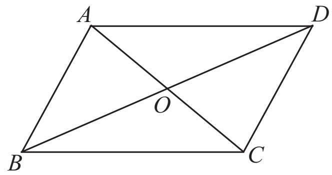


图 9－16

于是，我们得到如下定理：

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 3 已知：如图 9－17，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 在 AC 上，且 $AE=CF$.

求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

证明： 连接 BD，BD 交 AC 于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC, OB = OD$（平行四边形的对角线互相平分）.

$\because AE = CF$，

$\therefore OA - AE = OC - CF$，

即 $OE = OF$.

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

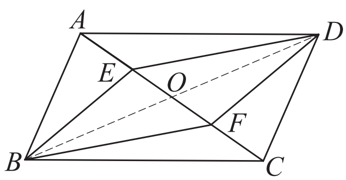


图 9－17

证明的途径

由▱$ABCD$、$AE = CF$，可证 $OB = OD$，$OE = OF$，于是四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

还有其他方法证明例 3 的结论吗？

如图 9－18，如果 $OA = OC$，$OB \neq OD$，那么四边形 $ABCD$ 不是平行四边形. 试证明这个结论.

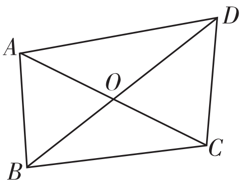


图 9－18

假设四边形$ABCD$是平行四边形，那么$OA=OC$，$OB=OD$，这与条件$OB \neq OD$矛盾. 所以四边形$ABCD$不是平行四边形.

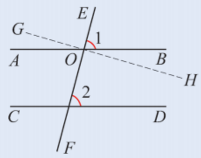
小明在证明时，不是从已知条件出发直接证明命题的结论成立，而是先提出与结论相反的假设，然后由这个“假设”出发推导出矛盾的结果，说明假设是错误的，因而命题的结论成立．这种证明的方法称为**反证法**(reduction to absurdity)．

在七年级下册第 7 章“平面图形的认识（二）”中，课本曾编写了“读一读”——怎样证实“两直线平行，同位角相等”(影印如下)，其中使用的证法就是反证法．

怎样证实“两直线平行，同位角相等”

本节中，我们用叠合的方法发现了“两直线平行，同位角相等”．事实上，这个结论可以运用已有的基本事实，通过说理加以证实．

如图，直线 AB、CD 被直线 EF 所截，$AB \parallel CD$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同位角．



假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，那么可以过直线 AB 与 EF 的交点 O 作直线 GH，使 $\angle EOH = \angle 2$，直线 GH 与直线 AB 是两条直线．

根据基本事实“同位角相等，两直线平行”，由 $\angle EOH = \angle 2$，可以得到 $GH \parallel CD$.

这样，过点 O 就有两条直线 AB、GH 都与 CD 平行．这与基本事实“过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾．

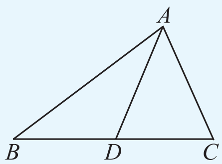
这说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设不正确，于是 $\angle 1 = \angle 2$.

练习

1. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线．

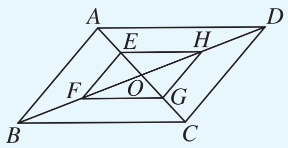
(1) 画图：延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 BE、CE；

(2) 四边形 $ABEC$ 是平行四边形吗？证明你的结论．



(第 1 题)

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，E、F、G、H 分别是 OA、OB、OC、OD 的中点．
求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．



（第 2 题）

阅读

趣谈“反证法”

日常生活中，人们常常运用反证法进行判断和推理．

例如，某一天早晨起床，如果发现屋顶和地面上都是潮的，那么你会做出“昨晚下过雨”的判断．这个判断是这样得到的：假设昨晚没下雨，那么屋顶和地面上是干的．但这与事实不相符合，因而“昨晚没下雨”的假设是错误的，所以“昨晚下过雨”．

又如，李老师把 2 个红球和 1 个黄球分别装进 3 个相同的纸盒里(每盒装 1 个)，然后将装有红球的两个纸盒分别给小明、小丽，要求他们打开各自的纸盒后，判断对方纸盒里的球是什么颜色．小明和小丽打开纸盒后，没有立即做出判断，稍作思考便异口同声地说出对方纸盒里的球是红色的！小明、小丽的思考过程如下：假设对方的纸盒里装的是黄球，那么双方都可以立即断定对方纸盒里装的是红球，这与他们“没有立即做出判断”不相符合，说明“对方纸盒里装的是黄球”的假设不成立，所以各人纸盒里装的都是红球．

应当指出：日常生活中这样的推理有时不够严谨．在数学中，运用反证法证明命题时，从“假设”出发推出“矛盾”的过程必须合乎逻辑，步步有据．

例如，用反证法证明“同位角不相等，两直线不平行”的过程如下：

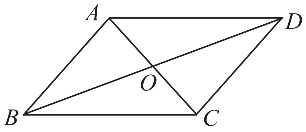
假设两直线平行，那么根据平行线性质，可知“同位角相等”，这与已知“同位角不相等”矛盾，所以两直线不平行．

又如，用反证法证明“一个三角形中最多有一个钝角”的过程如下：

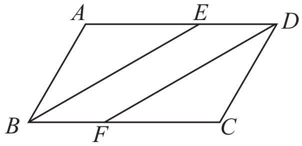
假设一个三角形中有两个（或三个）钝角，那么这两个（或三个）钝角的和大于 180°，这与“三角形的三内角和等于 180°”矛盾，所以“一个三角形中最多有一个钝角”．

9.3 习题

1. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O. 你能在图中找出几对全等的三角形？证明你的结论．



（第 1 题）



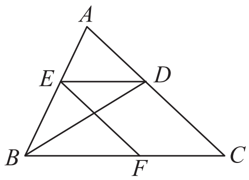
（第 2 题）

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的平分线分别交 AD、BC 于点 E、F.

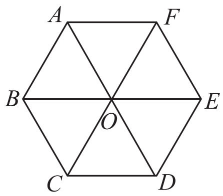
   求证：$BE /\!/ DF$.

3. 已知：如图，BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E、F 分别在 AB、BC 上，且 $ED /\!/ BC$，$EF /\!/ AC$.

   求证：$BE=CF$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，用 6 个全等的等边三角形可以拼成 1 个六边形．

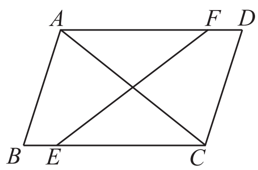
   (1) 你能在图中找出多少个平行四边形？

   (2) 证明四边形 $ABCO$ 是平行四边形．

5. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$. 四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？证明你的结论．

6. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、AD 上，且 $BE=DF$.

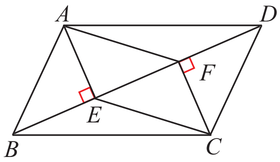
   求证：AC、EF 互相平分．



（第 6 题）

7. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E、F.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

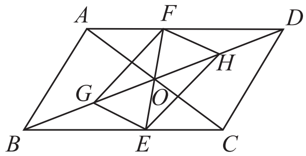


（第 7 题）

8. 画▱$ABCD$，使 $AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm. 想一想，在画出△ABC 后，你能用哪些方法确定点 D 的位置？并说明理由.

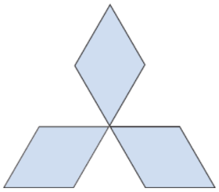
9. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，G、H 分别是 OB、OD 的中点，过点 O 的直线分别交 BC、AD 于点 E、F.

求证：四边形 $GEHF$ 是平行四边形.



（第 9 题）

9.4　矩形、菱形、正方形



上面的图片中有你熟悉的图形吗？

有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(rectangle)．矩形也叫长方形．

矩形是特殊的平行四边形，它除了具有平行四边形的一切性质外，还具有哪些特殊性质？

如图 9－19，一个平行四边形的活动框架，对角线是两根橡皮筋．如果扭动这个框架，那么▱$ABCD$ 的边、内角、对角线都随着变化．

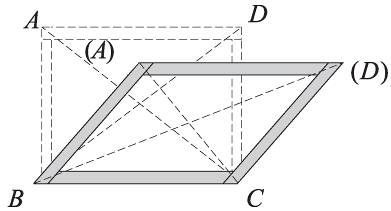


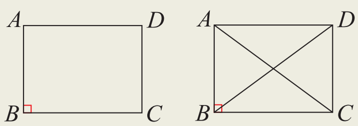
图 9－19

当扭动这个框架，使$\angle ABC$ 为直角时：

(1) ▱$ABCD$ 的其他三个内角为多少度？

(2) 对角线 AC、BD 的大小有什么关系？

由$\angle B=90°$、
$\angle A+\angle B=180°$，
可得$\angle A=90°$.
由$\angle A=\angle C$、
$\angle B=\angle D$，
可得$\angle C=\angle D=90°$.



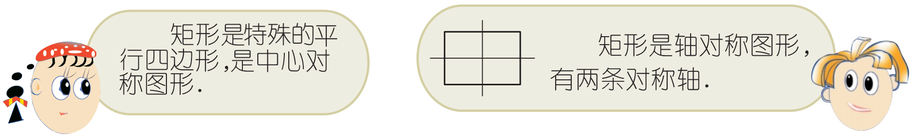
由$AB=DC$、
$\angle ABC=\angle DCB=90°$、
$BC=CB$，
可知$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.
所以$AC=DB$.

于是，我们得到如下定理：

矩形的四个角都是直角，对角线相等．

讨论

矩形是中心对称图形吗？是轴对称图形吗？



例 1 已知：如图 9－20，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AC=2AB$.

求证：$\triangle AOB$ 是等边三角形．

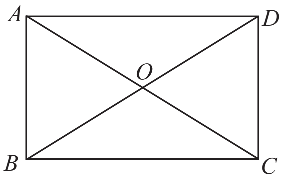


图 9－20

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC=BD$（矩形的对角线相等），

$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$（矩形的对角线互相平分）．

$\because AC=2AB$，即 $AB=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore AO=BO=AB$.

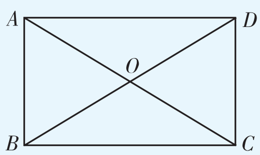
$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形．

证明的途径

由矩形 $ABCD$，可知 $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=BO$. 又 $AC=2AB$，于是 $AO=BO=AB$.

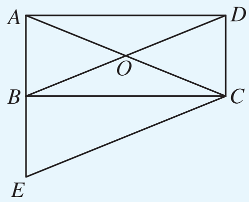
练习

1. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$\angle AOD=120°$，$AB=4$ cm. 求矩形对角线的长．



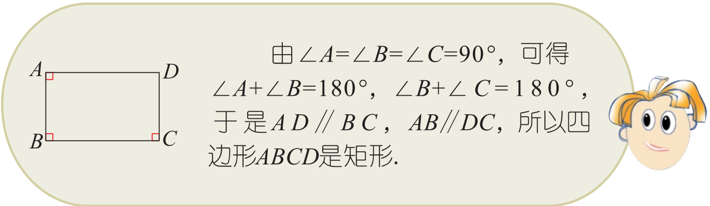
（第 1 题）

2. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$CE \parallel DB$，交 AB 的延长线于点 E.
求证：$AC = EC$.



（第 2 题）

1. 我们知道，矩形的四个角都是直角．反过来，四个角(或三个角)都是直角的四边形是矩形吗?



2. 我们知道，当一个平行四边形框架扭动成矩形时，它的两条对角线相等．反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗?

如图 9－21，在▱$ABCD$ 中，$AC = DB$．由 $AB = DC$，$BC = CB$，$AC = DB$，可证 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$，于是 $\angle ABC = \angle DCB$．又由 $\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$，可知 $\angle ABC = 90^\circ$.

▱$ABCD$ 是矩形．

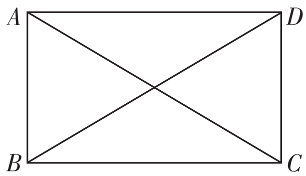


图 9－21

于是，我们得到如下定理：

三个角是直角的四边形是矩形．

对角线相等的平行四边形是矩形．

例 2 已知：如图 9－22，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 是 AB 的中点，DE、DF 分别是△BDC、△ADC 的角平分线.

求证：四边形 $DECF$ 是矩形.

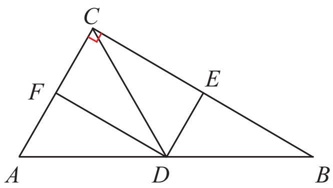


图 9－22

证明： ∵ $\angle ACB=90^\circ$，D 是 AB 的中点，

∴ $DC=\dfrac{1}{2}AB=DA=DB$.

∵ $DC=DA$，DF 平分 $\angle ADC$，

∴ $DF\perp AC$，

即 $\angle DFC=90^\circ$.

同理 $\angle DEC=90^\circ$.

∴ 四边形 $DECF$ 是矩形（三个角是直角的四边形是矩形）.

证明的途径

由 DC 是 Rt△ABC 斜边上的中线，可知 $DC=DA=DB$. 又 DE、DF 分别平分 $\angle BDC$、$\angle ADC$，于是 $DF\perp AC$，$DE\perp BC$.

思考

如图 9－23，直线 $l_1 /\!/ l_2$，A、C 是直线 l_1 上的任意两点，$AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，垂足分别为 B、D. 线段 AB、CD 相等吗？为什么？

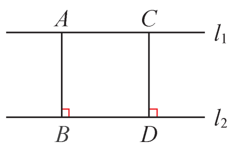
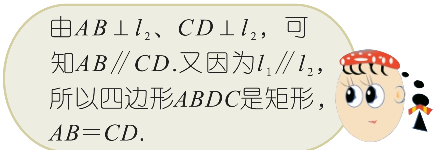


图 9－23

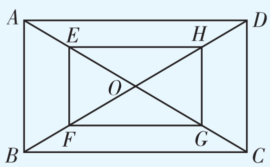


两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做**两条平行线之间的距离**. 两条平行线之间的距离处处相等.

练习

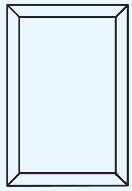
1. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F、G、H 分别在 OA、OB、OC、OD 上，且 $AE=BF=CG=DH$.

   求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



（第 1 题）

2. 怎样判断四边形的窗框(如图)是不是矩形？说说你的理由．



（第 2 题）

有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**(rhombus)．

菱形是特殊的平行四边形，它除了具有平行四边形的一切性质外，还具有哪些特殊性质？

如图 9－24，一个平行四边形的活动框架，对角线是两根橡皮筋．如果把 DC 沿 CB 方向平行移动，那么▱$ABCD$ 的边、内角、对角线都随着变化．

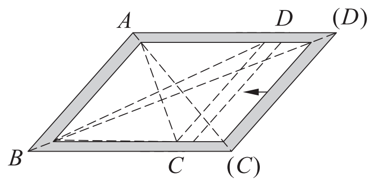
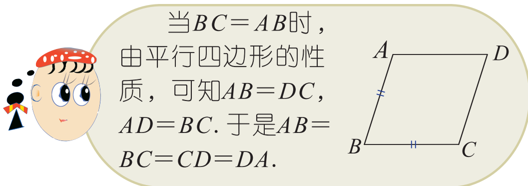


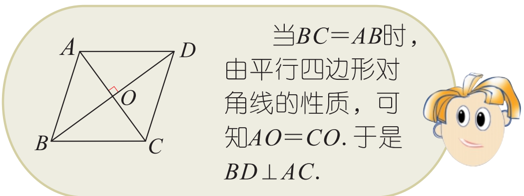
图 9－24

当平移 DC 使 $BC=AB$ 时：

(1) ▱$ABCD$ 四条边的大小有什么关系？

(2) 对角线 AC、BD 的位置有什么关系？

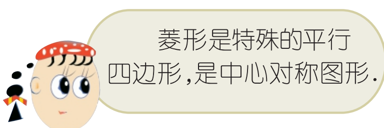


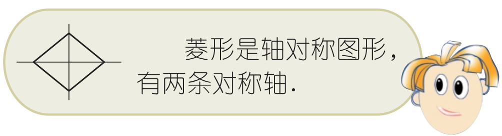


于是，我们得到如下定理：

菱形的四条边相等，对角线互相垂直．

菱形是中心对称图形吗？是轴对称图形吗？





例 3 如图 9－25，木制活动衣帽架由 3 个全等的菱形构成，在 A、E、F、C、G、H 处安装上、下两排挂钩，可以根据需要改变挂钩间的距离，并在 B、M 处固定．已知菱形 $ABCD$ 的边长为 13 cm，要使两排挂钩间的距离 AC 为 24 cm，求 B、M 之间的距离．

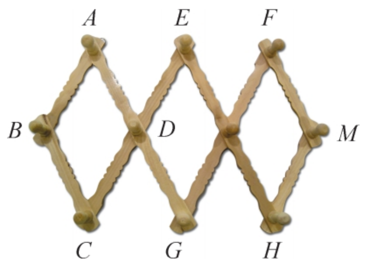


图 9－25

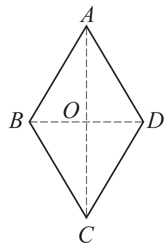


图 9－26

解： 如图 9－26，连接 AC、BD，AC 与 BD 相交于点 O．

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $\angle AOB = 90°$，

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 24 = 12$（菱形的对角线互相垂直平分）．

∴ $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$．

∴ $BD = 2BO = 10$（菱形的对角线互相平分）．

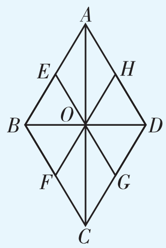
$BM = 3BD = 30$.

B、M 之间的距离是30 cm.

1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，E、F、G、H 分别是菱形 $ABCD$ 各边的中点．

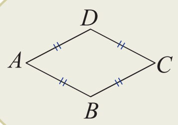
   求证：$OE = OF = OG = OH$.

2. 证明：菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半．



（第 1 题）

1. 我们知道，菱形的四条边相等．反过来，四边相等的四边形是菱形吗?



由$AB=DC$，$AD=BC$，可知四边形$ABCD$是平行四边形.

根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形，可知$\square ABCD$是菱形.

2. 我们知道，当平移一个平行四边形活动框架的一边，使这个平行四边形成菱形时，它的两条对角线互相垂直．反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

如图 9－27，在$\square ABCD$中，$AC\perp BD$，垂足为 O．由$BO=DO$，$AC\perp BD$，可知$AB=AD$.

$\square ABCD$是菱形．

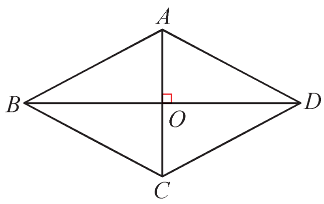


图 9－27

于是，我们得到如下定理：

> **四边相等的四边形是菱形．**
>
> **对角线互相垂直的平行四边形是菱形．**

例 4　已知：如图 9－28，在四边形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别相交于点 E、F.

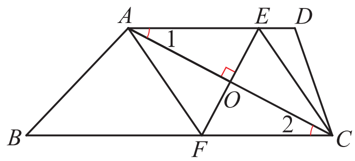


图 9－28

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形．

证明：$\because AD/\!/BC$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because EF$ 垂直平分 AC，

$\therefore OA=OC$，$\angle AOE=\angle COF$．

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

$\therefore OE=OF$.

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）．

证明的途径

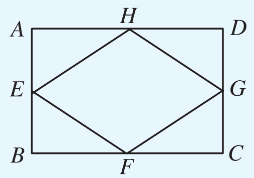
先证$\triangle AOE\cong\triangle COF$，得$OE=OF$．又由$OA=OC$，可知四边形$AFCE$是平行四边形；再由$EF\perp AC$，于是$\square AFCE$是菱形．

又∵ $EF \perp AC$，

∴ $\square AFCE$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

练习

1. 如图，E、F、G、H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，四边形 $EFGH$ 是怎样的特殊四边形？证明你的结论.
2. 用直尺和圆规作一个菱形，并说明你作图的道理.



（第 1 题）

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**（square）.

于是，我们得到如下定理：

有一组邻边相等的矩形是正方形.
有一个角是直角的菱形是正方形.

平行四边形、矩形、菱形、正方形的关系如图 9－29.

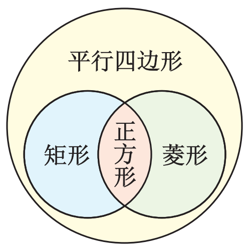


图 9－29

正方形具有矩形的性质，同时又具有菱形的性质.

讨论

正方形的边、角和对角线各具有什么性质？

例 5　已知：如图 9－30，在正方形 $ABCD$ 中，点 A'、B'、C'、D' 分别在 AB、BC、CD、DA 上，且 $AA' = BB' = CC' = DD'$．

求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形．

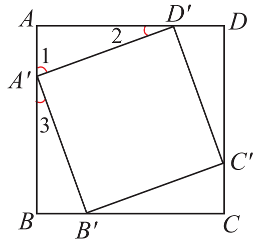


图 9－30

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$，

$AB = BC = CD = DA$（正方形的四个角都是直角，四条边相等）．

∵ $AA' = BB' = CC' = DD'$，

∴ $D'A = A'B = B'C = C'D$.

∴ $\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$．

∴ $D'A' = A'B' = B'C' = C'D'$.

四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形（四边相等的四边形是菱形）．

由 $\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A'$，可得 $\angle 2 = \angle 3$.

∵ $\angle A = 90°$，

∴ $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.

∴ $\angle 1 + \angle 3 = 90°$.

∴ $\angle D'A'B' = 90°$.

菱形 $A'B'C'D'$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）．

> **证明的途径**
>
> 先证 $\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$，得 $D'A' = A'B' = B'C' = C'D'$，于是四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形；再证 $\angle D'A'B' = 90°$，从而四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形．

还有其他方法证明例 5 的结论吗？

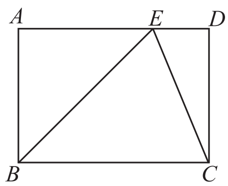
1. 根据图形所具有的性质，在下表相应的空格中打“√”．

	平行四边形	矩　形	菱　形	正方形
对边平行且相等				
四边相等				
四个角都是直角				
对角线互相平分				
对角线互相垂直				
对角线相等				

2. 一个矩形的两条对角线互相垂直，证明这个矩形是正方形．
3. 一个菱形的两条对角线相等，证明这个菱形是正方形．

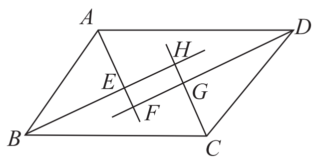
9.4 习题

1. 下列判断是否正确：
   (1) 对角线相等的四边形是矩形；
   (2) 对角线相等且互相平分的四边形是矩形；
   (3) 对角线互相垂直的四边形是菱形；
   (4) 对角线互相垂直平分的四边形是菱形．
2. 矩形的面积为 48，一条边长为 6，求矩形的对角线长．
3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，且 EC 平分$\angle BED$.
   (1) $\triangle BEC$ 是否为等腰三角形？证明你的结论.
   (2) $AB=1$，$\angle ABE=45^\circ$，求 BC 的长．

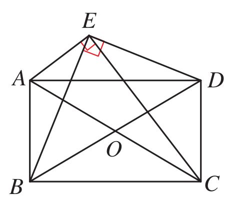


（第 3 题）

4. 利用矩形的性质，证明“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”.
5. 如图，▱$ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E、F、G、H，四边形 $EFGH$ 是怎样的特殊四边形？证明你的结论．



（第 5 题）



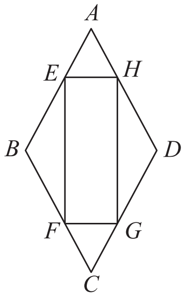
（第 6 题）

6. 已知：如图，AC、BD 相交于点 O，且 O 是 AC、BD 的中点，点 E 在四边形 $ABCD$ 外，且 $\angle AEC=\angle BED=90^\circ$.
   求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．

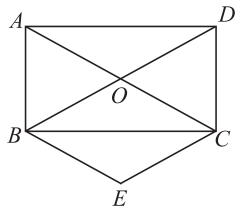
7. 菱形的边长为 2，一个内角等于 $120°$．求这个菱形的面积．

8. 已知：如图，点 E、F、G、H 分别在菱形 $ABCD$ 的各边上，且 $AE=AH=CF=CG$．

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形．



（第 8 题）



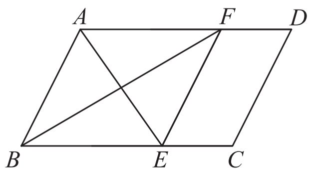
（第 9 题）

9. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$BE \parallel AC$，$CE \parallel DB$.

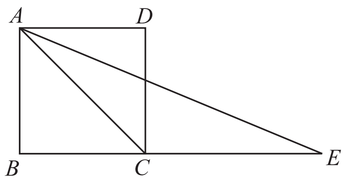
求证：四边形 $OBEC$ 是菱形．

10. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F．

求证：四边形 $ABEF$ 是菱形．



（第 10 题）

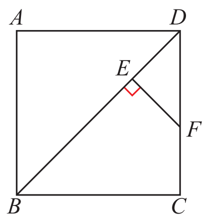


（第 11 题）

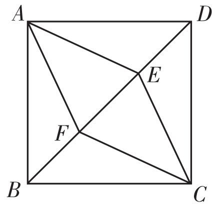
11. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 延长线上的一点，且 $CE = AC$. 求$\angle E$ 的度数．

12. 已知：如图，E 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的一点，且 $BE = BC$，$EF \perp BD$，交 DC 于点 F.

求证：$DE = CF$.



（第 12 题）



(第 13 题)

13. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 在 BD 上，且 $BF=DE$.
求证：四边形 $AECF$ 是菱形 .

14. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，且 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$. 根据下列条件，分别判断四边形 $AEDF$ 是怎样的特殊平行四边形？证明你的结论 .
(1) $\angle BAC=90°$；
(2) AD 平分 $\angle BAC$；
(3) $\angle BAC=90°$，AD 平分 $\angle BAC$.

9.5　三角形的中位线

怎样将一张三角形纸片剪成两部分，使这两部分能拼成一个平行四边形？

（1）剪一张三角形纸片，记为$\triangle ABC$；

（2）分别取 AB、AC 的中点 D、E，连接 DE；

（3）沿 DE 将$\triangle ABC$ 剪成两部分，并将$\triangle ADE$ 绕点 E 按顺时针方向旋转 180°到$\triangle CFE$ 的位置（如图 9－31）.

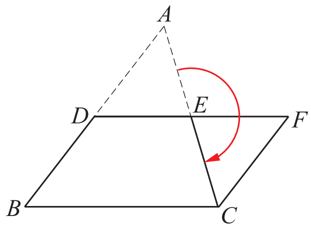


图 9－31

在图 9－31 中，点 E 在线段 DF 上吗？四边形 $BCFD$ 是平行四边形吗？如果是，那么 DE 与 BC 有怎样的位置关系和数量关系？

如图 9－32，点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 CF.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CFE$ 中，由 $ED = EF$，$\angle AED = \angle CEF$，$AE = CE$，可证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$. 可知，$AD = CF$，$\angle ADE = \angle F$，于是 $BD \parallel CF$.

由 $BD = AD = CF$，$BD \parallel CF$，可知四边形 $DBCF$ 是平行四边形. 从而 $DF \parallel BC$，$DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$.

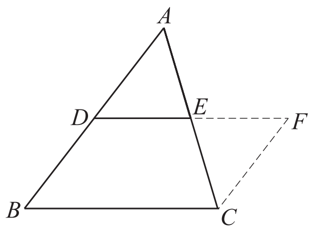


图 9－32

连接三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**.

于是，我们得到如下定理：

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

例 已知：如图 9－33，在四边形$ABCD$中，$AC=BD$，E、F、G、H 分别是AB、BC、CD、DA 的中点．

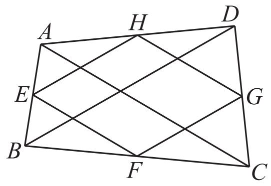


图 9－33

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形．

证明： 在$\triangle BAC$中，

$\because BE=EA, BF=FC$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC$（三角形的中位线等于第三边的一半）．

同理 $FG=\frac{1}{2}BD, GH=\frac{1}{2}AC, HE=\frac{1}{2}BD$.

$\because AC=BD$，

$\therefore EF=FG=GH=HE$.

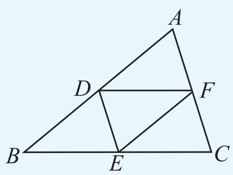
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形（四边相等的四边形是菱形）．

讨论

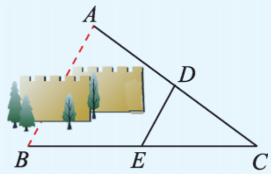
如果一个四边形的对角线互相垂直，那么依次连接它的各边中点能得到什么图形？

练习

1. 如图，D、E、F 是$\triangle ABC$各边的中点，$\triangle DEF$与$\triangle ABC$的周长、面积分别有怎样的数量关系？证明你的结论．



（第 1 题）



（第 2 题）

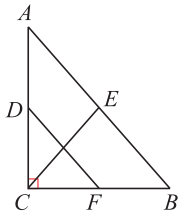
2. 如图，A、B 两地被建筑物阻隔，为测量 A、B 两地的距离，在地面上选一点 C，连接 CA、CB，分别取 CA、CB 的中点 D、E.

   (1) 若 DE 的长为 36 m，求 A、B 两地的距离；

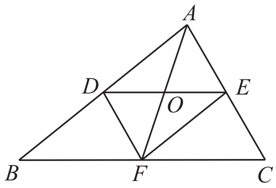
   (2) 若 D、E 两点之间还有阻隔，你有什么解决办法？

9.5 习题

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，D、E、F分别是AC、AB、BC的中点．
   求证：$CE=DF$．

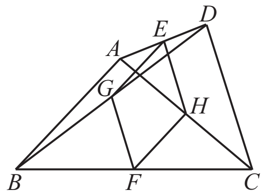


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$的中线AF与中位线DE相交于点O．AF与DE有怎样的关系？证明你的结论．
3. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB=DC$，E、F、G、H分别是AD、BC、BD、AC的中点．四边形$EGFH$是怎样的四边形？证明你的结论．

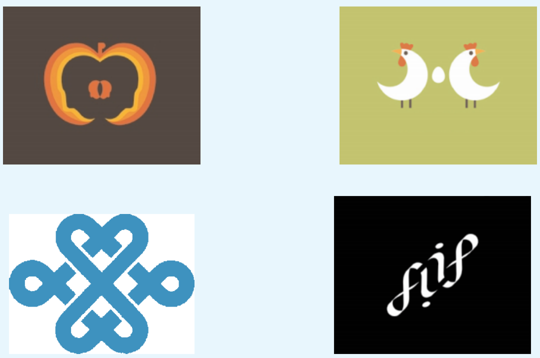


（第 3 题）

数学活动

设计对称图案

生活中，我们经常见到一些美丽的对称图案，请你欣赏下面的图案．



交流：

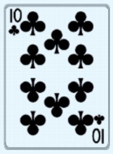
1．下面的图案是几种汽车品牌的标志，在这些图案中，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？

2. 把 26 个英文大写字母看成图案：

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

哪些英文大写字母是轴对称图案？哪些是中心对称图案？

3. “方块 K” 和 “梅花 10” 是中心对称图案. 扑克牌中还能找出其他的对称图案吗？

操作：

1. 4 个全等的正方形拼成图 9 – 34，按下列要求画图：

(1) 在图 9 – 34 中再画 1 个正方形，使它成为轴对称图形；

(2) 在图 9 – 34 中再画 1 个正方形，使它成为中心对称图形；

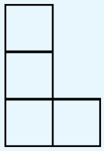


图 9 – 34

(3) 在图 9 – 34 中改变 1 个正方形的位置，使它既是中心对称图形，又是轴对称图形.

2. 图 9 – 35 是一个中心对称图案(包括颜色的“对称”). 试在图 9 – 36 的网格中涂色，设计一个中心对称图案.

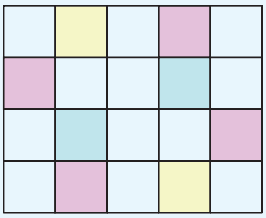


图 9 – 35

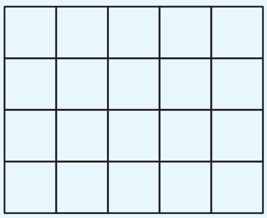
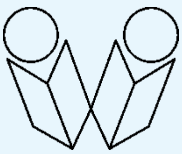
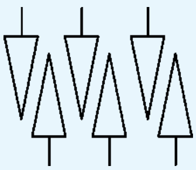


图 9 – 36

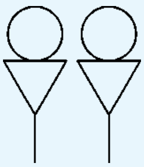
3. 用等腰三角形、平行四边形、圆等图形可以设计对称图案. 例如，



阅读



植树造林



两杯冰淇凌

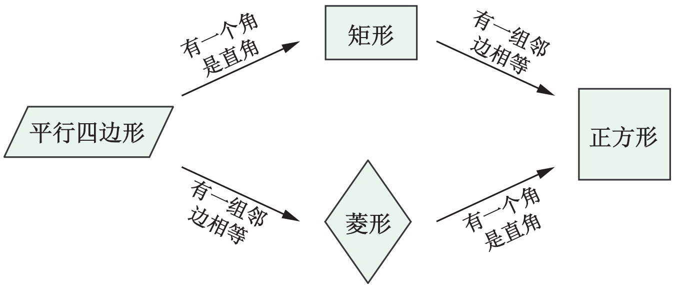
请你设计一幅对称图案，并加以命名.

4. 为校园艺术节设计一个对称的会徽.

小结与思考

1. 本章以中心对称为主线，通过操作实践等活动，探索图形旋转的性质、中心对称与中心对称图形的性质；利用中心对称的性质，研究了平行四边形以及特殊平行四边形的性质；利用中心对称，研究了三角形中位线的性质．

2. 平行四边形与矩形、菱形、正方形之间的关系：



这些图形之间具有特殊与一般的关系．在图形不断特殊化的过程中，图形的性质越来越多，判定它需要的条件也越来越多．

3. 认识一个图形，既要研究它的性质，又要研究判定它的条件．你能区分本章中的定理哪些是平行四边形的判定定理，哪些是平行四边形的性质定理吗?

4. 通过本章学习，可以进一步体会到：通过观察、操作等活动可以丰富对图形的认识和感受，能探索发现图形可能具有的性质；通过证明可以证实图形的性质，并帮助我们逐步学会有条理地思考和表达．

5. 本章中的“证明的途径”，体现了“从已知想可知”的思路，这是证明命题常用的一种思考方法；“轴对称图形”一章中的“思考与表述”，体现了“由未知想需知”的思路，这是证明命题的另一种思考方法．证明命题，有时需要联合运用“从已知想可知”和“由未知想需知”这两种方法进行分析和思考．

6. 依次连接任意四边形各边的中点，能得到什么图形?

依次连接矩形各边的中点，得到的四边形是菱形．如果依次连接一个四边形各边的中点得到菱形，那么原来的四边形一定是矩形吗?

7. 通过本章的学习，我们还了解了反证法，你能举出用反证法证明命题的例子吗?

复习题

复习巩固

1. 在下列四个标志中，哪些标志是轴对称图形？哪些标志是中心对称图形?

（第 1 题）

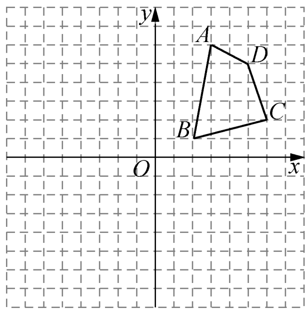
2. 在平行四边形、矩形、菱形、正方形中，哪些是轴对称图形，哪些是中心对称图形？

3. 按下列要求在平面直角坐标系中画图，并回答问题：

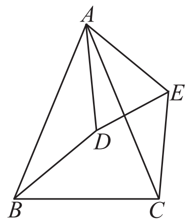
（1）画出四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的四边形 $A'B'C'D'$；

（2）画出四边形 $ABCD$ 关于 x 轴对称的四边形 $A''B''C''D''$；

（3）四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 有怎样的位置关系？它们对应顶点的坐标之间有怎样的关系？



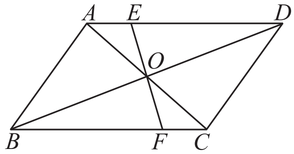
（第 3 题）



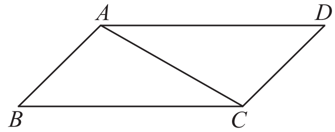
（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是顶角为 $45°$ 的等腰三角形，BC、DE 分别是这两个等腰三角形的底边．图中的 $\triangle ACE$ 可以看成由哪个三角形通过怎样的旋转得到的？证明 $\triangle ACE$ 与这个三角形全等．

5. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，过点 O 的直线分别与 AD、BC 相交于点 E、F. 写出图中关于点 O 成中心对称的三角形、四边形．



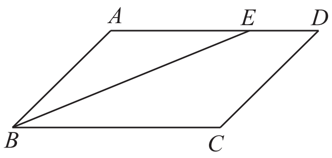
（第 5 题）



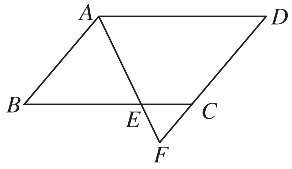
（第 6 题）

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle D = 45°$，$\angle CAD = 30°$. 求 $\angle B$ 和 $\angle BAC$ 的度数．

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，$AB=4$，$BC=6$．求 DE 的长．



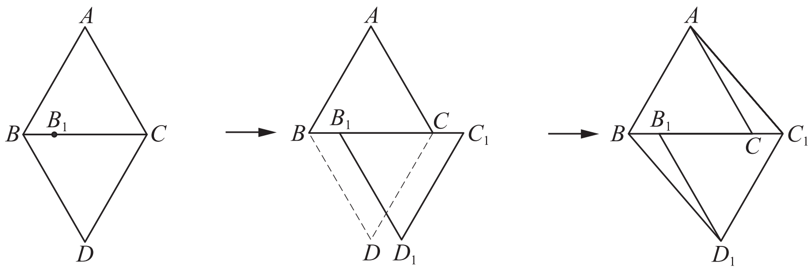
（第 7 题）



（第 8 题）

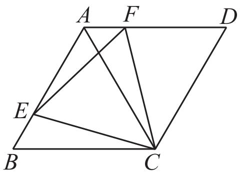
8. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 BC 上的一点，且 $AB=BE$，AE、DC 的延长线相交于点 F，$\angle F=62°$．求$\angle BAE$ 和$\angle D$ 的度数．

9. 如图，$\triangle ABC$ 和$\triangle DBC$ 都是等边三角形，点 B_1 在 BC 上，将$\triangle DBC$ 沿 BC 方向平移到$\triangle D_1B_1C_1$ 的位置．此时，四边形 ABD_1C_1 是平行四边形吗？证明你的结论．



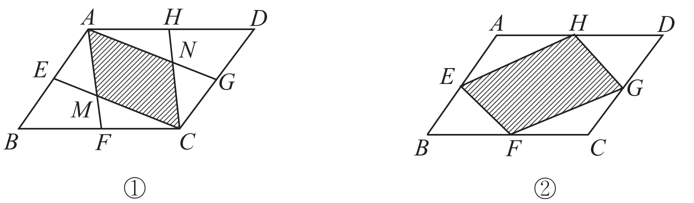
（第 9 题）

10. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，点 E、F 分别在 AB、AD 上，且 $BE=AF$．求证：$\triangle ECF$ 是等边三角形．



（第 10 题）

11. 如图，E、F、G、H 分别是▱$ABCD$ 各边的中点，证明图中阴影部分是平行四边形．



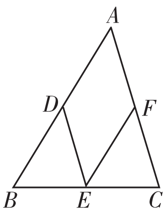
（第 11 题）

12. 如图，D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 各边的中点.

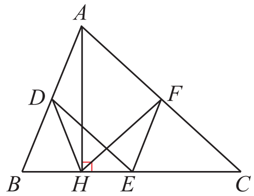
(1) 四边形 $ADEF$ 是怎样的四边形？证明你的结论.

(2) 根据下列条件，分别判断四边形 $ADEF$ 是怎样的四边形？证明你的结论.

① $\angle A=90^\circ$；② $AB=AC$；③ $\angle A=90^\circ$，且 $AB=AC$.



（第 12 题）



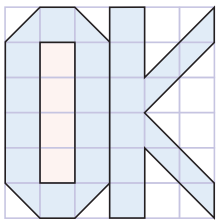
（第 13 题）

13. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是各边的中点，AH 是高.

求证：$\angle DHF=\angle DEF$.

灵活运用

14. 如图，方格纸中每一个小方格的面积为 1 个平方单位.


①

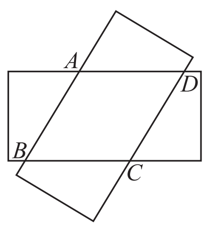
②

（第 14 题）

(1) 图①中的“OK”可以看成是一个轴对称图形，你能求出图①中“OK”部分的面积吗？

(2) 请在图②的方格纸上设计一个中心对称图形，并计算它的面积.

15. 如图，由两个等宽的矩形叠合而得到的四边形 $ABCD$ 是菱形吗？证明你的结论.

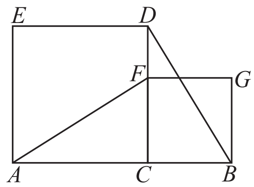


（第 15 题）

16. 如图，点 C 在线段 AB 上，分别以 AC、BC 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 和 $BCFG$，连接 AF、BD.

(1) AF 与 BD 是否相等？证明你的结论.

(2) 如果点 C 在线段 AB 的延长线上，(1)中所得的结论是否成立？请画出图形并证明.

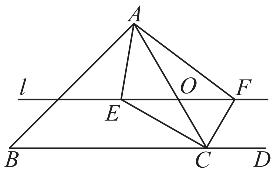


（第 16 题）

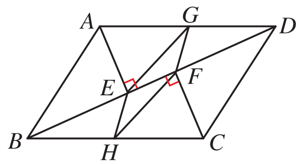
17. 如图，在△ABC 中，O 是 AC 上的任意一点（不与点 A、C 重合），过点 O 平行于 BC 的直线 l 分别与∠BCA、△ABC 的外角∠DCA 的平分线交于点 E、F.

(1) OE 与 OF 相等吗？证明你的结论.

(2) 试确定点 O 的位置，使四边形 $AECF$ 是矩形，并加以证明.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，G、H 分别是 AD、BC 的中点，$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E、F.

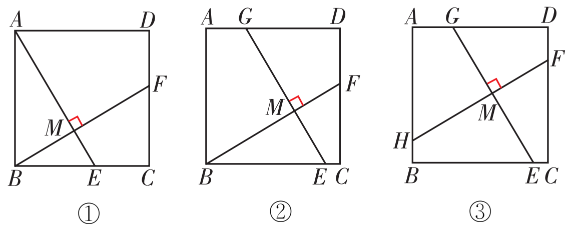
求证：四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

19. 在正方形 $ABCD$ 中：

(1) 如图①，如果点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $AE \perp BF$，垂足为 M，那么 AE 与 BF 相等吗？证明你的结论.

(2) 如图②，如果点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上，且 $GE \perp BF$，垂足为 M，那么 GE 与 BF 相等吗？证明你的结论.

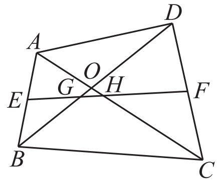
(3) 如图③，如果点 E、F、G、H 分别在 BC、CD、DA、AB 上，且 $GE \perp HF$，垂足为 M，那么 GE 与 HF 相等吗？证明你的结论.



（第 19 题）

20. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AC=BD$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，EF 分别交 BD、AC 于点 G、H.

求证：$OG=OH$.



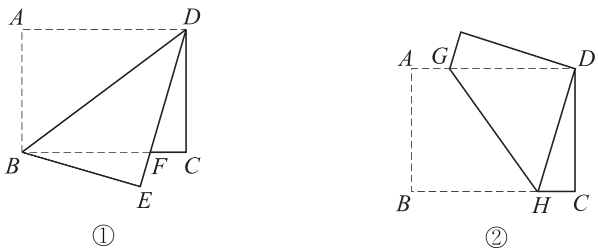
（第 20 题）

探索研究

21. 在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$.

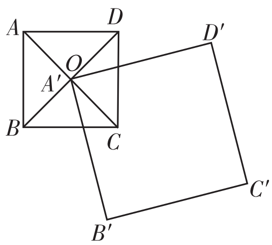
(1) 将矩形纸片沿 BD 折叠，点 A 落在点 E 处(如图①)，设 DE 与 BC 相交于点 F，求 BF 的长；

(2) 将矩形纸片折叠，使点 B 与点 D 重合(如图②)，求折痕 GH 的长.



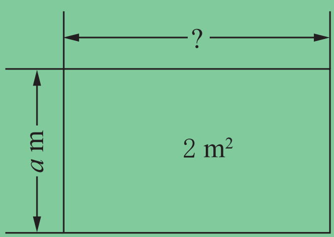
（第 21 题）

22. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，正方形 $A'B'C'D'$ 的顶点 A' 与点 O 重合. 将正方形 $A'B'C'D'$ 绕点 A' 旋转，在这个过程中，这两个正方形重合部分的面积会发生变化吗？证明你的结论.



（第 22 题）

第10章　分　式



$$2 \div a = \frac{2}{a}$$

实际问题中的一些数量关系，可用分式来表示；
通过与分数进行类比，探索分式的性质和运算法则．

京沪铁路是我国东部沿海地区纵贯南北的交通大动脉，全长 1 462 km，是我国最繁忙的铁路干线之一．

如果货车的速度为 a km/h，客车的速度是货车的 2 倍，那么

(1) 货车从北京到上海需要多少时间?

(2) 客车从北京到上海需要多少时间?

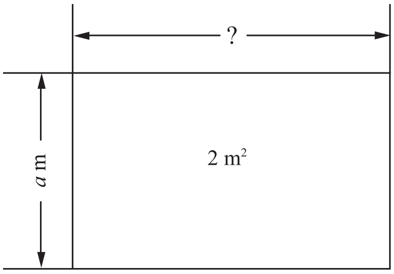
(3) 已知从北京到上海的客车比货车少用 6 h，你能用方程描述其中的数量关系吗?

本章将学习分式、分式运算以及分式方程．

10.1　分　式

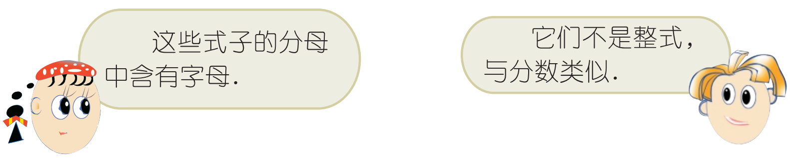
如果某市人口总数为 a 人，绿地面积为 $b\ \mathrm{m}^2$，那么该市人均拥有绿地 $\frac{b}{a}\ \mathrm{m}^2$.

如果一块长方形玻璃板的面积为 $2\ \mathrm{m}^2$，这块玻璃板的宽是 a m，那么它的长是 $\frac{2}{a}$ m.



如果面积为 a 公顷、b 公顷的两块棉田分别产棉花 m 千克、n 千克，那么这两块棉田平均每公顷产棉花 $\frac{m+n}{a+b}$ 千克.

像 $\frac{b}{a}$、$\frac{2}{a}$、$\frac{m+n}{a+b}$……这样的式子有什么共同特征？它们与整式有什么区别？



一般地，如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**(fraction)，其中 A 是分式的分子，B 是分式的分母.

交流

分式可以表示现实生活中的一些数量关系．例如，如果某种水果的售价为每千克 b 元，那么 $\frac{a}{b}$ 表示用 a 元可以购买这种水果的千克数；如果这种水果的售价每千克降价 1 元，那么 $\frac{a}{b-1}$ 表示用 a 元可以购买降价后这种水果的千克数．

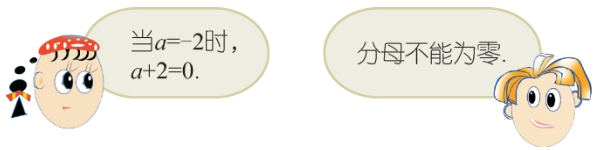
分式 $\frac{a}{b}$、$\frac{a}{b-1}$ 可以表示不同的实际意义，试举例说明．

分式的值随分式中字母取值的变化而变化．用具体的数值代替分式中的字母，按照式子中的运算关系计算，就能得到相应的分式的值．

例如，在分式 $\frac{a-3}{a+2}$ 中，若 $a=3$，则它的值为 $\frac{3-3}{3+2}=\frac{0}{5}=0$；若 $a=-\frac{2}{5}$，则它的值为 $\frac{-\frac{2}{5}-3}{-\frac{2}{5}+2}=\frac{-\frac{17}{5}}{\frac{8}{5}}=-\frac{17}{5}\times\frac{5}{8}=-\frac{17}{8}$．

思考

在分式 $\frac{a-3}{a+2}$ 中，a 的值可以是 -2 吗？为什么？



分式的分母不能为 0．如果分式中字母所取的值使分母的值为 0，那么分式无意义．

例 当 x 取什么值时，(1) 分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 无意义、有意义？(2) 分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值为零？

解：(1) 由 $2x-3=0$，得 $x=\frac{3}{2}$．

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 无意义．

当 $x\neq\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 有意义．

(2) 由分子 $x-2=0$，得 $x=2$；且 $x=2$ 时，分母 $2x-3$ 的值为 $2\times2-3=1$，不为零．当 $x=2$ 时，分式 $\dfrac{x-2}{2x-3}$ 的值为零．

练习

1. 填空：

(1) 某校八年级有 m 个学生，排成长方形队伍．如果排成 20 排，那么平均每排有________个学生；如果排成 a 排，那么平均每排有________个学生．

(2) 30 名工人 x h 加工了 1 800 个零件，平均每人每小时加工零件________个.

2. 填表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$\dfrac{x}{1-x}$	…								…

3. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？下列分式的值为零？

(1) $\dfrac{2+x}{x}$；　　(2) $\dfrac{x}{4-3x}$.

10.1 习题

1. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？下列分式的值为零？

(1) $\dfrac{2x+1}{6x-5}$；　　(2) $\dfrac{2x-1}{x^2+1}$.

2. 某玩具厂要生产 a 只吉祥物“欢欢”，原计划每天生产 b 只，实际每天生产了 $(b+c)$ 只．

(1) 该厂原计划多少天完成生产任务？

(2) 该厂实际多少天完成了生产任务？

3. x 千克橘子糖、y 千克椰子糖、z 千克奶糖混合成“什锦糖”．已知这 3 种糖的单价分别为 28 元/千克、32 元/千克、48 元/千克．求这种“什锦糖”的单价．

4. 当 a 的值分别为 0.01、0.1、1、10、100 时，求分式 $\dfrac{1}{a}$ 的值．随 a 的值变化，$\dfrac{1}{a}$ 的值是如何变化的？

10.2 分式的基本性质

我们知道，如果分数的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的数，那么分数的值不变.

分式也有类似的性质吗?

一列匀速行驶的火车，如果 t h 行驶 s km、$2t$ h 行驶 $2s$ km、$3t$ h 行驶 $3s$ km、…、nt h 行驶 ns km，那么 $\frac{s}{t}$ km/h、$\frac{2s}{2t}$ km/h、$\frac{3s}{3t}$ km/h、…、$\frac{ns}{nt}$ km/h 都表示这列火车的速度，由此你发现了什么?

分式的基本性质　分式的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C},$$

其中 C 是不等于 0 的整式.

例 1　下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1) $\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2}$;　　(2) $\frac{a^3}{ab}=\frac{a^2}{b}$.

解: (1) $\because a\neq 0$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{b\cdot a}{a\cdot a}=\frac{ab}{a^2}$;

(2) $\because a\neq 0$，$\therefore \frac{a^3}{ab}=\frac{a^3\div a}{ab\div a}=\frac{a^2}{b}$.

例 2　不改变分式的值，使下列分式的分子与分母都不含“—”号:

(1) $\frac{-2a}{-3b}$;　　(2) $\frac{-n}{m}$.

解: (1) $\frac{-2a}{-3b}=\frac{2a}{3b}$;

(2) $\frac{-n}{m}=-\frac{n}{m}$.

把分式看成分子与分母相除，根据“两数相除，同号得正，异号得负”进行变形.

例 3 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数．

(1) $\dfrac{x}{1-x^2}$；　　　　(2) $\dfrac{y-y^2}{y+y^2}$.

解：(1) $\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{x}{-(x^2-1)}=-\dfrac{x}{x^2-1}$；

(2) $\dfrac{y-y^2}{y+y^2}=\dfrac{-(y^2-y)}{y^2+y}=-\dfrac{y^2-y}{y^2+y}$.

1. 填空：

(1) $\dfrac{a}{2ab}=\dfrac{1}{(\quad)}$；　　(2) $\dfrac{3a}{4b}=\dfrac{(\quad)}{4bc}(c\neq 0)$；

(3) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(\quad)}{a+b}$；　　(4) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{a-b}{(\quad)}$.

2. 不改变分式的值，使 $\dfrac{\frac{1}{2}a^2+b^2}{a+b}$ 的分子中不含分数．

填空，并说明理由：

(1) $\dfrac{2b}{2a}=\dfrac{(\quad)}{a}$；　(2) $\dfrac{ac}{a^2}=\dfrac{c}{(\quad)}$；　(3) $\dfrac{x}{6x^2y^2}=\dfrac{1}{(\quad)}$.

根据分数的基本性质，可以对分数进行约分．与分数的约分相类似，根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母分别除以它们的公因式，叫做**分式的约分**(reduction of a fraction).

例 4 约分：

(1) $\dfrac{36ab^3c}{6abc^2}$；　　　　(2) $\dfrac{(a+b)^3}{(a+b)(a-b)}$.

解：(1) $\dfrac{36ab^3c}{6abc^2}=\dfrac{6abc\cdot 6b^2}{6abc\cdot c}=\dfrac{6b^2}{c}$；

(2) $\dfrac{(a+b)^3}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{(a+b)(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$.

例 5 约分：

(1) $\dfrac{ma+mb-mc}{a+b-c}$；　　(2) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}$.

分析： 当分式的分子、分母为多项式时，先将分式的分子、分母分解因式，然后找出它们的公因式，再约分．

解： (1) $\dfrac{ma+mb-mc}{a+b-c}=\dfrac{m(a+b-c)}{a+b-c}=m$；

(2) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}=-\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}=-\dfrac{(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=-\dfrac{a-1}{a+1}$.

通过约分可以把分式化简．

如果一个分式的分子与分母只有公因式 1，那么这样的分式叫做**最简分式**(simplest fraction)．约分通常要把分式化成最简分式或整式．

1. 约分：

(1) $\dfrac{3a^2b}{6ab}$；　　(2) $\dfrac{2a(a-1)}{8ab^2(1-a)}$；

(3) $\dfrac{18(b-a)^2}{24(a-b)}$.

2. 约分：

(1) $\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}$；　　(2) $\dfrac{a^4-1}{a^2+2a+1}$；

(3) $\dfrac{(x+y)^2-10(x+y)+25}{(x+y)^2-25}$.

填空，并说明理由：

(1) $\dfrac{m}{4x^2}=\dfrac{3my}{(\quad)}$，$\dfrac{5}{6xy}=\dfrac{10x}{(\quad)}$；

(2) $\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{6b^2}{(\quad)}$，$\dfrac{x}{4b^2}=\dfrac{3a^2x}{(\quad)}$，$\dfrac{y}{3ab}=\dfrac{4aby}{(\quad)}$.

与分数的通分相类似，根据分式的基本性质，把几个异分母的分式变形成同分母的分式，叫做**分式的通分**(reduction of fractions to a denominator)，变形后的分母叫做这几个分式的公分母．

试找出分式$\dfrac{1}{2x^2y}$与$\dfrac{1}{6xy^2}$的公分母．

如果几个分式的分母都是单项式，那么各分母系数（都是整数）的最小公倍数与所有字母的最高次幂的积叫做这几个分式的**最简公分母**．

通分的关键是确定几个分式的公分母．分式通分时，通常取最简公分母．

例 6　通分：

(1) $\dfrac{b}{3a}, -\dfrac{ab}{\frac{2}{3}c}$；　　(2) $\dfrac{2a}{a-b}, \dfrac{3b}{a+b}$.

解：(1) $-\dfrac{ab}{\frac{2}{3}c}=-\dfrac{3ab}{2c}$，分母 $3a$、$2c$ 的最简公分母是 $6ac$，

$$\frac{b}{3a}=\frac{b\cdot 2c}{3a\cdot 2c}=\frac{2bc}{6ac},\ -\frac{ab}{\frac{2}{3}c}=-\frac{3ab}{2c}=-\frac{3ab\cdot 3a}{2c\cdot 3a}=-\frac{9a^2b}{6ac};$$

(2) 分母 $a-b$、$a+b$ 的最简公分母是 $(a+b)(a-b)$，

$$\frac{2a}{a-b}=\frac{2a(a+b)}{(a+b)(a-b)},\ \frac{3b}{a+b}=\frac{3b(a-b)}{(a+b)(a-b)}.$$

例 7　通分：

(1) $\dfrac{1}{m^2-9}, \dfrac{1}{2m+6}$；　　(2) $\dfrac{x}{xy-y}, \dfrac{y}{xy+x}$.

分析：当分式的分母是多项式时，先将它们分解因式，再确定最简公分母．

解：(1) 分母 $m^2-9=(m+3)(m-3)$，$2m+6=2(m+3)$，它们的最简公分母是 $2(m+3)(m-3)$，

$$\frac{1}{m^2-9}=\frac{2}{2(m+3)(m-3)},\ \frac{1}{2m+6}=\frac{m-3}{2(m+3)(m-3)};$$

(2) 分母 $xy-y=y(x-1)$，$xy+x=x(y+1)$，它们的最简公分母是 $xy(x-1)(y+1)$，

$$\frac{x}{xy-y}=\frac{x^2(y+1)}{xy(x-1)(y+1)},\ \frac{y}{xy+x}=\frac{y^2(x-1)}{xy(x-1)(y+1)}.$$

练习

1. 通分：

(1) $\dfrac{2}{ac}$，$\dfrac{1}{ab}$；　　(2) $\dfrac{2b}{3a^2}$，$\dfrac{a}{bc}$.

2. 通分：

(1) $\dfrac{a}{a-b}$，$\dfrac{3b}{2a-2b}$；　　(2) $\dfrac{5}{2(x-1)}$，$\dfrac{2x}{3(1-x)^2}$；

(3) $\dfrac{m}{m+n}$，$\dfrac{1}{m^2n-mm^2}$；　　(4) $\dfrac{2}{4-9m^2}$，$\dfrac{3m}{9m^2-12m+4}$.

10.2 习题

1. 填空：

(1) $\dfrac{ax^2}{ay}=\dfrac{(\quad)}{y}$；　　(2) $\dfrac{1}{a+2}=\dfrac{a}{(\quad)}$；

(3) $\dfrac{3a}{a+b}=\dfrac{(\quad)}{4(a+b)}$；　　(4) $\dfrac{(\quad)}{a-b}=a+b$.

2. 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正整数：

(1) $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}a}{a+1}$；　　(2) $\dfrac{a^2-0.2a}{a^2-0.3a^3}$.

3. 约分：

(1) $\dfrac{6ab^2}{-2b}$；　　(2) $\dfrac{-4a^2b^2}{-8a^3b}$；

(3) $\dfrac{a^2+2ab}{a^2b+2ab^2}$；　　(4) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

4. 求值：

(1) $\dfrac{a+3b}{a^2-9b^2}$，其中 $a=\dfrac{5}{3}$、$b=\dfrac{2}{9}$；

(2) $\dfrac{a^3-4ab^2}{a^3-4a^2b+4ab^2}$，其中 $a=-2$、$b=-0.5$.

5. 通分：

(1) $\dfrac{a}{xy}$，$\dfrac{b}{yz}$；　　(2) $\dfrac{1}{2a}$，$\dfrac{1}{5a^2b}$；

(3) $\dfrac{c}{a-b}$，$\dfrac{1}{(b-a)^2}$；　　(4) $\dfrac{b}{a(b+1)}$，$\dfrac{a}{b(b+1)}$；

(5) $\dfrac{2a}{2a+1}$，$\dfrac{4(2a-1)}{4a^2-4a+1}$；　　(6) $\dfrac{a-1}{(a+1)^2-4}$，$\dfrac{1-a}{2-4a+2a^2}$.

10.3 分式的加减

怎样计算 $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$、$\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$？

与同分母分数加减运算的法则类似，同分母分式加减运算的法则是：

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减 .

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}$； (2) $\frac{2a-3}{a+1}-\frac{a-2}{a+1}$.

解：(1) $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}$

$=\frac{4}{a}$；

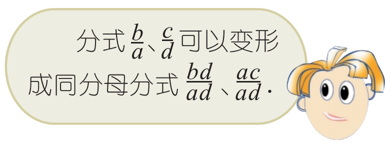
(2) $\frac{2a-3}{a+1}-\frac{a-2}{a+1}$

$=\frac{(2a-3)-(a-2)}{a+1}$

$=\frac{2a-3-a+2}{a+1}$

$=\frac{a-1}{a+1}$.

怎样计算 $\frac{b}{a}+\frac{c}{d}$、$\frac{b}{a}-\frac{c}{d}$？



与异分母分数加减运算的法则类似，异分母分式加减运算的法则是：

异分母的分式相加减，先通分，再加减 .

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{d}=\frac{bd\pm ac}{ad}.$$

例 2 计算：

(1) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}$； (2) $\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\\=&\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}\\=&\frac{2x-5}{x^2};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\\=&\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}-\frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}\\=&\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}\\=&\frac{(a^2+2a+1)-(a^2-2a+1)}{(a+1)(a-1)}\\=&\frac{4a}{(a+1)(a-1)}.\end{aligned}$$

例 3 计算：$\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{2x-4}$.

解：
$$\begin{aligned}&\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{2x-4}\\=&\frac{x}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{2(x-2)}\\=&\frac{2x}{2(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{2(x+2)(x-2)}\\=&\frac{2x-(x+2)}{2(x+2)(x-2)}\\=&\frac{x-2}{2(x+2)(x-2)}\\=&\frac{1}{2(x+2)}.\end{aligned}$$

通常，分式相加减所得的结果应化为最简分式或整式 .

练习

1. 计算：

　(1) $\dfrac{c}{ab^2}+\dfrac{bc}{ab^2}$；　　(2) $\dfrac{3}{a}+\dfrac{a-15}{5a}$；

　(3) $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$；　　(4) $\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{ab}{b^2-a^2}$.

2. 货车的速度为 a km/h，客车的速度为 b km/h($b>a$). 行驶 300 km 客车比货车少用多少时间？

习题 10.3

1. 计算：

　(1) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a-b}$；　　(2) $\dfrac{a^2}{(a-b)^2}-\dfrac{b^2}{(b-a)^2}$；

　(3) $\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{c}{a}$；　　(4) $a-b+\dfrac{2b^2}{a+b}$.

2. 用漫灌方式给绿地浇水，a 天用水 10 t，改用喷灌方式后，10 t 水可以比原来多用 5 天．喷灌比漫灌平均每天节约用水多少？

3. 甲、乙两港口分别位于长江的上、下游，相距 s km，若一艘游轮在静水中航行的速度为 a km/h，水流速度为 b km/h ($b<a$)，则该游轮往返两港口所需的时间相差多少？

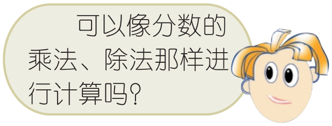
10.4 分式的乘除

如何进行分式的乘法和除法运算?

计算:

$$\frac{4ac}{3b}\cdot\frac{9b^3}{2ac^2}= \qquad \frac{4ac}{3b}\div\frac{9b^3}{2ac^2}=$$

$$\left(\frac{ab}{4c}\right)^2=$$



与分数乘法和除法的运算法则类似，分式乘法、除法的运算法则是:

分式乘分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母;
分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac};\quad \frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}.$$

根据分式乘法和除法的运算法则,

$$\frac{4ac}{3b}\cdot\frac{9b^3}{2ac^2}=\frac{4ac\cdot 9b^3}{3b\cdot 2ac^2}=\frac{36ab^3c}{6abc^2}=\frac{6b^2}{c};$$

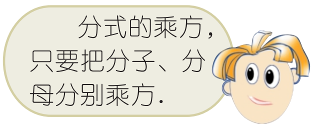
$$\frac{4ac}{3b}\div\frac{9b^3}{2ac^2}=\frac{4ac}{3b}\cdot\frac{2ac^2}{9b^3}=\frac{8a^2c^3}{27b^4}.$$

例 1 计算:

(1) $\frac{ab^2}{6c^2}\cdot\frac{-4c}{3a^2b^2}$;　　(2) $\left(\frac{ab}{4c}\right)^2$.

解: (1) $\frac{ab^2}{6c^2}\cdot\frac{-4c}{3a^2b^2}=-\frac{ab^2\cdot 4c}{6c^2\cdot 3a^2b^2}=-\frac{2}{9ac}$;

(2) $\left(\frac{ab}{4c}\right)^2=\frac{ab}{4c}\cdot\frac{ab}{4c}=\frac{ab\cdot ab}{4c\cdot 4c}=\frac{a^2b^2}{16c^2}$.



例 2　计算：

(1) $\dfrac{y^2}{6x} \div \dfrac{1}{3x^2}$；　　(2) $\dfrac{a^2-6a+9}{1+4a+4a^2} \div \dfrac{12-4a}{2a+1}$.

解： (1) $\dfrac{y^2}{6x} \div \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{y^2}{6x} \cdot \dfrac{3x^2}{1} = \dfrac{xy^2}{2}$；

(2) $$\dfrac{a^2-6a+9}{1+4a+4a^2} \div \dfrac{12-4a}{2a+1} = \dfrac{(a-3)^2}{(2a+1)^2} \cdot \dfrac{2a+1}{-4(a-3)}$$
$$= -\dfrac{a-3}{4(2a+1)}.$$

1. 计算：

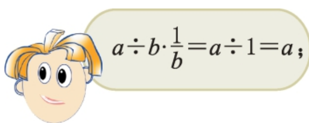
(1) $4ab^3 \cdot \dfrac{-3a}{2b^3}$；　　(2) $\dfrac{8}{x^3} \div \dfrac{36}{x^2}$；

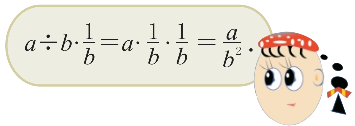
(3) $\dfrac{a^2-4b^2}{4ab^2} \cdot \dfrac{ab}{a+2b}$；　　(4) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab} \div (a+b)$.

2. 计算：

(1) $(a-4) \cdot \dfrac{16-a^2}{a^2-8a+16}$；　　(2) $\dfrac{a^2-a+\frac{1}{4}}{a-3} \div \dfrac{2a-1}{a^2-3a}$.

怎样计算 $a \div b \cdot \dfrac{1}{b}$ ？





谁的算法正确？请说明理由．

分式的乘、除混合运算，要按从左到右的顺序进行．

例 3　求值：$\dfrac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \dfrac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \div \dfrac{a+b-c}{a^2-b^2}$，其中 $a=10$、$b=5$、$c=-4$.

解： $$\dfrac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \dfrac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \div \dfrac{a+b-c}{a^2-b^2}$$
$$= \dfrac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \dfrac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a+b-c}$$

$$=\frac{a(a+b-c)}{a(a-b)}\cdot\frac{a-b-c}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a+b-c}$$

$$=\frac{a-b-c}{a+b}.$$

当 $a=10$、$b=5$、$c=-4$ 时，原式$=\dfrac{10-5-(-4)}{10+5}=\dfrac{3}{5}$.

与分数混合运算类似，分式的加、减、乘、除混合运算的顺序是：先乘除，后加减，如果有括号，先进行括号内的运算．

例 4　计算：$1-\dfrac{a-2}{a}\div\dfrac{a^2-4}{a^2+a}$.

解：

$$1-\frac{a-2}{a}\div\frac{a^2-4}{a^2+a}$$

$$=1-\frac{a-2}{a}\cdot\frac{a^2+a}{a^2-4}$$

$$=1-\frac{a-2}{a}\cdot\frac{a(a+1)}{(a+2)(a-2)}$$

$$=1-\frac{a+1}{a+2}$$

$$=\frac{(a+2)-(a+1)}{a+2}$$

$$=\frac{1}{a+2}.$$

计算：

(1) $\left(1+\dfrac{1}{a-1}\right)\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)$；

(2) $\dfrac{x-2}{x^2}\div\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$；

(3) $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x}$；

(4) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$.

10.4 习题

1. 计算：

(1) $\dfrac{a^2}{b^2c}\cdot\left(-\dfrac{bc^2}{2a}\right)$；

(2) $\dfrac{a-b}{a+b}\div(b-a)$；

(3) $\dfrac{5x+2}{25-10x+x^2}\cdot\dfrac{x^2-25}{25x^2-4}$；

(4) $\dfrac{2x-6}{4-4x+x^2}\div\dfrac{3-x}{(x-2)(x+3)}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{-3a}{b}\cdot\dfrac{ab^2}{-a^3b^2}\div\left(-\dfrac{6b}{a^2}\right)$；

(2) $-\dfrac{a^2-25}{a^2+10a+25}\div\dfrac{a^2-1}{a+5}\cdot\dfrac{a^2+2a+1}{a-5}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{x-3}{x-2}\div\left(x+2-\dfrac{5}{x-2}\right)$；

(2) $1-\dfrac{a-b}{a-2b}\div\dfrac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}$.

4. 求值：

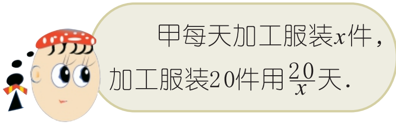
(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}$，其中 $x=\dfrac{1}{2}$；

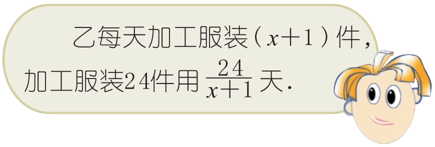
(2) $1-\dfrac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2}\div\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\dfrac{1}{3}$；

(3) $\dfrac{2-x}{x^2+x}\div\dfrac{x^2-3x}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{9-x^2}{4-2x}$，其中 $x=-2$.

10.5 分式方程

问题 1 甲、乙两人加工同一种服装，乙每天比甲多加工 1 件，乙加工服装 24 件所用时间与甲加工服装 20 件所用时间相同．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？

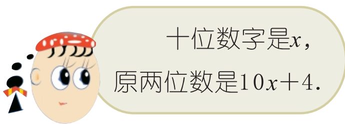


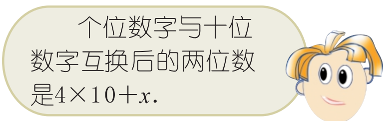


设甲每天加工服装 x 件，可得方程

$$\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}.$$

问题 2 一个两位数的个位数字是 4，如果把个位数字与十位数字互换，那么所得的两位数与原两位数的比值是$\frac{7}{4}$．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？

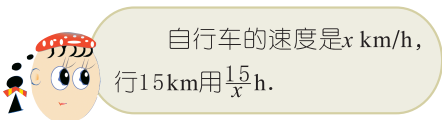


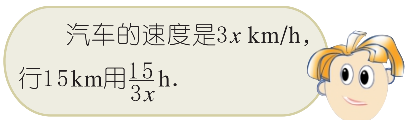


设这个两位数的十位数字是 x，可得方程

$$\frac{4\times10+x}{10x+4}=\frac{7}{4}.$$

问题 3 某校学生到离学校 15 km 处植树，部分学生骑自行车出发40 min后，其余学生乘汽车出发，汽车速度是自行车速度的 3 倍，全体学生同时到达．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？





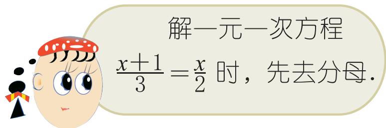
设自行车的速度为 x km/h，可得方程

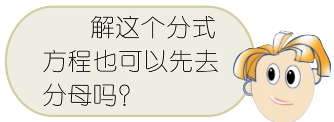
$$\frac{15}{x}=\frac{15}{3x}+\frac{40}{60}.$$

上面所得方程与一元一次方程有什么区别？

方程 $\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}$、$\frac{40+x}{10x+4}=\frac{7}{4}$、$\frac{15}{x}=\frac{15}{3x}+\frac{40}{60}$，分母中都含有未知数，像这样的方程叫做**分式方程**(fractional equation).

如何解分式方程 $\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}$？





这个分式方程的两边同乘各分式的最简公分母 $x(x+1)$，可以得到一元一次方程

$$20(x+1)=24x.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=5.$$

为了判断 $x=5$ 是不是原分式方程的解，我们把 $x=5$ 代入原方程：左边$=\frac{20}{5}=4$，右边$=\frac{24}{5+1}=4$，左边=右边．

$x=5$ 是原方程的解．

解分式方程时，在方程的两边同乘各分式的最简公分母，有时可以转化为解一元一次方程．

例 1　解方程：$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}=0$.

解：方程两边同乘 $x(x-2)$，得

$$3(x-2)-2x=0.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入原方程：左边 $=\frac{3}{6}-\frac{2}{6-2}=0$，右边 $=0$，左边=右边．

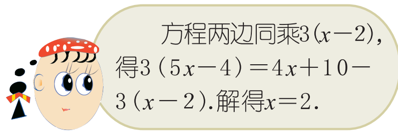
$x=6$ 是原方程的解．

解下列方程：

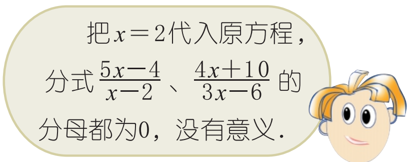
(1) $\frac{40+x}{10x+4}=\frac{7}{4}$；　(2) $\frac{9}{x}=\frac{8}{x-1}$；

(3) $\frac{15}{x}-\frac{15}{3x}=\frac{2}{3}$；　(4) $\frac{x}{2x-5}+\frac{5}{5-2x}=1$.

解分式方程 $\frac{5x-4}{x-2}=\frac{4x+10}{3x-6}-1$.



$x=2$ 是不是这个分式方程的解？



在分式方程 $\frac{5x-4}{x-2}=\frac{4x+10}{3x-6}-1$ 的两边同乘 $3(x-2)$ 后，解得的 $x=2$ 使所乘整式 $3(x-2)$ 的值为 0，$x=2$ 不是原分式方程的根[注]，原方程无解．像这样的根叫做原分式方程的增根．

由于解分式方程可能产生增根，因此解分式方程必须对解得的根进行检验．

［注］只含有一个未知数的方程的解也称为方程的根．

例 2　解下列方程：

(1) $\dfrac{30}{x}=\dfrac{20}{x+1}$；　　　　(2) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{16}{x^2-4}$.

解：(1) 方程两边同乘 $x(x+1)$，得

$$30(x+1)=20x.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=-3.$$

检验：当 $x=-3$ 时，$x(x+1)=6\neq0$，$x=-3$ 是原方程的解 .

(2) 方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$，得

$$(x-2)^2-(x+2)^2=16.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=-2.$$

检验：当 $x=-2$ 时，$(x+2)(x-2)=0$，$x=-2$ 是增根，原方程无解 .

解下列方程：

(1) $\dfrac{4+x}{x-1}-5=\dfrac{2x}{x-1}$；　　　　(2) $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1-x}{2-x}-3$；

(3) $\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{x^2-1}$.

例 3　某校为迎接市中学生田径运动会，计划由八年级(1)班的 3 个小组制作 240 面彩旗，后因 1 个小组另有任务，其余 2 个小组的每名学生要比原计划多做 4 面彩旗才能完成任务． 如果这 3 个小组的人数相等，那么每个小组有学生多少名？

解：设每个小组有学生 x 名 .

根据题意，得

$$\frac{240}{2x}-\frac{240}{3x}=4.$$

解这个方程，得

$$x=10.$$

经检验，$x=10$ 是所列方程的解．

答： 每个小组有学生 10 名．

例 4 甲、乙两公司为“见义勇为基金会”各捐款 30 000 元．已知甲公司的人数比乙公司的人数多 20%，乙公司比甲公司人均多捐 20 元．甲、乙两公司各有多少人?

解： 设乙公司有 x 人，则甲公司有 $(1+20\%)x$ 人．

根据题意，得

$$\frac{30\,000}{x}-\frac{30\,000}{(1+20\%)x}=20.$$

解这个方程，得

$$x=250.$$

经检验，$x=250$ 是所列方程的解．

$$(1+20\%)x=300.$$

答： 甲公司有 300 人，乙公司有 250 人．

例 5 小明用 12 元买软面笔记本，小丽用 21 元买硬面笔记本．已知每本硬面笔记本比软面笔记本贵 1.2 元，小明和小丽能买到相同数量的笔记本吗?

解： 设软面笔记本每本 x 元，则硬面笔记本每本 $(x+1.2)$ 元．

若小明和小丽能买到相同数量的笔记本，则

$$\frac{12}{x}=\frac{21}{x+1.2}.$$

解这个方程，得

$$x=1.6.$$

经检验，$x=1.6$ 是所列方程的解．

但按此价格，他们都买了 7.5 本笔记本，不符合实际意义．

答： 小明和小丽不能买到相同数量的笔记本．

有时，根据实际问题列出的分式方程虽然有解，但方程的解不符合实际意义，这个实际问题仍无解．

练习

1. 一个分数的分母比它的分子大 5，如果将这个分数的分子加上 14，分母减去 1，那么所得分数是原分数的倒数．求原分数．
2. 甲、乙两个机器人检测零件，甲比乙每小时多检测 10 个，甲检测 300 个与乙检测 200 个所用的时间相等．甲、乙两个机器人每小时各检测零件多少个？

10.5 习题

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{3-x}{4+x}=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=0$；

(3) $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{4x-1}{2x+3}$；　　(4) $\dfrac{x}{2x-1}=2-\dfrac{3}{1-2x}$.

2. 解下列方程：

(1) $\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}$；　　(2) $\dfrac{x-8}{x-7}-\dfrac{1}{7-x}=8$；

(3) $\dfrac{2x-5}{x-2}=\dfrac{3x-3}{x-2}-3$；　　(4) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}=1$.

3. 小丽与小明为艺术节做小红花，小明比小丽每小时多做 2 朵．已知小明做 100 朵与小丽做 90 朵所用时间相等，小明、小丽每小时各做小红花多少朵？
4. 为了改善生态环境，防止水土流失，某村计划在荒坡上种树 960 棵．由于青年志愿者支援，实际每天种树的棵数是原计划的 $\dfrac{4}{3}$ 倍，结果提前 4 天完成任务．原计划每天种树多少棵？
5. 某市为了构建城市立体道路网络，决定修建一条轻轨铁路，为使工程提前半年完成，需将工作效率提高 25%．原计划完成这项工程需要多少个月？

阅读

类　比

光和声，这两类现象具有许多相同的性质，如它们都是直线传播、都有折射与反射现象等．荷兰物理学家、数学家、天文学家惠更斯(Christiaan Huygens 1629～1695 年)，在当时已经知道“声具有波动性质”的基础上，通过光与声的类比提出“光可能有波动性质”的猜想．后来，光的波动性质通过实验得到了证实．像这样，由两个对象具有某些相同的性质，推出它们的其他性质也可能相同的思想方法，称为类比．

在数学中，我们也经常采用类比的思想方法研究问题，探索未知．例如，把分式与分数进行类比，我们得到了分式的基本性质，分式的通分、约分以及分式的加、减、乘、除运算法则．

运用类比的思想方法研究问题时，不仅要关注两类事物的相同点，而且要关注它们的不同点．例如，将一元一次不等式的解法与一元一次方程的解法类比时，应当注意它们的不同点：方程两边同乘(除以)一个不为 0 的数时，不必考虑这个数是正数，还是负数；但不等式的两边同乘(除以)一个不为 0 的数时，必须注意这个数是正数，还是负数，当这个数是负数时，所得不等式的不等号的方向要改变．

在我们的生活、学习和科学研究等方面，类比常常发挥独特的作用．

数学活动

分式游戏

每人制作几张卡片，在卡片上写一个简单的整式或运算符号，如

$+$　x　$1-x$　x^2-1　-3　——　$=$

游戏一　将其中两张卡片分别放在分子、分母上，它们组成的式子是分式吗？如果是分式，它什么时候有意义？它的值能为 0 吗？

游戏二　用卡片组成一个分式方程，并求出它的解．

设计游戏规则，与同学一起做这个分式游戏．

小结与思考

1. 如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么代数式 $\dfrac{A}{B}$ 叫做分式．

整式和分式统称为有理式，即有理式 $\begin{cases} 整式\begin{cases} 单项式 \\ 多项式 \end{cases} \\ 分式 \end{cases}$

2. 分式的基本性质是通分、约分和分式运算的依据．

3. 本章中的分式方程都是可化为一元一次方程的分式方程，解这类方程的一般步骤是：

$$\boxed{\text{可化为一元一次方程的分式方程}} \xrightarrow{\text{去分母}} \boxed{\text{一元一次方程}} \longrightarrow \boxed{\text{解一元一次方程}} \longrightarrow \boxed{\text{检验}}$$

4. 解分式方程时，为什么必须检验？如何检验？

5. 你能举出本章中通过类比探索新知识的例子吗？

复习题

复习巩固

1. x 取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\dfrac{x+2}{2x+1}$；　　(2) $\dfrac{2x-2}{4x^2+3}$.

2. 化简：(1) $\dfrac{1-a^2}{a^2-2a+1}$；　　(2) $\dfrac{4a^2b+4ab^2+b^3}{2b^3-8a^2b}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{a-c}{a-b}-\dfrac{c-b}{b-a}$；　　(2) $\dfrac{2m}{m^2-4}-\dfrac{m}{m-2}$；

(3) $\dfrac{a^2-4}{2ab}\cdot\dfrac{4a^2b+8ab}{a^2+4a+4}$；　　(4) $\dfrac{a^2}{a+3}\div\dfrac{6a}{a^2-9}$；

(5) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\div\dfrac{a^2-ab}{2a+2b}$；　　(6) $(a^2-2ab+b^2)\div\dfrac{ab-b^2}{a+b}$.

4. 计算：

(1) $\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{x}$；　　(2) $\dfrac{a-1}{a}\div\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$.

5. 某工程队要修路 a m，原计划平均每天修 b m. 因天气原因，平均每天少修 c m($c<b$)．因此，实际完成工程的时间比原计划推迟多少天？

6. 解下列方程：

(1) $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}$；　　(2) $\dfrac{x}{2x-1}=1-\dfrac{2}{1-2x}$；

(3) $\frac{3}{4-x}+2=\frac{1-x}{x-4}$；　　　(4) $\frac{2x+9}{3x-9}=\frac{4x-7}{x-3}+2$.

7. 甲、乙两人每小时共做 35 个零件，甲做 160 个零件所用的时间与乙做 120 个零件所用的时间相等．甲、乙两人每小时各做多少个零件?

8. 某中学组织学生去离学校 15 km 的东山农场，先遣队与大队同时出发，先遣队的速度是大队的速度的 1.2 倍，结果先遣队比大队早到 0.5 h. 先遣队和大队的速度各是多少?

灵活运用

9. 当 m 取哪些整数时，分式 $\frac{4}{m-1}$ 的值是整数?

10. 求 $\frac{3-a}{2a-4}\div\left(a+2-\frac{5}{a-2}\right)$ 的值，其中 $a=-\frac{1}{2}$.

11. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，求 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-b^2}$ 的值．

12. 当 x、y 满足什么条件时，分式 $\frac{x-y}{1+x}$ 的值为 0?

探索研究

13. (1) 已知 $\frac{3x-2}{x+1}=3+\frac{m}{x+1}$，求 m；

(2) 已知 $\frac{ax+b}{x+c}=a+\frac{m}{x+c}$ (其中 a、b、c 为常数)，求 m.

14. 观察下列式子，并探索它们的规律：

$$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

……

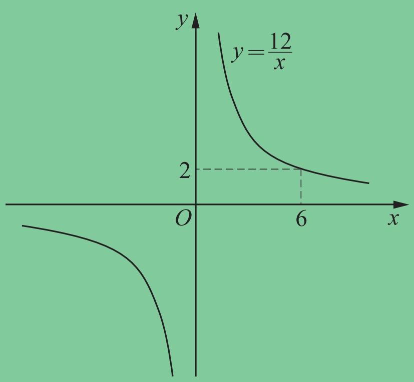
试用正整数 n 表示这个规律，并加以证明．

15. (1) 分式方程 $\frac{1-x}{x-2}+2=\frac{1}{2-x}$ 有解吗? 为什么?

(2) 化简分式 $\frac{1-x}{x-2}+2-\frac{1}{2-x}$，结果可能为 0 吗?

(3) 问题(1)与(2)有什么联系? 谈谈你的想法．

第11章　反比例函数



从成反比例的量到反比例函数，
反比例函数揭示成反比例的两个量变化的关系.

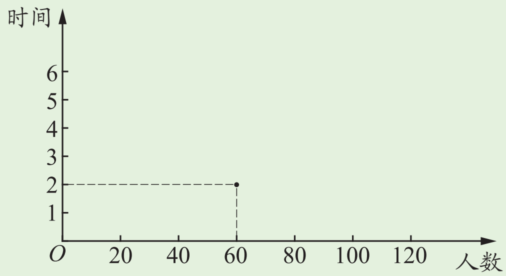
校绿色行动小组组织 60 人参加植树活动，计划植树 480 棵，2 h 可以完成任务．如果植树人数增加到 80 人、100 人、120 人，那么各需多少时间才能完成任务？如果植树人数减少到 40 人、20 人呢？

填表：

人数	…	20	40	60	80	100	120	…
完成时间/h	…			2				

为了能在 1.5 h 内完成任务，至少需要多少人？

根据表中数据，在平面直角坐标系中描出相应的点．



完成任务的时间 t 与人数 n 是什么关系？t 是 n 的函数吗？

本章将学习反比例函数的概念、图像、性质和应用．

11.1　反比例函数

在小学里，我们已经知道，如果两个量的乘积一定，那么这两个量成反比例.

成反比例的两个量之间的关系，怎样用函数表达式来描述呢?

南京与上海相距约 300 km. 一辆汽车从南京出发，以速度 v(km/h) 开往上海，全程所用时间为 t(h). 写出 t、v 的函数表达式，并填写下表：

v	60	70	80	90	100
t					

随着速度的变化，全程所用的时间发生怎样的变化? 时间 t 是速度 v 的函数吗?

用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系：

(1) 计划修建一条长为 500 km 的高速公路，完成该项目的天数 y(天)随日完成量 x(km)的变化而变化;

(2) 一家银行为某社会福利厂提供了 20 万元的无息贷款，该厂的平均年还款额 y(万元)随还款年限 x(年)的变化而变化;

(3) 游泳池的容积为 5 000 m^3，向池内注水，注满水池所需时间 t(h) 随注水速度 v(m^3/h)的变化而变化;

(4) 实数 m 与 n 的积为 -200，m 随 n 的变化而变化.

函数表达式 $y=\dfrac{500}{x}$、$y=\dfrac{20}{x}$、$t=\dfrac{5\,000}{v}$、$m=-\dfrac{200}{n}$ 具有什么共同特征? 你还能举出类似的实例吗?

一般地，形如 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$) 的函数叫做**反比例函数** (inverse proportional function)，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数.

反比例函数的自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数．

例 写出下列问题中两个变量之间关系的函数表达式，并判断它们是否为反比例函数．

（1）面积是 50 cm^2 的矩形，一边长 y(cm)随另一边长 x(cm)的变化而变化；

（2）体积是 100 cm^3 的圆锥，高 h(cm)随底面面积 S(cm^2)的变化而变化．

解：（1）根据题意，得 $xy=50$，即

$$y=\frac{50}{x},$$

y 是 x 的反比例函数；

（2）根据题意，得 $\frac{1}{3}Sh=100$，即

$$h=\frac{300}{S},$$

h 是 S 的反比例函数.

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并判断所列函数表达式是否为反比例函数：

（1）一边长 5 cm 的三角形，面积 y(cm^2)随这边上的高 x(cm)的变化而变化；

（2）某村有耕地 200 公顷，人均占有耕地面积 y(公顷)随人口数量 x(人)的变化而变化；

（3）一个物体重 120 N[注]，该物体对地面的压强 p(N/m^2)随它与地面的接触面积 S(m^2)的变化而变化．

［注］在国际单位制中，压力的单位为牛(N)，压强为单位面积上所受到的压力，单位为帕斯卡(Pascal)，简称帕（Pa），1 Pa=1 N/m^2.

2. 下列函数表达式中的 y 是 x 的反比例函数吗？如果是，把它写成 $y=\dfrac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值．

(1) $y=\dfrac{2}{3}x$；　　(2) $xy+2=0$.

11.1 习题

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出其中哪些是反比例函数．
   (1) 一个长方体的体积为 10 m^3，这个长方体的高 h(m)随底面积 S(m^2)的变化而变化；
   (2) 汽车行驶了 1 000 m，车轮旋转的周数 n 随车轮直径 D(m)的变化而变化；
   (3) 甲、乙两地相距 300 km，从甲地到乙地所需时间 t(h)随速度 v(km/h)的变化而变化．
2. 下列函数表达式中的 y 是 x 的反比例函数吗？如果是，把它写成 $y=\dfrac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值．

   (1) $xy=4$；　　(2) $x=-\dfrac{5}{y}$.

11.2 反比例函数的图像与性质

我们已经知道，一次函数 $y=kx+b$(k、b 为常数，$k\neq 0$）的图像是一条直线．反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$）的图像是怎样的图形呢？

思考

根据反比例函数表达式 $y=\dfrac{6}{x}$，可以描述这个函数的图像具有的一些特征．试回答下列问题：

(1) x、y 的值可以为 0 吗？

这个函数的图像与 x 轴、y 轴有交点吗？

(2) x、y 所取值的符号有什么关系？

这个函数的图像会在哪几个象限？

(3) 当 $x>0$ 时，随着 x 的增大（减小），y 怎样变化？当 $x<0$ 时，随着 x 的增大（减小），y 怎样变化？

这个函数的图像与 x 轴、y 轴的位置关系有什么特征？

操作

画反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图像．

列表：恰当地选取自变量 x 的几个值，计算函数 y 对应的值．

x	…	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	…
$y=\dfrac{6}{x}$	…											…

描点：以表中各对 x、y 的值为点的坐标，在平面直角坐标系中描出相应的点．

连线：用平滑的曲线顺次连接第一象限内的各点，得到图像的一支；顺次连接第三象限内的各点，得到图像的另一支．两支合在一起就是反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图像（如图 11－1）.

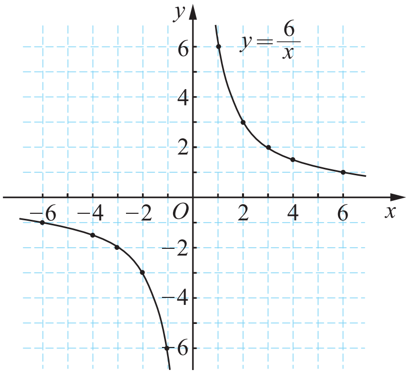
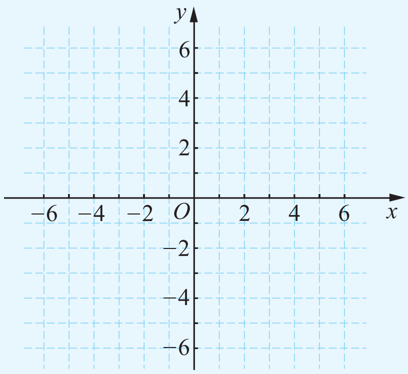


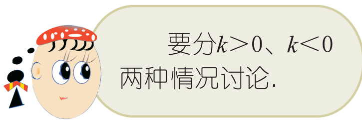
图 11－1

根据反比例函数表达式 $y=-\dfrac{6}{x}$，说出它的图像具有的特征，并在图 11－1 中画出它的图像．

画出反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$、$y=-\dfrac{4}{x}$ 的图像：



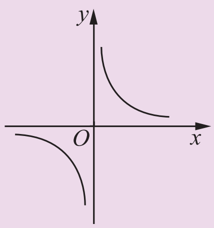
反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图像有什么特征？



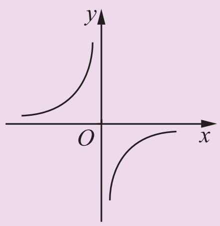
反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$) 的图像是双曲线.

当 $k>0$ 时，双曲线的两支分别在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.



$k>0$



$k<0$

例 1　已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,-4)$.

(1) 求 k 的值；

(2) 函数的图像在哪几个象限？y 随 x 的增大怎样变化？

(3) 画出函数的图像；

(4) 点 $B\left(\dfrac{1}{2},-16\right)$、$C(-3,5)$ 在这个函数的图像上吗？

解：(1) 因为函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,-4)$，把 $x=2$、$y=-4$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $-4=\dfrac{k}{2}$，解得 $k=-8$；

(2) 因为 $k=-8<0$，由反比例函数的性质可知，函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大；

(3) 函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像如图 11－2；

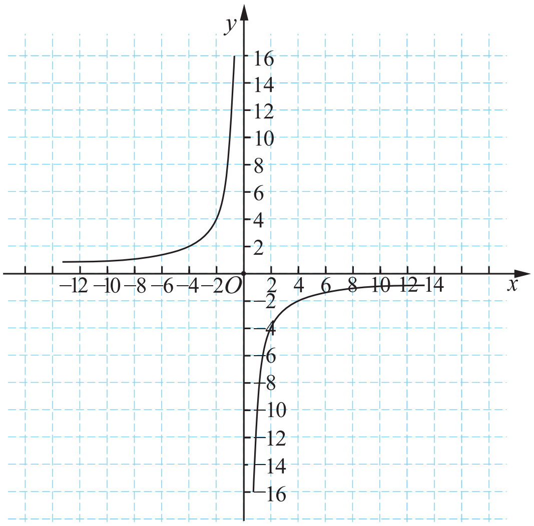


图 11－2

(4) 把 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入 $y=-\dfrac{8}{x}$，得 $y=-16$，点 $B\left(\dfrac{1}{2},-16\right)$ 在函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像上；把 $x=-3$ 代入 $y=-\dfrac{8}{x}$，得 $y=\dfrac{8}{3}$，点 $C(-3,5)$ 不在函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像上．

在图 11－2 中，画点 $A(4,-2)$，点 A 在函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像上吗？写出点 A 关于原点 O 对称的点 A' 的坐标，点 A' 在函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像上吗？在函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像上任取一点 B，点 B 关于原点 O 的对称点 B' 在这个图像上吗？

反比例函数的两支图像关于原点对称．

1. 反比例函数① $y=\dfrac{2}{x}$、② $y=\dfrac{1}{3x}$、③ $7y=-\dfrac{10}{x}$、④ $y=\dfrac{3}{100x}$ 的图像中：

(1) 在第一、三象限的是________，在第二、四象限的是________；

(2) 在其所在各个象限内，y 随 x 的增大而增大的是________．

2. 已知反比例函数的图像经过点 $A(-6,-3)$.

(1) 确定这个反比例函数的表达式；

(2) 函数的图像在哪几个象限？y 随 x 的增大怎样变化？

(3) 点 $B\left(4,\dfrac{9}{2}\right)$、$C(2,-5)$ 在这个函数的图像上吗？

例 2 设菱形的面积是 5 cm^2，两条对角线的长分别是 x cm、y cm.

(1) 确定 y 与 x 的函数表达式；

(2) 画出这个函数的图像 .

解：(1) 由“菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半”，得

$$\frac{1}{2}xy=5.$$

y 与 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{10}{x}$，y 是 x 的反比例函数 .

(2) 根据题意，可知 $x>0$.

反比例函数 $y=\dfrac{10}{x}$ $(x>0)$ 的图像如图 11－3.

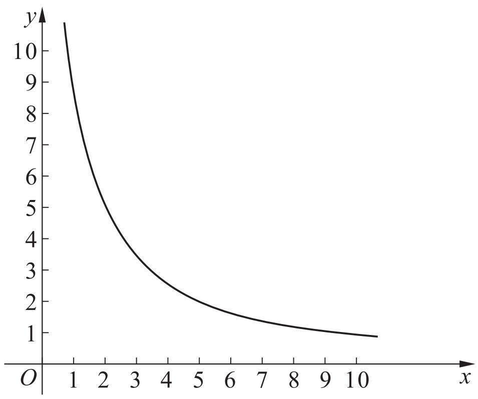


图 11－3

例 3 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像与一次函数 $y=x+1$ 的图像的一个交点的横坐标是 -3.

(1) 求 k 的值，并画出这个反比例函数的图像；

(2) 根据反比例函数的图像，指出当 $x<-1$ 时，y 的取值范围 .

解：(1) 把 $x=-3$ 代入 $y=x+1$，得 $y=-2$.

根据题意，可得反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像与一次函数 $y=x+1$ 的图像的一个交点的坐标是$(-3，-2)$.

把 $x=-3$、$y=-2$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $-2=\frac{k}{-3}$，即 $k=6$.

函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像如图 11 - 4.

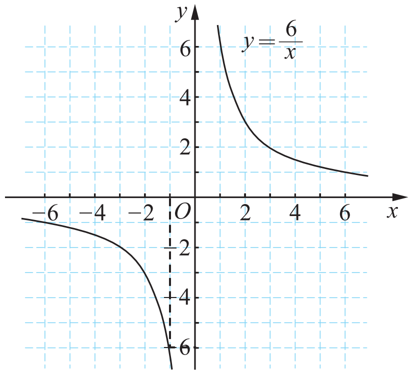


图 11 - 4

(2) 由函数图像知，当 $x<-1$ 时，$-6<y<0$.

1. 已知反比例函数 $y=\frac{n+3}{x}$ 的图像在同一象限内，y 随 x 的增大而增大，求 n 的取值范围.
2. 已知点 $A(2，y_1)$、$B(1，y_2)$都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图像上，比较 y_1、y_2 的大小.

用计算机探索函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像随 k 值的变化情况[注]

1. 在"绘图"菜单中利用"定义坐标系"命令建立平面直角坐标系(如图 1).

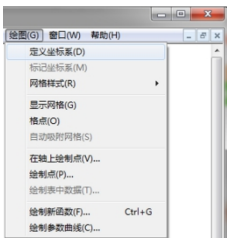


图 1

[注] 文中使用的软件是几何画板 5.06 版(中文版).

2. 在“数据”菜单中点击“新建参数”对话框(如图 2)，在弹出的对话框中的“名称”栏中键入“k”，点击“确定”按钮(如图 3)．

图 2

图 3

此时，屏幕上出现一个变量 k(如图 4)．

3. 在横轴上任取一点 A，在“度量”菜单中点击“横坐标”命令得到点 A 的横坐标(如图 5)．

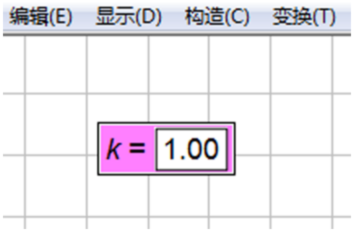


图 4


图 5

4. 在“数据”菜单中点击“计算”命令，在对话框中输入式子 $\frac{k}{x_A}$，再点击“确定”按钮，即算得 $y=\frac{k}{x_A}$.

5. 按顺序选中点 A 的横坐标和计算得到的 y 值，在“绘图”菜单中点击“绘制点(x，y)(P)”按钮，在平面直角坐标系中绘制一个点 B.

6. 选中点 A 和点 B(与顺序无关)，在“构造”菜单中点击“轨迹”按钮，作出点 B 的轨迹，这个轨迹就是所求作的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像——双曲线(如图 6)．

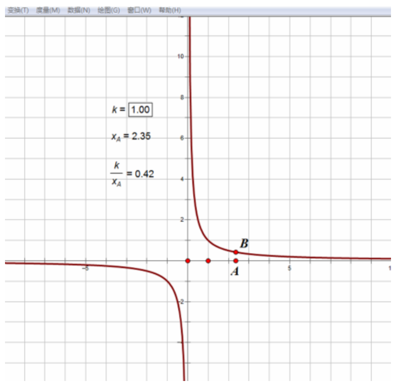


图 6

7. 选中变量 k，同时按住“Shift”和“＋”键，就可以使变量 k 增大，相对应的图像也就发生了变化；按“－”键，就可以使变量 k 减小，相对应的图像也就发生了变化．系统设定的变量 k 变化的步长为 0.01，我们还可以用如下方法改变变化的步长：选中变量 k，并将光标放在“变量 k”上，点击鼠标右键，点击“属性”对话框(如图 7)，在弹出的对话框中，在“参数”下的“键盘调节”中输入你想要的步长(如图 8)，点击“确定”按钮，这样变量 k 变化的步长就改成你所设定的，不妨试一下．

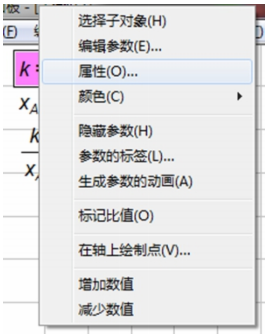


图 7

图 8

8. 选中变量 k，并将光标放在变量 k 上，点击鼠标右键，点击“生成参数的动画(A)”命令，观察函数的图像是怎样随着变量 k 的变化而变化的(k 增大时，图像如何变化？k 减小时，图像又如何变化？k 取正值时，图像情况如何？k 取负值时，图像情况又如何?)．

11.2 习题

1. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

(1) $y=\dfrac{7}{x}$；　　　　(2) $y=-\dfrac{7}{x}$.

2. 已知 y 是 x 的反比例函数，根据下表确定这个反比例函数的表达式，并填写表中的空格．

x	-3	-2	-1	2		6
y		6			-3	

3. 设矩形的面积是 24 cm^2，相邻两边的长分别是 x cm、y cm.

(1) 确定 y 与 x 的函数表达式；

(2) 画出这个函数的图像．

4. 已知函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点(2，−6).

(1) 求 k 的值，并画出这个函数的图像；

(2) 当 x 取什么值时，函数的值小于 0?

5. 正比例函数 $y=2x$ 的图像与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像有一个交点的横坐标是 2.

(1) 求 k 的值，并画出这个反比例函数的图像；

(2) 根据反比例函数的图像，指出当 $-4<x<-1$ 时，y 的取值范围．

11.3　用反比例函数解决问题

反比例函数是刻画现实世界数量关系的一种数学模型．生活、生产实际中的一些问题，可以利用反比例函数的有关性质解决．

问题 1　小明要把一篇 24 000 字的社会调查报告录入电脑．

(1) 完成录入的时间 t(分)与录入文字的速度 v(字/分)有怎样的函数关系？

(2) 要在 3 h 内完成录入任务，小明每分钟至少应录入多少个字？

解：(1) 由 $v \cdot t=24\,000$，得

$$t=\frac{24\,000}{v}.$$

完成录入的时间 t 是录入文字的速度 v 的反比例函数．

(2) 把 $t=180$ 代入 $v \cdot t=24\,000$，得

$$v=\frac{24\,000}{180}=\frac{400}{3}\approx 133.3.$$

根据反比例函数的性质，t 随 v 的增大而减小，因此，小明每分钟至少应录入 134 字，才能在 3 h 内完成录入任务．

问题 2　某厂计划建造一个容积为 4×10^4 m^3 的长方体蓄水池．

(1) 蓄水池的底面积 S(m^2)与其深度 h(m)有怎样的函数关系？

(2) 如果蓄水池的深度设计为 5 m，那么它的底面积应为多少？

(3) 如果考虑绿化以及辅助用地的需要，蓄水池的长和宽最多只能分别设计为 100 m 和 60 m，那么它的深度至少应为多少米(精确到 0.01)？

解：(1) 由 $Sh=4\times10^4$，得

$$S=\frac{40\ 000}{h}.$$

蓄水池的底面积 S 是其深度 h 的反比例函数.

(2) 把 $h=5$ 代入 $S=\frac{40\ 000}{h}$，得

$$S=\frac{40\ 000}{5}=8\ 000.$$

当蓄水池的深度设计为 5 m 时，它的底面积应为 8 000 m^2.

(3) 根据题意，得

$$S=100\times60=6\ 000.$$

把 $S=6\ 000$ 代入 $S=\frac{40\ 000}{h}$，得

$$h=\frac{40\ 000}{6\ 000}\approx6.667.$$

根据反比例函数的性质，S 随 h 的增大而减小，因此，蓄水池的深度至少应为 6.67 m.

1. A、B 两地相距 300 km，汽车以 x km/h 的速度从 A 地到达 B 地需 y h，写出 y 与 x 的函数表达式. 如果汽车的速度不超过 100 km/h，那么汽车从 A 地到 B 地至少需要多少时间？
2. 在本节的问题 2 中，建造蓄水池需要运送的土石方总量为 4×10^4 立方米，某运输公司承担了该项工程的运送土石方任务.
   (1) 运输公司平均每天运送的土石方 V(立方米/天)与完成任务所需要的时间 t(天)之间有怎样的函数关系？
   (2) 运输公司共派出 20 辆卡车，每辆卡车每天可运送土石方 100 立方米，需要多少天才能完成该任务？工程进行了 8 天后，如果需要提前 4 天完成任务，那么该运输公司至少需要增派多少辆同样的卡车才能按时完成任务？

问题 3　某报报道：一村民在清理鱼塘时被困淤泥中，消防队员以门板作船，泥沼中救人．

如果人和门板对淤泥地面的压力合计 900 N，而淤泥承受的压强不能超过 600 Pa，那么门板面积至少要多大？

分析： 根据物理学知识，人和门板对淤泥的压力 F(N) 确定时，人和门板对淤泥的压强 p(Pa) 与门板面积 S(m^2) 成反比例函数关系：$p=\dfrac{F}{S}$.

解： 设人和门板对淤泥的压强为 p(Pa)，门板面积为 S(m^2)，则 $p=\dfrac{900}{S}$.

把 $p=600$ 代入 $p=\dfrac{900}{S}$，得

$$\frac{900}{S}=600.$$

解得

$$S=1.5.$$

根据反比例函数的性质，p 随 S 的增大而减小，因此门板面积至少要 1.5 m^2.

问题 4　某气球内充满了一定质量的气体，在温度不变的条件下，气球内气体的压强 p(Pa) 是气球体积 V(m^3) 的反比例函数，且当 $V=1.5$ m^3 时，$p=16\ 000$ Pa.

(1) 当 $V=1.2$ m^3 时，求 p 的值；

(2) 当气球内的气压大于 40 000 Pa 时，气球将爆炸，为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于多少？

解： (1) 设 p 与 V 的函数表达式为 $p=\dfrac{k}{V}$(k 为常数，$k\neq 0$).

把 $p=16\ 000$、$V=1.5$ 代入 $p=\dfrac{k}{V}$，得

$$16\,000 = \frac{k}{1.5}.$$

解得

$$k = 24\,000.$$

p 与 V 的函数表达式为 $p = \dfrac{24\,000}{V}$.

当 $V = 1.2$ 时，$p = \dfrac{24\,000}{1.2} = 20\,000$.

(2) 把 $p=40\,000$ 代入 $p=\dfrac{24\,000}{V}$，得

$$40\,000 = \frac{24\,000}{V}.$$

解得

$$V = 0.6.$$

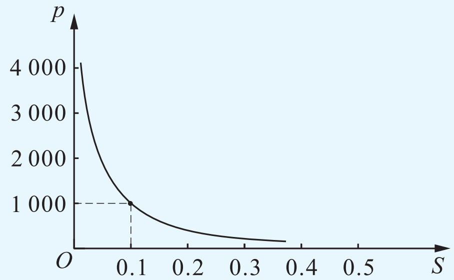
根据反比例函数的性质，p 随 V 的增大而减小，因此为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于 $0.6\ \mathrm{m}^3$.

练习

1. 在压力不变的情况下，某物体所受到的压强 p(Pa)与它的受力面积 $S(\mathrm{m}^2)$之间成反比例函数关系，其图像如图所示．

(1) 求 p 与 S 之间的函数表达式；

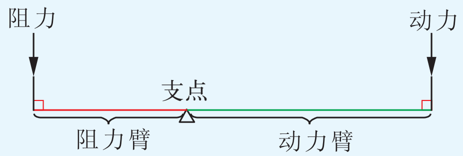
(2) 当 $S=0.4\ \mathrm{m}^2$ 时，求该物体所受到的压强 p.

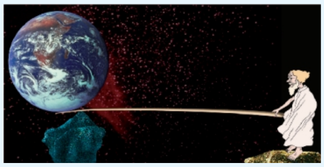


（第 1 题）

2. 公元前 3 世纪，古希腊学者阿基米德发现了著名的“杠杆原理”. 杠杆平衡时，

$$阻力 \times 阻力臂 = 动力 \times 动力臂.$$





（第 2 题）

（1）几位同学玩撬石头游戏，已知阻力（石头重量）和阻力臂分别为 1600 N 和 0.5 m，设动力臂为 l，动力为 F，写出 F 与 l 的函数表达式. 小明只有 500 N 的力量，他该选择动力臂为多少的撬棍才能撬动这块大石头呢？

（2）阿基米德曾豪言：给我一个支点，我能撬动地球. 你能解释其中的道理吗？

11.3 习题

1. 以 12 m^3/h 的速度向水池注水，8 h 可以注满水池.

（1）设注水速度为 $Q(m^3/h)$，注满水池所需要的时间为 $t(h)$，写出 t 与 Q 之间的函数表达式；

（2）要在 5 h 内注满水池，注水速度至少应为多少？

2. 一列货车从北京开往乌鲁木齐，以 58 km/h 的平均速度行驶需要 65 h. 为实施西部大开发，京乌线决定全线提速.

（1）如果提速后的平均速度为 v km/h，全程运行时间为 t h，写出 t 与 v 之间的函数表达式.

（2）如果提速后的平均速度为 78 km/h，那么提速后全程运行时间为多少？

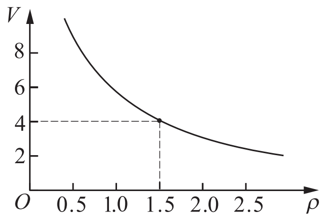
（3）如果全程运行时间控制在 40 h 内，那么提速后的平均速度至少应为多少？

3. 某沼泽地能承受的压强为 2×10^4 Pa，一名学生的体重为 600 N，他与沼泽地的接触面积多大时，才不至于陷入沼泽地？

4. 一定质量的二氧化碳，它的体积$V(\mathrm{m}^3)$与它的密度$\rho(\mathrm{kg/m}^3)$之间成反比例函数关系，其图像如图所示.

(1) 试确定V与ρ之间的函数表达式；

(2) 当$\rho=2.5\ \mathrm{kg/m}^3$时，求$V$的值.



（第 4 题）

阅读

生活中的反比例函数

在日常生活、生产活动中，反比例函数有着广泛的应用．如果你注意观察，会发现身边的许多现象，其本质都与反比例函数有着联系．

1. 为什么使劲踩气球，气球会爆炸?

我们知道，在温度不变的情况下，气球内气体的压强与它的体积成反比例函数关系．如果使劲踩气球，气球内气体的体积变小，压强增大到足够大时气球就会爆炸．

2. 为什么有的台灯的亮度可以调节?

有些电器的功率P与电阻R之间成反比例函数关系：$PR=U^2$(U表示电压，我国生活用电的电压一般为220 V)．在电压U保持不变的情况下，调节台灯的电阻，台灯的功率随之发生变化，于是亮度也发生变化．

你能否解释为什么打针用的针头是尖的、推土机的轮子要安装又宽又长的履带吗?

你还能举出生活中可以用反比例函数解释的现象吗?

数学活动

反比例函数实例调查

1. 函数表达式 $y=\dfrac{1\,200}{x}$ 可以表示实际问题中数量之间的关系. 例如，

小明的家离学校 1.2 km，早晨小明骑自行车上学需 x min，那么小明骑车的速度 y(m/min)可以表示为 $y=\dfrac{1\,200}{x}$；

某校八年级为“爱心工程”捐款 1 200 元，平均每人捐款 x 元，那么该年级的学生数 y(人)可以表示为 $y=\dfrac{1\ 200}{x}$；

体积为 1 200 cm^3 的圆柱的底面积为 x cm^2，那么圆柱的高 y（cm）可以表示为 $y=\dfrac{1\ 200}{x}$；

⋮

函数表达式 $y=\dfrac{1\ 200}{x}$ 可以表示许多实际问题中数量之间的关系，你还能举出这样的实际例子吗?

2. 调查生活中的反比例函数的实例，并运用反比例函数的有关知识解决问题.

小结与思考

1. 形如 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$) 的函数叫做反比例函数．反比例函数是刻画现实世界数量关系的一种数学模型.

2. 反比例函数的图像是由两支曲线构成的双曲线．当 $k>0$ 时，双曲线的两支分别在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大．双曲线的两支都无限接近 x 轴和 y 轴，但与 x 轴、y 轴不相交.

3. 如果 z 是 y 的反比例函数，y 是 x 的反比例函数，那么 z 与 x 有怎样的函数关系?

4. 观察下表中的数据，你发现这些数据有什么规律? 按照这种规律，n 所对应的值应该是多少?

1	2	3	4	…	n	…
144	72	48	36	…		…

你能举出一个实际问题符合你所发现的规律吗?

复习题

复习巩固

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出其中哪些是反比例函数.

(1) 长 100 m 的绳子剪下 x m 后，还剩 y m；

(2) 买单价为 8 元的笔记本 x 本，共用了 y 元；

(3) 以 x L/min 的速度向容积为 20 L 的水池中注水，注满水池需 y min；

(4) 面积为 24 的等腰三角形的底边长为 x，高为 y.

2. 近视眼镜镜片的度数 y(度)与镜片焦距 x(m)成反比例．已知 400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25 m，求 y 与 x 的函数表达式.

3. 在温度不变的条件下，一定量的气体的压强 p(Pa)与它的体积 V(m^3)成反比例．已知当 $V=200$ m^3 时，$p=50$ Pa.

(1) 写出 V 与 p 的函数表达式.

(2) 当 $V=100$ m^3 时，求 p 的值.

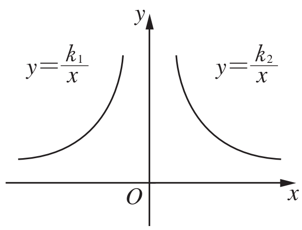
4. 在平面直角坐标系中分别画出函数 $y=\dfrac{5}{x}$、$y=-\dfrac{5}{x}$ 的图像.

5. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点$(-2，1)$.

(1) 试确定该函数表达式；

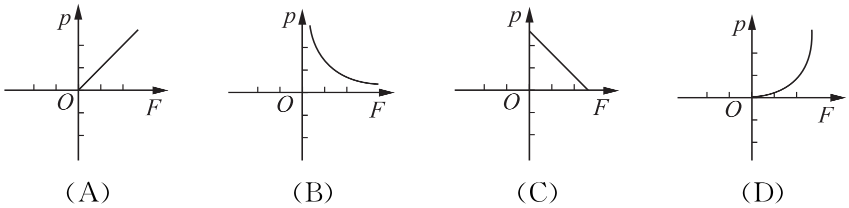
(2) 当 $x=3$ 时，求 y 的值.

6. 根据反比例函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$、$y=\dfrac{k_2}{x}$ 在 x 轴上方的图像(如图)，比较 k_1、k_2 的大小.



(第 6 题)

7. 当物体的受力面积 $S(\mathrm{m}^2)$一定时，这个物体所受的压强 $p(\mathrm{Pa})$与作用于它的压力 $F(\mathrm{N})$的函数关系式为 $p=\dfrac{F}{S}(S\neq 0)$，这个函数的图像是下列 4 个图像中的哪一个？为什么？

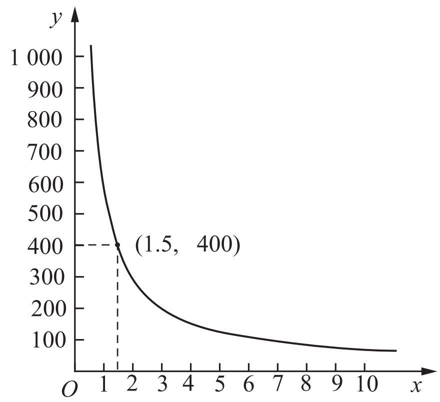


8. 码头工人往一艘轮船上装载货物，装完货物所需时间 $y(\mathrm{min})$与装载速度 $x(\mathrm{t/min})$之间的函数关系如图．

(1) 这批货物的质量是多少？

(2) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；

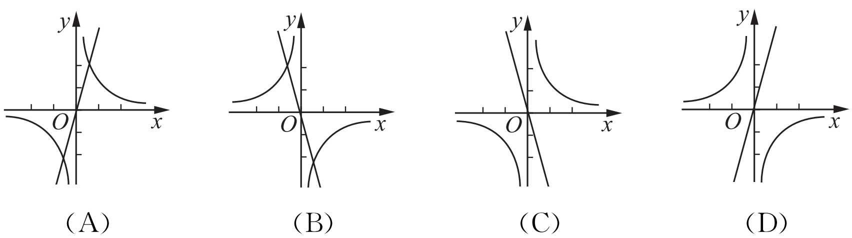
(3) 轮船到达目的地后开始卸货，如果以 5 t/min 的速度卸货，那么需要多少时间才能卸完货物？



（第 8 题）

灵活运用

9. 在平面直角坐标系中，函数 $y=3x$ 与 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图像是下列 4 个图像中的哪一个？为什么？



10. y 是 x 的反比例函数，且当 $x=4$ 时，$y=3$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；

(2) 画出函数的图像，并根据图像说出当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时 y 的取值范围.

11. 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图像上取一点 P，分别向两条坐标轴画垂线，求这两条垂线与坐标轴所围成的矩形面积. 再取另一点 P' 试试看，你发现了什么？请说明理由.

探索研究

12. 已知点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像上，且 $x_1<x_2$. 试比较 y_1 与 y_2 的大小.

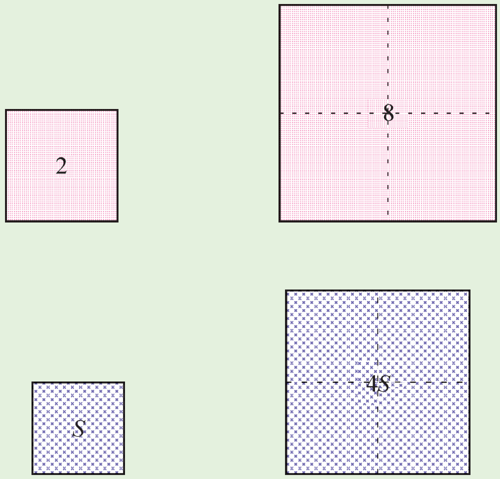
13. 我们知道，一次函数 $y=x-1$ 的图像可以由正比例函数 $y=x$ 的图像向下平移 1 个长度单位得到.

函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图像有什么关系？

第12章　二次根式

$$t=\sqrt{\frac{h}{5}}$$

二次根式表示实际问题中的一些数量关系，
整式的运算法则，启迪我们探索根式的运算.



面积为 2 cm^2 的正方形的边长为$\sqrt{2}$ cm；

面积为 8 cm^2 的正方形的边长为$\sqrt{8}$ cm .

如果把面积为 8 cm^2 的正方形分为 4 个面积为 2 cm^2 的小正方形，可以得到大正方形的边长为 $2\sqrt{2}$ cm，那么 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

对于面积为 S cm^2、$4S$ cm^2 的两个正方形，它们的边长之间有什么关系?

本章将探索二次根式的基本性质与运算法则 .

12.1　二次根式

用带有根号的式子表示下列问题中的数量：

(1) 边长为 1 的正方形的对角线的长；

(2) 面积为 S 的圆的半径；

(3) 直角边长分别为 a、b 的直角三角形斜边的长；

(4) 一个物体从静止状态自由下落的高度 h(m)与所需的时间 t(s)满足关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，试用 h 表示 t（g 的值取 10 m/s^2）.

一般地，式子 $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 叫做**二次根式**(quadratic radical)，a 叫做**被开方数**.

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 有意义吗？为什么？

当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 可能为负数吗？为什么？

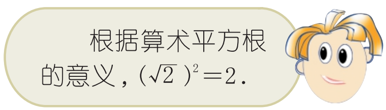
例 1　要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{x-5}$；　　　　(2) $\sqrt{x^2+1}$.

解：(1) 要使 $\sqrt{x-5}$ 有意义，必须 $x-5\geqslant 0$，即 $x\geqslant 5$；

(2) 不论 x 取何实数，总有 $x^2\geqslant 0$，$x^2+1\geqslant 1$，二次根式 $\sqrt{x^2+1}$ 在实数范围内总有意义.

$\sqrt{2}$ 的意义是什么？$(\sqrt{2})^2$ 等于几？



类似地，$(\sqrt{4})^2=4$，$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt{7})^2=7$……

事实上，$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$ 是 a 的算术平方根，根据算术平方根的意义，可知：

当 $a \geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2 = a$.

例 2　计算：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　　　　(2) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$；

(3) $(\sqrt{a+b})^2 (a+b \geqslant 0)$.

解：(1) $(\sqrt{3})^2 = 3$；

(2) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$；

(3) 当 $a+b \geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a+b})^2 = a+b$.

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

   (1) $\sqrt{x+5}$；　　　　(2) $\sqrt{3x-4}$；

   (3) $\sqrt{5x+1}$；　　　　(4) $\sqrt{1-10x}$；

   (5) $\sqrt{x^2}$；　　　　(6) $\sqrt{-x^2}$.

2. 计算：

   (1) $(\sqrt{13})^2$；　　　　(2) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)^2$；

   (3) $(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{2})^2$；　　　　(4) $(\sqrt{a^2+b^2})^2$.

填空：

$\sqrt{2^2} =$ ________，　$\sqrt{5^2} =$ ________，　$\sqrt{10^2} =$ ________，

$\sqrt{(-2)^2} =$ ________，$\sqrt{(-5)^2} =$ ________，$\sqrt{(-10)^2} =$ ________，

$\sqrt{0^2} =$ ________.

你有什么发现？请与同学交流.

当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2} = a$；

当 $a < 0$ 时，$\sqrt{a^2} = -a$.

根据绝对值的意义，

当 $a \geqslant 0$ 时，$|a| = a$；

当 $a < 0$ 时，$|a| = -a$.

由此可知，$\sqrt{a^2} = |a|$.

例 3　计算：

(1) $\sqrt{(-1.5)^2}$；　　(2) $\sqrt{(\pi-1)^2}$；

(3) $\sqrt{(x-1)^2}\ (x \leqslant 1)$.

解： (1) $\sqrt{(-1.5)^2} = |-1.5| = 1.5$；

(2) $\sqrt{(\pi-1)^2} = |\pi-1| = \pi-1$；

(3) 当 $x \leqslant 1$ 时，$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = -(x-1) = 1-x$.

(1) 二次根式$\sqrt{a}$与$\sqrt{a^2}$中，a 应是怎样的实数？

(2) $(\sqrt{a})^2$ 与$\sqrt{a^2}$是否相等？

1. 下列各式是否成立？

(1) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$；　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$；

(3) $\sqrt{(3+4)^2} = 3+4$；　　(4) $\sqrt{3^2+4^2} = 3+4$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{6^2}$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$；

(3) $\sqrt{(a+1)^2}\ (a \geqslant -1)$；　　(4) $\sqrt{(x-2)^2}\ (x \leqslant 2)$.

12.1 习题

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{x-5}$；　(2) $\sqrt{2x+5}$；

(3) $\sqrt{1-3x}$；　(4) $\sqrt{x^2+2}$.

2. 计算：

(1) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{19}}\right)^2$；　(2) $(2\times\sqrt{3})^2$；

(3) $(-2\times\sqrt{5})^2$；　(4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{25}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$；

(3) $\sqrt{(-7)^2}$；　(4) $\sqrt{x^2-4x+4}\,(x\geqslant 2)$.

4. 要使下列各式成立，a 应取什么值？

(1) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$；　(2) $\sqrt{a^2}=-a$.

5. 指出下列运算过程中的错误.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$，可以写成 $\left(\dfrac{5}{2}-2\right)^2=\left(2-\dfrac{5}{2}\right)^2$.

两边开平方，得 $\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\left(2-\dfrac{5}{2}\right)^2}$.

所以 $\dfrac{5}{2}-2=2-\dfrac{5}{2}$，即 $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

12.2　二次根式的乘除

数学实验室

(1) 在图 12－1 中，小正方形的边长为 1．$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{8}$，画出矩形 $ABCD$．矩形 $ABCD$ 的面积是多少？

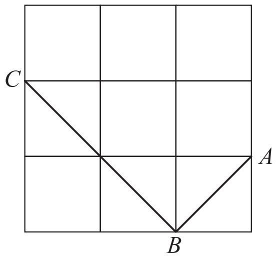
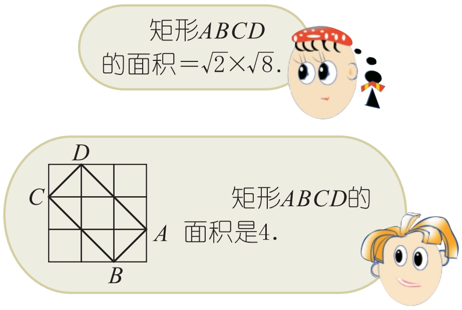


图 12－1



(2) 在图 12－2 中，小正方形的边长为 1．画出矩形 $EFGH$，使 $EF=\sqrt{2}$，$FG=\sqrt{18}$．矩形 $EFGH$ 的面积是多少？

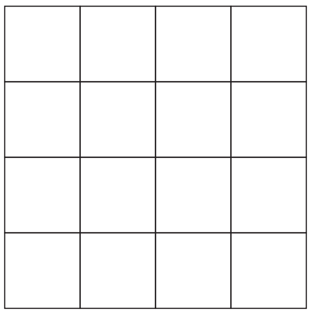


图 12－2

尝试

填空：

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$ ________，$\sqrt{4\times 25}=$ ________；

(2) $\sqrt{9}\times\sqrt{16}=$ ________，$\sqrt{9\times 16}=$ ________；

(3) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\times\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$ ________，

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$ ________．

你有什么发现？请与同学交流．

一般地，当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，$(\sqrt{ab})^2=ab$. 由此可见，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 都是 ab 的算术平方根.

于是，我们得到：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

利用这个式子，可以进行二次根式的乘法运算.

例 1 计算：

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}$；　　(2) $\sqrt{56}\times\sqrt{14}$；

(3) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}\ (a\geqslant 0)$.

解： (1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\times 8}=\sqrt{4}=2$；

(2) $\sqrt{56}\times\sqrt{14}=\sqrt{56\times 14}=\sqrt{4\times 14\times 14}$

$=\sqrt{(2\times 14)^2}=2\times 14=28$；

(3) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}=\sqrt{2a\cdot 8a}=\sqrt{16a^2}=4a$.

把 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ 反过来，得

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

利用这个式子可以化简一些二次根式.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{12}$；　　(2) $\sqrt{a^3}\ (a\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{4a^2b^3}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

解： (1) $\sqrt{12}=\sqrt{3\times 4}=\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$；

(2) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=a\sqrt{a}$；

(3) 当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，

$\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{4a^2b^2\cdot b}=\sqrt{(2ab)^2\cdot b}=\sqrt{(2ab)^2}\cdot\sqrt{b}=2ab\sqrt{b}$.

二次根式运算的结果中，被开方数应不含能开得尽方的因数或因式.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{20}\times\sqrt{5}$；　(2) $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$；

(3) $\sqrt{48}\times\sqrt{12}$；　(4) $\sqrt{6a^3}\cdot\sqrt{\dfrac{3a}{2}}\,(a\geqslant 0)$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{16\times 25}$；　(2) $\sqrt{150}$；

(3) $\sqrt{45a}\,(a\geqslant 0)$；　(4) $\sqrt{9a^2b^3}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

(5) $\sqrt{26^2-10^2}$.

例 3　化简：

(1) $\sqrt{a^2(b+c)^2}\,(a\geqslant 0,\ b+c\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{x^3+x^2y}\,(x\geqslant 0,\ x+y\geqslant 0)$.

解：(1) 当 $a\geqslant 0$、$b+c\geqslant 0$ 时，

$$\sqrt{a^2(b+c)^2}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(b+c)^2}=a(b+c)；$$

(2) 当 $x\geqslant 0$、$x+y\geqslant 0$ 时，

$$\sqrt{x^3+x^2y}=\sqrt{x^2(x+y)}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+y}=x\sqrt{x+y}.$$

例 4　计算：

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{24}$；

(3) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}$；　(4) $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

解：(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=\sqrt{6\times 15}=\sqrt{9\times 10}$

$$=\sqrt{3^2}\times\sqrt{10}=3\sqrt{10}；$$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{24}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\times 24}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$；

(3) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}=3\times 2\times\sqrt{2\times 10}=6\times 2\sqrt{5}=12\sqrt{5}$；

(4) 当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，

$$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{a^3\cdot ab}=\sqrt{a^4b}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}.$$

1. 化简：

(1) $\sqrt{x^4+x^2}\ (x\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{x^3+2x^2y+xy^2}\ (x\geqslant 0,\ x+y\geqslant 0)$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{18}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{12}$；

(3) $6\sqrt{2}\times 5\sqrt{6}$；　　(4) $\sqrt{a^5}\cdot\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

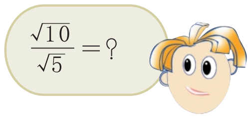
3. 已知矩形的长和宽分别为 40 cm、20 cm，求这个矩形的对角线的长.

4. 求下列根式的值：

(1) $\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a=2\sqrt{3}$、$b=3\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{a^2-b^2}$，其中 $a=3\sqrt{20}$、$b=-\sqrt{18}$.

已知平行四边形的面积为$\sqrt{10}$，一边的长为$\sqrt{5}$，求这边上的高.



填空：

(1) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=$ ________，$\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\sqrt{(\quad)^2}=$ ________；

(2) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=$ ________，$\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\sqrt{(\quad)^2}=$ ________；

(3) $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}=$ ________，$\sqrt{\dfrac{49}{100}}=\sqrt{(\quad)^2}=$ ________；

(4) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{64}}=$ ________，$\sqrt{\dfrac{81}{64}}=\sqrt{(\quad)^2}=$ ________.

你有什么发现？请与同学交流.

一般地，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\dfrac{a}{b}$，$\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}$，由此可见，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$与$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$都是$\dfrac{a}{b}$的算术平方根.

于是，我们得到：

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0).$$

利用这个式子，可以进行二次根式的除法运算 .

例 5　计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}$；

(3) $\sqrt{27}\div\sqrt{3}$；　　(4) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{3}}$.

解： (1) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$；

(2) $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{56}{7}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$；

(4) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}\div\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}\times 3}=\sqrt{5}$.

把 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0)$ 反过来，得

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0).$$

利用这个式子可以化简一些二次根式 .

例 6　化简：

(1) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{16}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{8}{9}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{4b^2}{9a^2}}\,(a>0,\ b\geqslant 0)$.

解： (1) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{3}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$；

(4) 当 $a>0$、$b\geqslant 0$ 时，$\sqrt{\dfrac{4b^2}{9a^2}}=\dfrac{\sqrt{4b^2}}{\sqrt{9a^2}}=\dfrac{2b}{3a}$.

练习

1. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$；

(3) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}$；　　(4) $\sqrt{8}\div\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$；　　(2) $\sqrt{3\dfrac{5}{9}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{49}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{9a^2b^2}{16c^2}}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c>0)$.

探索

填空：

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}}=\dfrac{(\quad)}{2}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{1\times(\quad)}{3\times(\quad)}}=\dfrac{\sqrt{1\times(\quad)}}{\sqrt{3\times(\quad)}}=\dfrac{(\quad)}{3}$；

(3) 当 $a>0$ 时，$\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\sqrt{\dfrac{1\times(\quad)}{a\times(\quad)}}=\dfrac{\sqrt{1\times(\quad)}}{\sqrt{a\times(\quad)}}=\dfrac{(\quad)}{a}$.

当一个根式的被开方数是分数或分式时，只要分子、分母都乘适当的数或式，使分母成为开得尽方的因数或因式，就可以使被开方数中不含分母．例如，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{b\cdot b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

例 7　化简下列各式，使被开方数中不含分母．

(1) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$；　　(2) $\sqrt{2\dfrac{1}{3}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{2y}{3x}}\ (x>0，y\geqslant 0)$．

解： (1) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2\times 3}{3\times 3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

(2) $\sqrt{2\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\sqrt{\dfrac{7\times 3}{3\times 3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$；

(3) 当 $x>0$、$y\geqslant 0$ 时，$\sqrt{\dfrac{2y}{3x}}=\sqrt{\dfrac{2y\cdot 3x}{3x\cdot 3x}}=\dfrac{\sqrt{6xy}}{3x}$．

填空：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\quad)}{\sqrt{2}\times(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{2}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times(\quad)}{\sqrt{3}\times(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{3}$；

(3) 当 $a>0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1\times(\quad)}{\sqrt{a}\times(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{a}$．

当一个式子的分母中有根号时，只要分子、分母都乘适当的数或式，就可以使分母中不含有根号．例如，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

例 8　化简下列各式，使分母中不含根号．

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{5y}}{\sqrt{18x^3}}\ (x>0，y\geqslant 0)$．

解：（1）$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

（3）当 $x>0$、$y\geqslant 0$ 时，$\dfrac{\sqrt{5y}}{\sqrt{18x^3}}=\dfrac{\sqrt{5y}\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt{18x^3}\cdot\sqrt{2x}}=\dfrac{\sqrt{10xy}}{6x^2}$.

二次根式运算的结果中，被开方数中应不含有分母，分母中应不含有根号.

一般地，化简二次根式就是使二次根式：

（1）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

（2）被开方数中不含分母；

（3）分母中不含有根号.

这样化简后得到的二次根式叫做**最简二次根式**（simplest quadratic radical）.

1. 化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$；　　（2）$\sqrt{3\dfrac{1}{5}}$；

（3）$\sqrt{\dfrac{3b}{5a}}\,(a>0,\ b\geqslant 0)$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$；　　（2）$\dfrac{1}{\sqrt{8}}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{5b}}{\sqrt{12a^3}}\,(a>0,\ b\geqslant 0)$.

12.2 习题

1. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{45}$；

(3) $\sqrt{18a}\cdot\sqrt{2a}\,(a\geqslant 0)$；　(4) $2\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{125}$；　(2) $\sqrt{72}$；

(3) $\sqrt{25x^3}\,(x\geqslant 0)$；　(4) $\sqrt{16a^2b^5}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{15}\times\sqrt{\frac{5}{3}}$；

(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{35}$；

(3) $2\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a}\,(a\geqslant 0)$；

(4) $3a\sqrt{12ab}\cdot\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6b}\right)(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

4. 直角三角形的两条直角边长分别为 $\sqrt{2}$ cm、$\sqrt{10}$ cm，求这个直角三角形的面积.

5. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{14}}$；　(2) $\frac{\sqrt{95}}{\sqrt{19}}$；

(3) $\sqrt{75}\div\sqrt{15}$；　(4) $\sqrt{4\frac{1}{2}}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}$.

6. 已知矩形的面积为 $\sqrt{12}$ cm^2，宽为 $\sqrt{3}$ cm，求这个矩形的长.

7. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{25}{81}}$；　(2) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{4}}$；　(4) $\sqrt{\frac{ab^5}{c^2}}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0,c>0)$.

8. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{1}{5}}$；　(2) $\sqrt{8\frac{1}{6}}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x}}\,(x>0)$；　(4) $\sqrt{\frac{3b}{2a}}\,(a>0,b\geqslant 0)$.

9. 计算：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{72}}$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3ab^3}}(a>0,\ b>0)$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{50y}}(x\geqslant 0, y>0)$.

10. 若一个三角形的三边长分别为 a、b、c，设 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，则这个三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（海伦-秦九韶公式）. 当 $a=4$、$b=5$、$c=6$ 时，求 S 的值.

12.3　二次根式的加减

思考

下列 3 组二次根式各有什么共同特征？

(1) $\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$，$15\sqrt{2}$，$\frac{2}{3}\sqrt{2}$；

被开方数都是2.

(2) $\sqrt{3}$，$-5\sqrt{3}$，$6\sqrt{3}$，$17\sqrt{3}$，$\frac{2}{13}\sqrt{3}$；

被开方数相同，像同类项.

(3) $\sqrt{5}$，$-3\sqrt{20}$，$\sqrt{125}$，$\sqrt{\frac{1}{5}}$.

$-3\sqrt{20}=-3\times2\sqrt{5}=-6\sqrt{5}$，$\sqrt{125}=5\sqrt{5}$，$\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1\times5}{5\times5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

经过化简后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式．例如，上面的 3 组二次根式都是同类二次根式．

尝试

试计算 $\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{125}+\sqrt{\frac{1}{5}}$．

化简后可知，4个根式是同类二次根式.

$\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{125}+\sqrt{\frac{1}{5}}$

$=\sqrt{5}-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

像合并同类项一样，这4个同类二次根式可以合并.

二次根式相加减，先化简每个二次根式，然后合并同类二次根式．

例 1　计算：

(1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{32}$；

(3) $\sqrt{40}-5\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{10}$．

解：（1）$3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$；

（2）$\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{32}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{40}-5\sqrt{\dfrac{1}{10}}+\sqrt{10}$

$=2\sqrt{10}-5\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\sqrt{10}$

$=\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$.

例 2 如图 12－3，两个圆的圆心相同，半径分别为 R、r，面积分别为 18 cm²、8 cm². 求圆环的宽度(两圆半径之差).

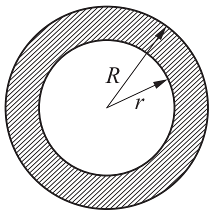


图 12－3

解：根据题意，得

$$R=\sqrt{\frac{18}{\pi}},\ r=\sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

$$R-r=\sqrt{\frac{18}{\pi}}-\sqrt{\frac{8}{\pi}}=\frac{\sqrt{18\pi}}{\pi}-\frac{\sqrt{8\pi}}{\pi}$$

$$=\frac{3\sqrt{2\pi}}{\pi}-\frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi}=\frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi}.$$

答：圆环的宽度为 $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{2\pi}$ cm.

1. 计算：

(1) $3\sqrt{6}-\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{27}-\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{75}$；

(3) $4\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-\dfrac{3}{2}\sqrt{ab}-\sqrt{4ab}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

(4) $\left(2\sqrt{\dfrac{1}{27}}-\dfrac{2}{3}\sqrt{18}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}-4\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$.

2. (1) 两个正方形的面积分别为 2 cm^2、8 cm^2，求这两个正方形边长的和；

(2) 两个正方形的面积分别为 s cm^2、$4s$ cm^2 $(s>0)$，求这两个正方形边长的和．

进行二次根式的混合运算时，整式运算的法则、公式和运算律仍然适用．

例 3　计算：

(1) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{12}}+2\sqrt{3}\right)\times\sqrt{15}$；　　(2) $(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$．

解：(1)

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\frac{5}{12}}+2\sqrt{3}\right)\times\sqrt{15}\\=&\sqrt{\frac{5}{12}}\times\sqrt{15}+2\sqrt{3}\times\sqrt{15}\\=&\sqrt{\frac{5}{4}\times5}+2\sqrt{9\times5}\\=&\frac{5}{2}+6\sqrt{5}\ ;\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})\\=&3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+\sqrt{10}\times\sqrt{2}-\sqrt{10}\times\sqrt{5}\\=&3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\\=&-2\sqrt{2}-\sqrt{5}\ .\end{aligned}$$

例 4　计算：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$；　　(2) $(3+2\sqrt{5})^2$．

解：(1)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})\\=&(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\=&3-2\\=&1\ ;\end{aligned}$$

(2) $(3+2\sqrt{5})^2$

$=3^2+2\times3\times2\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2$

$=9+12\sqrt{5}+20$

$=29+12\sqrt{5}$.

练习

1. 计算：

(1) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\times\sqrt{6}$；　(2) $\sqrt{5}\times(\sqrt{10}-\sqrt{5})$；

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)\times2\sqrt{3}$；　(4) $(5-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$；

(2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ $(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$；

(4) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$.

12.3 习题

1. 计算：

(1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5\sqrt{5}+7\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{50}$；

(3) $\sqrt{4x}+2\sqrt{2x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8x}-4\sqrt{x}(x\geqslant0)$；

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{8}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

2. 计算：

(1) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{18}-\dfrac{1}{2}\sqrt{12}\right)-\left(3\sqrt{\dfrac{1}{3}}-2\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$；

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$.

3. 计算：

(1) $(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\times\sqrt{12}$；　　(2) $5\sqrt{3}\times(\sqrt{15}+\sqrt{6})$；

(3) $(\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{2})\times2\sqrt{6}$.

4. 计算：

(1) $(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$；　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)$；

(3) $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. (1) 写出一个二次根式，使它与 $\sqrt{2}$ 的积是有理数；

(2) 写出一个含有二次根式的式子，使它与 $2+\sqrt{3}$ 的积不含有二次根式.

阅读

互为有理化因式

像 $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$、$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a\ (a\geqslant0)$、$(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)=b-1\ (b\geqslant0)$……两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式.

例如，$\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$、$2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ 等都是互为有理化因式.

在进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号.

例如：

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\=&\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\=&2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\\=&3-\sqrt{3}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

数学活动

画画·算算

图 12－4（1）、（2）、（3）中，小正方形的边长为 1．在图中分别找出以 A 为一个顶点的所有矩形，并画出以 A 为一个端点的所有对角线．这 3 个图形中，这样的对角线各有多少条？它们的长度的和分别为多少？

自己再用若干个边长为 1 的小正方形拼一个矩形，仿上画出以 A 为一个端点的所有对角线，并计算这些对角线长度的和，试试看．

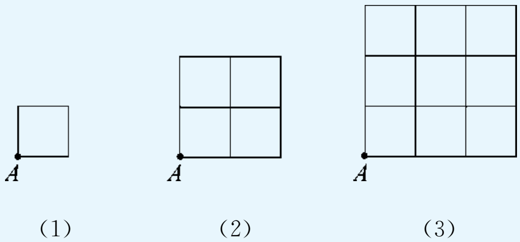


图 12－4

小结与思考

1．本章主要学习了二次根式的概念、基本性质和运算法则．

2．根据算术平方根的意义，我们得到：

(1) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；　　(2) $\sqrt{a^2}=|a|$．

3．根据 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$，可以进行二次根式的乘、除运算．

4．化简二次根式就是使二次根式：

(1) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

(2) 被开方数中不含分母；

(3) 分母中不含有根号．

这样化简后得到的二次根式叫做最简二次根式．

5．二次根式相加、减，先将各个二次根式化简，再合并同类二次根式．

6．把二次根式的运算与整式的运算进行比较，你能发现它们的相同点和不同点吗？

复习题

复习巩固

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{6+2x}$；　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{(x-1)^2}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

2. 下列等式中，字母应分别符合什么条件？

(1) $\sqrt{a^2}=a$；　(2) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；

(3) $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$；　(4) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{72}$；　(2) $\sqrt{25^2-24^2}$；

(3) $\sqrt{6\times12\times18}$；　(4) $\sqrt{75x^3y^2}\,(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{12}-\sqrt{48}$；

(2) $\sqrt{8}+3\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\sqrt{50}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(4) $\sqrt{108}+\sqrt{\dfrac{3}{25}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{32}$.

5. 计算：

(1) $\left(2\sqrt{12}-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)\times\sqrt{6}$；

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{2}-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)\left(5\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$；

(3) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$；

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=\sqrt{10}$ cm，$AB=\sqrt{34}$ cm．求 BC．

灵活运用

7. 已知 $x=\sqrt{3}+1$，求 x^2-2x+1 的值．

8. 物体从静止状态自由下落的高度h(m)与所需的时间 t(s)满足关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，取 g 的值为 10 m/s^2，这个关系式可以写成 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$．如果 4 个苹果分别从离地面 2 m、2.5 m、3.2 m、3.6 m 处落下，求它们落到地面所用时间的总和．

9. 已知 $\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$，求$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}}$ 的值．

探索研究

10. 已知 m 是$\sqrt{2}$ 的小数部分，求$\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}$ 的值．

11. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 是 BC 的中点，$DE\perp AM$，垂足为 E．用含 a、b 的代数式表示 DE 的长．

课题学习

心率的调查

心率是指单位时间内心脏搏动的次数，一般指每分钟的心跳次数．正常的成年人安静时的心率为 60～100 次/分（平均心率在 75 次/分左右），新生儿的心率为 130～150 次/分，2～4 岁儿童的心率为 110～120 次/分，随着年龄增长儿童的心率逐年减少，14 岁以后逐渐接近成年人．

1. 测量并记录自己的心率．

2. 收集、整理全班同学的心率数据，并列出频数分布表、绘制频数分布直方图．

根据列出的频数分布表、绘制的频数分布直方图，分析全班同学心率的总体分布情况．

数学活动评价表

活动名称	丢弃了多少塑料袋	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 在设计调查表、选择合适的统计图、做出估算的过程中，你和小组同学遇到哪些困难？是如何克服的？ 2. 通过对数据的收集、整理、描述，你对随意丢弃塑料袋的危害性有哪些新的认识？ 3. 你和小组同学为保护环境，成为一名环保志愿者做过哪些有意义的事情？能坚持做好这些事情吗？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	摸球试验	活动时间	
活动形式	以小组为单位	小组成员	
自我评价	1. 试验前，你对事件发生的概率做出了怎样的猜想？能对你的猜想做出解释吗？ 2. 你做出的猜想与试验结果一致吗？ 3. 经历了“试验并收集数据——计算频率——做出估计”的活动过程，你对概率与频率之间的关系有新的认识吗？ 4. 你能用这种试验方法解决数学中、生活中类似的问题吗？谈谈你的感受.		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	设计对称图案	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 你解决了活动中提出的哪些问题？ 2. 活动中，你设计了哪些新的图案？能与同学交流你的创作过程，并说明这些图案的意义吗？ 3. 在交流、展示中，你认为其中比较好的作品有哪些？试举 1～2 例，并说明理由. 4. 参加本次活动，你有哪些收获、体会？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td colspan="2">分式游戏</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">游戏规则设计举例</td><td>设计者</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td>自我评价</td><td colspan="4">1. 在小组同学设计的游戏规则中，你认为最精彩的有哪些？说说你的理由．
2. 你在设计活动中有“创造”吗？请与同学分享．
3. 你对本章的“数学活动”有哪些改进的意见和建议？</td></tr>
<tr><td>同学或小组评价</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>反比例函数实例调查</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>自我评价</td><td colspan="3">1. 在活动中，你举出过哪些生活实例来说明反比例函数 $y=\frac{1\ 200}{x}$ 的实际意义？你在与同学的交流中，得到过哪些启发？
2. 你调查过哪些实际问题？列出了怎样的函数关系式？试举例说明.
3. 在“调查研究、收集数据、将实际问题转化为数学问题、解决实际问题”的过程中，你发挥了怎样的作用？
4. 通过活动，你对生活与数学的联系、数学在解决实际问题中的价值有哪些新的体会？</td></tr>
<tr><td>同学或小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>画画 · 算算</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>自我评价</td><td colspan="3">1. 你解决了数学活动中提出的哪些问题？请展示你的成果.
2. 你自己拼了哪些图形？通过计算，你对二次根式的运算有什么新的认识？同伴的活动对你有启发吗？
3. 你对自己在活动中的表现满意吗？你参与本次活动的最大收获是什么？
4. 你对这个“数学活动”有什么改进建议？</td></tr>
<tr><td>同学或小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

后　　记

本套教材是以《义务教育 数学课程标准(2011 年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书 数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育 7～9 年级使用．

本套教材每章的开头部分设置：章头图，章头语，章头问题，本章内容概述．

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动”——运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读”——介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用．

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

“复习题”(分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次)——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用．

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题．全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语．

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编．参与本册各章(“实验本”)编写的有孔凡海、周凯、赵维坤、董林伟、李善良．

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编．参与本册修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延觉、朱建明、董林伟、荆福仁；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉．

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢！

图书在版编目(CIP)数据

数学. 八年级. 下册/杨裕前，董林伟主编. --南京:江苏凤凰科学技术出版社，2013. 12(2021. 11 重印)

ISBN 978-7-5537-2273-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… ②董… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教材 Ⅳ. ①G634. 601

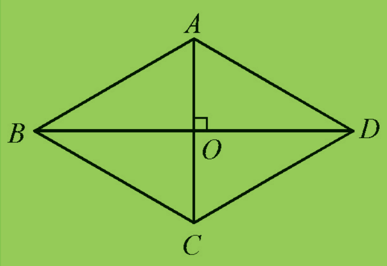
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 269367 号

义务教育教科书

数学　八年级下册

主　　编	杨裕前　董林伟
责任编辑	许礼光　闵正年　沈　琼
责任校对	仲　敏
出　　版	江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址	南京市湖南路 1 号 A 楼，邮编：210009
重　　印	江苏凤凰出版传媒股份有限公司
发　　行	江苏凤凰出版传媒股份有限公司
照　　排	江苏凤凰制版有限公司
印　　刷	江苏凤凰新华印务集团有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	11
版　　次	2005 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 3 版
印　　次	2021 年 11 月第 17 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5537-2273-3
定　　价	10. 79 元

如发现印、装质量问题，请与凤凰传媒联系. 电话:400-828-1132



数学

SHU XUE

八年级 下册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5537-2273-3

定价：10.79元

审批号：苏费核(2021年)0752号　　举报电话：12315