教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

八年级 下册

河北教育出版社

义务教育教科书
数学
八年级 下册
河北教育出版社

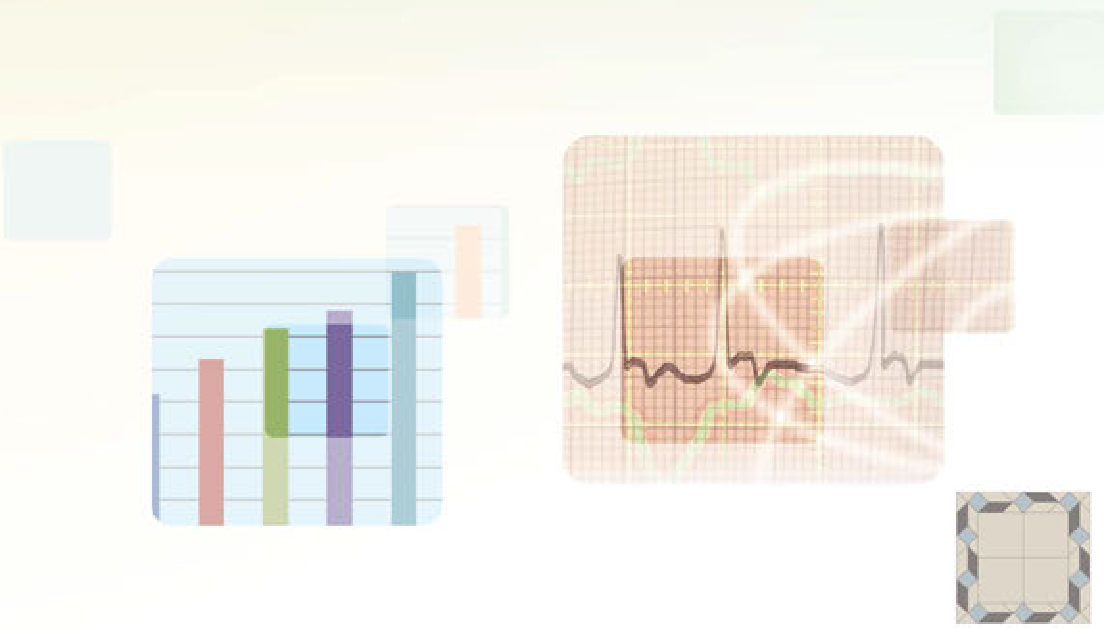
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5545-0484-0
定价: 10.05元
全国价格举报电话:12358

义 务 教 育 教 科 书

数学

八年级 下册



河北教育出版社

遨游在数学世界中

亲爱的同学们：

你们好。在这春暖花开的季节里，大家又开始了新一年的学习生活，开始了新的数学探究过程。

当你们拿到这本八年级下册教科书时，请不要忘记以下这些栏目！

观察与思考：通过观察、感悟和思考，期待你们获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究并认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学所不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有五个篇章等待同学们去探究、去认识：

数据的收集与整理——这是一个新的学习领域，它和代数、几何一样，都是需要我们去认真探究的内容。在这里，你会发现统计跟我们的现实生活具有十分紧密的联系，它的思想方法具有十分重要的应用价值。

平面直角坐标系——它是继续数学学习和从事相关研究的重要工具。它不仅在确定物体平面位置时不可缺少，而且在探究事物变化规律时具有重要的作用。

函数——在这里，我们将开始探究和认识事物变化过程中量与量之间的关系，这是进入变量世界的开始。

一次函数——这是进行函数学习的继续。一次函数虽然是比较简单的一类函数，但它的有关性质却是十分重要的，在生活中的应用也非常广泛。

四边形——从三角形到四边形，不是图形的简单叠加，而是数学知识发展的必然，也是数学学习的需要。因为这里蕴含了许多的数学基本定理和基本思想，对提升我们的推理能力十分有益。

面临新的学习任务，让我们满怀新的希望，迎接新的挑战，创造新的佳绩，收获新的数学果实！

你们的编者朋友

2013 年 9 月

目 录

第十八章

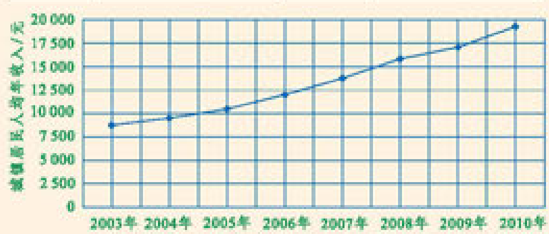
数据的收集与整理

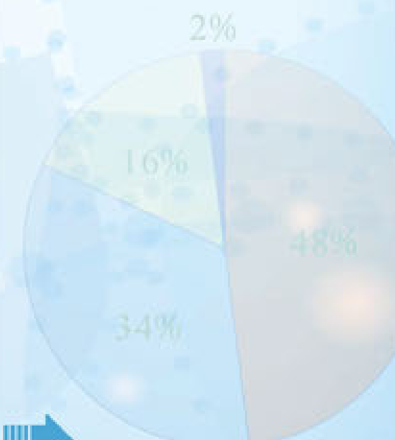
在本章中，我们将学习

- 统计的初步认识
- 抽样调查
- 数据的整理与表示
- 频数分布表与直方图

你了解我国近几年城镇居民人均年收入的变化情况吗？从下面的统计表和统计图中，你能了解到哪些信息？

年份	城镇居民人均年收入/元	年份	城镇居民人均年收入/元
2003	8 472	2007	13 786
2004	9 422	2008	15 781
2005	10 493	2009	17 175
2006	11 759	2010	19 109





18.1 统计的初步认识

在各种媒体上，我们经常看到统计数据和统计图表．你知道这些数据和图表是怎么得到的吗？本节课，我们将初步认识统计的一般过程和方法．

为了解全班同学对体育课的喜欢程度，我们按下面的程序进行调查，记录调查的数据，并对调查数据进行简单的整理，看看有什么结果．

明确调查问题	有多少人(多大比例)喜欢体育课
设计调查选项	喜欢、比较喜欢、一般、不喜欢
确定调查范围	全班同学
选择调查方法	以不记名方式填写问卷调查表
实施调查	每人在自己选定的选项代号上画“√”
汇总调查数据	用画“正”字的方式统计选择不同选项的人数
表示调查结果	用表格和统计图表示调查结果

做一做

为了使调查客观公正，便于数据汇总，建议使用调查表(只需在选项代号上画“√”)，并用统计表和统计图表示结果．

调查表

问题选项	代号
喜　欢	A
比较喜欢	B
一　般	C
不喜欢	D

统计表

选项	画“正”字计数	人数/名	百分比
A			
B			
C			
D			
合　计			

例如，对某班 50 人进行调查，按其结果绘制成的统计图如图 18－1－1 和图 18－1－2 所示．

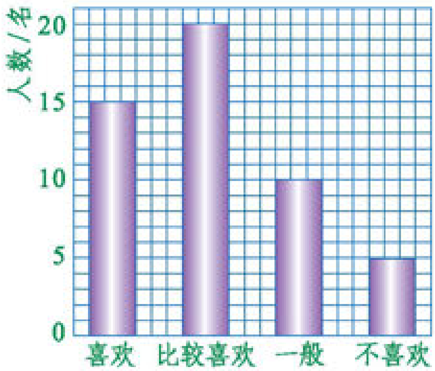


图 18－1－1

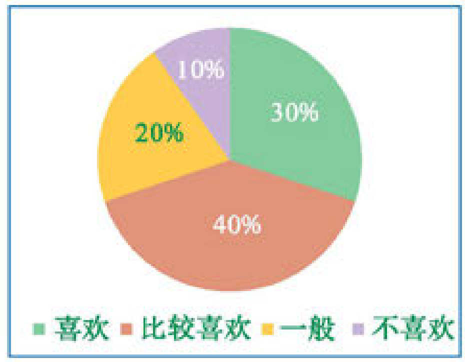


图 18－1－2

大家谈谈

1．在上面的问题中，除了问卷调查外，还可以使用其他什么调查方法？

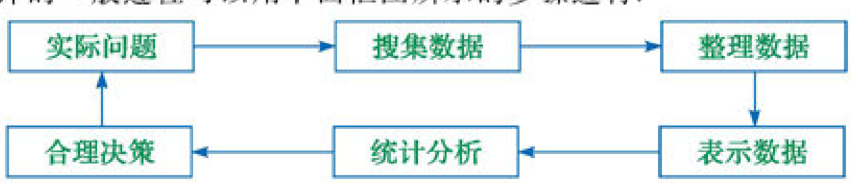
2．用画“正”字的方法统计各选项的人数是一种常用的统计方法，且不易出错．你还有其他更省时的统计方法吗？

3．如果要调查某学校八年级全体学生对体育课的喜欢程度，应该怎样调查？

4．由统计调查结果你了解到了哪些信息？

了解某班全体同学对体育课的喜欢程度，可以进行全面调查．了解某学校全体八年级学生对体育课的喜欢程度，为了节省时间和人力，可以采用抽样调查．在这些问题中，都可以通过实际调查获得数据，利用表格整理数据，通过计算百分比了解有多大比例的学生喜欢体育课．

统计的一般过程可以用下面框图所示的步骤进行．



练　习

解决下面的问题需要哪些数据？说明调查范围和调查方法．

（1）了解你所在班全体男生立定跳远的成绩．其中，优秀、达标和不达标的各有多少人？

（2）调查你所在学校全体同学星期日收看电视的时间．了解收看时间在

1 小时以内、1 小时到 2 小时之间、超过 2 小时的各有多少人.

(3) 2010 年，我国进行了第六次全国人口普查. 了解各省、自治区和直辖市的人口分布情况.

习 题

A 组

1. 4 名同学分别阅读同一段文章，记录每人 1 分钟阅读的字数，并用适当的表格和统计图表示数据.
2. 我国的陆地面积约为 960 万平方千米. 请你查阅资料，了解其他 5 个国家的陆地面积，并填表.

国　家	俄罗斯	加拿大	中国	美国	巴西	澳大利亚
陆地面积/万平方千米			960			

B 组

1. 调查你班全体同学的出生月份，填写统计表，并回答问题.

出生月份	人数/名	出生月份	人数/名	出生月份	人数/名
1 月		5 月		9 月	
2 月		6 月		10 月	
3 月		7 月		11 月	
4 月		8 月		12 月	

(1) 采用哪种方法调查最方便、最省时间？

(2) 各月份出生的人数是否有明显的差异？

(3) 收集其他某班同学的出生月份. 汇总两个班的数据，计算各月份出生的人数及其所占的百分比，看看有什么结果.

2. 请你举出一些需要用数据才能得出结论或作出判断的例子.

18.2 抽样调查

有许多实际问题，需要通过调查收集数据，用数据来作出判断．但当要调查的对象太多或调查具有某种破坏性时，该怎样进行调查呢？

2008 年 8 月，第二十九届奥运会在我国北京成功举办，我国运动健儿取得了 51 枚金牌的优异成绩．其中，跳水、体操、举重、羽毛球和乒乓球等都是我国的优势项目，获得的奖牌较多．

做一做

1．对跳水、体操、举重、羽毛球和乒乓球这五项比赛，采用适当的方式，调查全班同学中每个人最爱观看的比赛项目(每人只选一项)，将汇总的结果填入下表，并指出最爱观看哪个比赛项目的人最多．

比赛项目	跳水	体操	举重	羽毛球	乒乓球
最爱观看的人数/名					

2．如果要了解某学校 3 000 名学生最爱观看哪一个比赛项目的情况，请试着设计一个调查方案．

像问题 1 这样，对全体对象进行调查，叫做**普查**(thorough survey)．

对于问题 2，虽然能进行普查，但要调查的人太多了，既费时又费力．我们可以抽取一部分学生，对这部分学生进行调查，得出一个估计结果．比如按 10%的比例确定各班要调查的人数，分别进行调查．

例 从八年级(一)班 50 名学生中选择 5 名(10%)学生，要求每名学生被选到的机会相同．请设计抽样方案．

解：对 50 名学生按 1～50 分别进行编号，并将号码写在 50 张卡片上．

方案一：把卡片装在一个盒子中，混合后，从中抽取 5 张卡片，得

到 5 个号码，选出对应这 5 个号码的学生.

方案二：从 1～10 号卡片中任意抽出 1 张，比如抽到 3 号，那么对应 3 号、13 号、23 号、33 号、43 号的这 5 名同学入选.

我们把要考察对象的全体叫做**总体**(population)，把组成总体的每一个对象叫做**个体**(individual). 从总体中抽取部分个体进行调查，这种调查方式叫做**抽样调查**(sampling investigation). 这部分个体叫做**总体的一个样本**(sample). 样本中包含个体的数目叫做**样本容量**(sample size). 我们把能保证总体中每个个体有相同的机会被抽到的抽样调查称为**简单随机抽样**(simplerandom sampling).

在上述问题 2 中，我们关心的是学生最爱观看的比赛项目，总体是 3 000名学生选择的项目，每名学生选择的项目都是一个个体，按 10%的比例确定被调查的 300 名学生选择的项目构成样本，样本容量为 300.

大家谈谈

1. 中央电视台对“春节联欢晚会”的收视情况进行调查，得出该节目的收视率为 90%. 这个结果是怎么得到的？

2. 能用普查的方式了解一批节能灯泡的寿命吗？

一般来说，普查能够得到总体全面、准确的信息. 但有的总体中个体的数目很大，普查工作量太大；有的受条件限制，无法进行普查；有的调查具有破坏性(如测试一批灯泡的寿命，了解炮弹的杀伤力等都是具有破坏性的试验)，不宜进行普查. 这时，多采用抽样调查，通过样本来了解总体.

练　习

1. 为了解某市八年级 5 000 名学生的平均身高，应采用什么方法进行调查？如果按 5%的比例进行抽样调查，请指出调查的总体、个体、样本及样本容量.

2. 下列调查分别采用了哪种调查方式？请指出每个问题中的总体和个体. 如果是抽样调查的，再指出总体的样本.

(1) 某家用电器厂对 6 月份出厂的电冰箱逐一进行质量检验.

（2）为了解全年级同学的体能状况，对全年级学号为偶数的同学进行1分钟跳绳的测试，记录其1分钟跳绳的次数.

（3）为了解全校八年级学生的睡眠状况，从八年级每个班选4名学生，调查他们每天的睡眠时间.

习题

A 组

1. 下列调查分别采用了哪种调查方式？

（1）为了解全班同学的视力情况，对全班同学进行调查.

（2）为了解全校同学的视力情况，在每个班任意选择5名同学进行调查.

（3）为了解某本书稿中“的”字出现的次数，利用计算机的查找功能，对整本书稿逐一进行查找.

（4）为了解某本书中“了”字出现的次数，随机选择6页进行查找.

2. 下列问题分别适合用哪种方式进行调查？

（1）工厂对准备出厂的一批轿车的刹车系统进行测试.

（2）了解某市九年级全体学生的体育达标情况.

（3）某质检部门调查某罐头厂生产的一批罐头的质量.

（4）对某厂生产的摩托车头盔进行防撞击性能测试.

B 组

1. 某校八年级有800名学生，从中随机抽取了100名学生进行立定跳远测试. 指出下列说法中哪些是正确的.

（1）这种调查方式是抽样调查.

（2）800名学生是总体.

（3）每名学生的立定跳远成绩是个体.

（4）这100名学生的立定跳远成绩是总体的一个样本.

（5）100名学生是样本容量.

2. 某市为了分析全市9 600名初中毕业生的中考数学考试成绩，共抽取15本试卷进行调查，其中每本试卷都是30份. 该调查的样本容量是多少？

电视台为了解电视节目的收视率，经常采用抽样调查.

(1) 四名同学对一家电视台某体育节目的收视率进行调查，他们采用的调查方式及结果如下：

小红		我调查了全班40名同学，有10人收看了这个节目.
小亮		我在火车站调查了50人，只有2人收看了这个节目.
小强		我在爸爸工作的大学调查了100名大学生，其中有40人收看了这个节目.
小刚		我利用互联网调查，共有200人作了回答，其中有30人收看了这个节目.

(2) 电视台根据不同年龄段、不同文化背景，按一定的比例确定了1 000人，就是否收看了该节目进行了电话访问，其中有35人收看了这个节目.

将小红等人和电视台的调查结果以及估计的收视率整理成下表：

调查者	小红	小亮	小强	小刚	电视台
调查的总人数/名	40	50	100	200	1 000
收看节目的人数/名	10	2	40	30	35
估计的收视率	25%	4%	40%	15%	3.5%

大家谈谈

1. 为什么用不同的调查方式估计的收视率差别很大？

2. 你认为谁的调查，样本对总体的代表性较好，估计的收视率更准确些？

3. 抽样调查应该注意什么？

4. 抽样调查的优点和缺点各是什么？

由于条件的限制，对有些问题只能进行抽样调查. 抽样调查的优点是节省时间，比较经济. 但是，抽样调查只考察了总体中的一部分个体，调查结

果不如普查准确．为了得到较为准确的结果，调查的个体不能太少．

电视台的调查，考虑了不同年龄段、不同文化背景的人对节目喜好的差异，按比例进行抽样，样本中的人数比例和总体比较一致，样本对总体的代表性较好，估计的收视率结果可信度要高一些．

做一做

某学校初、高中六个年级共有 3 000 名学生．为了解其视力情况，现采用抽样调查．各年级学生人数如下表所示．

年级	七年级	八年级	九年级	高一	高二	高三	合计
人数/名	560	520	500	500	480	440	3 000
调查人数/名							

（1）如果按 10%的比例抽样，样本容量是多少？

（2）考虑到不同年级学生的视力差异，为了保证样本有较好的代表性，各年级分别应调查多少人？将结果填写在上面的表中．

（3）如果要从你所在的班抽取 5 人进行调查，请设计一个抽样方案，保证每人有相同的机会被抽到．

练 习

1．为了解某学校七至九年级学生每天的睡眠时间，下列抽样调查的样本，哪些代表性较好，哪些缺乏代表性？

（1）选择九年级一个班进行调查．

（2）选择全校学号为 5 的倍数的同学进行调查．

（3）选择全校男生进行调查．

（4）对所有班级按 10%的比例，用抽签的方法确定被调查者．

2．在互联网上，经常有对人们所关注的一些问题进行的调查，你认为这种调查的代表性如何？

习 题

A 组

1. 下列抽样调查的总体和样本分别是什么？样本的代表性如何？

   (1) 为了估计某家庭一年中平均每月的用电量，调查该家庭 7 月份的用电量.

   (2) 为了估计一台电冰箱工作 24 h 的耗电量，调查它 1 h 的耗电量.

   (3) 某饮料厂生产瓶装果汁，为了解一周内生产的果汁的维生素 C 含量是否达标，每天按一定的时间间隔抽取 10 瓶进行检验.

   (4) 为了估计全国初中生的平均身高和体重，在某省会城市某中学选择了 100 名八年级的学生进行调查.

2. 下面的结论分别是通过哪种调查方式得到的？

   (1) 某品牌电视机的平均使用寿命为 10 年.

   (2) 某型号电池的连续使用时间为 20 h.

   (3) 一次数学水平测试，某班的优秀率为 20%.

   (4) 在一本书稿中共发现 20 处错误.

   (5) 在英文单词中，字母 E 的使用频率最高，大约为 13%.

B 组

1. 下列哪些调查的样本缺乏代表性？

   (1) 在医院里调查老年人的健康状况.

   (2) 在公园里调查老年人的健康状况.

   (3) 为了解一批苹果的平均质量，任意拿出 20 个，称它们的质量.

2. 某县共种植小麦 30 000 公顷，其中山区、丘陵、平原种植面积的比为 1∶2∶3. 为了估计每公顷小麦的平均产量，请你设计一个代表性较好的抽样调查方案.

18.3 数据的整理与表示

通过调查或试验收集到的数据一般数量较大且无序，为了得到有用的信息，需要对数据进行分类(组)整理，利用统计表或统计图表示数据的特征.

目前，中学生的视力状况不容乐观. 据有关调查，初中生视力不良率达50%以上，高中生视力不良率达70%以上.

某学校有3 000名学生，采用抽样调查的方式，使用调查问卷对100名学生的视力状况进行调查，结果如下：

ABAAB BACBA BCAAA ABCAA ABACB
CAABB AABBC CBAAB ABBAD BACAB
ABCAA AABBA BACAD ABBAA ABCCA
BAAAB CABCA BBAAA ABBCA AABBC

调查问卷表

你的视力(圈出相应的字母即可)
A. 正常
B. 轻度近视(度数≤300)
C. 中度近视(300<度数≤600)
D. 高度近视(度数>600)

大家谈谈

(1) 你想了解关于视力情况的哪些信息？如何整理数据以获得这些信息？

(2) 什么样的统计图可以直观地表示数据信息？

这些数据经整理可得：

视力状况	画“正”字计数	人数/名	百分比
A	正正正正正正正正正下	48	48%
B	正正正正正正正	34	34%
C	正正正一	16	16%
D	T	2	2%
合计		100	100%

为了直观地表示数据信息，可以用图18－3－1和图18－3－2所示的**条形统计图**(bar graph)和**扇形统计图**(sector statistical chart)来分别表示不同

视力状况的人数分布，以及不同视力状况人数的比例.

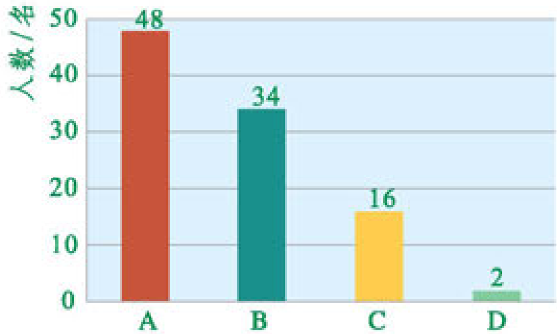


图 18－3－1

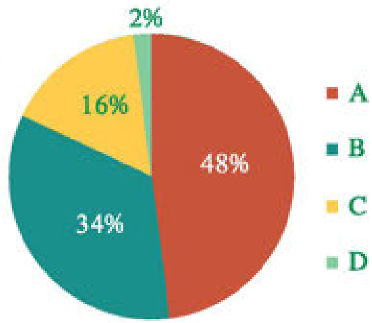


图 18－3－2

我们常用圆和扇形来表示整体和部分的关系，即用圆表示整体，各个扇形的大小表示各部分所占的百分比.

画扇形统计图的关键是确定各扇形圆心角的度数. 这里，各不同视力状况对应扇形的圆心角度数分别为：

A(正常) $360°\times 48\%=172.8°$，　B(轻度近视) $360°\times 34\%=122.4°$，

C(中度近视) $360°\times 16\%=57.6°$，D(高度近视) $360°\times 2\%=7.2°$.

根据扇形圆心角的度数，利用量角器画出各扇形，并标注各类别的名称(图例)及相应的百分比.

做一做

2000 年 11 月 1 日，我国进行了第五次全国人口普查的登记工作. 我国大陆 31 个省、直辖市、自治区及现役军人总人口为 126 583 万人. 2010 年 11 月 1 日，我国进行了第六次全国人口普查的登记工作，上述总人口为 133 972万人. 两次普查人口年龄构成分别如图 18－3－3 和图 18－3－4 所示.

2000 年人口年龄构成统计图

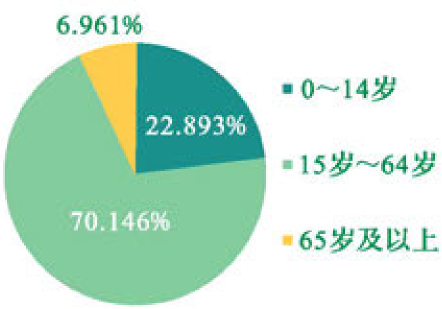


图 18－3－3

2010 年人口年龄构成统计图

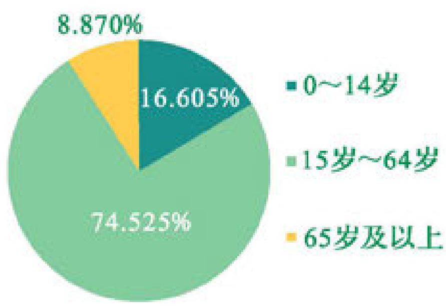


图 18－3－4

（1）根据图形提供的信息，将下表填写完整.

年龄分组		0～14 岁	15 岁～64 岁	65 岁及以上	总人口/万人
2000 年 11 月 1 日	人口/万人				126 583
	百分比				
2010 年 11 月 1 日	人口/万人				133 972
	百分比				

（2）描述 10 年间我国人口年龄结构的变化情况.

练　习

目前我国城市的空气质量正在逐步改善. 小明为了解某城市的空气质量状况，从互联网上查询到该城市连续 30 天空气污染指数的数据如下：

105	85	55	38	63	52	51	60	75	78
45	48	70	100	69	106	92	133	68	88
72	55	46	67	96	80	102	86	65	76

这里，规定空气污染指数在 0～50 之间的为优，在 51～100 之间的为良，在 101～150 之间的为轻微污染，在 151～200 之间的为轻度污染.

整理数据，填写下面的统计表，并描述你获得的空气质量信息.

空气质量	优	良	轻微污染	轻度污染	合　计
天数/天					
百分比					

习　题

A 组

1. 有资料显示，某城市在 60 天内每天发生的火灾事故次数如下所示：

0　1　2　6　5　4　0　1　2　3　0　2　4　1　3　0　2　3　1　4
2　0　1　2　0　2　1　3　0　3　2　1　0　3　2　6　0　1　0　0
3　1　4　0　3　2　4　0　3　1　3　0　5　4　2　6　0　1　0　1

按发生火灾的次数分类，统计日发生火灾次数分别为 0 次、1 次……的

天数，分别用统计表和统计图表示数据.

2. 现在全世界一年消耗的能源折合 180 亿吨标准煤. 各种能源所提供的能量如下表：

能源	提供能量的百分比	折合标准煤/亿吨
煤炭	28%	
石油	38%	
天然气	21%	
核能	6%	
水电	7%	

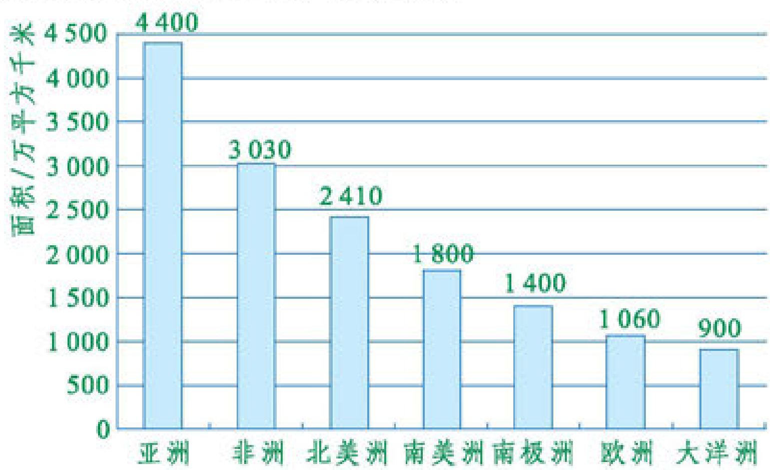
(1) 借助计算器，计算一年消耗的各种能源折合多少亿吨标准煤(结果精确到 0.1 亿吨)，并填表.

(2) 借助计算器，计算消耗的各种能源对应的扇形圆心角的度数(结果精确到 $0.1°$).

(3) 画扇形统计图表示数据.

B 组

1. 我们居住的地球上有七大洲，各大洲面积之和约为 15 000 万平方千米. 根据图形提供的信息，解决下面的问题.



(1) 设计适当的表格表示数据资料.

(2) 画扇形统计图表示各大洲所占面积的百分比.

(3) 用文字语言描述数据资料信息.

2. 查阅资料，了解地球上四大洋的面积及其所占的百分比.

据中国统计年鉴资料显示，2003 年～2010 年我国城镇居民人均年收入数据如下表所示.（资料来源：http://www.stats.gov.cn）

年份	城镇居民人均年收入/元	年份	城镇居民人均年收入/元
2003	8 472	2007	13 786
2004	9 422	2008	15 781
2005	10 493	2009	17 175
2006	11 759	2010	19 109

根据数据资料绘制的统计图如图 18－3－5 所示.

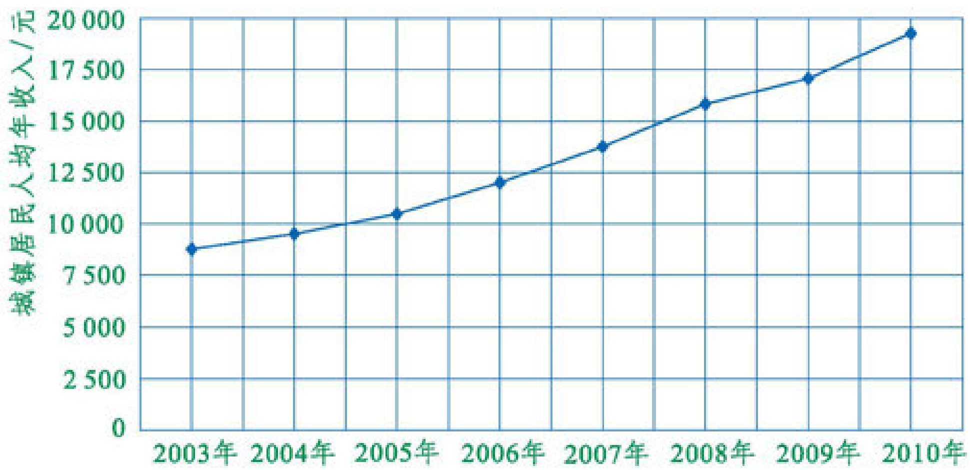


图 18－3－5

像图 18－3－5 这样的图形叫做**折线统计图**. 折线统计图主要反映数据的变化趋势. 图 18－3－5 直观地反映了我国城镇居民人均年收入逐年快速增长的趋势.

某学校八年级进行了一次数学水平测试，测试成绩由高到低分为 A，B，C，D 四个等级. 为了分析男生和女生的数学水平是否有差异，随机抽取了男生和女生各 60 名. 根据其测试成绩绘制成的统计图如图 18－3－6 和 18－3－7 所示.

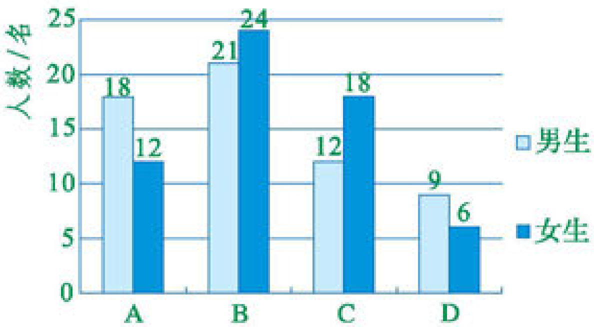


图 18－3－6

图 18－3－7

（1）请根据统计图所反映的信息填写下表.

性别	A		B		C		D		总和
	人数/名	百分比	人数/名	百分比	人数/名	百分比	人数/名	百分比	人数/名
男									
女									
合计									

（2）结合统计图表，谈谈该校八年级男生和女生在数学水平上呈现的特点.

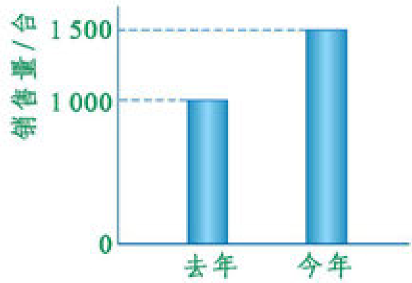
大家谈谈

条形统计图、扇形统计图和折线统计图分别适合表示数据的哪些特征？

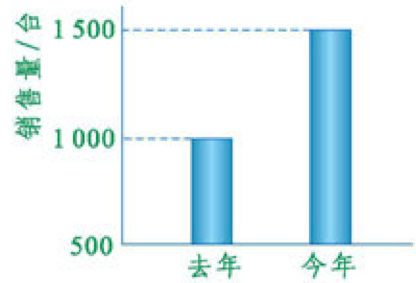
用统计表可以按某种顺序系统条理地排列数据，便于阅读和检查，便于计算和分析. 用统计图表示数据资料，形象直观，各类数据个数的多少、所占百分比、数量的变化规律及趋势等，一目了然.

练　习

家电商场销售某品牌的空调机，去年销售 1 000 台，今年销售1 500台. 依据销售数据绘制的统计图如下：



(1)



(2)

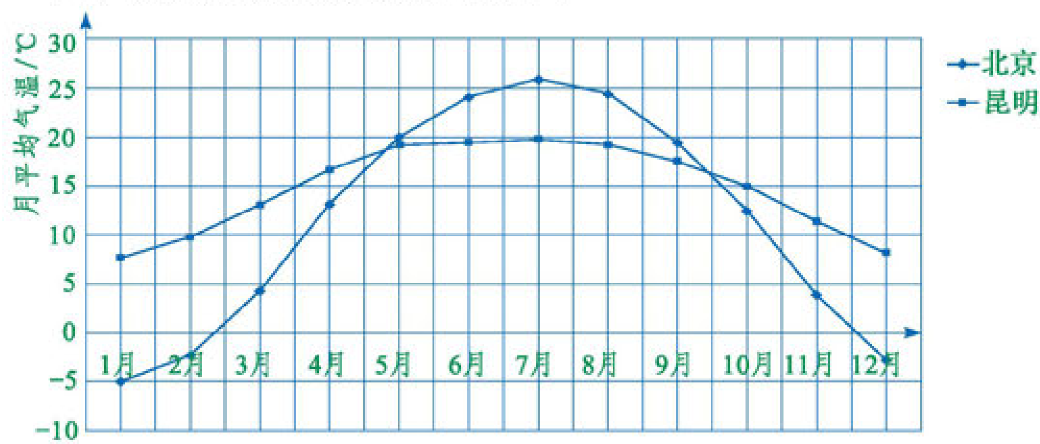
(1) 图(1)和图(2)哪个能较准确地反映空调机销量的增长情况？

(2) 不能准确反映空调机销量增长情况的，其所存在的主要问题是什么？

习 题

A 组

1. 北京一年四季分明，而昆明则四季如春．依据两个城市历年 12 个月的月平均气温资料绘制的折线统计图如下：



(第 1 题)

(1) 从总体上看，两个城市月平均气温有怎样的变化趋势？它们之间最明显的差别是什么？

(2) 北京月平均气温最低的是______月，月平均气温最高的是______月；昆明月平均气温最低的是______月，月平均气温最高的是______月．

(3) 北京和昆明月平均气温差别最大的是______月，月平均气温最接近的是______月．

2. 中国运动员从 1984 年至 2012 年已参加了 8 届奥运会，获得的奖牌数如

下面统计表所示：(未含港、澳、台地区)

届别	第 23 届	第 24 届	第 25 届	第 26 届	第 27 届	第 28 届	第 29 届	第 30 届	合计
金牌/枚	15	5	16	16	28	32	51	38	
银牌/枚	8	11	22	22	16	17	21	27	
铜牌/枚	9	12	16	12	15	14	28	23	
合计/枚									

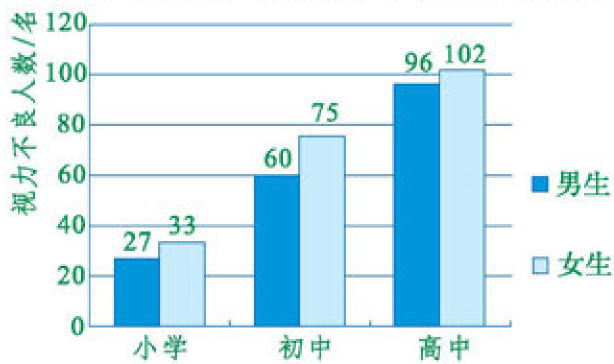
(1) 分别统计中国运动员在各届奥运会上获得的奖牌总数及在 8 届奥运会上获得的金、银、铜牌的总数，并填表.

(2) 画扇形统计图表示 8 届奥运会上获得的金、银、铜牌总数占奖牌总数的比例.

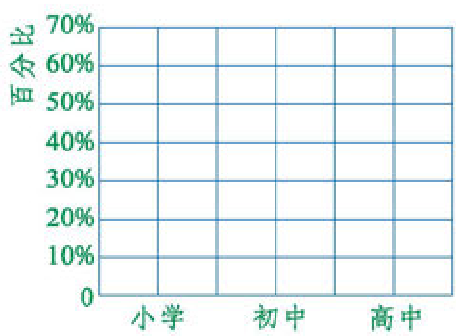
(3) 画折线统计图表示 8 届奥运会上获得的奖牌的变化情况.

B 组

某地区教育部门为了解中小学生的视力情况，从该地区小学、初中和高中三个学段中各随机抽取 300 名学生(男、女生各 150 名)作视力调查，根据男、女生视力不良的调查数据绘制成如图(1)所示的统计图.



(1)



(2)

(1) 分别计算各学段男、女生视力不良率.

(2) 请在图(2)中分别画出三个学段男、女生视力不良率的折线统计图.

(3) 该地区中小学生的视力不良率随着年级的升高有什么变化趋势？男生和女生的视力情况有什么明显的差异？

读一读

利用 Microsoft Excel 绘制扇形统计图

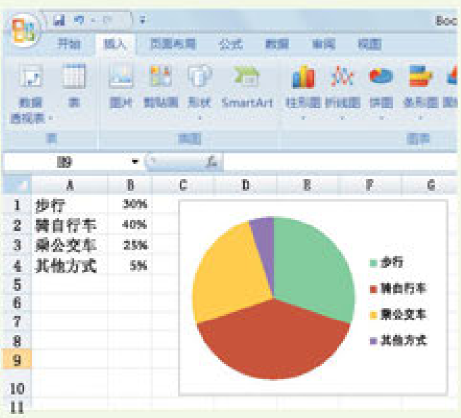
以实例进行说明.

假设对某学校八年级共 240 名学生的到校方式进行调查，统计结果如下：

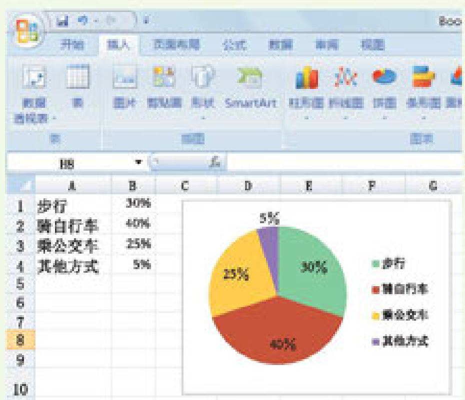
到校方式	步行	骑自行车	乘公交车	其他方式	合计
人数/名	72	96	60	12	240
百分比	30%	40%	25%	5%	100%

画扇形统计图直观表示不同方式到校人数的百分比.

打开 Microsoft Excel 2007 界面，在单元格 A1～B4 中输入数据，选中数据区域，然后点击“插入”，在图表菜单栏选“饼图”，如图(1). 将光标移到图形上，右击鼠标，出现下拉菜单后，选择“添加数据标签”，完成绘图过程，如图(2). 在绘图过程中，可以选中某个扇形，右击鼠标，在下拉菜单中选择“设置数据点格式”更改填充颜色、设置边框线条等.



(1)



(2)

用类似的方式可以画条形统计图和折线统计图，有条件的同学可以试一试.

18.4 频数分布表与直方图

在统计中，我们关心总体中所有个体某个数量指标的分布情况．当这个数量指标取连续变化的值时，应该如何整理和表示数据呢？

为了倡导节约能源，自2012年7月起，我国对居民用电采用阶梯电价．为了使大多数家庭不增加电费支出，事前就需要了解居民全年月平均用电量的分布情况，制订一个合理的方案．

随机调查了某城市50户居民全年月平均用电量(单位：千瓦时)，数据如下：

155	198	175	158	158	124	154	148	169	120
190	133	160	215	172	126	145	130	131	118
108	157	145	165	122	106	165	150	136	144
140	159	110	134	170	168	162	170	205	186
182	156	138	187	100	142	168	218	175	146

按以下步骤整理数据，并用统计图表表示数据．

(1) 确定数据的最小值和最大值．

在这50个数据中，最小值为100，最大值为218．

(2) 确定数据分组的组数和组距．

分组的组数没有固定的标准，数据个数在100以内时，一般分为5～10组．数据个数越多，分组的个数也应多一些．采用等距分组，分为6组较合适．

因为$218-100=118$，$118\div 6\approx 19.7$，所以分组如下：

$100\leqslant x<120$，$120\leqslant x<140$，$140\leqslant x<160$，…，$200\leqslant x<220$.

其中，x为居民全年月平均用电量．

每组两个端点之间的距离称为组距．这里的组距为20．

(3) 列频数(频率)分布表．

各组中数据的个数叫做**频数**(frequency)，频数与数据总个数的比值叫做**频率**(relative frequency)．在表格中用画“正”字的方式统计各组的频数，

计算相应的频率，就得到**频数分布表**(frequency distribution table).

全年月平均用电量/千瓦时	画“正”字计数	频数	频率
$100\leqslant x<120$	正	5	10%
$120\leqslant x<140$	正正	10	20%
$140\leqslant x<160$	正正正	15	30%
$160\leqslant x<180$	正正丅	12	24%
$180\leqslant x<200$	正	5	10%
$200\leqslant x<220$	下	3	6%
合计		50	100%

（4）画频数分布直方图.

用横轴表示全年月平均用电量，纵轴表示频数，用小长方形的高表示各组的频数，画如图 18－4－1 所示的图形，直观表示全年月平均用电量的分布情况. 我们把这样的图形叫做频数分布**直方图**(histogram).

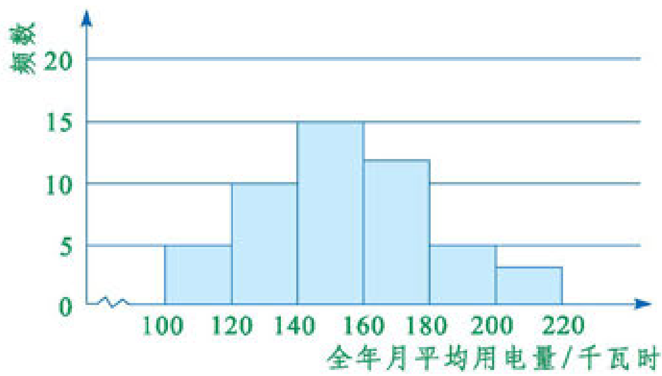


图 18－4－1

大家谈谈

（1）观察统计图表，全年月平均用电量在哪个范围内分布的户数较多？

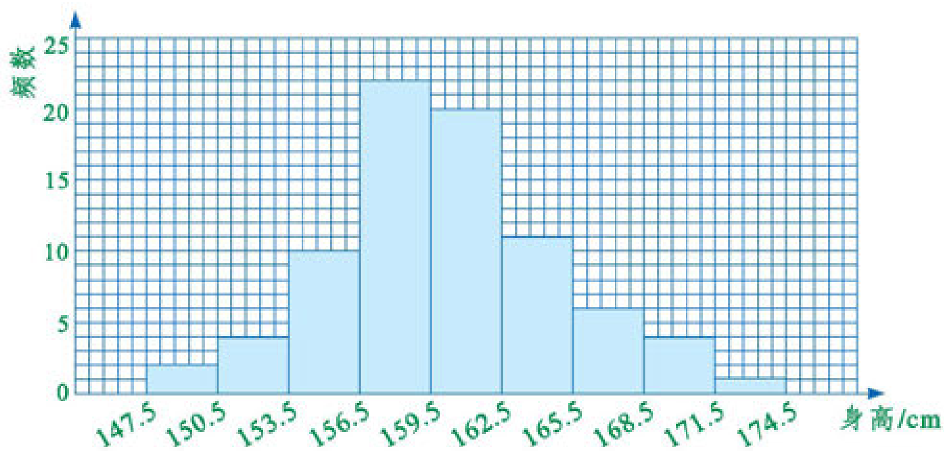
（2）某省的阶梯电价方案如表所示. 就这 50 户居民来说，各档用电量的户数分别占多大比例？你认为这个阶梯电价方案合理吗？

档次	全年月平均用电量/千瓦时	电价/（元/千瓦时）
第一档	0～180	0.52
第二档	181～280	0.55
第三档	大于 280	0.82

从统计表或统计图中可看出，全年月平均用电量 x 在 $120 \leqslant x < 180$ 内的户数较多，共有 $10+15+12=37$(户)，占 74%；全年月平均用电量小于 180 千瓦时的有 42 户，占 84%，即第一档全年月平均用电量覆盖了大多数居民家庭.

练习

某学校八年级共有 n 名男生. 现测量他们的身高(单位：cm. 结果精确到 1 cm)，依据数据绘制的频数分布直方图如图所示(为了避免有些数据落在分组的界限上，对作为分点的数保留一位小数).



(1) 数据个数 n 为多少，数据的大致分布范围在哪两数之间？

(2) 组距和组数各为多少？

(3) 频数最大的组为哪一组？该组的频数和频率各为多少？

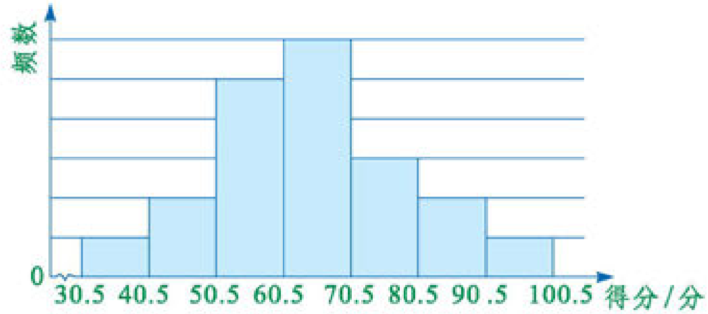
(4) 根据频数分布直方图提供的信息，填写下表.

身高/cm	148～156	157～165	166～174
人数/名			
频率			

(5) 学校要给八年级男生订购校服，男生的校服按上表分组方式设计了小、中、大三个型号，对订购各号码校服的数量提出你的建议.

习题

1. 某校举行科技知识竞赛，100 名参赛同学最后得分(得分取整数)的频数分布直方图如图所示(频数轴刻度等间隔)．根据图中的信息写出下面问题的结果．



(第 1 题)

(1) 标注频数轴上的刻度．

(2) 得分在 61 分～70 分的人数为________；得分在 71 分以上的人数为________．

(3) 如果得分大于 80 分定为优秀，那么优秀率为________．

2. 英国物理学家卡文迪许在 18 世纪测量地球的密度(单位：g/cm^3)时，重复测量 29 次，得到如下数据：

5.05	5.61	5.88	5.07	5.26	5.55	5.36	5.29
5.38	5.65	5.57	5.53	5.62	5.29	5.44	5.34
5.79	5.10	5.27	5.39	5.42	5.47	5.63	5.34
5.46	5.30	5.75	5.68	5.86			

(1) 数据中的最小值和最大值各为多少？

(2) 整理数据时，如果组距取 0.2，应该分几组，如何分组？如果组距取 0.1，又应该分几组，如何分组？

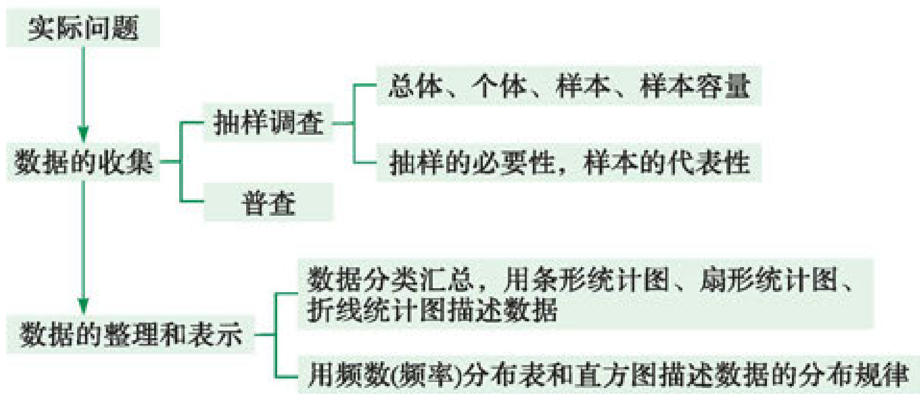
(3) 以上两种分组方式，哪种能较好地反映测量数据的分布？

(4) 按下表的分组，统计各组的频数．

密度/(g/cm^3)	5.0～5.2	5.2～5.4	5.4～5.6	5.6～5.8	5.8～6.0	合计
频数						

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

用统计方法解决实际问题的主要过程为：收集、整理和表示数据，通过对数据的分析和计算，获取有用的信息，作出合理的判断和决策. 真实的数据能提供科学信息. 许多科学结论都是通过分析数据而得到的，借助数据提供的信息而作出的判断才比较可信. 因此，统计无所不在，无处不用.

1. 收集数据常用的方式有调查、试验、查阅资料等. 当要考察的个体很多，调查具有破坏性，限于时间和费用等因素而无法一一进行调查时，多采用抽样调查.

2. 整理数据就是按一定的方式，对数据进行分类或分组，统计各类(组)数据的个数，计算相应的频率，描述数据的分布规律. 统计图可以直观表示数据的特征. 常用的统计图有条形统计图、扇形统计图、折线统计图和直方图.

3. 统计最核心的思想是用样本推断总体. 由于抽样调查只考察部分个体的情况，所以采用不同的样本，得到的结果一般也不相同，即统计结果具有不确定性. 要想得到总体较准确的结果，在保证样本具有较好的代表性的前提下，样本容量要适当大一些.

4. (1) 举例说明，如何抽样才能使样本对总体具有较好的代表性.

(2) 整理数据的一般步骤有哪些？

(3) 条形统计图、扇形统计图、折线统计图、直方图分别表示数据哪方面的特征？

复 习 题

A 组

1. 有关部门规定：初中学生每天的睡眠时间不得少于 9 小时. 请对你班的同学作一次调查，了解有多大比例的学生每天睡眠不足 9 小时.

   (1) 调查的问题是什么？

   (2) 调查的范围有多大？怎样进行调查？

   (3) 共调查多少人？每天睡眠时间不足 9 小时的有多少人，占多大百分比？

2. 某乡镇有 8 000 户家庭，请分别指出下列调查的总体和样本.

   (1) 抽样调查 200 户家庭的人口.

   (2) 抽样调查 100 户家庭的年实际收入.

   (3) 抽样调查 100 户家庭的年消费支出金额.

3. 解决下列问题需要哪些数据，采用什么样的调查方式能得到这些数据？

   (1) 学校召开运动会，要统一购买运动鞋. 你所在班各种号码的鞋各要买多少双？

   (2) 你所在班全体同学的视力情况如何？

   (3) 去年植树节某单位种下的树木的成活率是多少？

   (4) 一张选定的报纸上大约有多少个字？

4. 小亮随意选取了 10 期电脑体育彩票的中奖号码，结果如下：

   4924288　1041749　2756345　9437063　5415205

   4382477　0257196　5147653　0417769　3652891

   (1) 统计数字 0～9 分别出现的次数，计算各数字出现的频率.

   (2) 各数字出现的频率差异大吗？如果选 100 期中奖号码的 700 个数字进行统计，你认为各数字出现的频率有什么规律？

5. 小明家的电表在 3 月底至 9 月底的读数(取整千瓦时)如下表：

记录时间	3 月底	4 月底	5 月底	6 月底	7 月底	8 月底	9 月底
电表读数	1 750	1 850	1 960	2 110	2 360	2 600	2 720

   (1) 计算小明家 4，5，6，7，8，9 月份的用电量，并填写统计表.

月　份	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月
用电量/千瓦时						

(2) 画条形统计图表示各月的用电量.

(3) 画折线统计图表示各月用电量的变化情况.

(4) 解释用电量变化的主要原因.

6. 2000 年 6 月，人类基因组计划中的 DNA 全序列草图完成，人类将拥有一本记录着自身生老病死及遗传进化全部信息的“天书”. 这本天书是由四个字符 A，T，C，G 按一定顺序排成的长约 30 亿个字符的序列，这四个字符表示四种碱基. 下表所示的是两个类型的 DNA 序列片段.

A 类	ATGGCCGATCGGCTGGAAGGAACAAATAGGCGGAATTAAGGA AGGCGTTCTCGCTTTCGACAAGGAGGCGGACCATAGGAGGCGG ATTAGGAACGGTTATGAGGAAGTTA
B 类	GTTAGATTTAACGTTTTTTATGGAATTTATGGAATTATAAAT TTAAAAATTTATATTTTTTAGGTAAGTAATCCAACGTTTTTA TTACTTTTTAAAATTAAATATTTATT

统计这两个基因片断中字符 A，T，C，G 出现的频数，比较它们的主要差异.

B 组

1. 面粉厂生产的面粉，规定每袋的标准质量为 50 kg. 采用自动装袋工艺，一袋面粉的实际质量和标准质量有一定的误差. 任选 40 袋称得其质量(单位：kg)如下：

48.5	50.0	49.0	50.0	51.0	50.0	49.5	50.5	50.0	51.0
49.5	49.5	50.0	50.5	49.0	50.5	50.0	51.0	50.0	49.5
49.5	50.5	50.5	50.0	50.0	50.5	49.0	50.0	51.0	49.5
50.0	50.0	50.5	50.0	49.5	51.5	49.5	48.5	51.0	51.5

(1) 计算每袋面粉的质量与标准质量的差. 统计各类误差的面粉袋数，并填写统计表：

误差/kg	−1.5	−1.0	−0.5	0	0.5	1.0	1.5
袋　数							
百分比							

(2) 画条形统计图表示数据，描述误差分布的特点.

2. 某医院记录了一周内 60 名病人在门诊看病时等候的时间(单位：min)，并对记录数据进行分组统计，结果见下表：

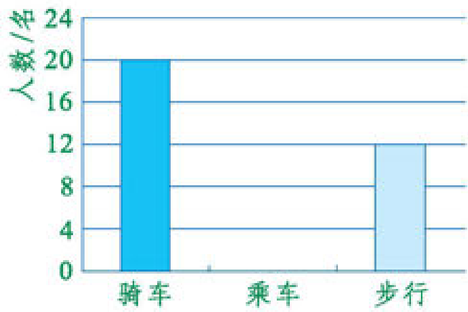
时间 t/min	$0<t\leqslant10$	$10<t\leqslant20$	$20<t\leqslant30$	$30<t\leqslant40$	$40<t\leqslant50$	$50<t\leqslant60$
频数	7	17	13	x	7	6
频率						

(1) 求 x 的值，计算各组的频率并填表.

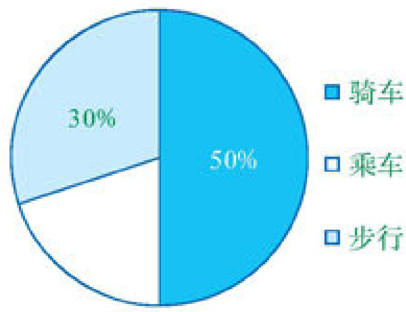
(2) 绘制频数分布直方图.

(3) 估计在这家医院看病的病人等候时间超过 30 min 的百分比.

3. 小明就班级内所有同学的到校方式进行了一次调查. 图(1)和图(2)是根据整理后的数据绘制的两幅不完整的统计图.



(1)



(2)

(第 3 题)

请你根据图中提供的信息，解答以下问题：

(1) 该班共有多少名学生?

(2) 该班有多少名学生乘车到校?

(3) 在图(1)中，将表示“乘车”的部分补充完整.

4. 对 48 个橘子的维生素 C 含量(单位：mg)进行测量，数据如下：

26.2	28.0	29.6	28.3	26.6	30.3	28.5	29.8	26.8	30.4	29.2	28.7
29.7	30.0	30.2	29.4	31.6	27.0	30.5	32.8	31.3	30.0	29.9	27.1
31.6	29.8	30.5	28.6	30.7	30.8	29.2	31.4	28.3	32.7	30.4	31.8
27.5	28.4	30.6	29.6	27.6	30.9	32.0	29.2	31.5	27.8	32.4	28.9

确定适当的分组个数，整理数据，列频数分布表，画频数分布直方图，描述数据的分布情况.

C 组

1. (1) 每人测量自己的身高(结果精确到 0.01 m)和体重(结果精确到 0.1 kg).

(2) 按公式 $K=\frac{体重}{(身高)^2}$，计算 K 的值.

(3) 汇总全班数据，按右表中的分组，分别计算各组的频数和频率.

(4) 你的 K 值在哪组？如果 $K<17$，那么你要注意补充营养，加强体育锻炼；如果 $K\geqslant 26$，那么你要控制饮食，加强体育锻炼.

K 值	频数	频率
$K<18$		
$18\leqslant K<20$		
$20\leqslant K<22$		
$22\leqslant K<24$		
$24\leqslant K<26$		
$K\geqslant 26$		

(5) 请根据(3)中计算出的结果，对全班同学提出健康建议.

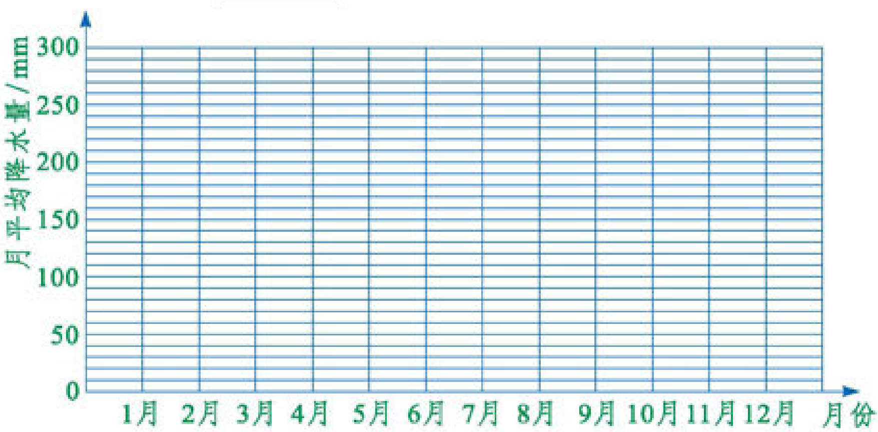
2. 下表是我国某两个城市月平均降水量(单位：mm)统计表：

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
甲市	10	15	20	30	60	130	200	210	70	35	20	15
乙市	20	40	80	160	290	280	250	240	200	110	35	20

(1) 在下面网格图中画折线统计图表示两市各月份降水量的变化情况.

(2) 从总体看，两个城市月平均降水量之间最明显的差别是什么？

(3) 两市月平均降水量差别最大的月份是______月，月平均降水量最接近的月份是______月.



(第 2 题)

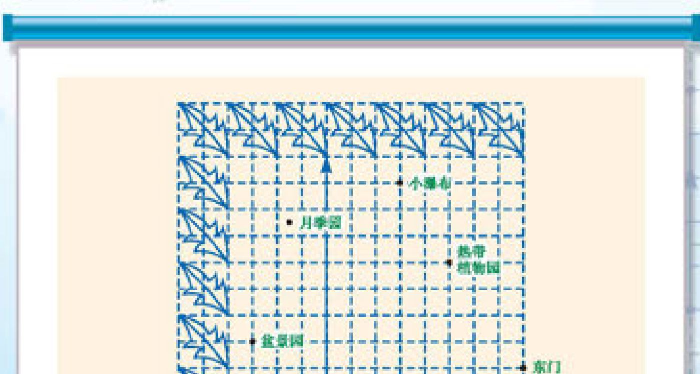
第十九章

平面直角坐标系

在本章中，我们将学习

- 确定平面上物体的位置
- 平面直角坐标系
- 坐标与图形的位置
- 坐标与图形的变化

当你迈进植物园的大门时，一幅景点分布图就呈现在你面前．如果以南门为参照点，怎样表示各景点的位置呢？



19.1 确定平面上物体的位置

建立数轴后，数轴上点的位置可以用一个实数来表示．平面上点的位置该如何表示呢？

如图 19－1－1，每个同学在教室里都有一个确定的座位．按照列在前、行在后的顺序，每个座位都可以用一对数来表示．例如，在下面部分同学的座次表中，小明在第 3 列第 5 行，可以用一对数(3，5)来表示他的座位位置．

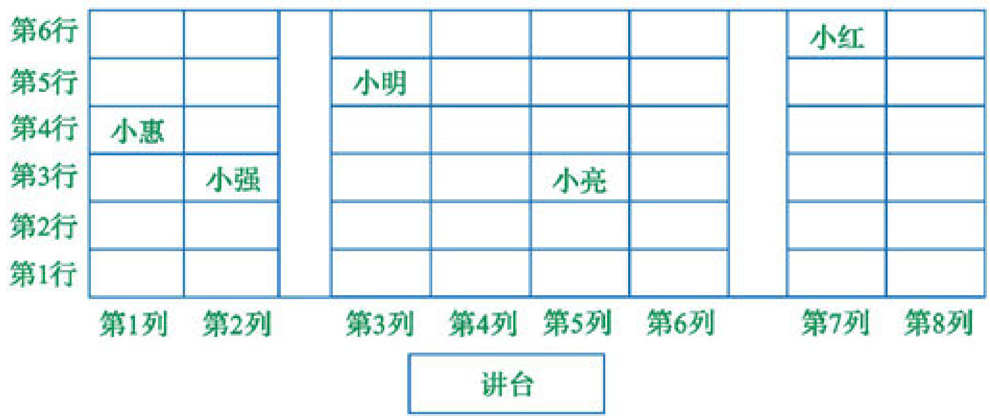


图 19－1－1

大家谈谈

按照上面的表示方法，讨论下面的问题：

(1) 小强的座位应该用哪对数来表示？小亮和小红的座位呢？

(2) 一对数(1，4)表示的是哪个同学的座位？

(3) 两对数(5，3)和(3，5)表示的座位相同吗？它们分别表示哪两个同学的座位？

(4) 每个同学的座位都能用一对数来表示吗？

做一做

图 19－1－2 是中国象棋棋盘的示意图，部分黑棋的棋子摆在这些交叉

点上，每个交叉点的位置按照先列后行的顺序都可以用一对数来表示.

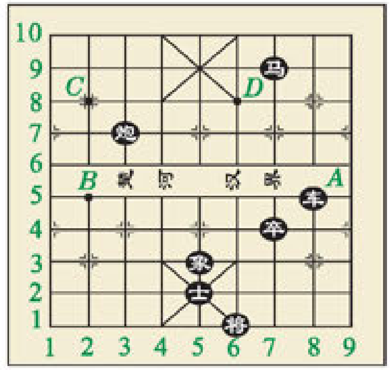


图 19－1－2

(1) 分别用三对数表示“车”“马”“炮”所在的位置.

(2) 两对数(5，3)和(7，4)分别表示哪两枚棋子的位置？

(3) 象棋规则规定：“车”只能沿直线行走，一次可以走任意格. 请你用四对数来描述“车”的行走路线：$A\to B\to C\to D$.

由上可知，在平面内，物体的位置可以用一对数(列左行右)来表示. 但在航海、航空和测量中，通常又用“方位角和距离”来表示物体的位置.

从某个参照点看物体，视线与正北(或正南)方向射线的夹角称为**方位角**(azimuth angle).

观察与思考

如图 19－1－3，在某个时刻，一艘货轮在导航灯北偏东 60°的方向上，且距离导航灯10 km.

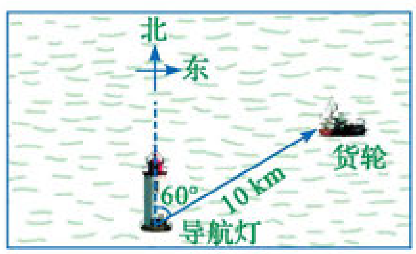


图 19－1－3

(1) 如何用方位角和距离描述导航灯相对于货轮的位置？

(2) 在同一时刻，一艘客轮在导航灯北偏西 30°的方向上，且距离导航灯 5 km 处. 请你在图中标出这艘客轮的位置.

采用“方位角和距离”来表示物体位置的方法，要明确参照点. 选择不同的参照点表示同一个物体的位置，结果是不同的.

练习

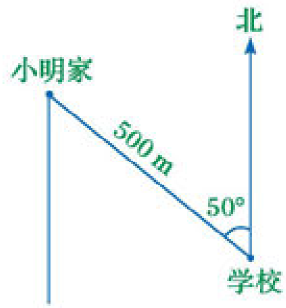
1. 在电脑办公软件 Microsoft Excel 的界面上，每个单元格的位置可以用一个字母和一个数字确定. 如图，单元格 A1，B1，C1，D1 中的内容分别为“姓名”“数学”“语文”“英语”.

(1) 请你指出 A2，B3，C4，D5 单元格中的内容.

(2) 分别指出王涛的数学成绩和张磊的英语成绩所在的单元格.

	A	B	C	D
1	姓名	数学	语文	英语
2	李明	88	92	90
3	张磊	86	94	82
4	王涛	78	90	86
5	刘强	90	87	91
6				

（第 1 题）

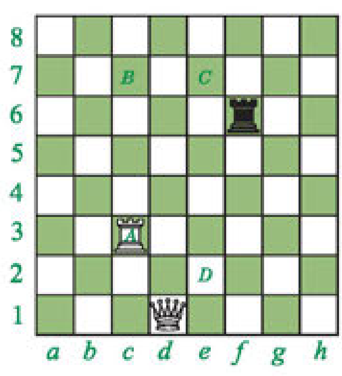


（第 2 题）

2. 如图，如何描述小明家相对于学校的位置？学校相对于小明家的位置又该怎样描述？

习题

1. 如图，国际象棋棋盘由纵横各 8 格，颜色深浅交错排列的 64 个小方格组成，棋子可以在这些方格中移动. 列和行分别用字母和数字标记，按照先列后行的顺序，“白车”所在方格 A 的位置可用(c，3)表示.



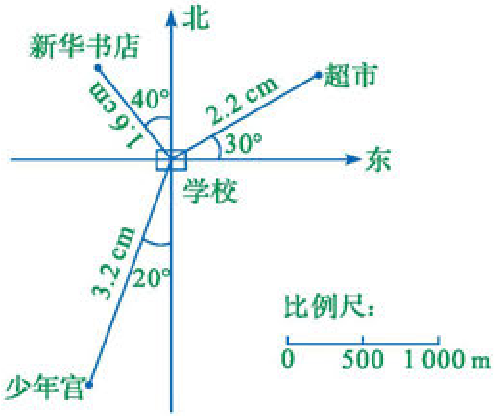
（第 1 题）

(1) 按照上述规定，“白后”和“黑车”所在方格的位置应该如何表示呢？

(2) 如果从左到右的 8 列也分别用数字 1 到 8 标记，那么如何表示“白后”和“黑车”的位置？

(3) 国际象棋规则规定：“车”只能沿直线行走，一次可以走任意格. 请按(2)中规定，用四对数描述“白车”的行走路线：$A \to B \to C \to D$.

2. 如图，以学校为参照点，请用方位角和实际距离分别表示新华书店、少年宫和超市的位置.



（第 2 题）

3. 某校八年级师生到郊外进行夏令营活动，关于营地驻扎的信息如下：

1 号营地在大本营北偏东 30°的方向上，距离大本营 500 m 处；

2 号营地在大本营北偏西 45°的方向上，距离大本营 600 m 处；

3 号营地在大本营南偏东 60°的方向上，距离大本营 400 m 处.

根据以上信息，按 1∶10 000 的比例尺画出各营地位置图.

19.2 平面直角坐标系

建立平面直角坐标系后，就可以用有序实数对来表示平面上点的位置了.

图 19－2－1 是某城市部分街道的示意图. 在繁星大道和中山路的交叉口点 O 处，小亮向交警叔叔问路.

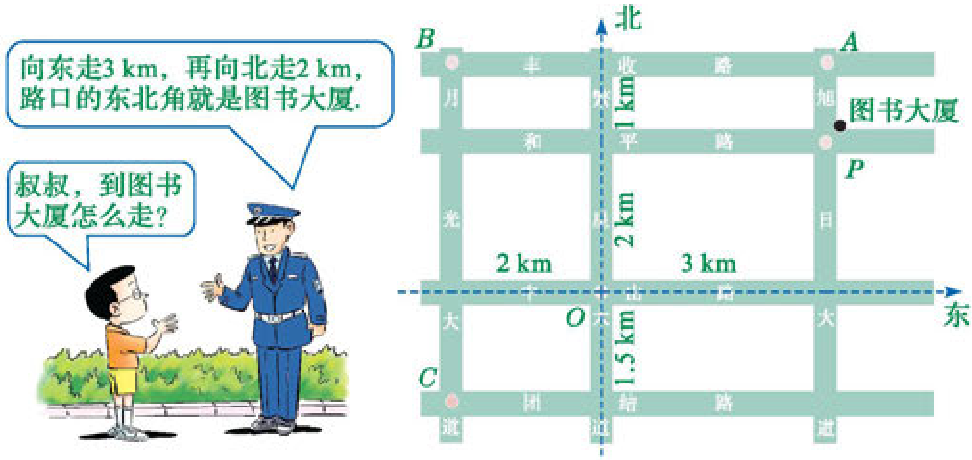


图 19－2－1

按照交警的指示，小亮能找到图书大厦吗？

如果约定以点 O 处为参照点，先说出向东（或向西）方向上的距离，再说向北（或向南）方向上的距离，那么图书大厦附近的交叉路口就可以用点 P(东 3 km，北 2 km)来表示.

如果我们把中山路看成一条数轴（向东的方向为正），把繁星大道看成另一条数轴（向北的方向为正），把它们的交点 O 看成两条数轴的公共原点，以1 km作为数轴的单位长度，那么点 P 的位置就可以用一对数(3，2)来表示.

观察与思考

在图 19－2－1 中，按照上面的规定，思考下列问题：

(1) 点 A，B，C 的位置应如何表示？

(2) 你能在图中找到用(3，−1.5)，(−2，2)表示的点的位置吗？

(3) 街道所在平面上的任何一点，它的位置都可以用一对数表示出来吗？举例说明.

如图 19－2－2，在平面内，画两条有公共原点且互相垂直的数轴，就构成了**平面直角坐标系**(rectangular coordinates in two dimensions)，简称直角坐标系. 水平方向的数轴叫做 **x 轴**(或横轴)，取向右为正方向；竖直方向的数轴叫做 **y 轴**(或纵轴)，取向上为正方向. x 轴与 y 轴的公共原点叫做**坐标原点**(coordinate origin). 两条数轴统称为**坐标轴**(coordinate axis). 建立了直角坐标系的这个平面叫做**坐标平面**(coordinate plane).

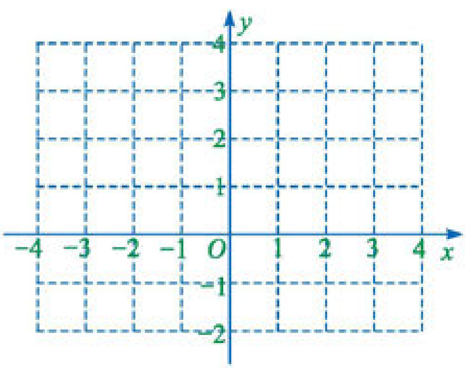


图 19－2－2

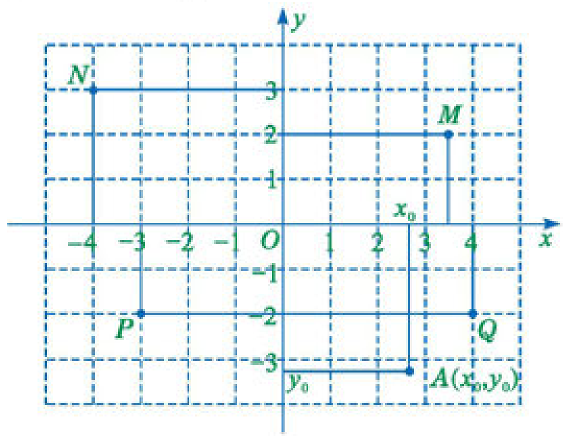


图 19－2－3

如图 19－2－3，已知坐标平面上一点 A，怎样找到一对实数表示它的位置呢？

从点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足在 x 轴和 y 轴上对应的点表示的实数分别是 x_0 和 y_0. 我们把有序实数对(x_0，y_0)称为点 A 的**坐标**(coordinates). 其中，x_0称为点 A 的横坐标，y_0称为点 A 的纵坐标. 点 A 也记作 $A(x_0，y_0)$.

做一做

在图 19－2－3 中，写出点 M，N，P，Q 的坐标.

例 1 如图 19－2－4，在平面直角坐标系中，描出点 $A(0，4)$，$B(4，2)$，

$C(2, -3)$，$D(-2, -3)$，$E(-4, 2)$，并依次连接 $ABCDEA$.

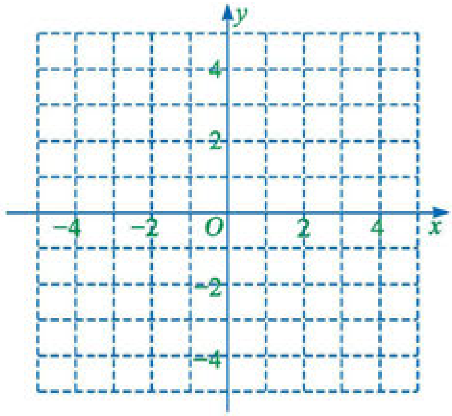


图 19-2-4

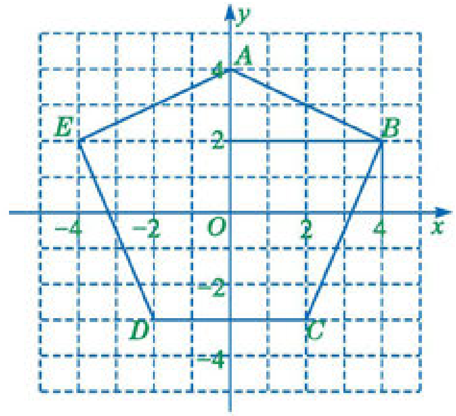


图 19-2-5

解：在 y 轴上描出表示 4 的点，即得 $A(0, 4)$.

分别过 x 轴上表示 4 的点和 y 轴上表示 2 的点，作 x 轴和 y 轴的垂线，两条垂线的交点就是点 $B(4, 2)$.

同理，可以描出 C，D，E 三点.

依次连接 $ABCDEA$，得到图 19-2-5 中所示的图形.

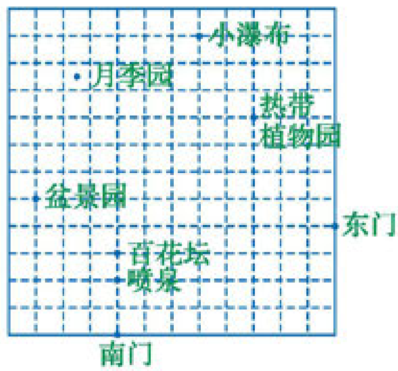
大家谈谈

在坐标平面上，任意一点能用一对有序实数来表示吗？任意一对有序实数能对应地在坐标平面上找到一个点吗？

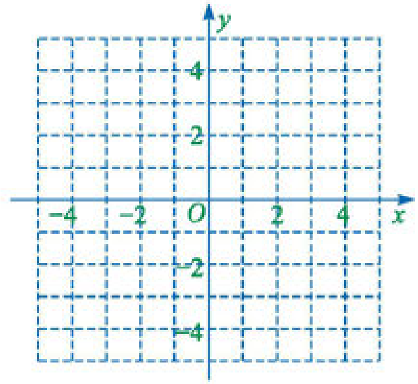
实数与数轴上的点具有一一对应关系. 由此可知，坐标平面上的点与有序实数对具有一一对应关系，即坐标平面上任意一点都可以用唯一一对有序实数来表示；反过来，任意一对有序实数都可以表示坐标平面上唯一一个点.

练　习

1. 某市植物园各主要景点位置如图所示. 以南门为坐标原点，向东方向为正的直线做横轴，向北方向为正的直线做纵轴，一小格的边长为单位长度，建立直角坐标系. 分别写出东门及各景点的坐标.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在平面直角坐标系中，描出下列各点，并按 $A \to B \to C \to D \to A$ 的顺序用线段把各点连接起来.

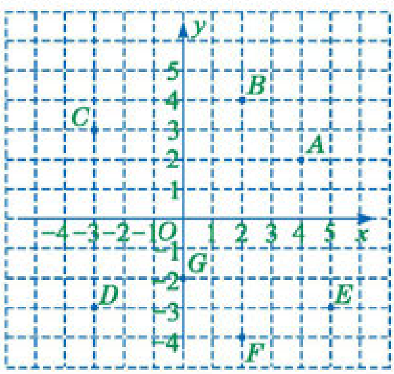
(1) $A(2, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, -2)$，$D(2, -2)$.

(2) $A(2, 2)$，$B(-2, -1)$，$C(-2, 1)$，$D(2, -2)$.

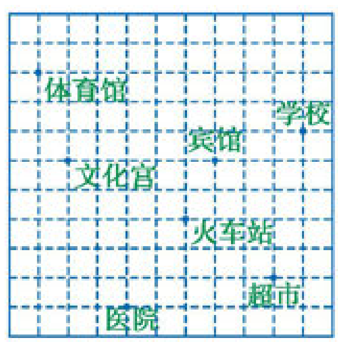
习 题

A 组

1. 在给出的直角坐标系中，写出 A，B，C，D，E，F，G 各点的坐标.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某城市部分公共场所位置如图所示. 以火车站所在位置为坐标原点，小方格的边长为 1 个单位长度，建立直角坐标系，并分别写出各场所的坐标.

3. 先画出直角坐标系，再描出下列各点：

$$A(5, 3), B(-2, 6), C(2, -3),$$
$$D(-4, -3), E(-3, 0), F(0, 4).$$

B 组

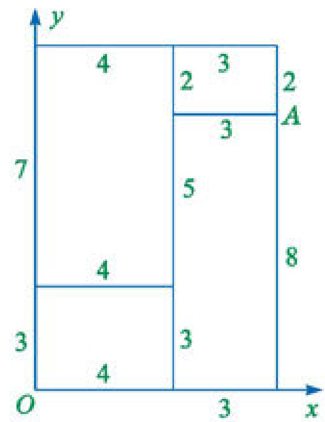
1. 小明家在学校北偏东 60°的方向上，距学校 4 km；小芳家在学校的南偏西 45°方向上，距学校$3\sqrt{2}$ km. 以学校所在的位置为坐标原点建立直角坐标系，1 km 为一个单位长度，分别求出小明家和小芳家所在位置的坐标.

2. 某邮递员投递区域街道如图所示. 现在，他要把一封邮件从邮政局所在地点 O 处尽快送到 A 地. 他选择的一条路径是

(0，0) → (0，3) → (4，3) → (4，8) → (7，8).

(1) 用彩笔在图中标出邮递员走的这条路径.

(2) 用坐标写出由点 O 到点 A 的其他最短的路径.



(第 2 题)

如图 19－2－6，平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成了四个部分，从右上方的部分说起，按逆时针方向，各部分依次叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不属于任何一个象限.

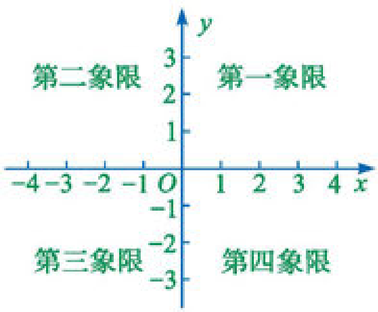


图 19－2－6

一起探究

如图 19－2－7 所示，八边形 $ABCDEFGH$ 与两条坐标轴的交点分别是 M，N，P，Q 四点.

(1) 分别写出各点的坐标.

(2) 观察各点坐标，你认为同一象限内点的坐标的共同特点是什么？

(3) 指出坐标轴上点的坐标的共同特点.

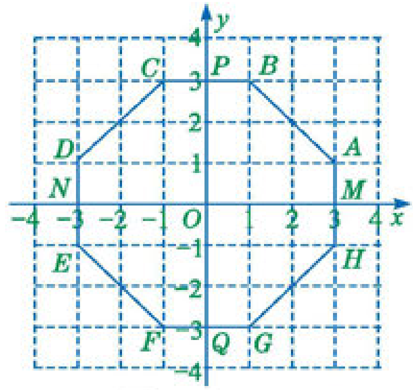


图 19－2－7

（4）分别写出点 $B(1,3)$ 关于 x 轴的对称点坐标，关于 y 轴的对称点坐标，关于原点的对称点坐标. 关于 x 轴，y 轴和原点的对称点的特征分别是什么？

关于 x 轴对称的两点，横坐标相等，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的两点，横坐标互为相反数，纵坐标相等；关于原点对称的两点，横坐标和纵坐标都互为相反数.

例 2 建立直角坐标系，并解决下列问题.

（1）描出下列各点，并把各点依次连接成封闭图形.

$A(1,-1)$，$B(3,-1)$，$C(3,1)$，$D(1,1)$，$E(1,3)$，
$F(-1,3)$，$G(-1,1)$，$H(-3,1)$，$I(-3,-1)$，
$J(-1,-1)$，$K(-1,-3)$，$L(1,-3)$.

（2）观察所得的图形，它是轴对称图形吗？如果是轴对称图形，画出它的对称轴.

（3）在画出的图形中，分别写出关于 x 轴，y 轴和原点的对称点.

解：（1）描点，连线后得到的图形如图 19-2-8 所示.

（2）这个图形是轴对称图形，它有四条对称轴：x 轴，y 轴，l_1，l_2.

（3）关于 x 轴的对称点分别是点 A 和点 D，点 B 和点 C，点 E 和点 L，点 F 和点 K，点 G 和点 J，点 H 和点 I. 关于 y 轴的对称点分别是点 A 和点 J，点 B 和点 I，点 C 和点 H，点 D 和点 G，点 E 和点 F，点 L 和点 K. 关于原点的对称点分别是点 A 和点 G，点 B 和点 H，点 C 和点 I，点 D 和点 J，点 E 和点 K，点 F 和点 L.

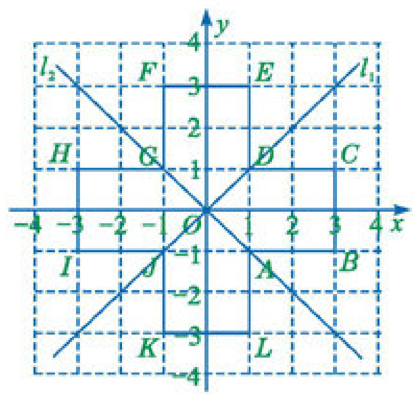


图 19-2-8

练 习

1. 点 $A(-3,4)$ 在第________象限，到 x 轴的距离为________，到 y 轴的距离为________，到原点的距离为________.

2. 点 $B(3,\ -5)$在第________象限，其关于 x 轴的对称点的坐标为________，关于 y 轴的对称点的坐标为________，关于原点的对称点的坐标为________.

3. 在直角坐标系中，点 A 的坐标为$(4,\ 2)$.

(1) 分别画出点 A 关于 x 轴，y 轴和原点的对称点 B，C，D，并分别写出点 B，C，D 的坐标.

(2) 四边形 $ABDC$ 是轴对称图形吗？如果是轴对称图形，请画出它的对称轴.

习 题

A 组

1. 若点 $P(a,\ -2a)$是第二象限内的点，则 a 的取值范围是________.
2. 已知点 $P(a,\ b)$在第三象限，那么点 $Q(a,\ -b)$在第________象限，点 $M(-a,\ b)$在第________象限，点 $N(-a,\ -b)$在第________象限.
3. 已知直线 AC 垂直于 x 轴，垂足为 C. 点 A 的坐标是$(1,\ 2)$. 写出点 C 的坐标.
4. 建立直角坐标系，解决以下问题：

   (1) 画出下列各点，并把各点依次连接成封闭图形.

   $$A(-2,\ 3),\ B(2,\ 3),\ C(5,\ 0),$$
   $$D(2,\ -3),\ E(-2,\ -3),\ F(-5,\ 0).$$

   (2) 指出上面各点所在的象限或坐标轴.

   (3) 分别写出上面各点关于 x 轴，y 轴和原点的对称点.

B 组

1. 如果点 $M(a,\ b)$在第四象限内，且 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等，那么 a 和 b 的关系是________.
2. 如果 $M(a,\ b)$，$N(c,\ d)$是平行于 x 轴的一条直线上的两点，那么 b 与 d 的关系是________.
3. 在长方形 $ABCD$ 中，点 A 的坐标为$(-2,\ 3)$，点 B 的坐标为$(3,\ 3)$，$BC=8$. 求点 C 的坐标.

19.3 坐标与图形的位置

在坐标平面中，图形上的点都有了相应的坐标. 因此，建立适当的直角坐标系，利用图形上点的坐标，能够方便地解决问题.

如图 19－3－1，小亮画了一个四边形，想把它的形状通过电话告诉小强，让小强也能准确地画出相同的图形.

大家替他想想办法.

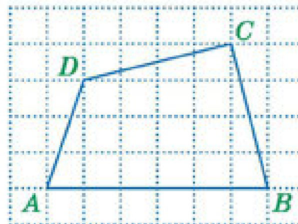


图 19－3－1

大家谈谈

小明说："建立直角坐标系，告诉这个四边形四个顶点的坐标就能画出相同的图形."

你认为小明的说法可行吗？说说理由.

在实际生活中，经常需要建立适当的直角坐标系，通过坐标来描述某个图形的位置与形状.

一起探究

已知一个边长为 4 的正方形. 建立适当的直角坐标系，通过各顶点的坐标来描述它的位置.

(1) 图 19－3－2(1)，(2)，(3)分别是三名同学建立的直角坐标系，请分别将四边形各顶点的坐标填写在下面的表格中.

直角坐标系	点 A 坐标	点 B 坐标	点 C 坐标	点 D 坐标
(1)				
(2)				
(3)				

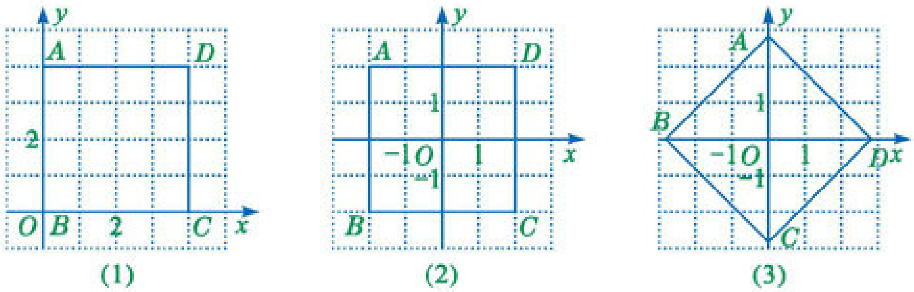


图 19－3－2

（2）这三种建立直角坐标系的方式各有什么优点？说出你的理由.

（3）你还能建立其他的直角坐标系吗？

建立不同的直角坐标系，同一个图形的顶点坐标也不同，应根据具体情况建立适当的直角坐标系.

做一做

如图 19－3－3，在等腰三角形 ABC 中，底边 $BC=4$，高 $AD=6$.

（1）请你在网格图中建立适当的直角坐标系，并写出点 A，B，C 的坐标.

（2）说明你选择这个直角坐标系的理由.

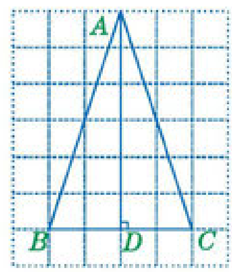
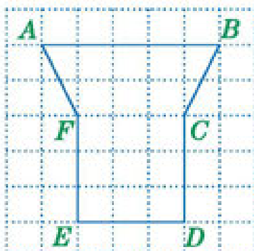


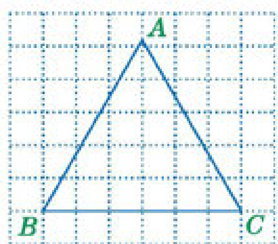
图 19－3－3

练　习

1. 选择适当的方法，将图中图形的形状告诉你的同学，以便他们能画出相同的图形.



（第 1 题）



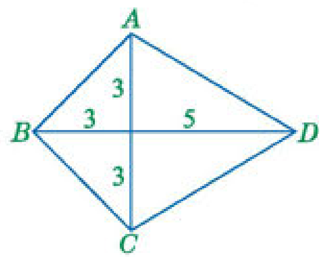
（第 2 题）

2. 如图，已知等边三角形 ABC 的边长为 6. 请你建立适当的直角坐标系，并写出顶点 A，B，C 的坐标.

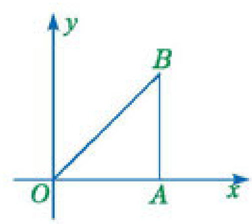
习 题

A 组

1. 小敏画了一个如图所示的四边形. 如果小红不看这个图形, 小敏用什么方法能让小红也画出同样的图形?

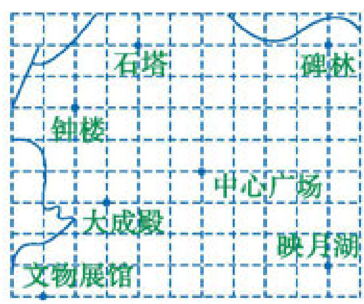


(第 1 题)



(第 2 题)

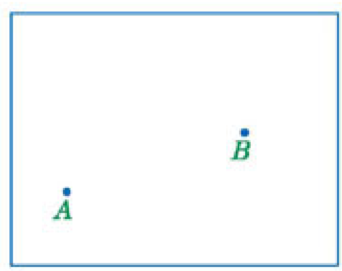
2. 如图, 在直角坐标系中, 等腰直角三角形 OAB 的斜边 OB 的长为 4 个单位长度.
   (1) 写出点 B 的坐标.
   (2) 还可以怎样建立直角坐标系, 使得各顶点的坐标更为简单?
3. 如图, 请你建立适当的直角坐标系, 用坐标表示各个旅游景点的位置.



(第 3 题)

B 组

1. 已知点 A 的坐标为 $(0, 0)$, 点 B 的坐标为 $(4, 0)$, 点 C 在 y 轴上, $\triangle ABC$ 的面积为 10. 求点 C 的坐标, 并在直角坐标系中画出符合条件的三角形.
2. 在一次夏令营活动中, 老师将一份行动计划藏在没有任何标记的点 C 处, 只告诉大家 A, B 两处各是一棵树, 坐标分别为 $(0, 0)$, $(30, 10)$, 点 C 的坐标为 $(20, 20)$ (单位: m). 请确定点 C 的位置, 尽快找到这份行动计划.



(第 2 题)

19.4 坐标与图形的变化

在平面直角坐标系中，将一个图形进行平移，作轴对称图形，会使图形的位置发生变化；将图形进行伸缩，会使图形的形状和大小发生变化．当一个图形的位置、形状或大小发生变化时，其顶点的坐标也相应地发生变化．它们是怎样变化的呢？

将一个图形沿坐标轴方向平移后，对应顶点的坐标是如何变化的呢？

一起探究

1．在坐标平面上，一只蚂蚁从原点出发，爬行的路径如图 19－4－1 所示．

（1）写出 A，B，C，D，E 这五个点的坐标．

（2）指出蚂蚁在各条线段上爬行的方向和距离，并填写下表．

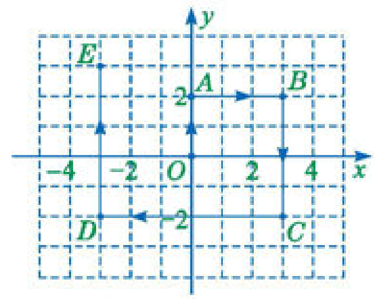


图 19－4－1

移动的路径	平移的方向和距离	坐标的变化	
		横坐标	纵坐标
$O(0, 0)\to A(0, 2)$	向上平移 2 个单位长度	不变	加 2
$A(0, 2)\to B(\quad)$			
$B(\quad)\to C(\quad)$			
$C(\quad)\to D(\quad)$			
$D(\quad)\to E(\quad)$			

2．在直角坐标系中，将一个图形沿坐标轴的方向平移时，各顶点的坐标是否有相同的变化规律？

例 如图 19－4－2，在平面直角坐标系中，长方形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(-2, 1)$，$B(2, 1)$，$C(2, 3)$，$D(-2, 3)$．将长方形 $ABCD$ 沿 x 轴的方向向右平移 5 个单位长度，得到长方形 $A_1B_1C_1D_1$．请写出

长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各顶点的坐标，并指出对应顶点坐标的变化规律．

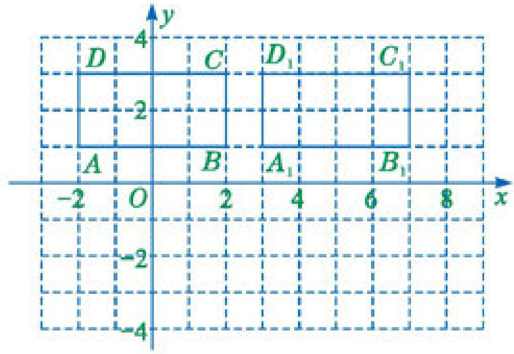


图 19－4－2

解：将长方形 $ABCD$ 沿 x 轴的方向向右平移 5 个单位长度，各顶点移动的方向一致，移动的距离都是 5 个单位长度．因此，平移后的长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各顶点的坐标为：

$$A_1(3，1)，B_1(7，1)，C_1(7，3)，D_1(3，3).$$

顶点坐标的变化规律为：长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各顶点的横坐标是将长方形 $ABCD$ 各顶点的横坐标都增加 5，纵坐标不变而得到的．

做一做

1．在图 19－4－2 中，将长方形 $ABCD$ 沿 y 轴的方向向下平移 4 个单位长度，画出平移后的长方形，写出其各顶点的坐标，并说出图形平移前后对应顶点的坐标是如何变化的．

2．在图 19－4－2 中，将长方形 $ABCD$ 先沿 x 轴的方向向右平移 6 个单位长度，再沿 y 轴的方向向下平移 5 个单位长度，画出平移后的长方形，写出其各顶点的坐标，并说出图形平移前后对应顶点的坐标是如何变化的．

在直角坐标系中，对于坐标平面上任意一点 $P(x，y)$．将它沿 x 轴的方向向右(或向左)平移 k 个单位长度，相当于这个点的横坐标增加(或减少) k，纵坐标不变，即点 $P(x，y)$ 平移到点 $P'(x+k，y)$(或 $P'(x-k，y)$)；将它沿 y 轴的方向向上(或向下)平移 k 个单位长度，相当于这个点的横坐标不变，纵坐标增加(或减少) k，即点 $P(x，y)$ 平移到点 $P''(x，y+k)$(或 $P''(x，y-k)$)．

练　习

1．已知直角坐标系中一点 $P(1，1)$，写出这个点向下平移 2 个单位长度，再向左平移 2 个单位长度后的坐标．

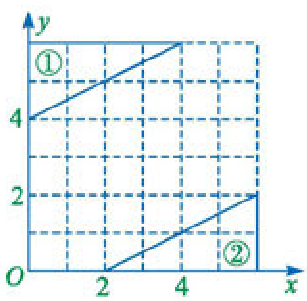
2. 在平面直角坐标系中，已知线段 AB 的端点 $A(-3, 3)$，$B(-5, 0)$，点 $P(x, y)$是线段 AB 上任意一点. 根据线段的平移情况，写出平移后点 A，B，P 对应的坐标.

平移方向和距离	$A(-3, 3)$	$B(-5, 0)$	$P(x, y)$
向左平移 4 个单位长度			
向下平移 3 个单位长度			
向右平移 2 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度			
向左平移 3 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度			

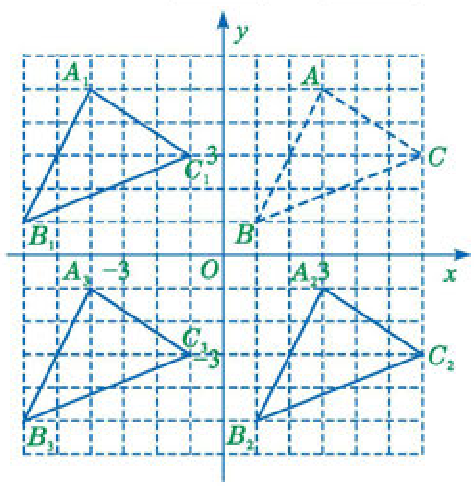
习题

A 组

1. 如图，将三角形①平移，与三角形②拼成一个长方形，正确的平移方法是：先向______平移______单位长度，再向______平移______单位长度.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 各三角形在直角坐标系中的位置如图所示. 请你分别说明$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$是由$\triangle ABC$如何变化得来的，并指出它们各对应顶点坐标之间的关系.

3. 在直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(-3, 0)$，

$B(-2, -2)$，$C(-4, -3)$，$D(-5, -1)$．把这个四边形向上平移 4 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度后，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$．写出四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的顶点坐标，并画出这个四边形．

B 组

1．在同一直角坐标系中，有四个三角形，其各顶点坐标如下表所示．

三角形	各顶点的坐标		
$\triangle ABC$	$A(-2, 3)$	$B(-4, 1)$	$C(-1, 0)$
$\triangle A_1B_1C_1$	$A_1(3, 3)$	$B_1(1, 1)$	$C_1(4, 0)$
$\triangle A_2B_2C_2$	$A_2(-2, -1)$	$B_2(-4, -3)$	$C_2(-1, -4)$
$\triangle A_3B_3C_3$	$A_3(2, 0)$	$B_3(0, -2)$	$C_3(3, -3)$

(1) 在直角坐标系中画出这四个三角形．

(2) 分别说明$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$ 是由$\triangle ABC$ 经过怎样的变化得到的．

2．在直角坐标系中，将点 $P(x, y)$ 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度到点 P'．写出点 P' 的坐标，并求 PP' 的长．

如果两个图形关于坐标轴成轴对称，那么各对应顶点的坐标之间有什么关系呢？

一起探究

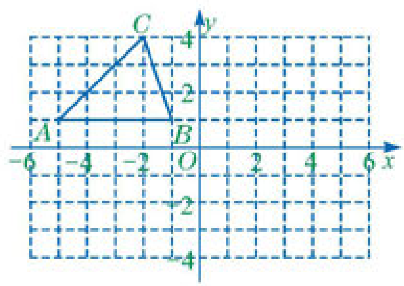


图 19－4－3

如图 19－4－3，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为：

$A(-5, 1)$，$B(-1, 1)$，$C(-2, 4)$．

(1) 分别把点 A，B，C 关于 x 轴和 y 轴的对称点的坐标填写在下表中．

$\triangle ABC$ 顶点坐标	$A(-5, 1)$	$B(-1, 1)$	$C(-2, 4)$
关于 x 轴的对称点	A_1(　　)	B_1(　　)	C_1(　　)
关于 y 轴的对称点	A_2(　　)	B_2(　　)	C_2(　　)

(2) 在图 19－4－3 中作出与$\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$，关

于 y 轴成轴对称的$\triangle A_2B_2C_2$.

(3) 根据对应顶点坐标的变化规律，描述关于 x 轴，y 轴成轴对称的两个三角形对应顶点坐标之间的关系.

关于 x 轴成轴对称的两个图形，各对应顶点的横坐标相等，纵坐标互为相反数；关于 y 轴成轴对称的两个图形，各对应顶点的横坐标互为相反数，纵坐标相等.

将一个图形各顶点的横坐标和纵坐标都乘(或除以)相同的数，所得图形与原图形之间的形状和大小有什么关系呢？

一起探究

1. 如图 19－4－4，在直角坐标系中，五边形 $OABCD$ 各顶点的坐标分别为：

$$O(0,0),\ A(0,2),\ B(2,3),\ C(4,2),\ D(3,0).$$

(1) 将各顶点的横坐标和纵坐标都乘 2，写出各对应点的坐标：

$O(0,0)$，$A_1($　　　$)$，$B_1($　　　$)$，$C_1($　　　$)$，$D_1($　　　$)$.

(2) 在直角坐标系中，描出这些点并依次连接，得到的五边形 $OA_1B_1C_1D_1$ 与五边形 $OABCD$ 相比较，形状和大小有什么变化？

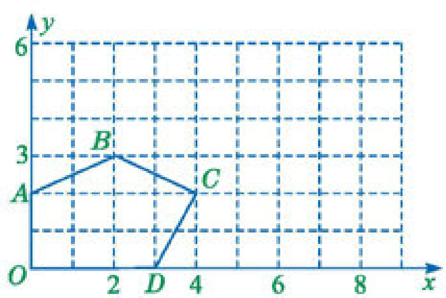


图 19－4－4

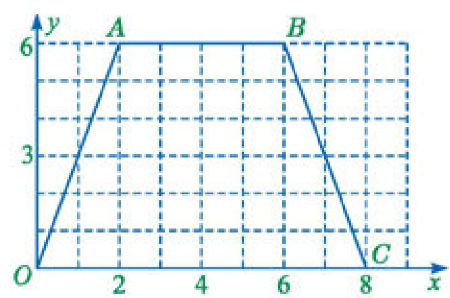


图 19－4－5

2. 如图 19－4－5，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 各顶点的坐标分别为：

$$O(0,0),\ A(2,6),\ B(6,6),\ C(8,0).$$

(1) 将各顶点的横坐标和纵坐标都乘$\frac{1}{2}$，写出各对应点的坐标：

$O(0, 0)$，$A_1($　　　$)$，$B_1($　　　$)$，$C_1($　　　$)$.

(2) 在坐标系中描出这些点并依次连接各点，得到的四边形 $OA_1B_1C_1$ 与四边形 $OABC$ 相比较，形状和大小有怎样的变化？

3. 分别过每对对应顶点画直线，你能发现什么结果？

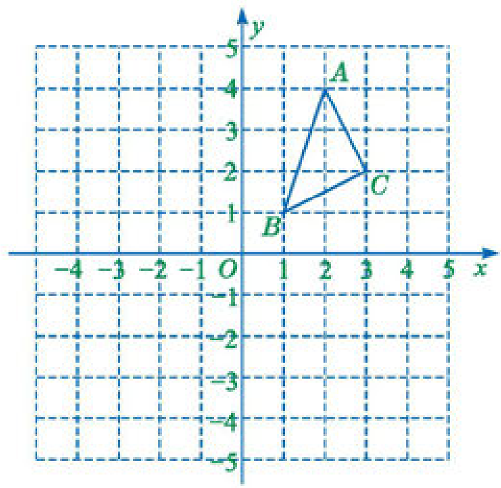
将一个图形各顶点的横坐标和纵坐标都乘 k（或$\frac{1}{k}$，$k>1$），所得图形的形状不变，各边扩大到原来的 k 倍（或缩小为原来的$\frac{1}{k}$），且连接各对应顶点的直线相交于一点.

练　习

1. $\triangle ABC$ 在直角坐标系中的位置如图所示.

(1) 作与$\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$，并写出$\triangle A_1B_1C_1$ 各顶点的坐标.

(2) 作与$\triangle ABC$ 关于 y 轴成轴对称的$\triangle A_2B_2C_2$，并写出$\triangle A_2B_2C_2$ 各顶点的坐标.



（第 1 题）

2. 已知$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(0, 0)$，$B(6, 0)$，$C(3, 4.5)$，$\triangle A_1B_1C_1$ 的顶点坐标分别为 $A_1(0, 0)$，$B_1(12, 0)$，$C_1(6, 9)$，$\triangle A_2B_2C_2$ 的顶点坐标分别为 $A_2(0, 0)$，$B_2(4, 0)$，$C_2(2, 3)$.

(1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 的形状和大小各有什么关系？

(2) $\triangle A_2B_2C_2$ 与$\triangle ABC$ 的形状和大小各有什么关系？

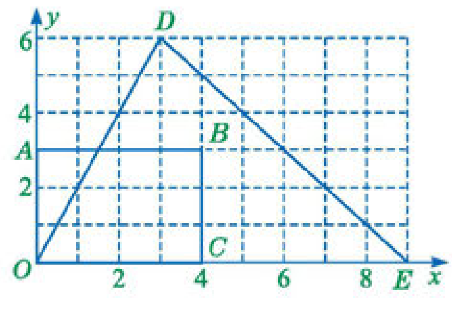
习题

A 组

1. 在如图所示的直角坐标系中解决下列问题：

(1) 将长方形 $OABC$ 的各顶点坐标都乘 1.5，写出各对应点的坐标，并在直角坐标系中画出放大后的四边形.

(2) 将 $\triangle ODE$ 的各顶点坐标都除以 3，写出各对应点的坐标，并在直角坐标系中画出缩小后的三角形.



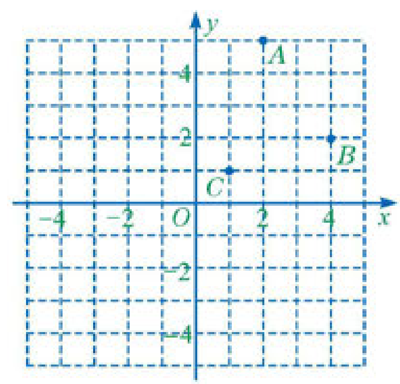
（第 1 题）

2. 如图.

(1) 在直角坐标系中，分别描出点 A，B，C 关于原点 O 的对称点 A_1，B_1，C_1，写出点 A_1，B_1，C_1 的坐标，并分别依次连接点 A，B，C 和点 A_1，B_1，C_1.

(2) 描述 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 各对应顶点坐标之间的关系.

(3) $\triangle A_1B_1C_1$ 是由 $\triangle ABC$ 经怎样的变化得到的？



（第 2 题）

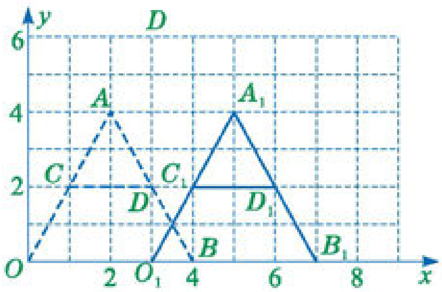
B 组

在直角坐标系中，图案“A”经过变化后得到的相应图案如图(1)～图(6)所示(虚线为原图案).

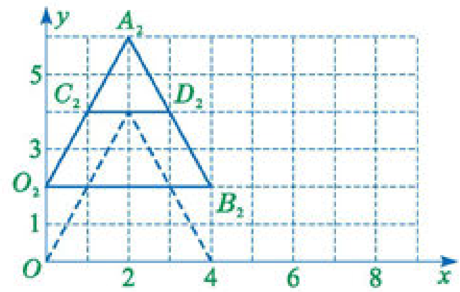
(1) 分别写出图(1)～图(6)中与点 O，A，B，C，D 对应的点的坐标.

(2) 说明图(1)～图(6)中的图案分别发生了怎样的变化.

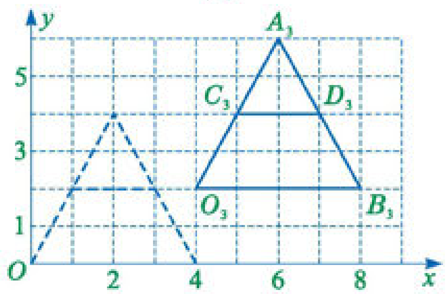
(3) 图(1)～图(6)中的图案变化前后，其对应点的坐标之间各有什么关系？(填写表格)



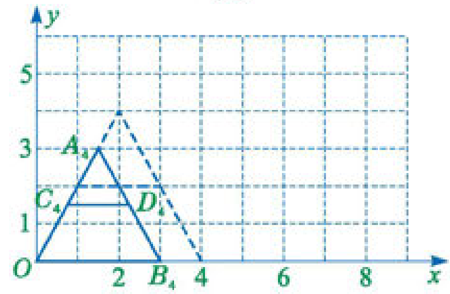
(1)



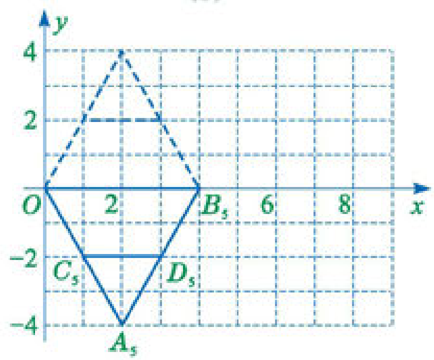
(2)



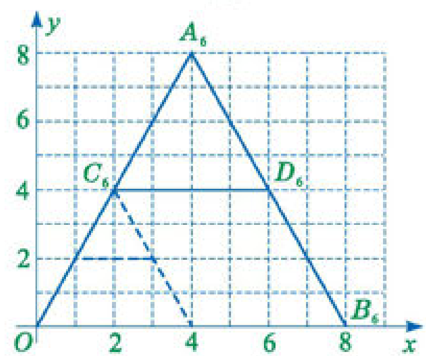
(3)



(4)



(5)



(6)

图号	图形的变化	对应点坐标的变化
(1)	向右平移 3 个单位长度	$P(x, y) \to P_1(x+3, y)$
(2)		
(3)		
(4)		
(5)		
(6)		

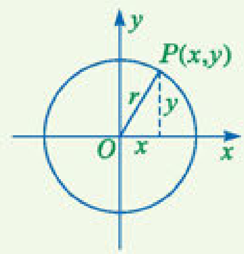
读一读

笛卡儿与直角坐标系

笛卡儿(Descartes，1596 年～1650 年)是法国的一位数学家．他在数学上的杰出贡献是将代数与几何巧妙地联结在一起，创造了“解析几何”这门新的数学分支．

平面直角坐标系是笛卡儿将代数与几何联结起来的桥梁，它使得平面图形中的点 P 与有序实数对 (x, y) 建立了一一对应的关系，从而能把形象的几何图形和运动过程变成代数的形式，使得用代数方法研究几何问题成为现实．

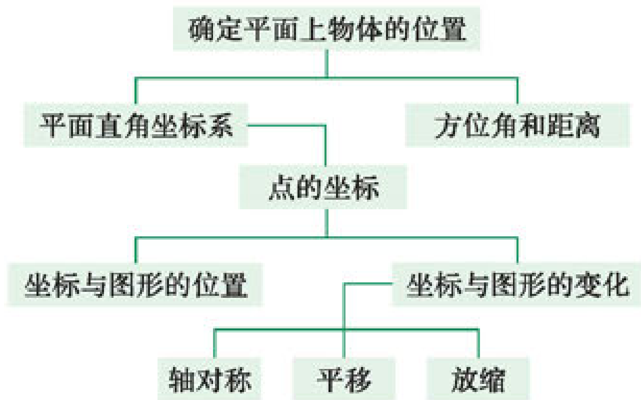
他用代数方法研究几何问题的一个基本思想就是，在平面直角坐标系中，平面图形(直线和曲线)可以看成是“点”运动的轨迹，而点的坐标 x 与 y 的不断变化，就使 x 与 y 具有了某种关系．通过研究 x 与 y 的关系，可达到研究几何图形某些性质的目的．



例如，他在平面直角坐标系中考察了圆与方程的联系(如图)，得到方程 $x^2+y^2=r^2$．这个方程表示的就是以坐标原点 O 为圆心、r 为半径的圆．这样，就把圆这样一个静止不动的图形，转化成了点 P 连续运动(绕原点 O 旋转，且到原点的距离为 r)的轨迹．

回顾与反思

一、知识结构

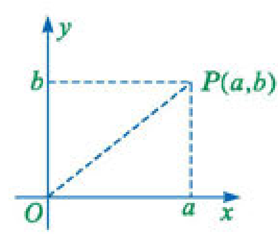


二、总结与反思

确定平面上物体位置的方法有多种，建立平面直角坐标系是常用的方法之一. 建立了平面直角坐标系以后，平面上的点和有序实数对之间建立了一一对应的关系，这样就为用数来研究图形提供了可能. 因此，平面直角坐标系是数形结合的重要桥梁，也是我们运用数学知识解决实际问题的重要工具.

1. 平面直角坐标系.

平面直角坐标系是由两条具有公共原点且相互垂直的数轴构成的. 建立直角坐标系后，平面上任意一点都可以用一组有序实数对来表示；反过来，任意一组有序实数对都表示平面上一点.



2. 图形上点的坐标.

对于给定的图形，通过建立适当的直角坐标系，利用图形上点的坐标，能够方便地解决各类问题.

3. 用坐标的变化研究图形的平移、轴对称和放缩.

设 m 为正实数，(x, y)为图形上任意一点 P 的坐标.

(1) 如果将图形分别沿坐标轴向左、向右、向上和向下平移 m 个单位长度，那么点 $P(x, y)$相应地变为 P_1(____，____)，P_2(____，____)，P_3(____，____)，P_4(____，____).

(2) 如果分别作该图形关于 x 轴和 y 轴的轴对称图形，那么点$P(x, y)$

相应地变为 P_1(____，____)，P_2(____，____).

(3) 如果将图形对应顶点的坐标 $P(x，y)$变化为 $P_1(kx，ky)$或 $P_2\left(\frac{1}{k}x，\frac{1}{k}y\right)$ $(k>1)$，那么图形各边______到原来的 k 倍或______为原来的$\frac{1}{k}$.

三、注意事项

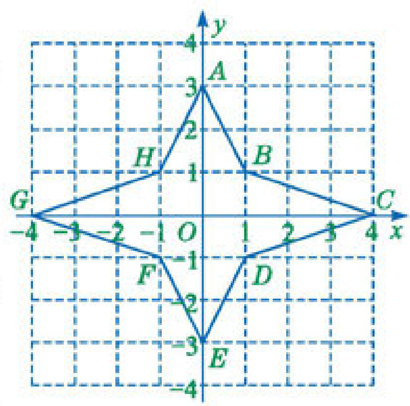
1. 同一个点在不同的直角坐标系中，其坐标一般也不相同. 我们说一个点的坐标，都是对某一个确定的坐标系来说的.

2. 对一个图形，建立不同的直角坐标系，图形上点的坐标也不相同. 要根据图形的特点建立适当的坐标系，以使所求点的坐标尽可能简单.

复 习 题

A 组

1. 如图，A，B，C，D，E，F，G，H 分别是直角坐标系中的点，分别写出各点的坐标.



(第 1 题)

2. 在直角坐标系中，描出下列各点，再把它们依次连接成封闭图形，看看你得到的图形像什么，并写出这些点关于坐标轴对称的点的坐标.

(0，0)，(1，3)，(2，3)，(3，2)，(3，0)，(1，−1)，(2，−1)，(1，−3)，(0，−1)，(−1，−3)，(−2，−1)，(−1，−1)，(−3，0)，(−3，2)，(−2，3)，(−1，3).

3. 填空：

(1) 若点 A 在第二象限，且到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 3，则点 A 的坐标为______.

(2) 若点 $A(a，b)$ 在第二象限，则点 $B(-a，b)$在第______象限.

(3) 点 $P(-4，-2)$到 x 轴的距离是______，到 y 轴的距离是______.

(4) 若点 $A(3, 5)$ 关于 x 轴的对称点是 $B(3, m)$，则 $m=$______.

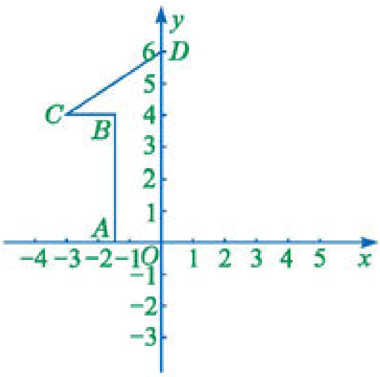
(5) 到 x 轴和 y 轴的距离都等于 2 的点有______个，坐标分别为________________________.

(6) 在直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(2, 3)$. 若将 OA 绕原点 O 逆时针旋转 $90°$ 得到 OA_1，则点 A_1 的坐标为__________.

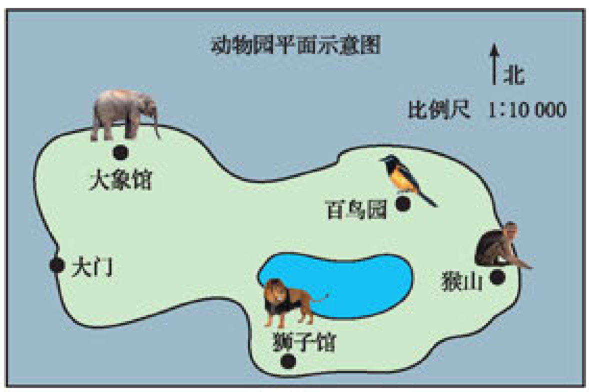
4. 在直角坐标系中描出下列各点：$A(0, 5)$，$B(1, 1)$，$C(5, 0)$，$D(1, -1)$，$E(0, -5)$，$F(-1, -1)$，$G(-5, 0)$，$H(-1, 1)$. 顺次连接各点成为封闭图形. 这个图形还可以看成由图形中的哪一部分经过怎样的变化得到的？

5. 如图. (1) 写出图中标出的各点的坐标.

(2) 画出所给图形关于 y 轴对称的图形，并写出图中各点的对称点的坐标.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 小亮在某市动物园的门票上看到这个动物园的平面示意图(如图). 请你借助刻度尺、量角器解决如下问题.

(1) 填空：

①百鸟园在大门的北偏东______度的方向上，到大门的图上距离约为______cm.

②大象馆在大门的北偏东______度的方向上，到大门的图上距离约为______cm.

③狮子馆在大门的南偏东______度的方向上，到大门的图上距离约为______cm.

(2) 建立适当的直角坐标系，用坐标分别表示猴山、大象馆、狮子馆和百鸟园在图中的位置.

7. 一个长方形的两条边长分别为 6 和 5，建立适当的坐标系，写出这个长方形各顶点的坐标.

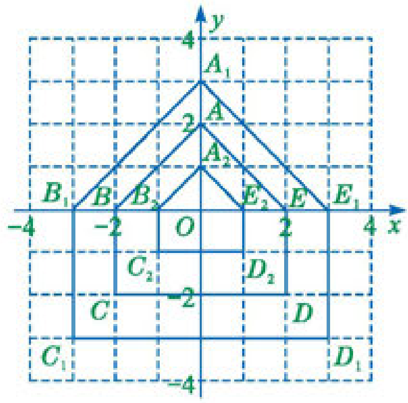
8. 解答下列问题：

(1) 在直角坐标系中，描出 $A(-2, 1)$，$B(-3, -5)$，$C(0, 4)$三点. 依次连接各点，得到$\triangle ABC$.

(2) 将$\triangle ABC$向右平移，使其顶点 A 移到点(1，1). 画出平移后的三角形，并写出 B，C 两点平移后的坐标.

(3) $\triangle ABC$平移前后，对应点的坐标之间具有什么关系？

9. 在直角坐标系中，描出 $A(2, 1)$，$B(0, -3)$，$C(4, -4)$三点，依次连接各点得到$\triangle ABC$. 分别作出与$\triangle ABC$关于 x 轴和 y 轴对称的图形$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，并写出它们各顶点的坐标.



(第 10 题)

10. 如图.

(1) 五边形 $ABCDE$ 各顶点坐标通过怎样的变化后可得到五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$？

(2) 五边形 $ABCDE$ 各顶点坐标通过怎样的变化后可得到五边形 $A_2B_2C_2D_2E_2$？

11. 按要求解答下列问题：

(1) 填表：

(x, y)	$(x, -y)$	$(-x, y)$	$(x-2, y)$	$(x+2, y-1)$	$(2x, 2y)$
$A(1, 1)$					
$B(1, 3)$					
$C(4, 3)$					

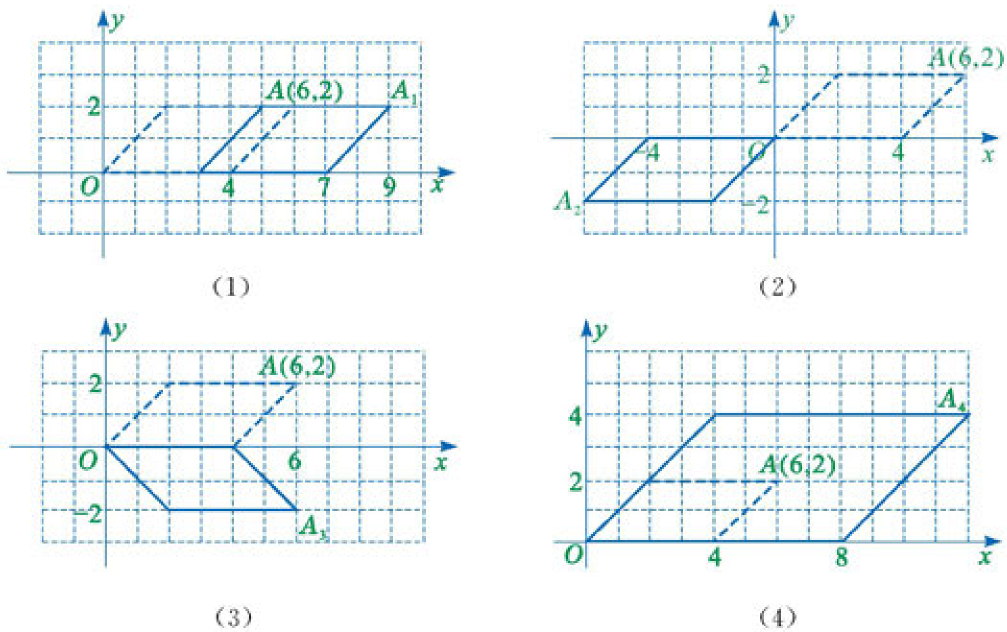
(2) 在直角坐标系中，画出以上表中每一列三个点为顶点的三角形，然后说明所得三角形与$\triangle ABC$的位置关系.

B 组

1. 已知点 $P(2x-3,\ 3-x)$到两个坐标轴的距离相等，试确定点 P 的位置.
2. 已知点 $P(a-1,\ 2a+2)$ 在第二象限内，求 a 的取值范围，并在数轴上表示.
3. 如图，在直角坐标系中，一个平行四边形(虚线)经过不同的变化分别得到图(1)～图(4)中的相应图形.

   (1) 分别写出图(1)～图(4)中点 A 变化后的坐标.

   (2) 图(1)～图(4)中的图形分别发生了怎样的变化？图形变化前后，其对应点的坐标之间存在什么关系？



(第 3 题)

C 组

1. (1) 在直角坐标系中，描出下列各点：

   $A(0,\ 1)$，$B(0,\ -1)$，$C(3,\ -1)$，$D(3,\ -2)$，$E(5,\ 0)$，$F(3,\ 2)$，$G(3,\ 1)$.

   依次连接各点，组成一个封闭图形，画出这个图形.

   (2) 对(1)中图形上所有顶点的坐标分别进行下列变化，指出图形的位置或形状的变化.

坐标变化	图形的位置或形状的变化
$P(a, b) \to P_1(a+2, b-3)$	图形向右和向下分别平移 2 个单位长度和 3 个单位长度，形状没变
$P(a, b) \to P_2(-a, b)$	
$P(a, b) \to P_3(-a, -b)$	
$P(a, b) \to P_4(2a, 2b)$	
$P(a, b) \to P_5\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$	

2. 在直角坐标系中，以原点为圆心，5 为半径画圆，写出圆周上横坐标与纵坐标都是整数的点的坐标.
3. 在方格纸上设计一幅你喜欢的图案(花朵、小动物、房子等)，建立适当的直角坐标系，写出图案中关键点(影响图案形状及位置的点)的坐标，并将图案放大适当的倍数.

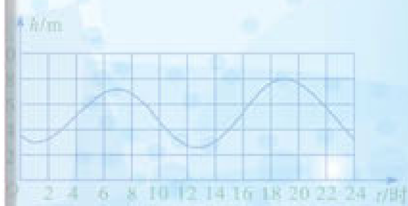
第二十章

函　数

在本章中，我们将学习

- 常量和变量
- 函数
- 函数关系的表示
- 函数的初步应用

大千世界，各种事物都处在运动和变化过程之中．怎样认识这些变化的规律呢？我们在本章中要学习的函数就是研究这些变化的工具之一．



20.1 常量和变量

在实际生活中，人们常需要用量化的方式来描述一个事物的变化过程，这会涉及一些量，其中，一些量是不变的，一些量是变化的.

我们知道，在一个匀速运动过程中，路程=速度×时间.

这里的路程、速度和时间就是三个不同的量. 这些量在不同的变化过程中会有怎样的具体表现形式呢?

一起探究

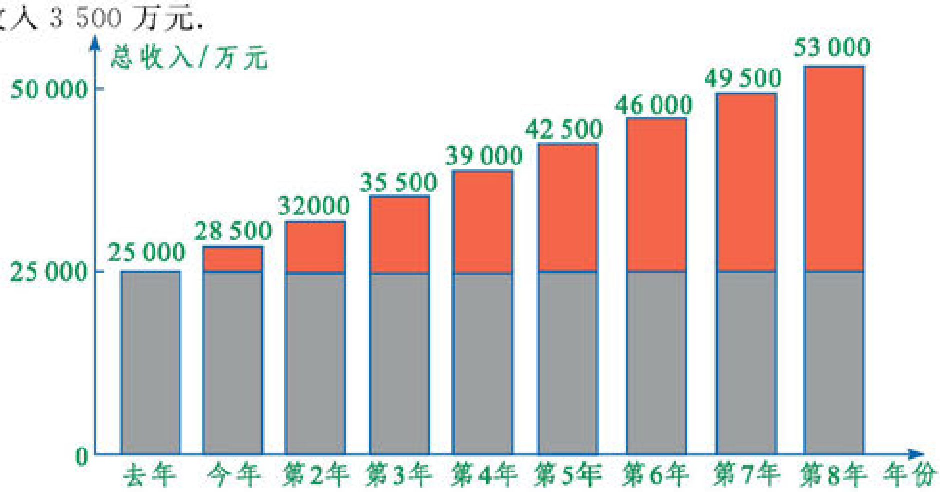
1. 小明在上学的途中，骑自行车的平均速度为 300 m/min.

(1) 填写下表：

时间 t/min	5	10	20	55	…
路程 s/m					…

(2) 在这个问题中，哪些量是不变的，哪些量是变化的? 变化的量之间存在着怎样的关系?

2. 桃园村办企业去年的总收入是 25 000 万元，计划从今年开始逐年增加收入 3 500 万元.



在这个问题中，一共有几个量？其中哪些量是不变的，哪些量是变化的？变化的量之间存在着怎样的关系？

3. 类似地，请你再举出两个实际问题的例子，并分别说明它们各含有几个不同的量，其中哪些量是不变的，哪些量是变化的.

在问题 1 中，共有三个量，其中平均速度 300 m/min 是不变的量，路程和时间都是变化的量，它们之间满足关系 $s=300t$.

在问题 2 中，共有四个量，即去年的总收入、从今年起每年增加的收入、第几年和第几年的总收入. 其中，去年的总收入 25 000 万元和以后每年增加的收入 3 500 万元都是不变的量，第几年和第几年的总收入都是变化的量. 如果用 n(n 取正整数)表示从今年起的第 n 年，用 W 表示第 n 年的总收入，那么它们之间满足关系 $W=25\ 000+3\ 500n$.

在一个变化过程中，可以取不同数值的量叫做**变量**(variable)，而数值保持不变的量叫做**常量**(constant).

大家谈谈

请指出你自己举出的两个例子中的常量和变量.

做一做

在下列各问题中，分别各有几个量，其中哪些量是常量，哪些量是变量？这些量之间具有怎样的关系？

(1) 每张电影票的售价为10元. 某日共售出 x 张票，票房收入为 y 元.

(2) 一台小型台秤最大称重为 6 kg，每添加0.1 kg重物，指针就转动 6°的角. 添加重物质量为 m kg 时，指针转动的角度为 α.

(3) 用 10 m 长的绳子围成一个长方形. 小明发现不断改变长方形的长 x(m)的大小，长方形的面积 S(m^2)就随之有规律地发生变化.

练 习

1. 已知数 a 比数 b 的平方大 1.

(1) 填写下表:

b	-3	-2	-0.5	0	1	$\sqrt{3}$	3	5	100
a									

(2) 请指出问题中的常量和变量，并写出 a 与 b 之间的关系式.

2. 已知一个梯形的高为 10，下底长是上底长的 2 倍. 设这个梯形的上底长为 x，面积为 S. 请指出问题中的常量和变量，并写出 S 与 x 之间的关系式.

习 题

A 组

1. 粮店在某一段时间内以 2.4 元/千克的价格出售同一种大米. 在售米的过程中，出售大米的质量记为 m(kg)，获得的米款记为 W(元)，其中，哪些量是变量，哪些量是常量?
2. 已知圆周率为 π，一个圆的半径为 r，面积为 S. 请指出问题中的常量和变量，并写出 S 与 r 之间的关系式.
3. 请举出含有相关变量的两个实例，并指出其中的常量与变量.

B 组

1. 某中学八年级(二)班的同学，平均每人一学期要使用某种笔记本 8 本，这种笔记本的售价是 3 元/本. n 名学生，一学期买这种笔记本的总金额为 m 元. 请指出问题中的常量和变量，并写出 m 与 n 之间的关系式.
2. 某地某一时刻的地面温度为 10 ℃，高度每增加 1 km，温度下降 4 ℃. 请指出问题中的常量和变量，并写出该地某一高度这一时刻的温度 y(℃)与高度 x(km)的关系式.

20.2 函　数

函数是刻画和研究变化过程中量与量之间关系的一种重要数学模型，在现实生活中具有广泛的应用．现在，我们开始学习函数．

观察与思考

1．思考并解决下列问题：

(1) 下表是欣欣报亭上半年的纯收入情况：

月份 T	1月	2月	3月	4月	5月	6月
纯收入 S/元	4 560	4 790	4 430	4 200	4 870	4 730

根据这个表格你能说出1月～6月，每个月的纯收入吗？

(2) 图20－2－1是某市冬季某天的气温变化图．

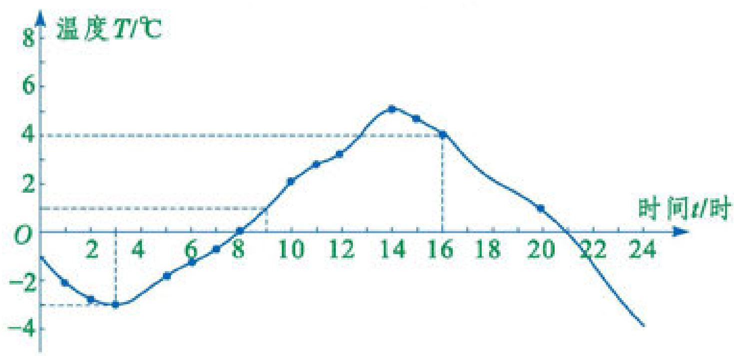


图20－2－1

观察这个气温变化图，你能找到凌晨3时、上午9时和下午16时对应的温度吗？你能得到这天24小时内任意时刻对应的温度吗？

(3) 我们曾做过“对折纸”的游戏：取一张纸，第1次对折，1页纸折为2层；第2次对折，2层纸折为4层；第3次对折，4层纸折为8层……用 n 表示对折的次数，p 表示对折后的层数，请写出用 n 表示 p 的表达式．根据写出的表达式，是否可以得出任意次对折后的层数？

2．在上述三个问题中，分别指出其中的变量，并说明在同一个问题中，当其中一个量变化时，另一个量是否也在相应地变化，当其中一个量取定一个值时，另一个量是否也相应地取定一个值．

一般地，在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y．如果给定 x 的一个

值，就能相应地确定 y 的一个值，那么，我们就说 y 是 x 的**函数**(function)．其中，x 叫做**自变量**(independent)．

如上面问题1(1)～(3)中，欣欣报亭的纯收入 S(元)是月份 T 的函数，T 是自变量；某市某一天的气温 T(℃)是时刻 t 的函数，t 是自变量；折纸的层数 p 是折纸次数 n 的函数，n 是自变量．

如果 y 是 x 的函数，那么我们也说 y 与 x 具有函数关系．

大家谈谈

1．如果 y 是 x 的函数，那么哪个量是自变量，哪个量是自变量的函数？

2．在上面的“观察与思考”中，我们认识了用“数值表、图像、表达式”三种方式分别表示的函数，请你再用这三种方式各举一个表示函数关系的例子．

做一做

1．改革开放以来，我国城乡居民的生活发生了巨大变化．下表是国家统计局公布的近几年人民币储蓄存款余额的情况：

年　份	2005	2006	2007	2008	2009	2010
存款余额/亿元	141 051	161 587	172 534	217 885	260 772	303 302

在这里，存款余额(亿元)与年份两个量之间是否具有函数关系？若具有函数关系，请指出其中的自变量和关于自变量的函数．

2．海水受日月的引力而产生潮汐现象．海水早晨上涨的现象叫做潮，黄昏上涨的现象叫做汐，潮与汐合称潮汐．某港口的某一天，从0时至24时的水位情况如图20－2－2所示．变量 h 与变量 t 是否具有函数关系？若具有函数关系，则哪个量是自变量，哪个量是这个自变量的函数？

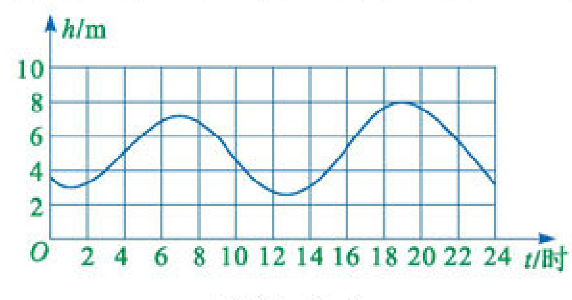


图 20－2－2

练 习

1. 下表给出了某年 4 月 24 日至 5 月 7 日两周时间内某种疫情的数据：

日期	4 月 24 日	4 月 25 日	4 月 26 日	4 月 27 日	4 月 28 日	4 月 29 日	4 月 30 日
新增病例	125	180	154	161	203	202	166
日期	5 月 1 日	5 月 2 日	5 月 3 日	5 月 4 日	5 月 5 日	5 月 6 日	5 月 7 日
新增病例	187	176	181	163	160	138	159

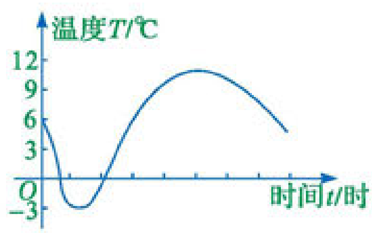
表中反映的两个量之间是否具有函数关系？如果具有函数关系，那么我们可将其中哪个变量看做另一个变量的函数？

2. 一列火车，以 190 km/h 的速度从 A 地开往 B 地．请写出行驶的路程与行驶的时间之间的关系式，并指出其中哪个量是自变量，哪个量是自变量的函数．

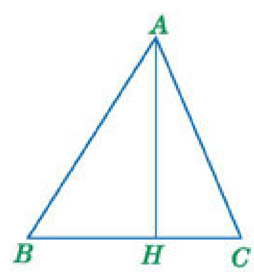
习 题

A 组

1. 如图，对于每一个确定的时刻，是否都能相应地确定一个温度？哪个变量是另一个变量的函数？



（第 1 题）



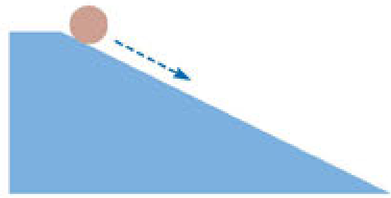
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$BC=8$．如果 BC 边上的高 $AH=x$ 在发生变化，那么$\triangle ABC$的面积 $S=$__________．在这个问题中，变量有______、______，其中，________可以看成________的函数．

3. 从 A 地向 B 地打长途电话，按时收费，3 分钟内收费 2.4 元，3 分钟后，每增加 1 分钟多收 1 元．某人在 A 地向 B 地打电话共用了 t($t\geqslant 3$，t 为整数)分钟，话费为 m 元．请写出 m 与 t 之间的函数关系式．

B 组

1. 一个小球在一个斜坡上由静止开始向下滚动，其速度每秒增加 2 m/s.



（第 1 题）

   (1) 写出滚动的时间 t(s)和小球的速度 v(m/s)之间的函数关系式，并指出其中的自变量和函数.

   (2) 当小球滚动了 3.5 s 时，其速度是多少？

2. 一台拖拉机在开始工作前，油箱中有油 40 L，开始工作后，每小时耗油 6 L.

   (1) 写出油箱中的剩余油量 W(L)与工作时间 t(h)之间的函数关系式，并指出其中的自变量和函数.

   (2) 工作 3 h 以后，油箱中的剩余油量为多少升？

函数的自变量可以在允许的范围内取值，超出这个范围可能失去意义，这就是函数的自变量的取值范围问题.

大家谈谈

1. 前面讲到的“欣欣报亭 1 月～6 月的每月纯收入 S(元)是月份 T 的函数”，其中自变量 T 可取哪些值？当 $T=1.5$ 或 $T=7$ 时，原问题有意义吗？

2. “某市某一天的气温 T(℃)是时刻 t 的函数”，其中自变量 t 可取哪些值？如果 t 取第二天凌晨 3 时，原问题还有意义吗？

3. “折纸的层数 p 是折纸次数 n 的函数”，其中自变量 n 可取哪些值？当 $n=0.5$ 时，原问题有没有意义？

实际上，在上述三个问题中，T 只能取 1，2，3，4，5，6；t 可取这一天 0 时～24 时中的任意值；n 只能取正整数.

试着做做

求下列函数自变量 x 的取值范围：

(1) $y=2x+1$；　　(2) $y=\frac{1}{x}$；　　(3) $y=\sqrt{x-1}$.

例 如图 20－2－3，等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为10 cm，边 CA 与边 MN 在同一条直线上，点 A 与点 M 重合．让$\triangle ABC$ 沿 MN 方向运动，当点 A 与点 N 重合时停止运动．试写出运动中两个图形重叠部分的面积 $y(\mathrm{cm}^2)$ 与 MA 的长度$x(\mathrm{cm})$之间的函数关系式，并指出自变量的取值范围．

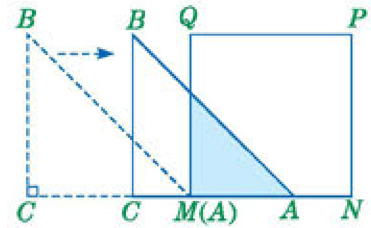


图 20－2－3

解：因为$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，四边形 $MNPQ$ 是正方形，且 $AC=BC=QM=MN$，所以运动中两个图形的重叠部分也是等腰直角三角形．

由 $MA=x$，得

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 10.$$

函数的自变量的取值范围由两个条件所确定，一是使函数表达式有意义，二是使所描述的实际问题有意义．

做一做

1．求下列函数自变量的取值范围：

(1) $y=2x^2+7$；　　(2) $y=\frac{2}{x(x+1)}$；　　(3) $y=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

2．写出下列问题中的函数关系式及自变量的取值范围：

(1) 某市民用电费标准为0.52 元/千瓦时，求电费 y(元)与用电量 x(千瓦时)的函数关系式．

(2) 已知一等腰三角形的面积为 20 cm^2．设它的底边长为 $x(\mathrm{cm})$，求底边上的高 $y(\mathrm{cm})$与 x 的函数关系式．

练　习

1．求下列函数自变量的取值范围：

(1) $y=2x-5$；　　(2) $y=\frac{2}{x^2-1}$；　　(3) $y=\sqrt{2-x}$.

2. 一辆长途汽车，以 60 km/h 的平均速度，从甲地驶往相距 270 km 的乙地. 求汽车距乙地的路程 s(km)与行驶时间 t(h)的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

习 题

A 组

求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=-x$；

(2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3x}$；

(3) $y=\frac{1}{2x-1}$；

(4) $y=\sqrt{x+4}$.

B 组

1. 求函数 $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}$ 自变量的取值范围.
2. 某工厂生产某种产品，每件产品的生产成本为 25 元，出厂价为 50 元. 在生产过程中，平均每生产一件这种产品有 0.5 m^3 的污水排出. 为净化环境，该厂购买了一套污水处理设备，每处理 1 m^3 污水所需原材料费为 2 元，每月排污设备耗费 30 000 元.

   (1) 请给出该厂每月的利润与产品件数的函数关系式.

   (2) 为保证盈利，该厂每月至少需生产并销售这种产品多少件？

20.3 函数的表示

函数有不同的表达方式，可用来表达不同的问题情境，帮助我们分析和解决问题.

我们知道，用表达式、图形和表格等都可以表示两个变量之间的函数关系. 现在，我们对这些表示方法作进一步的探究.

声音在空气中传播的速度(简称声速)与气温之间具有函数关系. 某研究者通过实验得到了如下一组关于气温 x 与声速 y 对应的数值：

x/℃	−10	−5	0	5	10	15	20
y/(m/s)	325.36	328.36	331.36	334.36	337.36	340.36	343.36

这是用数值表的形式来表达声速 y 与气温 x 之间的函数关系.

做一做

1. 以横轴表示气温，每 5 ℃为一个单位长度，纵轴表示声速，每 100 m/s 为一个单位长度，建立直角坐标系. 以表格中给出的气温和声速的数值为点的横坐标和纵坐标，在直角坐标系中描点，连线(用平滑的曲线连点)，画出图形.

2. 观察表格中数值，不难发现：气温每升高(或降低)5 ℃，对应的声速增加(或减少)3 m/s. 根据这个特点，求声速 y(m/s)和气温 x(℃)之间的函数关系式.

通过上面的“做一做”，我们发现在这个问题中，声速与气温这两个变量之间的函数关系，既可以用数值表表示，也可以用图 20－3－1 中的图像表示，还可以用函数表达式 $y=\frac{3}{5}x+331.36$ 来表示.

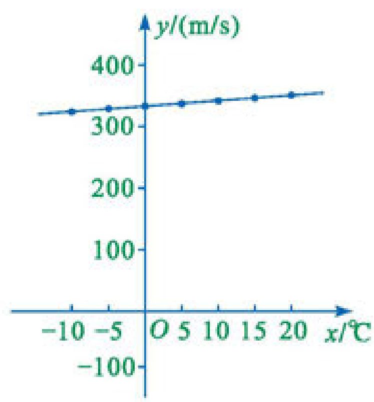


图 20－3－1

数值表、图像、表达式是函数关系的三种不同表达形式，它们分别表现出具体、形象直观和便于抽象应用的特点.

一般地，我们把一个函数的自变量 x 的值与对应的函数 y 的值分别作

为点的横坐标和纵坐标，在直角坐标系中描点，所有这些点组成的图形就叫做这个函数的**图像**(image). 如图 20－3－1 中的图形就是函数 $y=\frac{3}{5}x+331.36$ 的图像.

观察可知，函数 $y=\frac{3}{5}x+331.36$ 的图像为一条直线.

大家谈谈

由函数的数值表、图像和表达式三种方法给出的函数关系各有怎样的特点?

例 在直角坐标系中，画出函数 $y=2x+1$ 的图像.

解：(1) 取值. 根据函数表达式，取自变量的一些值，得出函数的对应值，按这些对应值列表：

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

(2) 描点. 根据自变量和函数的数值表，在直角坐标系中描点.

(3) 连线. 用平滑的曲线将这些点连接起来，即得函数的图像，如图 20－3－2.

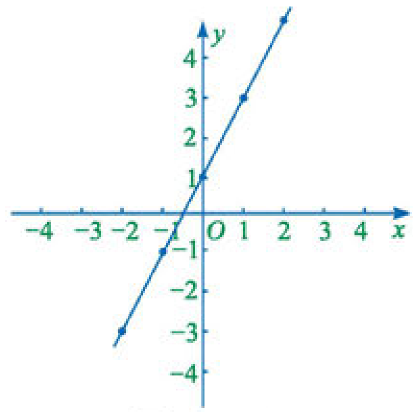


图 20－3－2

做一做

用计算器可以求出任何一个非负数的算术平方根，显示器显示的结果随输入数的变化而变化. 设输入的数为 x，显示的结果为 y，程序如图 20－3－3 所示.

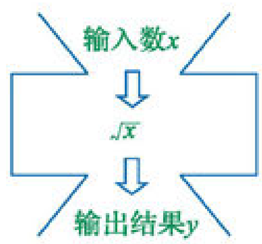


图 20－3－3

(1) 请写出 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

(2) 根据函数关系式，填写表格：

x	0	1	4	9	16
y					

(3) 借助这些对应的数值画出这个函数的图像.

练 习

1. 下表是某年一条河流自 8 月 1 日至 8 月 10 日的水位记录：

日 期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
水位/m	7.3	7.5	8.4	8.6	9.1	8.8	8.1	7.3	6.9	6.4

(1) 试画出这个函数的图像.

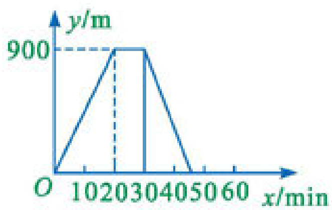
(2) 观察图像，判断从哪天起水位开始全面回落.

2. 小莉的父母出去散步，从家走了 20 min 到达离家 900 m 的一个报亭，母亲随即按原速度返回，父亲看了 10 min 报纸后，用了 15 min 返回家. 请根据关于父亲或母亲距家的路程 y(m) 和离家时间 x(min) 的函数图像回答：

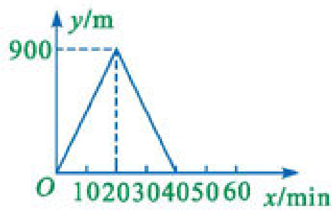
(1) 哪幅图像表示父亲距家的路程 y 与离家时间 x 的关系？

(2) 哪幅图像表示母亲距家的路程 y 与离家时间 x 的关系？

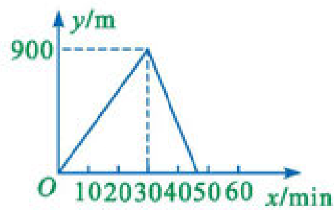
(3) 余下的那幅图像是关于小莉的，请讲述一段与之相符的故事.



(1)



(2)



(3)

(第 2 题)

习 题

A 组

1. 某菜市场西红柿标价是 2 元/千克. 购买 x kg 西红柿，应付费 y 元.

(1) 写出 y 与 x 的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

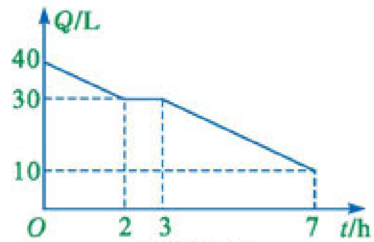
(2) 请画出这个函数的图像.

2. 一辆机动车行驶在路途中. 出发时，油箱内存油 40 L. 行驶若干小时后司机停车吃饭，饭后继续行驶一段时间后到某加油站准备加油. 图中表示的是该过程中油箱里剩余油量 Q(L) 与行驶时间 t(h) 之间的函数关系.

(1) 行驶几小时后司机开始吃饭？吃饭用了多长时间？

(2) 饭后行驶几小时到加油站？到加油站时油箱内还有多少油？

(3) 在饭前与饭后的行驶过程中，汽车每小时的耗油量相同吗？请说明理由.

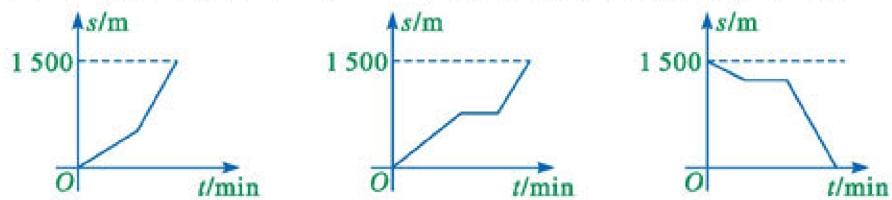


（第 2 题）

3. 小亮家与学校相距 1 500 m. 一天，他步行去上学，最初以某一速度匀速行进，途中遇到熟人小强，说话耽误了几分钟. 与小强告别后他就改为匀速慢跑，终于准时到校. 设小亮从家出发后所用的时间为 t(min)，行进的路程为 s(m).

(1) 在下列图像中，哪幅能表示上述过程？

(2) 从其他两个图像中任选一个，写出与图像相应的实际情景.



（第 3 题）

B 组

1. 一辆汽车，以 90 km/h 的速度行驶在高速公路上，用 t(h)表示它行驶的时间，用 s(km)表示它行驶的路程.

(1) 写出 s 与 t 的函数关系式，并指出自变量 t 的取值范围.

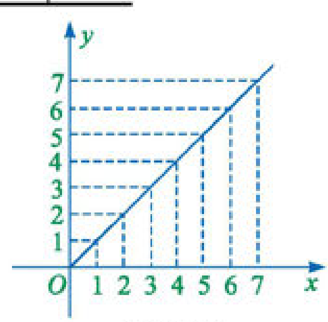
(2) 根据 t 的值，在下表中填写 s 相应的值，并画出函数的图像.

t/h	0.4	0.8	1	1.5	2	4
s/km						

2. 在用表达式和图像这两种方式表达玩具车以 1 m/s的速度匀速行驶的过程时，得到了表达式 $y=x$ 和如图所示的图像.

(1) 请你从图像上任意找出 5 个点，并写出这 5 个点的坐标.

(2) 说明你得到的 5 个点的坐标可分别使得表达式 $y=x$ 成立.



（第 2 题）

(3) 任意写出满足表达式 $y=x$ 的三组有序正数对，说明分别以这三组有序正数对为坐标的三个点都在图中所示的图像上.

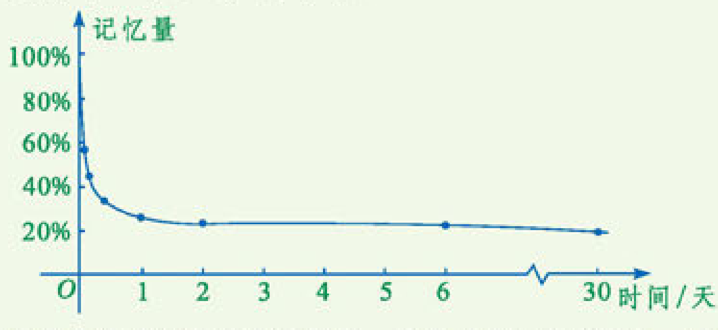
读一读

艾宾浩斯保持曲线

每个人都有这样的体验：学过的知识会遗忘. 但遗忘有什么规律吗？德国著名心理学家艾宾浩斯(Hermann Ebbinghaus，1850 年～1909 年)对此进行了系统的研究. 他认为，输入的信息在人经过认真学习后，就成为人的短时记忆. 但是如果不经过及时复习，这些记住的东西就会遗忘. 艾宾浩斯采用了无意义的音节(例如 SUW，XIQ 等)作为记忆的材料进行试验，获得如下相关数据：

时间	刚记忆完	20 分钟后	1 小时后	9 小时后	1 天后	2 天后	6 天后	30 天后
记忆量	100%	58.2%	44.2%	35.8%	33.7%	27.8%	25.4%	21.1%

并根据上表绘制了一条曲线，如下图.



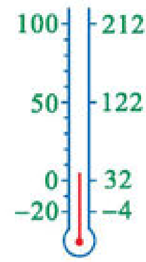
这就是著名的艾宾浩斯保持曲线. 这条曲线告诉我们：遗忘的进程是不均衡的，但是有显著的规律，这就是先快后慢. 你看，在前面几小时里遗忘的速度是多么快呀！到 6 天以后，遗忘的速度就变得很慢. 这条曲线给我们什么启示呢？这就是：学习的知识如果不及时复习，一天后大约只能记住开始的三分之一！因此，我们要尊重科学，及时复习，与遗忘抗争，巩固记忆.

你不妨与小组的同学们进行一次试验：你们分成甲、乙两组，同时学习同一段课文. 甲组下午复习一次，乙组不复习. 第二天测试，分别计算出两组平均的记忆保持量，亲自体验一下艾宾浩斯保持曲线给世人的启示.

20.4 函数的初步应用

很多实际问题和数学问题都表现为两个变量之间的函数关系．因此，学会建立函数模型，并用函数模型解决问题，是十分重要的．

常用的温度计量标准有两种，一种是摄氏温度(℃)，另一种是华氏温度(℉)．中央气象台天气预报中的气温，用的就是摄氏温度．



一起探究

已知摄氏温度值和华氏温度值有下表所示的对应关系：

摄氏温度/℃	0	10	20	30	40	50
华氏温度/℉	32	50	68	86	104	122

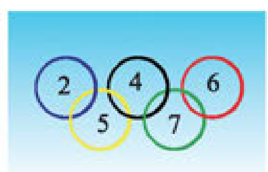
(1) 当摄氏温度为 30 ℃时，华氏温度为多少？

(2) 当摄氏温度为 36 ℃时，由数值表能直接求出华氏温度吗？试写出这两种温度计量之间关系的函数表达式，并求摄氏温度为 36 ℃时的华氏温度．

(3) 当华氏温度为 140 ℉时，摄氏温度为多少？

试着做做

大家都熟悉奥运会的标志图案——五环图．在上面三个环中填入三个连续的偶数，在下面的两个环中填入两个连续的奇数，使得这三个连续偶数的和等于这两个连续奇数的和(如图中已经填好的 2，4，6 和 5，7)．请你按照要求再填写两组数．



大家谈谈

1．请和同学交流各自填写的数组是什么．满足要求的数组有很多吗？

2．如果用 $2x-2$，$2x$，$2x+2$ 表示三个连续的偶数，用 $2y-1$ 和 $2y+1$

表示两个连续的奇数，你能写出表示所有数组规律的函数表达式吗？用你得到的函数表达式能确定出满足要求的任意一组数吗？

实际上，上述问题中的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x$. 为保证 x，y 都为整数，x 必须取偶数. 如当 $x=20$ 时，$y=30$，满足条件的一组数是：偶数 38，40，42；奇数 59，61.

做一做

1. 一支 20 cm 长的蜡烛，点燃后，每小时燃烧 5 cm. 在图 20－4－1 中，哪幅图像能大致刻画出这支蜡烛点燃后剩下的长度 h(cm)与点燃时间 t(h)之间的函数关系？请说明理由.

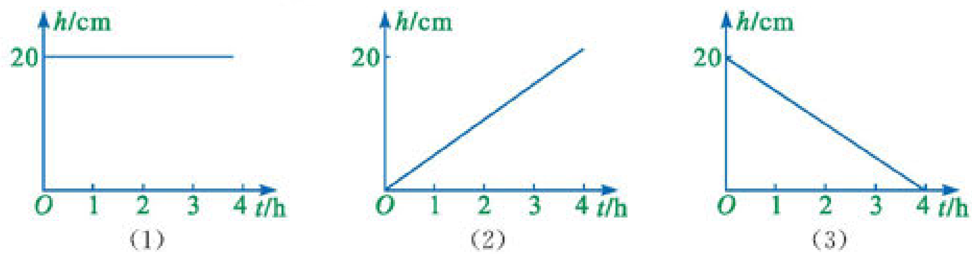


图 20－4－1

2. 一等腰三角形的周长为 12 cm，设其底边长为 y cm，腰长为 x cm.

(1) 写出 y 与 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

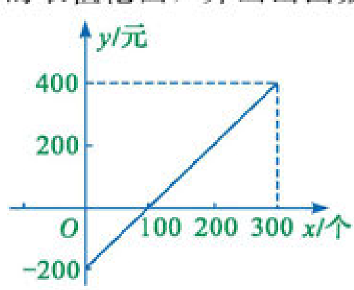
(2) 画出这个函数的图像.

练　习

1. 某人以 4 km/h 的速度步行锻炼身体. 请写出他的步行路程 s(km)和步行时间 t(h)之间的函数关系式，指出自变量的取值范围，并画出函数图像.

2. 某批发部对经销的一种电子元件调查后发现，一天的盈利 y(元)与这天的销售量 x(个)之间的函数关系的图像如图所示. 请观察图像并回答：

(1) 一天售出这种电子元件多少个时盈利最多，最多盈利是多少元？



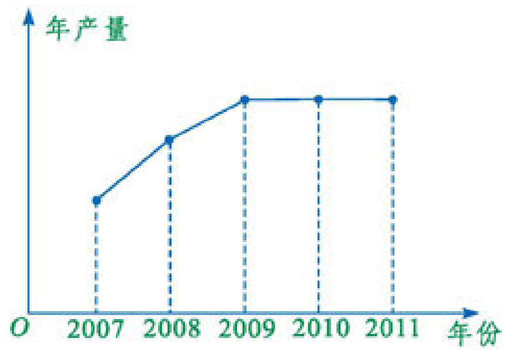
(第 2 题)

（2）这种电子元件一天卖出多少个时不赔不赚？

习 题

A 组

1. 图中曲线表示的是某工厂 2007 年至 2011 年一种产品的年产量与年份的函数关系，由此你能对生产情况作出哪些判断？

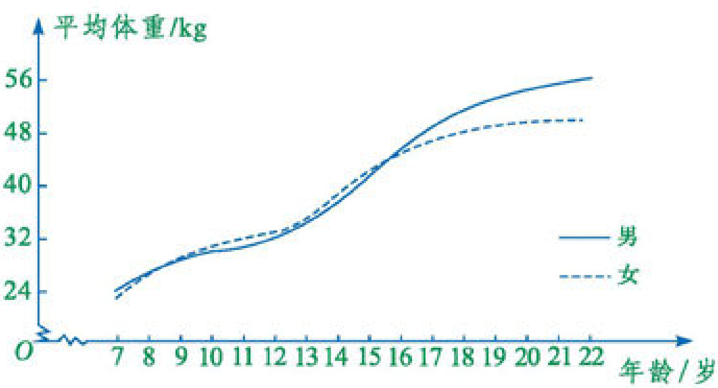


（第 1 题）

2. 如图，这是一幅关于学生的平均体重(kg)和年龄(岁)之间关系的图像.

（1）在哪个年龄段，女生的平均体重略高于男生的平均体重？

（2）从哪个年龄开始，男生的平均体重就超过了女生的平均体重？



（第 2 题）

3. 某公园购进了一批平均高度为 1.8 m 的某种树苗. 为了掌握这种树苗的生长情况，树苗栽种后，园林工作者对其进行了 6 年的观测，并记录了每年末这种树的平均高度，如下表：

栽后时间/年	0	1	2	3	4	5	6
树高/m	1.8	2.6	3.4	4.0	4.5	4.8	5.0

(1) 画出树高(m)与栽种后的时间(年)之间的函数图像.

(2) 从第几年开始，这种树生长变得缓慢？

B 组

某市规定如下用水收费标准：每户每月的用水量不超过 6 m^3 时，水费按照 a 元/立方米收费；超过 6 m^3 时，不超过的部分仍按 a 元/立方米收费，超过的部分按 c 元/立方米($c>a$)收费. 该市小明家今年 3 月份和 4 月份的用水量、水费如下表所示：

月份	用水量/m^3	水费/元
3 月	5	7.5
4 月	9	16.2

(1) 求 a，c 的值.

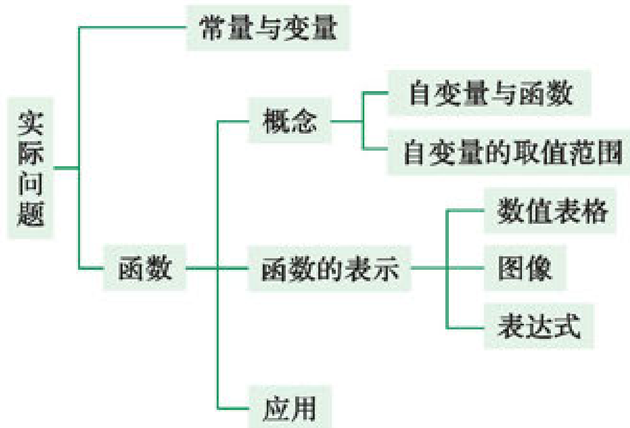
(2) 设某户 1 个月的用水量为 x(m^3)，应交水费为 y(元).

①分别写出用水量不超过 6 m^3 和超过 6 m^3 时，y 与 x 之间的函数关系式.

②已知一户 5 月份的用水量为 8 m^3，求该户 5 月份的水费.

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章，我们学习了常量和变量、函数及其表达形式、画函数的图像等内容. 在本章的学习过程中，我们利用建立函数模型的方法解决了变化过程中的相关问题，这突出体现了函数思想以及数形结合方法的应用，有利于我们抽象能力的发展和应用意识的培养.

1. 变量和常量.

在一个变化过程中，可以取不同数值的量是变量，始终取一个固定数值的量就是常量.

请举例说明一个变化过程中的常量和变量.

2. 函数.

在函数概念中，特别强调了三个要素：有一个变化过程；变量之间的对应关系；当自变量取定一个数值时，对应的函数值唯一确定.

3. 函数的表示形式.

可以用表达式、数值表格和图像来表示两个变量之间的函数关系.

请举例说明这三种表达形式以及它们的特点.

4. 画函数图像的一般步骤：

(1) 列表；(2) 描点；(3) 连线.

三、注意事项

在研究函数的问题时，自变量的取值范围应注意以下两点：

(1) 自变量的取值要符合实际问题.

(2) 自变量的取值要使函数表达式自身有意义.

复习题

A 组

1. 某超市，橙子标价为 3 元/千克. 设购买这种橙子 x kg，付费 y 元.

   (1) 请指出这个过程中的常量和变量.

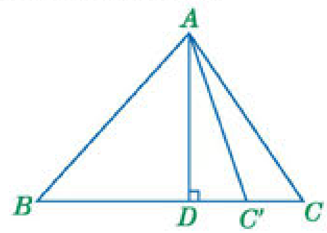
   (2) 请写出 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=16$，高 $AD=10$. 动点 C' 由点 C 沿 CB 向点 B 移动(不与点 B 重合). 设 CC' 的长为 x，$\triangle ABC'$ 的面积为 S.

   (1) 在这个过程中，哪些量是常量，哪些量是变量?

   (2) 请写出 S 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

   (3) 当 x 分别取 10，5，3 时，计算出相应的 S 的值.



(第 2 题)

3. 下列说法中，哪些是正确的?

   (1) 在匀速运动公式 $s=vt$ 中，s 是 t 的函数，v 是常量.

   (2) 在球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 中，$\frac{4}{3}$ 是常量，π，R，V 均为变量.

   (3) 入射光线照射到平面镜上，如果入射角的角度为 α，反射角的角度为 β，那么 β 是 α 的函数.

   (4) 同一种物质，其质量是体积的函数.

4. 下表是某校高中毕业生升入高等学校人数比率的统计表：

年份	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
升学率	43.3%	49.9%	48.6%	46.1%	63.8%	73.2%	78.8%	83.5%

   (1) 其中有哪些变量?

   (2) 可以把其中的哪个变量看做另一个变量的函数?

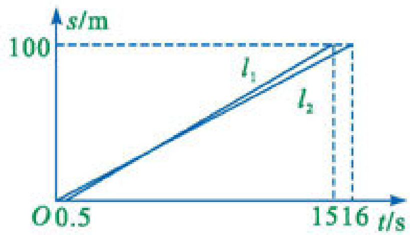
5. 如图，线段 l_1，l_2 分别表示的是小兰和小惠在一次短跑比赛过程中，路程 s 与时间 t 的函数图像.

   (1) 这项短跑的距离是多少米?

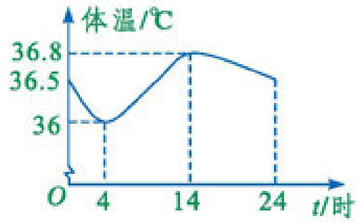
   (2) 这次赛跑中谁起跑慢了，慢了多少时间?

   (3) 小兰与小惠谁跑得快?

   (4) 小兰与小惠跑完全程各用了多少时间?



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 人体正常体温在 36.5 ℃左右，但是在一天中的不同时刻，体温也不尽相同. 如图，该图像反映了一天 24 小时中，小明体温变化的情况.

(1) 小明在这一天中，体温最高的时刻是几时，体温最低的时刻是几时？

(2) 体温由高到低变化的是哪个时段？

(3) 请指出这一天内小明体温变化的范围.

7. 小刚的妈妈购买了一张公交车 IC 卡（A 卡），首次充值 30 元. 公交公司规定：A 卡持有人每乘车一次，划卡扣除 0.80 元. 设乘车次数为 x，那么 A 卡余额 y(元)与 x(次)的关系该怎样表示？它们是函数关系吗？如果是函数关系，那么 x 的取值范围是什么？

8. 在种植某品种土豆的过程中，当钾肥和磷肥施用量恰当时，土豆的产量 y(吨/公顷)与氮肥施用量 x(吨/公顷)有以下关系：

x/(吨/公顷)	0	34	67	101	135
y/(吨/公顷)	15.18	21.36	25.72	32.29	34.03
x/(吨/公顷)	202	259	336	404	471
y/(吨/公顷)	39.45	43.15	43.46	40.83	30.75

(1) 试用图像表示上面的函数关系.（建议 x 轴与 y 轴采用 10∶1 的单位长度）

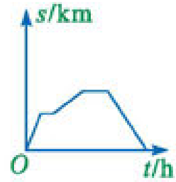
(2) 是否施用氮肥越多，土豆产量越高？

(3) 要使土豆产量在 40 吨/公顷以上，应怎样选择氮肥的施用量？

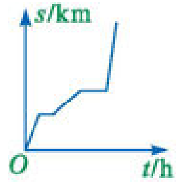
B 组

1. 某校八年级登山小组以 a km/h 的速度开始登山，走了一段时间后休息了一会儿. 由于山路逐渐变陡，所以休息后就以 b km/h 的速度继续前进. 一段时间后到达山顶，吃午饭并原地活动. 午休后，又以 c km/h 的速度下山（$b<a<c$），中间再也没有休息过，一直返回山脚. 此次登山活动，整个过程中所走的路程 s(km)与所用时间 t(h)之间的函数关系的图

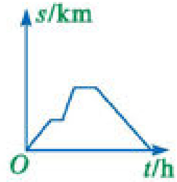
像大致是下列中的哪一个？



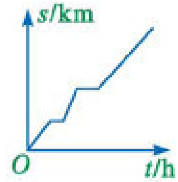
(1)



(2)



(3)



(4)

（第 1 题）

2. 一圆锥的高是 20 cm，当底面半径 r(cm) 由 1 cm 变化到 10 cm 时，圆锥的体积 V(cm^3) 也在变化.

(1) 请写出 V 与 r 之间的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

(2) 完成下表：

r/cm	1	3	5	9	10
V/cm^3		60π			

3. 暑假期间，舅舅开车带小明去旅游，6 时 40 分出发，9 时 50 分到达景点. 小明每隔 10 min 读一次计程器，记录下来，制成下表：

时刻	路程/km	时刻	路程/km	时刻	路程/km	时刻	路程/km
6:40	0	7:30	63	8:20	105	9:10	122
6:50	6	7:40	80	8:30	108	9:20	135
7:00	15	7:50	96	8:40	110	9:30	148
7:10	31	8:00	99	8:50	112	9:40	162
7:20	47	8:10	102	9:00	115	9:50	178

(1) 从家到旅游点全程共有多少千米？汽车行驶了多长时间？

(2) 画出行驶过程中路程随时间变化的函数图像.

(3) 汽车在哪个时间段内行驶得最快，在哪个时间段内行驶得最慢？

C 组

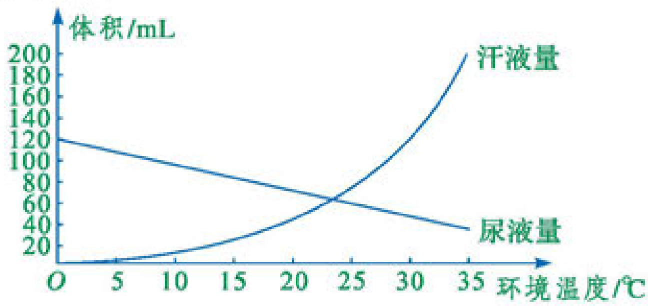
1. 小惠调查了一个冷食批零(批发与零售兼营)供应点，发现雪糕的日销售量与当日的最高气温密切相关：当最高气温低于 15 ℃时，日销量约为 1 箱(20 根)；当最高气温为 20 ℃时，日销量约为 3 箱；当最高气温为 25 ℃时，日销量约为 8 箱；当最高气温在 28 ℃时，日销量约为 15 箱；当最高气温为 30 ℃时，日销量约为 25 箱；当最高气温为 35 ℃时，日销

量约为38箱；当最高气温为39 ℃时，日销量约为60箱.

(1) 这项调查反映了哪两个变量之间的函数关系？你能用什么方法表示这一问题中的函数关系？

(2) 据气象预报，明日最高气温为33 ℃. 这个供应点进多少箱雪糕比较合适？

2. 下图是人体每小时排出的汗液量和尿液量随环境温度变化的曲线. 请观察图像，然后回答：



(第2题)

(1) 随着环境温度的升高，汗液量和尿液量分别有什么变化？

(2) 大约在什么环境温度时，汗液量与尿液量大体相等？

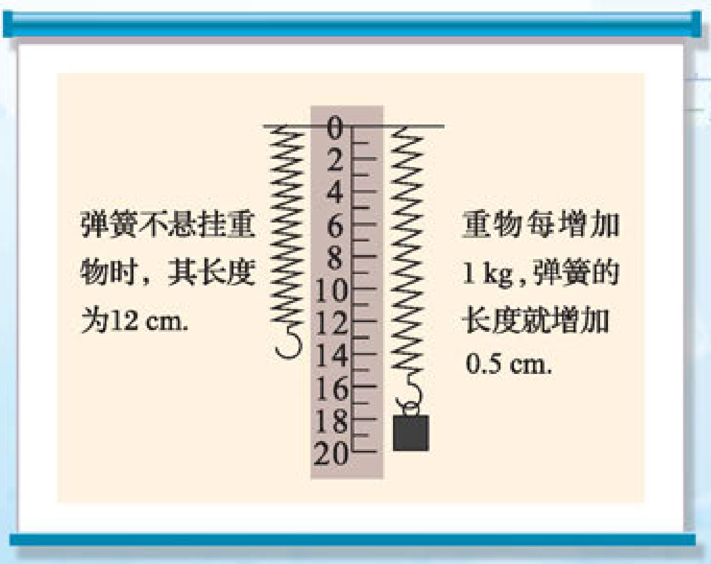
第二十一章

一次函数

在本章中，我们将学习

- 一次函数
- 一次函数的图像和性质
- 用待定系数法确定一次函数表达式
- 一次函数的应用
- 一次函数与二元一次方程的关系

现有一根弹簧，可以悬挂重物，弹簧的长度随悬挂重物质量的变化而变化，弹簧长度与悬挂重物质量之间有怎样的关系呢？



21.1 一次函数

函数可以用来刻画数量之间的关系，一次函数是一种重要的函数. 现在，我们来探究一次函数.

我们在小学就认识了成正比例的量，并能从实际问题中判断出成正比例的两个量.

观察与思考

小刚骑自行车去上学，行驶时间和路程之间的关系如下表：

时间/min	1	2	3	4	5	…	17.5
路程/km	0.2	0.4	0.6	0.8	1	…	3.5

(1) 小刚行驶的路程和时间成正比例吗？为什么？

(2) 如果用 t(min)表示时间，s(km)表示路程，那么 s 与 t 之间的函数关系式具有什么特征？

通过观察与计算，我们发现小刚离开家的路程与时间的比值恒等于 0.2，即这两个量是成正比例的量.

s 与 t 的函数关系式为：$s=0.2t$.

做一做

1. 小亮每小时读 20 页书. 若读书时间用字母 t(h)表示，读过书的页数用字母 m(页)表示，则用 t 表示 m 的函数表达式为________.

2. 小米去给学校运动会买奖品，每支铅笔 0.5 元. 若购买铅笔的数量用 n(支)表示，花钱的总数用 w(元)表示，则用 n 表示 w 的函数表达式为________.

3. 拧不紧的水龙头每分钟滴出 100 滴水，每滴水约 0.05 mL. 设 t min

后，水龙头滴水 V mL，则用 t 表示 V 的函数表达式为________.

在上面的问题中，函数表达式分别为 $m=20t$，$w=0.5n$，$V=5t$.

这些函数的共同特点是：都能写成 $y=kx$ 的形式．其中，k 为常数，且 $k\neq0$.

一般地，我们把形如 $y=kx$(k 为常数，且 $k\neq0$)的函数，叫做**正比例函数**(proportional function)．其中，非 0 常数 k 叫做比例系数.

例 1 下列函数中，哪些是正比例函数？请指出其中正比例函数的比例系数.

(1) $y=3x$；　　(2) $y=2x+1$；　　(3) $y=-\dfrac{x}{2}$；

(4) $y=\dfrac{2}{x}$；　　(5) $y=\pi x$；　　(6) $y=-\sqrt{3}x$.

解：(1)，(3)，(5)，(6)是正比例函数，比例系数分别是 3，$-\dfrac{1}{2}$，π，$-\sqrt{3}$．(2)和(4)不是正比例函数.

例 2 有一块 10 公顷的成熟麦田，用一台收割速度为 0.5 公顷/时的小麦收割机来收割.

(1) 求收割的面积 y(公顷)与收割时间 x(h)之间的函数关系式.

(2) 求收割完这块麦田需用的时间.

解：(1) $y=0.5x$.

(2) 把 $y=10$ 代入 $y=0.5x$ 中，得 $10=0.5x$.

解得 $x=20$，即收割完这块麦田需要 20 h.

答：(1) y 与 x 之间的函数关系式为 $y=0.5x$.

(2) 收割完这块麦田需要 20 h.

练　习

1．判断下列哪个问题中的两个量具有正比例关系.

(1) 向圆柱形水杯中加水，水的体积与高度.

(2) 正方形的面积与它的边长.

(3) 小丽录入一篇文章，她的打字速度与所用时间.

(4) 人的体重与身高.

2. 填空：

(1) 已知函数 $y=3x$. 当 $x=3$ 时，$y=$________.

(2) 已知函数 $y=\frac{3}{4}x$. 当 $y=3$ 时，$x=$________.

(3) 已知函数 $y=kx$，当 $x=-2$ 时，$y=10$. $k=$________.

习题

A 组

1. 在下列函数中，哪些是正比例函数？请指出其中正比例函数的比例系数.

(1) $y=-4x$；　　(2) $y=3x-1$；　　(3) $y=\frac{5x}{6}$；

(4) $y=\frac{9}{x}$；　　(5) $y=-0.9x$；　　(6) $y=(\sqrt{5}-1)x$.

2. 已知 y 是 x 的正比例函数，当 $x=2$ 时，$y=8$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当 $x=5$ 时，求 y 的值.

(3) 当 $y=5$ 时，求 x 的值.

3. 一个深度为 8 m 的长方体污水处理池，容积为 $V(\mathrm{m}^3)$，污水池的底面积为 $S(\mathrm{m}^2)$.

(1) 写出用 S 表示 V 的函数表达式.

(2) 当 $S=64\ \mathrm{m}^2$ 时，求 V 的值.

B 组

1. 如果 x 和 y 成正比例，y 和 z 成正比例，那么 x 和 z 之间有什么关系？

2. 已知函数 $y=(3m+9)x^2+(2-m)x$ 是关于 x 的正比例函数，求 m 的值.

在本节“小刚骑自行车去上学”的问题中，小刚家到学校的路程为 3.5 km，小刚骑车的速度为 0.2 km/min. 设小刚距学校的路程为 s km，离开家的时间为 t min.

一起探究

(1) 写出 s 与 t 之间的函数关系式，并指出其中的常量与变量.

(2) 写出 t 的取值范围.

(3) 对比正比例函数，它们的表达式在结构上有什么相同点与不同点？

一般地，解决行程类的问题时，常常借助如下图示来分析.

分析上图，容易看出，s 与 t 的函数关系式为 $s=3.5-0.2t$. 其中，3.5，0.2 是常量，s 与 t 是变量. 如果将 t 作为自变量，那么 s 是 t 的函数.

因为 $3.5-0.2t\geqslant 0$，所以 $t\leqslant 17.5$. 所以 t 的取值范围为 $0\leqslant t\leqslant 17.5$.

做一做

1. 某新建住宅小区的物业管理费按住房面积收缴，每月 1.60 元/平方米；有汽车的房主再交车库使用费，每月 80 元. 设有车房主的住房面积为 x m²，每月应缴物业管理费与车库使用费的总和为 y 元，则用 x 表示 y 的函数表达式为__________.

2. 向一个已装有 10 dm³ 水的容器中再注水，注水速度为 2 dm³/min. 容器内的水量 y(dm³)与注水时间 x(min)的函数关系式为__________.

3. 一种计算成年人标准体重 G(kg)的方法是，以厘米为单位量出身高值 h，减常数 105，所得差是 G 的值. 用 h 表示 G 的函数表达式为__________.

从上面问题中，我们分别得到了函数表达式：

$$s=3.5-0.2t,\quad y=1.6x+80,\quad y=2x+10,\quad G=h-105.$$

大家谈谈

这些函数表达式的形式有什么共同特点？与同学交流你的看法.

一般地，我们把形如 $y=kx+b$(k，b 为常数，且 $k\neq 0$)的函数，叫做**一次函数**(linear function).

对于一次函数 $y=kx+b$，当 $b=0$ 时，它就化为 $y=kx$. 所以正比例函数 $y=kx$ 是一次函数的特殊形式.

做一做

在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

(1) $y=3x+6$； (2) $y=-\frac{1}{3}x+2$； (3) $y=\frac{x+3}{x}$；

(4) $y=-0.4t$； (5) $w=\sqrt{3}-2z$； (6) $y=2x^2+6x-9$.

例 3 如图 21－1－1，$\triangle ABC$ 是边长为 x 的等边三角形.

(1) 求 BC 边上的高 h 与 x 之间的函数关系式. h 是 x 的一次函数吗？如果是一次函数，请指出相应的 k 与 b 的值.

(2) 当 $h=\sqrt{3}$时，求 x 的值.

(3) 求$\triangle ABC$ 的面积 S 与 x 之间的函数关系式. S 是 x 的一次函数吗？

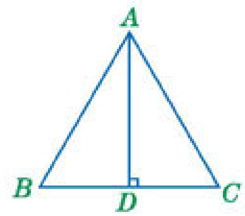


图 21－1－1

解：(1) 因为 BC 边上的高 AD 也是 BC 边上的中线，所以，$BD=\frac{1}{2}x$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得

$$h=AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

即 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

所以 h 是 x 的一次函数，且 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=0$.

(2) 当 $h=\sqrt{3}$时，有$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

解得 $x=2$.

(3) 因为 $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，即 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，所以 S 不是 x 的一次函数.

练 习

1. 在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

(1) $y=2-x$； (2) $y=1+x+\frac{1}{x}$； (3) $s=8+0.03t$；

(4) $y=\frac{2}{5}x$； (5) $s=\sqrt{2}t-3$； (6) $y=5x^2-6$.

2. 已知两条平行线 l_1，l_2 之间的距离为 3 cm，点 A 在 l_1 上，点 B，C 在 l_2 上，$BC=x$. 求△ABC 的面积 S 与 x 的函数关系式，并判断这个函数是不是一次函数.

习 题

A 组

1. 在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

   (1) $y=\frac{1}{3}-x$；　　(2) $y=2\pi R$（R 为自变量）；

   (3) $y=\frac{3x-1}{x}$；　　(4) $y=0.5x+\frac{\pi}{3}$.

2. 已知一次函数 $y=-2x+3$.

   (1) 当 x 为何值时，$y=0$？

   (2) 当 y 为何值时，$x=0$？

3. 由 S 市寄往 G 市的包裹，邮寄标准是 3 元/千克. 另外，每件收取挂号费 2 元.

   (1) 写出邮寄总费用 y(元)与包裹质量 x(kg)之间的函数关系式.

   (2) 如果邮寄包裹的质量为 7.8 kg，那么邮寄总费用为多少元？

B 组

大学生小张想利用暑期一个月的时间为一家报社推销报纸，以积累自己的社会活动经验. 报社规定：按月提前预订，每天订数须相同；推销员从报社的购买价是 0.7 元/份，销售价是 1 元/份；推销员售不出的，报社以 0.2 元/份回收. 小张经咨询他人还了解到：暑期一个月里(按31 天计算)，有 20 天每天可售出 100 份，有 11 天每天可售出 60 份. 设小张每天向报社预订 x 份报纸($60\leqslant x\leqslant 100$). 求：

(1) 这个月购买报纸的费用 y_1 与 x 的函数关系式.

(2) 这个月的销售收入 y_2 与 x 的函数关系式.

(3) 这个月报社回收报纸的金额 y_3 与 x 的函数关系式.

(4) 这个月小张的获利 y 与 x 的函数关系式.

21.2 一次函数的图像和性质

一次函数是一种形式上比较简单的函数，我们可以借助一次函数的图像对它的性质进行研究.

已知函数的表达式，通过列表、描点和连线，可以在直角坐标系中画出这个函数的图像.

试着做做

已知一次函数 $y=2x-1$.

(1) 填写下表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…								…

(2) 以(1)中得到的每对对应值分别为横坐标和纵坐标，在图21-2-1所示的直角坐标系中描出相应的点.

(3) 把由(2)描出的点依次用平滑曲线连接起来，就得到 $y=2x-1$ 的图像.

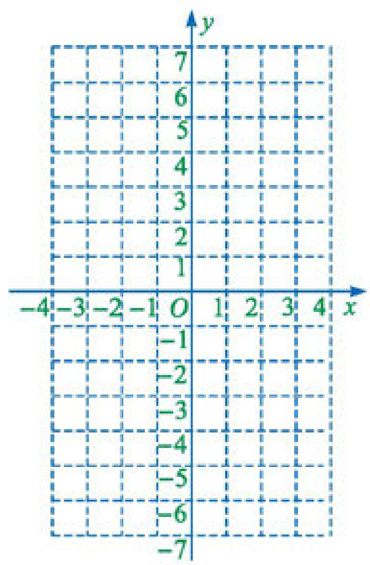


图 21-2-1

一起探究

1. 一次函数 $y=2x-1$ 的图像的形状是怎样的？你和其他同学得到的结果一样吗？

2. 凡是满足关系式 $y=2x-1$ 的 x，y 的值所对应的点，如$\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$，$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$(4, 7)$等，都在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上吗？与同学交流你的看法.

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图像为一条直线. 因此，我们把一次函

数 $y=kx+b$ 的图像也称为直线 $y=kx+b$.

画一次函数的图像时，只要确定出两个点，再过这两点画直线就可以了.

取点时，坐标的数值越简单，描点越方便.

例 1 画一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像.

解：当 $x=0$ 时，$y=1$.

当 $y=0$ 时，$0=-\frac{1}{2}x+1$，解得 $x=2$.

在直角坐标系中，过点(0，1)和点(2，0)画直线，即得一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像，如图 21－2－2.

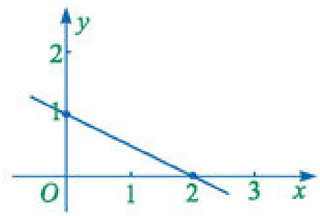


图 21－2－2

练 习

1. 在同一直角坐标系中，画出 $y=x$ 和 $y=1-x$ 的图像.
2. 在同一直角坐标系中，画出 $y=\frac{1}{2}x-1$ 和 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图像.

习 题

A 组

1. 在同一直角坐标系中画出 $y=-3x$ 和 $y=3x$ 的图像.
2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图像.

（1）$y=2x$；（2）$y=2x+5$；（3）$y=2x-5$.

B 组

1. 填表并观察下列两个函数的变化情况.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=x-10$							
$y=-5x+2$							

（1）在同一直角坐标系中画出这两个函数的图像.

(2) 它们的图像有公共点吗？如果有，请写出公共点的坐标.

2. 今有一根弹簧，不悬挂重物时的长度为 12 cm. 悬挂的重物每增加 1 kg(重物不超过 8 kg)，弹簧的长度就增加 0.5 cm. 写出弹簧长度 y(cm)和悬挂物的质量 x(kg)之间的函数关系式，指出自变量的取值范围，并画出这个函数的图像.

(第 2 题)

借助一次函数的图像，我们就可以探究一次函数的性质了.

做一做

1. 请在图 21－2－3 的直角坐标系中，画出一次函数 $y=2x+3$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$的图像.

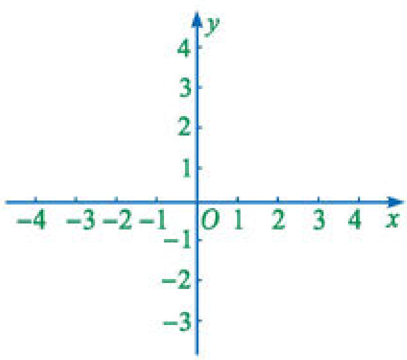


图 21－2－3

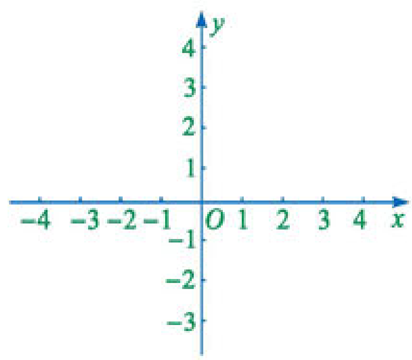


图 21－2－4

2. 请在图 21－2－4 的直角坐标系中，画出一次函数 $y=-2x+4$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像.

观察与思考

观察上面画出的四个函数 $y=2x+3$，$y=\frac{1}{2}x-2$，$y=-2x+4$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像，请思考：

(1) 哪些函数，y 的值是随 x 的值的增大而增大的？

(2) 哪些函数，y 的值是随 x 的值的增大而减小的？

（3）y 的值随 x 的值的增大而增大和 y 的值随 x 的值的增大而减小两种函数，它们的区别和自变量系数的符号有怎样的关系？

一般地，我们有：

对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）：
当 $k>0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而增大；
当 $k<0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而减小.

大家谈谈

参考上面画出的四个函数 $y=2x+3$，$y=\frac{1}{2}x-2$，$y=-2x+4$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像，请谈谈：

（1）哪些函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方，哪些函数与 y 轴的交点在 x 轴的下方？

（2）函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方和函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方，这两种函数，它们的区别与常数项有怎样的关系？

（3）正比例函数的图像一定经过哪个点？

事实上，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是经过 y 轴上的点 $(0, b)$ 的一条直线. 当 $b>0$ 时，点 $(0, b)$ 在 x 轴上方；当 $b<0$ 时，点 $(0, b)$ 在 x 轴下方；当 $b=0$ 时，点 $(0, 0)$ 是原点，即正比例函数 $y=kx$ 的图像是经过原点的一条直线.

例 2 已知关于 x 的一次函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$.

（1）当 k 满足什么条件时，函数 y 的值随 x 的值的增大而增大？

（2）当 k 取何值时，$y=(2k-1)x+(2k+1)$ 的图像经过原点？

（3）当 k 满足什么条件时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$ 的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方？

解：（1）当 $2k-1>0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而增大.

解 $2k-1>0$，得

$$k>\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $2k+1=0$，即 $k=-\frac{1}{2}$时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$的图像经过原点.

(3) 当 $2k+1<0$ 时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

解 $2k+1<0$，得

$$k<-\frac{1}{2}.$$

做一做

在例 2 中，如果 y 的值随 x 的值的增大而减小，且函数图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方，求 k 的取值范围.

练 习

1. 判断下列函数中，y 的值随 x 的值增大而变化的情况.

(1) $y=-3x+3$； (2) $y=3x-3$；

(3) $y=(3-\pi)x$； (4) $y=0.5x$.

2. 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+4k-2$.

(1) 如果函数的图像经过原点，求 k 的值.

(2) 如果 y 的值随 x 的值的增大而减小，求 k 的取值范围.

习 题

A 组

1. 已知一次函数 $y=(k+1)x-1$，y 的值随 x 的值增大而减小，求 k 的取值范围.

2. 画出函数 $y=-3x+3$ 的图像，结合图像回答下列问题：

(1) y 的值随 x 的值增大而________（填“增大”或“减小”），图像从左到右逐渐________（填“上升”或“下降”）.

(2) 当 $y<0$ 时，求 x 的取值范围.

(3) 当 $0<x<1$ 时，求 y 的取值范围.

3. 在同一直角坐标系中，画出一次函数 $y=-\frac{1}{2}x$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}x-2$ 的图像，并回答：

(1) 各图像的位置有什么关系?

(2) 这种位置关系与函数表达式中的哪个量相关?

B 组

1. 在同一直角坐标系中，画出函数①$y=x+3$，②$y=x-3$，③$y=-x+3$，④$y=-x-3$ 的图像，并找出每两个函数图像之间的共同特征.

2. 某面食加工部每周用 10 000 元流动资金采购面粉及其他物品，其中购买面粉的质量在 1 500 kg～2 000 kg 之间，面粉的单价为 3.6 元/千克，用剩余款额 y 元购买其他物品. 设购买面粉的质量为 x kg.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量的取值范围.

(2) 画出该函数的图像.

(3) 观察图像，写出购买其他物品的款额 y 的取值范围.

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式

通过直接列式可以求一次函数表达式．当然，还有其他的方法求一次函数表达式．本节将探究用待定系数的方法来求一次函数的表达式．

在图 21－3－1 中，直线 PQ 上两点的坐标分别为 $P(-20, 5)$，$Q(10, 20)$．怎样确定这条直线所对应的一次函数表达式呢？

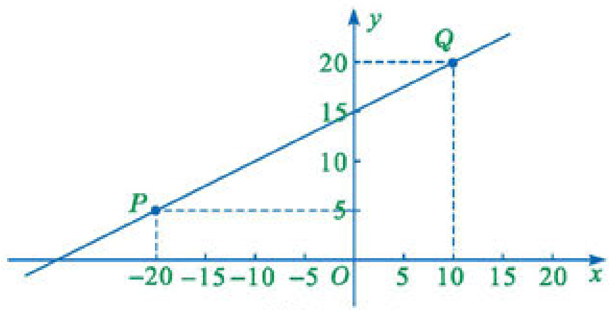


图 21－3－1

观察与思考

阅读下面小惠对此问题的解答过程，并验证小惠求得的一次函数表达式是否正确．

小惠的解答过程如下：

> 设这个一次函数表达式为 $y=kx+b$．
>
> 因为 P，Q 为直线上的两点，所以这两个点的坐标都满足表达式 $y=kx+b$，即
>
> $$\begin{cases}5=-20k+b,\\20=10k+b.\end{cases}$$
>
> 解这个关于 k 和 b 的二元一次方程组，得
>
> $$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b=15.\end{cases}$$
>
> 所以，这个一次函数表达式为
>
> $$y=\frac{1}{2}x+15.$$

像这样先设出函数表达式，再根据已知条件确定表达式中未知的系数，从而求出函数表达式的方法，叫做待定系数法．

做一做

1. 已知 $A(-20, 5)$ 为正比例函数 $y=kx$ 图像上的一点，求这个正比例函数的表达式.

2. 已知一个一次函数的图像经过点 $M(0, 1)$ 和 $N(1, 0)$，求这个一次函数的表达式.

例 一辆汽车匀速行驶，当行驶了 20 km 时，油箱剩余 58.4 L 油；当行驶了50 km时，油箱剩余 56 L 油. 如果油箱中剩余油量 y(L)与汽车行驶的路程 x(km)之间是一次函数关系，请求出这个一次函数的表达式，并写出自变量 x 的取值范围以及常数项的意义.

解：设所求一次函数的表达式为 $y=kx+b$. 根据题意，把已知的两组对应值(20，58.4)和(50，56)代入 $y=kx+b$，得

$$\begin{cases}58.4=20k+b,\\56=50k+b.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k=-0.08,\\b=60.\end{cases}$$

这个一次函数表达式为 $y=-0.08x+60$.

因为剩余油量 $y\geqslant 0$，所以 $-0.08x+60\geqslant 0$. 解得 $x\leqslant 750$.

因为路程 $x\geqslant 0$，所以 $0\leqslant x\leqslant 750$.

因为当 $x=0$ 时，$y=60$，所以这辆汽车行驶前油箱存油 60 L.

大家谈谈

用待定系数法求一次函数表达式的步骤有哪些？与同学交流你的看法.

用待定系数法求一次函数的表达式，一般步骤如下：

(1) 设一次函数表达式 $y=kx+b$.

(2) 根据条件，列出关于 k 和 b 的二元一次方程组.

(3) 解这个方程组，求出 k 与 b 的值，从而得到一次函数表达式.

练 习

1. 一次函数的图像经过点 $A(1, 2)$ 和点 $B(-2, 1)$，求这个函数的表达式.

2. 某市举办一场中学生羽毛球比赛，场地和耗材需要一些费用. 场地费 b(元)是固定不变的. 耗材费用与参赛人数 x(人)成正比例函数关系. 这两部分的总费用为 y(元). 已知当 $x=20$ 时，$y=1\ 600$；当 $x=30$ 时，$y=2\ 000$.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当支出总费用为 3 200 元时，有多少人参加了比赛？

习 题

A 组

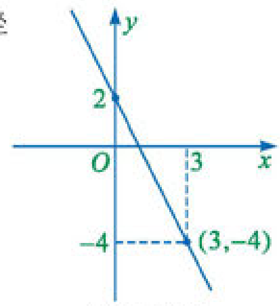
1. 如果一次函数 $y=(k+3)x-13$ 的图像上一点 P 的坐标为$(-5, 7)$，那么 k 的值为________.

2. 求下列函数的表达式：

(1) 正比例函数的图像经过点$(2, -1)$.

(2) 一次函数的图像经过点$(-1, -2)$和$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

3. 已知一次函数的图像如图所示，求这个函数的表达式.



(第 3 题)

B 组

为保护学生的视力，供学生使用的课桌和椅子的高度均需按一定的关系配套设计. 研究表明：课桌高度 y(cm)与椅子高度 x(cm)具有一次函数关系. 今有两套符合条件的课桌和椅子，其高度如下表所示：

项　目	第一套	第二套
x/cm	40.0	37.0
y/cm	75.0	70.2

(1) 试确定 y 与 x 的函数关系式.

(2) 现有一把高为 42.0 cm 的椅子和一张高为 78.2 cm 的课桌，它们是否配套？为什么？

21.4 一次函数的应用

利用一次函数这一数学模型，可以解决许多与其相关的实际问题和数学自身的问题.

某公司与销售人员签订了这样的工资合同：工资由两部分组成，一部分是基本工资，每人每月 3 000 元；另一部分是按月销售量确定的奖励工资，每销售 1 件产品，奖励工资 10 元.

试着做做

1. 设某销售员月销售产品 x 件，他应得的工资记为 y 元. 求 y 与 x 之间的函数关系式.

2. 用求出的函数关系式，尝试解决下列问题：

(1) 该销售员某月的工资为 4 100 元，他这个月销售了多少件产品？

(2) 要想使月工资超过 4 500 元，该月的销售量应当超过多少件？

在上面的问题中，销售员的月工资数 y(元)与他当月销售产品数 x(件)之间的函数关系式为 $y=10x+3\ 000$.

当销售员的月工资为 4 100 元时，有 $4\ 100=10x+3\ 000$. 解得 $x=110$.

要想使月工资超过 4 500 元，只要使 $10x+3\ 000>4\ 500$ 即可. 解得 $x>150$.

一起探究

如图 21-4-1，某种称量体重的台秤，最大称量是 150 kg. 称体重时，体重 x(kg)与指针按顺时针方向转过的角 y(°)有如下一些对应数值：

x/kg	0	15	40	55	60
y/°	0	36	96	132	144

图 21-4-1

(1) 请你在直角坐标系中，分别以上表中的每对对应数值为横坐标和纵坐标，描点连线，画出图像.

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

(3) 当体重为多少千克时，台秤的指针恰好转到180°的位置？当体重为 50 kg 时，台秤的指针转过的角度是多少？

由这些对应值画出的图像，如图 21－4－2 所示.

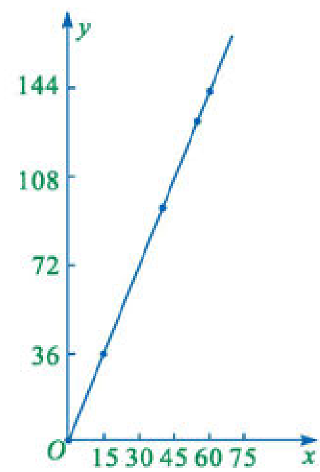


图 21－4－2

由表格给出的数据可以看出，体重为 0 kg 时，台秤指针指向 0°，每增加 5 kg，台秤指针按顺时针方向旋转 12°，所以 y 是 x 的正比例函数. 根据条件可得

$$y=\frac{12}{5}x\ (0\leqslant x\leqslant 150).$$

当 $y=180$ 时，$180=\frac{12}{5}x$. 解得 $x=75$.

当 $x=50$ 时，$y=\frac{12}{5}\times 50=120$.

即当体重为 75 kg 时，台秤的指针恰好转到 180°的位置；当体重为 50 kg 时，台秤的指针转过的角度是 120°.

练　习

1. 某水库在春季播种前，向下游灌溉区开闸放水. 放水量 $V(\mathrm{m}^3)$ 与放水时间 $t(\mathrm{min})$ 之间有如下对应数据：

t/min	30	60	90	120	150
V/m^3	1 500	3 000	4 500	6 000	7 500

(1) 求放水量 $V(\mathrm{m}^3)$ 与放水时间 $t(\mathrm{min})$ 之间的函数关系式.

(2) 求放水 24 h 的放水量.

2. 某出版社出版了一种适合中学生阅读的科普书. 当该书首次出版的印数不少于 5 千册时，该出版社投入的成本 y(万元)与印数 x(千册)之间为一次函数关系，并有下表中的对应值：

x/千册	6	8
y/万元	3.1	3.6

(1) 求 y(万元)与 x(千册)之间的函数关系式.

(2) 当出版社投入成本 4.1 万元时，能印该书多少千册？

习 题

A 组

1. 一个长方形的长、宽分别为 60 和 40. 现将它的宽减少 10，长增加 x. 设变化后的长方形的面积为 y.

    (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.

    (2) 当 x 取何值时，变化后的长方形与原来的长方形的面积相等？

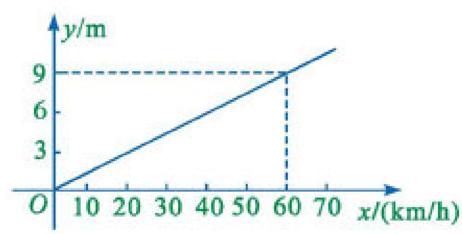
    (3) 当 x 取哪些值时，可以使变化后的长方形的面积比原来的长方形面积的 2 倍还要大？

2. 一辆中型客车，准乘 21 人(包括一名司机和一名乘务员). 这辆客车由 A 地行驶到 B 地，油费为 45 元，高速公路费为 20 元，其他运行成本为 42 元，每人票价 25 元. 设乘客为 x 人时，盈利为 y 元.

    (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.

    (2) 至少要有多少名乘客才能保证不亏本？若载满了乘客，可获利多少元？

3. 汽车在刹车后都会由于惯性继续向前滑行一段距离，我们将其称为“刹车距离”. 某型号轿车的“刹车距离” y(m) 与速度 x(km/h) 的关系如图所示.



(第 3 题)

    (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.

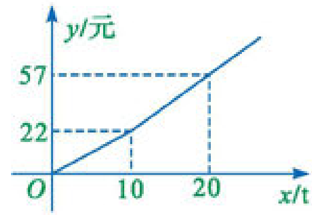
    (2) 要使刹车距离不超过 12 m，车速应当保持在哪个范围内？

B 组

某市为鼓励市民节约用水，自来水公司采用分段收费标准收费，每月收取水费 y(元)与用水量 x(t)之间的函数关系如图所示.

（1）小兰家 7 月份用水 7 t，应交水费多少元？

（2）按上述分段收费标准，小兰家 3 月份和 4 月份分别交水费 29 元和 19.8 元．小兰家 4 月份比 3 月份节约用水多少吨？



例 甲骑自行车以 10 km/h 的速度沿公路行驶，出发 3 h 后，乙骑摩托车从同一地点出发沿公路与甲同向行驶，速度为25 km/h.

（1）设甲离开出发地的时间为 x(h)，求：

①甲离开出发地的路程 y(km)与 x(h)之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

②乙离开出发地的路程 y(km)与 x(h)之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

（2）在同一直角坐标系中，画出(1)中两个函数的图像，并结合实际问题，解释两图像交点的意义.

解：（1）由公式 $s=vt$，得

①甲离开出发地的路程 y 与 x 的函数关系式为

$$y=10x.$$

自变量 x 的取值范围为 $x\geqslant 0$.

②乙离开出发地的路程 y 与 x 的函数关系式为

$$y=25(x-3)，即\ y=25x-75.$$

自变量 x 的取值范围为 $x\geqslant 3$.

（2）以上两个函数的图像如图 21－4－3 所示．两个函数图像的交点坐标是(5，50)，即甲出发 5 h 后被乙追上(或乙出发 2 h 后追上甲)．此时，两人距离出发地 50 km.

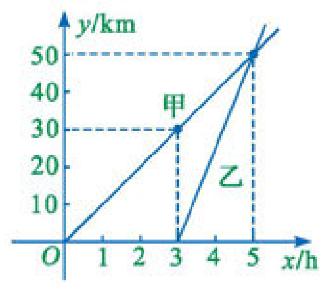


图 21－4－3

大家谈谈

对于上例中甲、乙行驶的情况，你能借助图 21－4－3 解释“乙出发多少小时后可以超过甲”这一问题吗？还有其他方法解答这个问题吗？

由此可以看出，有些一元一次方程和一元一次不等式问题，可以借助一次函数来考虑. 借助一次函数的图像，往往能使方程和不等式的意义更加直观和形象.

一起探究

某电脑工程师张先生准备开一家小型电脑公司，欲租一处临街房屋. 现有甲、乙两家出租屋，甲家已经装修好，每月租金为 3 000 元；乙家未装修，每月租金为 2 000 元，但若装修成与甲家房屋同样的规格，则需要花装修费 4 万元.

(1) 设租用时间为 x 个月，承租房屋所付租金为 y 元，分别求租用甲、乙两家的租金 y 与租用时间 x 之间的函数关系式.

(2) 根据求出的两个函数表达式，试判断租用哪家的房屋更合算.

小亮的做法

(1) 租用甲家房屋时，$y=3\,000x$；租用乙家房屋时，$y=2\,000x+40\,000$.

(2) ① 由 $3\,000x=2\,000x+40\,000$，解得

$$x=40.$$

即当租用 40 个月时，无论是租用哪一家，租金都相同.

② 由 $3\,000x>2\,000x+40\,000$，解得

$$x>40.$$

即当租用时间超过 40 个月时，租乙家的房屋更合算.

③ 由 $3\,000x<2\,000x+40\,000$，解得

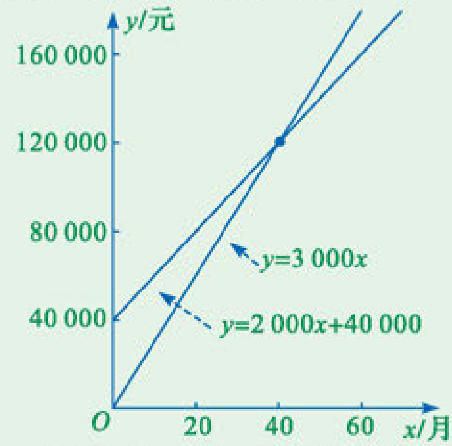
$$x<40.$$

即当租用时间少于 40 个月时，租甲家的房屋更合算.

小丽的做法

(1) 同小亮的做法.

(2) 在同一直角坐标系中，分别画出 $y=3\,000x$，$y=2\,000x+40\,000$这两个函数的图像.



观察图像可知，当租用 40 个月时，甲、乙两家的租金相同；当租用时间超过 40 个月时，租乙家的房屋更合算；当租用时间少于 40 个月时，租甲家的房屋更合算.

大家谈谈

小亮和小丽的做法有什么不同？你是怎么做的？与同学交流你的做法.

练　习

1. 某工厂开发生产一种新产品，前期投入 150 000 元. 生产时，每件成本为 25 元，每件销售价为 40 元. 设生产 x 件时，总成本(包括前期投入)为 m 元，销售额为 n 元.

(1) 分别求出 m，n 与 x 之间的函数关系式.

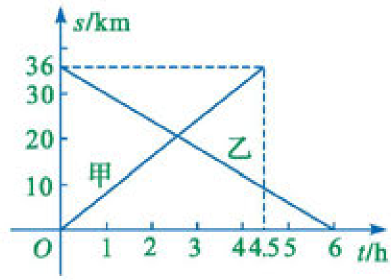
(2) 至少生产并销售多少件产品后，工厂才会有盈利？

2. A，B 两地相距 36 km，甲、乙二人分别从 A 地和 B 地同时出发，相向而行. 他们距 A 地的路程 s(km)和出发后的时间 t(h)之间的函数关系的图像如图所示.

(1) 甲行驶了几小时到达 B 地，乙行驶了几小时到达 A 地？

(2) 分别写出甲、乙二人距 A 地的路程 s 与时间 t 之间的函数关系式.

(3) 求出两个图像交点的坐标，并解释交点坐标所表示的实际意义.



(第 2 题)

习　题

A 组

1. 某学校欲购置一批标价为 4 800 元的某型号电脑，需求数量在 15 至 25 台之间. 经与两个专卖店商谈，甲店同意打八折；乙店承诺先赠一台，其余打九折. 这所学校购买哪家的电脑更合算？

2. 某工厂有甲、乙两个净化水池，容积都是 480 m^3. 注满乙池的水得到净化可以使用时，甲池未净化的水已有 192 m^3. 此时，乙池以 10 m^3/h 的速度将水放出使用，而甲池仍以 8 m^3/h 的速度注水. 设乙池放水为 x h 时，甲、乙两池中的水量用 y m^3 表示.

(1) 分别写出甲、乙两池中的水量 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围，并在同一直角坐标系中画出这两个函数的图像.

(2) 借助由(1)得出的图像回答：

①当 x 取何值时，甲、乙两池水量相等？

②当 x 取哪些值时，甲池的水量少于乙池的水量？

③当 x 取哪些值时，甲池的水量多于乙池的水量？

B 组

某种子商店销售一种小麦种子，为促销，推出了两种销售方案供采购者选择.

方案一：小麦种子的价格为 4 元/千克，无论购买多少均不打折.

方案二：购买 3 kg 以内(含 3 kg)，价格为 5 元/千克；若一次性购买超过3 kg，则超过 3 kg 的部分价格打七折.

(1) 求出方案一中购买的小麦种子的数量 x(kg)和付款金额 y(元)之间的函数关系式.

(2) 若你去购买一定量的这种小麦种子，你会选择哪个方案？说明理由.

21.5 一次函数与二元一次方程的关系

一次函数与二元一次方程之间具有密切的联系，用不同的观点进行解释，二者可以互相转化.

观察与思考

1. 二元一次方程 $x+y=1$ 有无数组解，如

$$\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$$

等，都是这个方程的解.

如图 21－5－1，以这些解为点的坐标，在直角坐标系中描点. 你认为这些点在一条直线上吗？如果在一条直线上，它们在哪条直线上？请说明理由.

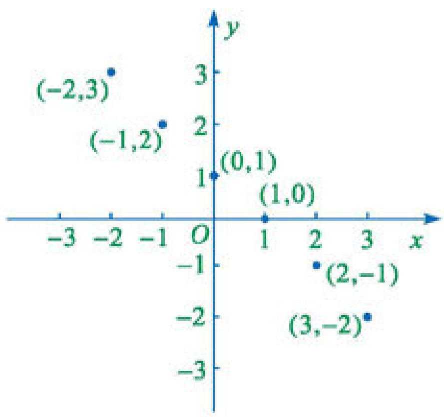


图 21－5－1

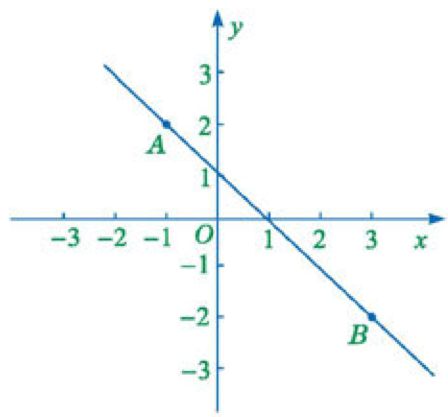


图 21－5－2

2. 如图 21－5－2，在直角坐标系中，设点 A 的坐标为$(-1, 2)$，点 B 的坐标为$(3, -2)$，经过点 A，B 画直线. 直线 AB 上的点 $C(x_0, y_0)$ 中，x_0，y_0之间有怎样的数量关系？$\begin{cases}x=x_0,\\y=y_0\end{cases}$是不是方程 $x+y=1$ 的一组解？请说明理由.

一般地，如果以二元一次方程 $ax+by=c$ 的解为坐标，在直角坐标系中

画点，那么这些点在一条直线上．反过来，如果取定这个方程的两组解，那么过以这两组解为坐标的两点画出的直线，此直线上点的坐标组成的一组值是这个二元一次方程的一组解．

因此，以二元一次方程的解为坐标的点在一条直线上．

一起探究

1．一次函数 $y=kx+b$ 图像上的一个点的坐标是不是二元一次方程 $kx-y=-b$ 的一组解？请说明理由．

2．以二元一次方程 $ax+by=c$ 的解为坐标所构成的直线，是不是一次函数 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 的图像？请说明理由．

3．你认为二元一次方程和一次函数有什么联系与区别？与同学交流你的看法．

事实上，我们把二元一次方程 $ax+by=c$ 变形为 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 后，原来的二元一次方程就化成了一次函数的形式．当 x，y 表示未知数时，$ax+by=c$ 就是二元一次方程；当 x，y 表示变量时，$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 就是一次函数．并且，有如下结论：

以二元一次方程的解为坐标的点都在与它对应的一次函数的图像上；反过来，一次函数图像上的点的坐标都是与它对应的二元一次方程的解．

做一做

1．方程 $2x+3y=5$ 有多少组解？请填写下表，并把每一组对应值作为点的坐标，在图 21－5－3 所示的直角坐标系中描出各点．

x	…	-2	-1	0	1	2	2.5	…
y	…							…

2．在上题直角坐标系中画出函数 $y=-\frac{2}{3}x+$

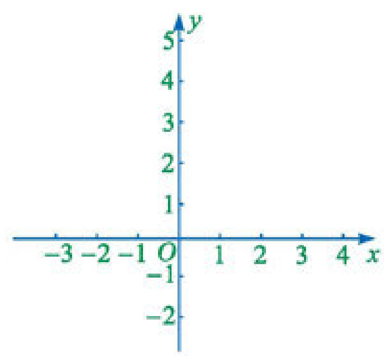


图 21－5－3

$\frac{5}{3}$的图像.

3. 以方程 $2x+3y=5$ 的解为坐标的点是否都在函数 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ 的图像上？为什么？

练 习

1. 把二元一次方程 $2x-3y=4$ 改写成一次函数 $y=kx+b$ 的形式，并画出这个一次函数的图像.

2. 写出二元一次方程 $2x-y=1$ 的三个解，以方程的解为坐标在直角坐标系中画点，这些点是否都在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上？

习 题

A 组

1. 已知一次函数 $y=ax+5$ 和 $y=-x+b$ 的图像交于点 $P(1, 2)$.

(1) 直接写出方程组 $\begin{cases} ax-y=-5, \\ y+x=b \end{cases}$ 的解.

(2) 求 a，b 的值.

2. 把二元一次方程 $2(x-3)+y=0$ 改写成一次函数 $y=kx+b$ 的形式，并画出这个一次函数的图像.

B 组

1. 解方程组 $\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2x=6, \end{cases}$ 并由此指出在同一直角坐标系内，一次函数 $y=2x-2$ 与 $y=-2x+6$ 图像交点的坐标.

2. 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ ax+3y=8 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

(1) 写出一次函数 $y=-x+1$ 和 $y=-\frac{a}{3}x+\frac{8}{3}$ 的图像交点 P 的坐标.

(2) 若这两个函数的图像与 x 轴分别交于点 A，B，求 $S_{\triangle ABP}$.

数学活动

匀速变化和一次函数

设 y 是 x 的函数，x_1，x_2 是自变量 x 取值范围内的两个值，当 x 由 x_1 变化到 x_2 时，对应的 y 值由 y_1 变化到 y_2，我们称比值

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

为 y 在 x_1 与 x_2 之间的平均变化速度．当 y 在自变量 x 取值范围内任意两值之间的平均变化速度是同一个数时，我们称 y 为 x 的匀速变化的函数．

活动一：

1．说明 $y=-2x+1$ 是匀速变化的函数．

2．试说明一次函数 $y=kx+b$ 是匀速变化的函数．

活动二：

1．小刚骑自行车去上学，骑行时间 t(min) 和所行路程 s_1(km) 之间的关系如下表：

时间 t/min	1	2	3	4	5	…	16.5
路程 s_1/km	0.4	0.6	0.8	1	1.2	…	3.5

我们已经知道 s_1 是 t 的匀速变化的函数．

(1) 说明 s_1 是 t 的一次函数．

(2) 设小刚家到学校的路程为 3.5 km，小刚行驶过程中距学校的路程为 s_2(km)．先说明 s_2 是 t 的匀速变化的函数，再说明它是一次函数．

2．试说明如果 y 是 x 的匀速变化的函数，那么 y 是 x 的一次函数．

由活动一和活动二可知，一次函数是匀速变化的函数；反过来，匀速变化的函数是一次函数．因此，如果知道一个函数是匀速变化的，我们就可以用待定系数法求这个一次函数的表达式．

活动三：

一种大棚蔬菜处在 0 ℃以下的气温条件下超过 3.3 h，就会遭受冻害．秋末某天，气象台发布了如下的降温预报：0 时至次日 5 时，气温将由 3 ℃下降到 −3 ℃；从次日 5 时至次日 8 时，气温又将由 −3 ℃上升到 5 ℃．如果气温在上述两个时间段内变化都是匀速的，你认为是否有必要对该大棚蔬菜采取防冻措施？请说明理由．

回顾与反思

一、知识结构

- 现实问题 — 一次函数
  - 图像与性质
  - 表达式
    - 直接列式法
    - 待定系数法
  - 应用
  - 一次函数与二元一次方程的关系

二、总结与反思

从现实问题建立一次函数模型是强化“符号意识”的过程，这个过程着重体现了抽象与模型化的思想．一次函数的图像，不仅揭示了一次函数的性质，更重要的是凸显了“数形结合”的思想方法．

1．一次函数是一类重要的函数．

2．一次函数 $y=kx+b$ 的图像是直线，故其图像又称为直线 $y=kx+b$．

3．一次函数 $y=kx+b$ 中的系数 k 与 b 决定着它的性质：

（1）当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，图像从左向右是________的．

（2）当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，图像从左向右是________的．

（3）当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 化为正比例函数 $y=kx$，它的图像一定经过________．

（4）当 $b\neq 0$ 时，直线 $y=kx+b$ 一定不经过________．

4．求一次函数的表达式至关重要，它是解决许多实际问题的关键环节．求一次函数表达式的主要方法有：

（1）直接列式法：由问题的实际意义直接写出．这种方法的实质是把问题中用文字叙述的数量关系用数学式表达出来．

（2）待定系数法：根据图像、表格或已知条件确认两个变量成一次函数关系，就可以将表达式设为 $y=kx+b$，利用两组对应值求出 k 与 b 的值．

5．正比例函数是一次函数的特例，它们之间是一般与特殊的关系．正比例函数具备一次函数所有的性质，它的特点在于图形必过原点，只需另一个点的坐标就可以确定其表达式．

6．一次函数与二元一次方程的关系体现在：

（1）从形式上它们之间可以相互转化．

（2）以二元一次方程的解为坐标的点都在与它对应的函数图像上；反过来，一次函数图像上的点的坐标都是与它对应的二元一次方程的解.

7．一次函数有着广泛的实际应用．掌握一次函数的应用有两个层次：

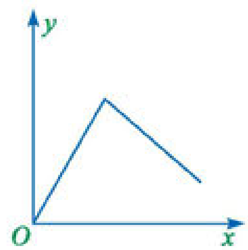
（1）若给出了一次函数的表达式，则可直接应用一次函数的性质解决问题.

（2）若问题只提供了一次函数的情境（有时是隐含的表述），则一般应先求出函数表达式，进而利用性质解决问题.

三、注意事项

1．对于一次函数的概念，要把握函数表达式是自变量的一次式，而与表示自变量的字母无关．例如 $y=3x+1$，$s=2t-5$，$l=2\pi R$ 等都是一次函数.

2．在实际问题中，有时会遇到两个或多个一次函数的图像拼接起来的图像，如图，它便是由两个一次函数的图像组合而成的．对于其中的每一段，我们都可以利用一次函数来解决问题.



复 习 题

A 组

1．填空：

（1）直线 $y=3-9x$ 与 x 轴的交点坐标为________，与 y 轴的交点坐标为________.

（2）若 $M(a, 2)$ 为一次函数 $y=2x-3$ 图像上的一点，则 $a=$________.

（3）在函数 $y=x+4$ 中，若自变量 x 的取值范围是 $-3<x<-1$，则函数值 y 的取值范围为________.

（4）汽车离开 A 站 5 km 后，又以 40 km/h 的平均速度行驶了 t h．此时，汽车离开 A 站的路程为 s km．s 与 t 的函数关系式为________.

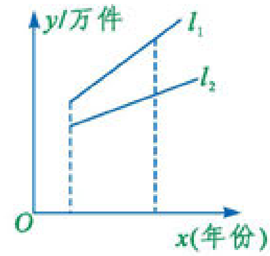
（5）一棵树现在的高度为 2.2 m，且未来 10 年内会每年长高 25 cm．设 x 年后的树高为 y m，则 y 与 x 的函数关系式为________，y 是 x 的________函数.

2．解答下列各题：

（1）已知四个点的坐标分别为 $(1, 2)$，$(2, -1)$，$(0, 3)$，$(2, 2)$，其中哪些点在直线 $y=-x+3$ 上？

(2) 若点 $A(-5, y_1)$，$B(-2, y_2)$ 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上，则 y_1 与 y_2 的大小具有怎样的关系？

(3) 某纸业公司生产一种品牌的卫生纸，近年的产销情况如图所示. 直线 l_1 和 l_2 分别表示产量与年份、销量与年份的函数关系. 下列说法中哪些是正确的，哪些是错误的？试说明理由.



(第 2(3)题)

①该卫生纸产量与销售量均呈直线上升的趋势，应该按原计划继续生产.

②该卫生纸已经出现供大于求的趋势，价格将趋跌.

③该卫生纸库存积压越来越大，应该压缩生产或设法促销.

3. 某产品每件的成本是 120 元，试销阶段每件产品的售价 x(元)与日销量 y(件)之间的关系如右表. 若日销量 y(件)是销售价格 x(元)的一次函数，且不允许亏本销售，求这个一次函数的表达式，并指出 x 的取值范围.

x/元	130	150	165
y/件	70	50	35

4. 已知某种物体的密度为 ρ，密度公式为 $\rho=\frac{m}{V}$(其中，m 为该物体的质量，V 为体积).

(1) 导出公式 $m=\rho V$ 是一次函数吗？若是一次函数，则哪个量是自变量？

(2) 导出公式 $V=\frac{m}{\rho}$ 是一次函数吗？若是一次函数，则哪个量是自变量？

5. 已知一次函数的图像经过点(1，1)和(−1，−5)，

(1) 求这个一次函数的表达式.

(2) 求这个一次函数的图像与 x 轴和 y 轴的交点坐标，并求出该图像与两坐标轴围成的三角形的面积.

6. 请你在同一坐标系中画出一次函数的图像

$$l_1:\ y=\frac{1}{2}x-3$$

和

$$l_2:\ y=-x+6.$$

观察图像并回答下列问题：

(1) 当 x 为何值时，l_1 与 l_2 所对应的表达式的 y 值相等？

(2) 当 x 为哪些值时，l_1 所对应的表达式的 y 值大于 l_2 所对应的表达式的 y 值？

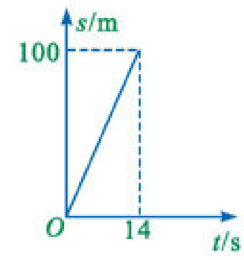
(3) 当 x 为哪些值时，l_1所对应的表达式的 y 值小于 l_2所对应的表达式的 y 值？

7. 在一次百米赛跑过程中，小明所跑过的路程 s(m)与所用时间 t(s)的关系如图所示.

(1) s 是 t 的什么函数？

(2) 写出 s 与 t 的函数关系式.

(3) 小明此次比赛中的速度是多少？



（第 7 题）

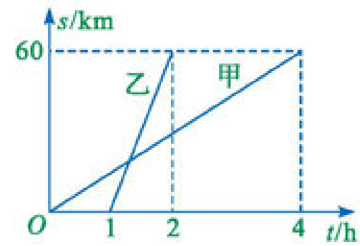
B 组

1. A，B 两地相距 60 km，甲、乙二人分别骑自行车和摩托车沿相同路线匀速行驶，由 A 地到达 B 地. 他们行驶的路程 s(km)与甲出发后的时间 t(h)之间的函数图像如图所示.

(1) 乙比甲晚出发几小时？乙比甲早到几小时？

(2) 分别写出甲、乙行驶的路程 s(km)与甲出发后的时间 t(h)的函数关系式.

(3) 乙在甲出发后几小时追上甲？追上甲的地点离 A 地有多远？



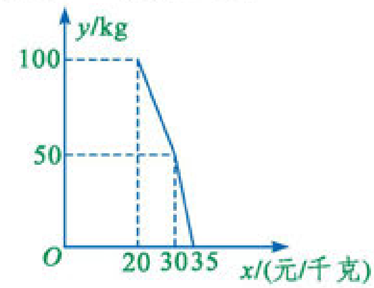
（第 1 题）

2. 某水产市场经营一种海产品，其日销售量 y(kg)与销售单价 x(元/千克)的函数关系如图所示.

(1) 分别求出当 $20 \leqslant x \leqslant 30$，$30 \leqslant x \leqslant 35$ 时，y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当单价为 32 元/千克时，日销售量是多少？

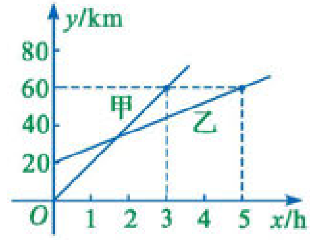
(3) 当日销售量为 80 kg 时，单价是多少？



（第 2 题）

3. A，B，C 三地位于南北方向的一条公路上（A，B，C 依次由南往北），B 与 A 相距 20 km，C 与 B 相距 40 km. 甲骑自行车，乙步行，分别由 A，B 两地同时出发，向 C 地行驶，他们离 A 地的路程 y(km)是行驶的时间 x(h)的一次函数，其图像如图所示.

(1) 出发后多长时间甲追上乙？此时离 C 地多远？



（第 3 题）

(2) 当出发后 2.5 h 时，谁在前面？此时他超过另一人多少千米？

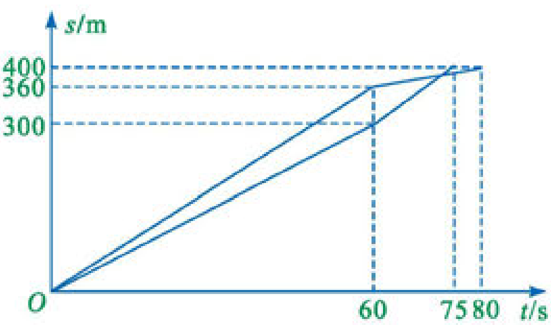
C 组

1. 有 36 名分别了多年的老同学约定到某个地方故地重游，他们决定租用汽车前往．可租用的汽车有两种：甲种每辆可以乘 8 人，乙种每辆可以乘 4 人．他们不愿意让车子留出空位，但也不能超载．（乘坐人数不包含司机）

   (1) 你能想出几种租车的方案？

   (2) 已知可乘 8 人的车，每天租金为 300 元；可乘 4 人的车，每天租金为 200 元．请你帮助他们选择一个最便宜的租车方案．

2. 李虹和张惠平时的耐力与速度相差无几．某日体育课上，老师设计了一个 400 m 赛跑方案，让李虹从起跑就全速前进，而让张惠留着后劲儿，待到剩下最后 100 m 时再加速，并跟踪记录了赛跑的全过程，赛跑的全过程如图所示．



（第 2 题）

   (1) 你从这幅图中读出了哪些信息？

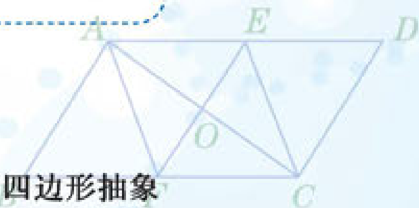
   (2) 体育老师设计这个方案的目的是什么？

第二十二章

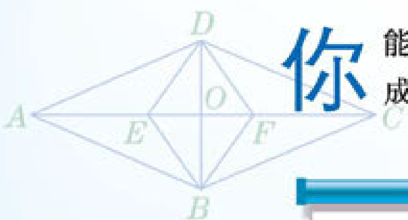
四 边 形

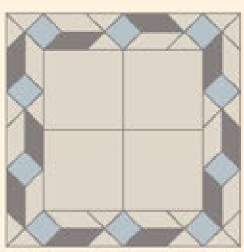
在本章中，我们将学习

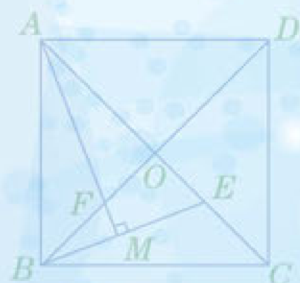
- 平行四边形、矩形、菱形和正方形的相关概念及其性质
- 平行四边形、矩形和菱形的判定
- 三角形中位线的性质
- 多边形的内角和与外角和



你能识别下列图片中的图形吗？将其中的四边形抽象成平面图形后，它们有什么共同特征呢？







22.1 平行四边形的性质

从本节开始，我们将进一步认识一些特殊的四边形，并探究这些四边形的一些基本性质和判定.

观察与思考

在我们的周围存在着许多四边形. 观察下列图片，从中找出四边形，并就它们的共同特性和不同特性，和大家交流你的看法.

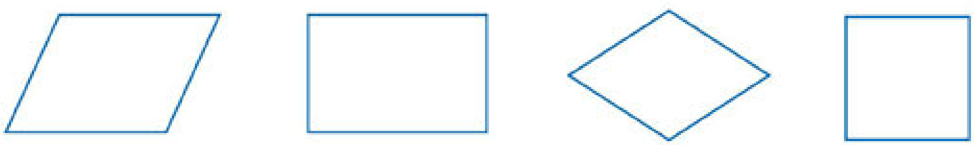
教室

瓷砖图案

伸缩门

晾衣架

上面图片中的四边形可以归类为以下四种：



我们把两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**(parallelogram). 连接平行四边形不相邻的两个顶点的线段叫做平行四边形的**对角线**(diagonal). 两条对角线的交点叫做平行四边形的**中心**(center).

如图 22－1－1，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”. 线段 AC，BD 为$\square ABCD$ 的两条对角线，点 O 为它的中心.

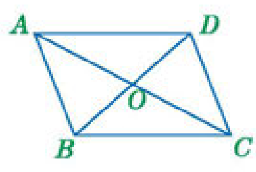


图 22－1－1

一起探究

1．如图 22－1－2，在半透明的纸上画一个$\square ABCD$，再复制一个. 将

两个图形完全重合，用大头针钉在中心处. 使下面的图形不动，将上面的图形绕中心 O 旋转 180°. 这两个图形能完全重合吗？平行四边形是不是中心对称图形？如果是中心对称图形，哪个点是它的对称中心？被对角线分成的三角形中，关于点 O 成中心对称的三角形有几对？

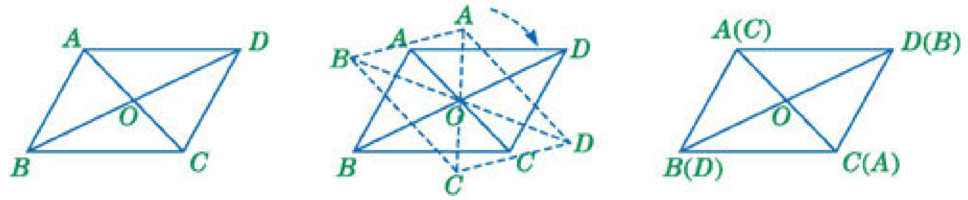


图 22－1－2

2. 在上面的活动过程中，你发现了▱$ABCD$ 的对边 AD 与 CB，AB 与 CD 之间具有怎样的数量关系？对角$\angle BAD$与$\angle DCB$，$\angle ABC$与$\angle CDA$之间具有怎样的数量关系？线段 OA 与 OC，OB 与 OD 之间具有怎样的数量关系？

3. 把你的发现写出来，说明理由，并将结果与大家交流.

通过探究，可发现：

平行四边形是中心对称图形，它的对称中心是两条对角线的交点.

同时，我们还发现平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分.

我们先来证明平行四边形的对边相等，对角相等.

已知：如图 22－1－3，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

求证：(1) $AD=CB$，$AB=CD$.

(2) $\angle BAD=\angle DCB$，$\angle ABC=\angle CDA$.

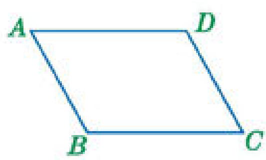


图 22－1－3

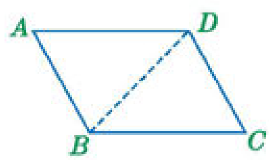


图 22－1－4

证明：如图 22－1－4，连接 BD. 在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中，

$\because$ $AD /\!/ CB$，$AB /\!/ CD$，

$\therefore$ $\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle CBD$.

又$\because$ $BD=DB$，

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

$\therefore$ $AD=CB$，$AB=CD$，$\angle BAD=\angle DCB$.

$\because$ $\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle CBD$，

$\therefore$ $\angle ABD+\angle CBD=\angle CDB+\angle ADB$，

即 $\angle ABC=\angle CDA$.

平行四边形的性质定理

平行四边形的对边相等，对角相等.

做一做

已知：如图 22－1－5，$\square ABCD$ 的周长为 22 cm，$\triangle ABD$ 的周长为 18 cm. 求对角线 BD 的长.

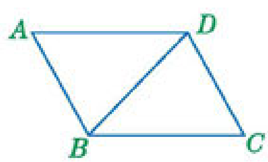


图 22－1－5

例 1 已知：如图 22－1－6，在$\square ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=260°$. 求$\angle A$，$\angle C$ 的度数.

解：在$\square ABCD$ 中，

$\because$ $\angle B=\angle D$，$\angle B+\angle D=260°$，

$\therefore$ $\angle B=\angle D=\dfrac{260°}{2}=130°$.

又$\because$ $AD /\!/ CB$，

$\therefore$ $\angle A=180°-\angle B=180°-130°=50°$.

$\therefore$ $\angle C=\angle A=50°$.

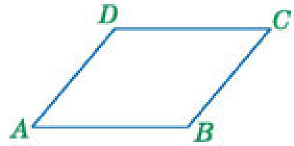
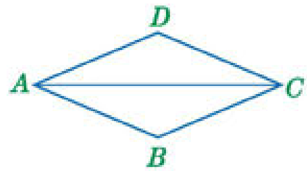


图 22－1－6

练 习

1. 在▱$ABCD$中，$AB=3$，$AD=2$. 求▱$ABCD$的周长.

2. 如图，在▱$ABCD$中，AC平分$\angle DAB$，$AB=3$. 求▱$ABCD$的周长.



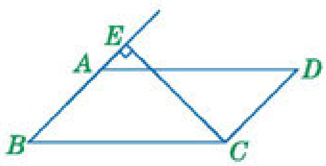
（第 2 题）

3. 在▱$ABCD$中，$\angle A$，$\angle B$的度数之比为$5:4$. 求$\angle C$的度数.

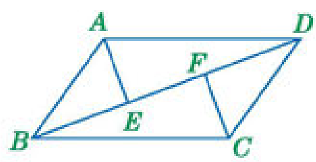
习 题

A 组

1. 已知一个平行四边形，其相邻两角的差是40°. 求平行四边形各角的度数.
2. 求平行四边形四个内角的度数的和.
3. 如图，在▱$ABCD$中，$CE\perp BA$，交BA延长线于点E，$\angle EAD=46^\circ$. 求$\angle BCE$和$\angle D$的度数.



（第 3 题）

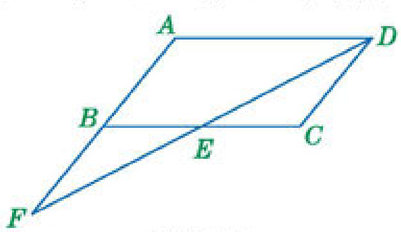


（第 4 题）

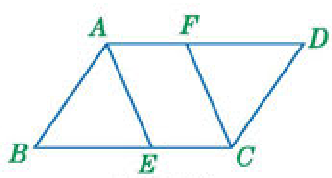
4. 如图，在▱$ABCD$中，点E，F在对角线BD上，且$BE=DF$. 猜想AE与CF有怎样的数量关系，并对你的猜想给予证明.

B 组

1. 已知：如图，在▱$ABCD$中，E为BC的中点，DE与AB的延长线相交于点F. 求证：B为AF的中点.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 上的点，且 $BE=DF$. 求证：$AE=CF$.

由上节课的探究过程，我们还发现平行四边形的对角线互相平分.

现在，我们来证明这个结论.

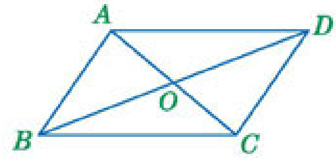


图 22－1－7

已知：如图 22－1－7，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O.

求证：$OA=OC$，$OB=OD$.

证明：在△AOB 和△COD 中，

∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$\angle BAO=\angle DCO$，$AB=CD$.

又∵　$\angle AOB=\angle COD$，

∴　$\triangle AOB\cong\triangle COD$.

∴　$OA=OC$，$OB=OD$.

平行四边形的性质定理

平行四边形的对角线互相平分.

例 2　已知：如图 22－1－8，O 为▱$ABCD$ 两条对角线的交点，$AC=24$ mm，$BD=38$ mm，$BC=28$ mm. 求△OAD 的周长.

解：在▱$ABCD$ 中，

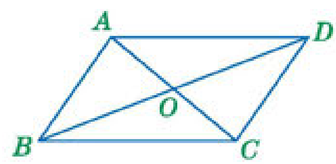


图 22－1－8

∵　$AC=24$ mm，$BD=38$ mm，

∴　$AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{24}{2}=12$(mm)，

$DO=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{38}{2}=19$(mm).

又∵　$BC=28$ mm，

∴　$AD=BC=28$ mm.

∴　△OAD 的周长$=AO+OD+AD=12+19+28=59$(mm).

例 3　已知：如图 22－1－9，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，直线 EF 过点 O，交 DA 于点 E，交 BC 于点 F.

求证：$OE=OF$，$AE=CF$，$DE=BF$.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且对角线 AC 与 BD 相交于点 O，

∴ $OA=OC$，$\angle EAO=\angle FCO$.

又∵ $\angle AOE=\angle COF$，

∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$.

∴ $OE=OF$，$AE=CF$.

又∵ $AD=CB$，

∴ $DE=AD-AE=CB-CF=BF$.

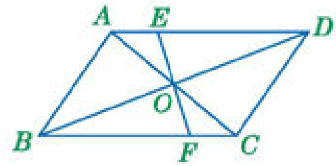
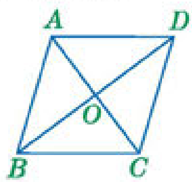


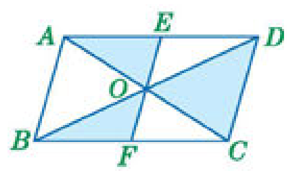
图 22-1-9

练　习

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=5$ cm，$AC=6$ cm，$BD=8$ cm. 求 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOD$ 的周长.



（第 1 题）



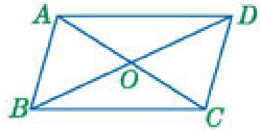
（第 2 题）

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 的直线分别交 AD 和 BC 于点 E，F，▱$ABCD$ 的面积为 24. 求图中阴影部分的面积.

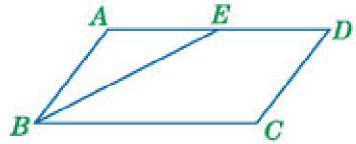
习　题

A　组

1. 如图，▱$ABCD$ 的周长是 38，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ 的周长之差是 5. 求 AB 的长.



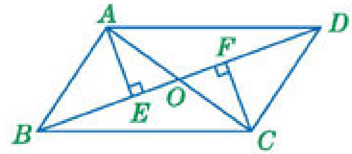
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，$\angle ABE=\angle EBC$，$AB=2$. 求▱$ABCD$ 的周长.

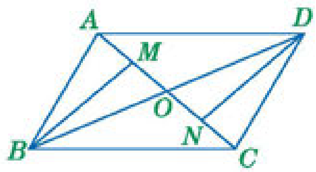
3. 已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E，F. 求证：$OE=OF$.



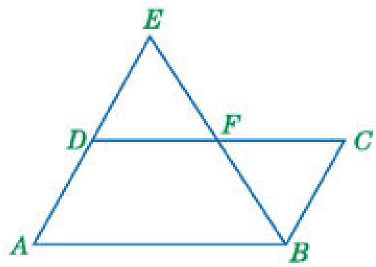
（第 3 题）

B 组

1. 已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，M 是 OA 的中点，N 为 OC 的中点. 求证：$BM=DN$，$BM /\!/ DN$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，E 为▱$ABCD$ 的边 AD 的延长线上一点，且 $AD=DE$，EB 交 DC 于点 F. 求证：$DF=FC$.

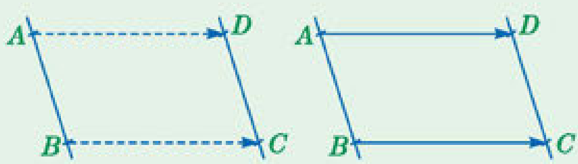
22.2 平行四边形的判定

我们已经知道平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分．反过来，对边相等（或对角相等，或对角线互相平分）的四边形是不是平行四边形呢？

一起探究

小明用下列方法得到一个四边形 $ABCD$.

画两条互相平行的直线，在这两条直线上分别截取线段 $AB=CD$，连接 AD，BC，得四边形 $ABCD$.



（1）将线段 AB 沿 BC 方向平行移动，线段 AB 与 CD 能不能重合？你认为这样得到的四边形 $ABCD$ 是不是平行四边形？

（2）由此，你发现了什么结果？与大家交流.

我们发现：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

现在，我们来证明这个结论.

已知：如图 22－2－1，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD=BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

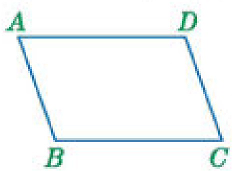


图 22－2－1

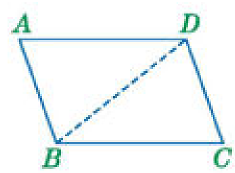


图 22－2－2

证明：如图 22－2－2，连接 BD.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CDB$ 中，

$\because$ $AD /\!/ BC$，

$\therefore$ $\angle ADB = \angle CBD$.

$\because$ $AD = CB$，$BD = DB$，

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

$\therefore$ $\angle ABD = \angle CDB$.

$\therefore$ $AB /\!/ DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

为证明另两条边平行，可借助内错角相等. 为此需构造相应的全等三角形.

平行四边形的判定定理

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例 1 已知：如图 22-2-3，在▱$ABCD$ 中，E 为 BA 延长线上一点，F 为 DC 延长线上一点，且 $AE = CF$，连接 BF，DE.

求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

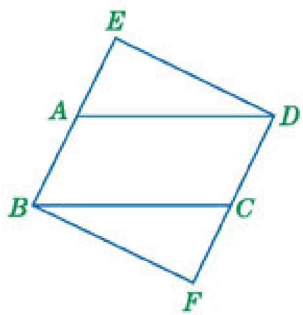


图 22-2-3

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AB /\!/ CD$，$AB = CD$.

又 $\because$ $AE = CF$，

$\therefore$ $BE = BA + AE = DC + CF = DF$，

且 $BE /\!/ DF$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

例 2 求证：平行线间的距离处处相等.

已知：如图 22-2-4，$EF /\!/ MN$，A，B 为直线 EF 上任意两点，$AD \perp MN$，垂足为 D，$BC \perp MN$，垂足为 C.

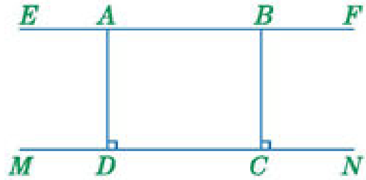


图 22-2-4

求证：$AD = BC$.

证明：$\because$ $AD \perp MN$，$BC \perp MN$，

$\therefore$ $AD /\!/ BC$.

又 $\because$ $EF /\!/ MN$，

$\therefore$ 四边形 $ADCB$ 为平行四边形.

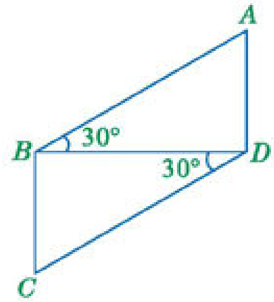
$\therefore$ $AD = BC$.

平行四边形的定义，也是判定一个四边形为平行四边形的依据.

练　习

1. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

2. 将两块全等的含 30°角的三角尺按如图的方式摆放在一起，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？请尝试用多种方法说明理由.

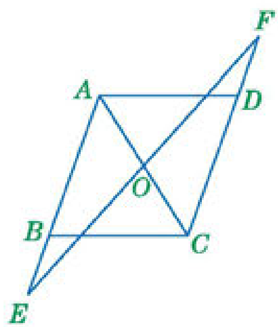


（第 2 题）

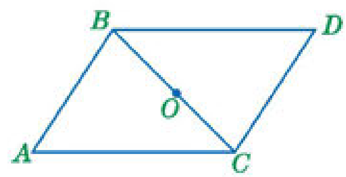
习　题

A 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，延长 AB 到点 E，延长 CD 到点 F，使 $BE=DF$. 猜想线段 AC 与 EF 之间的关系，并证明自己的猜想.



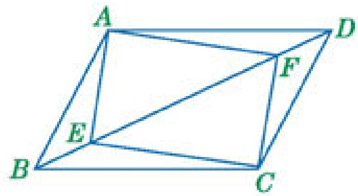
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，把△ABC 绕边 BC 的中点 O 旋转 180°得到△DCB. 求证：四边形 $ACDB$ 是平行四边形.

3. 已知：如图，BD 是▱$ABCD$ 的对角线，点 E 和点 F 在 BD 上，且 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

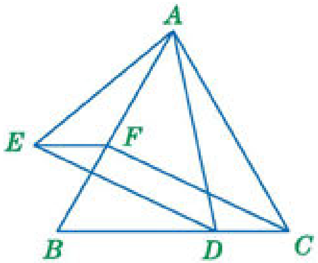


（第 3 题）

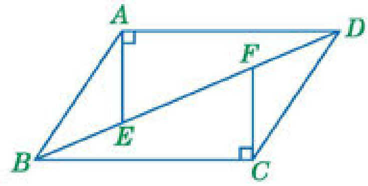
B 组

1. 已知：如图，△ABC 是等边三角形，点 D，F 分别在线段 BC，AB 上，

$DC=EF$，$\angle EFB=60^{\circ}$．求证：四边形 $EDCF$ 是平行四边形．



（第 1 题）



（第 2 题）

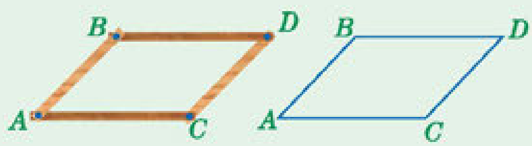
2．已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AE\perp AD$，交 BD 于点 E，$CF\perp BC$，交 BD 于点 F，且 $AE=CF$．求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

观察与思考

小亮和小芳分别按下列方法得到了各自的四边形．

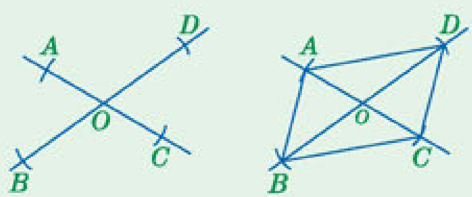
小亮的做法

用 4 根木条搭成如图所示的四边形，其中，$AB=CD$，$AC=BD$．



小芳的做法

画两条直线相交于点 O，截取 $OA=OC$，$OB=OD$；连接 AB，BC，CD，DA，得到四边形$ABCD$．



你认为他们得到的四边形是平行四边形吗？提出猜想，并试着说明理由．

我们发现，两组对边分别相等的四边形是平行四边形，两条对角线互相平分的四边形是平行四边形．

现在，我们先来证明两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

已知：如图 22－2－5，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=CB$.

图 22－2－5

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：如图 22－2－6，连接 BD.

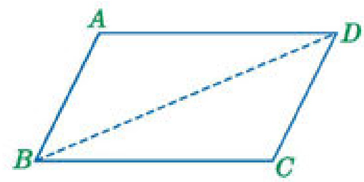


图 22－2－6

在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中，

$\because$ $AB=CD$，$AD=CB$，$BD=DB$，

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

$\therefore$ $\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle CBD$.

$\therefore$ $AB/\!/CD$，$AD/\!/CB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

做一做

证明：两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

平行四边形的判定定理

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 3 已知：如图 22－2－7，▱$ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别为 OA，OC 的中点.

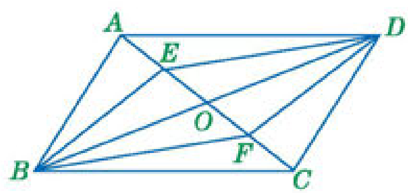


图 22－2－7

求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OA=OC$，$OB=OD$.

$\because$ E，F 分别为 OA，OC 的中点，

$\therefore$ $OE=OF$.

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

大家谈谈

在例 3 的已知条件中，如果 E，F 不再为 OA，OC 的中点，请你谈谈：

(1) 点 E，F 分别在 OA，OC 上，怎样确定点 E 和点 F 的位置，可使得四边形 $EBFD$ 是平行四边形？

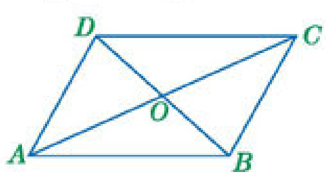
(2) 点 E，F 分别在 OA，OC 的延长线上，怎样确定点 E 和点 F 的位置，可使得四边形 $EBFD$ 是平行四边形？

练 习

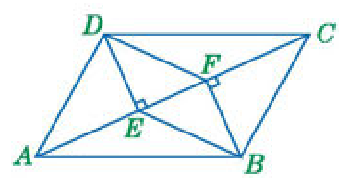
1. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O. 仅从下列条件中任意选取两项作为已知条件，能够判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有哪些？

①$AB /\!/ CD$；②$BC=AD$；③$AB=CD$；

④$BC /\!/ AD$；⑤$OA=OC$；⑥$OB=OD$.



(第 1 题)



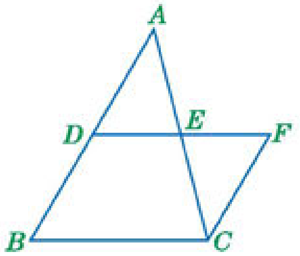
(第 2 题)

2. 已知：如图，AC 为▱$ABCD$ 的对角线，$DE \perp AC$，$BF \perp AC$，垂足分别为 E，F. 求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

习 题

A 组

1. 已知：如图，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB 和边 AC 的中点，延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$，连接 CF. 求证：四边形 $BCFD$ 是平行四边形.

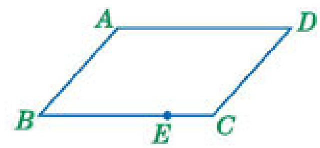


（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，已知三点 A，B，C. 画平行四边形，使其三个顶点分别是点 A，B，C.

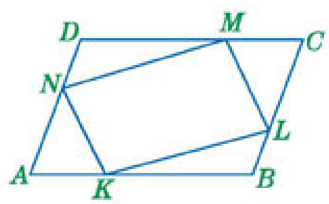
3. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 BC 边上一点. 试在 AD 边上找一点 F，使四边形 $AECF$ 是平行四边形，并说明理由.



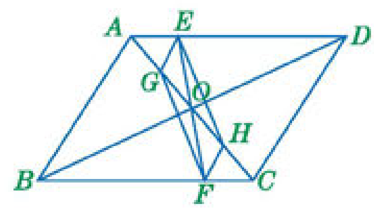
（第 3 题）

B 组

1. 已知：如图，在▱$ABCD$ 的各边 AB，BC，CD，DA 上分别取点 K，L，M，N，使 $AK=CM$，$BL=DN$. 求证：四边形 $KLMN$ 是平行四边形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，G 是 OA 的中点，H 是 OC 的中点. 求证：四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

22.3 三角形的中位线

三角形的中位线是三角形中的重要线段. 这条线段具有怎样的性质呢?

连接三角形两边中点的线段，叫做三角形的**中位线**(median line).

如图 22-3-1，D，E 分别为$\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 的中点，线段 DE 就是$\triangle ABC$ 的一条中位线.

一个三角形有三条中位线.

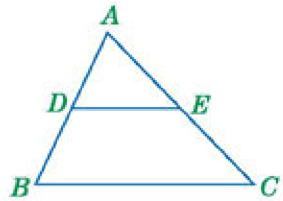


图 22-3-1

一起探究

1. 如图 22-3-2，在$\triangle ABC$ 中，画出它的三条中位线 DE，DF，EF. 沿中位线剪出四个小三角形，将它们叠合在一起，它们能完全重合吗? 你发现三角形的中位线 DE 与 BC 具有怎样的位置关系和数量关系?

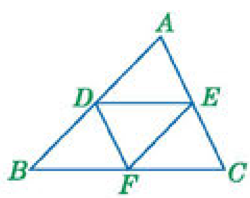


图 22-3-2

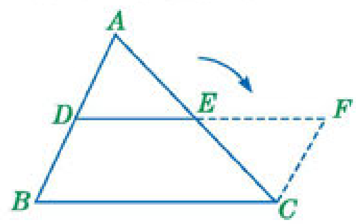


图 22-3-3

2. 如图 22-3-3，DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，将$\triangle ADE$ 以点 E 为中心，顺时针旋转 180°，使点 A 和点 C 重合. 四边形 $DBCF$ 是平行四边形吗? 由此发现的 DE 与 BC 的位置关系和数量关系与上面的发现是否相同?

通过探究，我们发现：三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

现在，我们来证明这个结论.

已知：如图 22-3-4，D，E 分别为$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点.

求证：$DE /\!/ BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

证明：延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$. 连接 CF.

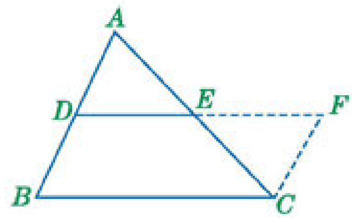


图 22－3－4

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，

$\because$ $AE=CE$，$\angle AED=\angle CEF$，$DE=FE$，

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

$\therefore$ $AD=CF$，$\angle A=\angle ECF$.

$\therefore$ $AD /\!/ CF$，

即 $BD /\!/ CF$.

又 $\because$ $BD=AD=CF$，

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

$\therefore$ $DE /\!/ BC$，且 $DF=BC$.

$\therefore$ $DE=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}BC$.

三角形的中位线定理

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

做一做

如图 22－3－5，在 $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分别为 AB，BC，AC 的中点，$AC=12$，$BC=16$. 求四边形 $DECF$ 的周长.

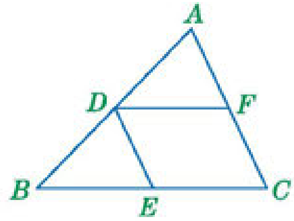


图 22－3－5

例 已知：如图 22－3－6，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，P 为对角线 BD 的中点，M 为 DC 的中点，N 为 AB 的中点.

求证：$\triangle PMN$ 是等腰三角形.

证明：在$\triangle ABD$中，

$\because$ N，P分别为AB，BD的中点，

$\therefore$ $PN=\frac{1}{2}AD$.

同理 $PM=\frac{1}{2}BC$.

又$\because$ $AD=BC$，

$\therefore$ $PN=PM$.

$\therefore$ $\triangle PMN$是等腰三角形.

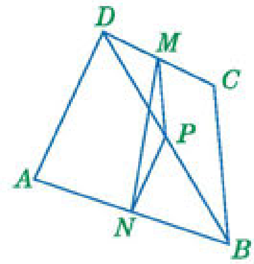
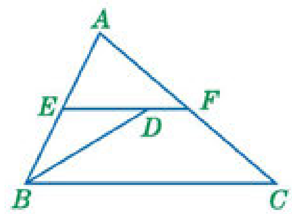


图 22-3-6

练 习

1. 三角形三边的长分别为5，9，12. 求连接各边中点所构成的三角形的周长.

2. 如图，EF为$\triangle ABC$的中位线，BD平分$\angle ABC$，交EF于点D，$AB=4$，$BC=6$. 求DF的长.



（第2题）

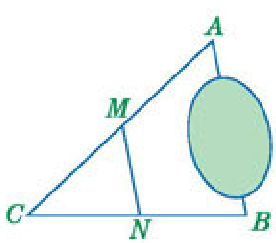
习 题

A 组

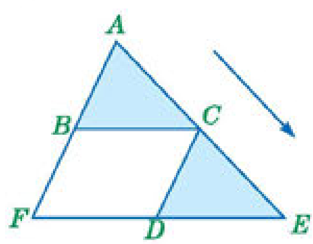
1. 如图，A，B两点被池塘隔开，不能直接测量它们之间的距离. 测量员在岸边选一点C，连接AC，BC，并分别找到AC和BC的中点M，N. 由MN的长度即可知道A，B两点间的距离.

(1) 说出上述测量方法中的道理.

(2) 若测得$MN=20$ m，求A，B两点间的距离.



（第1题）



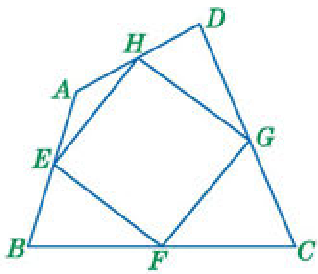
（第2题）

2. 如图，$\triangle CDE$是$\triangle ABC$沿AC方向平移得到的，延长AB，ED相交于

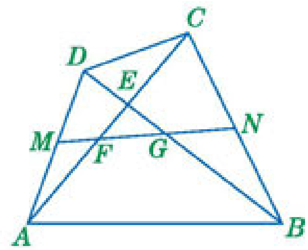
点 F. 请指出图中有哪些相等的线段，有哪些平行的线段.

B 组

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别为 AB，BC，CD，DA 的中点. 请猜想四边形 $EFGH$ 的形状，并证明自己的猜想.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 E，$BD=AC$，M，N 分别为 AD，BC 的中点，MN 分别交 AC，BD 于点 F，G. 求证：$EF=EG$.

22.4 矩　形

矩形是特殊的平行四边形，它是否具有比平行四边形更特殊的性质，又如何来判断一个四边形是不是矩形呢？

我们把有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(rectangle).

表面为矩形的物体广泛存在于实际生活中.

一起探究

1. 如图 22－4－1，剪出一个矩形纸片 $ABCD$，点 O 是这个矩形的中心. 请你用折叠的方法，验证它是轴对称图形. 矩形有几条对称轴，它们都经过矩形的中心吗？

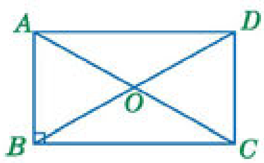


图 22－4－1

2. 四边形具有不稳定性，即当一个四边形的四条边长保持不变时，它的形状却是可以改变的. 如图 22－4－2，使一个平行四边形保持四条边长不变，而将一个内角 α 由钝角先变成直角，再变成锐角.

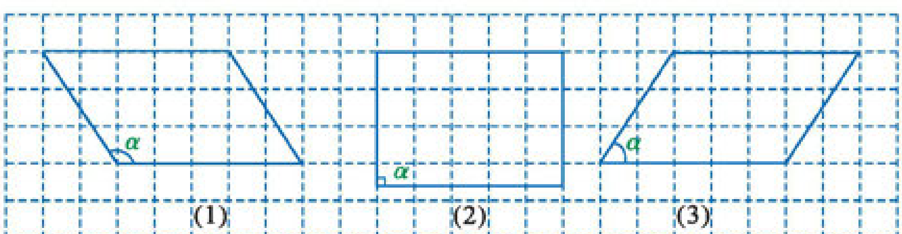


图 22－4－2

在这个过程中：

(1) 这个四边形总是平行四边形吗？

(2) 当 $\alpha=90°$时，其余三个内角各是多少度的角？

(3) 当 $\alpha=90°$时，两条对角线的长有什么关系？

通过探究，可知：

矩形既是中心对称图形，也是轴对称图形.

我们还发现：矩形的四个角都是直角，两条对角线相等.

做一做

1. 求证：矩形的四个角都是直角.
2. 求证：矩形的两条对角线相等.

矩形的性质定理

矩形的四个内角都是直角.
矩形的两条对角线相等.

例 1 如图 22－4－3，矩形 $ABCD$ 两条对角线相交于点 O，$\angle AOD=120^\circ$，$AB=4$ cm. 求矩形对角线的长.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ $AC=BD$，$AO=OC=BO=OD$.

$\because$ $\angle AOD=120^\circ$，

$\therefore$ $\angle AOB=60^\circ$.

$\therefore$ $\triangle AOB$ 是等边三角形.

$\therefore$ $AO=BO=AB=4$ cm，

$AC=AO+OC=AO+OB=8$(cm)，

即矩形 $ABCD$ 对角线的长为 8 cm.

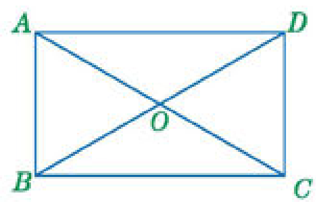
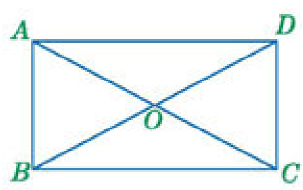


图 22－4－3

练　习

1. 矩形具有而一般平行四边形不一定具有的性质是____________________.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形. 指出图中相等的线段和角.



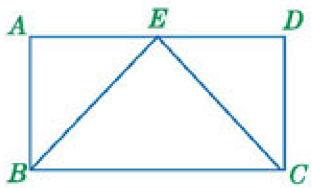
（第 2 题）

习 题

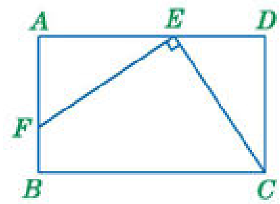
A 组

1. 已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB=4$，$BC=5$. 求对角线 AC 的长.

2. 已知：如图，E 为矩形 $ABCD$ 的边 AD 的中点，连接 BE，CE. 求证：$\triangle EBC$ 是等腰三角形.



（第 2 题）

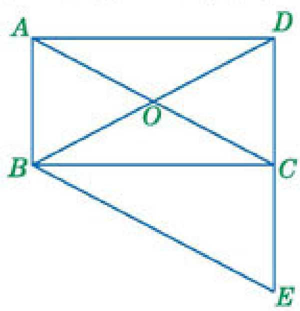


（第 3 题）

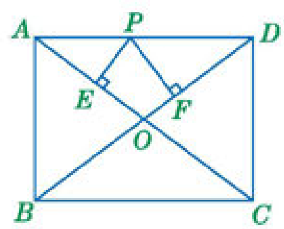
3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，$EF\perp CE$，交 AB 于点 F，$DE=2$，矩形的周长为 16，且 $CE=EF$. 求 AE 的长.

B 组

1. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 B 作 $BE\parallel AC$，交 DC 的延长线于点 E. 求证：$BD=BE$.



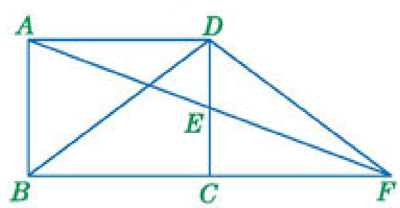
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，P 为 AD 上一点，过点 P 作 $PE\perp AC$，$PF\perp BD$，垂足分别为 E，F. 求 $PE+PF$ 的值.

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，E 为 CD 的中点，连接 AE 并延长，交 BC 的延长线于点 F，连接 DF. 求 DF 的长.



（第 3 题）

下面我们一起探究矩形的判定条件.

一起探究

1. 我们已经知道，矩形的四个角都是直角. 反过来，一个四边形有几个角是直角，就能判断它是矩形呢？观察图 22－4－4，提出你的猜想.

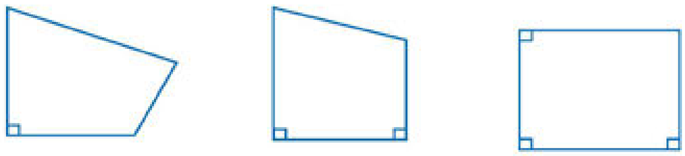


图 22－4－4

2. 矩形的对角线相等. 反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？请你画一个对角线相等的平行四边形，观察所画图形并提出猜想.

通过探究，我们发现：

有三个角是直角的四边形是矩形；

对角线相等的平行四边形是矩形.

试着做做

求证：有三个角是直角的四边形是矩形.

现在，我们来证明对角线相等的平行四边形是矩形.

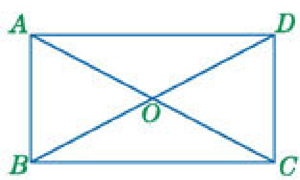


图 22－4－5

已知：如图 22－4－5，在▱$ABCD$ 中，$AC=BD$.

求证：▱$ABCD$ 是矩形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AD\parallel BC$，$AD=BC$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle BAC$ 中，

$\because$ $AD=BC$，$AB=AB$，$AC=BD$，

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle BAC$.

$\therefore$ $\angle DAB=\angle CBA$.

又$\because$ $AD\parallel BC$，

$\therefore\ \angle DAB+\angle CBA=180°$.

$\therefore\ \angle DAB=\angle CBA=90°$.

$\therefore\ \square ABCD$ 是矩形.

矩形的判定定理

有三个角是直角的四边形是矩形.

对角线相等的平行四边形是矩形.

例 2 已知：如图 22-4-6，在矩形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别为 OA，OB，OC，OD 的中点.

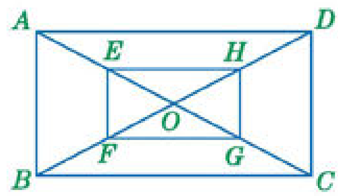


图 22-4-6

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore\ AC=BD$，且 $OA=OC$，$OB=OD$.

$\therefore\ OA=OC=OB=OD$.

又 $\because$ E，F，G，H 分别为 OA，OB，OC，OD 的中点，

$\therefore\ OE=OG=OF=OH$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又 $\because\ EG=OE+OG=OF+OH=HF$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

大家谈谈

在上述问题中，如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？

练 习

1. 指出下列说法是否正确.

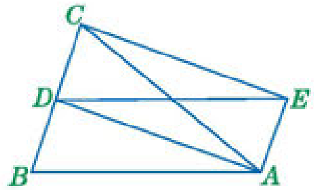
(1) 有一个角为直角的四边形是矩形.

(2) 两条对角线相等的四边形是矩形.

(3) 两条对角线互相垂直的四边形是矩形.

(4) 四个角皆为直角的四边形是矩形.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为BC的中点，四边形$AEDB$为平行四边形. 求证：四边形$AECD$是矩形.



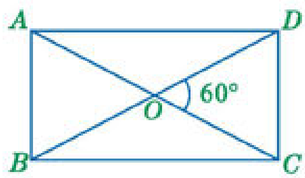
(第 2 题)

习题

A 组

1. 已知矩形的对角线长为 10 cm，求顺次连接矩形四边中点所得的四边形的周长.

2. 如图，矩形$ABCD$的两条对角线AC，BD的夹角为$60°$，$AC+AB=12$. 求AC和AB的长.

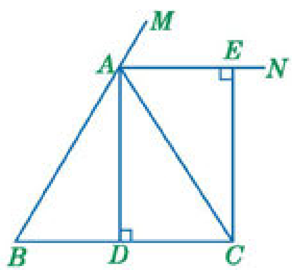


(第 2 题)

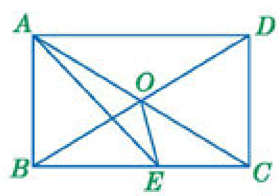
3. 小亮想检验一块木板是不是矩形. 现仅有一根足够长的细绳，你能想办法帮他进行检验吗？请说明理由.

B 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足为D，AN是$\triangle ABC$外角$\angle CAM$的平分线，$CE\perp AN$，垂足为E. 求证：四边形$ADCE$是矩形.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在矩形$ABCD$中，AC，BD相交于点O，AE平分$\angle BAD$，交BC于点E，$\angle CAE=15°$. 求$\angle BOE$的度数.

22.5 菱形

菱形也是一种特殊的平行四边形. 它有怎样的性质，又如何进行识别呢？

观察与思考

从下列图片中抽象出如图 22－5－1 的图形. 观察这些图形，它们有什么共同的特征呢？

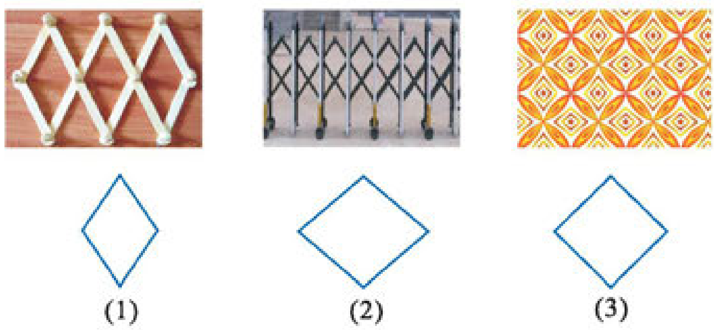


图 22－5－1

通过观察和验证，图 22－5－1(1)，(2)，(3)皆为平行四边形，而且有一组邻边相等. 我们把有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**(rhombus).

菱形作为特殊的平行四边形，除了具有平行四边形的所有性质外，还有哪些特殊的性质呢？

一起探究

1. 如图 22－5－2，将一个菱形纸片 $ABCD$ 按图示方法折叠后，再展开：

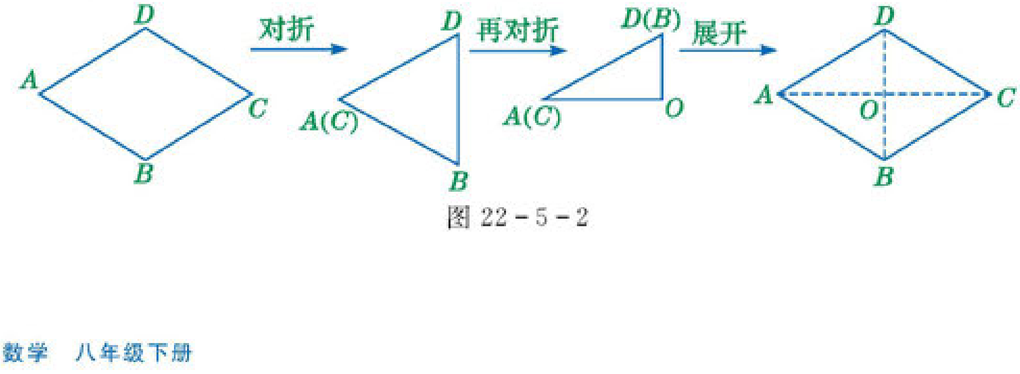


图 22－5－2

(1) 说明两条折痕的交点 O 恰为菱形的中心.

(2) 菱形 $ABCD$ 是轴对称图形吗？如果它是轴对称图形，那么它有几条对称轴，都是哪些直线？

2. 如图 22－5－3，四边形 $ABCD$ 是菱形.

(1) 菱形 $ABCD$ 的四条边有怎样的数量关系？

(2) 菱形 $ABCD$ 的两条对角线有怎样的位置关系？

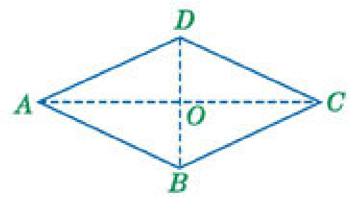


图 22－5－3

通过上述探究活动，我们发现：

菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形.

同时，我们还发现：菱形的四条边相等；菱形的两条对角线互相垂直，且每条对角线平分一组对角.

现在，我们来证明这个结论.

已知：如图 22－5－4，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=AD$.

求证：(1) $AB=BC=CD=DA$.

(2) $AC \perp DB$.

(3) $\angle ADB=\angle CDB$，$\angle ABD=\angle CBD$，
$\angle DAC=\angle BAC$，$\angle DCA=\angle BCA$.

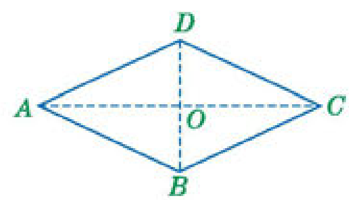


图 22－5－4

证明：(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=CD$，$AD=CB$.

又∵ $AB=AD$，

∴ $AB=BC=CD=DA$.

(2) 在$\triangle ADO$ 和$\triangle CDO$ 中，

∵ $DA=DC$，$DO=DO$，$AO=CO$，

∴ $\triangle ADO \cong \triangle CDO$.

∴ $\angle AOD=\angle COD$.

∵ $\angle AOD+\angle COD=180^\circ$，

∴ $\angle AOD=\angle COD=90^\circ$.

∴ $AC \perp DB$.

(3) $\because$ $\triangle ADO \cong \triangle CDO$,

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CDB$, $\angle DAC=\angle DCA$.

$\because$ $AB /\!/ CD$, $AD /\!/ CB$,

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CBD$, $\angle CDB=\angle ABD$,

$\angle DAC=\angle BCA$, $\angle DCA=\angle BAC$.

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CDB$, $\angle ABD=\angle CBD$,

$\angle DAC=\angle BAC$, $\angle DCA=\angle BCA$.

菱形的性质定理

菱形的四条边都相等，两条对角线互相垂直，且每条对角线平分一组对角.

例 1 如图 22－5－5，菱形 $ABCD$ 的周长为16 cm，$\angle ABC=120°$. 求对角线 BD 和 AC 的长.

解：$\because$ $AB+BC+CD+AD=16$ cm，

$\therefore$ $AB=BC=CD=AD=\frac{1}{4}\times 16=4$(cm).

$\because$ BD 平分$\angle ABC$，$\angle ABC=120°$，

$\therefore$ $\angle ABD=60°$.

$\therefore$ $\triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore$ $BD=AB=4$ cm.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，$OB=2$ cm，

$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$(cm)，

$AC=2AO=4\sqrt{3}$(cm).

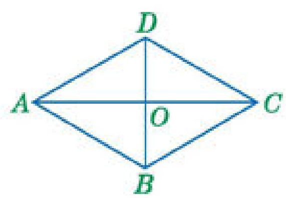
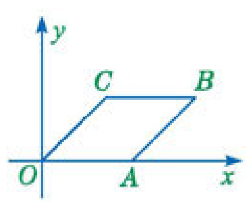


图 22－5－5

练　习

1. 已知菱形的边长和一条对角线的长均为 2 cm. 求这个菱形的面积.

2. 菱形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，$\angle AOC=45°$，$OC=\sqrt{2}$. 求点 B 的坐标.

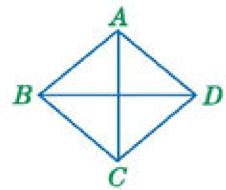


（第 2 题）

习题

A 组

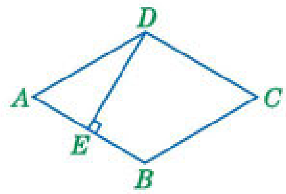
1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，AC，BD 为对角线，$\angle BAC=50^\circ$．求菱形 $ABCD$ 各内角的度数．



（第 1 题）

2. 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=8$，$BD=6$．求菱形的周长．

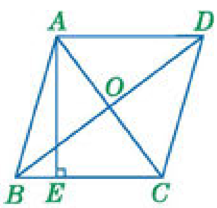
3. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 2 cm，E 为 AB 的中点，且 $DE\perp AB$．求菱形 $ABCD$ 的面积．



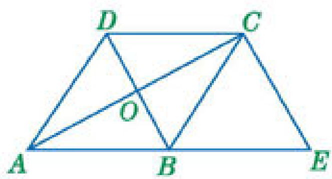
（第 3 题）

B 组

1. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AC=6$ cm，$BD=8$ cm，$AE\perp BC$，垂足为 E．求 AE 的长．



（第 1 题）



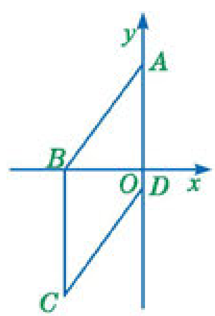
（第 2 题）

2. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，延长 AB 至点 E，使 $BE=BC$，连接 CE．

   (1) 求证：$BD=EC$．

   (2) 求证：$S_{菱形ABCD}=S_{\triangle AEC}$．

3. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，A，B 两点的坐标分别为 $(0,4)$，$(-3,0)$．求点 D，C 的坐标．



（第 3 题）

我们已经知道，菱形的四条边都相等，两条对角线互相垂直．反过来，

如果一个四边形的四条边都相等，那么能不能判断这个四边形是菱形呢？如果一个平行四边形的对角线互相垂直，那么能不能判断这个平行四边形是菱形呢？

一起探究

如图 22－5－6，画两条等长的线段 AB，AD，分别以点 B，D 为圆心，AB 为半径画弧，两弧相交于点 C. 连接 BC，CD，得到四边形 $ABCD$.

四边形 $ABCD$ 是菱形吗？

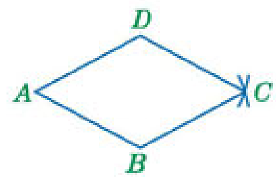


图 22－5－6

事实上，我们有：四条边相等的四边形是菱形.

现在，我们来证明这个结论.

已知：如图 22－5－7，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$.

求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

证明：$\because$ $AB=CD$，且 $BC=AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又$\because$ $AB=AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

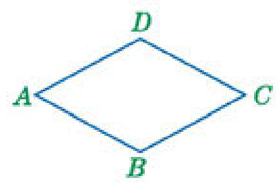


图 22－5－7

菱形的判定定理

四条边相等的四边形是菱形.

大家谈谈

如图 22－5－8，▱$ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 互相垂直，O 是这两条对角线的交点.

（1）你能说明图中的 Rt$\triangle ABO$，Rt$\triangle CBO$，Rt$\triangle CDO$，Rt$\triangle ADO$ 都是全等的吗？

（2）平行四边形 $ABCD$ 的四条边都相等吗？

（3）请证明你的猜想.

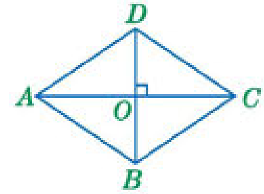


图 22－5－8

菱形的判定定理

两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

另外，“每条对角线平分一组对角的四边形是菱形”也是正确的，只是用起来不太方便，所以不把它作为定理. 同学们可以自己试着证明.

例 2 已知：如图 22－5－9，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE \parallel AC$，交 AB 于点 E，$DF \parallel AB$，交 AC 于点 F.

求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

证明：∵ $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，

∴ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

∴ $\angle 1 = \angle 3$.

又∵ $\angle 1 = \angle 2$，

∴ $\angle 2 = \angle 3$.

∴ $AE = DE$.

∴ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

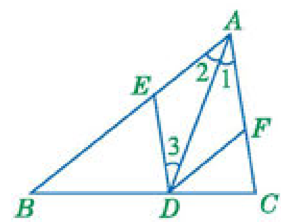
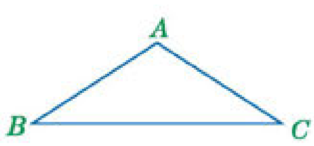


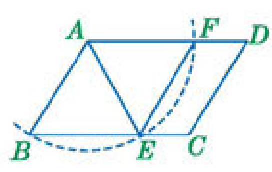
图 22－5－9

练 习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，画出点 A 关于 BC 的对称点 A'. 请用两种不同的方法证明四边形 $ABA'C$ 是菱形.



（第 1 题）



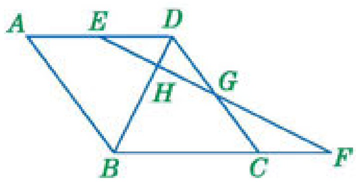
（第 2 题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle D = 60^\circ$，以顶点 A 为圆心，AB 为半径画弧，交 BC 于点 E，交 AD 于点 F. 请你指出图中的等腰三角形、平行四边形和菱形.

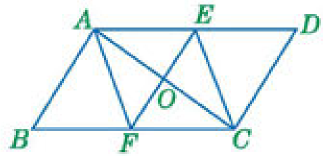
习 题

A 组

1. 如图，E 是菱形 $ABCD$ 的边 AD 的中点，$EF \perp BD$ 于点 H，交 BC 延长线于点 F，交 DC 于点 G. 求证：DC 与 EF 互相平分.



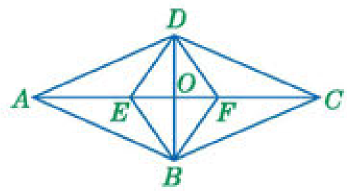
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，O 为对角线 AC 的中点，过点 O 作 AC 的垂线与边 AD，BC 分别交于点 E，F. 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.

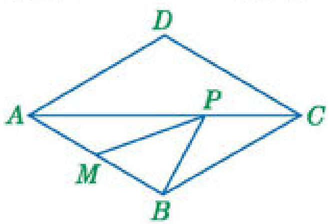
3. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，两条对角线交于点 O，DE 为 $\angle ADB$ 的平分线，交 AC 于点 E，DF 为 $\angle CDB$ 的平分线，交 AC 于点 F，连接 BE，BF. 求证：四边形 $DEBF$ 是菱形.



（第 3 题）

B 组

1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，M 为 AB 的中点，P 为对角线 AC 上的一个动点，$PM+PB$ 的最小值是 3. 求 AB 的长.



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，绿丝带下部重叠部分是什么图形？请说明理由.

22.6 正方形

正方形也是我们非常熟悉的一种图形. 本节将探究正方形的性质、判定方法及其应用.

有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**(square).

大家谈谈

1. 正方形是不是轴对称图形？如果是轴对称图形，那么它有几条对称轴，都是哪些直线？

2. 结合图 22-6-1，谈谈正方形与平行四边形、矩形和菱形的关系.

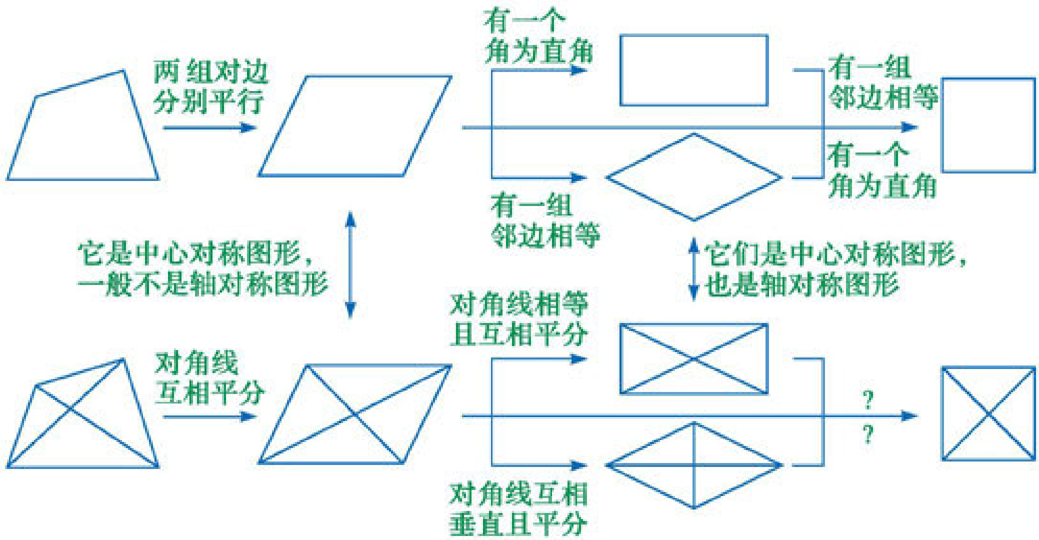


图 22-6-1

3. 正方形都具有哪些性质？

正方形是中心对称图形，它的中心是对称中心. 正方形还是轴对称图形，它有四条对称轴：两条对角线和每组对边中点连线所在直线.

正方形具有平行四边形、矩形和菱形的一切性质.

判定一个四边形是正方形，只要判定这个四边形既是矩形又是菱形即可.

例 1 已知：如图 22－6－2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在对角线 AC 上.

求证：$BE=DE$.

证明：在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AEB$ 中，

$\because$ $AD=AB$，$AE=AE$，

$\angle DAC=\angle BAC=45^\circ$，

$\therefore$ $\triangle AED \cong \triangle AEB$，

$\therefore$ $BE=DE$.

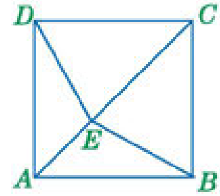


图 22－6－2

例 2 已知：如图 22－6－3，在正方形 $ABCD$ 中，$\triangle BCE$ 是等边三角形.

求证：$\angle EAD=\angle EDA=15^\circ$.

证明：$\because$ $\angle EBC=\angle ECB=\angle CEB=60^\circ$，

$\therefore$ $\triangle ABE$，$\triangle DCE$ 是等腰三角形，

$\angle ABE=\angle DCE=30^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAE=\angle BEA=\angle CDE=\angle CED=75^\circ$.

$\therefore$ $\angle EAD=\angle EDA=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

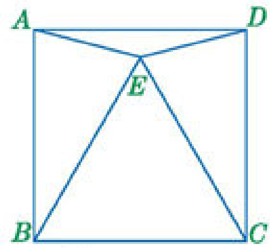


图 22－6－3

做一做

已知：如图 22－6－4，点 E，F，M，N 分别在正方形 $ABCD$ 四条边上，且 $AE=BF=CM=DN$. 求证：四边形 $EFMN$ 是正方形.

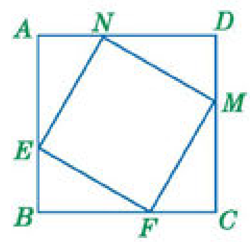
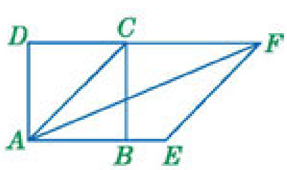


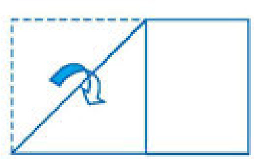
图 22－6－4

练　习

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 为菱形 $AEFC$ 的一边. 求 $\angle FAB$ 的度数.



（第 1 题）

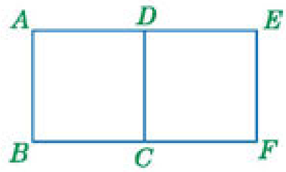

（第 2 题）

2. 如图，把一张矩形纸片折叠，把重叠部分剪下来，展开后可以得到一个怎样的四边形？为什么？

习 题

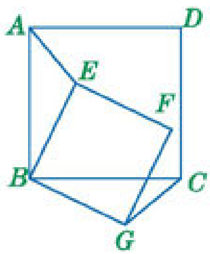
A 组

1. 如图，如果正方形 $ABCD$ 旋转后能与正方形 $CFED$ 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有多少个？请指出它们的位置.

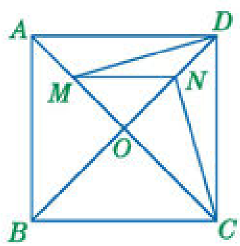


（第 1 题）

2. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 和 $BGFE$ 都是正方形. 求证：$AE=CG$.



（第 2 题）

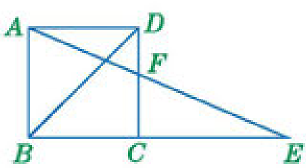


（第 3 题）

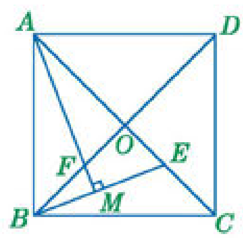
3. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，点 M，N 分别在 OA，OD 上，且 $MN /\!/ AD$. 请探究线段 DM 和 CN 之间的数量关系，写出结论并给出证明.

B 组

1. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 的延长线上一点，且 $CE=BD$，AE 交 DC 于点 F. 求$\angle AFC$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，E 为 OC 上一点，$AM\perp BE$，垂足为 M，AM 与 DB 相交于点 F. 求证：$OE=OF$.

22.7 多边形的内角和与外角和

本节我们探究多边形的内角和、外角和，以及它们的简单应用.

如图 22－7－1，观察这些图形，它们都是平面上由线段首尾顺次相接所组成的.

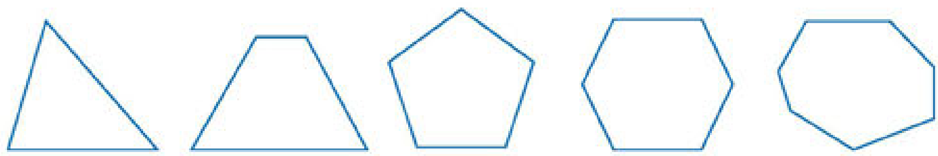


图 22－7－1

平面上，由不在同一条直线上的线段首尾顺次相接组成的图形，叫做**多边形**(polygon).

连接多边形不相邻两个顶点的线段叫做**多边形的对角线**. 多边形有几条边就叫做几边形. 三边形就是我们通常所说的三角形.

图 22－7－2 所示的五边形，我们把它记作五边形 $ABCDE$. 用类似的方法可以记其他多边形. 多边形的边、顶点、内角、外角的意义和三角形相同.

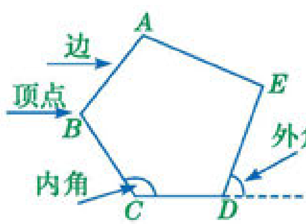


图 22－7－2

一个多边形如果总在它的任何一条边所在直线的同一侧，这个多边形就叫做凸多边形. 我们只研究凸多边形.

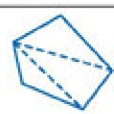
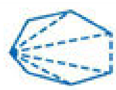
下面我们探究多边形的内角和及外角和.

一起探究

1. 已知三角形的内角和为 180°. 你能猜想四边形、五边形、六边形等多边形的内角和分别是多少度吗？

2. 以四边形为例，如何将求四边形内角和的问题转化，利用三角形内角和定理求多边形的内角和？

3. 将多边形分割成不重叠的三角形，求四、五、六边形的内角和，猜想 n 边形的内角和，并将结果填入下表.

多边形	图形(分割成三角形)	分割出的三角形的个数	多边形的内角和
四边形			
五边形			
六边形			
n 边形			

我们发现，n 边形的内角和等于$(n-2)\times180^\circ$.

现在，我们来证明这个结论.

已知：如图 22-7-3，n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$.

求证：n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的内角和等于$(n-2)\times180^\circ$.

证明：连接 A_1A_i $(i=3, 4, \cdots, n-1)$，得到 $\triangle A_1A_{i-1}A_i$$(i=3, 4, \cdots, n-1, n)$，共有$(n-2)$个三角形.

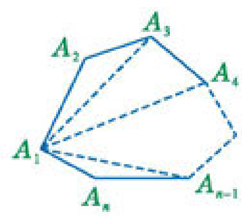


图 22-7-3

$\because$ $\triangle A_1A_{i-1}A_i$$(i=3, 4, \cdots, n-1, n)$的内角和等于 180°，

$\therefore$ n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的内角和 $=\triangle A_1A_2A_3$ 的内角和 $+\triangle A_1A_3A_4$ 的内角和 $+\cdots+\triangle A_1A_{n-1}A_n$ 的内角和 $=(n-2)\times180^\circ$.

多边形的内角和定理

n 边形的内角和等于$(n-2)\times180^\circ$ $(n\geqslant3)$.

在多边形的每个顶点处，取这个多边形的一个外角，这些外角的和叫做这个多边形的外角和.

做一做

利用 n 边形的内角和定理，求 n 边形的外角和.

多边形的外角和定理

多边形的外角和等于 360°.

例 1 已知一个多边形，它的内角和与外角和相等，这个多边形是几边形？

解：设多边形的边数为 n，那么它的内角和等于 $(n-2)\times180°$，外角和等于 360°. 由题意，得

$$(n-2)\times180°=360°.$$

解这个方程，得

$$n=4.$$

所以，这个多边形是四边形.

例 2 如图 22-7-4，小亮从点 O 处出发，前进5 m后向右转 20°，再前进5 m后又向右转 20°，这样走 n 次后恰好回到点 O 处.

(1) 小亮走出的这个 n 边形的每个内角是多少度，内角和是多少度？

(2) 小亮走出的这个 n 边形的周长是多少米？

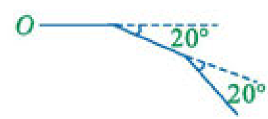


图 22-7-4

解：(1) 这个 n 边形的每个内角为

$$180°-20°=160°.$$

因为多边形外角和等于 360°，所以

$$n\times20°=360°.$$

解得 $n=18$.

所以，这个 n 边形的内角和 $=(18-2)\times180°=2\ 880°$.

(2) $5\times18=90$(m)，所以，小亮走出的这个 n 边形的周长为 90 m.

练习

1. 在 540°，720°，960°中，哪个角度不可能是多边形的内角和？

2. 在四边形 $ABCD$ 中，如果$\angle A+\angle C+\angle D=280°$，那么$\angle B$ 的度数是多少？

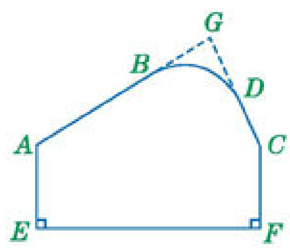
3. 一个多边形的内角和等于 1 080°，这个多边形的边数是多少？

4. 内角和等于外角和的 2 倍的多边形是几边形？

习题

A 组

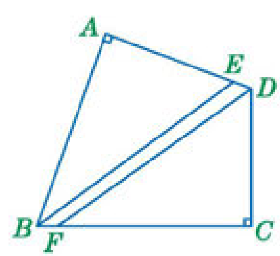
1. 一个五边形有三个内角是直角，另两个内角都等于 $n°$. 求 n 的值.
2. 一个 n 边形的外角和与内角和的度数之比为 2∶7. 求 n 的值.
3. 过某个多边形一个顶点的对角线有 10 条. 求这个多边形的内角和.
4. 在四边形 $ABCD$ 中，已知$\angle A∶\angle B∶\angle C∶\angle D=$1∶2∶3∶4. 求$\angle D$ 的度数.
5. 如图所示的模板，规定：AB，CD 的延长线应相交成 80°的角. 因交点不在板上，不便测量，工人师傅测得$\angle BAE=122°$，$\angle DCF=155°$. 此时 AB，CD 的延长线相交所成的角是否符合规定？为什么？



（第 5 题）

B 组

1. 四边形的四个内角可以都是锐角吗，可以都是钝角吗？为什么？
2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，BE 平分$\angle ABC$，DF 平分$\angle ADC$. BE 与 DF 有怎样的位置关系？为什么？



（第 2 题）

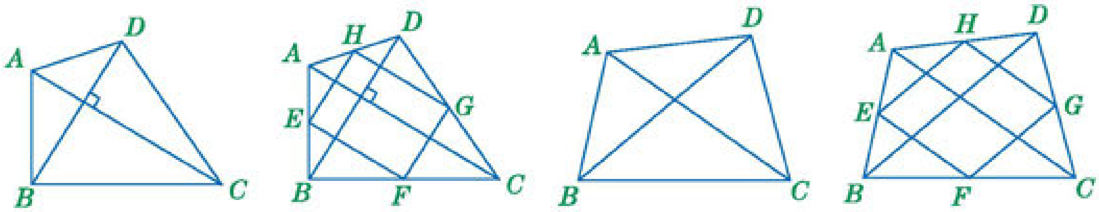
数学活动

在四边形上构造特殊四边形

我们曾经做过一个练习：对于任意一个四边形，连接它的四边的中点所构成的四边形是一个平行四边形．由此，我们自然想到：在什么条件下，连接四边形各边中点所构成的四边形是矩形、菱形或正方形呢？

活动一：

1．任意画两条互相垂直且相交的线段 AC，BD，并顺次连接四个端点得到四边形 $ABCD$，如图(1)．连接四边形 $ABCD$ 的各边中点得到四边形 $EFGH$，如图(2)．观察四边形 $EFGH$，你能发现它是什么形状的四边形吗？提出猜想，并说明你的猜想是否正确．



(1)　(2)　(3)　(4)

2．任意画两条相等且相交的线段 AC，BD，并顺次连接四个端点得到四边形 $ABCD$，如图(3)．连接四边形 $ABCD$ 的各边中点得到四边形 $EFGH$，如图(4)．观察四边形 $EFGH$，你能发现它是什么形状的四边形吗？提出猜想，并说明你的猜想是否正确．

3．根据以上经验，猜想在一个什么样的四边形中，顺次连接其各边的中点，可以得到一个正方形．试试看．

活动二：

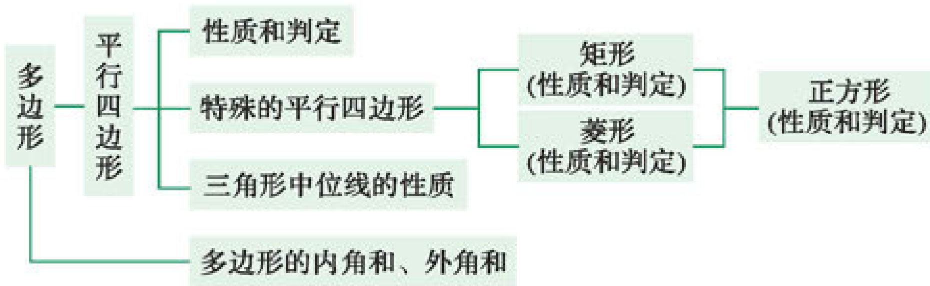
1．顺次连接矩形各边中点所得到的四边形是什么四边形？提出猜想，并说明你的猜想是否正确．

2．顺次连接菱形各边中点所得到的四边形是什么四边形？提出猜想，并说明你的猜想是否正确．

3．顺次连接正方形各边中点所得到的四边形是什么四边形呢？

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们学习了四边形，特别是其中的平行四边形.

1. 在现实生活中，表面为四边形的物体被广泛地应用着，因此，研究四边形，特别是平行四边形，是十分重要的.

(1) 请举出应用四边形的几个实例.

(2) 请举出两个四边形“不稳定性”的应用实例.

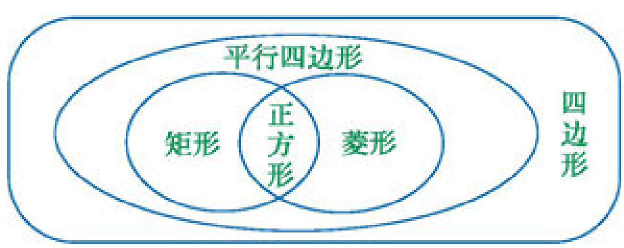
2. 观察和实验是发现几何图形性质的重要手段与方法.

对于平行四边形，通过观察和实验(绕中心旋转 180°)，我们发现了平行四边形具有中心对称性. 由此，使我们对平行四边形的性质形成了一些直观的猜想，并用推理的方法给予了证明.

同样，对于矩形和菱形，也是通过这样的途径得到正确认知的. 因此，我们要特别重视这样的数学活动经验的积累.

3. 特殊四边形之间的关系.

四边形、平行四边形、矩形、菱形和正方形，它们之间具有的一般与特殊的关系如下图所示. 了解这种关系，分析它们的共性和特性，有利于我们更好地理解有关概念.



4. 理解和掌握平行四边形中每对成中心对称的三角形，矩形和菱形中

每对成中心对称的三角形和每对成轴对称的三角形，是掌握并运用这些图形性质的基础.

(1) 请画出平行四边形的两条对角线，指出图中有哪几对三角形是成中心对称的. 由此推证出了平行四边形的哪些性质？

(2) 请画出矩形的两条对角线和它的对称轴，指出图中有哪几对三角形是成中心对称的，哪几对三角形是成轴对称的. 由此推证出了矩形的哪些性质？

(3) 请画出菱形的两条对角线，指出图中有哪几对三角形是成中心对称的，哪几对三角形是成轴对称的. 由此推证出了菱形的哪些性质？

(4) 请画出正方形的两条对角线及它的对称轴，指出图中有哪几对三角形是成中心对称的，哪几对三角形是成轴对称的. 由此推证出了正方形的哪些性质？

5. 特殊四边形的判定.

(1) 判定方法的寻找，往往是从性质倒过来思考的. 请你总结平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理与性质定理的关系.

(2) 矩形和菱形的判定可分成两类：一类以四边形为起点，另一类以平行四边形为起点. 请你总结这两类判别方法之间的区别和联系.

三、注意事项

平行四边形、矩形、菱形和正方形的定义也是对其进行判定的依据.

复 习 题

A 组

1. 填空题：

(1) 如果平行四边形 $ABCD$ 的周长为 60 cm，$AB=12$ cm，那么它的对边 $CD=$________cm，它的邻边 $BC=$________cm.

(2) 对于菱形 $ABCD$，当满足条件________时，它可成为正方形.

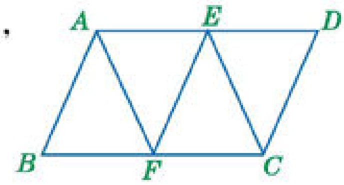
(3) 若一个矩形的长和宽分别为 25 cm 和 15 cm，它的一个内角平分线把长边分为两部分，则这两部分的长度分别为________和________.

(4) 若一个多边形的内角和等于 1 800°，则它是________边形.

(5) 三角形的外角和是它内角和的________倍.

2. 在▱$ABCD$中，已知两邻角的比$\angle A:\angle B=5:4$，求$\angle C$，$\angle D$的度数.

3. 如图，在▱$ABCD$中，E，F分别是AD，BC的中点. 连接EF，AF，EC. 图中共有多少个平行四边形？请你把它们列举出来.



（第 3 题）

4. 用两个三边互不相等的全等三角形可以拼接成几个不同的平行四边形？

5. 分别过$\triangle ABC$的三个顶点作它对边的平行线，围成$\triangle DEF$.

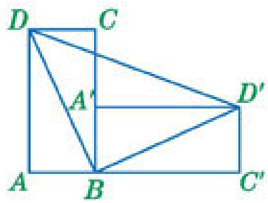
(1) 若$\triangle ABC$的周长为a，则$\triangle DEF$的周长是多少？

(2) $\triangle DEF$中有几个平行四边形？

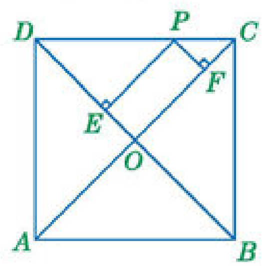
6. 证明：顺次连结矩形各边中点得到的四边形是菱形.

7. 如果一个菱形绕它的两条对角线交点旋转$90°$，所得图形与原来图形重合，那么这个菱形是正方形吗？证明你的猜想.

8. 如图，如果将矩形$ABCD$绕点B按顺时针方向旋转$90°$到矩形$A'BC'D'$的位置，那么图中$\triangle DBD'$是什么三角形？证明你的猜想.



（第 8 题）



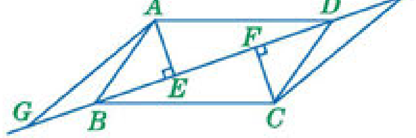
（第 9 题）

9. 如图，点P在正方形$ABCD$的边CD上，且$PE\perp DB$，$PF\perp CA$，垂足分别为E，F. 试猜想$PE+PF$与正方形的边长有怎样的数量关系，并证明你的猜想.

10. 如图，四边形$ABCD$为平行四边形，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为E，F，点G在DB的延长线上，点H在BD的延长线上，且$BG=DH$.

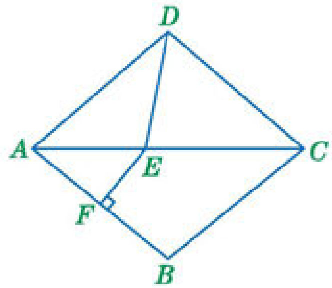
(1) 请你写出图中所有的全等三角形.

(2) 请你选出一对全等三角形，并给出证明($\triangle ABD\cong\triangle CDB$除外).



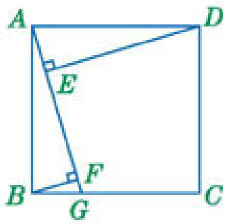
（第 10 题）

11. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=80°$，AB 的垂直平分线交对角线 AC 于点 E，交 AB 于点 F，F 为垂足，连接 DE. 求 $\angle CDE$ 的度数.

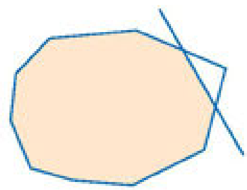


（第 11 题）

12. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，G 是边 BC 上的一点，$DE\perp AG$，$BF\perp AG$，垂足分别为 E，F. 求证：$AF=BF+EF$.



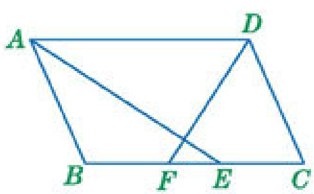
（第 12 题）


（第 13 题）

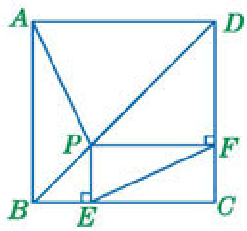
13. 如图，一多边形木板锯掉不过顶点的一个角后，得到的新多边形的内角和是 2 160°. 原来的多边形木板的边数是多少？

B 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=8$，$\angle BAD$，$\angle ADC$ 的平分线分别交 BC 于点 E，F. 求 EF 的长.



（第 1 题）



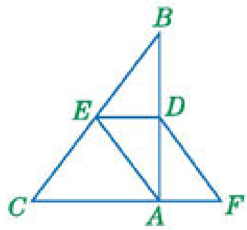
（第 2 题）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 在对角线 BD 上，$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为 E，F. 猜想 EF 与 AP 的数量关系，并证明你的猜想.

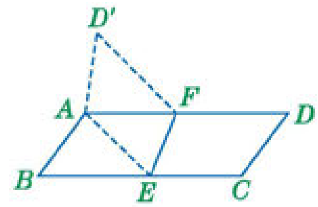
3. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在 CA 的延长线上，$\angle FDA=\angle B$.

(1) AF 与 DE 的位置和数量各有怎样的关系？证明你的猜想.

(2) 若 $AC=6$，$BC=10$，求四边形 $AFDE$ 的周长.



（第 3 题）



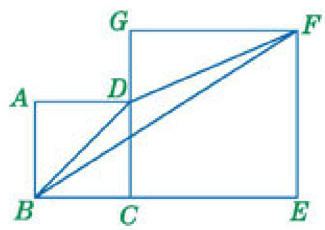
（第 4 题）

4. 如图，将平行四边形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 C 与点 A 重合，点 D 落到点 D' 处. 打开后如图所示.

(1) 求证：$\triangle ABE \cong \triangle AD'F$.

(2) 连接 CF. 判定四边形 $AECF$ 是什么四边形，并证明你的结论.

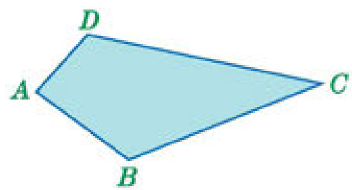
5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，正方形 $CEFG$ 的边长为 b. 求$\triangle BFD$ 的面积.



（第 5 题）

6. 小刚在计算一个多边形的内角和时，求得结果为 900°. 老师指出他的计算结果不对，小刚重新检查，发现多数了一条边. 你知道这个多边形是几边形吗？为什么？

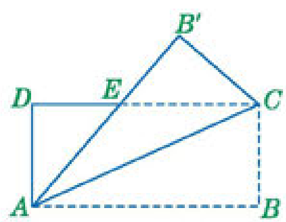
7. 如图，一块四边形草坪 $ABCD$ 的四个顶点处各有一棵大树. 现想使草坪面积扩大一倍，又想保持大树在草坪绿化带的边缘，并要求扩大后的草坪成平行四边形形状. 请问：能否实现这一设想？若能，请设计并画出图形；若不能，请说明理由.



（第 7 题）

C 组

1. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，使点 B 落在平面上的点 B' 处，AB' 交 CD 于点 E，$\angle EAC=25°$. 求$\angle B'CE$ 的度数.



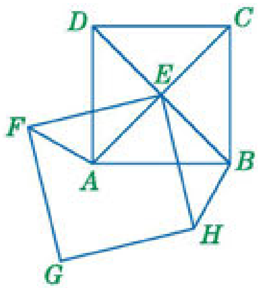
（第 1 题）

2. 如图，有两个边长为 a 的正方形 $ABCD$ 与 $EFGH$，正方形 $EFGH$ 的顶点 E 为正方形 $ABCD$ 两条对角

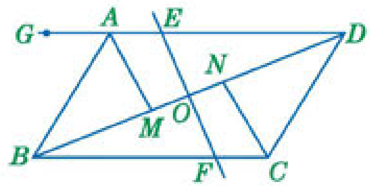
线的交点.

(1) 试判断 AF 与 BH 的大小关系. 当正方形 $EFGH$ 绕点 E 旋转变化时, 这种关系是否保持不变?

(2) 如果正方形 $EFGH$ 的边长为 $b(b>a)$, (1)中的结论是否仍然成立? 请作出判断并给予证明.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 在▱$ABCD$ 中, O 是对角线 BD 的中点, 过点 O 的一条直线和 AD, BC 分别相交于点 E, F, AM 为$\angle BAD$ 的平分线, 交 BD 于点 M, CN 为$\angle DCB$ 的平分线, 交 BD 于点 N.

(1) 求证: $OE=OF$.

(2) 若连接 AN, CM, 请判断四边形 $AMCN$ 的形状; 若连接 EM, EN, FM, FN, 请判断四边形 $EMFN$ 的形状; 若连接 AF, CE, 请判断四边形 $AFCE$ 的形状. 以四边形 $EMFN$ 为例给出证明.

(3) G 为边 DA 延长线上一点, 要使四边形 $DGCH$ 为平行四边形, 请指出点 H 的位置.

(4) 请在▱$ABCD$ 的基础上添加适当的条件, 构造新的平行四边形, 进而谈谈你的感想.

综合与实践一

近似计算湖面的面积

一、问题

湖泊是重要的水资源．人们常用蓄水量和湖泊水面面积来描述一个湖泊的大小．为了计算湖泊水面面积，可以将其轮廓按一定的大小比例抽象成平面图形，对这个图形进行计算．湖面轮廓构成的平面图形大多是不规则的，这就需要采用近似计算的方法计算其面积．

位于西藏的中国第二大咸水湖——纳木错，湖面面积约为 1 940 平方千米，蓄水量约为 768 亿立方米．请按下面的方案近似计算湖面的面积，并与已知结果进行比较，看你计算的结果是否基本准确．

二、解决方案

1．将湖泊水面轮廓近似看成封闭曲线围成的平面图形(图(1))．

2．制作一张透明的网格纸，每个小正方形的边长为 0.5 cm(网格越小，计算的结果越精确)．

3．将网格纸叠放在图形上．利用数方格或数格点的方法求得图形面积的一个近似值．

(1)

为了提高计算结果的精度，可将网格纸任意移动位置后重复计算几次，将这几个值的平均数作为图形面积的近似值．

4．按给定的比例尺进行换算，求湖面的实际面积(比例尺为 1∶1 000 000)．

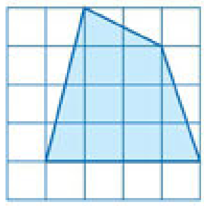
三、可参考的知识与方法

1. 计算顶点在格点上的多边形面积(图(2)).

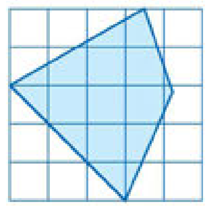
(1) 分割图形：将多边形分割为长方形和三角形，分别计算面积.

(2) 数格点：用 a 表示多边形内部的格点数，b 表示多边形边界上的格点数，则多边形的面积的精确值为

$$S=a+\frac{1}{2}b-1\text{（皮克公式）}.$$



(2)



(3)

2. 近似计算顶点不全在格点上多边形的面积(图(3)).

数方格：用 a 表示多边形内部完整的方格数，b 表示不完整的方格数，则多边形面积的近似值为

$$S\approx a+\frac{1}{2}b.$$

此时数格点的方法也只能得到面积的近似值.

3. 按比例尺换算：$1\ \text{km}^2=10^6\ \text{m}^2=10^6\times10^4\ \text{cm}^2=10^{10}\ \text{cm}^2$.

对任意的由封闭曲线围成的平面图形，也可以采用“数方格”或“数格点”的方法近似计算其面积.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

综合与实践二

数据变化趋势的刻画

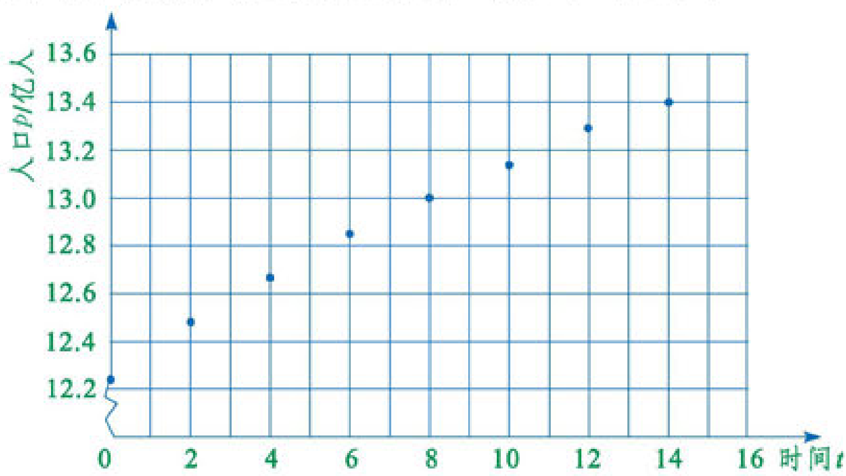
在现实生活中，有许多数据是与时间有关的，这些数据往往随时间的变化而变化，并随时间呈现出一定的变化趋势．如居民收入随时间的变化趋势，人口随时间的变化趋势等．另外还有一些问题，数据之间具有一种不完全确定的直线变化趋势，如家庭消费与收入的关系，成年人的身高与体重的关系，手掌的长度与身高的关系等．

如何刻画这些变化趋势及关系呢？我们以下面的一个实例展开讨论．

自1996年末至2010年末，我国人口(不包括港、澳、台)如下表所示：

年末	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010
人口/亿人	12.24	12.48	12.67	12.85	13.00	13.14	13.29	13.41

人口用 p 表示，时间用 t 表示．若将1996年末对应的时间 t 取0，则1998年末对应的 t 的值为2，2000年末对应 t 的值为4，依此类推，2010年末对应的 t 的值为14．为了直观反映人口变化趋势，在坐标系中，以 t 为横坐标，p 为纵坐标描出与各对数值所对应的点，如下图所示．



一、问题

1. 对于人口的变化趋势问题，解决下列问题．

(1) 观察图形，我国人口的增长呈现什么样的趋势？

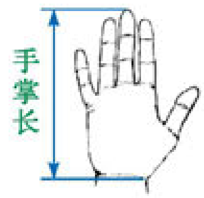
(2) 如果用直线表示人口的增长趋势，如何确定这条直线？

(3) 确定你画出的这条直线的一次函数表达式．

(4) 利用函数表达式预测2014年末的人口．

(5) 用哪些数据点得到的一次函数，预测未来人口数更合适些？与同学进行交流.

2. 从你所在的班级中随机选取10名男生，测量他们手掌的长度x(cm)和身高y(cm).



(1) 设计合适的表格记录测量的数据.

(2) 根据数据的变化范围，建立适当的坐标系，描出点(x,y).

(3) 在坐标系中画一条直线，这条直线应近似表示y和x之间的关系，确定这条直线的一次函数表达式.

(4) 在班级中随意选择一名男同学，测量他手掌的长度和身高，并代入到一次函数表达式中，通过计算说明其误差的大小.

二、解决方案

确定反映变化趋势的直线，原则上可以画很多直线，但要求这条直线应最"接近"数据点. 你可以凭直观画直线，使分布在直线上的点最多，或分布在直线两侧点的个数大致相等.

在"人口增长趋势"问题中，为了使预测的未来人口更接近实际，应选择较近的时间点的数据建立一次函数表达式.

三、可参考的知识与方法

1. 数据的收集与整理.

2. 平面直角坐标系.

3. 待定系数法.

4. 借助计算器进行相关的计算.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

编写后记

2001 年，国家正式启动了义务教育阶段的新一轮课程改革。有感于时代的召唤，我们这群研究和从事数学教育的工作者，满怀共同的梦想，成立了编写组，尝试进行义务教育七年级至九年级数学教科书的建设与编写。

2001 年 3 月份，编写组正式向教育部提出了编写立项申请。经专家评审，当年 12 月通过了立项。编写组从此开始编写工作。

2003 年 3 月，这套依据《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》编写的教科书，经全国中小学教材审定委员会审查通过，并公布于当年的订书目录中，作为义务教育课程标准实验教科书，供实验区选用。

2010 年 10 月，这套教科书开始修订准备。

2011 年 12 月，七年级上册和七年级下册的修订工作完成。

2012 年 3 月，按照《义务教育数学课程标准(2011 年版)》修订后的七年级上册和七年级下册，经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过。2013 年 3 月，八年级上、下册和九年级上、下册也顺利通过教育部基础教育课程教材专家工作委员会的审查。现在与大家见面的这本教科书就是修订后的八年级下册。

我们在编写教科书的过程中，得到了众多的专家、学者、数学教师的大力支持和热情帮助，特别是下面这些老师，更是我们应当感谢的：

王宝仓、杨志坚、孟庆林、张庆、仇岷、陈雪梅、石凌等，都是这套教科书原实验版本的编者，为教科书的编写作出了很大贡献；

刘璐、许艳秋、潘新学、王春丽、李春祥、魏元洪、张玲等，对这套教科书的实验给予了大力的支持和帮助；

郭荣华、王志宇、章巍、许春英、张燕飞、李永强、滕杰、张晓娴、牛翠英、杨金钗、刘建锋、靳春会、陈彦敏、徐在荣、王建华、张素平等，在这套教科书的修订过程中，参与讨论并提出了许多宝贵意见。

我们深知，教科书的编写和建设是一个长期的任务，更是一个不断完善、不断发展的过程。我们会继续努力，朝着精品教科书的建设目标奋力进取。我们也诚挚地希望广大的数学教师继续关注和支持这套教科书，使它越来越好。

编者

2013 年 9 月