义务教育教科书（五·四学制）

责任编辑：孙金栋

封面设计：武　斌

王　琦

丽　子

绿色印刷产品

义务教育教科书（五·四学制）　数学　九年级　下册

价格批准文号：鲁发改价格核（2022）008007

举报电话：12358

ISBN 978-7-5328-8580-0

定价：6.76元

义务教育教科书（五·四学制）

数学

九年级　下册

山东教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

九年级　下册

山东教育出版社

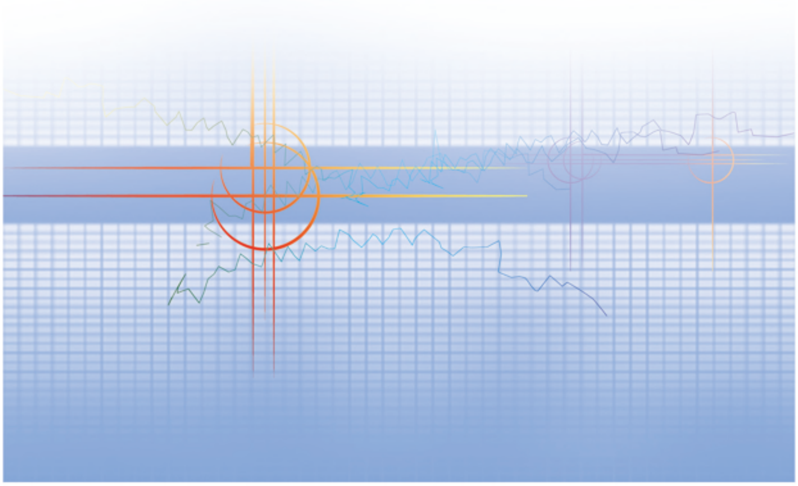
教育部审定 2013

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

九年级 下册



山东教育出版社

YIWU JIAOYU JIAOKESHU（WU-SI XUEZHI）
SHUXUE
JIU NIANJI　XIA CE
义务教育教科书（五·四学制）
数学
九年级　下册
*
山东出版传媒股份有限公司
山东教育出版社出版
（济南市市中区二环南路 2066 号 4 区 1 号）
山东新华书店集团有限公司发行
山东新华印务有限责任公司印装
*
开本：787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印张：7　字数：140 千
定价：6.76 元（上光）
ISBN 978-7-5328-8580-0
2014 年 10 月第 1 版　2021 年 11 月第 8 次印刷

走进数学新天地

亲爱的同学：

祝贺你迎来了义务教育阶段的最后一个学期！

将近九年的数学学习生活，一定在你的脑海里留下了深刻的印记：学到了许多数学知识和数学方法；能够进行一些探索性的数学活动，解决一些基本的数学问题和简单的“非数学”问题……这些都是你数学学习成果的体现。那么，对你来说，数学是什么？你现在有怎样的认识？数学有什么作用？你能够给出一些生动而富有创意的案例吗？

相信你在九年的数学学习生活结束时，会自豪地说：“数学使我变得更聪明！”

在本册教科书中，我们将要继续领略数学的美妙，探索数学的奥秘——

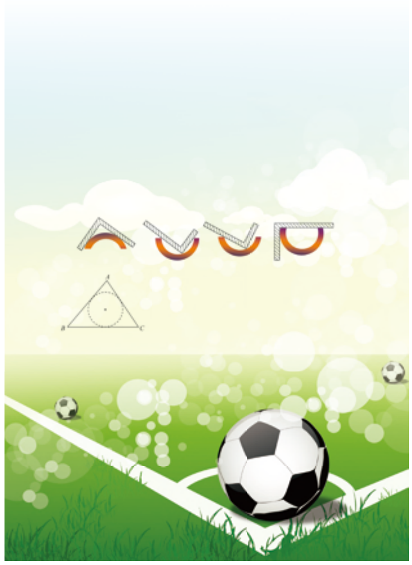
首先你会接触到“圆”，它是我们熟悉而又神秘的平面图形，用你所擅长的思路和方法去探索它的性质，了解它与你所熟悉的平面图形之间的关系。诸如圆的对称性、圆心角与圆周角的关系、直线与圆的位置关系、正多边形与圆的关系等。

另外，对概率的进一步研究，会使我们对随机现象有更深刻的认识。你将充分感受到身边存在大量的数学，甚至游戏中也有数学，并再一次地意识到：原来学数学不一定是很“枯燥”的事情。

自己想一想、做一做，与同伴们议一议，读一读教科书，听一听老师的讲解，并在日常生活中尝试使用数学。如果你有兴趣，不妨去看看书中的“读一读”，研究“综合与实践”，尝试做做带“※”的题目。事实上，对数学了解得越多，你就越能体会到它的意义与趣味。

相信你一定能够学好数学，一定能够在生活中用上数学！

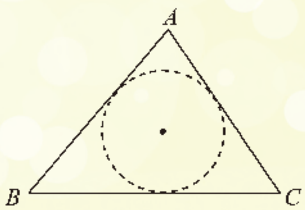
目　录 MULU



第五章　圆

为什么车轮要做成圆形？你能利用直角尺检查某些工件是否半圆形吗？用一张三角形的纸片，你能裁出一个尽可能大的圆吗？

与三角形、四边形一样，圆也是我们常见的图形．本章将运用我们以前学习过的对称、平移、旋转以及推理等方法研究圆的有关性质，并利用这些知识解决一些实际问题．



学习目标

- 认识圆及其相关概念，发展空间观念
- 经历探索圆及其相关结论的过程，发展推理能力，进一步积累研究几何图形的活动经验
- 用所学的知识解决日常生活中与圆有关的问题

1 圆

（1）为什么车轮都做成圆形？车轮能否做成正方形或矩形？

（2）如图 5−1，A，B 是车轮边缘上的任意两点，点 O 是车轮的轴心，点 A，O 之间的距离与点 B，O 之间的距离有什么关系？

（3）想一想，你在生活中还见过哪些圆的形象？它们有哪些共同的特征？

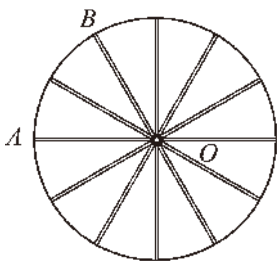


图 5−1

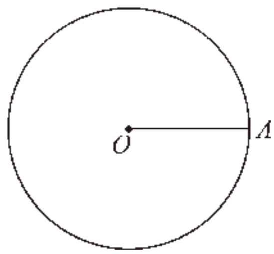


图 5−2

（4）如图 5−2，在平面内，线段 OA 绕它固定的端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所描出的封闭曲线是什么图形？

前面我们已经认识了圆．事实上，圆还可以看成是平面内到定点的距离等于定长的所有点组成的图形．其中，定点就是圆心，定长就是半径．以点 O 为圆心的圆记作 $\odot O$，读作“圆 O”．

半径相等的两个圆叫做**等圆**．两个等圆能够重合．

想一想

如图 5−3，$\odot O$ 的半径为 r，点 A，B，C，D，E 的位置如图所示．

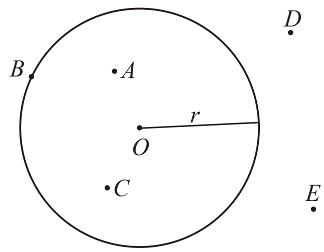


图 5-3

（1）你能说明这些点分别与 $\odot O$ 有怎样的位置关系吗？

（2）点 A，B，C，D，E 到圆心 O 的距离分别与 $\odot O$ 的半径有怎样的大小关系？

（3）如果点 P 和 $\odot O$ 都在同一平面内，那么点 P 与 $\odot O$ 可能有哪几种位置关系？

（4）你能根据点 P 与 $\odot O$ 的位置关系，确定点 P 到圆心 O 的距离 d 与 $\odot O$ 的半径 r 的大小关系吗？反过来，你能根据 d 与 r 的大小关系，确定点 P 与 $\odot O$ 的位置关系吗？

在平面内，点与圆的位置关系有三种：点在圆外、点在圆上、点在圆内.

当点在圆外时，$d>r$；反过来，当 $d>r$ 时，点在圆外.

当点在圆上时，________；反过来，当 ________ 时，点在圆上.

当点在圆内时，________；反过来，当 ________ 时，点在圆内.

做一做

设 $AB=3$ cm，作图说明满足下列要求的图形：

（1）到点 A 和点 B 的距离都等于 2 cm 的所有点组成的图形.

（2）到点 A 和点 B 的距离都小于 2 cm 的所有点组成的图形.

例 如图5-4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=2$，$BC=4$，CM 是 AB 边上的中线. 以点 C 为圆心，以 $\sqrt{5}$ 为半径作圆，试确定 A，B，M 三点分别与

$\odot C$ 有怎样的位置关系，并说明你的理由.

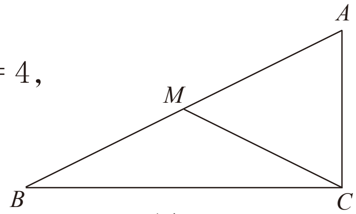


图 5-4

解： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=2$，$BC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$\because CM$ 是 AB 边上的中线，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

$\because CA<\sqrt{5}$，$CB>\sqrt{5}$，$CM=\sqrt{5}$，

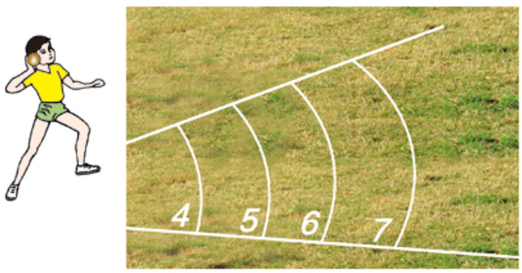
$\therefore$ 点 A 在 $\odot C$ 内，点 B 在 $\odot C$ 外，点 M 在 $\odot C$ 上.

随堂练习

1. 体育老师想利用一根 3 m 长的绳子在操场上画一个半径为 3 m 的圆，你能帮他想想办法吗？

2. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，以顶点 A 为圆心，作一个半径为 1 的圆. 分别指出正方形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C，D 与 $\odot A$ 的位置关系.

3. 小明和小华正在练习投铅球，铅球场地分为 4 m 以内，4～5 m，5～6 m，6～7 m，7 m 以外几个区域. 小明投了 5.2 m，小华投了 6.7 m，他们投的球分别落在下图中哪个区域内？



（第 3 题）

读一读

车轮为什么是圆的

圆是一种美丽的图形. 春秋战国时期，墨翟在其所著《墨经》一书中就曾明确指出："圆，一中同长也." 意思是说：圆，只有一个圆心，由圆心到圆周的长都相等. 圆在日常生活中的应用非常广泛，如车轮、方向盘、光盘等. 相传，英国的亚瑟王用圆桌宴请骑士，就是因为圆形桌子不易区分上、下席，所以每位骑士都是贵宾. 餐厅的餐桌大多做成圆形，月饼也大都做成圆形，这些都象征圆满、团圆、和谐. 毕达哥

拉斯曾经说过："一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形."

在日常生活中，我们见到的车轮都是圆形的，它们可以在平地上平稳地滚动. 中国古时候就造出了装有圆形车轮的车辆. 为什么车轮要做成圆形的呢？

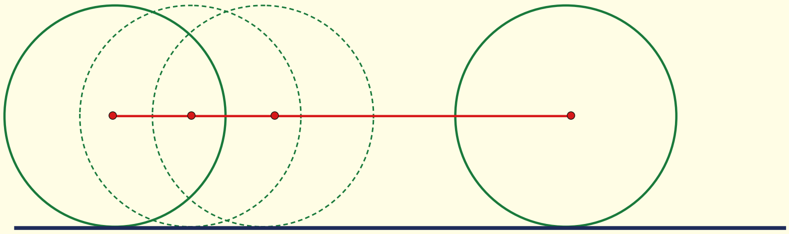


图 5−5

观察图 5−5，车辆在平坦的地面上行驶时，车轮的中心与地面的距离总是不变的，这个距离等于车轮的半径. 如果把车厢装在过轮子中心的车轴上，那么车辆在平坦的公路上行驶时，人坐在车厢里会感觉非常平稳. 试想一下，如果车轮不是圆的，而是正六边形的（如图 5−6），或是正三角形的（如图 5−7），那么坐在车上的人会感觉到颠簸.

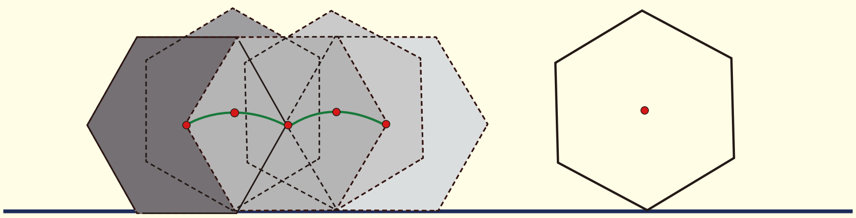


图 5−6

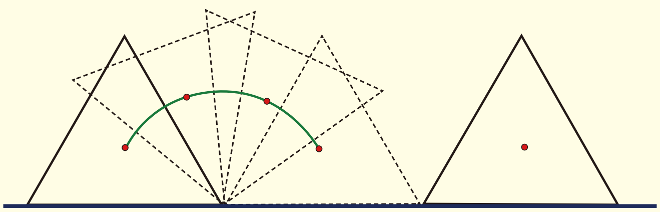


图 5−7

如果要保证正三角形的车轮平稳地滚动，那么地面应设计成如图 5−8 所示的形状.

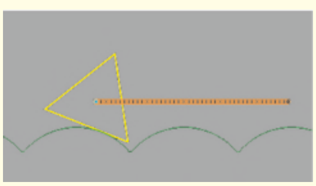
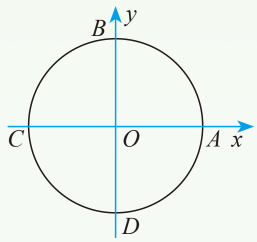


图 5−8

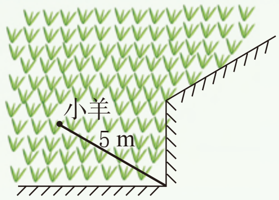
习题 5.1

知识技能

1. 如图，在直角坐标系中，以坐标原点 O 为圆心，作一个半径为 4 的圆，$\odot O$ 与坐标轴分别交于点 A，B，C，D. 求点 A，B，C，D 的坐标.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一根 5 m 长的绳子，一端拴在柱子上，另一端拴着一只羊（羊只能在草地上活动），请画出羊的活动区域.

3. 点 P 是 $\odot O$ 所在平面内的一点，$\odot O$ 的面积为 25π.

（1）若 $PO=5.5$，则点 P 在________；

（2）若 $PO=4$，则点 P 在________；

（3）若 $PO=$________，则点 P 在 $\odot O$ 上.

数学理解

4. 设 $AB=3$ cm，作图说明：到点 A 的距离小于 2 cm，且到点 B 的距离大于 2 cm 的所有点组成的图形.

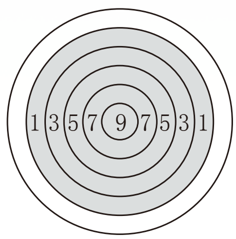
※**5.** 如图是一张靶纸. 靶纸上的 1，3，5，7，9 分别表示投中该靶区的得分数. 小明、小华、小红 3 人各投了 6 次镖，每次镖都中了靶. 最后他们是这样说的——

小明说：“我只得了 8 分.”

小华说：“我共得了 56 分.”

小红说：“我共得了 28 分.”

他们可能得到这些分数吗？如果可能，请把投中的靶区在靶纸上表示出来（用不同颜色的彩笔画出来）；如果不可能，请说明理由.



（第 5 题）

2 圆的对称性

（1）圆是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？你能找到多少条对称轴？

（2）你是用什么方法解决上面这个问题的？与同伴进行交流.

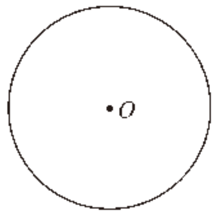


图 5-9

利用折叠的方法，我们可以发现圆具有下面的特性.

圆是轴对称图形，其对称轴是任意一条过圆心的直线.

我们知道，圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧. 连接圆上任意两点的线段叫做**弦**（chord），经过圆心的弦叫做**直径**（diameter）. 如图5-10，以 A，B 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”；线段 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，弦 CD 是 $\odot O$ 的一条直径.

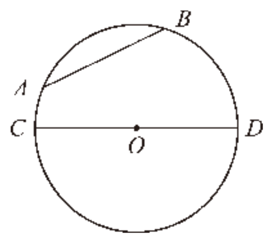


图 5-10

在同圆或等圆中，能够重合的两条弧叫做**等弧**. 圆的任意一条直径的两个端点分圆为两条等弧，每一条弧都叫做**半圆**（semicircle）[1].

做如下实验：

如图 5-11，在两张透明纸上，分别作半径相等的 $\odot O$ 和 $\odot O'$，把两张纸叠在一起，使 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 重合，然后固定圆心.

[1] 弧包括优弧（superior arc）和劣弧（inferior arc）：大于半圆的弧称为优弧，小于半圆的弧称为劣弧. 如图 5-10 中，以 A，D 为端点的弧有两条：优弧 ACD（记作 $\overset{\frown}{ACD}$），劣弧 ABD（记作 $\overset{\frown}{AD}$）.

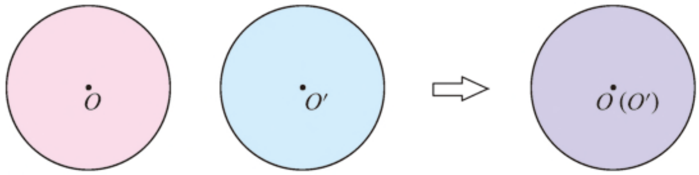


图 5-11

将其中一个圆旋转任意一个角度，两个圆还能重合吗？

利用旋转的方法可以发现：一个圆绕着它的圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合.

圆是中心对称图形，对称中心为圆心 .

做一做

在图 5-12 的等圆 ⊙O 和 ⊙O' 中，分别作相等的圆心角 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$，将两圆重叠，然后固定圆心，将其中的一个圆旋转一个角度，使得 OA 与 $O'A'$ 重合.

你能发现哪些等量关系？说一说你的理由.

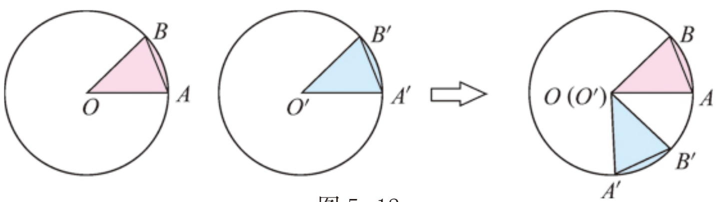


图 5-12

小颖认为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$. 她是这样想的：

$\because$ 半径 OA 与 $O'A'$ 重合，$\angle AOB=\angle A'O'B'$，

$\therefore$ 半径 OB 与 $O'B'$ 重合.

$\because$ 点 A 与点 A' 重合，点 B 与点 B' 重合，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，弦 AB 与弦 $A'B'$ 重合.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$.

她的想法正确吗？与同伴进行交流.

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等.

想一想

在同圆或等圆中，如果两个圆心角所对的弧相等，那么这两个圆心角相等吗？它们所对的弦相等吗？你是怎么想的？

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，你能得出什么结论？

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

例 1 如图 5−13，在 $\odot O$ 中，AB，CD 是两条弦，$OE \perp AB$，$OF \perp CD$，垂足分别是点 E，F.

（1）如果 $\angle AOB = \angle COD$，那么 OE 与 OF 的大小有什么关系？为什么？

（2）如果 $OE = OF$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的大小有什么关系？为什么？

解：（1）$OE = OF$. 理由如下：

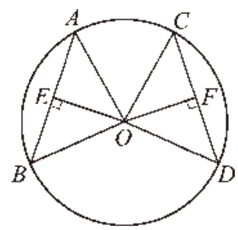


图 5−13

$\because \angle AOB = \angle COD$，

$\therefore AB = CD$.

$\because OE \perp AB$，$OF \perp CD$，$OA = OB$，$OC = OD$，

$\therefore AE = \dfrac{1}{2}AB$，$CF = \dfrac{1}{2}CD$.

$\therefore AE = CF$.

又 $\because OA = OC$，

$\therefore \text{Rt}\triangle OAE \cong \text{Rt}\triangle OCF$.

$\therefore OE = OF$.

（2）$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. 理由如下：

$\because OA = OC$，$OE = OF$，

$\therefore \text{Rt}\triangle OAE \cong \text{Rt}\triangle OCF$.

$\therefore AE = CF$.

又 $\because OE \perp AB$，$OF \perp CD$，$OA = OB$，$OC = OD$，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$，$CF = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore AB = CD$.

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

议一议

在得出本节结论的过程中，你用到了哪些方法？与同伴进行交流.

随堂练习

1. 日常生活中的许多图案或现象都与圆的对称性有关，试举几例.

2. 利用一个圆及其若干条弦分别设计出符合下列条件的图案：

（1）是轴对称图形但不是中心对称图形；

（2）是中心对称图形但不是轴对称图形；

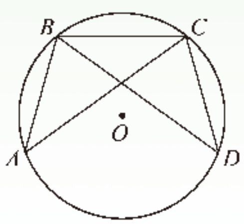
（3）既是轴对称图形又是中心对称图形.

3. 已知 A，B 是 $\odot O$ 上的两点，$\angle AOB = 120^\circ$，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 试确定四边形 $OACB$ 的形状，并说明理由.

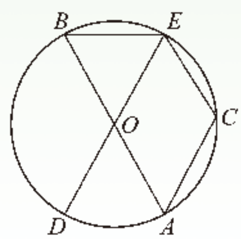
习题 5.2

知识技能

1. 如图，A，B，C，D 是 $\odot O$ 上的四点，$AB = DC$. AC 与 BD 相等吗？为什么？



（第 1 题）

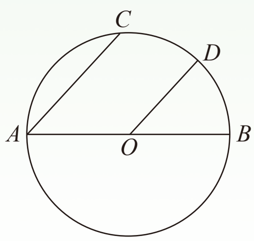


（第 2 题）

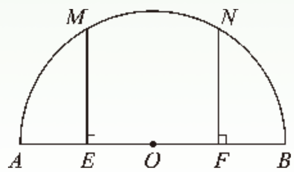
2. 如图，AB，DE 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\odot O$ 上的一点，且 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE}$. BE 与 CE 的大小有什么关系？为什么？

数学理解

3. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$OD // AC$. $\overset{\frown}{CD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 的大小有什么关系？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB 是半圆的直径，E 是 OA 的中点，F 是 OB 的中点，$ME \perp AB$，$NF \perp AB$，垂足分别是点 E，F. $\overset{\frown}{AM}$，$\overset{\frown}{MN}$，$\overset{\frown}{NB}$ 的大小有什么关系？为什么？

想一想

（1）1 平角等于多少度？1 周角等于多少度？

（2）把顶点在圆心的周角等分成 360 份时，每一份的圆心角的度数是多少？整个圆被等分成多少份？

把整个圆等分成 360 份，每一份这样的弧叫做 **1° 的弧**.

议一议

（1）1° 的圆心角所对的弧的度数是多少？反过来，1° 的弧所对的圆心角的度数是多少？

（2）n° 的圆心角的度数与它所对的弧的度数（如图 5-14）有怎样的关系？

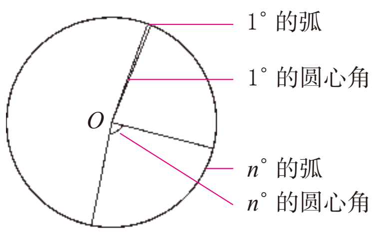


图 5-14

圆心角的度数与它所对的弧的度数相等.

例 2 如图 5−15，在 $\odot O$ 中，已知弦 AB 所对的劣弧为圆的 $\frac{1}{3}$，$\odot O$ 的半径为 R，求弦 AB 的长 .

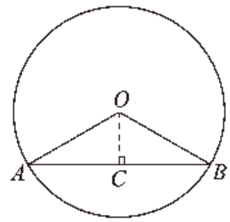


图 5−15

解：由题意可知，$\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 120°.

$\therefore \angle AOB = 120^\circ$.

$\because OA = OB$，

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$.

作 $OC \perp AB$，垂足为点 C，则

$$OC = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}.$$

$$\therefore AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$\therefore AB = 2AC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R.$$

例 3 如图 5−16，已知 AB，CD 为 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE /\!/ AB$，$\angle BOD = 110^\circ$，求 $\overset{\frown}{CE}$ 的度数 .

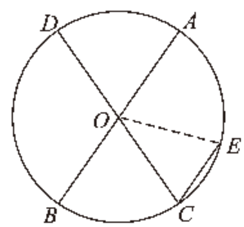


图 5−16

解：连接 OE.

$\because \angle BOD = 110^\circ$，

$\therefore \angle BOC = 70^\circ$.

$\because CE /\!/ AB$，

$\therefore \angle C = 70^\circ$.

$\because OC = OE$，

$\therefore \angle E = \angle C = 70^\circ$.

$\therefore \angle COE = 180^\circ - \angle C - \angle E = 40^\circ$.

$\therefore \overset{\frown}{CE}$ 的度数为 40°.

随堂练习

已知 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 分别是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的弧. 试判断下列说法是否正确，并简要说明理由.

（1）如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数，那么 $\angle AO_1B=\angle CO_2D$；

（2）如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数，那么 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$；

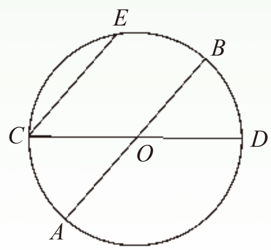
（3）如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数.

习题 5.3

知识技能

1. 在 $\odot O$ 中，已知弦 $AB=4\sqrt{3}$ cm，$OA=4$ cm，求弦 AB 所对的两条弧的度数.

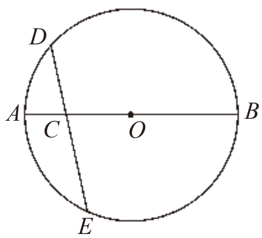
2. 如图，已知 AB，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE/\!/AB$，$\overset{\frown}{CE}$ 的度数为 $80°$. 求 $\angle AOD$ 的度数.



（第 2 题）

数学理解

3. 如图，已知点 C 是 $\odot O$ 的直径 AB 上的一点，过点 C 作弦 DE，使 $CD=CO$. 若 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 $40°$，求 $\overset{\frown}{BE}$ 的度数.



（第 3 题）

*3 垂径定理

做一做

如图 5−17，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，作直径 CD，使 $CD \perp AB$，垂足为点 M.

（1）图 5−17 是轴对称图形吗？如果是，其对称轴是什么？

（2）你能发现图中有哪些等量关系？说一说你的理由.

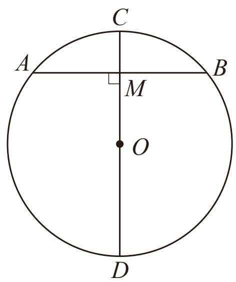


图 5−17

垂径定理 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

已知：如图 5−18，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，CD 是 $\odot O$ 的一条直径，并且 $CD \perp AB$，垂足为点 M.

求证：$AM = BM$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

证明： 连接 OA，OB，则 $OA = OB$.

在等腰三角形 OAB 中，

$\because$ $OM \perp AB$，

$\therefore$ $AM = BM$.

$\therefore$ 点 A 和点 B 关于 CD 对称.

$\because$ $\odot O$ 关于直径 CD 对称，

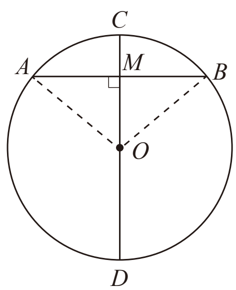


图 5−18

$\therefore$ 当圆沿着直径 CD 对折时，点 A 与点 B 重合，$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 重合，$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 重合.

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

想一想

如图 5−19，AB 是 $\odot O$ 的弦（不是直径），作一条平分 AB 的直径 CD，交 AB 于点 M.

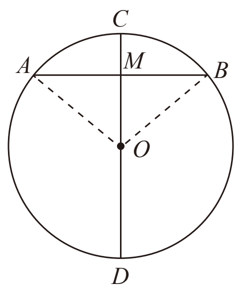


图 5−19

（1）图 5−19 是轴对称图形吗？如果是，其对称轴是什么？

（2）你能发现图中有哪些等量关系？说一说你的理由.

平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

例 如图5−20，一条公路的转弯处是一段圆弧（即图中 $\overset{\frown}{CD}$，点 O 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的圆心），其中 $CD=600$ m，E 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上一点，且 $OE\perp CD$，垂足为点 F，$EF=90$ m. 求这段弯路的半径.

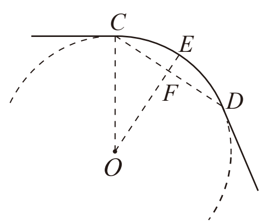


图 5−20

解：连接 OC.

设弯路的半径为 R m，则 $OF=(R-90)$ m.

$\because OE\perp CD$，

$\therefore CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 600=300$（m）.

根据勾股定理，得

$$OC^2 = CF^2 + OF^2,$$

即

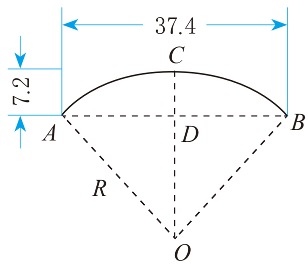
$$R^2 = 300^2 + (R - 90)^2.$$

解这个方程，得 $R = 545$.

所以，这段弯路的半径为 545 m.

随堂练习

1. 1400 多年前，我国隋朝建造了赵州石拱桥（如图），它的桥拱是圆弧形，它的跨度（即弧所对的弦长）为 37.4 m，拱高（即弧的中点到弦的距离）为 7.2 m，求桥拱所在圆的半径（结果精确到 0.1 m）.



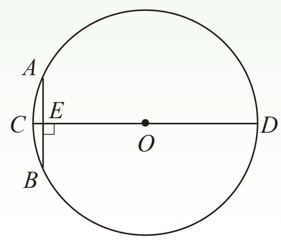
（第 1 题）

2. 如果圆的两条弦互相平行，那么这两条弦所夹的弧相等吗？为什么？

习题 5.4

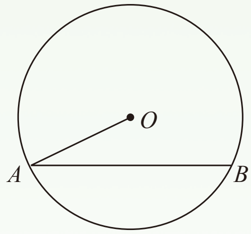
知识技能

1. “圆材埋壁”是我国古代数学名著《九章算术》中的一个问题：“今有圆材，埋在壁中，不知大小．以锯锯之，深一寸，锯道长一尺．问：径几何？”转化为现在的数学语言就是：如图，CD 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AB \perp CD$，垂足为点 E，$CE = 1$ 寸，$AB = 10$ 寸，求直径 CD 的长.



（第 1 题）

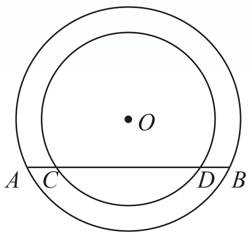
2. 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 30 mm，弦 $AB=36$ mm，求点 O 到 AB 的距离及 $\angle OAB$ 的余弦值.



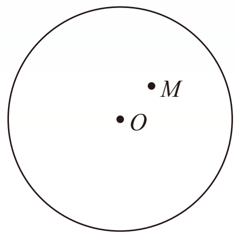
（第 2 题）

数学理解

3. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，小圆的弦 CD 与大圆的弦 AB 在同一条直线上，你认为 AC 与 BD 的大小有什么关系？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，M 为 $\odot O$ 内一点，画一条弦 AB，使 AB 过点 M，并且 $AM=BM$.

4 圆周角和圆心角的关系

在射门游戏中，球员射中球门的难易与他所处的位置对球门的张角（如图5−21中的$\angle ABC$）有关．就角度大小而言，球员在B，D，E中的哪一个点处射门更容易些？还是都一样？

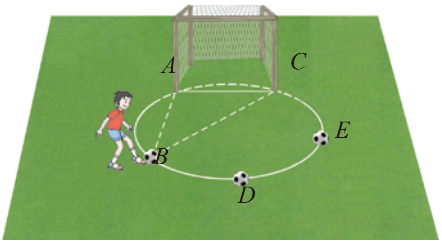


图 5−21

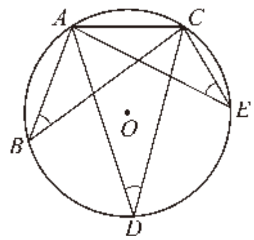


图 5−22

在图5−22中，点A，B，D，E，C在同一个圆上．当球员分别在B，D，E处射门时，他所处的位置对球门AC分别形成三个张角$\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$．观察可以发现，这三个角的顶点在圆上，它们的两边在圆内的部分分别是圆的弦．像这样的角，叫做**圆周角**（angle in a circular segment）．

上面的问题就是要研究同一条弧（$\overset{\frown}{AC}$）所对的圆周角（$\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$）之间的大小关系．

做一做

如图5−23，在$\odot O$中，$\angle AOB=80^\circ$．

（1）请你画出几个$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，这几个圆周角有什么关系？与同伴交流．

（2）这些圆周角与圆心角$\angle AOB$的大小有什么关系？你是怎样发现的？与同伴交流．

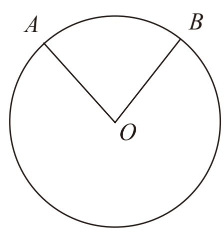


图 5−23

议一议

在图 5−23 中，改变 $\angle AOB$ 的度数，上面的结论仍然成立吗？

圆周角定理 圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

已知：如图5−24，$\angle ACB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，$\angle AOB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角.

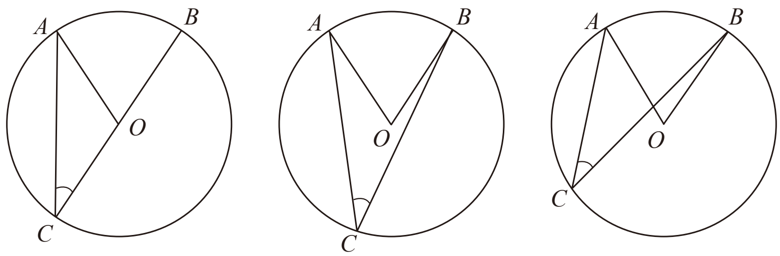
求证：$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$.

分析：根据圆周角和圆心的位置关系，分三种情况讨论：

（1）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的一条边上，如图5−24（1）；

（2）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的内部，如图5−24（2）；

（3）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的外部，如图5−24（3）.



（1）　（2）　（3）

图 5−24

在三种位置关系中，我们选择第（1）种情况给出证明，其他情况可以转化为（1）的情况进行证明.

证明：圆心 O 在 $\angle ACB$ 的一条边上，如图 5−24（1）.

$\because$ $\angle AOB$ 是 $\triangle AOC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle AOB=\angle CAO+\angle ACB$.

$\because$ $OA=OC$，

$\therefore$ $\angle CAO=\angle ACB$.

$\therefore\ \angle AOB=2\angle ACB$,

即 $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$.

做一做

你能将图 5-24（2）和图 5-24（3）这两种情况分别转化成图 5-24（1）的情况去解决吗？做一做，并与同伴交流.

由圆周角定理，我们还可以得到下面的结论：

圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

想一想

你能解决射门游戏中的问题了吗？当球员在 B，D，E 处射门时，他所处的位置对球门柱 A，C 形成的三个张角 $\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$ 的大小有什么关系？你能用圆周角定理去解决它吗？

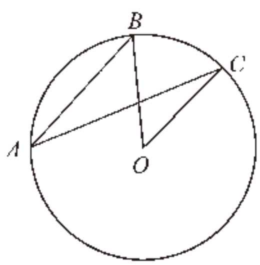
同弧或等弧所对的圆周角相等.

议一议

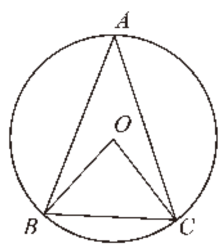
在得出本节结论的过程中，你用到了哪些方法？请举例说明，并与同伴交流.

随堂练习

1. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle BOC=50^\circ$，求 $\angle BAC$ 的度数.



（第 1 题）



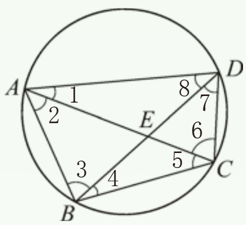
（第 2 题）

2. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle A=40^\circ$，求 $\angle OBC$ 的度数.

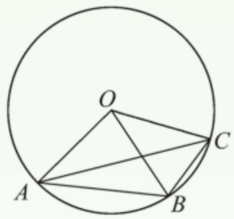
习题 5.5

知识技能

1. 如图，点 A，B，C，D 在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 E. 在图中标出的 8 个角中，哪些是相等的角？



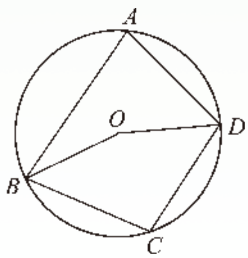
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，OA，OB，OC 都是 $\odot O$ 的半径，$\angle AOB=2\angle BOC$. $\angle ACB$ 与 $\angle BAC$ 的大小有什么关系？为什么？

3. 如图，A，B，C，D 是 $\odot O$ 上的四个点，且 $\angle BCD=100^\circ$，求 $\angle BOD$（$\overset{\frown}{BCD}$ 所对的圆心角）和 $\angle BAD$ 的度数.



（第 3 题）

数学理解

4. 为什么有些电影的座位排列（横排）呈圆弧形？说一说这种设计的合理性.

想一想

（1）如图5-25，BC 是 $\odot O$ 的直径，它所对的圆周角有什么特点？你能证明吗？

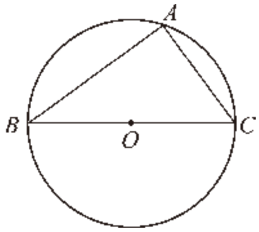


图 5-25

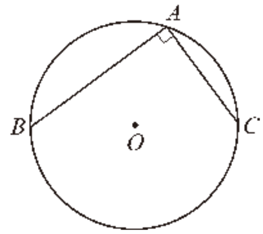
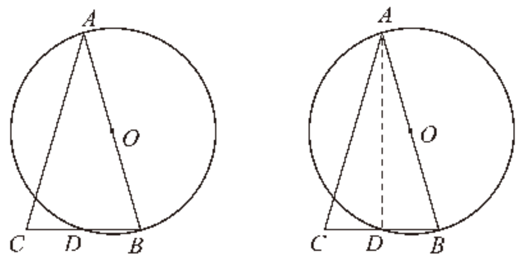


图 5-26

（2）如图 5-26，圆周角 $\angle BAC=90^\circ$，弦 BC 是直径吗？为什么？

直径所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径.

例　如图 5-27（1），在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D. BD 与 CD 的大小有什么关系？为什么？



（1）　　（2）

图 5-27

解： $BD=CD$. 理由如下：

如图 5-27（2），连接 AD.

$\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $\angle ADB=90^\circ$.

$\therefore$ $AD\perp BC$.

又 $\because$ $AC=AB$，

$\therefore$ $BD=CD$.

做一做

轮船在航行过程中，船长常常通过测定角度来确定轮船是否会遇到暗礁.

如图 5–28，A，B 表示灯塔，暗礁分布在经过 A，B 两点的一个圆形区域内，C 表示一个危险临界点，$\angle ACB$ 就是“危险角”，当轮船与两个灯塔的夹角大于“危险角”时，就有可能触礁.

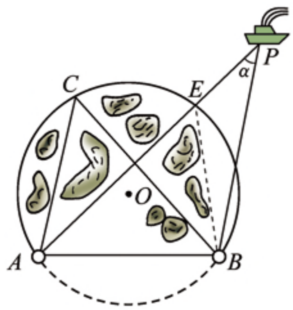


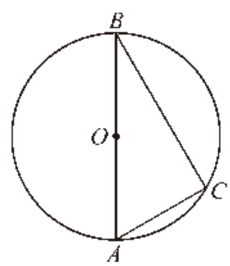
图 5–28

（1）当轮船与两个灯塔的夹角 $\angle\alpha$ 大于“危险角”时，轮船位于哪个区域？为什么？

（2）当轮船与两个灯塔的夹角 $\angle\alpha$ 小于“危险角”时，轮船位于哪个区域？为什么？

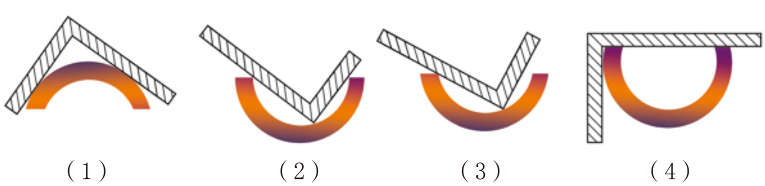
随堂练习

1. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB = 10$ cm，C 为 $\odot O$ 上的一点，$\angle ABC = 30^\circ$，求 AC 的长 .



（第 1 题）

2. 小明想用直角尺检查某些工件是否恰好为半圆形. 如图，你能判断哪个是半圆形？为什么？

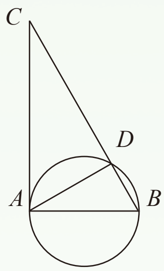


（第 2 题）

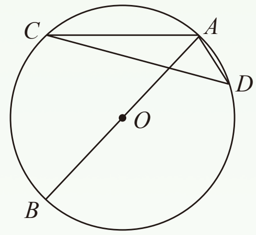
习题 5.6

知识技能

1. 如图，在△ABC中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$，以 AB 为直径的圆与 BC 相交于点 D．求 AD 和 CD 的长.



（第 1 题）



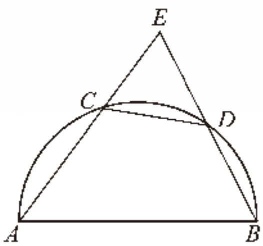
（第 2 题）

2. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle ACD=15^{\circ}$，求$\angle BAD$ 的度数.

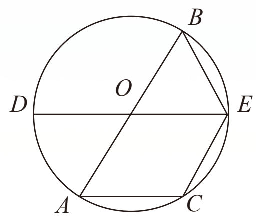
数学理解

3. 如图，C，D 为半圆上的两点，且 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，连接 AC 并延长，与 BD 的延长线相交于点 E.

写出图中相等的线段，并说明理由.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB，DE 是 $\odot O$ 的直径，$AC/\!/DE$，AC 与 $\odot O$ 相交于点 C. BE 与 EC 的大小有什么关系？为什么？

5 确定圆的条件

经过一点可以作无数条直线，经过两点只能作一条直线. 那么，经过一点能作几个圆？经过两点、三点……呢？

做一做

（1）作圆，使它经过已知点 A. 你能作出几个这样的圆？

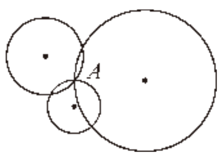


图 5−29

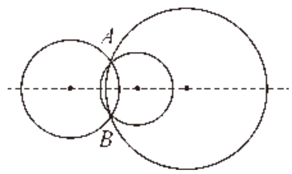
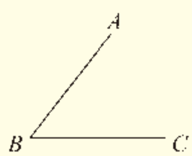


图 5−30

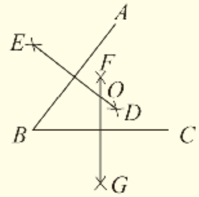
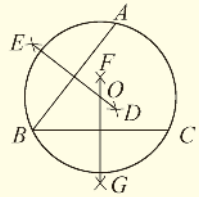
（2）作圆，使它经过已知点 A，B. 你是如何做的？你能作出几个这样的圆？其圆心的位置有什么特点？与线段 AB 有什么关系？为什么？

（3）作圆，使它经过已知点 A，B，C（A，B，C 三点不在同一条直线上）. 你是如何做的？你能作出几个这样的圆？

利用尺规过不在同一条直线上的三个点作圆的方法如下：

作　法	图　示
（1）连接 AB，BC.	

续表

作　法	图　示
（2）分别作线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG，DE 与 FG 相交于点 O .	
（3）以点 O 为圆心，以 OB 为半径作圆. $\odot O$ 就是所要求作的圆 .	

说说以上作法的道理.

在上面的作图过程中，点 O 是线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG 的交点，它到 A，B，C 三点的距离相等. 因为直线 DE 和 FG 有且只有一个交点 O，所以经过 A，B，C 三点能且只能作一个圆 .

不在同一条直线上的三个点确定一个圆 .

因此，三角形的三个顶点确定一个圆. 经过三角形各顶点的圆叫做三角形的**外接圆**（circumcircle of triangle），外接圆的圆心是三角形三边垂直平分线的交点，叫做三角形的**外心**（circumcenter）. 这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**（inscribed triangle）. 如图 5−31，$\odot O$ 就是$\triangle ABC$ 的外接圆，圆心 O 就是$\triangle ABC$ 的外心，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的一个内接三角形. 三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点，它到三角形三个顶点的距离相等 .

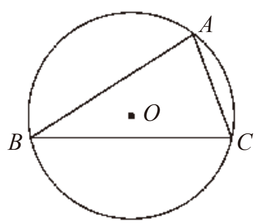


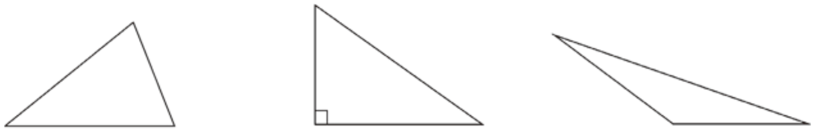
图 5−31

想一想

你能设法确定一张圆形纸片的圆心吗？你有哪些方法？与同伴交流.

随堂练习

已知下面三个三角形，分别作出它们的外接圆．你发现它们的外心的位置分别有什么特点？



锐角三角形　　直角三角形　　钝角三角形

读一读

运用指令操作计算机

数学中有公理，也有定理，这些规则一方面能够帮助我们把握事情的规律，而另一方面似乎也会使我们感觉数学有些刻板、烦琐．这是数学中独有的吗？其实不然，规则和定理我们平时都在讲、都在用．例如，与我们生活紧密联系的计算机就特别守规则、讲道理．一些软件可以根据给出的指令画圆．

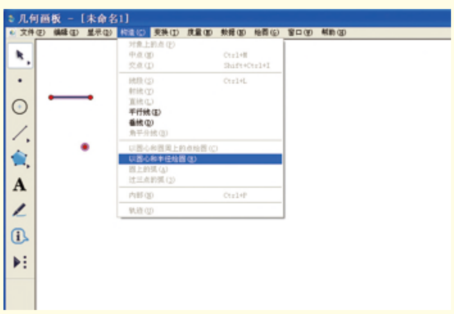
以几何画板为例，如何利用它画一个确定的圆呢？当使用作图菜单时，你会发现所有与画圆相关的条目都是灰色的．为什么呢？因为计算机没有得到规则，不知道你想在哪里画、画多大的圆，所以它拒绝完成．

那么你可以用如下方法画圆：

直接使用画圆工具，只要以一点为圆心通过拖拽就可以确定半径长，从而画出一个圆．

先画出两点，再选中它们，执行作图命令里的“过圆心和圆周上点绘圆”，也可以画圆．

给出点和线段长，选中它们，执行作图命令里的“以圆心和半径绘圆”（如图），可以画出指定半径的圆．

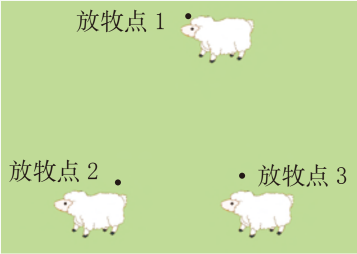


没有条件约束是不能确定一个圆的．用什么样的条件就可以确定一个圆呢？相信通过本节课的学习你已经心中有数了．想在几何画板上试一试吗？

习题 5.7

知识技能

1. 草原上有三个放牧点，要修建一个牧民定居点，使得三个放牧点到定居点的距离相等．三个放牧点的位置如图所示，那么如何确定定居点的位置？



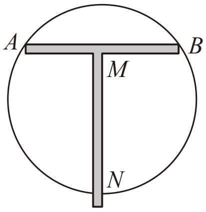
（第 1 题）

数学理解

2. 已知 $AB = 4$ cm，以 3 cm 长为半径作圆，使它经过点 A 和点 B．这样的圆能作出几个？

3. 经过不在同一条直线上的四个点是否一定能作一个圆？举例说明．

4. 如图，MN 所在的直线垂直平分线段 AB，利用这样的工具，最少使用多少次，就可以找到圆形工件的圆心？为什么？



（第 4 题）

如图 5-32，四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在⊙O 上，我们说四边形 $ABCD$ 是 ⊙O 的内接四边形，⊙O 是四边形 $ABCD$ 的外接圆．一般地，如果一个多边

形的所有顶点都在同一个圆上，那么这个多边形叫做**圆内接多边形**，这个圆叫做多边形的**外接圆**.

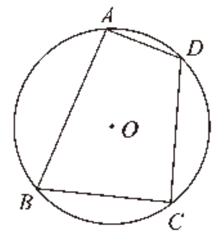


图 5-32

议一议

（1）如图 5-32，在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$，$\angle B$ 与 $\angle D$ 分别是它的两组对角. $\angle A$ 所对的弧是哪条弧？$\angle C$ 所对的弧是哪条弧？

（2）$\angle A$ 与 $\angle C$ 所对的两条弧的度数之和是多少？由此你发现 $\angle A$ 与 $\angle C$ 有怎样的数量关系？$\angle B$ 与 $\angle D$ 呢？

已知：如图 5-32，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形.

求证：$\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$.

证明：在图 5-32中，

$\because$ $\angle A$ 的度数 $=\overset{\frown}{BCD}$ 的度数的一半，

$\angle C$ 的度数 $=\overset{\frown}{BAD}$ 的度数的一半，

$\overset{\frown}{BCD}$ 的度数 $+\overset{\frown}{BAD}$ 的度数 $=360^\circ$，

$\therefore$ $\angle A+\angle C=180^\circ$.

同理，$\angle B+\angle D=180^\circ$.

圆内接四边形的对角互补 .

想一想

在图 5-32 中，延长 BC 到点 E，便得 $\angle DCE$（如图 5-33）. $\angle DCE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角，$\angle A$ 称为 $\angle DCE$ 的内对角. $\angle DCE$ 与 $\angle A$ 的大小有什么关系？为什么？

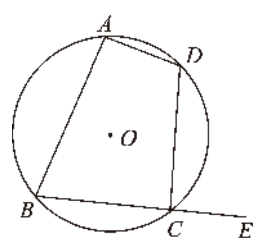


图 5-33

圆内接四边形的任何一个外角都等于它的内对角.

例 如图 5−34，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle BAM$ 的平分线与它的外接圆相交于点 E，连接 BE，CE. 试判断 BE 与 CE 是否相等，并说明理由.

解： $BE = CE$. 理由如下：

在图 5−34 中，

$\because$ $\angle EAM$ 是圆内接四边形 $AEBC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle EAM = \angle EBC$.

$\because$ $\angle ECB = \angle EAB$，$\angle EAM = \angle EAB$，

$\therefore$ $\angle ECB = \angle EBC$.

$\therefore$ $EB = EC$.

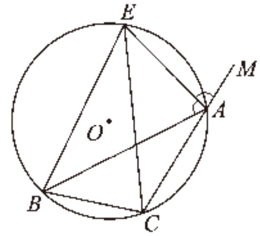
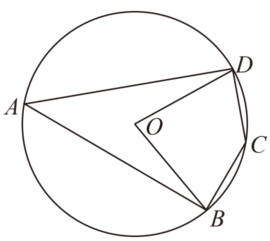


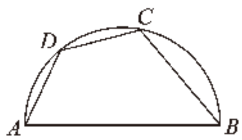
图 5−34

随堂练习

1. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle BOD = 80°$，求 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 为半圆的直径，点 C，D 在半圆上，且 $AD = CD$，$\angle B = 50°$，求 $\angle A$，$\angle C$ 的度数.

3. 试说明圆内接平行四边形是矩形.

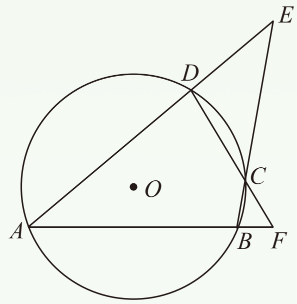
习题 5.8

知识技能

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$，求 $\angle D$ 的度数.

2. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AC 垂直平分 BD，$\angle BCD=80^\circ$，求四边形 $ABCD$ 其他三个角的度数.

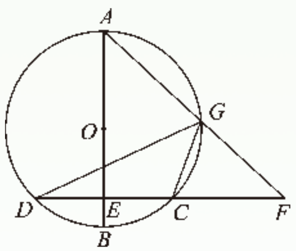
3. 如图，分别延长圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边，延长线相交于点 E，F，若 $\angle E=40^\circ$，$\angle F=60^\circ$，求 $\angle A$ 的度数.



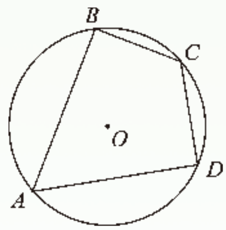
（第 3 题）

数学理解

4. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足为点 E，G 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的任意一点，AG，DC 的延长线相交于点 F. $\angle FGC$ 与 $\angle AGD$ 的大小有什么关系？为什么？



（第 4 题）



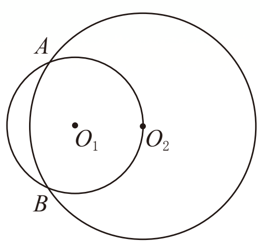
（第 5 题）

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=90^\circ$，$AB=2$，$CD=1$. 求 BC 的长 .

6. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 都经过 A，B 两点，且点 O_2 在 $\odot O_1$ 上. 点 C 是 $\overset{\frown}{AO_2B}$ 上的一点（点 C 不与 A，B 重合），AC 的延长线交 $\odot O_2$ 于点 P，连接 AB，BC，BP.

（1）根据题意将图形补充完整；

（2）当点 C 在 $\overset{\frown}{AO_2B}$ 上运动时，图中大小不变的角有哪些？（将符合要求的角都写出来）



（第 6 题）

6 直线和圆的位置关系

（1）观察上面的三幅照片，地平线与太阳的位置关系是怎样的？

（2）作一个圆，将直尺的边缘看成一条直线．固定圆，平移直尺，直线和圆有几种位置关系？

可以发现，直线和圆有三种位置关系：

（1）当直线和圆有两个公共点时（如图 5−35（1）），我们说直线和圆**相交**，两个公共点叫做**交点**．

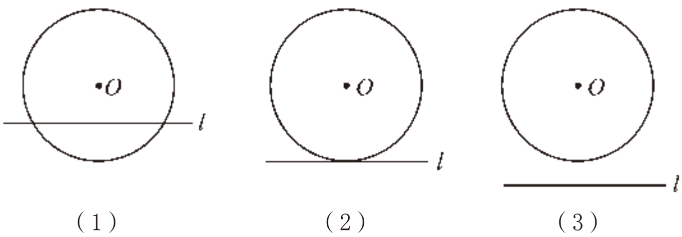


图 5−35

（2）当直线和圆有唯一公共点时（如图 5−35（2）），我们说直线和圆**相切**，这条直线叫做圆的**切线**（tangent line），这个唯一的公共点叫做**切点**（point of tangency）．

（3）当直线和圆没有公共点时（如图 5−35（3）），我们说直线和圆**相离**．

议一议

你能举出生活中直线和圆相交、相切、相离的实例吗？与同伴进行交流．

想一想

如图 5−35，当直线 l 分别与 $\odot O$ 相交、相切、相离时， 圆心 O 到直线 l 的距离 d 与 $\odot O$ 的半径 r 的大小分别有什么关系？你能根据 d 与 r 的大小关系确定直线与圆的位置关系吗？

当直线和圆相交时，$d<r$；反过来，当 $d<r$ 时，直线和圆相交.

当直线和圆相切时，d ______ r；反过来，当 d ______ r 时，直线和圆相切.

当直线和圆相离时，d ______ r；反过来，当 d ______ r 时，直线和圆相离.

例 1 已知在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=8$ cm，$AC=4$ cm .

（1）以点 C 为圆心作圆，当半径的长为多少时，AB 与 $\odot C$ 相切？

（2）以点 C 为圆心，分别以 2 cm 和 4 cm 的长为半径作两个圆，这两个圆与 AB 分别有怎样的位置关系？

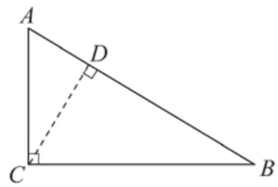


图 5−36

解：（1）如图 5−36，过点 C 作 AB 的垂线段 CD.

$\because AC=4$ cm，$AB=8$ cm，

$\therefore \cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \angle A=60^\circ$.

$\therefore CD=AC\cdot\sin A=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$（cm）.

因此，当半径的长为 $2\sqrt{3}$ cm 时，AB 与 $\odot C$ 相切.

（2）由（1）可知，圆心 C 到 AB 的距离 $d=2\sqrt{3}$ cm，所以，

当 $r=2$ cm 时，$d>r$，$\odot C$ 与 AB 相离；

当 $r=4$ cm 时，$d<r$，$\odot C$ 与 AB 相交 .

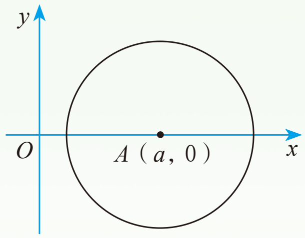
随堂练习

已知一条直线 l 与半径为 r 的 $\odot O$ 相交，且点 O 到直线 l 的距离为 5，求 r 的取值范围.

习题 5.9

知识技能

1. 如图，在直角坐标系中，$\odot A$ 的半径为 2，点 $A(a, 0)$ 在 x 轴上移动.



（第 1 题）

（1）当 $\odot A$ 与 y 轴相离时，a 的取值范围是__________；

（2）当 $\odot A$ 与 y 轴相切时，a 的取值范围是__________；

（3）当 $\odot A$ 与 y 轴相交时，a 的取值范围是__________.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，O 是 AB 上的一点，$OA=m$，$\odot O$ 的半径为 r，当 r 与 m 满足怎样的关系时：

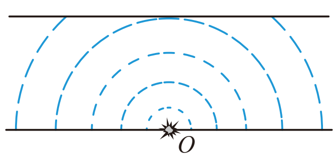
（1）直线 AC 与 $\odot O$ 相交？

（2）直线 AC 与 $\odot O$ 相切？

（3）直线 AC 与 $\odot O$ 相离？

数学理解

3. 用如下方法可以估测河流的大致宽度：如图，观测者站在岸边 O 处投下一块石头，激起的半圆形波纹逐渐向远处扩展，当波纹刚好抵达对岸时，另一观测者记录下波纹沿着观测者所在岸边所扩展的距离，这一距离就是河流的大致宽度. 请说明这种方法的合理性.



（第 3 题）

议一议

（1）图 5−35 中的三个图形都是轴对称图形吗？如果是，你能分别画出它们的对称轴吗？

（2）如图 5−37，直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 A，半径 OA 与直线 CD 有怎样的位置关系？说一说你的理由.

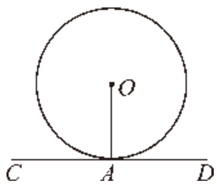
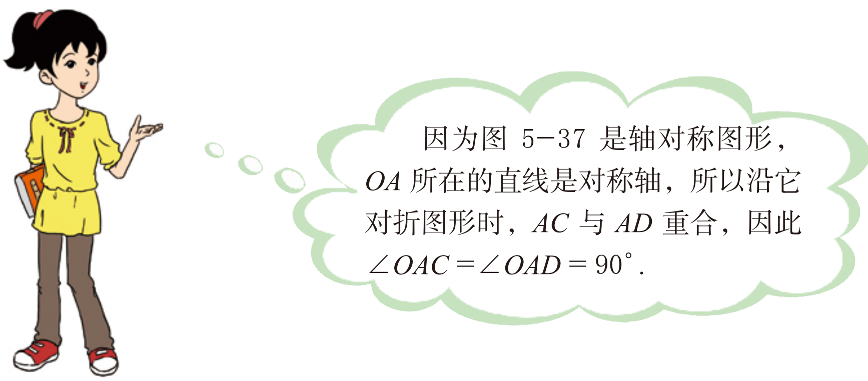


图 5−37

对于（2），小颖和小明都认为半径 OA 垂直于直线 CD.



OA 与 CD 要么垂直，要么不垂直. 假设 OA 与 CD 不垂直，过圆心 O 作直线 CD 的垂线段 OM（如图 5−38），即 $OM \perp CD$，垂足是点 M，则 $OM < OA$，即圆心 O 到直线 CD 的距离小于 $\odot O$ 的半径，因此 CD 与 $\odot O$ 相交. 这与已知条件“直线 CD 与 $\odot O$ 相切”相矛盾. 所以 OA 与 CD 垂直.

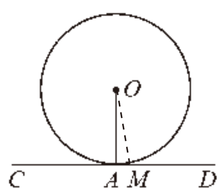


图 5−38

圆的切线垂直于过切点的半径．

例 2 城市广场上有一个圆形喷水池，图 5-39 是它的平面示意图．图中的圆环部分是喷水池的围墙．为了测量圆环的面积，小明和小颖取来一个卷尺，拉直后使它与内圆相切于点 C，与外圆相交于点 A，B，量得 AB 的长为 12 m．你能由此求出圆环的面积吗？（结果精确到 0.1 m^2）

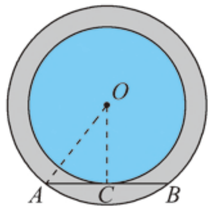


图 5-39

解： 设喷水池平面图的圆心为点 O，连接 OC，OA.

$\because$ AB 与内圆相切于点 C，

$\therefore$ $OC \perp AB$.

$\because$ AB 是外圆的弦，$AB = 12$（m），

$\therefore$ $AC = BC = 6$（m）．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACO$ 中，

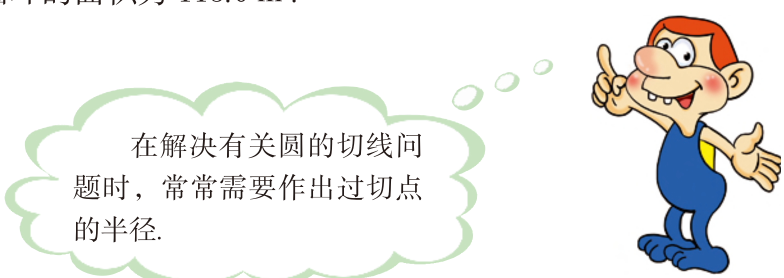
$\because$ $AC^2 + OC^2 = OA^2$，

$\therefore$ $OA^2 - OC^2 = AC^2$.

于是 $\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OC^2 = \pi(OA^2 - OC^2) = \pi \cdot AC^2$

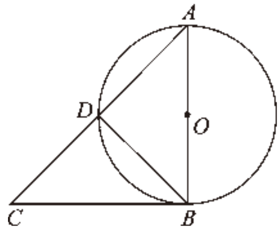
$$\approx 3.14 \times 6^2 \approx 113.0\ (\mathrm{m}^2).$$

所以，圆环的面积为 113.0 m^2.



随堂练习

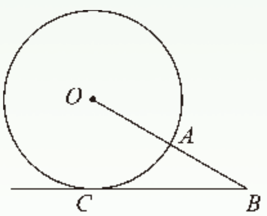
如图，在 $\odot O$ 中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线相交于点 C，且 $AD=DC$，求 $\angle ABD$ 的度数.



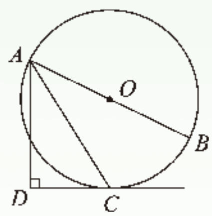
习题 5.10

知识技能

1. 如图，延长 $\odot O$ 的半径 OA 到点 B，使 $AB=OA$. 直线 BC 与 $\odot O$ 相切于点 C. 求 $\angle B$ 的度数.



（第 1 题）

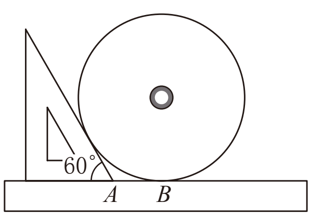


（第 2 题）

2. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上的一点，AD 垂直于过点 C 的切线，垂足为点 D. $\angle BAC$ 和 $\angle DAC$ 的大小有什么关系？为什么？

问题解决

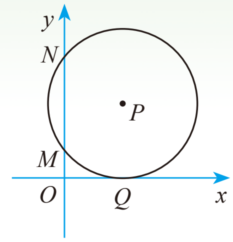
3. 为了测量一个光盘的直径，小明把直尺、光盘和三角尺按图所示放置于桌面上，并量出 $AB=6$ cm. 这张光盘的直径是多少？（精确到 1 cm）



（第 3 题）

联系拓广

4. 如图，在直角坐标系中，点 P 在第一象限内，$\odot P$ 与 x 轴相切于点 Q，与 y 轴相交于 $M(0,2)$，$N(0,8)$ 两点，求点 P 的坐标.



（第 4 题）

议一议

如图 5-40，OA 是 $\odot O$ 的半径，直线 l 经过点 A，l 与 OA 的夹角为 $\angle\alpha$. 当 l 绕点 A 旋转时：

（1）随着 $\angle\alpha$ 的变化，点 O 到 l 的距离 d 如何变化？直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系如何变化？

（2）当 $\angle\alpha$ 等于多少度时，点 O 到 l 的距离 d 等于半径 r？此时，直线 l 与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？为什么？

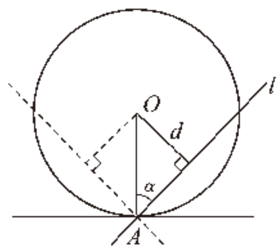


图 5-40

由此可得到一个结论：

过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

经过 $\odot O$ 上的一点 P，你能用三角尺画出 $\odot O$ 的切线吗？你是怎样画的？能画出几条？与同伴进行交流.

例 3 如图 5-41，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，CD 与 AB 的延长线相交于点 D，且 $\angle BCD=\angle BAC$. CD 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？

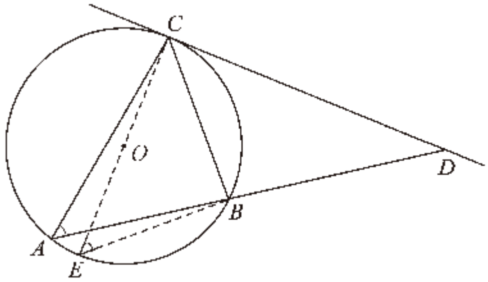


图 5-41

解： CD 是 $\odot O$ 的切线．理由如下：

过点 C 作 $\odot O$ 的直径 CE，连接 BE，则

$\angle CBE = 90^\circ$.

$\therefore \angle BEC + \angle BCE = 90^\circ$.

$\because \angle BEC = \angle BAC$，$\angle BAC = \angle BCD$，

$\therefore \angle BCD + \angle BCE = 90^\circ$.

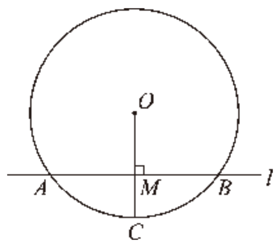
$\therefore EC \perp CD$.

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线．

随堂练习

1. 如图，$\odot O$ 的半径 $OC = 5$ cm，直线 $l \perp OC$，垂足为点 M，且 l 与 $\odot O$ 相交于 A，B 两点，$AB = 8$ cm．如何沿 OC 所在的直线平移直线 l，使 l 与 $\odot O$ 相切？

2. 以边长为 3，4，5 的三角形的三个顶点为圆心，分别作圆与对边相切，则这三个圆的半径分别是多少？

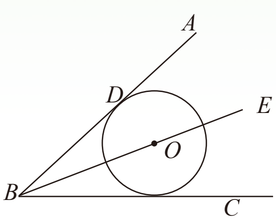


（第 1 题）

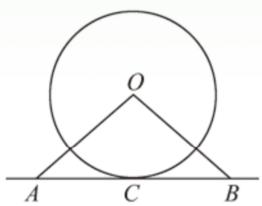
习题 5.11

知识技能

1. BE 平分 $\angle ABC$，O 是 BE 上的任意一点，$\odot O$ 与 BA 相切于点 D．BC 与 $\odot O$ 相切吗？为什么？



（第 1 题）

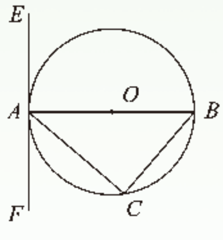


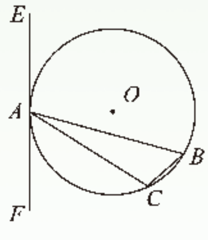
（第 2 题）

2. 如图，直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？

数学理解

3. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，过点 A 作直线 EF.





（第 3 题）

（1）如图①，AB 为 $\odot O$ 的直径，要使直线 EF 是 $\odot O$ 的切线，还需要添加什么条件？（请写出三种不同的条件）

（2）如图②，AB 不是 $\odot O$ 的直径，要使直线 EF 是 $\odot O$ 的切线，还需要添加什么条件？（请写出两种不同的条件）

问题解决

※**4.** 已知 $\odot O$ 外一点 P，你能用尺规过点 P 作 $\odot O$ 的切线吗？

做一做

如图 5-42，$\triangle ABC$ 是一张三角形纸片，你能从它上面剪出一张面积最大的圆形纸片吗？

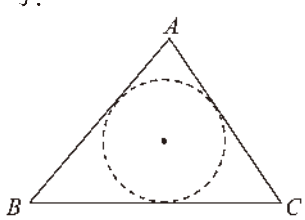


图 5-42

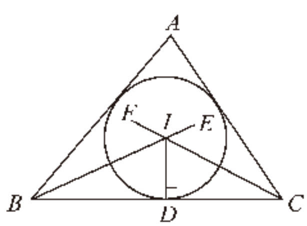


图 5-43

设这个圆为 $\odot I$，为使圆的面积最大，$\odot I$ 应当与$\triangle ABC$ 的三边都相切，所以点 I 到三角形三边的距离相等. 因此，点 I 在这个三角形三个角的平分线上，半径等于圆心到三边的距离.

已知$\triangle ABC$（如图 5-42），求作一个圆，使它与$\triangle ABC$的各边相切 .

作法：（1）作$\angle B$，$\angle C$的平分线BE和CF，交点为I（如图 5-43）.

（2）过点I作$ID \perp BC$，垂足是点D.

（3）以点I为圆心，以ID为半径作$\odot I$.

$\odot I$就是所求作的圆 .

在上面的作图过程中，因为点I是$\angle B$，$\angle C$的平分线BE和CF的交点，所以点I到$\triangle ABC$三边的距离相等，因此点I也在$\angle A$的平分线上. 因为BE和CF有且只有一个交点I，所以与$\triangle ABC$三边都相切的圆能且只能作出一个.

与三角形三边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**（inscribed circle of triangle）. 内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的**内心**（incenter）.

例 4　如图 5-44，在$\triangle ABC$中，$\angle A=68^\circ$，点I是$\triangle ABC$的内心，求$\angle BIC$的度数.

解：$\because$ 点I是$\triangle ABC$的内心，

$\therefore\ \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC,\ \angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB.$

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle 1+\angle 2&=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-68^\circ)=56^\circ.\end{aligned}$$

$\therefore\ \angle BIC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=180^\circ-56^\circ=124^\circ.$

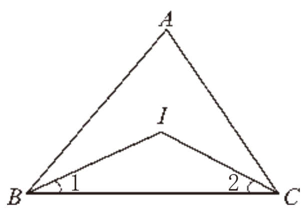
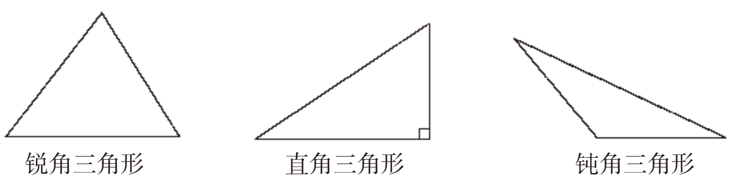


图 5-44

随堂练习

如图，已知锐角三角形、直角三角形、钝角三角形，分别作出它们的内切圆. 三角形的内心是否都在三角形的内部？



习题 5.12

知识技能

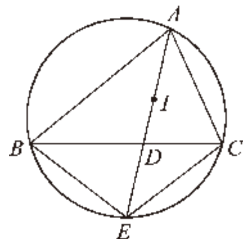
1. 在△ABC 中，$\angle A = 40^\circ$，$\angle B = 70^\circ$，点 I 是△ABC 的内心，求$\angle AIB$，$\angle BIC$ 和$\angle AIC$ 的度数.

2. 已知△ABC 的周长为 p，内切圆的半径为 r，求△ABC 的面积.

数学理解

3. 如图，点 I 是△ABC 的内心，AI 的延长线与 BC 相交于点 D，与△ABC 的外接圆相交于点 E.

找出图中相等的线段，并说明理由.



（第 3 题）

*7 切线长定理

过圆外一点画圆的切线，你能画出几条？试试看.

议一议

如图 5-45，PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A，B 是切点.

（1）这个图形是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？

（2）在这个图中你能找到相等的线段吗？说说你的理由.

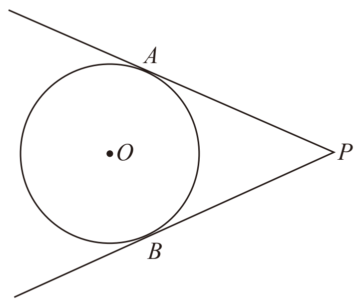


图 5-45

过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段长叫做这点到圆的**切线长**（length of the tangent）.

切线长定理 从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等.

我们来证明切线长定理.

已知：如图 5−46，PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A，B 是切点.

求证：$PA = PB$.

证明： 连接 OA，OB.

$\because$ PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $\angle PAO = \angle PBO = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle POA$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POB$ 中，

$\because$ $OA = OB$，$OP = OP$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle POA \cong \mathrm{Rt}\triangle POB$.

$\therefore$ $PA = PB$.

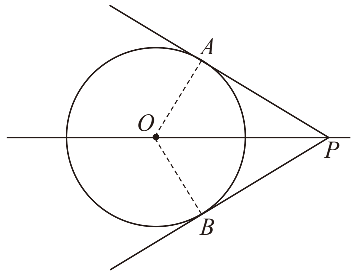


图 5−46

想一想

如图 5−47，四边形 $ABCD$ 的四条边都与 $\odot O$ 相切，图中的线段之间有哪些等量关系？与同伴交流.

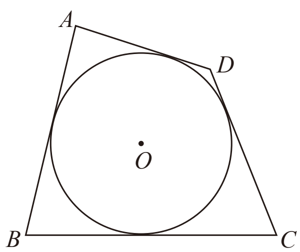


图 5−47

例 如图 5−48，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 $AC=10$，$BC=24$，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F，求 $\odot O$ 的半径.

解：连接 OD，OE，OF，设 $OD = r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC = 10$，$BC = 24$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26.$

$\because$ $\odot O$ 分别与 AB，BC，CA 相切于点 D，E，F，

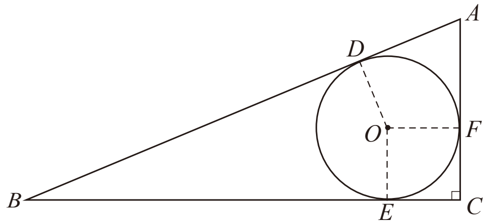


图 5-48

$\therefore OD \perp AB$，$OE \perp BC$，$OF \perp AC$，$BE = BD$，$AF = AD$，$CE = CF$.

又 $\because$ $\angle C = 90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $OECF$ 为正方形.

$\therefore EC = FC = r.$

$\therefore BE = 24 - r$，$AF = 10 - r.$

$\therefore AB = BD + AD = BE + AF = 34 - 2r.$

$\therefore 34 - 2r = 26.$

$\therefore r = 4$，

即 $\odot O$ 的半径为 4.

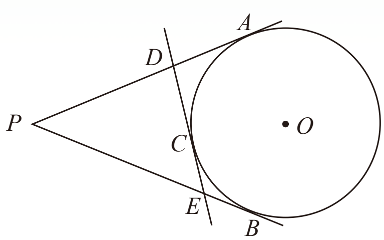
随堂练习

已知 $\odot O$ 的半径为 3 cm，点 P 和圆心 O 的距离为 6 cm. 过点 P 作 $\odot O$ 的两条切线，求这两条切线的切线长.

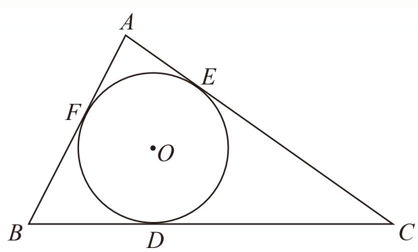
习题 5.13

知识技能

1. 如图，PA，PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A，B 两点. C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，分别与 PA，PB 相交于 D，E 两点，若 $PA = PB = 5$ cm，求 $\triangle PDE$ 的周长.



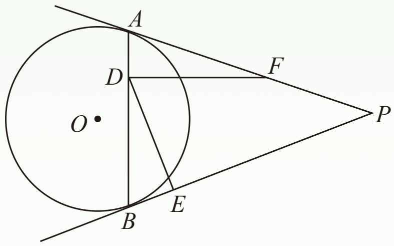
（第 1 题）



（第 2 题）

※**2.** $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC，CA，AB 分别相切于点 D，E，F，且 $AB=9$ cm，$BC=14$ cm，$CA=13$ cm，求 AF，BD，CE 的长．

3. 如图，过 $\odot O$ 外一点 P 作 $\odot O$ 的两条切线 PA 和 PB，点 A，B 为切点，$\angle P=40°$．点 D 在 AB 上，点 E 在 PB 上，点 F 在 PA 上，且 $AD=BE$，$BD=AF$，求 $\angle EDF$ 的度数．



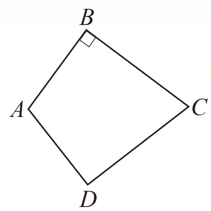
（第 3 题）

数学理解

4. 有一张如图所示的四边形纸片 $ABCD$，$AB=AD=6$ cm，$CB=CD=8$ cm，且 $\angle B=90°$．

（1）要把该四边形纸片裁剪成一个面积最大的圆形纸片，你能否用折叠的方法找出圆心？若能，请你度量出圆的半径；

（2）计算出最大的圆形纸片的半径．



（第 4 题）

8 正多边形和圆

你还记得什么叫做正多边形吗？你能举出正多边形的一些例子来吗？

议一议

如图 5–49，A，B，C，D，E 都是$\odot O$ 上的点，且$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$.

（1）弦 AB，BC，CD，DE 的长相等吗？为什么？

（2）$\angle ABC$，$\angle BCD$，$\angle CDE$ 相等吗？为什么？

（3）由（1）和（2），你能设计出画正 n 边形的方法吗？与同伴进行交流.

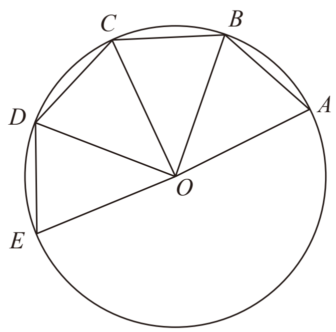


图 5-49

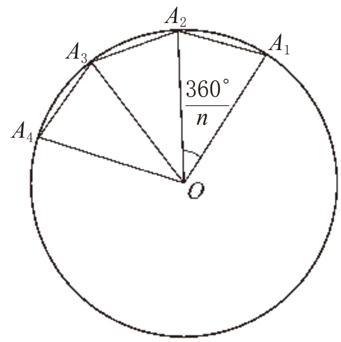


图 5-50

如图 5-50 所示，画一个 $\odot O$，用量角器画一个 $\frac{360°}{n}$ 的圆心角 $\angle A_1OA_2$，再以点 A_2 为圆心、以弦 A_2A_1 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得点 A_3，然后以点 A_3 为圆心、以弦 A_2A_1 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得点 A_4 …… 这样继续下去，就可以把 $\odot O$ 分成 n 等份，顺次连接这 n 个分点，便得到了 $\odot O$ 的一个**圆内接正 n 边形**.

做一做

你能用上面的方法画一个正五边形吗？试一试.

例 1 用尺规作一个正六边形.

作法：（1）任意画一个圆，记圆心为 O，如图 5-51 .

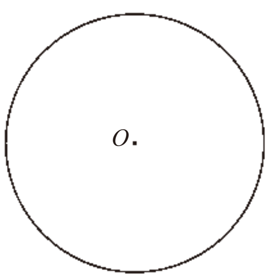


图 5-51

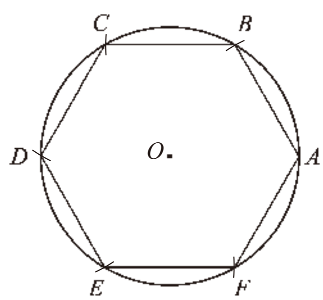


图 5-52

（2）在 ⊙O 上任取一点 A，自点 A 起在 ⊙O 上依次截取长度等于半径 OA 的弦，得到点 B，C，D，E，F.

（3）顺次连接点 A，B，C，D，E，F，A，如图 5—52.

六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形 .

议一议

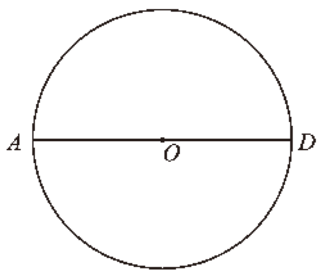
怎样用尺规作一个正十二边形？作一个正三角形呢？作圆内接正方形呢？与同伴进行交流.

随堂练习

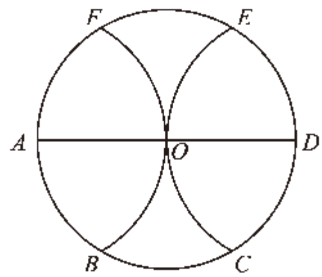
小颖用下面的方法作一个正六边形.

（1）任意画一个圆，记圆心为 O；

（2）任意作 ⊙O 的一条直径 AD，如图（1）；



（1）



（2）

（3）分别以 A，D 为圆心，以 ⊙O 的半径为半径作弧，与⊙O 相交于点 B，F 和点 C，E.

（4）顺次连接点 A, B, C, D, E, F, A. 六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形.

小颖的作法对吗？为什么？

读一读

用尺规作正五边形

用下面的方法可以作出正五边形.

（1）作 ⊙C.

（2）作直径 AB.

（3）作 BC 的中点 D.

（4）过点 C 作 AB 的垂线，交⊙ C 于点 P.

（5）以点 D 为圆心，以 DP 的长为半径作弧，交 AB 于点 E.

（6）以点 P 为圆心，以 PE 的长为半径作弧，交圆于一点. 再连续取三个等弧，连接端点，就可以作出圆内接正五边形.（如图 5-53）

利用作出的正五边形可以作出五角星. 试试看!

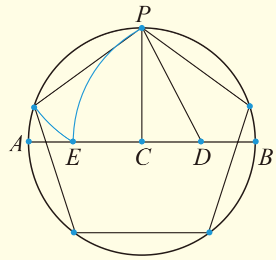


图 5-53

习题 5.14

知识技能

1. 用量角器画一个已知圆的内接正八边形.

2. 用尺规作一个正八边形.

3. 用等分圆周的方法画一个正五角星形.

做一做

观察下列正多边形：

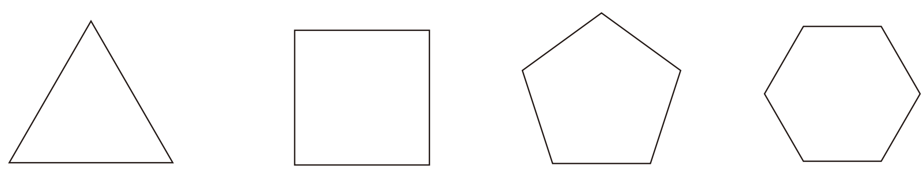


图 5-54

（1）它们都是轴对称图形吗？如果是，分别画出每个正多边形所有的对称轴.

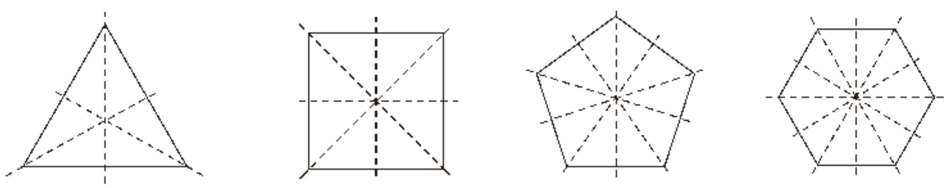


图 5-55

（2）它们分别有多少条对称轴？数一数，你发现了什么规律？正 n 边形有多少条对称轴？

（3）正多边形的对称轴具有什么特点?

正多边形都是轴对称图形．一个正 n 边形一共有 n 条对称轴，这 n 条对称轴相交于一点，这个点到正 n 边形各顶点的距离都相等，到各边的距离也都相等. 我们把这个点叫做正多边形的**中心**.

以正多边形的中心为圆心，以中心到一个顶点的距离为半径作圆，便得到这个正多边形的外接圆. 以正多边形的中心为圆心，以中心到一条边的距离为半径作圆，便得到这个正多边形的内切圆.

正多边形的外接圆的半径叫做**正多边形的半径**. 正多边形的内切圆的半径叫做**正多边形的边心距**. 正多边形每一条边所对的外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

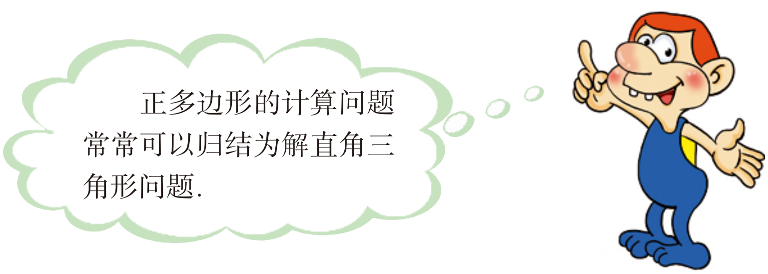
议一议

（1）正三角形、正方形、正五边形、正六边形的中心角分别是多少度？正 n 边形的中心角呢?

（2）将正 n 边形以它的中心为旋转中心，以它的中心角为旋转角进行旋转，你能得到什么结论?

如果一个正多边形的边数是偶数，那么它是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

过正 n 边形顶点的 n 条半径把正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形，每个等腰三角形又被相应的边心距分成两个全等的直角三角形.



例 2　已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径是 R，求这个正六边形的边长 a，周长 p 和面积 S.

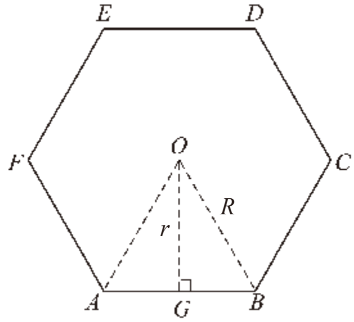


图 5−56

解： 如图 5−56，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，连接 OA，OB，作 $OG\perp AB$，垂足为点 G，可得到 $\mathrm{Rt}\triangle OGB$，其中 OG 为边心距，记为 r.

$$\because\ \angle GOB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{6}=30^\circ,$$

$$\therefore\ a=2R\sin 30^\circ=R,\ p=6a=6R.$$

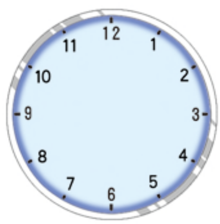
$$\because\ r=R\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times r\times a\times 6=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot 6R$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

随堂练习

1. 分别求出半径为 6 cm 的圆内接正三角形的边长和边心距.
2. 如图，钟表表盘上的圆周被均匀划分为 12 等份，如果表盘的半径为 10 cm，那么表盘上每相邻的两个刻度之间的距离是多少？



（第 2 题）

读一读

圆的周长及面积公式是怎样得出的

我们已经知道，圆的周长及面积公式是：

$$C = 2\pi R,$$

$$S = \pi R^2,$$

这里的 $\pi = 3.141\,59\cdots$，它是一个无理数，叫做圆周率.

上面的公式是怎样得出的呢？学过正多边形和圆的知识后，可以来说说其中的道理了.

由于一个圆被 n 等分后，顺次连接各分点，便得到一个正 n 边形. 如果再取这 n 条弧的中点，圆上便有 $2n$ 个分点，顺次连接这 $2n$ 个分点，可以得到一个正 $2n$ 边形. 这个正 $2n$ 边形便包围着原来的正 n 边形，这个正 $2n$ 边形的周长和面积都比原来正 n 边形的周长和面积大（图 5−57）. 继续这样做下去，可以得到边数为 $4n$，$8n$，…的圆内接正多边形. 可以看出，这样的圆内接正多边形随着边数的成倍增加，它们的周长和面积就越来越逼近圆的周长和面积. 这样，当已知圆的半径时，便可以通过计算它的边数为 n，$2n$，$4n$，…的圆内接正多边形的周长和面积，作为精确度不同的圆的周长和面积的近似值.

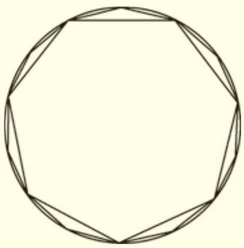


图 5−57

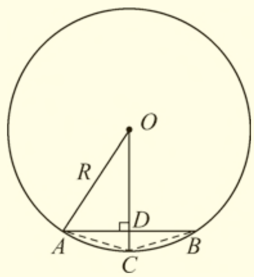


图 5−58

如果 $\odot O$ 的半径为 R，它的内接正 n 边形的边长 $AB = a_n$，我们来求它的内接正 $2n$ 边形的边长 $AC = a_{2n}$，如图 5−58.

$$\begin{aligned} a_{2n} = AC &= \sqrt{AD^2 + DC^2} \\ &= \sqrt{AD^2 + (OC - OD)^2} \\ &= \sqrt{AD^2 + \left(OC - \sqrt{OA^2 - AD^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot OC^2 - 2 \cdot OC\sqrt{OA^2 - AD^2}} \\ &= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}. \end{aligned}$$

利用这个递推的二倍边公式，由 $n=6$ 开始，逐步迭代算得结果如下：

边数 n	边长 a_n	周长 p_n	周长与直径的比 $\frac{P_n}{2R}$
6	$1.00000000\,R$	$6.00000000\,R$	3.00000000
12	$0.51763809\,R$	$6.21165708\,R$	3.10582854
24	$0.26105238\,R$	$6.26525722\,R$	3.13262861
48	$0.13080626\,R$	$6.27870041\,R$	3.13935021
96	$0.06543817\,R$	$6.28206396\,R$	3.14103198
192	$0.03272346\,R$	$6.28290510\,R$	3.14145255
384	$0.01636228\,R$	$6.28311544\,R$	3.14155772
768	$0.00818121\,R$	$6.28316941\,R$	3.14158471

随着 n 无限倍增，可以得到：p_n 趋近于 C，

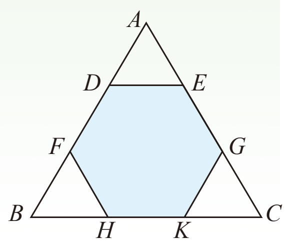
所以有
$$\frac{C}{2R}=\pi,$$
即
$$C=2\pi R.$$

再根据前面正 n 边形的面积公式
$$S_n=\frac{1}{2}r_n p_n,$$
其中 r_n 为正 n 边形的边心距，p_n 为它的周长. 当边数 n 无限增加时，r_n 趋近于 R，p_n 趋近于 C，所以圆的面积
$$S=\frac{1}{2}RC=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.$$

习题 5.15

知识技能

1. 如图，把边长为 6 的正三角形剪去三个三角形得一个正六边形 $DFHKGE$，求这个正六边形的面积.



（第 1 题）

2. 求半径为 6 cm 的圆内接正方形的边长、边心距和面积.

数学理解

3. 各边相等的圆内接四边形是正方形吗？各角相等的圆内接四边形呢？如果是，说明理由；如果不是，举出反例.

4. $\odot O$ 的半径为 r，其内接正三角形、正方形、正六边形的边长分别为 a，b，c.

（1）求 a，b，c 的值；

（2）以 a，b，c 为边可否构成三角形？如果能，构成的是什么三角形？如果不能，请说明理由.

问题解决

5. 画一个正五边形，再画出它的对角线，那么你会得到一个什么图案？

6. 正六边形螺帽的边长 $a = 12$ mm，当扳手的开口 b 为多少时，恰好能卡住螺帽？

（第 6 题）

9 弧长及扇形的面积

如图 5–59，某传送带的一个转动轮的半径为 10 cm .

（1）转动轮转一周，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

（2）转动轮转 $1°$，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

（3）转动轮转 $n°$，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

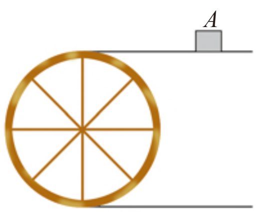


图 5–59

在半径为 R 的圆中，$n°$ 的弧的弧长（arc length）计算公式为

$$l = \underline{\qquad\qquad}.$$

例 1 如图 5−60，制作一段弯形管道时，需要先按图纸上的中心线计算“展直长度”再下料. 试计算图中所示的管道的展直长度（结果精确到 0.1 mm）.

解： 管道的展直长度即图纸上的中心线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长.

由图 5−60 可知，$R = 40$ mm，$n = 110$，所以

$$\overset{\frown}{AB} \text{ 的长} = \frac{n}{180}\pi R$$

$$= \frac{110}{180} \times 40\pi \approx 76.8 \text{（mm）}.$$

因此，管道的展直长度约为 76.8 mm.

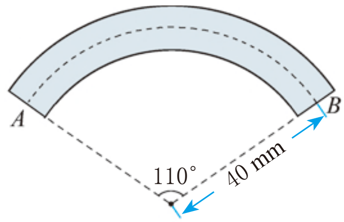


图 5−60

想一想

在一块空旷的草地上有一根柱子，柱子上拴着一条长 3 m 的绳子，绳子的另一端拴着一只狗.

（1）这只狗的最大活动区域有多大?

（2）如果这只狗只能绕柱子转过 $n°$ 角，那么它的最大活动区域有多大?

如果扇形的半径为 R，圆心角为 $n°$，那么扇形的面积计算公式为

$$S_{\text{扇形}} = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

比较扇形面积公式与弧长公式，你能用弧长来表示扇形的面积吗?

$$S_{\text{扇形}} = \underline{\qquad\qquad} l.$$

例 2 扇形 AOB 的半径为 12 cm，$\angle AOB=120^\circ$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长（结果精确到 0.1 cm）和扇形 AOB 的面积（结果精确到 0.1 cm^2）.

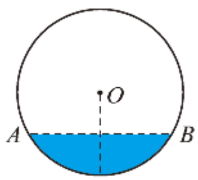
解： $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\dfrac{120}{180}\pi\times 12\approx 25.1$（cm）.

$S_{扇形}=\dfrac{120}{360}\pi\times 12^2\approx 150.7$（cm^2）.

因此，$\overset{\frown}{AB}$ 的长约为 25.1 cm，扇形 AOB 的面积约为 150.7 cm^2.

随堂练习

1. 如图，水平放置的一个油管的横截面半径为 12 cm，其中有油的部分油面高 6 cm，求截面上有油部分的面积（结果精确到 0.1 cm^2）.



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，某田径场的周长（内圈）为 400 m，其中两个弯道内圈（半圆形）共长 200 m，直线段共长 200 m，而每条跑道宽约 1 m（共 6 条跑道）.

（1）内圈弯道的半径为多少米？

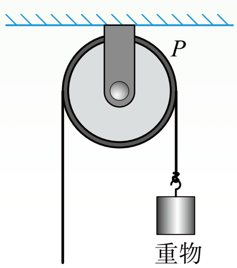
（2）一个内圈弯道与一个外圈弯道的长相差多少米？（结果精确到 0.1 m）

习题 5.16

知识技能

1. 已知圆上一段弧长为 4π cm，它所对的圆心角为 100°，求该圆的半径.

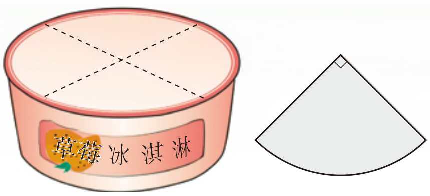
2. 如图，一个半径为 5 cm 的定滑轮带动重物上升了 10 cm，假设绳索与滑轮之间没有滑动，则滑轮上某一点 P 旋转了多少度？（结果精确到 1°）



（第 2 题）

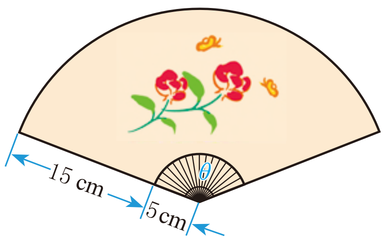
问题解决

3. 在圆柱形包装盒的侧面上设计商品的名称时，为了获得较好的视觉效果，名称的总长度（截面的弧长）所对的圆心角一般定为 90°（如图）．已知一个圆盒的底面半径为 5 cm，要在它的侧面设计“草莓冰淇淋”的字样，商标纸的长应为多少？（π 取 3.14）



（第 3 题）

4. 如图，某家设计公司设计了这样一种纸扇：纸扇张开的最大角度 θ 与 $360^{\circ}-\theta$ 的比为黄金比，那么制作一把这样的纸扇至少要用多少平方厘米的纸？（纸扇有两面，结果精确到 0.1 cm^2）



（第 4 题）

10 圆锥的侧面积

如图 5−61，在圆锥的底面圆周上取一点 A，连接点 A 和圆锥的顶点 V，所得到的线段 VA 叫做圆锥的一条**母线**（generating line）．沿这条母线将圆锥的侧面剪开，铺在一个平面上，便得到圆锥的侧面展开图.

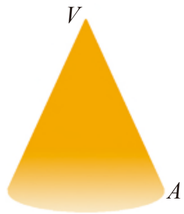


图 5−61

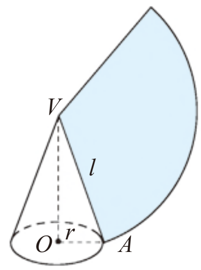


图 5−62

（1）圆锥的侧面展开图是什么图形？

（2）由（1）你能想到如何计算圆锥的侧面积吗？

圆锥的侧面展开图是一个扇形．如图 5−62，设圆锥的母线长为 l，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为________，扇形的弧长为________，因此圆锥的侧面积为________.

圆锥的侧面积与底面积之和称为圆锥的全面积（surface area）.

例　如图 5−63，某加工厂生产一种圆锥形的烟囱帽. 已知烟囱帽的底面周长为 83 cm，高为 10 cm. 要制作一个这样的烟囱帽，至少需要多少平方厘米的铁皮？（结果精确到 0.1 cm^2）

图 5−63

解：设烟囱帽的底面半径为 r cm，母线长为 l cm，则

$$r=\frac{83}{2\pi},$$

$$l=\sqrt{\left(\frac{83}{2\pi}\right)^2+10^2}\approx 16.57.$$

$$S_{圆锥侧}=\pi rl$$

$$\approx\frac{1}{2}\times 83\times 16.57\approx 687.7\ (\mathrm{cm}^2).$$

所以，至少需要 687.7 cm^2 的铁皮.

做一做

如图 5-64，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC=8$，要在 $\triangle ABC$ 中剪出一个扇形，使 $\triangle ABC$ 的三边分别与扇形的弧相切或与扇形的半径在同一条直线上.

（1）请画出符合要求的设计方案示意图；

（2）若用剪下的扇形作侧面围成圆锥，请计算出圆锥的底面半径.

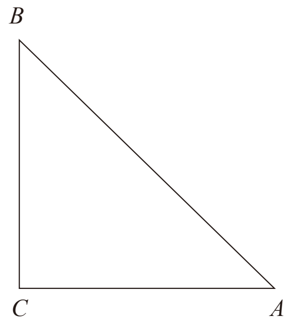


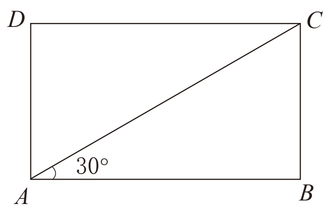
图 5-64

随堂练习

1. 已知一个圆锥的侧面展开图是半径为 r 的半圆，求这个圆锥的全面积.

2. 把一个用来盛爆米花的圆锥形纸杯沿母线剪开，可得到一个半径为 24 cm、圆心角为 118° 的扇形，求该纸杯的底面半径和高度（结果精确到 0.1 cm）.

3. 如图所示为一张矩形薄铁片 $ABCD$，对角线 $AC=8$，$\angle BAC=30°$．若用这张薄铁片作侧面焊接成一个圆柱状物体，求这个圆柱的底面积.



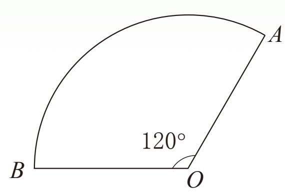
（第 3 题）

习题 5.17

知识技能

1. 工人师傅用一张如图所示的半径为 3 cm、圆心角为 120° 的扇形薄铁片做一个圆锥的侧面，求这个圆锥的底面半径.

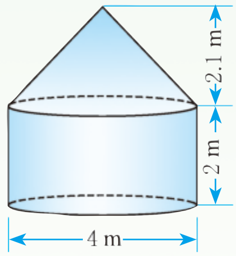
2. 一个圆锥的母线与高的夹角为 30°，母线长为 6 cm，求这个圆锥的侧面积（结果精确到 0.1 cm²）.



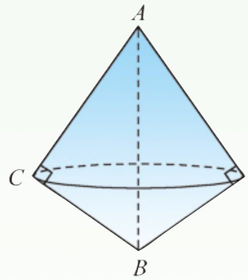
（第 1 题）

问题解决

3. 一种太空囊的示意图如图所示．太空囊的外表面须作特别处理，以承受重返地球大气层时与空气摩擦而产生的高热．求该太空囊要接受防高热处理的面积（结果精确到 $0.1\ \text{m}^2$）.



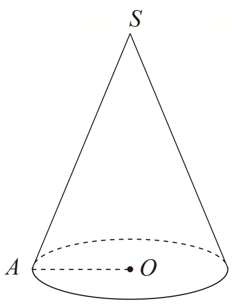
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 一个三角尺的两直角边长分别为 15 cm 和 20 cm．以它的斜边为旋转轴旋转这个三角尺，便形成如图所示的旋转体，求这个旋转体的全面积.（π 取 3.14）

5. 如图，已知圆锥底面半径为 10 cm，母线长为 30 cm，求一只蚂蚁从 A 处出发绕圆锥侧面一周（回到原来的位置 A）所爬行的最短路程.



（第 5 题）

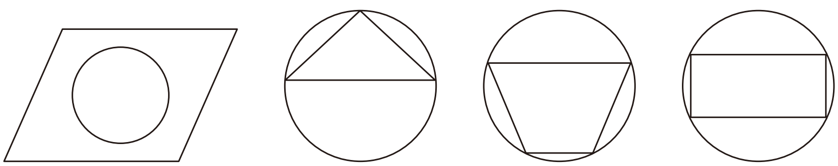
回顾与思考

1. 举例说明圆的轴对称性和中心对称性在生活中的应用.
2. 在同圆或等圆中，一条弧所对的圆周角与它所对的圆心角有什么大小关系?
3. 圆周角定理及其推论包含哪些内容? 你会证明它们吗?
4. 圆内接四边形的对角有什么关系? 你是怎么得到的?
5. 点与圆有哪些位置关系? 怎样判断? 直线与圆呢?
6. 圆的切线有哪些性质? 怎样判定一条直线是圆的切线?
7. 什么是三角形的内心和外心? 它们各有哪些性质?
8. 你对圆内接正多边形有哪些认识?
9. 举例说明如何计算弧长，如何计算扇形的面积，如何计算圆锥的侧面积和全面积.
10. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

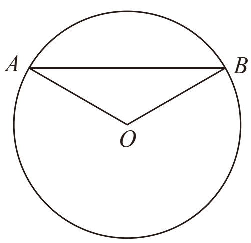
1. 观察下面四个图形，哪个既是轴对称图形又是中心对称图形?



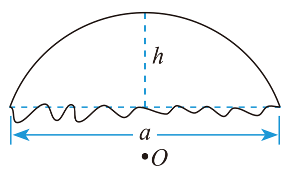
（1） （2） （3） （4）

（第 1 题）

2. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 $OA = 20$ cm，$\angle AOB = 120°$，求 $\triangle AOB$ 的面积.



（第 2 题）

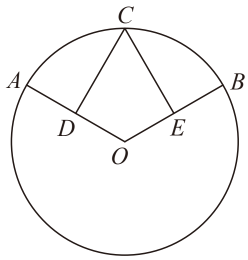


（第 3 题）

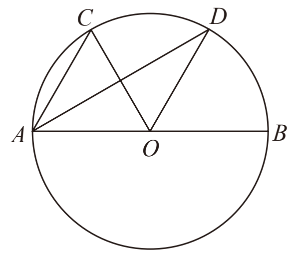
※**3.** 一个残破的车轮如图所示，测得它所剩圆弧两端点间的距离 $a = 0.72$ m，弧的中点

到弧所对弦的距离 $h = 0.25$ m，如果需要加工与原来大小相同的车轮，那么这个车轮的半径是多少？（结果精确到 0.001 m）

4. 如图，D，E 分别是半径 OA，OB 的中点，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$. CD 和 CE 的大小有什么关系？为什么？



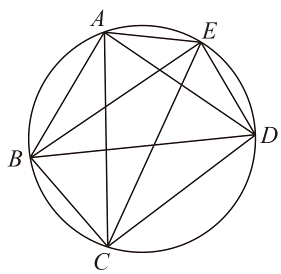
（第 4 题）



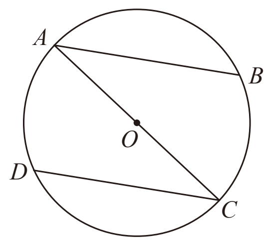
（第 5 题）

5. 如图，在直径为 AB 的 $\odot O$ 中，$\angle DAB = 30^\circ$，$\angle COD = 60^\circ$，OD平行于AC 吗？为什么？

6. 如图，请找出 4 组相等的圆周角.



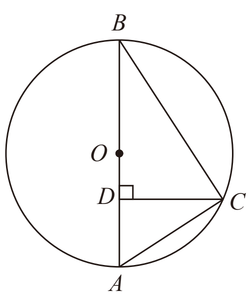
（第 6 题）



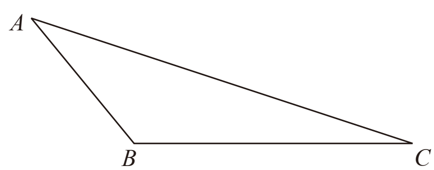
（第 7 题）

7. 如图，AC 是 $\odot O$ 的直径，AB，CD是 $\odot O$ 的两条弦，且 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$，求 $\overset{\frown}{DAB}$ 所对的圆周角的度数.

8. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB = 13$ cm，C为 $\odot O$ 上的一点，已知 $CD \perp AB$，垂足为点 D，并且 $CD = 6$ cm，$AD < DB$，求 AD 的长.



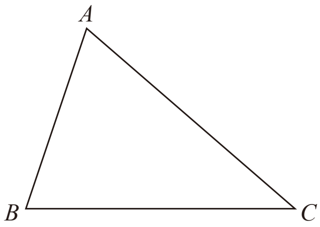
（第 8 题）



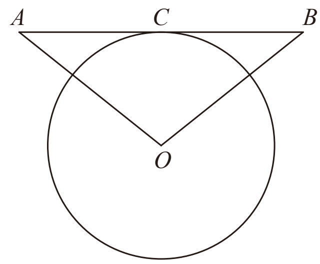
（第 9 题）

9. 如图，已知$\triangle ABC$，求作其外接圆.

10. 如图，已知$\triangle ABC$，求作其内切圆.



（第 10 题）



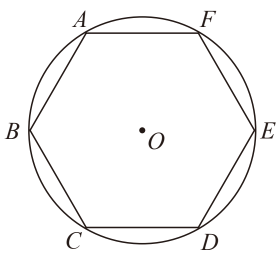
（第 11 题）

11. 如图，AB 与 $\odot O$ 相切于点 C，$OA = OB$，$\odot O$ 的直径为 8 cm，$AB = 10$ cm，求 OA 的长.

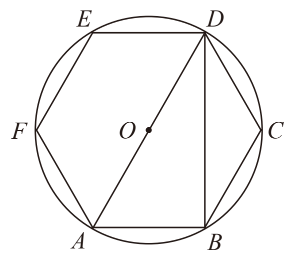
12. 完成下表中有关圆内接正多边形的计算.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°			$2\sqrt{3}$			
4					1		
6					$\sqrt{3}$		

13. 如图，已知 $\odot O$ 的周长等于 6π cm，求以它的半径为边长的正六边形 $ABCDEF$ 的面积.



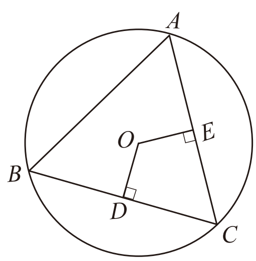
（第 13 题）



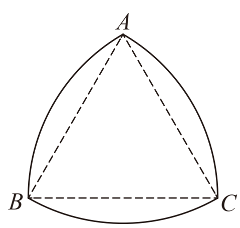
（第 14 题）

14. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，求 $\angle ADB$ 的度数.

※**15.** 如图，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 相等，$OD \perp BC$，$OE \perp AC$，垂足分别为点 D，E，且 $OD = OE$，那么$\triangle ABC$ 是什么三角形？为什么？



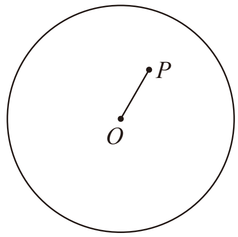
（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图所示的曲边三角形可按下述方法作出：作等边三角形 ABC；分别以点 A，B，C 为圆心，以 AB 的长为半径作 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AB}$. 三段弧所围成的图形就是一个曲边三角形. 如果一个曲边三角形的周长为π，那么它的面积是多少？

17. 如图，P 是半径为 4 cm 的 $\odot O$ 内的一点，$OP = 2$ cm，过点 P 的弦与圆弧组成弓形，当过点 P 的弦垂直于 OP 时，弦与其所对的劣弧所组成的弓形面积最小. 那么最小的弓形面积是多少？



（第 17 题）

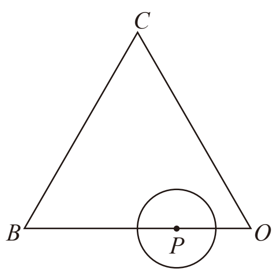
数学理解

18. 已知 A 为 $\odot O$ 上的一点，$\odot O$ 的半径为 1，该平面上另有一点 P.

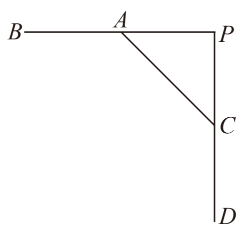
（1）若 $PA = \sqrt{5}$，那么点 P 与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？

（2）若 $PA = \sqrt{3}$，那么点 P 与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？

19. 如图，等边三角形 OBC 的边长为 10，点 P 沿 $O \to B \to C \to O$ 的方向运动，$\odot P$ 的半径为 $\sqrt{3}$. $\odot P$ 运动一圈与 $\triangle OBC$ 的边相切多少次？每次相切时，点 P 分别在什么位置？



（第 19 题）



（第 20 题）

20. 如图，直线 $AB \perp CD$，垂足为点 P，测得 $\angle ACP = 45°$，$AC = 6$ cm.

（1）用尺规在图中作一段劣弧，使得它在 A，C 两点分别与直线 AB 和 CD 相切；

（2）求该圆弧的长.

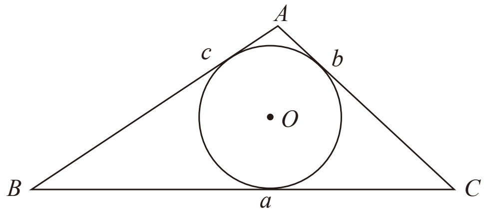
21. 已知点 A，B 和直线 l，作一个圆，使它经过点 A 和点 B，并且圆心在直线 l 上.

（1）当直线 l 与直线 AB 不垂直时，可作几个圆？

（2）当直线 l 与直线 AB 垂直但不经过 AB 的中点时，可作几个圆？

（3）当直线 l 是线段 AB 的垂直平分线时，可作几个圆？

※**22.** 设△ABC 的内切圆的半径为 r，△ABC 的周长为 l，求△ABC 的面积 S.

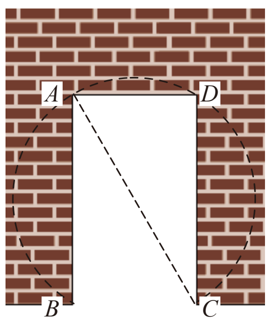


（第 22 题）

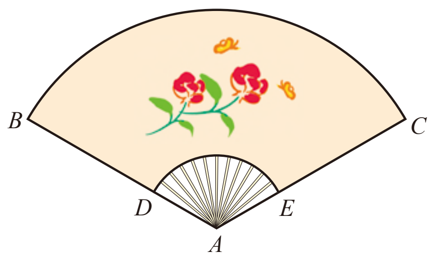
问题解决

23. 日常生活中有很多物体呈圆形，如碗口、水盆边沿等，你可以用哪些办法来确定这些呈圆形物体的半径？

24. 如图，花园边墙上有一宽为 1 m 的矩形门 $ABCD$，量得门框对角线 AC 的长为 2 m，现准备打掉部分墙体，使其变为以 AC 为直径的圆弧形门，那么要打掉墙体的面积是多少？（结果精确到 0.1 m^2）



（第 24 题）

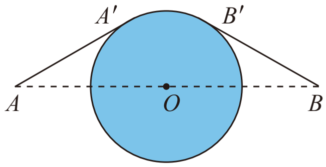


（第 25 题）

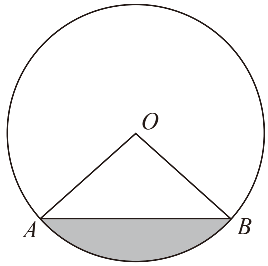
25. 如图，一扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB 和 AC 的夹角为 120°，AB 长为 30 cm，贴纸部分的宽 BD 为 20 cm，求贴纸部分的面积（纸扇有两面，结果精确到 0.1 cm^2）.

26. 铅球比赛的规则要求运动员在一固定圆圈内投掷．推出的铅球必须落在 40° 角的扇形区域内（以投掷圈的中心为圆心），这一区域为危险区域．如果运动员最多可投 7 m，那么这一比赛的危险区域的面积至少应是多少？（结果精确到 0.1 m^2）

27. 如图，相距 40 km 的两个城镇 A，B 之间有一个圆形湖泊，它的圆心落在 AB 连线的中点 O 处，半径为 10 km．现要修建一条连接两城镇的公路．经过论证，认为 $AA' + \overset{\frown}{A'B'} + B'B$ 为最短路线（其中 AA'，BB' 都与⊙O 相切）．你能计算出这段路线的长度吗？（结果精确到 0.1 km）



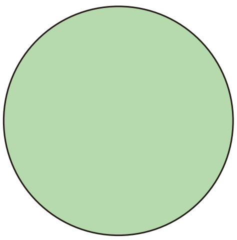
（第 27 题）



（第 28 题）

28. 如图，有一个马戏帐篷，它的底面是圆形，其半径为 20 m，从 A 到 B 有一笔直的栅栏，其长为 30 m. 观众在阴影区域里看马戏，如果每平方米可以坐 3 名观众，并且阴影区域坐满了人，那么大约有多少名观众在看马戏？

29. 如图，有一个圆形花坛，现要求将它三等分，以便在上面种植三种不同品种的花. 请给出你的设计方案.



（第 29 题）

（第 30 题）

30. 某居民小区要在一块矩形空地（如图）上建花坛，现征集设计方案，要求设计的图案由圆和正方形组成（圆和正方形的个数不限），并且使整个矩形场地为轴对称图形. 请给出你的设计方案.

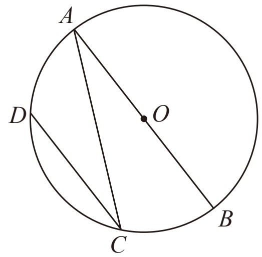
31. 一个圆锥形粮堆，底面周长为 15.7 m，高为 1.5 m，要用塑料布盖住这个粮堆，至少需要多少平方米的塑料布？（结果精确到 1 m^2）

32. 如果圆锥侧面展开图的面积是 $15\pi\ \mathrm{cm}^2$，母线的长是 5 cm，那么这个圆锥的底面半径是多少？

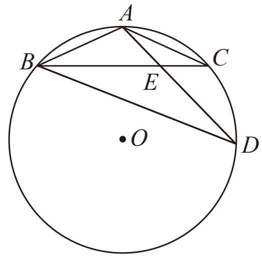
联系拓广

33. 用 50 m 长的篱笆在空地上围成一个绿化场地，现有几种设计方案，正三角形、正方形、正六边形、圆，哪种场地的面积最大？（可以利用计算器计算）

34. 如图，已知 $\odot O$ 的直径 $AB=d$，弦 $AC=a$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，求 A，D 两点间的距离.



（第 34 题）

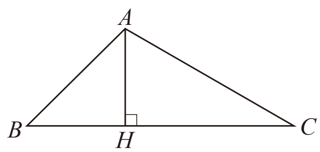


（第 35 题）

35. 如图，A，B，C，D 是 $\odot O$ 上的四个点，$AB=AC$，AD 与 BC 相交于点 E，$AE=2$，$ED=4$，求 AB 的长.

36. 某学校 A 位于工地 O 的正西方向，且 $OA=200$ m，一辆货车从 O 处出发，以 5 m/s 的速度沿北偏西 53° 方向行驶. 已知货车的噪声污染半径为 130 m，那么学校是否在该货车噪声污染范围内？若在，则学校受该货车噪声污染的时间有几秒？（结果精确到 1 s）

37. 如图，点 A 表示一个半径为 300 m 的圆形森林公园的中心，在森林公园附近有 B，C 两个村庄，且 $\angle B=45°$，$\angle C=30°$. 如果在 B，C 两村庄之间修一条长 500 m 的笔直公路将两村连通，那么该公路是否会穿过该森林公园？



（第 37 题）

第六章　对概率的进一步认识

连续抛掷两枚均匀的硬币，恰好一枚正面朝上、一枚反面朝上的概率是多少？你知道如何解决这个问题吗？

你们班有 2 个同学的生日相同吗？有人说，50 个人中很可能有 2 个人的生日相同. 你同意这种看法吗？

本章将进一步认识概率，探索用列表、画树状图的方法计算简单随机事件发生的概率，用试验或模拟试验的方法估计一些随机事件发生的概率. 通过抽签顺序、摸球、转盘游戏等问题体会数据的随机性，进一步认识频率与概率的关系.

概率的有关知识可以帮助你作出合理的判断与决策，解决现实生活中的问题.

学习目标

- 进一步认识频率与概率的关系，加深对概率的理解
- 会用画树状图和列表等方法计算简单随机事件发生的概率
- 能用试验或模拟试验的方法估计一些随机事件发生的概率
- 在试验和统计活动中，积累活动经验，体会概率与统计的关系

1 用树状图或表格求概率

小明、小颖和小凡都想去看周末电影，但只有一张电影票，三人决定一起做游戏，谁获胜谁就去看电影．游戏规则如下：

连续抛掷两枚质地均匀的硬币，如果两枚正面朝上，则小明获胜；如果两枚反面朝上，则小颖获胜；如果一枚正面朝上、一枚反面朝上，则小凡获胜.

你认为这个游戏公平吗?

做一做

连续抛掷两枚质地均匀的硬币，共有三种可能的结果：“两枚正面朝上”、“两枚反面朝上”和“一枚正面朝上、一枚反面朝上”．这三种结果发生的概率是否相同呢？还是动手做一做试验吧！

分组进行试验，记录每次试验的结果，分别计算“两枚正面朝上”、“两枚反面朝上”和“一枚正面朝上、一枚反面朝上”这三个事件发生的频数与频率，并由此估计这三个事件发生的概率.

通过试验我们发现，在一般情况下，“一枚正面朝上、一枚反面朝上”发生的概率大于其他两个事件发生的概率．所以，这个游戏是不公平的，它对小凡较有利.

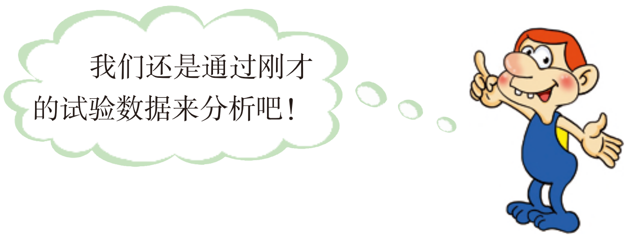
议一议

在上面抛掷硬币的试验中：

（1）抛掷第一枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？

（2）抛掷第二枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？

（3）在第一枚硬币正面朝上的情况下，第二枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？如果第一枚硬币反面朝上呢？



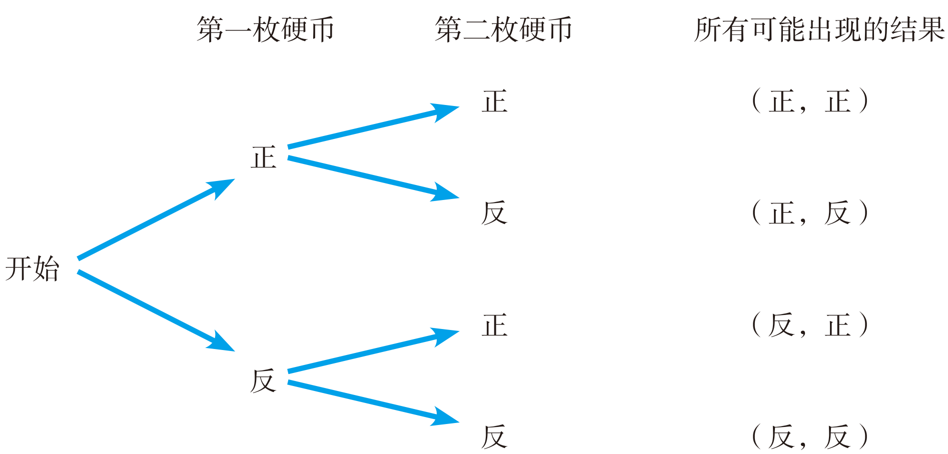
请将各自的试验数据汇总后，填写下面的表格：

抛掷第一枚硬币		抛掷第二枚硬币	
正面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	
反面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	

表格中的数据支持你的猜测吗?

抛掷第一枚硬币可能出现的结果是“正面朝上”或“反面朝上”，抛掷第二枚硬币可能出现的结果也是“正面朝上”或“反面朝上”.

我们常用下面的树状图或表格更好地反映这些所有可能出现的结果：



第一枚硬币 \ 第二枚硬币	正	反
正	（正，正）	（正，反）
反	（反，正）	（反，反）

由于硬币是均匀的，因此抛掷第一枚硬币出现“正面朝上”和“反面朝

上”的可能性相同. 无论抛掷第一枚硬币出现怎样的结果，抛掷第二枚硬币时出现“正面朝上”和“反面朝上”的可能性也是相同的. 所以，抛掷两枚均匀的硬币，出现的（正，正）、（正，反）、（反，正）、（反，反）四种结果是等可能的.

因此，小明获胜的结果有一种：（正，正），所以小明获胜的概率是 $\frac{1}{4}$；

小颖获胜的结果也有一种：（反，反），所以小颖获胜的概率也是 $\frac{1}{4}$；

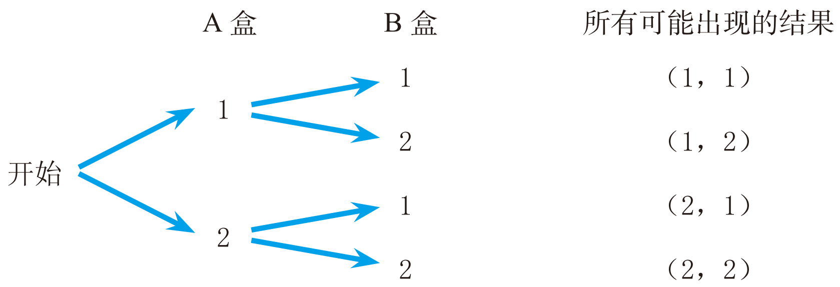
小凡获胜的结果有两种：（正，反）（反，正），所以小凡获胜的概率是 $\frac{2}{4}$，即 $\frac{1}{2}$.

所以，这个游戏对三人是不公平的.

利用树状图或表格，我们可以不重复、不遗漏地列出所有可能的结果，从而比较方便地求出某些事件发生的概率. 例如，在上面抛掷硬币的试验中，至少有一次正面朝上的结果有3种：（正，正）、（正，反）、（反，正），因此至少有一次正面朝上的概率为 $\frac{3}{4}$.

例 1 在 A，B 两个盒子中都装入分别写有数字 1，2 的两张卡片，分别从每个盒子中任取一张卡片，两张卡片上的数字之和为 3 的概率是多少?

解：分别从 A 盒、B 盒中任取一张卡片，卡片上的数字是 1 或 2 的可能性相同，所有可能出现的结果如下：



总共有4种可能的结果，每种结果出现的可能性相同. 其中两数之和为3的结果有2种，即（1，2）、（2，1）.

所以 P（和为 3）$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

如何用列表法求解例 1?

随堂练习

1. 小颖有两件上衣，分别为红色和白色；有两条裤子，分别为黑色和白色．她随意拿出一件上衣和一条裤子穿上，恰好是白色上衣和白色裤子的概率是多少？

2. 小亮的上衣有两个口袋，其中一个口袋中装有一张 5 元和一张 10 元的纸币，另一个口袋中也装有一张 5 元和一张 10 元的纸币．现从两个上衣口袋中各任取一张纸币，所取的两张纸币的钱数之和为 15 元的概率是多少？

习题 6.1

知识技能

1. 袋中装有 1 个红球、2 个白球，它们除颜色外都相同．每次从袋中随机地摸出一个球，求下列事件发生的概率：

（1）在第一次摸到红球的情况下，将该球放回袋中摇匀，再摸第二次，第二次摸到红球的概率是多少？

（2）如果第一次摸到的是白球，将该球放回袋中摇匀，第二次摸到红球的概率又是多少？

2. 准备两组相同的牌，每组两张，两张牌的牌面数字分别是 1 和 2．从每组牌中各摸出一张牌，称为一次试验．

（1）一次试验中两张牌的牌面数字之和可能有哪些值？

（2）利用树状图或表格，计算两张牌的牌面数字之和等于 4 的概率．

3. 一个盒子中装有 1 个红球、1 个白球，这两个球除颜色外都相同．从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，充分摇动后，再从中随机地摸出一个球．求：

（1）两次都摸到红球的概率；

（2）两次摸到不同颜色的球的概率．

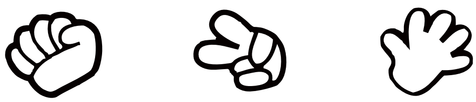
数学理解

4. 小明从一定高度随机地抛掷一枚均匀的硬币，他已经掷了两次硬币，结果都是“正面朝上”，那么，你认为小明第三次抛掷硬币时，“正面朝上”与“反面朝上”哪种可能性大？还是一样大？说说你的理由，并与同伴交流．

例 2 小明、小颖和小凡做“石头、剪刀、布”的游戏．游戏规则如下：

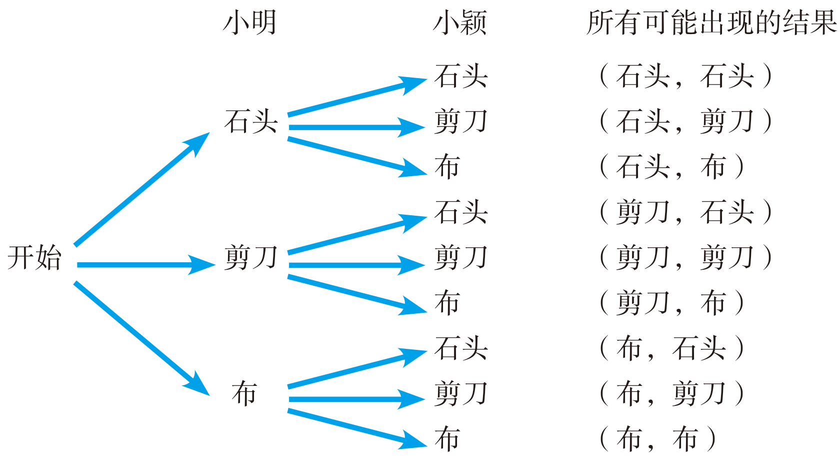
由小明和小颖玩“石头、剪刀、布”游戏，如果两人的手势相同，那么小凡获胜；如果两人手势不同，那么按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则决定小明和小颖中的获胜者．

假设小明和小颖每次出这三种手势的可能性相同，你认为这个游戏对三人公平吗？



石头　　剪刀　　布

解： 因为小明和小颖每次出这三种手势的可能性相同，所以可以利用树状图列出所有可能出现的结果：



总共有 9 种可能的结果，每种结果出现的可能性相同．两人手势相同的结果有三种：（石头，石头）、（剪刀，剪刀）、（布，布），所以小凡获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$；

小明胜小颖的结果有三种：（石头，剪刀）、（剪刀，布）、（布，石头），所以小明获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$；

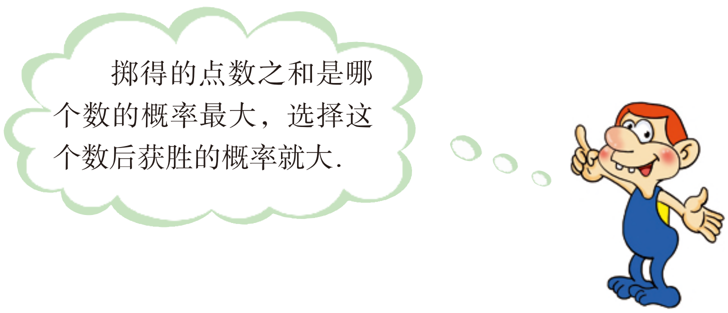
小颖胜小明的结果也有三种：(剪刀，石头)、(布，剪刀)、(石头，布)，所以小颖获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$．

所以，这个游戏对三人是公平的．

你能用列表法来求解例 2 吗？

做一做

小明和小军两人一起做游戏．游戏规则如下：每人从 1，2，…，12 中任意选择一个数，然后两人各掷一次均匀的骰子，谁事先选择的数等于两人掷得的点数之和谁就获胜；如果两人选择的数都不等于掷得的点数之和，就再做一次上述游戏，直至决出胜负．如果你是游戏者，你会选择哪个数？



随堂练习

有三张大小一样而画面不同的画片，先将每一张从中间剪开，分成上下两部分；然后把三张画片的上半部分都放在第一个盒子中，把下半部分都放在第二个盒子中．摇匀后，分别从每个盒子中各随机地摸出一张，求这两张恰好能拼成原来的一幅画的概率．

习题 6.2

知识技能

1. 准备两组相同的牌，每组三张，三张牌的牌面数字分别是 1，2，3．从每组牌中各摸出一张牌．

（1）两张牌的牌面数字之和等于1的概率是多少？

（2）两张牌的牌面数字之和等于2的概率是多少？

（3）两张牌的牌面数字之和为几的概率最大？

（4）两张牌的牌面数字之和大于3的概率是多少？

2. 经过某路口的行人，可能直行，也可能左拐或右拐．假设这三种可能性相同，现有两人经过该路口，求下列事件的概率：

（1）两人都左拐；

（2）恰好有一人直行，另一人左拐；

（3）至少有一人直行．

3. 掷两枚均匀的骰子，求下列事件的概率：

（1）至少有一枚骰子的点数为 1；

（2）两枚骰子的点数和为奇数；

（3）两枚骰子的点数和大于 9；

（4）第二枚骰子的点数整除第一枚骰子的点数.

4. 小亮从语文、数学、英语 3 本课本中任意抽取一本，又从这 3 门课的作业本中任意抽取一本. 课本和作业本恰好为同一门课的概率是多少？

数学理解

5. 小明和小军做掷骰子游戏，两人各掷一枚均匀的骰子.

（1）若两人掷得的点数之和为奇数，则小军获胜，否则小明获胜. 这个游戏对双方公平吗？为什么？

（2）若两人掷得的点数之积为奇数，则小军获胜，否则小明获胜. 这个游戏对双方公平吗？为什么？

联系拓广

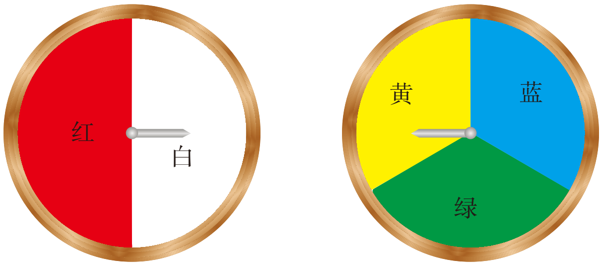
6. 如图，小明和小红正在玩一个游戏：每人先抛掷骰子，骰子朝上的数字是几，就将棋子前进几格，并获得格子中的相应物品. 现在轮到小明掷，棋子在标有数字“1”的那一格，小明能一次就获得“汽车”吗？小红下一次抛掷可能得到“汽车”吗？她下一次得到“汽车”的概率是多少？

※**7.** 在本节课的“石头、剪刀、布”游戏中，有一个人没有参与活动，有“任人宰割”的感觉，于是他们修改游戏规则如下：三个人同时玩“石头、剪刀、布”的游戏，如果三个人的手势都相同或三个人的手势互不相同，那么三个人不分胜负；如果有两个人的手势相同，则按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则决定胜负（有可能有两个胜者）.

这个游戏公平吗？先算一算，再做一做.

小颖为学校联欢会设计了一个“配紫色”的游戏：图 6-1 是两个可以自由转动的转盘，每个转盘被分成面积相等的几个扇形. 转盘 A 中的扇形分别涂

有红、白两种颜色，转盘 B 中的扇形分别涂有黄、蓝、绿三种颜色．游戏者同时转动两个转盘，如果转盘 A 转出了红色，转盘 B 转出了蓝色，那么他就赢了，因为红色和蓝色在一起配成了紫色．



A 盘　　　B 盘

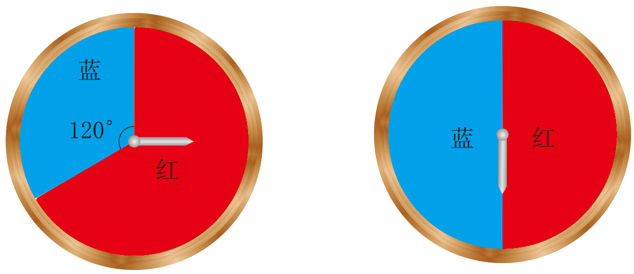
图 6-1

（1）利用树状图或表格表示游戏所有可能出现的结果．

（2）游戏者获胜的概率是多少？

想一想

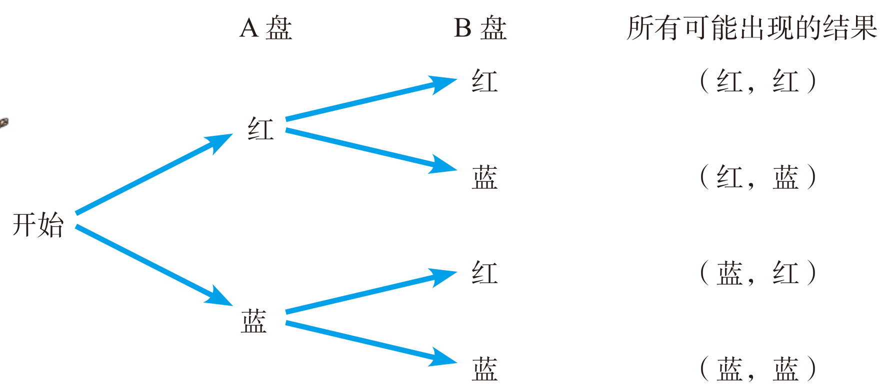
用图 6-2 所示的转盘进行“配紫色”游戏．



A 盘　　　B 盘

图 6-2

小颖制作了下面的树状图，并据此求出游戏者获胜的概率为 $\frac{1}{2}$．



小亮则先把转盘 A 的红色区域等分成 2 份，分别记作“红色 1”“红色 2”，然后制作了下表，据此求出游戏者获胜的概率也是 $\frac{1}{2}$.

B 盘 / A 盘	红色	蓝色
红色 1	（红 1，红）	（红 1，蓝）
红色 2	（红 2，红）	（红 2，蓝）
蓝色	（蓝，红）	（蓝，蓝）

你认为谁做得对？说说你的理由.

议一议

用树状图或表格求概率时应注意些什么？

例 3 一个盒子中装有 2 个红球、2 个白球和 1 个蓝球，这些球除颜色外都相同. 从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率.

解： 先将 2 个红球分别记为“红 1”“红 2”，2 个白球分别记为“白 1”“白 2”，然后列表如下：

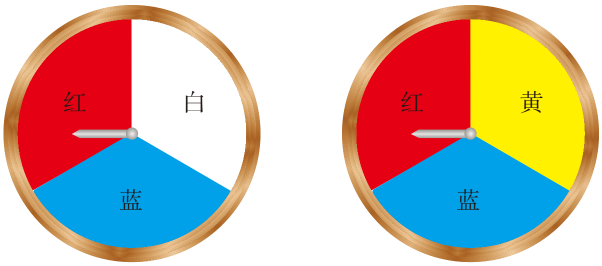
第二次 / 第一次	红 1	红 2	白 1	白 2	蓝
红 1	（红 1，红 1）	（红 1，红 2）	（红 1，白 1）	（红 1，白 2）	（红 1，蓝）
红 2	（红 2，红 1）	（红 2，红 2）	（红 2，白 1）	（红 2，白 2）	（红 2，蓝）
白 1	（白 1，红 1）	（白 1，红 2）	（白 1，白 1）	（白 1，白 2）	（白 1，蓝）
白 2	（白 2，红 1）	（白 2，红 2）	（白 2，白 1）	（白 2，白 2）	（白 2，蓝）
蓝	（蓝，红 1）	（蓝，红 2）	（蓝，白 1）	（蓝，白 2）	（蓝，蓝）

总共有 25 种可能的结果，每种结果出现的可能性相同. 两次摸到的球的颜色能配成紫色的结果有 4 种：（红 1，蓝）、（红 2，蓝）、（蓝，红 1）、（蓝，红 2），所以，

$$P(\text{能配成紫色}) = \frac{4}{25}.$$

随堂练习

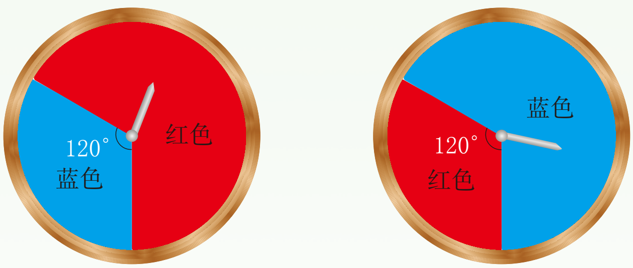
用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，每个转盘都被分成面积相等的三个扇形，配得紫色的概率是多少？



习题 6.3

知识技能

1. 用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，配得紫色的概率是多少？



（第 1 题）

2. 一个盒子中装有 3 个红球和 2 个白球，这些球除颜色外都相同．从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到相同颜色的球的概率．

3. 有两组卡片，第一组卡片上写有 A，B，B，第二组卡片上写有 A，B，B，C，C．分别利用树状图和表格，求从每组卡片中各随机地抽出一张，都抽到 B 的概率．

数学理解

4. 设计两个转盘进行“配紫色”游戏，使配得紫色的概率是 $\frac{1}{3}$．

2 生活中的概率

概率和日常生活有着密切的联系，对于生活中的随机事件，我们可以利用概率知识作出合理的判断与决策.

做一做

4 名同学都想去看周末的演唱会，但只有 1 张门票，只好用抽签的方法来解决. 他们做了 4 张一样的卡片，只有其中一张写有“门票”. 将 4 张卡片放在一起洗匀，让 4 个人依次抽取（抽完后不放回）. 先抽签的人比后抽签的人抽到“门票”的机会大吗?

小明：第一个人抽签的时候，无论如何，写有“门票”的卡片还在. 如果它被第一个人抽去了，后面的人就根本不用再抽了. 这样，后抽签的人显然比先抽的人吃亏了.

你认为抽签的先后会影响抽签的公平性吗?

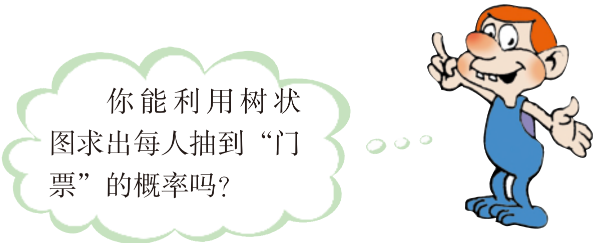
我们可以做如下的试验：每 4 个人一组，按顺序依次从中抽取 1 张卡片. 每组重复 20 次，将结果记录在下表中.

	第一人 抽到“门票”	第二人 抽到“门票”	第三人 抽到“门票”	第四人 抽到“门票”
出现的次数				
出现的频率				

（1）汇总全班的数据，分别估计出第一人、第二人、第三人、第四人抽到“门票”的概率.

（2）你认为抽签的次序对抽到“门票”的概率有影响吗?

抽签有先有后，但是先抽的人和后抽的人抽到“门票”的概率相同，因此对每个人来说都是公平的.



议一议

明天北京的降水概率是 60%，上海的降水概率是 80%. 假如明天北京降雨了，上海是否一定会降雨?

小明：因为 80%>60%，降水概率小的地方下雨了，降水概率大的地方当然也要下，所以上海一定会下雨.

“明天降雨”是一个随机事件，明天北京的降水概率是 60%，上海的降水概率是 80%，只是说明明天上海降雨的可能性比北京大，并不表示明天北京降雨了上海就一定会降雨. 如果明天北京降雨了而上海没有降雨，这只能说明可能性较小的事件发生了而可能性较大的事件却没有发生，这也正是随机事件发生的不确定性的体现.

随堂练习

有两个工厂生产同一种产品，已知甲厂产品的次品率为 0.001，乙厂产品的次品率为 0.01.

（1）若某人在甲厂购买该产品时买到了次品，他在乙厂购买相同数量的产品时是否一定会买到次品?

（2）若两个工厂的产品在价格等其他方面条件都相同，你会选择购买哪个工厂的产品?

习题 6.4

数学理解

1. 请举出一些日常生活中与概率有关的例子.

2. 下列说法正确吗？谈谈你的看法.

（1）现有一张周末演唱会的门票，四名同学都想去．为公平起见，他们采取抽签的办法来决定，这样每个人都有 50% 的概率得到门票；

（2）天气预报说明天的降水概率是 90%，所以明天一定会下雨；

（3）小颖买了很多次彩票但从来没有中过奖，所以她决定坚持买下去，因为她认为以后中奖的概率增大了.

联系拓广

3. 一位病人到医生那里就诊，医生在检查完病情后说：“你的病需要做手术，这种手术有一定的风险，手术的成功率是 90%.”

你如何应用概率的知识理解医生所说的含义？

4. 在篮球比赛中有一些与概率相关的数据，如“某球员投中三分球的概率”“某球员罚进球的概率”，你知道这些数据是怎样得到的吗？

*3 用频率估计概率

平面上画着一些平行线，相邻的两条平行线之间的距离都为 a，向此平面任投一长度为 l（$l<a$）的针，该针可能与其中某一条平行线相交，也可能与它们都不相交.

相交和不相交的可能性相同吗？你能通过画树状图或列表法求出该针与平行线相交的概率吗？

上述事件发生的概率，无法用画树状图、列表法求得，此时，我们常常可以通过大量重复试验，用事件发生的频率来估计它的概率.

做一做

先确定 l 和 a 的值，然后两个同学组成一组，至少完成 100 次试验，分别记录其中相交和不相交的次数．统计全班的试验数据，估计针与平行线相交的概率.

随堂练习

1. 在一个不透明的盒子里装有黑棋子和白棋子若干枚，请你设计一个估计盒子里黑棋子和白棋子数量的方案.

2. 某绿豆芽生产基地每天要向客户提供 5 000 kg 的绿豆芽，在正常情况下，1 kg 绿豆全部发芽，可发 4.5 kg 的绿豆芽. 该基地现新进了一批绿豆，工作人员首先从这批绿豆中随机地抽取若干绿豆，进行绿豆发芽率的试验，并将所得的数据记录在下表中.

抽取的绿豆数量 n/粒	发芽的绿豆数量 m/粒	绿豆发芽的频率 $\frac{m}{n}$
10	8	0.8
50	46	0.92
100	93	
500	462	
1 000	925	
1 500	1 397	
2 000	1 865	
3 000	2 793	
5 000	4 651	

（1）请完成上表；

（2）工作人员每天用多少千克这种绿豆发芽比较合适？

读一读

投针试验

历史上，法国数学家布丰（George-Louis Leelere de Buffon，1707—1788）最早设计了本节这个投针试验，并于 1777 年给出了针与平行线相交的概率的计算公式 $P=\frac{2l}{\pi a}$. 由于它与π有关，于是人们想到利用投针试验来估计π的值.

投针试验的历史资料

试验者	时间	投掷次数	相交次数	π 的试验值
Wolf	1850年	5 000	2 532	3.159 6
Smith	1855年	3 204	1 218.5	3.155 4
C. De Morgan	1860年	600	382.5	3.137
Fox	1884年	1 030	489	3.159 5
Lazzerini	1901年	3 408	1 808	3.141 592 9
Reina	1925年	2 520	859	3.179 5

在投针试验中，你们估计的针与平行线相交的概率P是多少？试计算$\frac{2l}{\pi a}$的值，看看你们估计的π值如何.

此外，随便说出3个正数，以这3个数为边长可以围成一个钝角三角形的概率P也与π有关.

值得注意的是这里采用的方法：设计一个适当的试验，它的概率与我们感兴趣的一个量（如π）有关，然后利用试验结果来估计这个量. 随着计算机等现代技术的发展，这一方法已经发展为具有广泛应用性的蒙特卡罗方法（Monte Carlo method）.

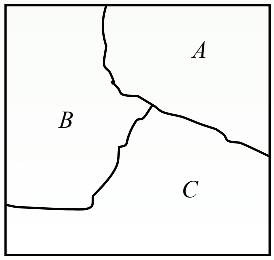
习题 6.5

问题解决

1. 农民在播种之前要了解种子在一定条件下的发芽率，请你设计一个方案，帮他们估计种子的发芽率.

联系拓广

2. 如图，边长为 10 cm 的正方形被两条曲线分成三个部分，请你设计一个试验，分别估算区域 A，B，C 的面积.



（第 2 题）

3. 随便说出 3 个正数，以这 3 个数为边长一定能围成一个三角形吗？一定能围成一个钝角三角形（其中最大边的平方大于另外两边的平方和）吗？估计能围成一个钝角三角形的概率.

400 个同学中，一定有 2 个同学的生日相同（可以不同年）吗？300 个同学呢？

可有人说：“50 个同学中，就很可能有 2 个同学的生日相同.”你同意这种说法吗？

议一议

为了说明上述说法正确与否，我们可以通过大量重复试验，用“50 个人中有 2 个人的生日相同”的频率来估计这一事件的概率. 请你设计试验方案并与同伴交流.

做一做

（1）每个同学课外调查 10 个人的生日.

（2）从全班的调查结果中随机选取 50 个被调查人的生日，记录其中有无 2 个人的生日相同. 每选取 50 个被调查人的生日为一次试验，重复多次试验.

（3）统计试验记录，并据此估计“50 个人中有 2 个人的生日相同”的概率.

想一想

（1）口袋中装有 3 个红球和 7 个白球，这些球除颜色外都相同，从袋子中随机摸出一个球，这个球是红球的概率是多少？

（2）口袋里装有红球和白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，那么你能设计一个试验方案，估计其中红球和白球的比例吗？

（3）生活中还有哪些问题的解决可以借助上面（2）的方案，与同伴交流.

随堂练习

1. 口袋里装有红球和白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 每次将球搅拌均匀，任意摸出一个球，记下颜色后再放回口袋里. 摸了 100 次球，发现其中 69 次摸到红球. 请你估计口袋里红球和白球各有多少个.

2. 课外调查的 10 个人的生肖分别是什么？他们中有 2 个人的生肖相同吗？6 个人中呢？利用全班的调查数据设计一个方案，估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率.

习题 6.6

数学理解

1. 小明和几个同学在课堂上进行摸球试验，大家认为，摸球的人每次摸球前应当将盒中的球摇一摇，使得每个球被摸到的可能性相同. 但小明有不同想法，他认为，如果连续两次都是自己摸球，那么他只要在第二次摸球时有意识地避开第一次放进去的那个球，而随意地摸取其他球，就可以保证每个球被摸到的可能性相同. 你觉得他的想法对吗？为什么？

问题解决

2. 你几月份过生日？和同学交流，看看 6 个同学中是否有 2 个人同月过生日．开展调查，看看 6 个人中有 2 个人同月过生日的概率大约是多少．

通过调查，我们估计了 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率．要想使这种估计尽可能精确，往往需要大量地增加调查对象，而这样做既费时又费力．能不能不用调查即可估计出这一概率呢？

我们在估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率时，可以用 12 个编有号码的、大小相同的球代替 12 种不同的生肖，这样每个人的生肖都对应着一个球．6 个人中有 2 个人生肖相同，就意味着 6 个球中有 2 个球的号码相同．因此，可在口袋中放入这样的 12 个球，从中摸出 1 个球，记下它的号码，放回去；再从中摸出 1 个球，记下它的号码，放回去……直至摸出第 6 个球，记下第 6 个号码，为一次试验．重复多次试验，即可估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率．

上面的方法是用摸球试验代替实际调查．类似这样的试验称为模拟试验．

议一议

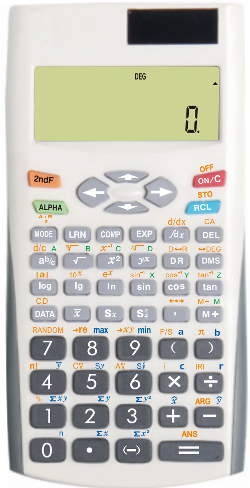
除了用大小相同的 12 个球进行模拟试验外，你还能想出其他方法吗？

事实上，还可以用计算器产生的随机数进行模拟试验．

使用计算器产生随机数的大体步骤是：进入产生随机数的状态，输入所产生的随机数的范围，按键得出随机数．[1]

[1] 不同计算器产生随机数的方法可能不同，同学们可利用自己所使用的计算器探索产生随机数的具体步骤．

例如，利用如图所示的计算器，产生随机整数的一般步骤如下：



1. 按 ON/C 键打开计算器，并清屏.

2. 按 2ndF RANDOM 7 2 键进入产生随机整数的状态.

3. 输入所产生的随机整数的范围，如随机整数的范围为1~12，则按键顺序为

1 · 1 2)

4. 按 = 键输出一个符合要求的随机整数.

5. 继续按 = 键，每次均输出一个符合要求的随机整数.

做一做

两人组成一个小组，利用计算器产生 1~12 之间的随机数，并记录下来. 每产生6个随机数为一次试验. 每组做10次试验，看看有几次试验中存在2个相同的整数. 将全班的数据集中起来，估计6个1~12之间的整数中有2个数相同的概率.

这一结果与上一课的估计一致吗?

通过试验估计随机事件发生的概率是一种很常见、很有效的方法. 我们以前所进行的抛硬币、掷骰子、摸球、转转盘、摸牌等活动，都是在进行概率试验.

对于很多简单的问题，我们借助上面的“道具”，依靠手工就可以完成. 然而，随着问题背景的逐步复杂，以及试验次数的不断增加，手工试验的不便之处就暴露出来了. 这时，我们可以借助一些计算机软件进行模拟试验. 有兴趣的同学可以查阅有关资料或上机试一试.

随堂练习

1. 用计算器模拟试验估计 50 个人中有 2 个人生日相同的概率：

两人组成一个小组，利用计算器产生 1 ~ 366 之间的随机数，并记录下来．每产生 50 个随机数为一次试验．每组做 5 次试验，看看有几次试验中存在 2 个相同的整数．将全班的数据集中起来，估计 50 个 1 ~ 366 之间的整数中有 2 个数相同的概率．

2. 老师有 5 张电影票，现在要将它们随机分给班上的 5 名同学，为了保证公正，你能利用计算器帮老师作出决定吗？

习题 6.7

数学理解

1. 如果手头没有硬币，那么你能用什么办法模拟掷硬币试验？你能用计算器模拟该试验吗？做一做，看看结果如何．

问题解决

2. 某种“15 选 5”的彩票规定：从 1 ~ 15 这 15 个数字中选择 5 个（可以重复），如果其中有 2 个与所公布的中奖号码（不妨设为 1，2，6，8，8）相同，即可获得四等奖．利用计算器模拟试验估计获得四等奖的概率．

3. 老师要求化学兴趣小组的 8 名同学每人在化学元素周期表中的前 20 号元素中随机选取一种元素了解其化学性质．利用模拟试验的方法估计有两人或两人以上选择同一种化学元素的概率．

回顾与思考

1. 用树状图或表格求概率时应注意些什么？请举例说明．
2. 你能用试验的方法估计事件发生的概率吗？请举例说明．
*3. 有时通过试验的方法估计事件发生的概率有一定的难度，你能否通过模拟试验的方法估计该事件发生的概率？请举例说明．
4. 你掌握了哪些求概率的方法？请举例说明．
5. 结合本章的内容，体会概率的意义及其实用价值．
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流．

复习题

知识技能

1. 在一个有 10 万人的小镇，随机调查了 2 000 人，其中 250 人看某电视台的早间新闻. 在该镇随便问一个人，他看该电视台早间新闻的概率大约是多少？

2.（1）连掷两枚骰子，它们的点数相同的概率是多少？

（2）转动如图所示的转盘（转盘被分成面积相等的 6 个扇形）两次，两次所得的颜色相同的概率是多少？

（第 2（2）题）

（3）某口袋放有编号为 1~6 的六个球，先从中随机地摸出一个球，将它放回口袋中，再摸一次，两次摸到的球相同的概率是多少？

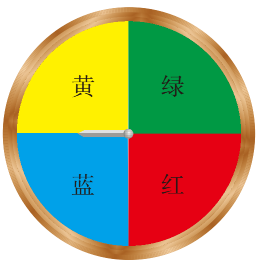
※（4）利用计算器产生 1~6 的随机整数，连续两次随机整数相同的概率是多少？

小明认为，上面几个求概率的问题本质上是相同的. 你同意他的观点吗？

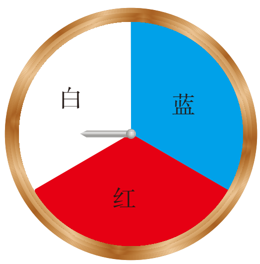
3. 一个密码锁的密码由四个数字组成，每个数字都是 0~9 这十个数字中的一个，只有当四个数字与所设定的密码相同时，才能将锁打开. 粗心的小明忘了中间的两个数字，他一次就能打开该锁的概率是多少？

4. 将三张大小一样而画面不同的画片从中间剪开，变成六张小卡片，把它们放在一个盒子中，摇匀后，随机地取两张，求这两张恰好能拼成原来的一幅画的概率.

5. 用如图所示的两个转盘（每个转盘被分成面积相等的几个扇形）进行“配紫色”游戏，配得紫色的概率是多少？



（1）



（2）

（第 5 题）

6.（1）一个盒子中装有 1 个红球、2 个白球和 2 个蓝球，这些球除颜色外都相同，从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率；

※（2）在上面的问题中，如果从中随机地摸出一个球，记下颜色后不放回，再从中随机地摸出一个球，那么两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率又是多少？

数学理解

7. 抛掷一枚均匀的硬币 5 次，其中 2 次正面朝上，3 次反面朝上，现再抛掷一次。

小明认为，因为硬币是均匀的，前面已经是 2 次正面朝上，3 次反面朝上，所以这一次一定是正面朝上，即这一次正面朝上的概率为 1；小凡认为，每次硬币正面朝上和反面朝上的可能性是相同的，所以这一次正面朝上的概率仍为 $\frac{1}{2}$.

你同意谁的观点？你是怎么想的？

8. 对下列说法谈谈你的看法：

（1）小明的幸运数字是“6”，所以他在买彩票时选数字“6”中奖的概率比他选其他数字中奖的概率要大；

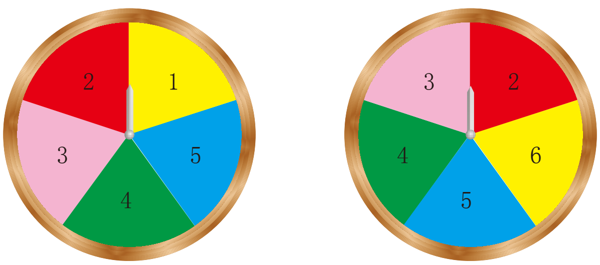
（2）某彩票在前 3 次的中奖号中都出现了数字“5”，小华在这次买彩票时决定不选“5”，他认为“5”在这次出现的概率肯定很小了.

9. 小明说：“掷两枚均匀的骰子，掷得两个点数 6 的概率应是 $\frac{1}{6}$ 的一半，即 $\frac{1}{12}$.”

你认为小明的说法正确吗？为什么？

10. 一个人的生日在周六或周日的概率是多少？

11. 小明和小亮用如图所示的两个转盘（每个转盘被分成面积相等的 5 个扇形）做游戏，转动两个转盘各一次.



（1）　　　　（2）

（第 11 题）

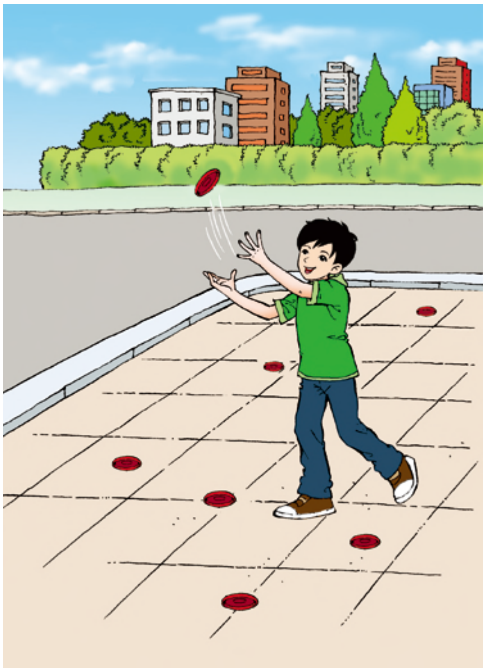
（1）若两次数字之和为 6，7 或 8，则小明胜，否则小亮胜. 这个游戏对双方公平吗？说说你的理由；

（2）若两次数字之和为奇数，则小明胜；若和为偶数，则小亮胜. 这个游戏对双方公平吗？说说你的理由.

※**12.** 小明有 3 双黑袜子和 1 双白袜子（每双袜子除颜色外都相同），假设袜子不分左右，那么从中随机抽取 2 只恰好配成一双的概率是多少？如果袜子分左右呢？你是怎么做的？与同伴进行交流.

问题解决

※**13.** 如图，地面上铺满了正方形的地砖（40 cm × 40 cm），现在向这一地面上抛掷半径为 5 cm 的圆碟，圆碟与地砖间的间隙相交的概率大约是多少？具体做做看！



（第 13 题）

联系拓广

※**14.** 连续抛掷 3 枚均匀的硬币.

（1）3 枚硬币都是正面朝上的概率是多少？

（2）你觉得求解本题时，适合用树状图还是列表格的方法？

※**15.** 小明将 36 个球放入标有 1，2，…，12 这 12 个号码的 12 个盒子中，然后抛掷 2 枚均匀的骰子，掷得的点数之和是几，就从几号盒子中摸出一个球. 为了尽快将球摸完，你觉得应该怎样放球？

综合与实践

哪种方式更合算

也许你曾被大幅的彩票广告所吸引，也许你曾经历过各种摇奖促销活动. 你研究过获得各种奖项的可能性吗？你想知道每一次活动的平均收益吗？

让我们一起去研究其中的奥秘吧！

某商场为了吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘（如图 1，转盘被等分为 20 份），并规定：顾客每购买 100 元的商品，就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域，那么顾客就可以分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券，凭购物券可以在该商场继续购物. 如果顾客不愿意转转盘，那么可以直接获得购物券 10 元. 转转盘和直接获得购物券，你认为哪种方式对顾客更合算？

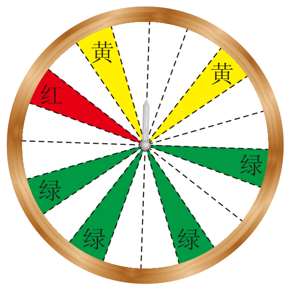


图 1

做一做

当你遇到复杂的问题无法做出判断时，不妨先观察一下别人的结果，积累点经验. 因此可以在商场多观察几次. 当然，我们也可以模拟商场的情景用试验的方式获得经验.

（1）组成合作小组，仿照图 1 制作一个转盘，用试验的方法（每组试验 100 次）分别求出获得 100 元、50 元、20 元购物券以及未获得购物券的频率，并据此估计每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数. 看看转转盘和直接获得购物券，哪种方式更合算.

（2）全班交流，看看各小组的结论是否一致，并将各组的数据汇总，计算每转动一次转盘所获购物券金额的平均数.

想一想

当然，我们不能停留于试验，还希望不借助试验也能求出每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数.

（1）影响每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数的因素有哪些？与同伴交流.

（2）将图 1 的转盘改成图 2 的转盘，如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域，那么顾客仍分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券．与图 1 的转盘相比，用哪个转盘对顾客更合算？

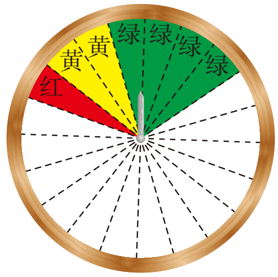


图 2

（3）不用试验的方法，求出每转动一次转盘（如图 1）所获得的奖券金额的平均数，与同伴交流.

做一做

如图 3，转盘被均匀分为 37 格，分别标以 0～36 这 37个数字，且所有写有偶数（0 除外）的格子都涂成了红色，写有奇数的格子都涂成了蓝色，而 0 所在的格子被涂成了绿色．游戏者可以自由下赌注．例如，游戏者所下赌注为 1 元，若最后指针所指的格子与所押的格子颜色相同，则返还赌本并奖励 1 元；若颜色相异，则没收赌本；若最后指针指向“0”，则没收赌本而奖励 0.5 元．你认为该游戏对游戏者有利吗？转动多次后，游戏者平均每次将获利或损失多少元？

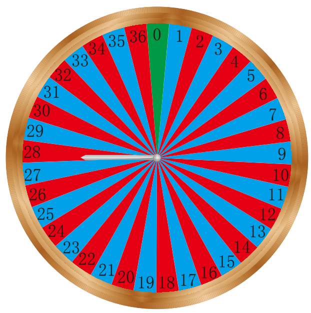


图 3

议一议

生活中，你还见过哪些与概率有关活动，与同伴交流.

做一做

选择生活中的某一活动（如彩票、摇奖或街头摸球游戏等），利用概率统计知识揭示其中的规律，并撰写一份研究报告，在全班进行交流.

习题

熙熙攘攘的集市上，某人在设摊“摸彩”. 只见他手拿一袋，内装大小、形状、质量完全相同的 4 个绿球和 4 个红球. 每次让顾客“免费”从袋中摸出 4 个球，输赢的规则是：

所摸球的颜色	顾客的收益
4 个全红	得 5 元
3 红 1 绿	得 2 元
2 红 2 绿	得 −3 元
1 红 3 绿	得 2 元
4 个全绿	得 5 元

你愿意参加这一“免费”的摸球活动吗？说说你的看法.

综合与实践

统计活动

——视力的变化

在日常生活中，我们可能会有这样的感觉：在中学阶段，视力随着年龄的增加而逐渐变差. 那么，实际情况是否的确如此呢？

做一做

为了了解本班同学的视力变化情况，我们可以以小组为单位，按照如下的步骤合作完成下列统计活动.

1. 确定调查对象

根据调查的问题，我们选定全班所有同学作为调查对象.

2. 收集数据

每位同学分别查找并记录近期和上一年度自己左右眼的视力情况，填入下表：

姓名	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力

3. 整理、表示数据

（1）先将本小组成员收集到的数据按下表汇总：

第______小组

视力情况 成员	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力
小组成员 1				
小组成员 2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
小组成员 n				

（2）再把班上所有同学的数据按照小组进行汇总，得到下表：

视力情况 成员	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力
第 1 小组				
第 2 小组				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 m 小组				

将上面的数据用适当的统计图表示出来，并与同伴进行交流. 你觉得用哪种统计图表示更合适?

4. 分析数据

（1）分别计算近期和上一年度左右眼视力的平均数、中位数、众数、极差和方差，你发现了什么?

（2）分别计算近期和上一年度的视力不良率，并进行比较.（凡是单眼视力在 5.0 以下的都算作视力不良）

5. 作出推断

根据上面的数据，你能得到什么结论? 它与你在从事这个统计活动之前的猜想一致吗?

议一议

若要了解全校范围内学生的视力状况随年龄的变化趋势，你将如何进行统计活动?

想一想

回顾前面统计活动的过程，回答下列问题，并与同伴交流：

（1）调查的问题和目的分别是什么？你经历了哪些主要的步骤？

（2）确定调查对象时应当注意什么？

（3）你认为如何收集数据比较方便？你将如何对收集到的数据进行整理和表示？

（4）想得到一个比较客观的结论，应当对数据做哪些分析？

做一做

请根据全班同学课前收集的数据，分析不同年级学生的视力状况是否随着年级的升高而逐渐变差.

学生的视力状况是从七年级到八年级的变化更显著，还是从八年级到九年级的变化更显著？

姓名	九年级学生近期视力情况		姓名	八年级学生近期视力情况		姓名	七年级学生近期视力情况	
	左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力

议一议

（1）针对中学生视力的变化状况，我们还可以研究哪些问题？

（2）为了更好地保护视力，你能给学弟学妹们提供哪些建议？

习题

1. 请调查你所在班级的同学在六、七、八、九年级的视力情况，并分析视力的变化趋势.

2. 如果要调查全市范围内初中生的视力状况随年级的变化趋势，你该如何应用统计方法来说明？如果要调查全国范围内的呢？

综合与实践

折纸与数学

以前的数学学习中，我们遇到过一些与折纸有关的问题. 折纸中蕴涵着许多数学知识，你想过吗?

做一做

分别按下列要求折纸:

折纸 1：过 A，C 两点折叠矩形纸（如图 1），折痕有几条?

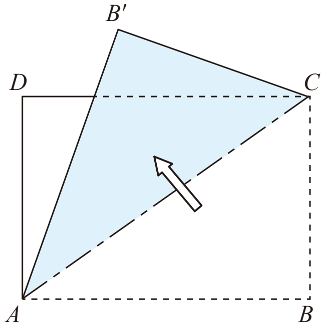


图 1

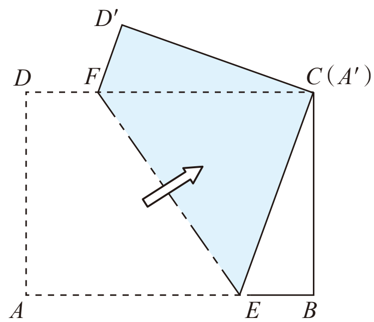


图 2

折纸 2：折叠矩形纸，使 A，C 两点重合（如图 2），EF 是折痕. A，C 两点与直线 EF 是什么关系? 若连接 AC，则线段 AC 与直线 EF 是什么关系?

折纸 3：折叠矩形纸，使 AB 与 DC 重合（如图 3），EF 是折痕. 直线 AB，DC 与 EF 是什么关系?

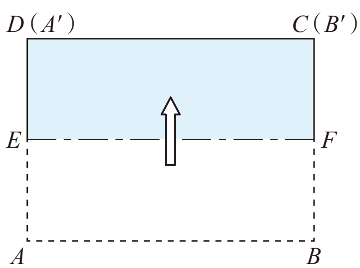


图 3

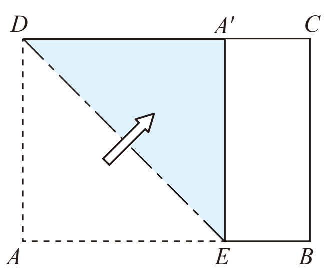


图 4

折纸 4：折叠矩形纸，使 AD 与 CD 重合（如图 4），DE 是折痕．$\angle ADC$ 与 DE 是什么关系？

折纸 5：P 是 AB 边上的一点，过点 P 折叠矩形纸，使折痕与直线 AB 垂直（如图 5）．

图 5 中，R 是 AB 外一点，你能否过点 R 折叠矩形纸，使折痕与直线 AB 垂直？试一试．

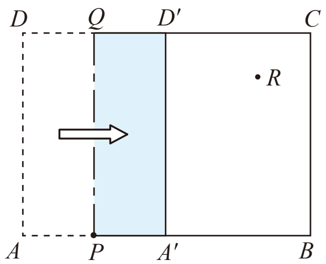


图 5

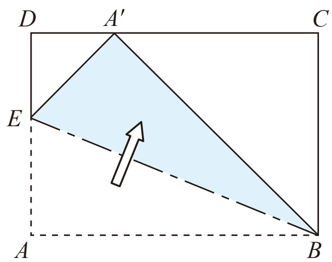


图 6

折纸 6：B 点不动，将 AB 边折起，使点 A 落在 DC 边上的 A' 处（如图 6）．

若点 B 不动，将 BC 折起，能否使点 C 落在 AD 边上？为什么？

议一议

（1）通过以上操作，你认为折纸与轴对称有什么联系？

（2）折纸 1 ~ 6 的六种基本操作方法分别相当于尺规作图中的哪些操作？与同伴进行交流.

我们可以得到下面的结论：

将一张纸上一条直线一侧的图形绕这条直线翻折 180°，翻折前后的两个图形关于这条直线（折痕）成轴对称.

想一想

剪下一张三角形纸片，你能用几种方法折出它的一条中位线？

做一做

1. 通过折纸检验一张 A4 打印纸的宽与长的比是否 $1:\sqrt{2}$.

2. 你能用矩形纸折出一个菱形吗？你有几种方法？先想一想，再做一做.

3. 小明认为若有一张矩形纸，折两次就可以折出 30° 角（如图 7）.

（1）你能说明小明这种折法的道理吗？

（2）你能用矩形纸折出一个等边三角形吗？

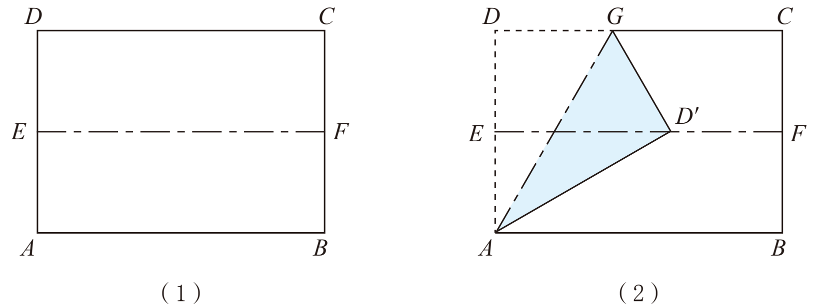


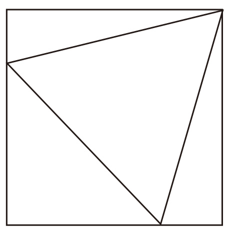
图 7

习题

1. 折出矩形纸一条对角线的一个三等分点.

2. 用正方形纸折出边长与正方形边长相等的等边三角形.

3. 用正方形纸折出一个顶点在正方形的顶点上的等边三角形（如图）.



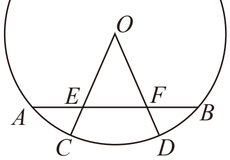
（第 3 题）

总复习题

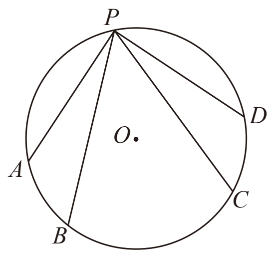
- 整理本学期学过的知识与方法，用一张图把它们表示出来，并与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

知识技能

1. 如图，AB 是⊙O 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于点 E，F，且 $AE=BF$. OE 与 OF 的大小有什么关系？为什么？



（第 1 题）

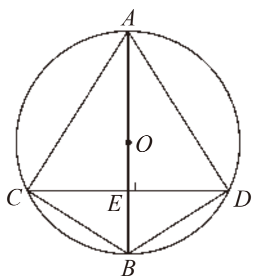


（第 2 题）

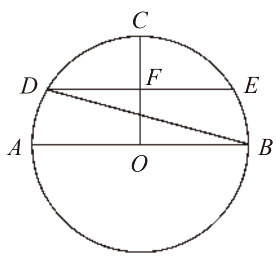
2. 如图，A，B，C，D，P 是⊙O 上的五个点，且 $\angle APB=\angle CPD$. $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的大小有什么关系？为什么？

3. 已知直线 l 及 l 外一点 A，以 A 为圆心作圆与直线 l 相切.

4. 如图，⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足为点 E，连接 AC，AD，BC，BD. 图中有哪些相等的量？请分别写出来.



（第 4 题）



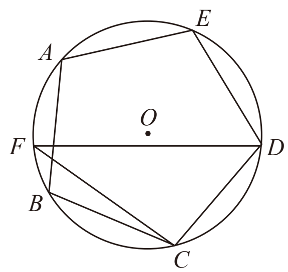
（第 5 题）

5. 如图，$\odot O$ 的半径 OC 与直径 AB 互相垂直，F 是 OC 的中点，弦 DE 经过点 F，且 $DE /\!/ AB$. $\angle ABD$ 的度数是多少？

※6. 两个圆的圆心相同，半径分别为 1 cm 和 2 cm，大圆的弦 AB 与小圆相切，求 AB 的长度.

7. $\odot O$ 的周长为 a cm，面积为 a cm^2，如果点 O 到一条直线的距离为 π cm，那么这条直线与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？

8. 如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$，点 F 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，求 $\angle CFD$ 的大小.



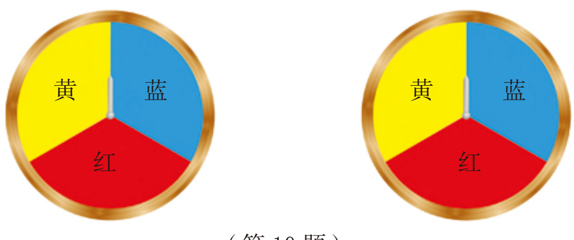
（第 8 题）

9. 两道单选题都含有 A，B，C，D 四个选项，瞎猜这两道题，恰好全部猜对的概率是多少？

10. 小明和小亮用下图中两个转盘（每个转盘被分成面积相等的 3 个扇形）做“配紫色”游戏.

（1）分别转动两个转盘，若配成紫色，则小明赢，否则小亮赢. 这个游戏对双方公平吗？

（2）若两个转盘颜色相同或者可以配成紫色，则小明得 1 分，否则小亮得 1 分. 这个游戏对双方公平吗？如果你认为公平，请说明理由；否则，如何修改得分规则才能使游戏对双方公平？

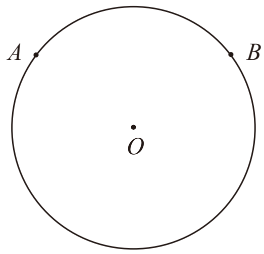


（第 10 题）

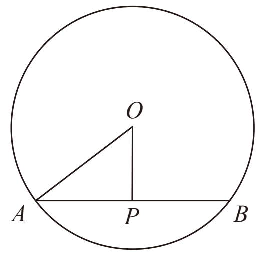
11. 两人一组，每人在纸上随机写一个不大于 5 的正整数，两人所写的正整数恰好相同的概率是多少？你是怎么计算的？

数学理解

12. 如图，A，B 是圆上的任意两点，如何找到关于这两点的对称轴？你有哪些方法？



（第 12 题）

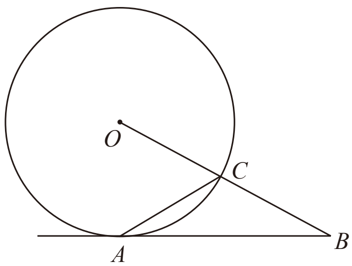


（第 13 题）

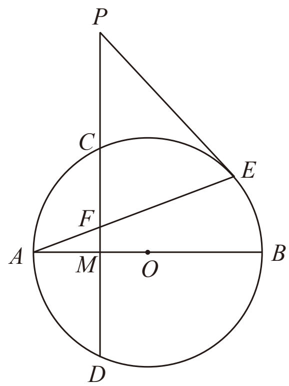
13. 如图，$\odot O$ 的直径为 10 cm，弦 $AB = 8$ cm，P 是弦 AB 上的一个动点，求 OP 的长度范围.

14. 半径为 5 的$\odot O$ 中，点 A 与圆心 O 的距离为 2，直线 l 与点 A 的距离为 3，且直线 OA 与 l 垂直，则直线 l 与$\odot O$ 有怎样的位置关系？

15. 如图，在$\odot O$ 中，AC 是弦，$AC = OC$，延长半径 OC 到点 B，使 $CB = OC$. AB 是$\odot O$ 的切线吗？为什么？



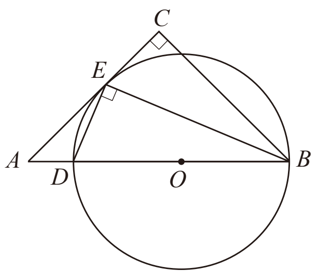
（第 15 题）



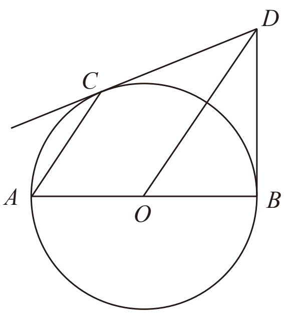
（第 16 题）

16. 如图，在$\odot O$ 中，直径 AB 与弦 CD 相交于点 M，且 M 是 CD 的中点，点 P 在 DC 的延长线上，PE 是$\odot O$ 的切线，E 是切点，AE 与 CD 相交于点 F. PE 与 PF 的大小有什么关系？为什么？

17. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle ABC$ 的平分线与 AC 相交于点 E，过点 E 作 BE 的垂线，与 AB 相交于点 D，$\odot O$ 是$\triangle BDE$ 的外接圆. AC 是$\odot O$ 的切线吗？为什么？



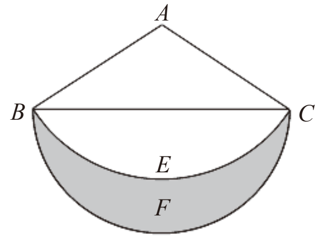
（第 17 题）



（第 18 题）

18. 如图，AB 为⊙O 的直径，CD 与⊙O 相切于点 C，$OD /\!/ AC$. BD 是⊙O 的切线吗？为什么？

19. 如图所示的图案（阴影部分）是这样设计的：在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 2$ cm，$\angle ABC = 30^\circ$，以点 A 为圆心、以 AB 为半径作 $\overset{\frown}{BEC}$；以 BC 为直径作 $\overset{\frown}{BFC}$. 求图案的面积.



（第 19 题）

20.（1）一个圆锥的高为 $3\sqrt{3}$ cm，侧面展开图是半圆，求这个圆锥的全面积；

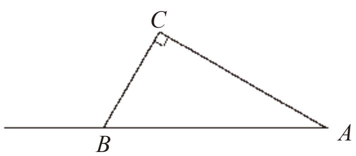
（2）一个圆锥的高为 $\sqrt{3}$，底面半径为 1，求这个圆锥侧面展开图的扇形圆心角的度数.

21.（1）自制一个长方体盒子，各面依次写上数字 1，2，3，4，5，6，从一定高度掷下，落地后写有 1 的一面朝上的概率是 $\dfrac{1}{6}$ 吗？

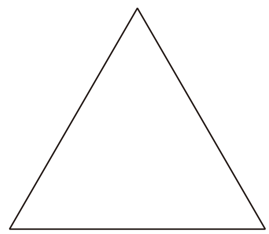
（2）利用试验数据，你还能估计哪些事件发生的概率？

问题解决

22. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle A = 30^\circ$，$AB = 6$ cm. 将$\triangle ABC$ 以点 B 为中心，逆时针旋转，使 BC 边落在 AB 的延长线上. 在图上画出直角边 AC 扫过的图形（用阴影表示），并求出它的面积.

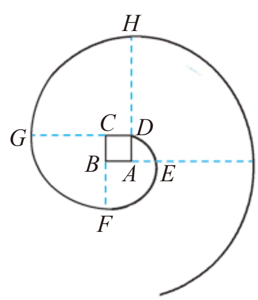


（第 22 题）


（第 23 题）

23. 如图是一块边长为 60 cm 的正三角形木板. 你能从它上面截取一块面积尽可能大的正六边形木板吗？画出你的设计方案，并计算出这块正六边形木板的边长和面积.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，曲线 $DEFGH\cdots$叫做“正方形的渐开线”，其中 $\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{FG}$，$\overset{\frown}{GH}$，$\cdots$的圆心依次按点 A，B，C，D 循环. 当 $AB = 1$ 时，曲线 $DEFGH$ 的长度是多少？



（第 24 题）

25. 在街头巷尾会遇到一类“摸球游戏”，摊主把分别标有数字 1，2，3 的 3 个白球和标有数字 4，5，6 的 3 个黑球放在口袋里（球除颜色外完全相同），让你摸球.

规定：每付 3 元钱就玩一局，每局连续摸两次，每次只能摸一个，第一次摸完后把球放回口袋里搅匀后再摸一次，若前后两次摸得的都是白球，摊主就送你 10 元钱的奖品.

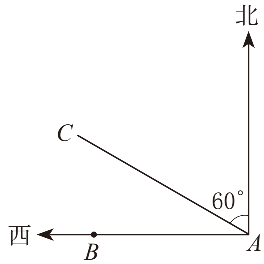
（1）用列表法列举出摸出的两个球可能出现的结果；

（2）求出获奖的概率.

26. 如图，某货船以 20 海里/时的速度将一批重要物资由 A 处运往正西方向的 B 处，经过 16 小时到达，到达后立即卸货. 此时，接到气象部门通知，一台风中心正以 40 海里/时的速度由 A 处向北偏西 60° 方向移动，距台风中心 200 海里的圆形区域（包括边界）均会受到影响.

（1）B 处是否会受到台风的影响？请说明理由；

（2）为避免受到台风的影响，该船应在多长时间内卸完货物？



（第 26 题）

27. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a，AC 与 BD 相交于点 E，过点 E 作 $FG/\!/AB$，分别交AD，BC 于点 F，G. 那么以 B 为圆心、以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ 为半径的圆与直线 AC，FG，DC 有怎样的位置关系？为什么？

出版说明

为了更好地满足五四学制实验区义务教育教学的需要，2003年山东省教育厅决定以全国中小学教材审定委员会初审通过的义务教育课程标准实验教科书为基础，委托山东教育出版社等单位改编、出版一套五四学制的义务教育课程标准实验教科书。该套实验教科书经全国中小学教材审定委员会初审通过后供山东省的烟台、威海、淄博、莱芜等五四学制地区的学生选用，受到了广大师生的欢迎和肯定。

2011年7月，教育部启动了义务教育课程标准实验教科书的修订送审工作，为了做好五四学制实验教科书初中《数学》的修订送审工作，山东教育出版社与北京师范大学出版社签署了合作协议。五四学制实验教科书《数学》（六~九年级）的修订、编写依据教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011年版）》，以马复主编的北师大版六三学制义务教育教科书《数学》（七~九年级）为基础，吸取了五四学制实验区多年来在教学实践中探索、积累的丰硕成果。

本套教科书经教育部审定通过，供五四学制地区的学生选用。参加本册改编的人员有马复、韩际清、陈杰、王德刚、刘崇渭、云鹏、柳圣明、赵水祥、辛珍文，由马复、韩际清主编。

本书的改编、出版得到了山东省教育厅、山东出版集团、山东省教学研究室、烟台市教育科学研究院、威海市教育教学研究中心、淄博市教研室、莱芜市教研室以及泰安、青岛、济宁等教研单位的领导，特别是北京师范大学出版社的领导和学科专家的大力帮助和支持，在此表示由衷的感谢。

欢迎广大师生在使用过程中提出修改意见和建议，以利于教科书的不断改进和完善。

山东教育出版社