教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

九年级 上册

河北教育出版社

义务教育教科书 数学 九年级 上册 河北教育出版社

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5434-9539-5

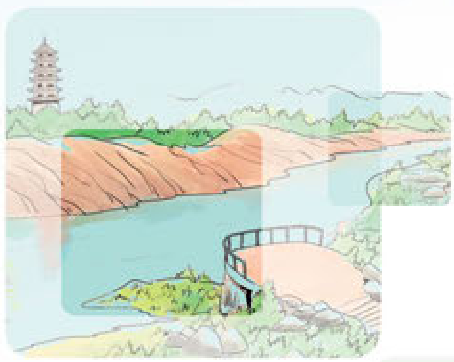
定价：10.95元

全国价格举报电话：12358

义 务 教 育 教 科 书

数学

九年级 上册



河北教育出版社

遨游在数学世界中

亲爱的同学们：

你们好！时间过得真快，你们已经进入了九年级。在过去两年里，你们学到了很多数学知识和方法，取得了很大的成绩。面对新的学习任务，相信大家一定会学得更好。

当你们拿到这本九年级上册教科书时，一定会对以下这些栏目有新的感悟。

观察与思考：通过观察、感悟和思考，期待你们获得正确的数学认知。

一起探究：大家一起探究和认识数学知识、思想和方法。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学所不可缺少的。

大家谈谈：和同学们一起分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可缺少的学习环节。

在内容上，这本书共有六个篇章：

数据分析——用统计的思想方法，对收集到的数据进行有条理的分析，这对我们理性认识现实生活中的有关问题是非常必要的。

一元二次方程——它是又一类重要的方程模型，也是方程学习的继续和发展，其内容也更加丰富多彩。

图形的相似——它与图形的全等有着密切的联系，可以说相似图形是全等图形的拓展和推广。它的性质和判定也与全等图形十分相近，但应用更广泛。

解直角三角形——在直角三角形中，已知两边可求出第三边。但已知一边、一角求其他边就离不开锐角三角函数了。因此，锐角三角函数是我们解直角三角形问题的工具。

反比例函数——它是又一类重要的函数模型，对解决实际问题价值颇大。

圆——在此之前，我们学习和探究的几何内容都是直线型图形，这是第一次进入非直线型(曲线)图形的探究。对于圆，大家并不陌生，但它的一些重要性质却是首次出现，期待你们去深刻理解和正确把握。

同学们，面对新的学习任务，相信你们一定会乐观自信、积极进取、不懈探索，并收获更多、更好的数学成果。

你们的编者朋友

2014 年 3 月

目 录

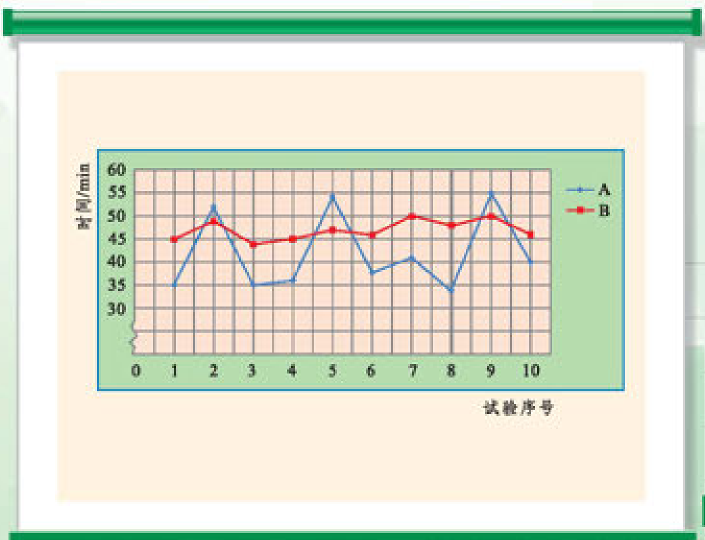
第二十三章

数据分析

在本章中，我们将学习

- 平均数、中位数和众数的意义及作用
- 方差的意义、计算和应用
- 用样本平均数估计总体平均数，用样本方差估计总体方差

张老师乘公交车上班，从家到学校有A，B两条路线可选择．对每条路线，各记录了10次路上花费的时间，依据数据绘制的统计图如图所示．根据图形提供的信息，你能判断哪条路线平均用时较少，哪条路线用时的波动较大吗？如何定量地描述平均用时及数据的波动情况？



23.1 平均数与加权平均数

在小学，我们对平均数已经有了一定的认识. 现在，我们一起探究平均数的意义和平均数在解决实际问题中的作用.

观察与思考

某农科院为了寻找适合本地的优质高产小麦品种，将一块长方形试验田分成面积相等的 9 块，每块 100 m²，在土壤肥力、施肥、管理等都相同的条件下试种 A，B 两个品种的小麦. 小麦产量如下表：

A_1	B_1	A_2
B_2	A_3	B_3
A_4	B_4	A_5

品种 A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
产量/kg	95	93	82	90	100
品种 B	B_1	B_2	B_3	B_4	
产量/kg	94	100	105	85	

（1）观察图 23－1－1，哪个品种小麦的产量更高些？

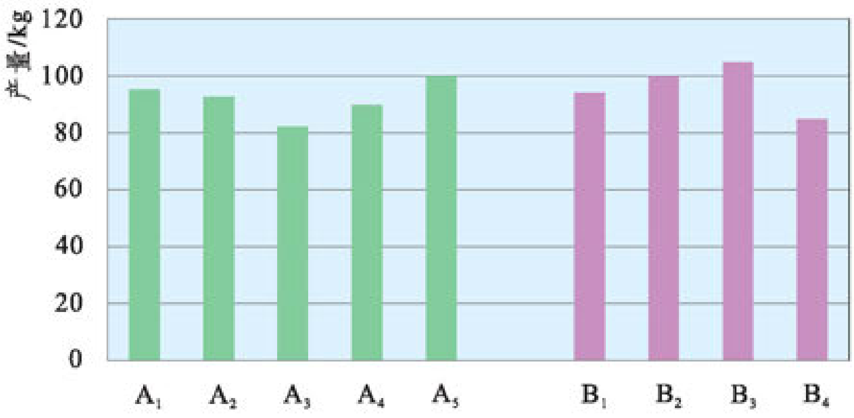


图 23－1－1

（2）以 100 m² 为单位，如何比较 A，B 两个小麦品种的单位面积产量？

（3）如果只考虑产量这个因素，哪个品种更适合本地种植？

由于同一品种在不同试验田上的产量有差异，要比较两个品种哪个产量高，通常情况下是比较它们的平均产量.

A 品种小麦的平均产量：$\frac{1}{5}\times(95+93+82+90+100)=92(\mathrm{kg})$，

B 品种小麦的平均产量：$\frac{1}{4}\times(94+100+105+85)=96(\mathrm{kg})$.

就试验结果来看，B 品种小麦比 A 品种小麦的平均产量高，B 品种更适合本地种植.

一般地，我们把 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的和与 n 的比，叫做这 n 个数的**算术平均数**(arithmetic mean)，简称平均数，记作 $\bar{x}$，读作“x 拔”，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n).$$

由于 $(x_1-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})=0$，所以取平均数可以抵消各数据之间的差异. 因此，平均数是一组数据的代表值，它反映了数据的“一般水平”.

做一做

从一批鸭蛋中任意取出 20 个，分别称得质量如下：

80	85	70	75	85	85	80	80	75	85
85	80	75	85	80	75	85	70	80	75

(1) 整理数据，填写统计表.

质量/g	70	75	80	85
频数				

(2) 求这 20 个鸭蛋的平均质量.

大家谈谈

小明和小亮分别是这样计算平均数的.

小明的计算结果：$\frac{1}{4}\times(70+75+80+85)=77.5(\mathrm{g})$.

小亮的计算结果：$\frac{1}{20}\times(70\times2+75\times5+80\times6+85\times7)=79.5(\mathrm{g})$.

你认为他们谁的计算方法正确？请和同学交流你的看法.

实际上，小亮的计算方法是正确的．由于 70，75，80，85 出现的频数不同，它们对平均数的影响也不同，所以，频数对平均数起着权衡轻重的作用．

利用计算器可以很方便地计算平均数．以 A 型计算器为例，求“做一做”中 20 个数据的平均数的步骤如下：

步　骤	按　键	显　示
选择统计模式，进入一元统计状态	$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$	Stat x　0
输入第 1 个数据 70，频数 2	$\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{,}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{DATA}}$	$n=$　2
输入第 2 个数据 75，频数 5	$\boxed{7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{,}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{DATA}}$	$n=$　7
输入第 3 个数据 80，频数 6	$\boxed{8}$ $\boxed{0}$ $\boxed{,}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{DATA}}$	$n=$　13
输入第 4 个数据 85，频数 7	$\boxed{8}$ $\boxed{5}$ $\boxed{,}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{DATA}}$	$n=$　20
显示统计结果 $\bar{x}$	$\boxed{\text{Rcl}}$ $\boxed{\bar{x}}$	$\bar{x}=$　79.5

练　习

1. 用举手示意的方法调查班上全体同学的年龄，将结果填在下面的表格内，并用计算器计算平均年龄．

年龄/岁	14	15	16	合计
人数/名				

2. 在一次男排比赛中，某队场上 6 名队员的身高(单位：cm)如下：

193　182　187　174　185　189

(1) 求这 6 名队员的平均身高．

(2) 计算每名队员的身高与平均身高的差．这些差的和是多少？

习 题

A 组

1. A，B 两家工厂生产同一型号的电池．现分别抽取了 6 节电池，测试其连续使用时间，数据如下表所示：

编号		1	2	3	4	5	6	平均数
电池连续使用时间/h	A 厂	40	48	40	42	43	45	
	B 厂	40	50	45	46	46	52	

(1) 计算两组数据的平均数，并填入表中．

(2) 由(1)的结果推断哪家工厂生产的电池质量可能更好些．

2. 某学校九年级 130 名同学集体参加了环保知识竞赛，成绩如下表．求全年级学生的平均分数．(结果保留一位小数)

班 级	平均分/分	人数/名
九年级(一)班	80	42
九年级(二)班	82	40
九年级(三)班	84	48

B 组

1. 学校要选拔一名选手参加全市中学生男子组百米比赛，拟从甲、乙两名同学中选出．甲、乙两名同学最近几次测试的百米跑成绩(单位：s)如下：

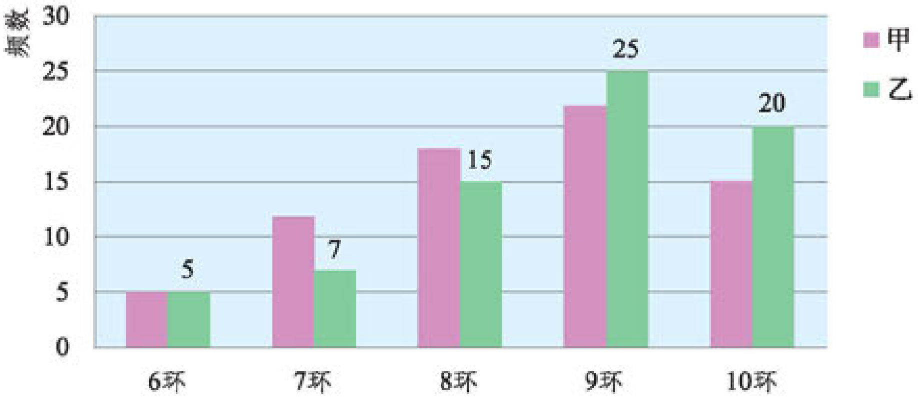
甲：12.8　12.4　12.2　13.1　12.7

乙：12.2　13.4　12.3　13.5　13.3　12.4　13.0

(1) 分别计算甲、乙测试成绩的平均数．

(2) 从平均成绩和最好成绩方面看，谁的实力更强一些？

2. 甲、乙两名射箭运动员在奥运会资格赛中，每人射 72 箭，命中的环数绘成的统计图如图所示．已知甲平均命中 8.4 环，请判断甲、乙谁的排名领先．



（第 2 题）

观察与思考

假期里，小红和小惠结伴去买菜，三次购买的西红柿价格和数量如下表：

单价/(元/千克)	4	3	2	合计
小红购买的数量/kg	1	2	3	6
小惠购买的数量/kg	2	2	2	6

从平均价格看，谁买的西红柿要便宜些？思考小亮和小明的下列说法，你认为他俩谁说得对？为什么？

小亮的说法

每次购买单价相同，购买总量也相同，平均价格应该也一样，都是

$(4+3+2)\div 3=3$(元/千克).

小明的说法

购买的总量虽然相同，但小红花了 16 元，小惠花了 18 元，所以平均价格不一样，小红买的西红柿要便宜些.

小红购买不同单价的西红柿的数量不同，所以平均价格不是三个单价的平均数. 实际上，平均价格是总花费金额与购买总量的比，因此，

$$\bar{x}_{小红}=\frac{4\times1+3\times2+2\times3}{1+2+3}=\frac{16}{6}\approx2.67(元/千克),$$

$$\bar{x}_{小惠}=\frac{4\times2+3\times2+2\times2}{2+2+2}=\frac{18}{6}=3(元/千克).$$

从平均价格看，小红买的西红柿要便宜些.

已知 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，若 w_1，w_2，…，w_n 为一组正数，则把

$$\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

叫做 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的**加权平均数**（weighted average），w_1，w_2，…，w_n 分别叫做这 n 个数的**权重**（weight），简称为权. 如“观察与思考”中，小红购买的西红柿平均价格约为 2.67 元/千克，它是数 4，3，2 的加权平均数，三个数的权分别为 1，2，3.

例 1 某学校为了鼓励学生积极参加体育锻炼，规定体育科目学期成绩满分 100 分，其中平时表现(早操、课外体育活动)、期中考试和期末考试成绩按比例 3∶2∶5 计入学期总成绩. 甲、乙两名同学的各项成绩如下：

学生	平时表现/分	期中考试/分	期末考试/分
甲	95	90	85
乙	80	95	88

分别计算甲、乙的学期总成绩.

解：三项成绩按 3∶2∶5 的比例确定，就是分别用 3，2，5 作为三项成绩的权，用加权平均数作为学期总成绩.

甲的学期总成绩为

$$\frac{95\times3+90\times2+85\times5}{3+2+5}=89(分)，$$

乙的学期总成绩为

$$\frac{80\times3+95\times2+88\times5}{3+2+5}=87(分).$$

做一做

某电视节目主持人大赛要进行专业素质、综合素质、外语水平和临场应变能力四项测试，各项测试均采用 10 分制，两名选手的各项测试成绩如下表所示：

测试项目		专业素质	综合素质	外语水平	临场应变能力
测试成绩/分	甲	9.0	8.5	7.5	8.8
	乙	8.0	9.2	8.4	9.0

（1）如果按四项测试成绩的算术平均数排名次，名次是怎样的？

（2）如果规定按专业素质、综合素质、外语水平和临场应变能力四项测

试的成绩各占 60%，20%，10%，10%计算总成绩，名次有什么变化？

按测试成绩的算术平均数排名次，实际上是将四项测试成绩同等看待．而按加权平均数排名次，则是对每项成绩分配不同的权，体现每项成绩的重要程度不同．如专业素质成绩的权重为 60%，说明专业素质对主持人最重要．

当各数据的重要程度不同时，一般采用加权平均数作为一组数据的代表值．

练习

1. 某县共有 50 万人口，其中城镇人口占 40%，人均年收入 20 000 元，农村人口占 60%，人均年收入 12 000 元．求全县人均年收入．

2. 某次物理知识测试，小颖的基础知识和实验操作成绩分别为 90 分，95 分．如果将基础知识和实验操作按 7∶3 的比例计算总成绩，小颖的总成绩是多少？

习题

A 组

1. 某班有 50 名学生，其中 24 名男生的平均身高为 170 cm，26 名女生的平均身高为 160 cm．求全班 50 名学生的平均身高．
2. 草莓的价格在早上、中午和晚上分别为 10 元/千克，5 元/千克，4 元/千克．张大妈早、中、晚每次买 1 kg 草莓，李大妈早、中、晚每次买 10 元钱的草莓．从平均价格看，谁更合算些？
3. 某农场在三块田地上，用相同的管理技术种植稻谷．种植面积和产量如下表：

地块	面积/公顷	产量/(吨/公顷)
一	2	15
二	5	12
三	3	10

(1) 计算三块田地稻谷的平均产量．

(2) 指出数据 15，12，10 的权的意义．

B 组

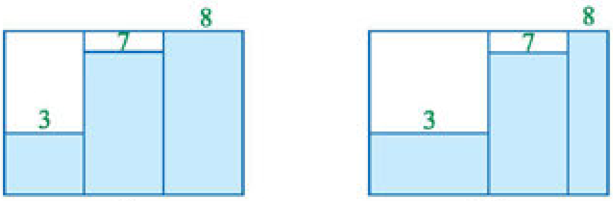
1. 为推选一名同学参加学校演讲比赛，班里组织了一次选拔赛，由教师组成评委，对甲、乙、丙三名候选人分别就演讲内容、语言表达能力和感染力三方面打分. 评委打分的结果如下表：

测试项目	演讲内容	语言表达能力	感染力
甲的成绩/分	9.0	8.6	8.0
乙的成绩/分	8.0	9.2	8.2
丙的成绩/分	9.4	8.8	7.5

(1) 如果按三项得分的算术平均数高低确定优胜者，谁是优胜者？

(2) 如果将三项得分按 25%，35%，40%的比例计算平均分，依平均分的高低确定优胜者，谁是优胜者？(利用计算器计算)

2. 两个长、宽、高分别相等的长方体水槽的纵截面如图所示，每个水槽都用两个挡板隔成三部分. 图(1)中三部分的宽度相等，图(2)中三部分的宽度比为 3∶2∶1，水面高度(单位：m)如图所示. 如果将挡板打开，两个水槽中水面的高度相同吗？请分别求出两个水槽中挡板打开后水面的高度.



(1)　　(2)

(第 2 题)

做一做

请全班同学目测黑板的宽度(单位：cm). 记录每人的估测结果.

(1) 全班分成 6 个小组，每个小组人数可以不等，各组计算本组估测数据的平均数.

(2) 汇总各组的人数及估测数据的平均数，将结果填入下面的表中，并计算全班同学估测数据的平均数.

组别	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组
人数/名						
平均数/cm						

（3）实际测量黑板的宽度，将结果写在黑板上.

大家谈谈

1. 各小组的平均数波动大吗？全班平均数与测量结果的误差有多大？
2. 用哪个数作为黑板实际宽度的估计值，误差可能较小？

在实际生活中，我们经常要对某个量进行测量，测量往往会产生误差. 为了得到比较准确的结果，可以进行多次重复测量，用这些测量值的平均数作为这个量的估计值.

例 2 从某学校九年级男生中，任意选出 100 人，分别测量他们的体重. 将数据进行分组整理，结果如下表：

体重 x/kg	$44\leqslant x<50$	$50\leqslant x<56$	$56\leqslant x<62$	$62\leqslant x<68$	$68\leqslant x<74$
频数	9	21	34	23	13

计算这 100 名男生的平均体重.

分析：对于分组数据，可以用组中值(分组两个端点数的平均数)作为这组数据的一个代表值，把各组的频数看做对应组中值的权，按加权平均计算平均数的近似值.

解：五组数据的组中值分别为 47，53，59，65，71. 加权平均数为

$$\frac{1}{100}\times(47\times9+53\times21+59\times34+65\times23+71\times13)=59.6.$$

所以，这 100 名男生的平均体重约为 59.6 kg.

练　习

在一次书法比赛中，五名评委对小亮的作品评分(满分 100 分)如下表：

评委	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
评分/分	95	82	85	88	90

（1）用哪个数作为该作品的最后得分比较合理？

（2）为什么只用一个评委的评分不好？谈谈你的想法.

习 题

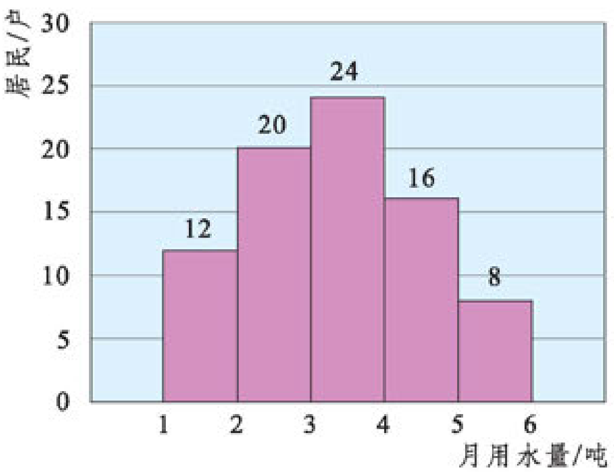
A 组

1. 现用 6 辆轿车上的里程表测量同一段公路的长度，测量结果(单位：km)如下：

100　　102　　98　　101　　97　　102

根据以上数据，请你估计这段公路的长度.

2. 自来水公司随机调查了 80 户居民的月用水量，并根据调查数据绘制了如图所示的统计图. 求这 80 户居民月平均用水量的一个近似值.



（第 2 题）

B 组

小明骑自行车估测从家到学校的路程. 他先在百米跑道上测试，从起点到终点蹬了 22 圈(轮盘转动的圈数). 然后记录了 10 次从家到学校蹬自行车的圈数，结果(单位：圈)如下：

427　439　428　438　436　440　432　435　436　439

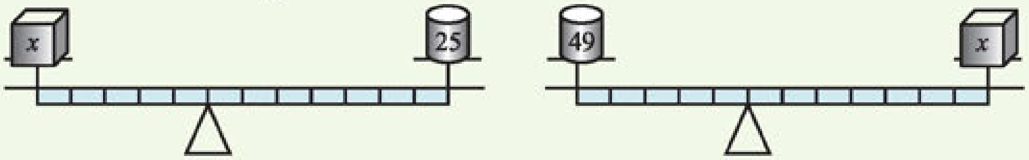
(1) 根据这些数据，求小明从家到学校的路程的近似值.

(2) 说明为什么要进行多次测量.

读一读

趣谈平均数

如图，用一架不等臂天平称量一个质量为 x g 的物体．若左盘放物体，则需要在右盘放 25 g 的砝码，天平才能平衡；若右盘放物体，则需要在左盘放 49 g 的砝码，天平才能平衡．有人猜想 x 为 25 和 49 的算术平均数，即 $x=\frac{25+49}{2}=37$．这个结果正确吗？



设天平左臂长为 m cm，右臂长为 n cm，由杠杆平衡原理有 $mx=25n$，$nx=49m$．将这两个等式的两边分别相乘后再除以 mn，得 $x^2=25\times49$，于是我们有 $x=\sqrt{25\times49}=35$．看来，这里用算术平均数计算物体的质量是不正确的．

再看这样一个问题：有两页书都是 600 字．小明读第一页书时，每分钟阅读 200 字；读第二页书时，每分钟阅读 300 字．小明读完这两页书，平均每分钟阅读多少字？是 250 字吗？

阅读第一页书用时 3 min，阅读第二页书用时 2 min，即用 5 min 阅读了 1 200 字，平均阅读速度为 $1\ 200\div(3+2)=240$（字/分）．在这个问题中，计算平均阅读速度也不能用算术平均数．

因此，在解决求平均数的问题时，要考虑问题的实际意义，不能想当然地用算术平均数．

对于正数 a 和 b，我们称 $A=\frac{a+b}{2}$ 为 a 和 b 的算术平均数，称 $G=\sqrt{ab}$ 为 a 和 b 的几何平均数．

算术平均数、几何平均数和一些特殊数列的中项有如下关系：

在

$$1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，\cdots$$

中，任意三项的中项是它前后两项的算术平均数．在

$$2，4，8，16，32，64，\cdots$$

中，任意三项的中项是它前后两项的几何平均数．

23.2 中位数和众数

平均数是一组数据的代表值. 但在有些情况下，用中位数或众数作为数据的代表值会更合理些.

大家谈谈

小琴的英语听力成绩一直很好，在六次测试中，前五次的得分(满分 30 分)分别为：28 分，25 分，27 分，28 分，30 分. 第六次测试时，因耳机出现故障只得了 6 分. 如何评价小琴英语听力的实际水平呢？

(1) 用 6 个分数的平均数评价小琴英语听力的实际水平合理吗？

(2) 如果不合理，那么应该用哪个数作为评价结果呢？

一组数据中，任何一个数的变动都会引起平均数的变动. 当数据中有异常值(与其他数据的大小差异很大的数)时，平均数就不是一个好的代表值了.

在上述问题中，如果像有些体育比赛评分规则一样，去掉一个最高分和一个最低分，取其余 4 个成绩的平均数作为评价结果，那么可以部分消除异常值的影响. 如果将这 6 个数由小到大排列为 6，25，27，28，28，30，取 $(27+28)\div2=27.5$ 作为评价结果，也比较合理.

一般地，将 n 个数据按大小顺序排列，如果 n 为奇数，那么把处于中间位置的数据叫做这组数据的**中位数**(median)；如果 n 为偶数，那么把处于中间位置的两个数据的平均数叫做这组数据的中位数. 如图 23－2－1，图(1)中 5 个数据的中位数为 x_3，图(2)中 6 个数据的中位数为 $\frac{1}{2}(x_3+x_4)$.

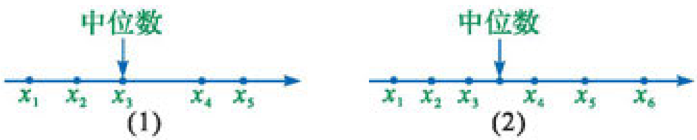


图 23－2－1

观察与思考

某班用无记名投票的方式选班长，5 名候选人分别编为 1 号，2 号，3 号，4 号，5 号. 投票结果如下表：

候选人	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	合计
计票	正丁	正正正下	正正	正止	正一	50
票数	7	18	10	9	6	50

在这个问题中，我们最关注的是什么？

参加投票的 50 人，每人选择一名候选人的号码，把这 50 个号码看成一组数据，由于 2 号出现的次数最多，按规则，2 号候选人应当选为班长.

一般地，把一组数据中出现次数最多的那个数据叫做**众数**(mode). 一组数据的众数可能不止一个，也可能没有众数.

例 1 统计全班 45 名学生每天上学路上所用的时间. 如果时间取最接近 5 的倍数的整数，那么整理后的数据如下表：

所用时间/min	5	10	15	20	25	30	合计
人数/名	2	6	14	12	8	3	45

求所用时间的平均数、中位数和众数.

解：45 个数据的平均数为

$$\bar{x}=\frac{1}{45}\times(5\times2+10\times6+15\times14+20\times12+25\times8+30\times3)=18(\text{min}).$$

将这 45 个数据由小到大排序，第 23 个数据是 20 min，所以中位数是 20 min.

所用时间出现最多的是 15 min，所以众数是 15 min.

练　习

1. 某中学由 6 名师生组成一个排球队，他们的年龄(单位：岁)如下：

15　16　17　17　17　40

(1) 这组数据的平均数为______，中位数为 ______，众数为______.

(2) 用哪个值作为他们年龄的代表值较好？

2. (1) 数据 3，5，3，5，3，6，5，7 中，众数是______和______.

(2) 数据 3，4，6，5，7，8，9，2 中，存在众数吗？为什么？

习 题

A 组

1. 计算下列各组数据的平均数、中位数和众数，并将结果填入表中.

数据	平均数	中位数	众数
6，7，8，8，8，13，14，16			
0，8，8，9，9，9，9，10，10			
−3，−2，−1，0，1，2，3			
−4，−4，−2，−1，0，2，8，9			

2. 某学校九年级(二)班 50 名学生的年龄分布情况如下表：

年龄/岁	14	15	16
人数/名	4	22	24

求这个班 50 名学生年龄的平均数、中位数和众数.

B 组

1. 某单位 10 名员工向灾区捐款，捐款金额(单位：元)如下：

50，100，100，200，200，200，200，200，500，1 000.

(1) 求捐款金额的平均数、中位数和众数.

(2) 哪个数能更好地反映捐款金额的“集中程度”？

2. 平均数和中位数反映的都是数据的“集中程度”，设数据 x_1，…，x_5 的平均数为 $\bar{x}$，中位数为 m.

(1) 以数据 2，3，5，8，12 为例，分别计算 A_1，A_2，B_1，B_2.

$A_1=|x_1-m|+\cdots+|x_5-m|$，$A_2=|x_1-\bar{x}|+\cdots+|x_5-\bar{x}|$，

$B_1=(x_1-m)^2+\cdots+(x_5-m)^2$，$B_2=(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_5-\bar{x})^2$.

(2) 根据计算结果，猜想平均数和中位数分别是什么意义下的数据代表值.

一起探究

某公司销售部统计了14名销售人员6月份销售某商品的数量，结果如下表：

6月份销量/件	1 500	1 360	500	460	400
人数/名	1	1	5	4	3

（1）分别求销量数据的平均数、中位数和众数.

（2）公司在制订销售人员月销量定额时，有以下三种观点：

观点一	观点二	观点三
平均数是数据的代表值，应该用平均数作为销量定额.	只有两人的销量超过平均数，应该用中位数作为销量定额.	众数出现的次数最多，应该用众数作为销量定额.

你认为哪种观点更合理些？

取平均数、中位数和众数都是刻画一组数据集中趋势的方法，因为方法不同，所以得到的结论也可能不同. 不同的方法没有对错之分，能够更客观地反映实际背景的方法要更好一些. 在上面的14个销量数据中，有较大的两个数据，它们会导致平均数偏大. 因此，用中位数或众数要比用平均数更客观一些.

例2 某企业50名职工的月工资分为5个档次，分布情况如下表：

月工资额/元	2 500	3 000	3 500	4 000	4 500
人数/名	6	12	18	10	4

（1）求月工资的平均数和中位数.

（2）企业经理关心哪个数？普通职工关心哪个数？

解：（1）月工资的平均数为

$$\frac{1}{50}\times(2\ 500\times6+3\ 000\times12+3\ 500\times18+4\ 000\times10+4\ 500\times4)=$$

3 440（元）.

50个数由小到大排列，最中间的两个数均为3 500，所以中位数

为 3 500 元.

(2) 企业经理关心平均工资，知道平均工资就知道了工资总额. 普通职工关心中位数，知道了中位数，就知道自己工资水平大概的位置.

大家谈谈

用平均数、中位数和众数描述一组数据的“集中趋势”，各有哪些优缺点？

练　习

在 10 块面积都是 100 m^2的田地上试种 A，B 两个品种的玉米，每个品种的玉米各试种 5 块，产量(单位：kg)如下：

品种 A：80，85，85，90，95

品种 B：65，85，90，90，90

甲认为品种 A 比品种 B 的产量高，乙认为品种 B 比品种 A 的产量高.

(1) 请你分析甲和乙判断的依据.

(2) 根据试验数据，你认为应该选择哪个品种推广种植？请说明理由.

习　题

A 组

1. 在奥运会男子 50 m 步枪射击决赛中，某著名选手 10 次射击的成绩(单位：环)为：

   9.4　10.4　9.3　10.4　9.5　10.1　9.9　9.4　10.0　0

   其中第 10 次射击意外地射向别人的靶子，痛失金牌.

   (1) 分别求这组数据的平均数和中位数.

   (2) 平均数、中位数哪个更能反映这名选手的真实射击水平？

2. 制鞋厂调查了某校 25 名男生的运动鞋的码数，结果如下表：

运动鞋的码数/码	40	41	42	43
人数/名	2	7	12	4

(1) 判断下面三个结论是否正确：

①中位数是$(41+42)\div 2=41.5$；②众数是12；③没有众数.

(2) 这25个数据的中位数是________，众数是________.

(3) 在这个问题中，平均数有意义吗？制鞋厂最关心哪个数？

3. 某班学生进行电脑打字比赛，统计了20名学生的打字速度，对数据进行分组整理，结果如下表：

打字速度/(字/分)	240	200	180	150
人数/名	2	4	6	8

(1) 求这20名学生打字速度的平均数、中位数和众数.

(2) 你认为用哪个数评价这20个人的打字速度更合适？

B 组

1. 小明调查了100户居民家庭9月份的用电量，数据如下表：

用电量/千瓦时	90	96	102	110	118	126
户数	10	15	25	30	15	5

(1) 求这100个数据的中位数和众数.

(2) 如果80%的用户用电量不超过a千瓦时，确定a的取值范围.

2. 某服装车间有30名女工，调查她们一周内加工的衬衫数，数据如下表：

一周内加工的衬衫数/件	50	60	70	80
频数	8	14	6	2

(1) 求这30个数据的平均数、中位数和众数.

(2) 如果将每周加工衬衫的定额定为64件，你认为是否合理？如果不合理，请你确定一个比较合理的加工定额，并说明理由.

23.3 方差

平均数刻画数据的“平均水平”，但评价选手的射击水平、机器加工零件的精度、手表的日走时误差等，只用平均数是不够的，还需要用一个新的数，即方差，来刻画一组数据的波动情况.

观察与思考

甲、乙两名业余射击选手参加了一次射击比赛，每人各射 10 发子弹，成绩如图 23-3-1 所示.

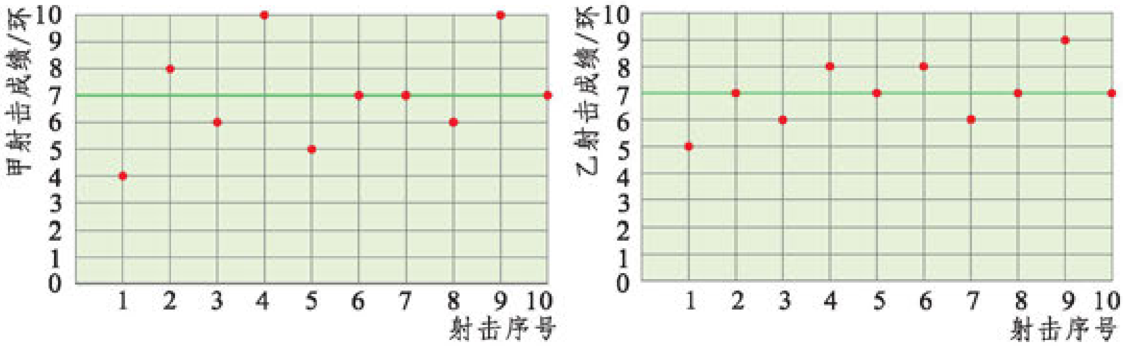


图 23-3-1

(1) 观察图 23-3-1，甲、乙射击成绩的平均数、中位数各是多少？

(2) 甲、乙射击成绩的平均数是否相同？若相同，他们的射击水平就一样吗？

(3) 哪一组数据相对于其平均数波动较大？波动大小反映了什么？

比较甲和乙的射击水平，自然想到比较射击成绩的平均数或中位数. 但是，甲和乙射击成绩的平均数和中位数都是 7 环. 两人相比，乙的成绩大多集中在 7 环附近，而甲的成绩相对于平均数波动较大.

我们在分析数据的特征时，仅考虑数据的平均数是不够的，还需要关注数据的波动情况.

一起探究

观察图 23-3-1，甲射击成绩的波动比乙大．如何用一个数来描述一组数据的波动大小呢？

设 n 个数据 x_1，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，各个数据与平均数偏差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$．偏差平方的平均数叫做这组数据的**方差**（variance），用 s^2 表示，即

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

可以看出：当数据分布比较分散时，方差较大；当数据分布比较集中时，方差较小．因此，方差的大小反映了数据波动（或离散程度）的大小．

例如，对于甲和乙的射击成绩数据，平均数都是 7，方差分别为：

$$s_{甲}^2=\frac{(4-7)^2+(5-7)^2+2(6-7)^2+3(7-7)^2+(8-7)^2+2(10-7)^2}{10}=3.4,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(5-7)^2+2(6-7)^2+4(7-7)^2+2(8-7)^2+(9-7)^2}{10}=1.2.$$

由于 $s_{乙}^2<s_{甲}^2$，所以乙的射击成绩比甲的波动小，乙的成绩更稳定些．

例 1 利用计算器计算下列数据的平均数和方差．（结果精确到 0.01）

66　　78　　81　　75　　86　　82

解：（1）进入统计状态，选择一元统计．

（2）输入数据．

（3）显示结果．

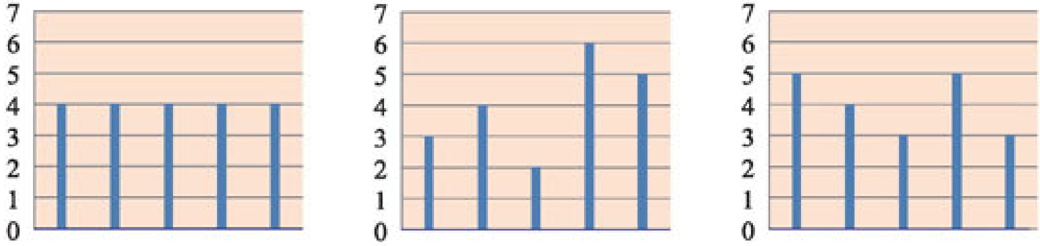
按 $\boxed{\textbf{Rcl}}$ $\boxed{\bar{x}}$ 键，显示结果为 78．

按 $\boxed{\textbf{Rcl}}$ $\boxed{s_x^2}$ 键，显示结果为 40.333 33．

所以 $\bar{x}=78$，$s^2\approx40.33$．

练　习

有三组数据，每组 5 个数据的大小如图所示：



(1)　　(2)　　(3)

（1）根据图示，直观比较三组数据的波动大小.

（2）分别计算三组数据的平均数和方差.

（3）结合这三组数据，说明方差的大小与数据的波动大小的关系.

习　题

A　组

1. 两个小组各 5 名同学，用分度值是 1 cm 的刻度尺测量同一支铅笔的长度，测量误差数据(单位：mm)如下：

第一组：−2　−1　0　1　2

第二组：−3　−2　0　2　3

(1) 从直观上看，哪一组同学测量得较准确？

(2) 分别计算两组数据的方差，并进行比较，验证你的结论.

2. 国际数学奥林匹克竞赛，每个国家派 6 名选手组队参赛. 我国 6 名选手在一次模拟测试中的成绩(满分 42 分)如下表. 按表中所列项目，完成相应的计算并填表，再求这 6 个成绩的方差.

选手序号	1	2	3	4	5	6
成绩 x	42	39	39	33	27	24
$x-\bar{x}$						
$(x-\bar{x})^2$						

B　组

用某车床加工标准内径为 50 mm 的轴承，现测量了 8 个轴承的内径(单位：mm)，数据如下：

50.1　50.0　49.9　49.8　50.1　50.3　50.0　49.8

(1) 计算这组数据的方差.

（2）将各数据分别减 50 后再计算方差，结果有变化吗？

（3）将各数据分别减 50 后再乘 10，然后计算方差，结果有怎样的变化？

一起探究

张老师乘公交车上班，从家到学校有 A，B 两条路线可选择，他做了一番试验．第一周（5 个工作日）选择 A 路线，第二周（5 个工作日）选择 B 路线，每天两趟，记录所用时间如下表：

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 路线所用时间/min	35	52	35	36	54	38	41	34	55	40
B 路线所用时间/min	45	49	44	45	47	46	50	48	50	46

根据上表数据绘制的折线统计图如图 23－3－2 所示．

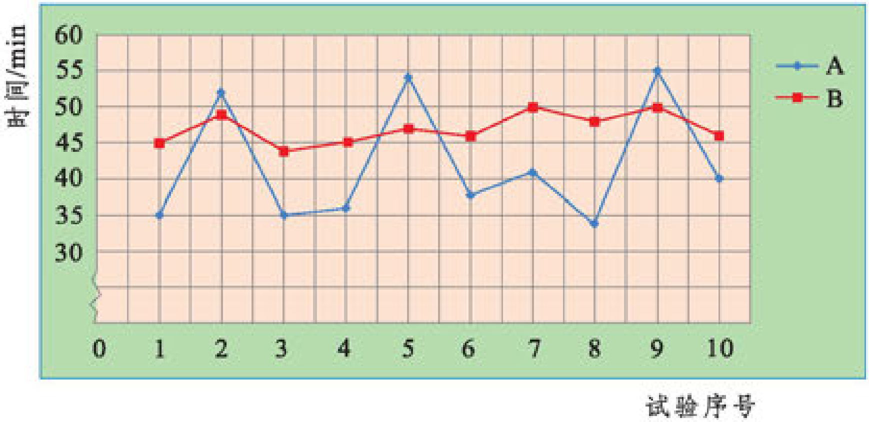


图 23－3－2

（1）从图形看，哪条路线平均用时少，哪条路线用时的波动大？

（2）用计算器分别计算选择 A，B 两条路线所用时间的平均数和方差．

（3）如果某天上班可用时间只有 40 min，应选择走哪条路线？

（4）如果某天上班可用时间为 50 min，又应选择走哪条路线？

从直观上看，A 路线平均用时少，但用时的波动较大，说明 A 路线通行不顺畅．B 路线的平均用时较多，但用时比较稳定，可能 B 路线较长，但通行较顺畅．

经计算得：$\bar{x}_A=42$，$s_A^2=63.2$；$\bar{x}_B=47$，$s_B^2=4.2$．

由于 $\bar{x}_A < \bar{x}_B$，$s_A^2 > s_B^2$，所以 A 路线平均用时少，但用时波动较大.

当上班可用时间只有 40 min 时，应选择走 A 路线，因为在 10 次记录中，B 路线所有用时都超过 40 min，而 A 路线有 6 次用时不超过 40 min. 当上班可用时间为 50 min 时，应选择走 B 路线.

例 2 测试甲、乙两个品牌的手表各 50 只，根据日走时误差数据绘制的统计图如图 23－3－3 所示. 从日走时误差角度比较这两个品牌手表的优劣.

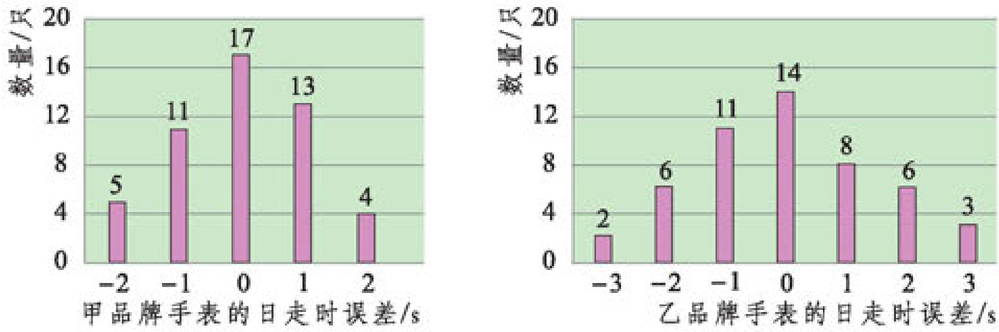


图 23－3－3

解：经计算知，甲、乙两个品牌手表日走时误差的平均数均为 0.

两组数据的方差分别为

$$s_{甲}^2=\frac{1}{50}\times[(-2)^2\times5+(-1)^2\times11+0^2\times17+1^2\times13+2^2\times4]=1.2,$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{50}\times[(-3)^2\times2+(-2)^2\times6+(-1)^2\times11+0^2\times14+1^2\times8+2^2\times6+3^2\times3]=2.24.$$

由于 $s_{乙}^2 > s_{甲}^2$，所以从日走时误差方差的角度看，甲品牌优于乙品牌.

从日走时误差的绝对值不超过 1 s 的手表所占的百分比看，甲品牌为 82%，乙品牌为 66%，甲品牌优于乙品牌.

练习

现有两组数据如下：

A：300　400　500　600　700　800　900

B：570　580　590　600　610　620　630

这两组数据的平均数都是 600，那么，平均数对哪一组数据的代表性较

好呢？请你用平均数和方差进行分析.

习题

A 组

1. 为考察两个品种小麦的长势，分别测量了 8 株麦苗的高(单位：cm)，结果如下：

   品种 A：21　21　22　23　23　24　25　25

   品种 B：18　20　21　23　24　26　26　27

   哪个品种的麦苗长得比较整齐？

2. 一台车床加工标准直径为 20 mm 的零件. 在第一天和第二天生产的零件中分别抽取了 8 个零件，对其直径(单位：mm)进行检测，测得数据如下：

   第一天：19.9　19.7　19.8　20.0　20.2　20.1　20.0　20.2

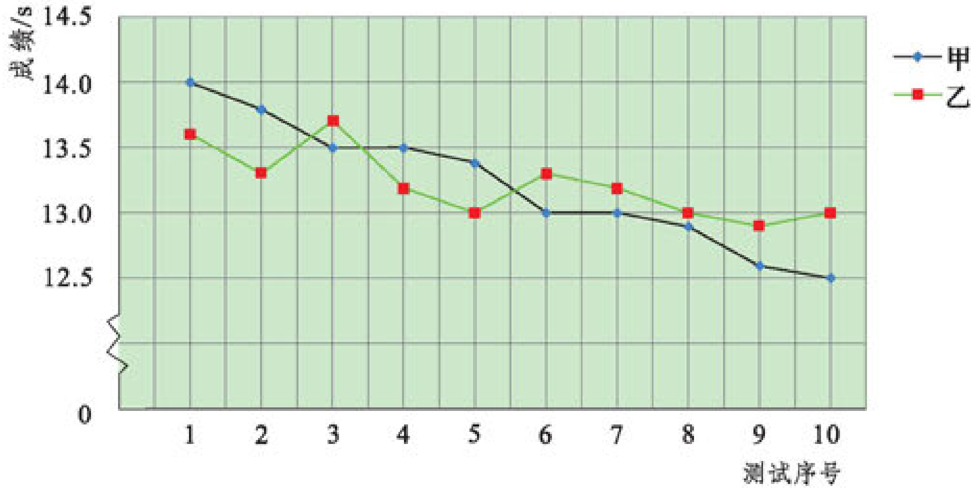
   第二天：19.7　19.8　20.0　20.3　19.7　20.2　19.9　20.3

   (1) 分别计算两组数据的平均数和方差.（可以使用计算器）

   (2) 根据方差的大小判断车床的工作状况是否有变化.

B 组

1. 甲、乙两名学生参加学校组织的 100 米短跑训练，教练把同一时间段内两人各 10 次的测试成绩用折线图来表示，如下图.



（第 1 题）

计算得 $\bar{x}_{甲}=13.22$，$s^2_{甲}=0.224$；$\bar{x}_{乙}=13.22$，$s^2_{乙}=0.064$.

(1) 请你根据图形及平均数和方差对甲、乙的训练成绩作出评价.

(2) 如果要选出一人参加市中学生运动会100米比赛，你认为应该选择谁？简述你的理由.

2. 将20名同学随机分成两组，每组10人，学习50个英语生词. 第一组采用集中学习的方法学习60 min，第二组分三天每天学习20 min. 一周后测试，每个人能准确掌握的单词数量如下表：

第一组掌握单词数量/个	45	46	40	48	38	42	40	37	44	40
第二组掌握单词数量/个	46	48	42	50	42	44	45	44	45	44

(1) 分别计算两组每个人掌握单词数量的平均数和方差.

(2) 请从不同角度对这两种学习方式的效果进行分析.

23.4 用样本估计总体

在“数据的收集与整理”一章中，我们已经学习了如何用样本数据信息估计总体的分布．在本节课，我们来了解用样本平均数（或方差）估计总体平均数（或方差）的统计方法．

为了估计全校初中女生的平均身高，九年级（一）班 8 个课外学习小组采用随机抽样的方法，分别抽取容量为 25 和 100 的样本，样本平均数用 $\bar{x}_{25}$ 和 $\bar{x}_{100}$ 表示，结果（单位：cm）如下表：

小组序号	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_{25}$	158.5	161.5	160.2	160.0	160.9	160.4	159.0	159.5
$\bar{x}_{100}$	160.0	159.0	160.5	159.3	159.8	161.0	159.6	160.8

把得到的样本平均数标在数轴上，如图 23－4－1 所示．

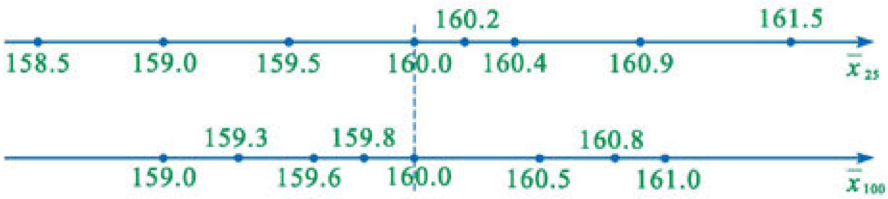


图 23－4－1

观察与思考

（1）对容量相同的不同样本，算得的样本平均数相同吗？

（2）观察图 23－4－1，在两组样本平均数中，哪一组样本平均数的波动较小？这体现了什么样的统计规律？

（3）如果总体身高的平均数为 160.0 cm，哪一组样本平均数整体上更接近 160.0 cm？

由于抽样的任意性，即使是相同的样本容量，不同样本的平均数一般也不相同；当样本容量较小时，差异可能还较大．但是当样本容量增大时，样

本的平均数的波动变小，逐渐趋于稳定，且与总体的平均数比较接近. 因此，在实际中经常用样本的平均数估计总体的平均数. 同样的道理，我们也用样本的方差估计总体的方差.

例 1 工人师傅用车床加工一种直径为 20 mm 的轴，从某天加工的轴中随机抽取了 10 件，测得其直径(单位：mm)如下：

20.1　19.9　20.3　20.2　19.8　19.7　19.9　20.3　20.0　19.8

(1) 计算样本平均数和样本方差.

(2) 求总体平均数和总体方差的估计值.

(3) 规定当方差不超过 0.05 mm^2 时，车床生产情况为正常. 判断这台车床的生产情况是否正常.

解：(1) 样本平均数为

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(20.1+19.9+\cdots+19.8)=20(\text{mm}).$$

样本方差为

$$s^2=\frac{1}{10}\times[(20.1-20)^2+\cdots+(19.8-20)^2]=0.042(\text{mm}^2).$$

(2) 总体平均数和总体方差的估计值分别为 20 mm 和 0.042 mm^2.

(3) 由于方差不超过 0.05 mm^2，所以可以认为车床的生产情况正常.

例 2 一个苹果园，共有 2 000 棵树龄相同的苹果树. 为了估计今年苹果的总产量，任意选择了 6 棵苹果树，数出它们挂果的数量(单位：个)分别为：

260　340　280　420　360　380

根据往年的经验，平均每个苹果的质量约为 250 g. 试估计今年苹果园苹果的总产量.

解：6 棵苹果树平均挂果的数量为

$$\frac{1}{6}\times(260+340+280+420+360+380)=340(\text{个}).$$

$0.25\times340=85(\text{kg})$，6 棵苹果树平均每棵的产量约为 85 kg.

由样本平均数估计总体平均数，2 000 棵苹果树平均每棵产量约为 85 kg，总产量的估计值为

$$85\times2\,000=170\,000(\text{kg}).$$

练　习

为了估计一批鸡蛋中每个鸡蛋的平均质量 p(单位：g)，小红专挑个儿

大的鸡蛋 30 个，称得总质量为 1.8 kg. 小明随意拿出 40 个鸡蛋，称得总质量为 2.2 kg.

(1) 分别计算小红、小明选出的鸡蛋的平均质量.

(2) 用样本平均数估计 p，小红和小明谁的结果更客观些？

习题

A 组

1. 为了解某种手机电池的使用时间，任意抽查了 10 块，测得其连续使用时间(单位：h) 如下：

   43　45　48　44　50　52　50　54　46　48

   估计这种电池使用时间的平均数和方差.

2. 随机抽取某品牌液晶电视机专卖店 9 月份中 6 天的销售数量(单位：台)，数据如下：

   8　10　13　12　15　14

   (1) 估计该专卖店 9 月份 30 天平均每天销售电视机的数量.

   (2) 由这组样本数据估计全年平均每天销售电视机的数量合理吗？请说明理由.

B 组

1. 用自动分装机分装白糖，每袋标准质量为 500 g. 为了监控分装情况，每隔 6 min 抽取一袋，1 小时内抽取 10 袋，质量(单位：g)如下：

   498　508　502　504　495　497　492　500　498　506

   (1) 计算样本平均数和样本方差.

   (2) 如果规定每袋的质量与标准质量误差的绝对值不超过 10 g，且方差不超过 25 g^2 为分装机运行正常，请推断分装机在这 1 小时内运行是否正常.

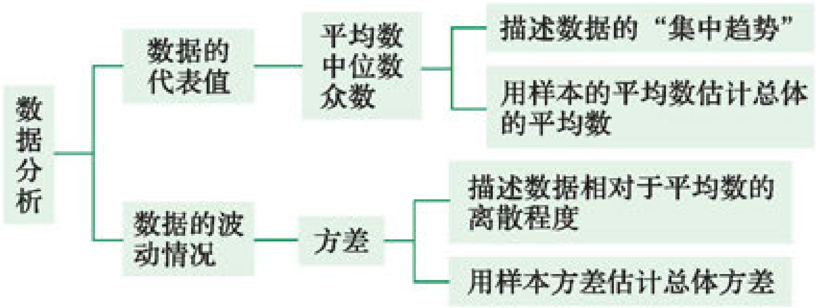
2. 设计一个抽样方案，从你所在的班中分别抽取 10 人和 20 人，测量其身高获得样本数据，计算样本平均数，由此估计全班同学的平均身高.

   (1) 不同样本的平均数相同吗？

   (2) 用哪个样本的平均数估计全班同学的平均身高可能更准确些？

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

用样本估计总体是统计的基本思想，而总体的平均数和方差是最重要的两个数字特征. 在统计中，我们常用样本平均数(或方差)估计总体平均数(或方差).

1. 平均数、中位数和众数都是描述数据集中趋势的量，只是描述的角度有所不同. 平均数应用最广泛，它是一组数据的一个较好的代表值. 在分析数据时，应根据不同情况合理选用平均数、中位数或众数.

2. 方差用于刻画一组数据的离散程度，多用于描述产品质量、某些技能水平发挥的稳定性、重复测量时的精确程度以及特殊人群身高的整齐程度等. 在描述数据的特征时，要综合考虑数据的平均数和方差. 当两组数据的平均数相等或接近时，可用方差比较它们的稳定性.

3. 在用样本推断总体时，样本不同，得到的结果一般也不相同. 当样本容量较大且具有较好的代表性时，样本平均数在总体平均数附近波动，样本方差在总体方差附近波动，随着样本容量的增大，波动的幅度会减小.

4. 结合具体问题，思考下面的问题：

(1) 算术平均数与加权平均数有什么联系和区别? 加权平均数中“权”的意义和作用是什么?

(2) 平均数、中位数和众数在描述数据时的优缺点及适用范围是什么?

(3) 方差是怎样刻画数据波动情况的?

复 习 题

A 组

1. 某校九年级 8 名学生完成一项科技小制作所需时间(单位：min)如下：

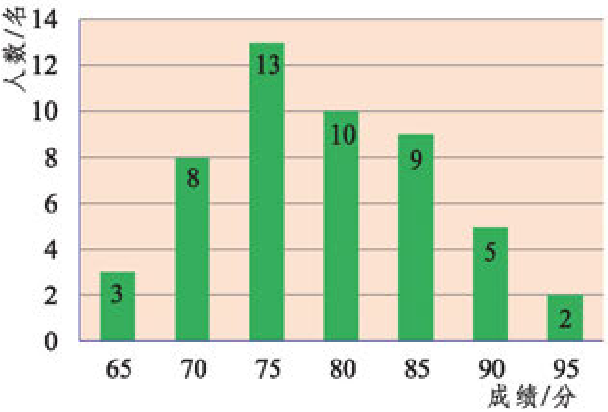
75　70　90　70　70　58　80　55

求这组数据的平均数、中位数和众数.

2. 小明在期末考试中，数学、语文和英语三科的平均成绩为 80 分，物理、化学两科的平均成绩为 85 分. 求小明五科的平均成绩.

3. 5 名同学参加市级作文比赛，老师只公布了其中 4 人的成绩，分别为 88 分，80 分，75 分，82 分，没有公布小红的成绩，但告诉大家 5 个人的平均成绩为 84 分. 小红得了多少分?

4. 对九年级(一)班50 名同学进行体育达标测试，根据测试成绩绘制的统计图如图所示. 分别求测试成绩的平均数、中位数和众数.



(第 4 题)

5. 从某校九年级甲、乙两班中，各抽出 23 名女同学进行一分钟跳绳测试，统计测试成绩(单位：次/分)的结果如下表：

班别	人数/名	中位数	平均数
甲班	23	104	97
乙班	23	106	96

若规定每分钟跳绳次数超过 105 次的为优秀，试比较两班的优秀率.

6. 某校按照平时作业占 10%、单元测验占 30%、期中考试占 25%、期末

考试占35%的比例计算学生的学期总评成绩．小丽和小霞的成绩(单位：分)如下表：

学生	平时作业	单元测验	期中考试	期末考试
小丽	80	75	71	88
小霞	76	80	70	90

请通过计算比较谁的学期总评成绩高．

7．A，B两家水果店，2012年1至6月份的销售额(单位：千元)如下表：

月份 店号	1月	2月	3月	4月	5月	6月
A	15	24	22	19	21	19
B	12	26	24	25	20	13

(1) 比较两家水果店的平均销售额是否有差异．

(2) 哪家的销售额较稳定？

8．为了解一批节能灯管的使用寿命，从中任意选取了20只，测得其使用寿命如下表：

使用寿命/h	600	650	720	800	1 000
数量/只	1	4	8	5	2

(1) 计算样本平均数．

(2) 这批节能灯管的平均使用寿命大约是多少小时？

B 组

1．为了缓解上班高峰时道路交通的压力，某市政府采取了错时上、下班的措施．从6：30到9：00，分成5个时间段，每段30 min．在一条主干道上，分别观测了采取措施前、后各时间段通过的汽车数量X和Y(单位：千辆)，如下表：

时间段	6：30~7：00	7：00~7：30	7：30~8：00	8：00~8：30	8：30~9：00
X	1.8	2.5	3.5	2.0	1.6
Y	1.4	2.0	2.5	3.0	2.5

(1) 采取措施前、后，汽车的平均流量有变化吗？

(2) 分别计算两组数据的方差，你认为采取的措施是否有效？

2. 学校为了选拔 4 名播音员，对 20 名学生进行了两次普通话水平测试，满分 10 分，测试结果如下表：

	第一次测试结果					第二次测试结果				
成绩/分	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
人数/名	2	3	7	6	2	5	6	5	3	1

(1) 利用计算器分别计算两次测试成绩的方差.

(2) 哪次测试结果对选拔播音员更有参考意义？

3. A，B 两只股票在某月前 8 个交易日的收盘价如下表：

交易日	1	2	3	4	5	6	7	8
A 股票/元	46.2	44.9	45.5	46.5	46.0	45.6	45.8	47.1
B 股票/元	40.5	40.8	40.2	42.6	41.5	41.9	43.9	44.4

分别计算两只股票收盘价的平均数和方差，并比较它们在这 8 天的涨跌变化幅度.

C 组

1. 某单位有 1 000 名职工，通过验血普查是否感染乙肝病毒. 如果逐一检验，需要检验 1 000 次. 现在将每 8 个人分成一组，共分成 125 组，将每组的血样混合进行检验. 如果结果为阴性，说明这 8 人都没有感染，如果结果为阳性，说明这 8 人中至少有一人感染，那么需要对该组每个人的血样再检验一次. 假设 125 组中有 80 组检验结果为阴性，45 组检验结果为阳性，求每个人平均需要检验的次数. 采用这种方法能否减少检验次数？

2. 设计一个方案，估计 1 公顷土地上即将收获的玉米的总产量.

(1) 分组讨论：采用什么调查方式？如何选取样本？需要哪些数据？

(2) 用字母表示需要的各数量指标(如玉米千粒重、每株玉米的平均粒数、单位面积的平均玉米株数等)，写出估计总产量的过程.

(3) 相互交流各小组的调查方案，并讨论在估计产量时应注意的事项.

第二十四章

一元二次方程

在本章中，我们将学习

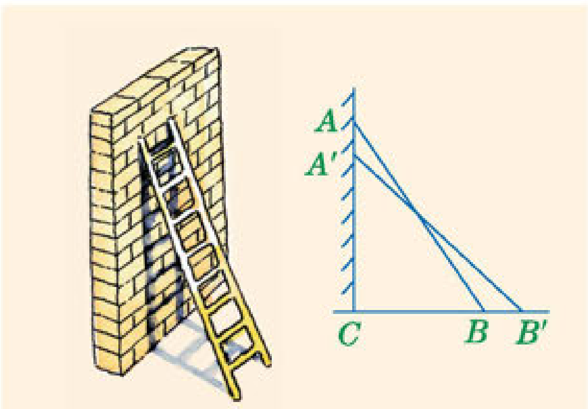
- 一元二次方程及其解法
- 一元二次方程根与系数的关系*
- 一元二次方程的应用

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

一个长为10 m的梯子斜靠在墙上，梯子的顶端A处到地面的距离为8 m. 如果梯子的顶端沿墙面下滑1 m，那么梯子的底端B在地面上滑动的距离也是1 m吗？你能列方程解决这个问题吗？

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$



24.1 一元二次方程

方程是一类重要的数学模型，在现实生活中具有广泛的应用．在学习了一元一次方程、二元一次方程组和分式方程的基础上，现在我们来学习一元二次方程．

观察与思考

如图 24-1-1，某学校要在校园内墙边的空地上修建一个长方形的存车处，存车处的一面靠墙（墙长 22 m），另外三面用 90 m 长的铁栅栏围起来．如果这个存车处的面积为 700 m²，求这个长方形存车处的长和宽．

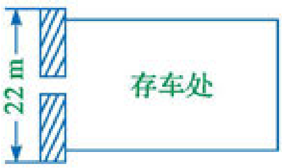


图 24-1-1

分析下面小明和小亮列方程的做法，思考所列方程的特征．

小明的做法

设长方形存车处的宽（靠墙的一边）为 x m，则它的长为 $\frac{90-x}{2}$ m．

根据题意，可得方程

$$\frac{90-x}{2}\cdot x=700.$$

整理，得

$$x^2-90x+1\ 400=0.$$

小亮的做法

设长方形存车处的长（与墙垂直的一边）为 x m，则它的宽为 $(90-2x)$m．

根据题意，可得方程

$$(90-2x)\cdot x=700.$$

整理，得

$$x^2-45x+350=0.$$

做一做

如图 24-1-2，一个长为 10 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的顶端 A 处到地面的距离为 8 m．如果梯子的顶端沿墙面下滑 1 m，那么梯子的底端 B 在地面上滑动的距离是多少米？

如果设梯子的底端 B 在地面上滑动的距离为 x m，请列出方程，并谈谈所列方程的特征．

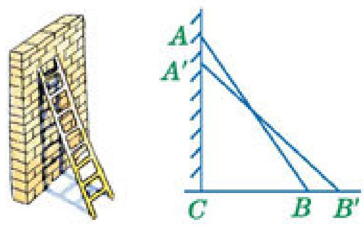


图 24-1-2

在上面的问题中，我们得到方程：

$$x^2-90x+1\,400=0，x^2-45x+350=0，x^2+12x-15=0.$$

它们都是关于未知数 x 的整式方程，且 x 的最高次数都为 2. 像这样，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程，叫做**一元二次方程**(quadratic equation in one variable).

一元二次方程的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

其中，ax^2 是二次项，a 是二次项系数，bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

一元二次方程的解也叫做这个方程的根.

做一做

1. 将下列一元二次方程化为一般形式，并指出它们的二次项、一次项和常数项.

(1) $4x^2=3(x+4)$；　　(2) $(2x-3)(3x-2)=10$；

(3) $\frac{x+2}{2}\cdot\frac{2x-3}{3}=7$；　　(4) $(2x-1)(2x+1)=(3x+1)^2$.

2. 在下列各题中，括号内未知数的值，哪些是它前面方程的根？

(1) $x^2-3x-4=0(x=1，x=-1，x=4)$；

(2) $(x+2)(x-2)=12(x=-1，x=-4，x=4)$；

(3) $2y^2-y-1=0(y=0，y=1，y=-\frac{1}{2})$.

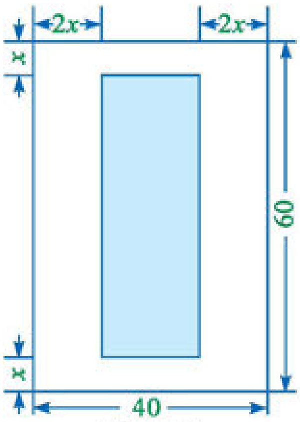
练　习

1. 在下列方程中，哪些是一元二次方程？是一元二次方程的，指出其二次项系数、一次项系数和常数项.

(1) $2x^2=1-x$；　　(2) $2x=1-x$；

(3) $3x^2=12$；　　(4) $(x-1)^2=2$.

2. 如图，大小两个四边形都是矩形，且阴影部分的面积为 800. 请列出关于 x 的方程.



（第 2 题）

习题

A 组

1. 把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并指出它们的二次项、一次项和常数项.

(1) $x^2=121$；　　(2) $(x-1)^2-12=0$；

(3) $x^2=x+2$；　　(4) $(3x-5)(2x+1)=16$.

2. “小丽比小亮大 1 岁，如果他们年龄的乘积是 210，那么小丽和小亮分别是多少岁?”设小丽(或小亮)的年龄为 x，列出方程，判断所列方程是不是一元二次方程.

3. 一个直角三角形的三条边长是三个连续整数. 设斜边的长为 x，列出方程并化为一般形式.

B 组

1. 已知方程 $(a-1)x^2+2x-3=0$，当 a 取何值时，该方程为关于 x 的一元二次方程?

2. 对于上抛物体，在不计空气阻力的情况下，物体上升高度 h(m)与抛出时间 t (s)有如下关系：

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2.$$

其中，v_0 (m/s)是上抛物体的初速度，g (m/s^2)是重力加速度. 如果以 25 m/s的初速度向上抛出一物体，x s 时，它在距离抛出点 20 m 的高处. 请根据公式写出关于 x 的方程.（g 取10 m/s^2）

24.2 解一元二次方程

在本节中，我们来探究一元二次方程的解法.

配　方　法

试着做做

根据平方根的意义，解下列方程：

(1) $x^2=4$；　　(2) $(x+1)^2=4$；

(3) $x^2+2x+1=4$；　　(4) $x^2+2x-3=0$.

方程 $x^2+2x-3=0$ 可变形为 $x^2+2x+1=4$，即 $(x+1)^2=4$，开平方可得 $x+1=\pm 2$，于是可得方程的解为 $x_1=1$，$x_2=-3$.

这样，我们就得到了解方程 $x^2+2x-3=0$ 的一种方法：

$$x^2+2x-3=0 \xrightarrow{\text{配方}} (x+1)^2=4 \xrightarrow{\text{开平方}} x+1=\pm 2 \xrightarrow{\text{得根}} x_1=1,\ x_2=-3$$

做一做

先把下列方程化为 $(x+m)^2=n$（m，n 为常数，且 $n\geqslant 0$）的形式，再求出方程的根.

(1) $x^2+2x=48$；　　(2) $x^2-4x=12$；

(3) $x^2-6x+5=0$；　　(4) $x^2+x-\frac{3}{4}=0$.

通过配方，把一元二次方程变形为一边为含未知数的一次式的平方，另一边为常数，当常数为非负数时，利用开平方，将一元二次方程转化为两个一元一次方程，从而求出原方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**.

例 1　用配方法解下列方程：

(1) $x^2-10x-11=0$；　　(2) $x^2+2x-1=0$.

解：(1) 移项，得

$$x^2-10x=11.$$

配方，得

$$x^2-10x+5^2=11+5^2,$$

即

$$(x-5)^2=36.$$

配方时，先将常数项移至另一边，再在方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

两边开平方，得

$$x-5=\pm 6.$$

所以

$$x_1=11,\ x_2=-1.$$

(2) 移项，得

$$x^2+2x=1.$$

配方，得

$$x^2+2x+1^2=1+1^2,$$

即

$$(x+1)^2=2.$$

两边开平方，得

$$x+1=\pm\sqrt{2}.$$

所以

$$x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}.$$

做一做

对于方程 $2x^2+4x+1=0$，如何用配方法求解呢？试试看.

例 2 用配方法解方程：$2x^2+3=6x$.

解：移项，并将二次项系数化为 1，得

$$x^2-3x=-\frac{3}{2}.$$

配方，得

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2},$$

即

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

两边开平方，得

$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以

$$x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

大家谈谈

用配方法解一元二次方程的一般步骤是什么？与同学交流你的想法.

练　习

1. 解下列方程：

(1) $(x+1)^2=49$；　　(2) $x^2+6x+9=25$；

(3) $x^2+8x-9=0$；　　(4) $x^2-2x+1=0$.

2. 解下列方程：

(1) $3x^2-6x=1$；　　(2) $5y^2-7y+2=0$.

习　题

A　组

1. 解下列方程：

(1) $x^2-4x=45$；　　(2) $x^2-6x-15=0$；

(3) $x(x+8)=-16$；　　(4) $2x^2-4x-5=0$.

2. 解下列方程：

(1) $6x^2+x=2$；

(2) $4x^2-3x-2=0$；

(3) $3y^2-y-5=0$；

(4) $5x=7x^2-1$.

3. 一个长方形的长比宽多 2 cm，面积是 15 cm^2. 求这个长方形的长和宽.

B 组

1. 已知两个连续正整数的乘积是156，求这两个数的和.
2. 某学校要在一块长 24 m，宽 12 m 的长方形地面的中央，建一个长方形花坛，四周铺成草坪，草坪的宽都相等，花坛面积占原长方形面积的$\frac{5}{9}$. 求花坛的长和宽.

公 式 法

对于一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，同样能用配方法来求解.

试着做做

按下面的步骤将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 进行配方：

移项，得__________________.

将二次项系数化为1，得__________________.

配方，得 $x^2+\frac{b}{a}x+$________$=-\frac{c}{a}+$________.

整理，得__________________.

于是，得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

(1) 当 $b^2-4ac>0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

方程有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

（3）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，而$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$，所以方程没有实数根.

于是我们得到：

> 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$：
> 当 $b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
> 当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
> 当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式.

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实数根可以用

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求出. 这个式子叫做一元二次方程的**求根公式**. 利用求根公式解一元二次方程的方法叫做**公式法**.

例 3 不解方程，判别下列方程根的情况：

（1）$x^2+3x+2=0$； （2）$x^2-4x+4=0$； （3）$2x^2-4x+5=0$.

解：（1）这里 $a=1$，$b=3$，$c=2$.

$\because$ $b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=1>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根.

（2）这里 $a=1$，$b=-4$，$c=4$.

$\because$ $b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times4=0$，

$\therefore$ 原方程有两个相等的实数根.

（3）这里 $a=2$，$b=-4$，$c=5$.

$\because$ $b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times5=-24<0$，

$\therefore$ 原方程没有实数根.

例 4 用公式法解下列方程：

（1）$4x^2+x-3=0$； （2）$x^2-2x-5=0$.

解：（1）这里 $a=4$，$b=1$，$c=-3$.

$\because$ $b^2-4ac=1^2-4\times4\times(-3)=49>0$，

$\therefore$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\times4}=\frac{-1\pm7}{8}$，

即 $x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=-1$.

(2) 这里 $a=1$，$b=-2$，$c=-5$.

$\because\ b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-5)=24>0$，

$\therefore\ x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{24}}{2\times1}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}}{2}=1\pm\sqrt{6}$，

即 $x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$.

练习

1. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $-x^2+3x-2=0$；　　(2) $x^2-4x+5=0$；

(3) $2x^2-4x+2=0$；　　(4) $x^2-4x=0$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-2x-3=0$；　　(2) $4x^2+4x+1=0$；

(3) $2x^2+2x=1$；　　(4) $\dfrac{1}{2}x^2-3x+1=0$.

习题

A 组

1. 用公式法解下列方程：

(1) $3x^2+5x-2=0$；　　(2) $3x^2-2x-1=0$；

(3) $5x^2+\dfrac{1}{5}=2x$；　　(4) $8(1-x)=x^2$；

(5) $-3x^2-2x+2=0$；　　(6) $(x+1)(x+2)=1$.

2. 已知代数式 x^2+5x-4 与 $4x+2$ 的值相等，求 x 的值.

B 组

1. 已知一元二次方程 $x^2+3x-2k=0$. 当 k 取什么值时：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

2. 一小球被抛出后，距离地面的高度 h (m)和飞行时间 t (s)满足关系式 $h=-5t^2+10t+1$. 飞行多长时间，小球距离地面的高度为 6 m?

因式分解法

观察与思考

对于方程 $x^2-2x=0$，除了可以用配方法或公式法求解，还可以怎样求解呢?

观察和分析小亮的解法，你认为他的解法有没有道理?

小亮的思考及解法

解一元二次方程的关键是将它转化为一元一次方程，因此，可将方程的左边分解因式. 于是，得

$$x(x-2)=0.$$

所以，$x=0$，或 $x-2=0$.

方程 $x^2-2x=0$ 的两个根为 $x_1=0$，$x_2=2$.

小亮的解法是正确的，他给出了解一元二次方程的又一种方法. 像这样，把一元二次方程的一边化为 0，另一边分解成两个一次因式的乘积，进而转化为两个一元一次方程，从而求出原方程的根，这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

做一做

用因式分解法解下列方程：

(1) $2x^2-5x=0$；　(2) $4x^2-15x=0$；　(3) $x^2-(2x+1)^2=0$.

例 5 用因式分解法解下列方程：

(1) $3(x-1)^2=2(x-1)$；　(2) $(x+5)^2=49$.

解：(1) 原方程可化为

$$3(x-1)^2-2(x-1)=0,$$

$$(x-1)(3x-5)=0.$$

得

$$x-1=0，或 3x-5=0.$$

$$x_1=1，x_2=\frac{5}{3}.$$

在用因式分解法解方程时，要把方程化为一边为 0，另一边为两个一次式相乘的形式.

(2) 原方程可化为

$$(x+5)^2-7^2=0,$$

$$(x+12)(x-2)=0.$$

得

$$x+12=0，或 x-2=0.$$

$$x_1=-12，x_2=2.$$

大家谈谈

解一元二次方程的方法有哪几种？根据你的学习体会，谈谈解方程时如何选择适当的解法，并与同学交流.

练习

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x+3)(x-2)=0$； (2) $4x^2-x=0$；

(3) $(x+3)^2=25$； (4) $2(x+1)^2+3(x+1)=0$.

2. 用适当的方法解下列方程：

(1) $(x+1)^2=9$； (2) $x^2-4x=6$；

(3) $2x^2-3x-1=0$； (4) $(x-1)^2=(2x+1)^2$.

习题

A 组

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x+3)(2x-5)=0$； (2) $x^2+9x=0$；

(3) $(2x+3)^2=2x+3$； (4) $x^2-4x+4=2(x-2)$.

2. 用适当的方法解下列方程：

(1) $3(2y+1)^2=27$； (2) $(x-3)^2=2x(x-3)$；

(3) $4(x-2)^2=(x+1)^2$； (4) $(x-5)(x+4)=10$.

3. 已知一个正方形的边长比另一个正方形边长的 2 倍少 10 cm，两个正方形的面积之和为 100 cm^2. 求这两个正方形的边长.

B 组

1. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(k+3)x+k=0$ 的一个根为 -2，求它的另一个根.

2. 已知一个数比另一个数的 2 倍少 3，且它们的平方相等，求这两个数.

24.3 一元二次方程根与系数的关系*

由求根公式知道，一元二次方程的两根都可由方程的系数来表示. 那么，两根之和、两根之积与方程的系数又具有怎样的关系呢？

一起探究

1. 由因式分解法可知，方程 $(x-2)(x-3)=0$ 的两根为 $x_1=2$，$x_2=3$，而方程 $(x-2)(x-3)=0$ 可化为 $x^2-5x+6=0$ 的形式，则 $x_1+x_2=$________，$x_1x_2=$________.

2. 设方程 $2x^2+3x-9=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=$________，$x_1x_2=$________.

3. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，设方程的两根分别为 x_1，x_2，请你猜想 x_1+x_2，x_1x_2 与方程系数之间的关系，并利用求根公式验证你的结论.

一元二次方程根与系数的关系

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

例 根据一元二次方程根与系数的关系，求下列方程两根的和与积.

(1) $x^2-3x-8=0$；　　(2) $3x^2+4x-7=0$.

解：(1) 这里 $a=1$，$b=-3$，$c=-8$，且

$$b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-8)=41>0,$$

所以 $x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=3$，$x_1\cdot x_2=\frac{-8}{1}=-8$.

(2) 这里 $a=3$，$b=4$，$c=-7$，且

$$b^2-4ac=4^2-4\times3\times(-7)=100>0,$$

所以 $x_1+x_2=-\frac{4}{3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$.

练习

1. 判别下列方程根的情况. 若有两个实数根，求出两个根的和与积.

(1) $x^2-4x+1=0$；　　(2) $x^2-2x+1=0$；

(3) $-x^2+3x-2=0$；　　(4) $x^2-4x=0$.

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-x+4k=0$ 有两个相等的实数根.

(1) 求 k 的值.

(2) 求两个根的和与积.

习题

A 组

1. 不解方程，求下列方程两根 x_1，x_2 的和与积.

(1) $x^2-3x+1=0$；　　(2) $2x^2+5x+1=0$；

(3) $2x^2+5x=0$；　　(4) $x^2-8=0$.

2. (1) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(k-1)x+3=0$ 两根的和为 6，求 k 的值及方程的两根.

(2) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(k-1)x+k^2=0$ 两根的积为 1，求 k 的值.

B 组

1. 已知方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根为 x_1，x_2，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+1)x-k^2=0$ 的两个实数根的绝对值相等，求 k 的值及方程的两个实数根.

24.4 一元二次方程的应用

对于一些实际问题，可以借助于一元二次方程来解决.

例 1 如图 24-4-1，某学校要在校园内墙边的空地上修建一个长方形的存车处，存车处的一面靠墙(墙长 22 m)，另外三面用 90 m 长的铁栅栏围起来. 如果这个存车处的面积为700 m^2，求这个长方形存车处的长和宽.

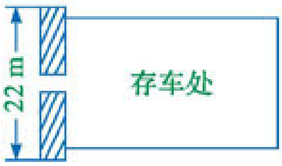


图 24-4-1

解：设长方形靠墙一边的长为 x m，得方程

$$x^2-90x+1\ 400=0.$$

解得

$$x_1=70,\ x_2=20.$$

由于墙长 22 m，$x_1=70$ 不合题意，应舍去.

当 $x=20$ 时，$\frac{90-x}{2}=\frac{90-20}{2}=35$.

答：这个长方形存车处的长和宽分别是 35 m 和 20 m.

做一做

在本章第 1 节“做一做”的问题中，设梯子的底端 B 在地面上滑动的距离为 x m，已得到方程 $x^2+12x-15=0$. 请解这个方程，并给出问题的答案.

例 2 已知一本数学书的长为 26 cm，宽为 18.5 cm，厚为 1 cm. 一张长方形包书纸如图 24-4-2 所示，它的面积为 1 260 cm^2，虚线表示的是折痕. 由长方形相邻两边与折痕围成的四角均为大小相同的正方形. 求正方形的边长.

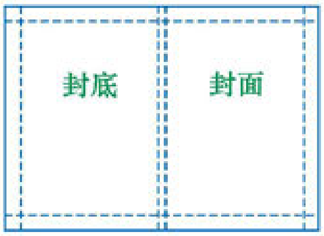


图 24-4-2

分析：问题中的等量关系为：包书纸的长×宽=1 260. 只要把包书纸的长和宽用正方形的边长表示出来就可以了.

解：设正方形的边长为 x cm，根据题意，得

$$(26+2x)(18.5\times2+1+2x)=1\ 260.$$

整理，得

$$x^2+32x-68=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=2，x_2=-34(\text{不合题意，舍去}).$$

答：正方形的边长是 2 cm.

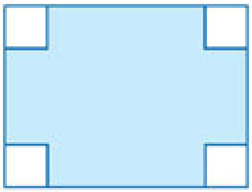
做一做

已知一个直角三角形两直角边的和是 12，斜边的长是 10，求这个直角三角形两直角边的长.

练 习

1. 一个三角形的一边长为 $x-4$，这条边上的高为 $2x+1$，面积为 $\frac{11}{2}$，求 x 的值.

2. 如图，有一块长 80 cm，宽 60 cm 的长方形硬纸片，在四角各剪去一个同样的小正方形，用剩余部分做成一个底面积为 1 500 cm^2 的无盖的长方体盒子. 求剪去的小正方形的边长.

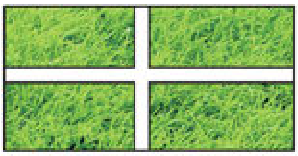


（第 2 题）

习 题

A 组

1. 如图，某小区内有一块长、宽比为 2∶1 的长方形空地，计划在该空地上修筑两条宽均为 2 m，且分别与长方形空地的边平行的小路，余下的四块小长方形空地铺成草坪. 如果四块草坪的面积之和为 312 m^2，求长方形空地的长和宽.

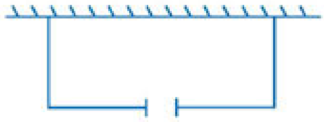


（第 1 题 ）

2. 一个平行四边形的周长是 50，面积是 $50\sqrt{3}$，且一个内角为$60°$，求这个平行四边形一组邻边的长.

B 组

1. 如图，要建一个面积为 150 m^2 的长方形仓库，仓库的一边靠墙（墙长 22 m），并在与墙平行的一边上开一道 1 m 宽的门. 现在可用的材料为 34 m 长的木板，求仓库的长和宽.



（第 1 题）

2. 将一根长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每段铁丝的长度为周长分别做成正方形.
   (1) 要使这两个正方形面积之和等于 17 cm^2，这根铁丝剪成两段后的长度应分别是多少厘米？
   (2) 两个正方形的面积之和可能等于 12 cm^2 吗？若有可能，求出这两段铁丝的长度；若不可能，请说明理由.

随着我国汽车产业的快速发展以及人们经济收入的不断提高，汽车已越来越多地进入普通家庭. 据某市交通部门统计，2010 年底，该市汽车保有量为 15 万辆，截至 2012 年底，汽车保有量已达 21.6 万辆. 若该市这两年汽车保有量增长率相同，求这个增长率.

一起探究

设年增长率为 x，请你思考并解决下面的问题：

(1) 2011 年底比 2010 年底增加了______万辆汽车，达到了______万辆.

(2) 2012 年底比 2011 年底增加了______万辆汽车，达到了______万辆.

(3) 根据题意，列出的方程是____________________.

(4) 解方程，回答原问题，并与同学交流解题的思路和过程.

例 3 建大棚种植蔬菜是农民致富的一条好途径. 经过市场调查发现：搭建一个面积为 x（公顷）的大棚，所需建设费用（万元）与 $x+2$ 成正比例，比例系数为 0.6；内部设备费用（万元）与 x^2 成正比例，比例系数为 2. 某农户新建了一个大棚，投入的总费用为 4.8 万元. 请计算该农户新

建的这个大棚的面积.（总费用＝建设费用＋内部设备费用）

解：依题意，得

$$0.6(x+2)+2x^2=4.8.$$

整理，得

$$10x^2+3x-18=0.$$

解方程，得

$$x_1=1.2，x_2=-1.5(不合题意，舍去).$$

答：该农户新建的这个大棚的面积为 1.2 公顷.

做一做

某工厂工业废气年排放量为 300 万立方米. 为改善城市环境质量，决定在两年内使废气年排放量减少到 144 万立方米. 如果第二年废气减少的百分率是第一年废气减少的百分率的 2 倍，那么每年废气减少的百分率各是多少？

练　习

1. 某工厂 7 月份的产值是 100 万元，计划 9 月份的产值要达到 144 万元. 如果 8 月份和 9 月份两个月的增长率相同，那么每月的增长率是多少？

2. 某楼盘商品房的售价是 5 000 元/平方米，由于限购政策的出台，房地产开发商经过两次下调价格后，以 4 050 元/平方米的均价开盘销售. 若两次下调的百分率相同，求平均每次下调的百分率.

习　题

A 组

1. 某县前年旅游总收入为1 000万元，今年旅游总收入达到了1 322.5 万元. 求该县这两年旅游总收入的年平均增长率.
2. 某电视机厂今年 4 月份的电视机产量为 50 000 台，6 月份比 4 月份多生产了 10 500 台. 求该厂这两个月电视机产量的月平均增长率.

B 组

1. 某药品经两次降价，零售价降为原来的一半，已知第一次降价的百分率比第二次降价的百分率多 10%，求第一次降价的百分率.
2. 某企业前年年初投入 100 万元生产农机设备，又将前年年底获得的利润与年初投资的和作为去年年初的投资. 到去年年底，两年共获利润 68.75 万元. 已知去年利润率比前年利润率多 10 个百分点，求前年和去年的利润率. (注：利润＝投入基数×利润率)

一起探究

某少年宫组织一次足球赛，采取单循环的比赛形式，即每两个足球队之间都要比赛一场，计划安排 28 场比赛. 可邀请多少支球队参加比赛呢？

设邀请 x 支球队参加比赛，探究下列问题：

(1) 根据"每两个足球队之间都要比赛一场"，每支足球队要比赛________场.

(2) 用含 x 的代数式表示比赛的总场次为__________. 于是可得方程________________________.

(3) 解这个方程并检验结果.

例 4 某商场经销的太阳能路灯，标价为 4 000 元/个，优惠办法是：一次购买数量不超过 80 个，按标价收费；一次购买数量超过 80 个，每多买 1 个，所购路灯每个可降价 8 元，但单价最低不能低于 3 200 元/个. 若一顾客一次性购买这样的路灯用去 516 000 元，则该顾客实际购买了多少个路灯？

解：因为 $4\ 000\times 80=320\ 000<516\ 000$，所以该顾客购买路灯数量超过 80 个.

设该顾客购买这种路灯 x 个，则路灯的售价为 $[4\ 000-8(x-80)]$ 元/个.

根据题意，得

$$x[4\ 000-8(x-80)]=516\ 000.$$

整理，得

$$x^2-580x+64\ 500=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=150,\ x_2=430.$$

当 $x=430$ 时，$4\ 000-8(x-80)=4\ 000-8\times(430-80)=1\ 200$(元)，低于 3 200 元．不合题意，应舍去．

答：该顾客实际购买了 150 个路灯．

练 习

经销商以 21 元/双的价格从厂家购进一批运动鞋．如果售价为 a 元/双，那么可以卖出这种运动鞋$(350-10a)$双．物价局限定每双鞋的售价不得超过进价的 120%．如果该商店卖完这批鞋赚得 400 元，那么该商店每双鞋的售价是多少元？这批鞋有多少双？

习 题

A 组

1. 一个多边形共有 20 条对角线，求这个多边形的边数．
2. 某食品店将进价为 16 元/千克的奶糖按 20 元/千克的价格出售，每天可销售 100 kg．老板发现，这种奶糖售价每涨 1 元/千克，日销售量就减少 8 kg．食品店如果想把这种奶糖尽快售完，并且使每天的平均销售利润达到 504 元，那么这种奶糖的销售单价应定为多少？

B 组

1. 某公司销售一种市场需求较大的产品，已知该产品的进价为 40 元/件，每年销售该产品的总开支(不含进价)为 120 万元．在销售过程中发现，年销售量(万件)可以用销售单价 x(元/件)表示为 $8-\frac{1}{20}x$．若公司希望该产品一年的销售获利为 40 万元，则销售单价应定为多少？
2. 某水果店销售一种水果的成本价是 5 元/千克．在销售中发现，当这种水果的价格定为 7 元/千克时，每天可以卖出 160 千克．在此基础上，这种水果的单价每提高 1 元/千克，该水果店每天就会少卖出 20 千克．

   (1) 若该水果店每天销售这种水果所获得的利润是 420 元，则单价应定为多少？

   (2) 在利润不变的情况下，为了让利于顾客，单价应定为多少？

读一读

方程的近似解

我们借助于计算器，可以估计方程解的大致范围，再进一步用试值的方法，就可以得到方程的近似解.

如估计方程 $x^3+2x-9=0$ 的解(结果精确到 0.1).

将方程化为 $x^3+2x=9$，由于

$$1^3+2\times1=3<9，2^3+2\times2=12>9，$$

所以，方程的解在 1 和 2 之间.

取 $x=1.5$ 进行试值，由于

$$1.5^3+2\times1.5=3.375+3=6.375<9，$$

所以方程的解 x 的取值范围是

$$1.5<x<2.$$

取 $x=1.75$ 进行试值，由于

$$1.75^3+2\times1.75\approx8.859<9，$$

所以方程的解 x 的取值范围是

$$1.75<x<2.$$

取 $x=1.875$ 进行试值，由于

$$1.875^3+2\times1.875\approx10.342>9，$$

所以方程的解 x 的取值范围是

$$1.75<x<1.875.$$

取 $x=1.812\ 5$ 进行试值，由于

$$1.812\ 5^3+2\times1.812\ 5\approx9.579>9，$$

所以方程的解 x 的取值范围是

$$1.75<x<1.812\ 5.$$

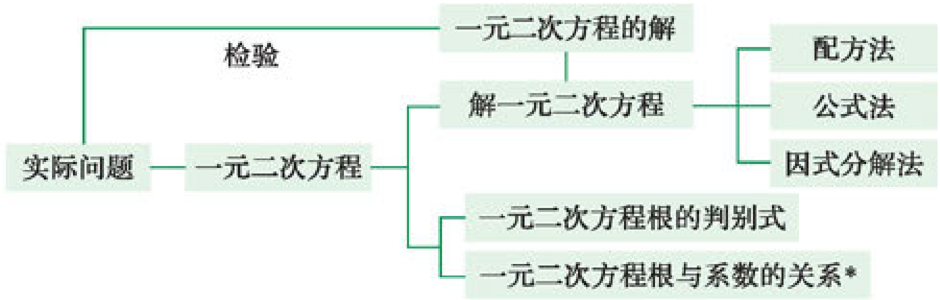
取精确到 0.1 的近似值，可得

$$x\approx1.8.$$

这样求方程近似解的方法，对于较复杂的方程也是适用的.

回顾与反思

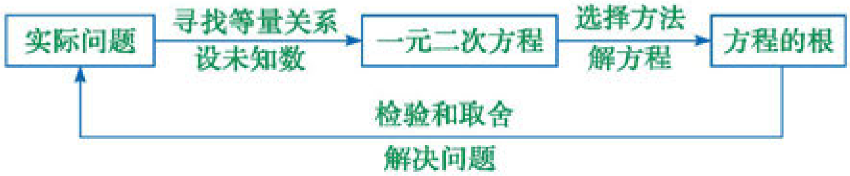
一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们主要学习了一元二次方程的解法与应用. 探究一元二次方程解法的过程，突出体现了降次与转化的思想. 在解决实际问题的过程中，我们进一步积累了用方程模型解决问题的活动经验.

1. 用一元二次方程解决实际问题，一般按下面的方式进行：



用方程解决实际问题的步骤通常是：①分析梳理题意；②设未知数，根据题目中的等量关系列出方程；③解方程；④检验根的合理性并写出答案.

2. 解一元二次方程的方法有配方法、公式法和因式分解法，这三种方法从不同的角度可实现将一元二次方程化为一元一次方程并求解的目的.

（1）配方法是借助于开平方将一元二次方程转化为两个一元一次方程. 因此，在用配方法解一元二次方程时，需将方程的一边配成含未知数的一次式的平方，另一边为非负数，开平方后化为两个一元一次方程，从而求得方程的根.

（2）公式法是配方法的概括与简化. 把方程化为 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 这样的一般形式，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，它的两根是________.

（3）因式分解法是把方程一边化为 0，另一边分解为两个一次式的乘积，进而将一元二次方程转化为两个一元一次方程，求得方程的根.

在解一元二次方程时，应根据方程的特点选择求解方程的方法.

3. 一个一元二次方程的根是由它的系数完全确定的.

(1) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有根或无根由其系数所决定. 当 $b^2-4ac>0$ 时, 方程有__________实数根; 当 $b^2-4ac=0$ 时, 方程有__________实数根; 当 $b^2-4ac<0$ 时, 方程__________实数根.

(2) 当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根时, 实数根为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(3) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 两实数根 x_1, x_2 与系数之间的关系为______________________________.

三、注意事项

在用一元二次方程解决实际问题时, 一定要根据实际问题的要求确定问题的答案.

复习题

A 组

1. 解下列方程:

(1) $x^2-8x+16=4$; (2) $x^2+2x=3$;

(3) $x^2+5x-3=0$; (4) $3x^2+7x+2=0$;

(5) $x^2-3x=5(x-3)$; (6) $4x(x-1)=x^2-1$.

2. 方程 $x^2-3x+4k-1=0$ 有两个实数根, 求 k 的取值范围.

3. 方程 $2x^2+(k+1)x-6=0$ 的两根的和为 -2, 求 k 的值及方程的两根.

4. 一个圆的直径是 10 cm, 另一个圆的面积比这个圆的面积少 16π cm². 求另一个圆的半径.

5. 一个三角形三条边的长是三个连续的整数, 它们的平方和为 50. 求这个三角形三边的长.

6. 一个两位数等于它十位上的数与个位上的数的积的 3 倍, 已知十位上的数比个位上的数小 2. 求这个两位数.

7. 一个正方形蔬菜园需修整并用篱笆围住. 修整蔬菜园的费用是 15 元/平方米, 而购买篱笆材料的费用是 30 元/米, 这两项支出共为 3 600 元. 求此正方形蔬菜园的边长.

8. 某印刷厂今年 1 月份的收入是 25 万元, 1 月份至 3 月份的累计收入达

91 万元．如果月增长率相同，那么月增长率是多少？

9. 儿童商场购进一批服装，进价为 30 元/件，销售时标价为 60 元/件．商场现决定对这批服装开展促销活动，每件降价 x 元后，销售量为 $(20+4x)$ 件．在促销期间，若要每天获得 1 200 元的利润，则每件应降价多少元？

B 组

1. 解下列方程：

(1) $2x^2+0.7x-0.15=0$；　　(2) $2y(3-y)=3$；

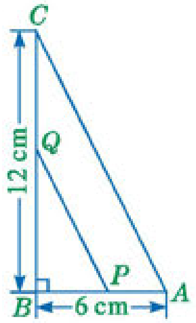
(3) $x^2+\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}+x-\frac{1}{2}x^2$；　　(4) $9(x-2)^2=4(x+1)^2$.

2. 某化肥厂去年 4 月份生产化肥 500 t，因管理不善，5 月份的产量比 4 月份减少了 10%．从 6 月份起强化管理，产量逐月上升，7 月份产量达到 648 t．那么该厂 6 月份和 7 月份产量的月平均增长率是多少？

3. 旧车交易市场有一辆原价为 12 万元的轿车，该车已使用 3 年．已知第一年的折旧率是 20%，第三年末这辆轿车值 7.776 万元．求这辆轿车第二年和第三年平均每年的折旧率.

C 组

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，点 P 从点 A 开始，沿 AB 边以 1 cm/s 的速度向点 B 移动；点 Q 从点 B 开始，沿 BC 边以 2 cm/s 的速度向点 C 移动．如果 P，Q 分别从 A，B 两点同时出发，几秒后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm²？



(第 1 题)

2. 某工厂生产的一种产品按质量分为 10 个档次．若生产第一档次(最低档)的产品，则一天可以生产 76 件，每件的利润为 10 元．每提高一个档次，每件的利润增加 2 元，每天的产量将减少 4 件．设生产的产品质量的档次(每天只生产一个档次的产品)为 x 时，一天的利润为 y 元.

(1) 用含 x 的代数式分别表示出每件产品的利润及每天生产的件数.

(2) 若生产该产品一天的总利润为 1 080 元，则该工厂生产的是第几档次的产品？

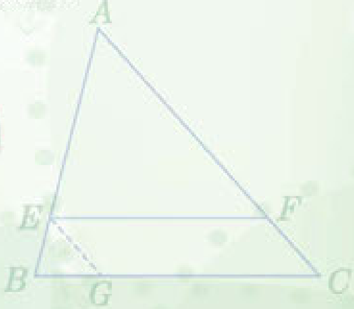
第二十五章

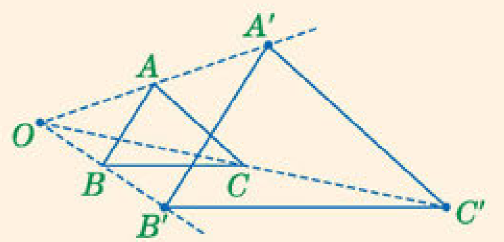
图形的相似

在本章中，我们将学习

- 比例线段
- 相似三角形的判定和性质
- 相似三角形的应用
- 相似多边形和图形的位似

图中两个三角形的大小不同，形状相同. 这两个三角形的对应角和对应边之间有怎样的关系呢？





25.1 比例线段

为了研究相似图形，我们先来探究成比例线段的有关概念及性质.

观察与思考

观察如图 25－1－1 所示的三个长方形，你认为哪两个长方形的大小不同但形状相同？理由是什么？

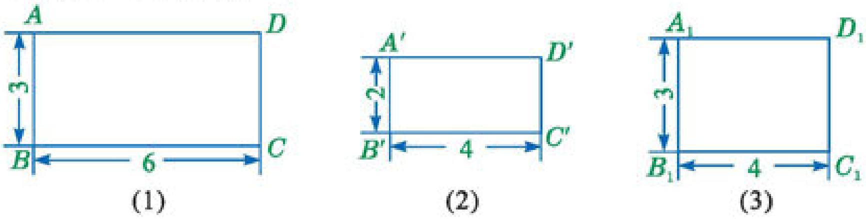


图 25－1－1

两个长方形的形状是否相同，与它们的长、宽比是否相等有关. 为此，需要研究线段的比和成比例线段.

如果选用同一度量单位，量得线段 a 和 b 的长度分别为 m 和 n，我们就把 m 和 n 的比叫做线段 a 和 b 的比，记作

$$a:b=m:n,$$

或

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}.$$

例如，如果 $a=2$ cm，$b=3$ cm，那么，$a:b=2:3$.

在四条线段 a，b，c，d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我们就把这四条线段叫做**成比例线段**（proportional segments），简称比例线段. 此时也称这四条线段成比例.

例如，在图 25－1－1 中，AB，BC，$A'B'$，$B'C'$ 是成比例线段，而 AB，BC，A_1B_1，B_1C_1 不是成比例线段.

大家谈谈

如果线段 a，b，c，d 成比例，那么 ad 和 bc 相等吗？为什么？

反之，如果线段 a，b，c，d 满足 $ad=bc$，那么这四条线段成比例吗？为什么？

比例的基本性质

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

如果 $ad=bc$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b, d\neq 0)$.

特别地，如果 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，即 $b^2=ac$，就把 b 叫做 a，c 的比例中项.

一起探究

我们知道，由 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$，可以得到 $\frac{1+2+3}{2+4+6}=\frac{1}{2}$. 类似地，如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$ $(b+d+\cdots+n\neq 0)$，你认为 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}$ 会有怎样的结果？请说明理由.

事实上，若设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$，则有 $a=kb$，$c=kd$，…，$m=kn$. 所以

$$a+c+\cdots+m=kb+kd+\cdots+kn=k(b+d+\cdots+n).$$

因为 $b+d+\cdots+n\neq 0$，所以

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=k.$$

即

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}.$$

试着做做

如图 25－1－2，已知线段 $AB=a$，点 C 在 AB 上.

图 25－1－2

当$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BC}{AC}$时，线段 AC 的长是多少？

在上述问题中，设 $AC=x$，建立关于 x 的方程 $x^2+ax-a^2=0$，可解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}a$，取其正根，得 $AC=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}a\approx0.618a$.

在线段 AB 上有一点 C，如果点 C 把 AB 分成的两条线段 AC 和 BC 满足$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C **黄金分割**(golden section)，点 C 称为线段 AB 的黄金分割点，$\dfrac{AC}{AB}$称为黄金比.

每条线段上的黄金分割点都有两个.

黄金分割具有艺术性、和谐性，蕴藏着丰富的美学价值，在建筑、艺术等领域有着广泛的应用.

大家谈谈

如图 25－1－3，上海东方明珠塔的塔身高为 468 m，在塔身上装置了下球体、中球体和上球体(太空舱)，分别位于塔身的 68 m～118 m，250 m～295 m，335 m～349 m 之间，使塔身显得非常协调美观.

塔身的黄金分割点位于哪个球体内？请说明理由.

图 25－1－3

练　习

1. 已知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则$\dfrac{b}{a}=$________，$\dfrac{a}{c}=$________.
2. 已知线段 $a=4$ cm，$b=9$ cm，求 a，b 的比例中项.
3. 已知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{2}{3}$，求$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$的值.

习　题

A　组

1. 已知 A，B 两地之间的距离是 60 km，在比例尺为 1∶1 000 000 的地图

上，表示A，B两地的两点之间距离的线段长是多少厘米?

2. 已知线段 $AB=a$，延长 AB 到点 C，使 $BC=AB$，求$\frac{AB}{AC}$，$\frac{AB}{BC}$，$\frac{AC}{BC}$的值.

3. 如图，芭蕾舞演员的下半身与身高的比值大约为0.58，演员在表演时踮起脚尖，身高就可以增加6 cm～8 cm，这给人以更为优美的艺术形象. 你知道其中的道理吗? 说说你的理由.

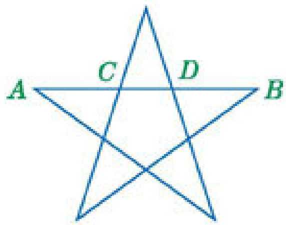
(第3题)

B 组

1. 已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 求证：

(1) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；　　(2) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

2. 如图是一个五角星，测量线段 AC 和 CB 的长，并计算$\frac{AC}{CB}$和$\frac{CB}{AB}$的值. 这两个比值相等吗? 如果相等，比值大约是多少?



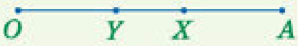
(第2题)

读一读

黄金分割的应用

在探索最优生产条件时，人们常用“优选法”做实验．优选法中的“0.618法”与黄金分割有着密切的关系．在20世纪六七十年代，“0.618法”经我国著名数学家华罗庚(1910年～1985年)倡导和推广，取得了很大的成果．

什么是“0.618法”呢？为了说明问题，我们用线段OA表示实验范围，并设$OA=1$．做实验时，可分别在OA上取两点X和Y做实验，并进行比较．若点Y的实验条件比点X好，则排除XA，若点X的实验条件比点Y好，则排除OY，其目的是为了缩小实验范围．点X，Y选在何处才能减少不必要的实验，从而尽快找到最优条件呢？设点Y的实验条件比点X好，在剩下的OX中，因为点Y已做过实验，所以希望点Y在OX中的位置应与点X在OA中的位置相同，即$\frac{OY}{OX}=\frac{OX}{OA}$．如果设$OX=x$，那么$OY=AX=1-x$，于是$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$．解这个方程，取它的正根，得$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$．这个数恰好是黄金比的比值．每次都取剩余线段的0.618分点做实验，便可以很快地找到最优的生产条件．



对于黄金分割的应用，可以追溯到很古老的年代．早在四千多年以前，古埃及建造的金字塔，高与底面边长的比都接近于0.618．

古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus，约公元前400年～公元前347年)发现：将一条线段分割成两条线段，当较短的线段与较长的线段之比等于较长的线段与全长之比时，这种分割具有美学意义．因此，把这种分割叫做“黄金分割”．在相当长的一段时期内，人们非常崇拜黄金分割，在古希腊的许多矩形建筑中，宽与长的比都等于黄金比．

意大利数学家斐波纳奇在考察兔子生殖问题时发现了数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…，这个数列相邻两项的比越来越接近黄金比．后来他调查了大量人体数据后发现：人体肚脐以下高度与身高之比也接近0.618．在人体绘画、雕塑等方面，艺术家们多以这个比作为美学标准．

25.2 平行线分线段成比例

两条直线被三条平行线所截，所得的四条线段之间有怎样的关系？被一组平行线所截，所得的对应线段之间又有怎样的关系？

如图 25－2－1，两条直线 AC，DF 被三条互相平行的直线 l_1，l_2，l_3 所截，截得的四条线段分别为 AB，BC，DE，EF，平行线 l_1，l_2 之间的距离为 d_1，平行线 l_2，l_3 之间的距离为 d_2．$\frac{AB}{BC}$与$\frac{DE}{EF}$相等吗？

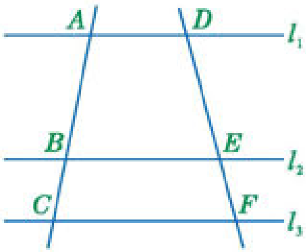


图 25－2－1

一起探究

1．在图 25－2－2 中，所有已知条件如前所述，结合下列条件回答：线段 AB，BC 之间具有什么关系？$\frac{AB}{BC}$等于多少？$\frac{AB}{BC}$与$\frac{DE}{EF}$相等吗？请说明理由．

（1）在图 25－2－2(1)中，$d_1=1$，$d_2=2$．

（2）在图 25－2－2(2)中，$d_1=2$，$d_2=3$．

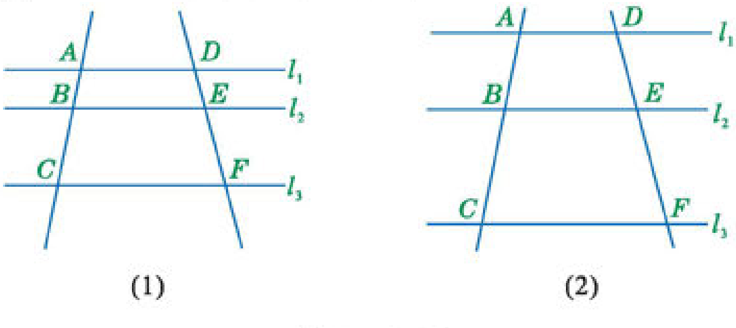


图 25－2－2

2．猜想：在图 25－2－1 中，$\frac{AB}{BC}$与$\frac{DE}{EF}$相等吗？

事实上，经过观察、测量、验证等过程，我们发现：一条直线被三条平行线所截得的两条线段之比，都等于它们所对应的两条平行线之间的距离之比．

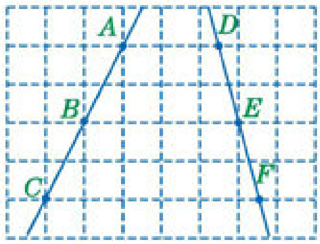
基本事实 两条直线被一组平行线所截，截得的对应线段成比例.

大家谈谈

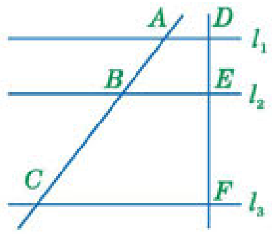
结合图 25-2-1，说出三组成比例的线段，并与同学交流.

练 习

1. 如图，在正方形网格图中，每个正方形的边长均为 1. 若 $AB=BC$，则 DE 和 EF 之间有什么关系？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

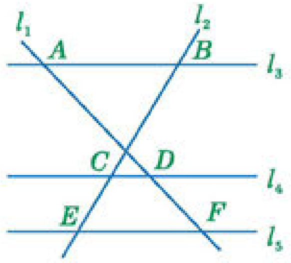
2. 如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$AB=3$，$BC=6$，$DE=2$. 求 EF 的长.

习 题

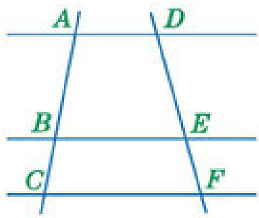
A 组

1. 如图，两条直线 l_1，l_2 被三条平行线 l_3，l_4，l_5 所截，交点分别是 A，D，F 和 B，C，E. 下列等式正确的是________（填写序号）.

①$\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{CE}{BC}$；②$\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{BC}{AF}$；③$\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{BE}{CE}$；④$\dfrac{CE}{DF}=\dfrac{AD}{BC}$；⑤$\dfrac{DF}{CE}=\dfrac{AD}{BC}$.



（第 1 题）



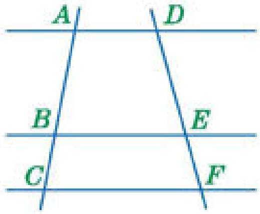
（第 2 题）

2. 已知：如图，$AD /\!/ BE /\!/ CF$，$\frac{AB}{BC}=k$. 求证：$DE=kEF$.

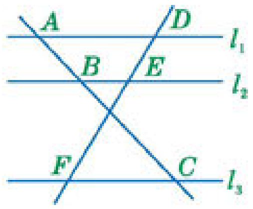
B 组

1. 已知：如图，$AD /\!/ BE /\!/ CF$. 求证：

(1) $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$；　　(2) $\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$AC=a$，$BC=b$，$DE=c$. 求 DF 的长.

在平行线分线段成比例的基本事实中，当两条直线相交于一点时，其结论当然也成立. 由此，我们可以将这个基本事实运用于三角形中.

试着做做

已知：如图 25－2－3，直线 EF 平行于$\triangle ABC$ 的边 BC，与 BA，CA(或它们的延长线)分别相交于点 E，F.

求证：$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

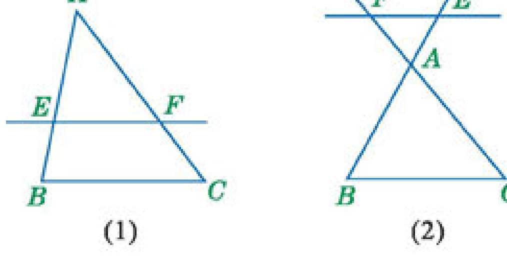


图 25－2－3

事实上，对于图 25－2－3(1)的情形，如图 25－2－4(1)，过点 A 作 $PQ /\!/ EF$，那么 $PQ /\!/ EF /\!/ BC$. 依据平行线分线段成比例的基本事实，即得

$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$.

因为 $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$，所以 $\frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}$，$\frac{EB}{AE}+1=\frac{FC}{AF}+1$，$\frac{EB+AE}{AE}=\frac{FC+AF}{AF}$，$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$，即$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

对于图 25-2-3(2)的情形，如图 25-2-4(2)，同理可得.

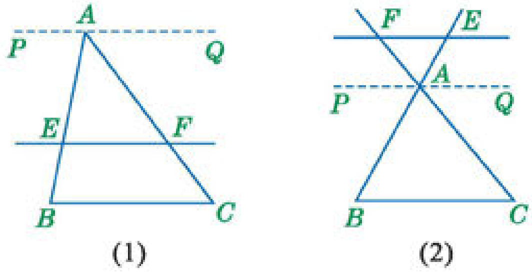


图 25-2-4

平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例.

例 已知：如图 25-2-5，在$\triangle ABC$ 中，$EF\parallel BC$，EF 与两边 AB，AC 分别相交于点 E，F.

求证：$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

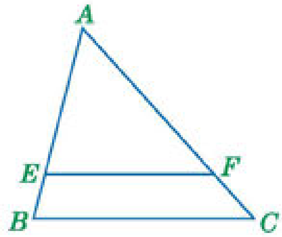


图 25-2-5

证明：∵ $EF\parallel BC$，

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

如图 25-2-6，过点 E 作 $EG\parallel AC$，EG 与边 BC 相交于点 G，则$\frac{AE}{AB}=\frac{GC}{BC}$.

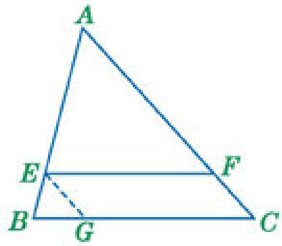


图 25-2-6

∵ $EF\parallel BC$，$EG\parallel AC$，

∴ 四边形 $EGCF$ 为平行四边形，从而 $GC=EF$.

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{GC}{BC}=\frac{EF}{BC}$.

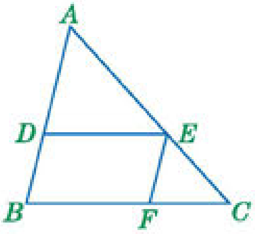
∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形与原三角形的对应边成比例.

练 习

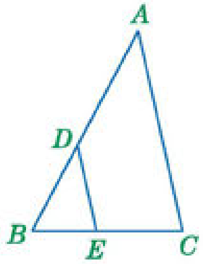
1．如图，在$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$．下列各式中正确的是________（填写序号）．

①$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{AC}$；②$\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{CF}{BC}$；③$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CE}{CF}$；④$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$；⑤$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{FC}{BF}$.



（第 1 题）

2．如图，在$\triangle ABC$中，$DE\parallel AC$，$AB=7$，$BD=3$，$BE=2$．求BC的长.

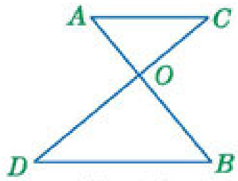


（第 2 题）

习 题

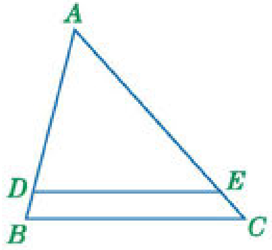
A 组

1．如图，AB，CD相交于点O，$AC\parallel DB$，$AO=10$，$BO=15$，$CO=12$．求DO的长.



（第 1 题）

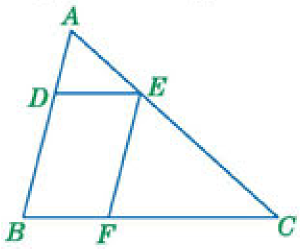
2. 如图，在$\triangle ABC$中，$DE /\!/ BC$，DE分别交AB，AC于点D，E，$DE=10$，$AE=12$，$EC=2$. 求BC的长.



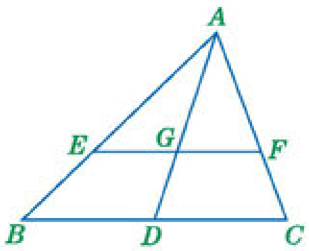
（第2题）

B 组

1. 如图，$DE /\!/ BC$，$EF /\!/ AB$，$AB=9$，$AD=3$，$BF=4$. 求BC的长.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，$EF /\!/ BC$，分别交AB，AC于点E，F，交AD于点G. 求证：$EG=GF$.

25.3 相似三角形

对应角相等、对应边也相等的两个三角形为全等三角形．相仿地，我们来学习相似三角形的有关知识．

对应角相等、对应边成比例的两个三角形叫做**相似三角形**(similar triangles)．相似三角形对应边的比叫做它们的**相似比**(similar ratio)．

如图 25-3-1，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似．

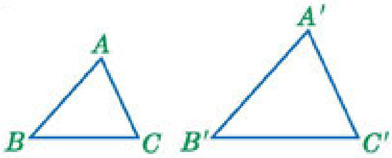


图 25-3-1

$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比为k．

$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似记作“$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$”，读作“$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$”．

大家谈谈

1. 两个直角三角形相似吗？
2. 两个等腰三角形相似吗？两个等边三角形呢？
3. 相似三角形与全等三角形有什么区别和联系？

例 如图 25-3-2，$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$．

(1) 若$AE=3$，$AB=5$，$EF=2.4$，求BC的长．

(2) 求证：$EF/\!/BC$．

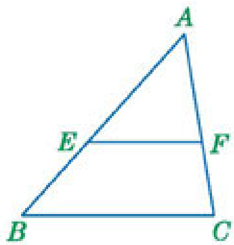


图 25-3-2

解：(1) $\because$ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

$\therefore$ $\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$．

又$\because$ $AE=3$，$AB=5$，$EF=2.4$，

$\therefore$ $BC=\frac{AB\cdot EF}{AE}=\frac{5\times 2.4}{3}=4$．

(2) $\because$ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \quad \angle AEF=\angle B.$

$\therefore \quad EF /\!/ BC.$

我们知道，平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形与原三角形的对应边成比例. 进而可知，这样截得的三角形与原三角形相似.

已知：如图 25－3－3，$EF /\!/ BC$，与 AB，AC(或它们的延长线)相交于点 E，F.

求证：$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

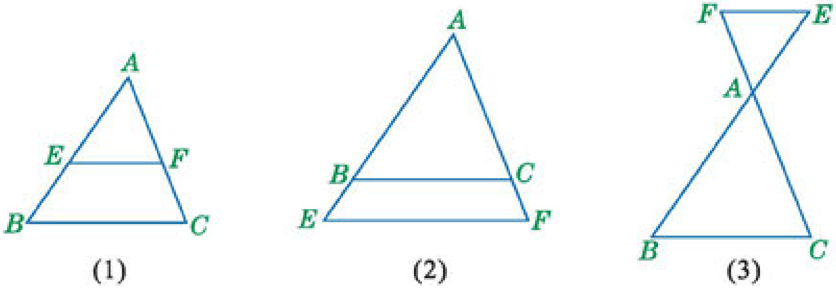


图 25－3－3

证明：如图 25－3－3(1)，在$\triangle AEF$ 和$\triangle ABC$ 中，

$\because \quad EF /\!/ BC$，

$\therefore \quad \angle AEF=\angle B$，$\angle AFE=\angle C$，且$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}$.

又$\because \quad \angle A=\angle A$，

$\therefore \quad \triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

同理可证其他两种情况.

平行于三角形一边的直线和其他两边(或它们的延长线)相交，所截得的三角形与原三角形相似.

做一做

已知：如图 25－3－4，在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别为 AB，AC 的中点.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$.

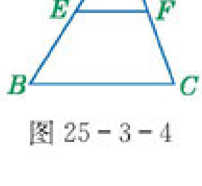
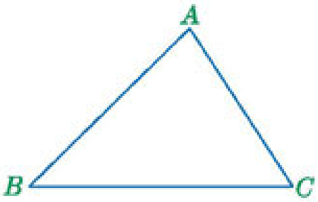


图 25－3－4

练 习

1. 如图，在某县地图上，以三个村庄 A，B，C 为顶点构成的三角形的三边长分别为 $AB=3$ cm，$BC=3.5$ cm，$AC=2.5$ cm. 已知该地图标明的比例尺为1∶100 000，求每两个村庄之间的实际距离.



（第 1 题）

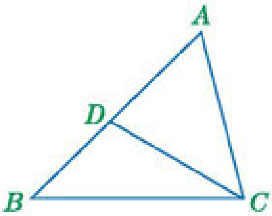
2. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\angle B=60°$，$\angle C=45°$. 求$\angle A'$的度数.

3. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=75°$，$\angle B=30°$. 请画一个$\triangle A'B'C'$，使得$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

习 题

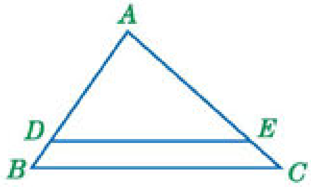
A 组

1. 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$，请写出这两个三角形对应边的比例式.

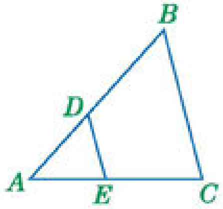


（第 1 题）

2. 如图，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$. 若 $DE=12$，$BC=15$，$BD=2$，求 AB 的长.



（第 2 题）

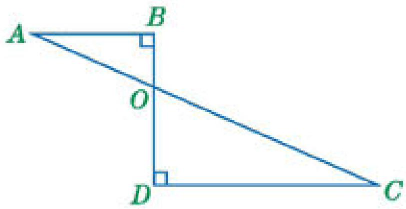


（第 3 题）

3. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，DE 分别交 AB，AC 于点 D，E，$\angle ADE=\angle B$. 求证：$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

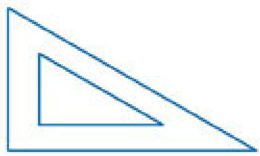
B 组

1. 已知：如图，$AB \perp BD$，垂足为 B，$CD \perp BD$，垂足为 D，AC 与 BD 相交于点 O. 求证：$\triangle ABO \backsim \triangle CDO$.



（第 1 题）

2. 如图，有一锐角为 30°的三角尺，它的内、外两个三角形是相似的. 三角尺斜边的长为12 cm，其内部三角形的最短边长为 3 cm. 这个三角尺内、外两个三角形的相似比是多少？



（第 2 题）

25.4 相似三角形的判定

三个角对应相等、三条边对应成比例的两个三角形相似. 能不能用较少的条件来判定两个三角形相似呢?

我们知道，有两角及其夹边对应相等的两个三角形全等. 当两角对应相等而夹边不相等时，这两个三角形之间有什么关系呢?

观察与思考

1. 如图 25-4-1(1)，这两个等腰直角三角形相似吗? 说说理由.

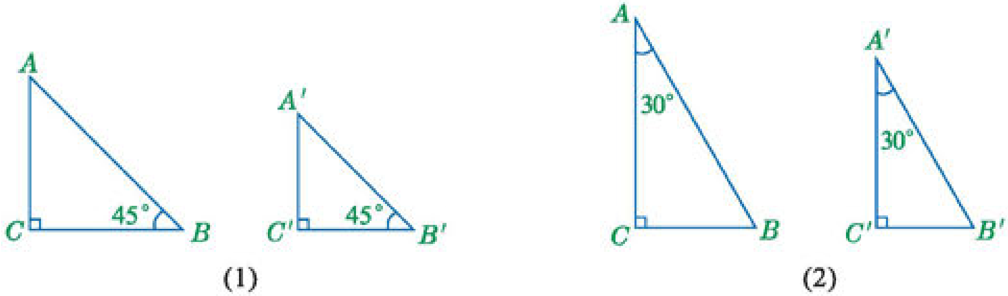


图 25-4-1

2. 如图 25-4-1(2)，这两个直角三角形相似吗? 说说理由.
3. 如果两个三角形有两组对应角相等，那么它们是否相似?

做一做

如图 25-4-2，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$.

图 25-4-2

(1) 分别以$\angle\alpha$，$\angle\beta$为两个内角，任意画出两个三角形.

(2) 量出这两个三角形各对应边的长，并计算出相应的比. 这两个三角形相似吗?

我们发现：有两个角对应相等的两个三角形相似.

已知：如图 25－4－3，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

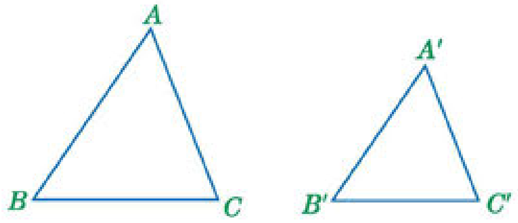


图 25－4－3

证明*：如图 25－4－4，在$\triangle ABC$ 的边 AB，AC(或它们的延长线)上，分别截取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接 DE.

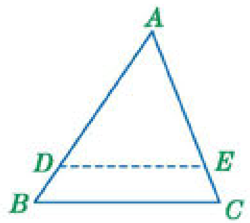


图 25－4－4

∵ $\angle A=\angle A'$，

∴ $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$.

∴ $\angle ADE=\angle B'$，$\angle AED=\angle C'$，

$DE=B'C'$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，

∴ $\angle ADE=\angle B$.

∴ $DE/\!/BC$.

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∴ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

∴ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

又∵ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=B'$，$\angle C=\angle C'$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

若 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'\backsim\triangle A''B''C''$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A''B''C''$. 今后我们可以直接应用它.

相似三角形的判定定理

两角对应相等的两个三角形相似.

例 1 已知：如图 25－4－5，在$\triangle ABC$ 中，点 D，E，F 分别在边 AB，AC，BC 上，且 $DE/\!/BC$，$DF/\!/AC$.

求证：$\triangle ADE\backsim\triangle DBF$.

证明：$\because$ $DE /\!/ BC$，

$\therefore$ $\angle ADE = \angle B$.

又$\because$ $DF /\!/ AC$，

$\therefore$ $\angle A = \angle BDF$.

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle DBF$.

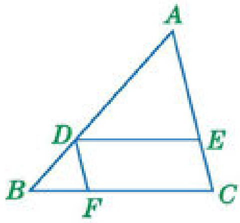


图 25－4－5

做一做

已知：如图 25－4－6，点 D 在$\triangle ABC$ 的边 AB 上，过点 D 作直线截$\triangle ABC$，使截得的三角形与原三角形相似. 你认为满足条件的直线有几条？请把这些直线画出来.

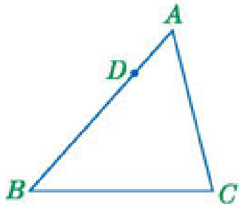
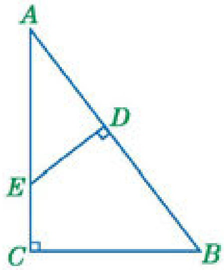


图 25－4－6

练　习

1. 顶角相等的两个等腰三角形相似吗？有一个底角对应相等的两个等腰三角形相似吗？请说出你的理由.

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，E 为边 AC 上一点，$ED \perp AB$，垂足为 D. 求证：$\triangle AED \backsim \triangle ABC$.

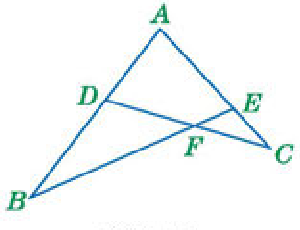


（第 2 题）

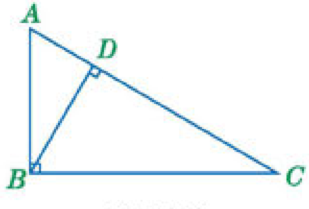
习　题

A　组

1. 如图，$\angle C = \angle B$，请指出图中的相似三角形.



（第 1 题）

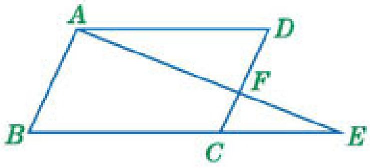


（第 2 题）

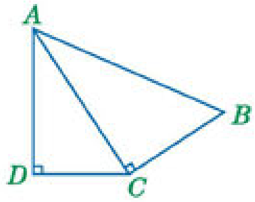
2. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90^\circ$，$BD \perp AC$，垂足为 D. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle ADB$，$\triangle ABC \backsim \triangle BDC$.

B 组

1. 如图，点 E 在▱$ABCD$ 的边 BC 的延长线上，连接 AE，交 CD 于点 F. 指出图中有几对相似三角形，并说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AC\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle ACD=\angle B$，且 $AB=6$，$AC=5$. 求 AD 的长.

类比“两边及其夹角对应相等的两个三角形全等”，如果两边对应成比例，且夹角相等，那么能不能判定这两个三角形相似呢？

做一做

如图 25－4－7，画出$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$，使$\angle A'=\angle A$，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=2$.

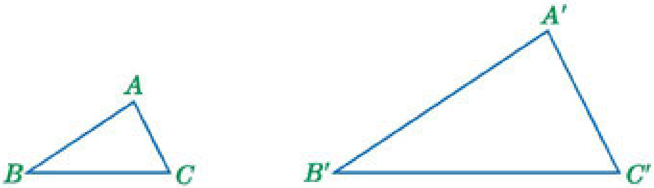


图 25－4－7

（1）比较$\angle C'$和$\angle C$(或$\angle B'$和$\angle B$)的大小.

（2）由比较的结果，能断定$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$相似吗？

（3）改变对应边的比值和夹角的度数(但保持夹角相等)，再画出两个三角形，它们相似吗？

我们发现：两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

已知：如图 25－4－8，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$\angle A=\angle A'$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

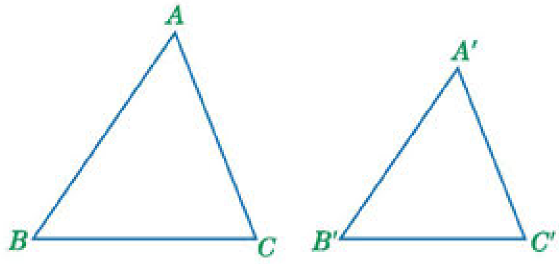


图 25－4－8

证明：如图 25－4－9，在$\triangle ABC$ 的边 AB（或它的延长线）上截取$AD=A'B'$，过点 D 作$DE /\!/ BC$，交 AC 于点 E.

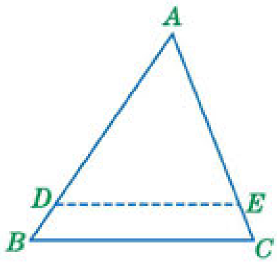


图 25－4－9

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$,

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

$\because$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$AD=A'B'$，

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore$ $AE=A'C'$.

又$\because$ $\angle A=\angle A'$，

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

相似三角形的判定定理

两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例 2 已知：在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'=60°$，$AB=4$ cm，$AC=8$ cm，$A'B'=11$ cm，$A'C'=22$ cm.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

证明：$\because$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{11}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{22}=\dfrac{4}{11}$，

$\therefore$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又$\because$ $\angle A=\angle A'=60°$，

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

练 习

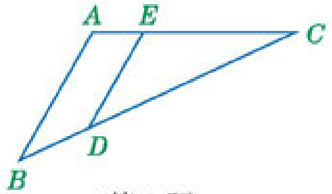
1. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：

(1) $\angle A=36^\circ$，$AB=2.5$ cm，$AC=7.5$ cm；

$\angle A'=36^\circ$，$A'B'=3$ cm，$A'C'=9$ cm.

(2) $AC=2A'C'$，$BC=2B'C'$.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle EDC$中，$AE=2$，$EC=6$，$BD=3$，$DC=9$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

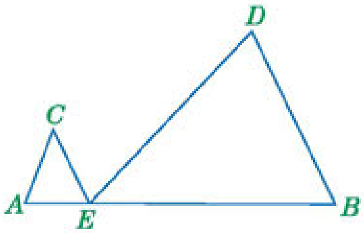


（第 2 题）

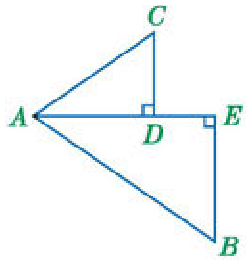
习 题

A 组

1. 已知：如图，点E在AB上，$CE /\!/ BD$，$BE=3EC$，$BD=3EA$. 求证：$\triangle BDE\backsim\triangle EAC$.



（第 1 题）

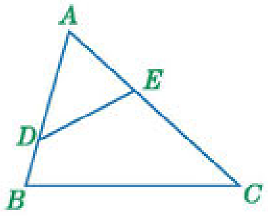


（第 2 题）

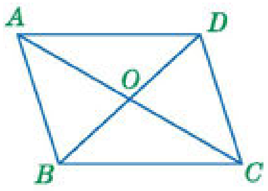
2. 已知：如图，$BE\perp AE$，$CD\perp AE$，垂足分别为E，D，$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{AE}{AD}$. 求证：$AE$平分$\angle BAC$.

B 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle AED$中，$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle AED$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AC=\sqrt{2}BC$. 求证：$\triangle BOC\backsim\triangle ABC$.

三边对应成比例的两个三角形相似吗？

一起探究

（1）如图 25－4－10，在半透明纸上画一个$\triangle ABC$，使 $AB=1.5$ cm，$AC=2.5$ cm，$BC=2$ cm. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=3$ cm，$A'C'=5$ cm，$B'C'=4$ cm.

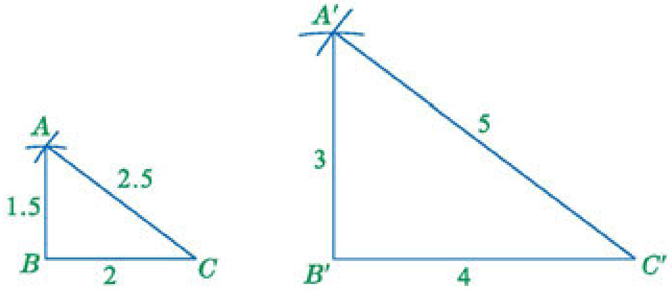


图 25－4－10

（2）比较$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$各个角，它们对应相等吗？这两个三角形相似吗？

把你的结果与同学交流.

我们猜想：三边对应成比例的两个三角形相似.

已知：如图 25－4－11，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

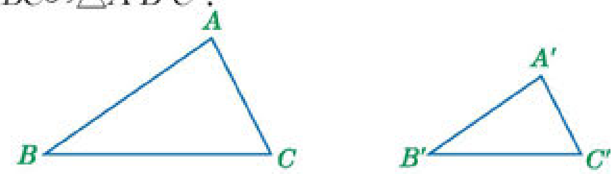


图 25－4－11

证明：如图 25 - 4 - 12，在$\triangle ABC$的边AB上截取$AE=A'B'$，过点E作$EF /\!/ BC$，交AC于点F，则$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$，$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$.

在$\triangle A'B'C'$和$\triangle AEF$中，

$\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$，且$AE=A'B'$，

$\therefore \quad \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$.

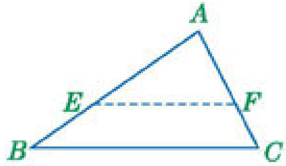


图 25 - 4 - 12

又$\because \quad \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$，

$\therefore \quad AF=A'C'$，$EF=B'C'$.

$\therefore \quad \triangle AEF \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

相似三角形的判定定理

三条边对应成比例的两个三角形相似.

例 3 已知：如图 25 - 4 - 13，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$与$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'=90^\circ$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$.

求证：$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

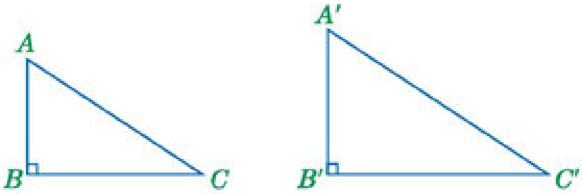


图 25 - 4 - 13

证明：设$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，则$AB=kA'B'$，$AC=kA'C'$.

根据勾股定理，得

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{k^2A'C'^2-k^2A'B'^2}=k\sqrt{A'C'^2-A'B'^2}=kB'C'$.

$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$.

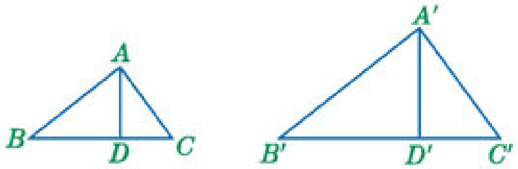
$\therefore \quad \mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

由例 3 我们得到：**直角边和斜边对应成比例的两个直角三角形相似.**

练习

1. 已知$\triangle ABC$的三边$AB=5$ cm，$AC=10$ cm，$BC=12$ cm，$\triangle A'B'C'$的三边$A'B'=3$ cm，$A'C'=6$ cm，$B'C'=7.2$ cm. 判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，D，D'分别为边BC，$B'C'$上的点，且$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$，$\triangle ADC \backsim \triangle A'D'C'$. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

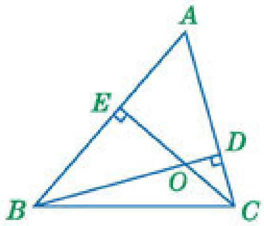


（第 2 题）

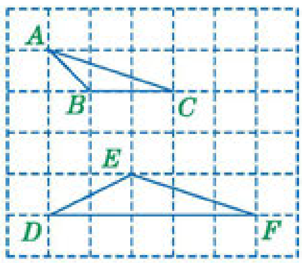
习题

A 组

1. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{1}{3}$，$AB=2$，$AC=3$，$BC=4$. 求$A'B'$，$A'C'$，$B'C'$的长.
2. 如图，$\triangle ABC$的两条高BD，CE相交于点O.
   (1) 写出图中所有相似的三角形.
   (2) 若再连接DE，这时增加了哪几对相似三角形?



（第 2 题）

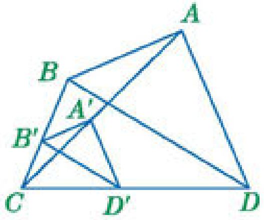


（第 3 题）

3. 在正方形网格图中的$\triangle ABC$和$\triangle DEF$如图所示. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

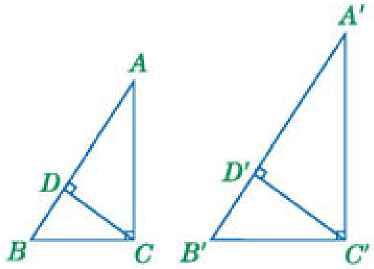
B 组

1. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$A'B' \parallel AB$，$A'D' \parallel AD$. 求证：$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.



（第 1 题）

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，已知 $\angle ACB=\angle A'C'B'=90^\circ$，$CD$，$C'D'$ 分别为两个三角形斜边上的高，且 $\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}$. 求证：Rt$\triangle ABC \backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.



（第 2 题）

25.5 相似三角形的性质

我们已经知道：两个相似三角形的对应角相等，对应边成比例. 下面我们探究相似三角形的其他性质.

全等三角形的对应高、对应中线和对应角平分线分别相等. 两个相似三角形，它们的对应高、对应中线和对应角平分线的比与它们的相似比之间有什么关系呢？

观察与思考

如图 25-5-1，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k. AD 与 $A'D'$，AE 与 $A'E'$ 分别为 BC，$B'C'$ 边上的高和中线，AF 与 $A'F'$ 分别为 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的平分线.

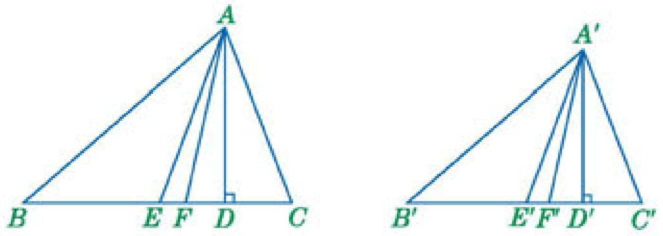


图 25-5-1

(1) AD 和 $A'D'$ 的比与相似比之间有怎样的关系？请说明理由.

(2) AE 和 $A'E'$ 的比、AF 和 $A'F'$ 的比分别与相似比有怎样的关系？请说明理由.

事实上，两个相似三角形的对应高、对应中线和对应角平分线的比都等于它们的相似比.

下面，我们证明相似三角形对应高的比等于它们的相似比.

已知：如图 25-5-1，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，AD，$A'D'$ 分别为 BC，$B'C'$ 边上的高.

求证：$\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

证明：$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore$ $\angle B=\angle B'$.

又$\because$ $AD \perp BC$，$A'D' \perp B'C'$，

$\therefore$ $\angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ$.

$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

做一做

1. 已知：如图 25－5－1，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，AE，$A'E'$ 分别为 BC，$B'C'$边上的中线. 求证：$\dfrac{AE}{A'E'}=k$.

2. 已知：如图 25－5－1，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，AF，$A'F'$ 分别为$\angle BAC$，$\angle B'A'C'$的平分线. 求证：$\dfrac{AF}{A'F'}=k$.

相似三角形的性质定理

相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比，都等于相似比.

例 1 如图 25－5－2，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，垂足为 D，$EF /\!/ BC$，分别交 AB，AC，AD 于点 E，F，G，$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$AD=15$. 求 AG 的长.

解：$\because$ $EF /\!/ BC$，

$\therefore$ $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

$\because$ $AD \perp BC$，

$\therefore$ $AD \perp EF$.

$\therefore$ $\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{AE}{AB}$.

又$\because$ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$AD=15$，

$\therefore$ $\dfrac{AG}{15}=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore$ $AG=9$.

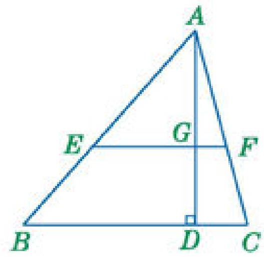


图 25－5－2

练　习

已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$2:3$.

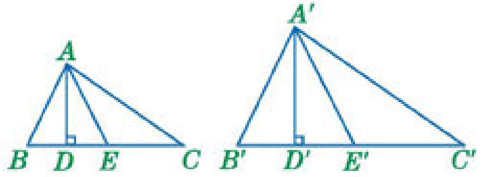
（1）如果AD，$A'D'$分别为这两个三角形的对应高，且$AD=9$ cm，求$A'D'$的长.

（2）如果AE，$A'E'$分别为这两个三角形的对应中线，且$A'E'=10$ cm，求AE的长.

（3）如果AF，$A'F'$分别为这两个三角形的对应角平分线，求$\dfrac{A'F'}{AF}$的值.

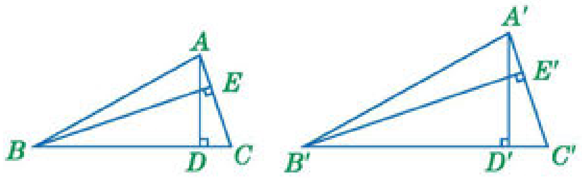
习　题

1. 已知：如图，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$，$AE$分别为$\triangle ABC$的高和中线，$A'D'$，$A'E'$分别为$\triangle A'B'C'$的高和中线. 求证：$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$.



（第1题）

2. 已知：如图，AD，BE为$\triangle ABC$的两条高，$A'D'$，$B'E'$为$\triangle A'B'C'$的两条高，且$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{A'B'}{A'D'}$，$\angle C=\angle C'$. 求证：$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{BE}{B'E'}$.



（第2题）

相似三角形周长的比、面积的比，与它们的相似比之间各有什么关系呢？

一起探究

如图25－5－3，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$k$，$AD$，$A'D'$分别为

BC，$B'C'$边上的高.

（1）$\triangle ABC$的周长和$\triangle A'B'C'$的周长的比与它们的相似比有什么关系？请说明理由.

（2）$\triangle ABC$的面积和$\triangle A'B'C'$的面积的比与它们的相似比有什么关系？请说明理由.

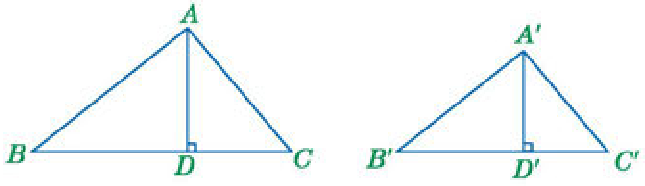


图 25－5－3

事实上，因为$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，所以$\dfrac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=k$，即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的周长之比等于它们的相似比.

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD$，$S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}B'C'\cdot A'D'$，$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$，

所以$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot\dfrac{AD}{A'D'}=k^2$，即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的面积之比等于相似比的平方.

相似三角形的性质定理

相似三角形周长的比等于相似比.
相似三角形面积的比等于相似比的平方.

例 2 如图 25－5－4，在$\triangle ABC$中，D，E，F分别为BC，AC，AB边的中点. 求：

（1）$\triangle DEF$的周长与$\triangle ABC$的周长之比.

（2）$\triangle DEF$的面积与$\triangle ABC$的面积之比.

解：∵ D，E，F分别为BC，AC，AB的中点，

∴ $DE /\!/ AB$，$EF /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，

且$DE=\dfrac{1}{2}AB$，$EF=\dfrac{1}{2}BC$，$DF=\dfrac{1}{2}AC$.

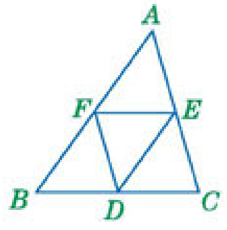


图 25－5－4

∴ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

∴ $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

∴ $\triangle DEF$ 的周长与$\triangle ABC$ 的周长之比为 $1:2$，$\triangle DEF$ 的面积与$\triangle ABC$ 的面积之比为 $1:4$.

练习

1. 两个相似三角形的相似比为 $1:5$，则

（1）这两个相似三角形周长的比为________.

（2）这两个相似三角形面积的比为________.

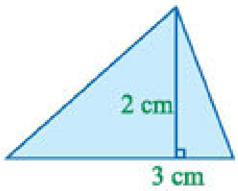
2. $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，其相似比为 $3:4$，$\triangle ABC$ 的周长为24 cm. 求$\triangle A'B'C'$的周长.

习题

A 组

1. 已知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AB=5$，$BC=6$，$AC=4$，$\triangle A'B'C'$ 的周长为 45. 求$\triangle A'B'C'$ 的三边长.

2. 如图，这是一个由一块三角形草坪按 1∶1 000 的比例画出的图形，草坪的实际面积是多少平方米？



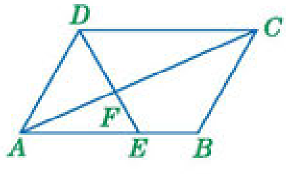
（第 2 题）

3. 两个相似三角形的对应中线分别为 6 cm 和 4 cm，求这两个三角形周长的比和面积的比.

B 组

1. 已知$\triangle ABC$ 的周长为 6，面积为$\sqrt{3}$. 将$\triangle ABC$ 三边同时扩大为原来的 4 倍，得到$\triangle A'B'C'$. 求$\triangle A'B'C'$的周长和面积.

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE:EB=2:1$，$S_{\triangle AEF}=8$. 求$\triangle CDF$ 的面积.



（第 2 题）

25.6 相似三角形的应用

相似三角形的知识有着广泛的应用，在测量高度或距离方面的作用尤为突出.

例 1 如图 25－6－1，有些空心圆柱形机械零件的内径是不能直接测量的，往往需要使用交叉卡钳进行测量. 图中所示为一个零件的剖面图，它的外径为 a，内径 AB 未知. 现用交叉卡钳去测量，若 $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{m}$，$CD=b$，则这个零件的内径为多少，零件的壁厚 x 又是多少？（用含 a，b，m 的代数式表示）

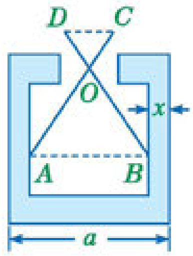


图 25－6－1

解：∵ $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{m}$，$\angle COD=\angle AOB$，

∴ $\triangle CDO\backsim\triangle ABO$.

∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{m}$.

又∵ $CD=b$，

∴ $AB=mb$，$x=\frac{a-mb}{2}$.

即这个零件的内径为 mb，壁厚为 $\frac{a-mb}{2}$.

如图 25－6－2，在学校操场上，高高耸立的旗杆上悬挂着五星红旗. 你一定想知道学校操场上旗杆的高度，那么怎样测量和计算旗杆的高呢？


图 25－6－2

一起探究

（1）请设计一个测量旗杆高度的方案，说明理由，并与大家交流.

（2）思考下面“大刚设计的方案”是否可行. 如果可行，请说明其中的道理. 若标杆 $CD=2$ m，标杆影子 $BD=3$ m，旗杆影子 $BO=12$ m，求旗杆的高.

大刚设计的方案

如图 25－6－3，在阳光下的某一时刻，将一根标杆 CD 竖立在旗杆影子上，使标杆的影子 BD 落在旗杆的影子 BO 上，且它们影子的顶端重合．这时，量一量 CD，BD，BO 的长，可得旗杆 AO 的长为

$$AO=\frac{CD\cdot BO}{BD}.$$

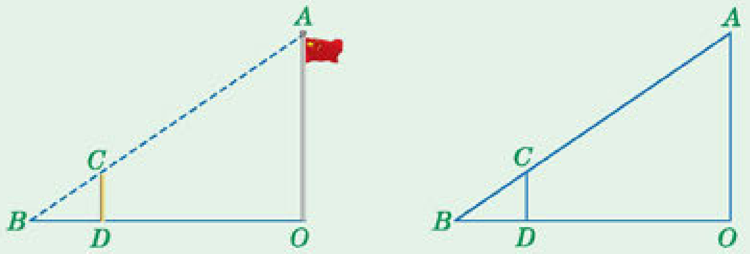


图 25－6－3

做一做

如图 25－6－4，这是大家都做过的“小孔成像”实验示意图．已知蜡烛与光屏之间的距离为 l．具有“小孔”的纸板放在什么位置时，蜡烛火焰的高度 AB 是它的像 $B'A'$ 的高度的一半？

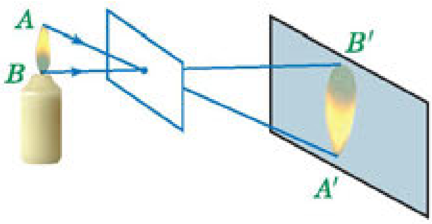
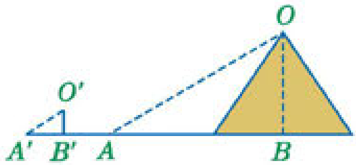


图 25－6－4

练 习

1．按上面“大刚设计的方案”中的测量方法，测得教学楼在地面上的影子长为 24 m，2 m 高的标杆竖立在地面上的影子长为 3 m．教学楼的高度为多少？

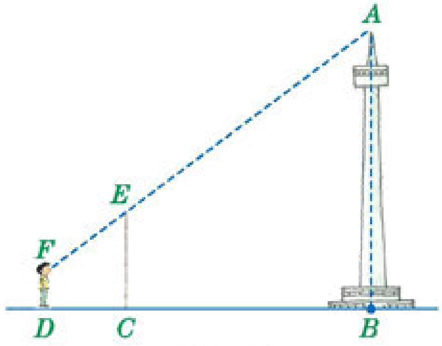
2．为了测量埃及金字塔的高度，在太阳光下，先竖一根已知长度的标杆，然后测量标杆和金字塔影子的长度，就可以近似求出金字塔的高度．如图所示，某人某时刻测得金字塔的影长 $AB=274$ m，标杆的长 $O'B'=2$ m，标杆的影长 $A'B'=4$ m．求金字塔的高度 OB．



（第 2 题）

习题

1. 如图，为测量电视塔 AB 的高度(包括台阶高)，小亮在他与电视塔之间竖立一根 5 m 高的标杆(即 CE)，当他距标杆 2 m 时(即点 D 处)，塔尖 A、标杆的顶端 E 与小亮的眼睛 F 恰好在一条直线上. 已知小亮的眼睛距地面的高度是 1.6 m，标杆与电视塔之间的距离是 108 m. 求电视塔的高度.



(第 1 题)

2. 某同学从一建筑物边经过，只见这个建筑物周围是一块平坦的空地，建筑物的影子清楚地映在地面上. 这名同学想估算一下这座建筑物的高度，可身边未带任何测量工具，但他利用自己的身高 168 cm 和脚长 25 cm 就解决了问题. 请说明这名同学是怎样解决这一问题的.（写出估算过程）

一起探究

1. 如图 25-6-5，在一条小河的北岸 A 处有一古塔，南岸 C 处有一观景台. 为求古塔和观景台之间的距离，请你设计测量方案，并给出计算结果.

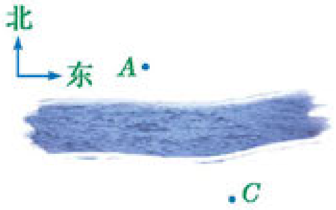


图 25-6-5

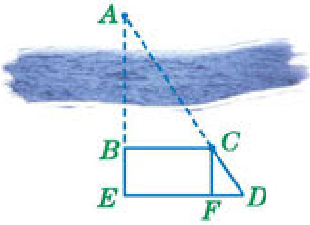


图 25-6-6

2. 如图 25-6-6，小明给出的测量方案是否可行？若可行，请按他的测量方案和所得数据求出结果.

小明的测量方案和测量数据

从点 C(观景台)沿正西方向走到点 B，使点 B 恰好位于点 A(古塔)的正南方向上，然后向南走到点 E，再从点 E 向东走到点 D，使得 D，C，A 三点恰在一条直线上，量得 $BE=40$ m，$ED=100$ m，$DC=48$ m，由此可计算 AC 的长.

例 2 如图 25－6－7，$\triangle ABC$ 为一块铁板余料．已知 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm．要用这块余料裁出一个正方形材料，且使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，这个正方形的边长应为多少毫米？

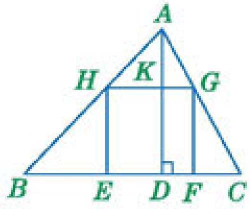


图 25－6－7

解：设裁出的正方形为 $EFGH$，$\triangle ABC$ 的高 AD 与 HG 交于点 K，则 AK 为 $\triangle AHG$ 的高．

$\because$ $HG /\!/ EF$，

$\therefore$ $\angle AHG=\angle B$．

又$\because$ $\angle BAC$ 为公共角，

$\therefore$ $\triangle AHG \backsim \triangle ABC$．

$\therefore$ $\dfrac{HG}{BC}=\dfrac{AK}{AD}$．

$\because$ 四边形 $EFGH$ 为正方形，

$\therefore$ $AK=AD-HG$．

$\therefore$ $\dfrac{HG}{BC}=\dfrac{AD-HG}{AD}$．

设 $HG=x$ mm，则 $\dfrac{x}{120}=\dfrac{80-x}{80}$．

解得 $x=48$．

答：裁出的正方形的边长为 48 mm．

做一做

如图 25－6－8，为测量被障碍物隔开的 A，B 两点间的距离，分别在点 A，B 处竖立标杆，并寻找点 O，通过观测，确定点 C，使点 O，C，A 在一条直线上．如果测得 OA 的长是 OC 长的 100 倍，那么，接下来该怎样做，才能算出 A，B 两点间的距离？

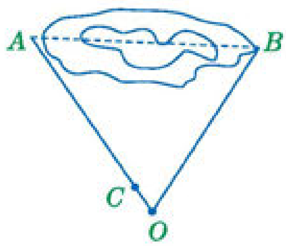
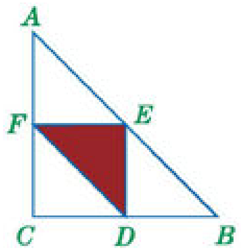


图 25－6－8

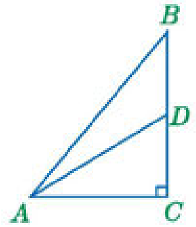
练　习

1．如图，厨房角柜的一个台面为三角形．要把它的各边中点连线所围

成的三角形铺成红色大理石，其余部分铺成白色大理石，红色大理石的面积与白色大理石的面积的比是多少？



（第 1 题）

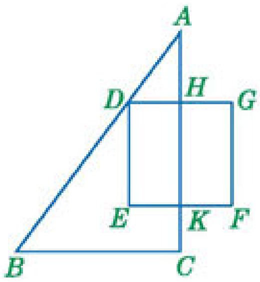


（第 2 题）

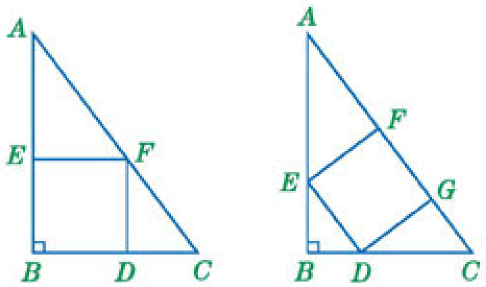
2. 如图，D 为 Rt$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点. 点 D 在什么位置时，可使图中的两个直角三角形相似？

习题

1. 如图所示，一座正方形城池 $DEFG$ 的四面正中各有城门，出北门 20 m 的 A 处（HA=20 m）有一棵大树，出南门 14 m 到 C 处（CK=14 m），再向西行 1 775 m 到 B 处（CB=1 775 m），正好看到 A 处的大树（点 D 在直线 AB上）. 求这座城池的边长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. Rt$\triangle ABC$ 为一铁板余料，$\angle B=90^\circ$，BC=6 cm，AB=8 cm. 要把它加工成正方形小铁板，有如图所示的两种加工方案. 请你分别计算这两种方案中的正方形边长.

25.7 相似多边形和图形的位似

我们已经学习了相似三角形，现在就来学习相似多边形的有关知识.

如图 25-7-1，照片中两个人物，国旗上大五角星与小五角星，其形状分别相同，但大小不同.

(1)

(2)

图 25-7-1

像这样形状相同的图形称为**相似图形**(similar figures).

做一做

如图 25-7-2，在上、下两行的图形中，把你认为是相似图形的用线连起来.

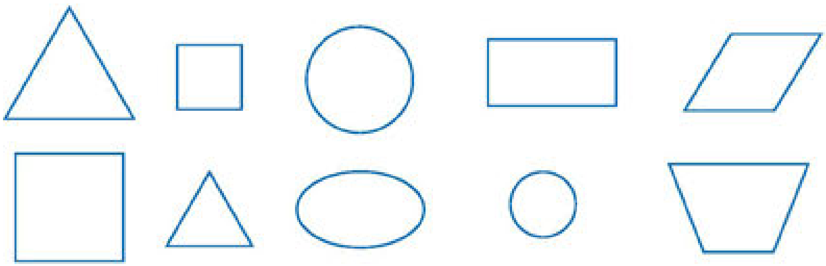


图 25-7-2

在相似图形中，现阶段只研究相似多边形.

一般地，如果两个多边形的对应角相等、对应边成比例，那么这两个多边形就叫做**相似多边形**(similar polygons). 相似多边形对应边的比叫做它们的**相似比**(similar ratio).

观察与思考

分别观察图 25－7－3(1)和(2)中的两个多边形，先直观判断它们是不是相似多边形，再经过测量与计算，验证你的结论.

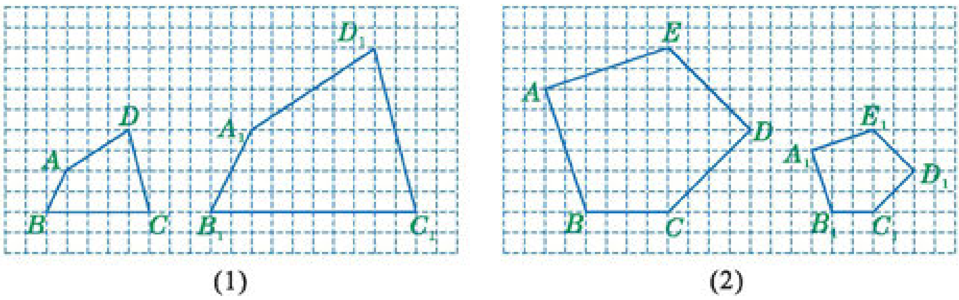


图 25－7－3

例 如图 25－7－4，五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$，求 C_1D_1 的长和 $\angle A$ 的度数.

解：∵ 五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$，

∴ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$，

$\angle E=\angle E_1=145°$.

∵ $AB=15$，$A_1B_1=10$，

$CD=21$，

∴ $\dfrac{15}{10}=\dfrac{21}{C_1D_1}$.

解得 $C_1D_1=14$.

又∵ $\angle B=130°$，$\angle C=\angle D=90°$，

∴ $\angle A=(5-2)\times180°-130°-145°-2\times90°=85°$.

所以，$C_1D_1=14$，$\angle A=85°$.

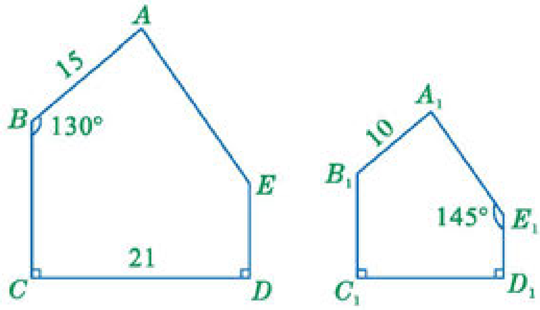
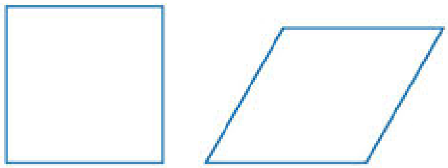


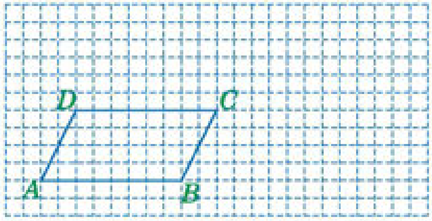
图 25－7－4

练 习

1. 举出几个相似图形的实例.
2. 如图，正方形和菱形的边长都是 3，它们相似吗？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在网格图内，延长 AB 到点 E，延长 AD 到点 F，使 $AE=2AB$，$AF=2AD$，以 AE，AF 为邻边作▱$AEGF$. ▱$AEGF$ 与▱$ABCD$ 是相似图形吗？为什么？

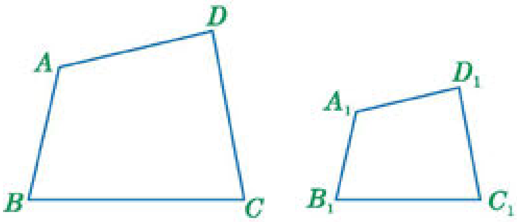
习　题

A 组

1. （1）两个全等的图形是相似图形吗？为什么？

（2）任意两个正方形相似吗？任意两个矩形相似吗？菱形呢？为什么？

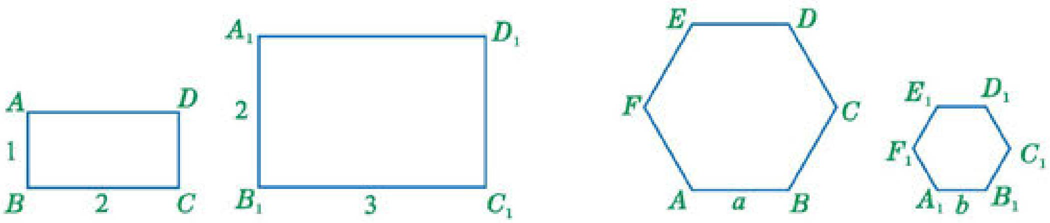
2. 如图，四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$，$AB=18$，$A_1B_1=12$，$B_1C_1=14$，$\angle A=117°$，$\angle B=77°$，$\angle D_1=83°$. 求 BC 的长和 $\angle C$ 的度数.



（第 2 题）

B 组

1. 观察下面两组多边形：



(1)　　(2)

（第 1 题）

（1）在图(1)中，矩形 $ABCD$ 和矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似吗？为什么？

（2）在图(2)中，多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 都是各边相

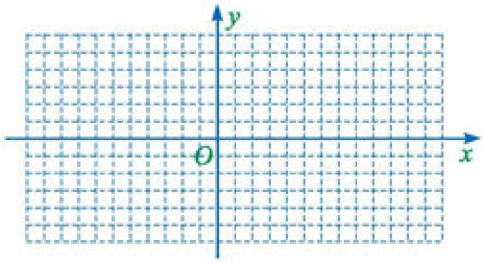
等，各角相等的六边形，它们是相似图形吗？为什么？

2. 如图，在直角坐标系(小方格的边长为 1 个单位长度)中，描出下列各点：$A(0,\ 3)$，$B(2,\ -2)$，$C(-2,\ 1)$，$D(2,\ 1)$，$E(-2,\ -2)$.

(1) 用线段顺次连接点 A，B，C，D，E，A，得到一个图形.

(2) 将各点的横、纵坐标都乘 2，描出对应的点，再用线段顺次连接各对应点，得到一个图形.

(3) 得到的新图形与原图形是相似图形吗？



(第 2 题)

一起探究

如图 25-7-5，已知$\triangle ABC$及$\triangle ABC$外的一点 O.

1. 请你按如下步骤画出$\triangle A'B'C'$.

(1) 画射线 OA，OB，OC.

(2) 分别在 OA，OB，OC 上截取点 A'，B'，C'，使 $OA'=2OA$，$OB'=2OB$，$OC'=2OC$.

(3) 连接 $A'B'$，$A'C'$，$B'C'$，得$\triangle A'B'C'$.

2. 请你判断 AB 与 $A'B'$、AC 与 $A'C'$、BC 与 $B'C'$ 的位置关系，并说明理由.

3. $\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$相似吗？为什么？

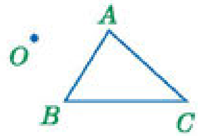


图 25-7-5

事实上，上面“一起探究”中画出的三角形与原三角形是相似的，并且两个三角形的对应边互相平行（或在同一条直线上）.

做一做

如图 25-7-6，点 O 在四边形 $ABCD$ 的内部，请按“一起探究”中的步骤画一个四边形 $A'B'C'D'$，使得四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，$\frac{AB}{A'B'}=2$，对应边互相平行，且经过每对对应点的直线相交于点 O.

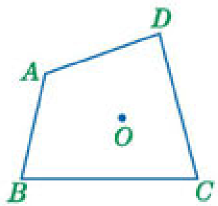


图 25-7-6

像“一起探究”中的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，以及“做一做”中的四边形$ABCD$和四边形$A'B'C'D'$，它们不仅相似，而且经过每对对应顶点的直线相交于一点，对应边互相平行(或在同一条直线上)．我们把这样的两个图形称为**位似图形**(homothetic figures)，对应顶点所在直线的交点称为**位似中心**(homothetic center)，这时的相似比又称**位似比**(homothetic ratio)．

观察与思考

在图 25－7－7 中，各组相似图形是位似图形吗？请说明理由．

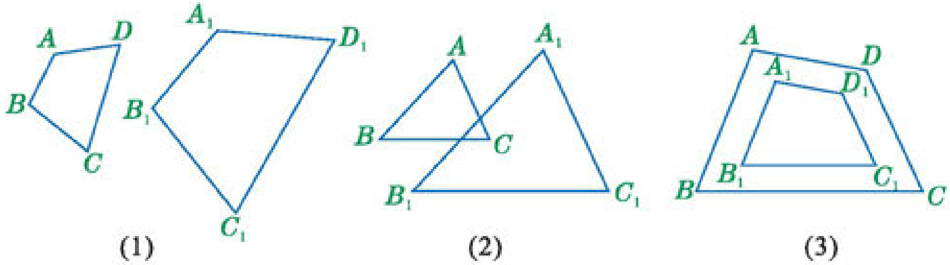


图 25－7－7

做一做

如图 25－7－8，画出五边形$ABCDE$的位似五边形$A'B'C'D'E'$，且使$\dfrac{AB}{A'B'}=2$．

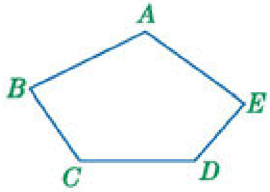
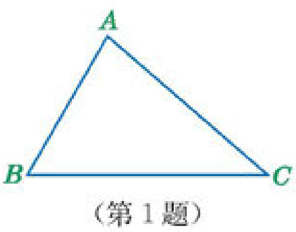


图 25－7－8

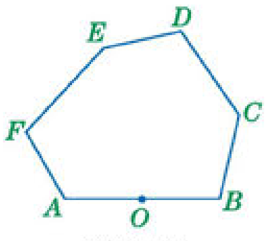
根据位似图形的意义，我们可以在平面上任意位置取点，把一个多边形按照一定的比例进行放大或缩小．

练　习

1．如图，已知$\triangle ABC$，以点A为位似中心，画出$\triangle A'B'C'$，使得$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$位似，且位似比为 2．



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，O 为 AB 边的中点，以点 O 为位似中心，画出与六边形 $ABCDEF$ 的位似比为$\frac{1}{2}$的位似六边形.

习 题

A 组

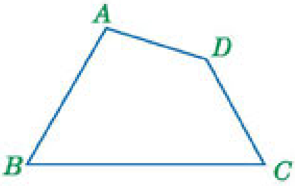
1. 任意画一个$\triangle ABC$，在$\triangle ABC$ 的外部取一点 O，以点 O 为位似中心，画出与$\triangle ABC$ 的位似比为$\frac{1}{3}$的位似三角形.

2. 如图，已知四边形 $ABCD$，按下列要求分别画出它的一个位似四边形，且使位似比 $k=\frac{3}{4}$.

(1) 位似中心在四边形 $ABCD$ 的外部.

(2) 位似中心在四边形 $ABCD$ 的内部.

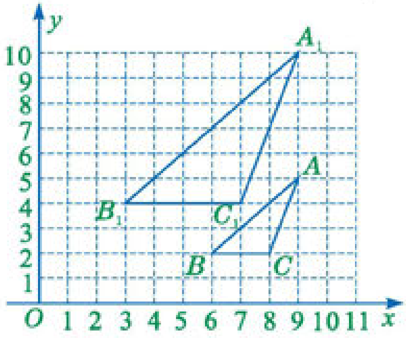
(3) 位似中心在四边形 $ABCD$ 的一个顶点上.



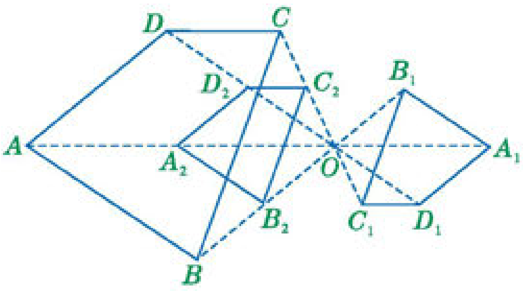
(第 2 题)

B 组

1. 如图，已知图中的每个小方格都是边长为 1 的小正方形，每个小正方形的顶点称为格点. 若$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 为位似图形，且顶点都在格点上，则位似中心的坐标为________.



(第 1 题)

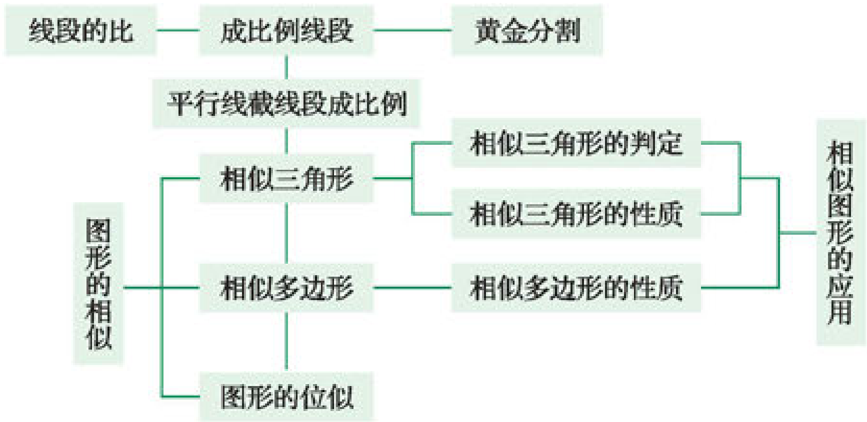


(第 2 题)

2. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$是位似图形，位似中心是点 O，位似比 $k_1=2$；四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$是位似图形，位似中心是点 O，位似比 $k_2=1$. 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$是位似图形吗？如果是，位似比是多少？如果不是，请说明理由.

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们主要学习了相似三角形及其应用、相似多边形和位似图形等知识. 知识的形成过程以及知识间的内在联系，蕴含着类比归纳和演绎推理等数学思考方法，在掌握好“相似”知识的同时，掌握好这些思考方法也是十分重要的.

1. 线段的比和成比例线段.

(1) 线段的比与数的比有什么联系？线段的比有哪些性质？

(2) 成比例线段的意义是什么？画图并说明平行线分线段成比例的基本事实.

(3) 利用比例的性质，写出“基本事实”中所有成比例线段的比例式.

2. 相似形和相似三角形.

(1) 相似形与全等形有什么联系和区别？

(2) 相似三角形与全等三角形有什么联系和区别？类比全等三角形的判定定理和性质定理，回忆并写出相似三角形的判定定理和性质定理.

3. 相似三角形的应用.

在现实生活中，相似三角形具有广泛的应用. 如不可到达的测高和测距问题，往往借助相似三角形可以解决.

4. 相似多边形和位似图形.

相似多边形是相似三角形的推广，相似多边形的问题大多可转化为相似三角形的问题来解决.

三、注意事项

1. 两条直线被三条平行线所截，同一条直线上被截成的两条线段的比等于另一条直线上对应被截成的两条线段的比.

2. 在书写相似三角形或相似多边形时，要注意把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

复习题

A 组

1. 填空：

(1) 点 C 在线段 AB 上，若 $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{5}$，则 $\frac{AB}{CB}=$________.

(2) 如果 $3m-2n=0(m，n\neq 0)$，那么 $\frac{n}{m}=$________，$\frac{m+n}{m}=$________，$\frac{m+n}{n}=$________.

(3) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{5}{7}$，且 $\triangle DEF$ 的周长为 15 cm，则 $\triangle ABC$ 的周长为________cm.

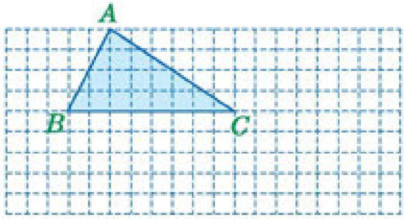
(4) 已知 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $\angle A=55°$，$\angle B=75°$，则 $\angle C'=$________.

(5) 已知 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $AB=5$ cm，$BC=4$ cm，$CA=3$ cm，$\triangle A'B'C'$ 的最长边是 10 cm，则 $S_{\triangle A'B'C'}=$________.

2. 如图，在正方形网格图内，延长 AB 到点 D，延长 AC 到点 E，使 $AD=2AB$，$AE=2AC$，连接 DE，得到 $\triangle ADE$.

(1) DE 是 BC 的 2 倍吗？

(2) $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 相似吗？

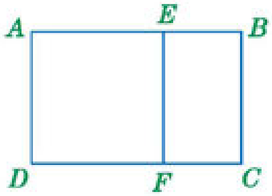


(第 2 题)

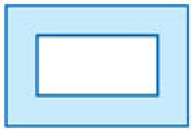
3. 两个相似三角形某一对应角的平分线的比为 2∶3，其中一个三角形的周长比另一个三角形的周长小 4 cm. 求这两个三角形的周长.

4. 已知 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 2∶3，$AD$，$A'D'$ 分别是两个三角形的对应高，且 $AD=9$ cm. 求 $A'D'$ 的长.

5. 如图，已知矩形 $ABCD$ 和正方形 $AEFD$，且$\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{AB}{BC}$. 试说明 E 为 AB 的黄金分割点，BC 与 AB 的比等于黄金比.



（第 5 题）



（第 6 题）

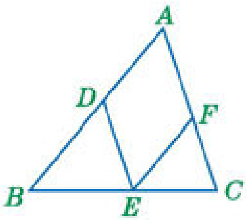
6. 如图，一块“中空”的长方形铁板，外部大长方形的长和宽分别为 120 cm和 80 cm，内部小长方形的各边与相应的大长方形的各边的距离均为 20 cm. 大、小两个长方形是位似图形吗？

B 组

1. 填空：

   (1) 已知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{5}$，则$\dfrac{a+3}{b+5}=$________.

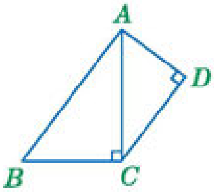
   (2) 如图，四边形 $ADEF$ 为菱形，$AB=7$，$AC=5$，$BC=6$，则 $BE=$________.



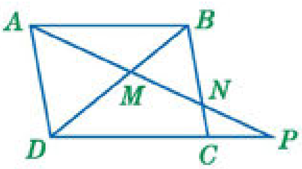
（第 1(2)题）

2. 已知：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. 求证：$\dfrac{a+2b}{b}=\dfrac{c+2d}{d}$.

3. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$AC=4$. 以 AC 为斜边向形外作 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$. 当 DC 为何值时，这两个直角三角形相似？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，▱$ABCD$，P 为 DC 延长线上一点，AP 分别交 BD，BC 于点 M，N. 求证：

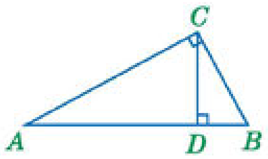
   (1) $\triangle PMD\backsim\triangle AMB$，$\triangle AMD\backsim\triangle NMB$.

   (2) $AM^2=MN\cdot MP$.

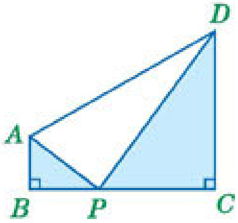
C 组

1. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D.

求证：(1) $AC^2=AD\cdot AB$. (2) $\dfrac{AC^2}{BC^2}=\dfrac{AD}{DB}$.



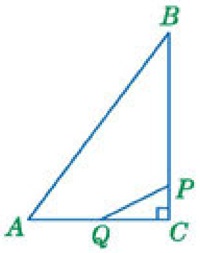
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$AB=2$，$BC=7$，$CD=6$. 能否在 BC 上找到一点 P，使图中阴影部分的两个三角形相似？如果能，请找出这样的点 P；如果不能，请说明理由.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=8$ cm，$AC:AB=3:5$. 动点 P，Q 分别从点 B，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度沿 BC 向点 C 移动，点 Q 以 1 cm/s 的速度沿 CA 向点 A 移动. 经过多少秒，以 C，P，Q 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似？



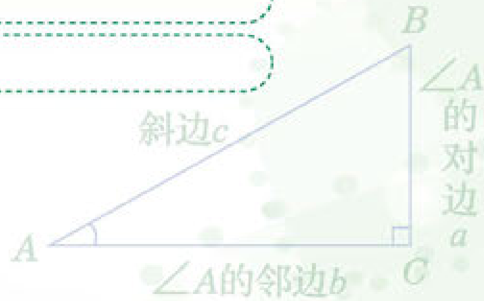
（第 3 题）

第二十六章

解直角三角形

在本章中，我们将学习

- 锐角三角函数
- 锐角三角函数的计算
- 解直角三角形及其应用

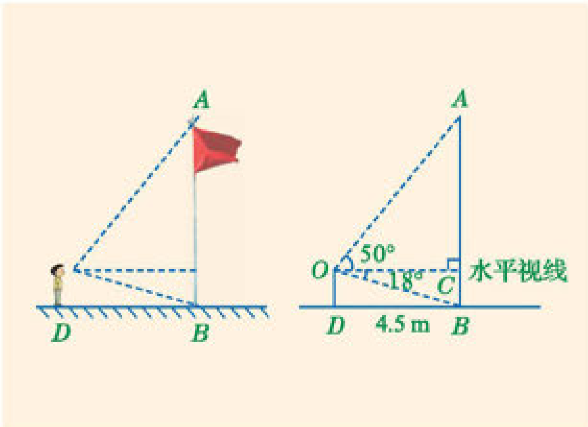


$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$

如图，小明在距旗杆 4.5 m的点D处，仰视旗杆顶端A，仰角($\angle AOC$)为50°；俯视旗杆底部B，俯角($\angle BOC$)为18°．旗杆的高约为多少米？

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$



26.1 锐角三角函数

在直角三角形中，当其中一个锐角的大小确定时，两条直角边的比值也是确定的吗？

如图 26－1－1，轮船在 A 处时，灯塔 B 位于它的北偏东 35°的方向上．轮船向东航行 5 km 到达 C 处时，轮船位于灯塔的正南方，此时轮船距灯塔多少千米？（结果保留两位小数）

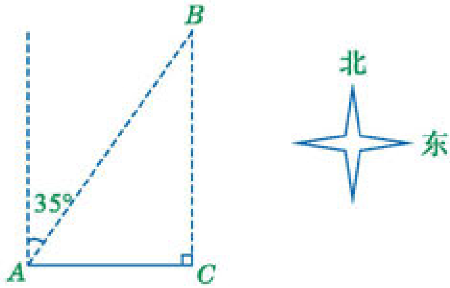


图 26－1－1

事实上，求轮船距灯塔的距离，就是在 Rt△ABC 中，已知∠C＝90°，∠BAC＝55°，AC＝5 km，求 BC 长度的问题．

解决此问题，需要用到将要学习的直角三角形边角之间的关系．

观察与思考

1．如图 26－1－2，在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$ 中，∠C＝∠C'＝90°．当∠A＝∠A'时，$\frac{BC}{AC}$与$\frac{B'C'}{A'C'}$具有怎样的关系？

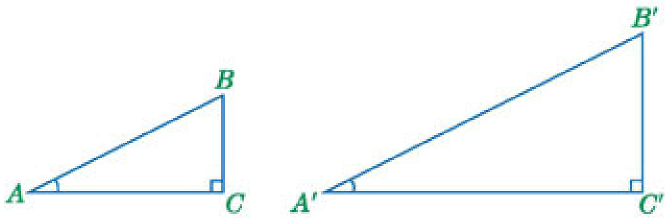


图 26－1－2

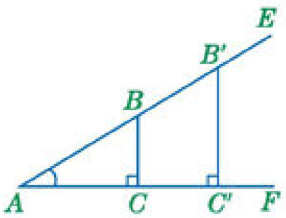


图 26－1－3

2．如图 26－1－3，已知∠EAF＜90°，BC⊥AF，$B'C'$⊥AF，垂足分别为 C，C'．$\frac{BC}{AC}$与$\frac{B'C'}{AC'}$具有怎样的关系？

在两个直角三角形中，当一对锐角相等时，这两个直角三角形相似，从而两条对应直角边的比相等，即当∠A（小于 90°）确定时，以∠A 为锐角的

Rt△ABC的两条直角边的比$\frac{BC}{AC}$是确定的.

如图26－1－4，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$. $\angle A$的对边与邻边的比叫做$\angle A$的**正切**（tangent），记作$\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

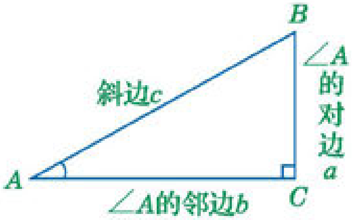


图26－1－4

大家谈谈

如图26－1－4，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$.

（1）$\angle B$的对边和邻边分别是哪两条边，$\tan B$等于多少？

（2）$\tan A$与$\tan B$之间有怎样的关系？

例1 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$.

（1）如图26－1－5(1)，$\angle A=30°$，求$\tan A$，$\tan B$的值.

（2）如图26－1－5(2)，$\angle A=45°$，求$\tan A$的值.

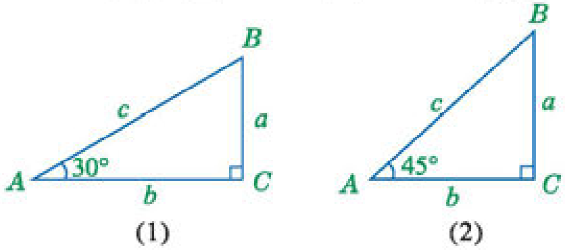


图26－1－5

解：（1）在Rt△ABC中，

$\because\ \angle A=30°$，

$\therefore\ \angle B=60°$，且$a=\frac{1}{2}c$.

$\therefore\ b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\therefore\ \tan A=\tan 30°=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}c\div\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\tan B=\tan 60°=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}c\div\frac{1}{2}c=\sqrt{3}$.

（2）在Rt△ABC中，

$\because\ \angle A=45°$，

$\therefore\ a=b$.

$\therefore \quad \tan A = \tan 45° = \dfrac{a}{b} = 1.$

这样，就得到 $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan 45° = 1$，$\tan 60° = \sqrt{3}$.

练 习

1. 求下列各式的值：

(1) $\tan 60° \cdot \tan 30°$；　　(2) $2\tan 45° + 3\tan 30°$；

(3) $\tan 45° - \sqrt{3}\tan 30°$；　　(4) $(\tan 30° + \tan 60°)^2$.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AB = 9$，$BC = 5$. 求 $\tan B$ 的值.

3. 在一直角三角形中，斜边为 8，一条直角边为 $\dfrac{32}{5}$，这条直角边所对的锐角为 α. 求 $\tan\alpha$ 的值.

习 题

A 组

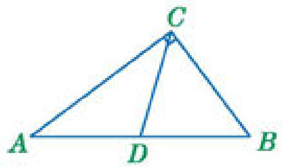
1. 已知 $a = \tan 30°$，$b = \tan 45°$. 求 $\dfrac{a+2b}{a-b} + \dfrac{b}{b-a}$ 的值.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 6$，$\tan A = \dfrac{5}{12}$. 求 AC 和 AB 的长.

B 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 10$，$\tan A = \dfrac{4}{5}$. 求△ABC 的周长和面积.

2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = 8$，斜边 AB 上的中线 $CD = 5$. 求 $\tan B$ 的值.



（第 2 题）

试着做做

如图 26－1－6，$\angle BAC$ 为任意给定的一个锐角，B_1，B_2 为射线 AB 上的任意两点，过点 B_1，B_2 分别作 AC 的垂线 B_1C_1，B_2C_2，垂足分别为 C_1，C_2.

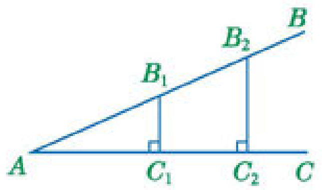


图 26－1－6

试说明$\frac{B_1C_1}{AB_1}$与$\frac{B_2C_2}{AB_2}$，$\frac{AC_1}{AB_1}$与$\frac{AC_2}{AB_2}$分别相等.

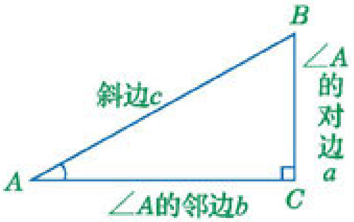


图 26－1－7

如图 26－1－7，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$. 锐角 A 的对边和斜边的比、邻边与斜边的比都是一个定值. $\angle A$ 的对边与斜边的比叫做$\angle A$ 的**正弦**(sine)，记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

$\angle A$ 的邻边与斜边的比叫做$\angle A$ 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

大家谈谈

如图 26－1－7，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

(1) $\angle B$ 的正弦和余弦分别是哪两边的比值?

(2) 由 $a<c$，$b<c$，说一说 $\sin A$ 和 $\cos A$ 的值与“1”的关系.

做一做

分别求 30°，45°，60°的正弦和余弦，并将结果填入下表中.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			

例 2 求下列各式的值：

(1) $2\sin 30°+3\tan 30°-\tan 45°$；　　(2) $(\sin 45°)^2+\tan 60°\sin 60°$.

解：(1) $2\sin 30°+3\tan 30°-\tan 45°=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-1=\sqrt{3}$.

(2) $(\sin 45°)^2+\tan 60°\sin 60°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$.

例 3 如图 26－1－8，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=12$. 求

$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 的值.

解：∵ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

∴ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{12}{13}$，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{5}{13}$，

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{12}{5}$.

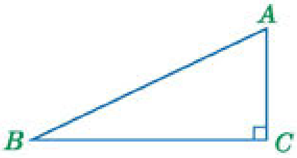


图 26-1-8

在直角三角形中，锐角 α 的对边与斜边的比、邻边与斜边的比以及对边与邻边的比，都是唯一确定的；当锐角 α 变化时，相应的比值也会发生相应的变化.

我们把锐角 α 的正弦、余弦和正切统称为 α 的**三角函数**(trigonometric function).

为方便起见，今后将$(\sin\alpha)^2$，$(\cos\alpha)^2$，$(\tan\alpha)^2$分别记作 $\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha$，$\tan^2\alpha$.

练 习

1. 求下列各式的值：

(1) $2\cos 60^\circ+3\tan 30^\circ$；

(2) $\sin^2 60^\circ+\tan 60^\circ\cos 30^\circ$；

(3) $\sin 30^\circ+\cos^2 60^\circ-\sqrt{3}\tan 30^\circ$.

2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=9$，$BC=5$. 求$\angle B$的三角函数值.

3. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$\cos A=\dfrac{2}{3}$. 求 BC 的长.

习 题

A 组

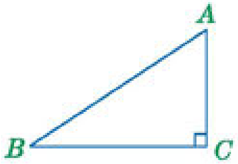
1. 计算：

(1) $2\cos 45^\circ+\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\sqrt{3}\cos 30^\circ$；

(2) $\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ}$.

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=2\sqrt{13}$，$BC=6$. 求$\angle A$ 的三角函数值.

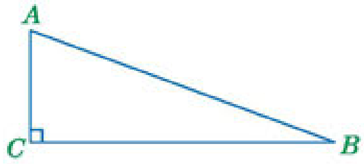
3. 在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$. 求$\angle B$ 的三角函数值.



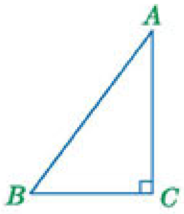
（第 2 题）

B 组

1. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$AB=18$，求 BC 的长和 $\sin B$，$\tan B$ 的值.



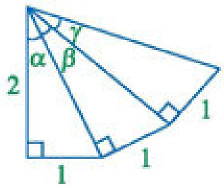
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=100$，$\cos B=0.6$. 求 BC 的长和$\tan A$的值.

3. 如图，求 $\sin\alpha$，$\cos\beta$，$\tan\gamma$ 的值.



（第 3 题）

26.2 锐角三角函数的计算

我们已经知道 $30°$, $45°$, $60°$ 的三角函数值，那么，怎样计算任意锐角的三角函数值呢？反过来，已知一个锐角的三角函数值，怎样求出这个锐角呢？

在解决实际问题的过程中，可以通过画图或测量，由已知角来计算这个角的三角函数值，也可以借助计算器直接计算三角函数值.

下面结合具体例子，介绍利用计算器求锐角三角函数值的方法.

例 1 求下列各三角函数值：（结果保留两位小数）

（1）$\sin 36°$；

（2）$\tan 50°26'37''$.

解：（1）对于 $\sin 36°$，在计算器开机状态下，可按下列程序操作.

按键顺序为

$$\boxed{\sin}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$$

显示结果为 0.587 785 252.

即 $\sin 36° \approx 0.587\,785\,252 \approx 0.59$.

（2）对于 $\tan 50°26'37''$，在计算器开机状态下，可按下列程序操作.

按键顺序为

$$\boxed{\tan}\ \boxed{5}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{DMS}}\ \boxed{2}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{DMS}}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{\text{DMS}}\ \boxed{=}$$

显示结果为 1.210 667 421.

即 $\tan 50°26'37'' \approx 1.210\,667\,421 \approx 1.21$.

注：在计算器上输入 $\tan 50°26'37''$ 后，按 $\boxed{=}$ 键之前屏幕显示 tan 50□26□37□，它实际上表示的就是 $\tan 50°26'37''$.

做一做

利用计算器计算，并填表：

α 三角函数	15°	50°	75°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

例 2 用计算器求下列各锐角的度数：（结果精确到 $1''$）

（1）已知 $\cos\alpha=0.5237$，求锐角 α.

（2）已知 $\tan\beta=1.6480$，求锐角 β.

解：（1）在计算器开机状态下，按键顺序为

$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\cos^{-1}}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

显示结果为 58.419 230 95.

即 $\alpha\approx58.41923095^\circ$.

若将其化为度、分、秒表示，可继续按键：$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\leftrightarrow\text{DEG}}$

显示结果为 $58^{\square}25^{\square}9.23$.

即 $\alpha\approx58^\circ25'9''$.

注：显示屏上显示结果 $58^{\square}25^{\square}9.23$，实际上表示的就是 $58^\circ25'9.23''$.

（2）在计算器开机状态下，按键顺序为

$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\tan^{-1}}\ \boxed{1}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

显示结果为 58.750 786 43.

即 $\beta\approx58.75078643^\circ$.

再继续按键：$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\leftrightarrow\text{DEG}}$

显示结果为 $58^{\square}45^{\square}2.83$.

即 $\beta\approx58^\circ45'3''$.

做一做

1. 已知下列三角函数值，用计算器求各锐角的度数：(结果精确到 $1''$)

(1) $\sin\alpha=0.327\ 5$；

(2) $\cos\beta=0.054\ 7$；

(3) $\tan\gamma=5$.

2. 如图 26－2－1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=h$，$AC=2.5h$.

(1) 求 $\angle A$ 的度数.

(2) 求 $\sin A$ 的值.

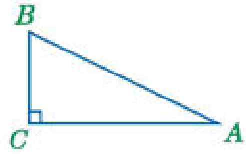


图 26－2－1

例 3 如图 26－2－2，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$.

(1) 求 $\sin A$ 的值.

(2) 求 $\angle B$ 的度数. (结果精确到 $1''$)

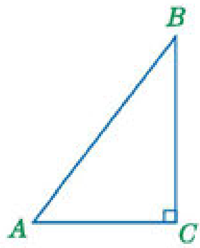


图 26－2－2

解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}=0.8$.

(2) $\because$ $\sin A=0.8$，

$\therefore$ 由计算器求得 $\angle A\approx 53°7'48''$.

$\therefore$ $\angle B=90°-\angle A\approx 90°-53°7'48''=36°52'12''$.

练　习

1. 用计算器求 $\sin 40°$，$\cos 40°$，$\tan 40°$ 的值. (结果精确到 0.000 1)

2. 用计算器求下列三角函数值：(结果精确到 0.000 1)

(1) $\sin 72°$，$\cos 36°$，$\tan 55°$；

(2) $\sin 7°2'25''$，$\cos 29°13'44''$，$\tan 88°21'$.

3. 用计算器求各锐角的度数：(结果精确到 $1''$)

(1) $\sin\alpha=0.763\ 1$；(2) $\cos\beta=0.354\ 8$；(3) $\tan\gamma=2.973\ 0$.

习题

A 组

1. 用计算器计算：(结果精确到 0.000 1)

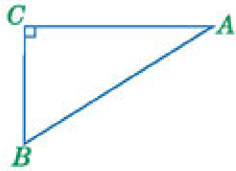
   (1) $\sin 37°22'41''+\cos 18°8'50''$；

   (2) $\tan 65°10'47''+\sin 10°29'2''$.

2. 如果 $\sin\alpha=0.726\ 6$，那么锐角 $\alpha=$________；如果 $\cos\beta=0.669\ 1$，那么锐角 $\beta=$________.（结果精确到 $1''$）

3. 已知 $\dfrac{2}{\sin\alpha}=5$，求 $\sin\alpha$ 的值和锐角 α 的度数.

4. 如图，$\angle C=90°$，$BC=1.65$，$AC=2.54$. 求 $\tan A$ 的值(结果精确到 0.000 1)和 $\angle A$ 的度数(结果精确到 $1''$).

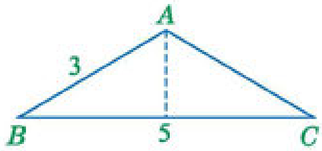


(第 4 题)

B 组

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC:AC=5:4$. 求 $\angle A$ 的各三角函数值及 $\angle A$ 的度数(结果精确到 $1''$).

2. 如图，等腰三角形 ABC 的腰为 3，底为 5. 求它的底角度数.（结果精确到 $1''$）



(第 2 题)

26.3 解直角三角形

在直角三角形中，已知两条边或一条边与一个锐角的大小，能求出这个直角三角形的其他边和角吗？

在本章第一节的“轮船航行”问题中，因为在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90°$，$\angle BAC=55°$，$AC=5$ km，所以

$$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC},$$

$$BC=AC\cdot\tan\angle BAC=5\times\tan 55°\approx5\times1.428\,2\approx7.14(\text{km}).$$

所以，当轮船行驶到灯塔的正南方时，轮船距灯塔约 7.14 km.

上述问题就是：在直角三角形中，已知一条直角边和一个锐角，求另一条直角边.

在直角三角形中，除直角外，还有三条边和两个锐角共五个元素. 由这五个元素中的已知元素求出其余未知元素的过程，叫做解直角三角形.

如图 26－3－1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

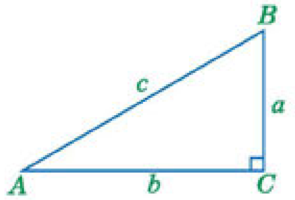


图 26－3－1

我们知道：三边之间的关系是

$$a^2+b^2=c^2;$$

两锐角之间的关系是

$$\angle A+\angle B=90°;$$

边角之间的关系是

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

在边角之间的关系中，将$\angle A$ 换成$\angle B$，同时将 a，b 交换，即可得到

$\angle B$ 与边之间的关系式.

根据以上关系，如果知道五个元素中的两个元素(至少有一个是边)，就可以求出其他三个元素.

例 1 如图 26-3-2，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=34°$，$AC=6$. 解这个直角三角形.（结果精确到 0.001）

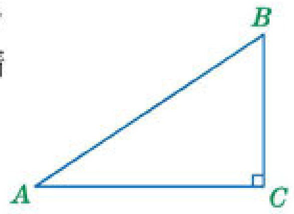


图 26-3-2

解：$\angle B=90°-\angle A=90°-34°=56°$.

$\because \quad \tan A=\dfrac{BC}{AC}$,

$\therefore \quad BC=AC\cdot\tan A=AC\cdot\tan 34°\approx 6\times 0.6745=4.047$.

$\because \quad \cos A=\dfrac{AC}{AB}$,

$\therefore \quad AB=\dfrac{AC}{\cos A}=\dfrac{AC}{\cos 34°}\approx\dfrac{6}{0.8290}\approx 7.238$.

例 2 如图 26-3-3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=15$，$BC=8$. 解这个直角三角形.（角度精确到 $1''$）

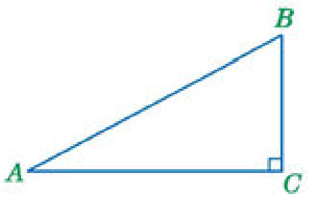


图 26-3-3

解：$\because \quad \tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{15}$,

$\therefore \quad \angle A\approx 28°4'20''$.

$\therefore \quad \angle B=90°-\angle A\approx 90°-28°4'20''=61°55'40''$.

$\because \quad AB^2=AC^2+BC^2=15^2+8^2=289$,

$\therefore \quad AB=17$.

练　习

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=44°$，$BC=6$. 解这个直角三角形.（结果精确到 0.01）

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$. 解这个直角三角形.（角度精确到 $1''$）

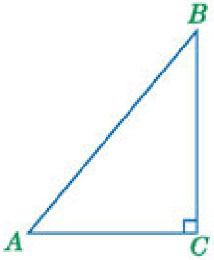
习题

A 组

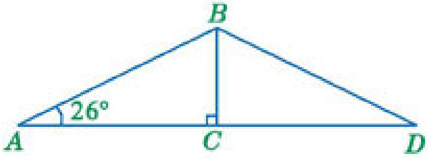
1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，根据下列条件解直角三角形.

   (1) $a=9$，$c=15$；　　(2) $\angle A=60^\circ$，$a=\sqrt{5}$.

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=50^\circ 12'$，$AB=6$. 解这个直角三角形.（结果精确到 0.01）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，厂房屋顶人字架（等腰三角形）的跨度 AD 的长为 10 m，$\angle A=26^\circ$，求中柱 BC 的高.（结果精确到 0.01 m）

B 组

1. 一直角三角形的一个锐角为 40°，一条直角边的长为 3 cm. 解这个直角三角形.（结果精确到 0.1 cm）

2. 如图，考古队发现了一底面是正方形的埃及金字塔的遗迹. 该金字塔的底部未曾受损，边长为 230 m. 经过千百年的风吹雨打，金字塔的顶部已荡然无存，但其残存的每一个面与地面均构成 52° 的角（倾斜角）. 这个金字塔原来的高是多少米？（结果精确到 1 m）

（第 2 题）

26.4 解直角三角形的应用

利用解直角三角形的知识，可以解决一些实际问题.

做一做

如图 26－4－1，小明在距旗杆 4.5 m 的点 D 处，仰视旗杆顶端 A，仰角（$\angle AOC$）为 50°；俯视旗杆底部 B，俯角（$\angle BOC$）为 18°．求旗杆的高.（结果精确到 0.1 m）

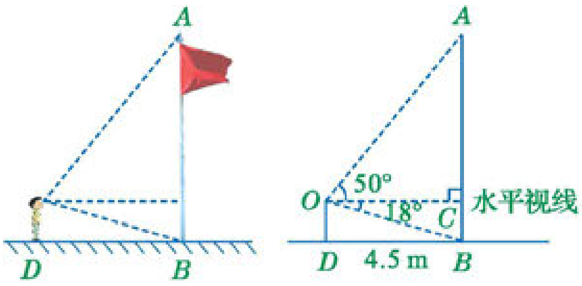


图 26－4－1

例 1 如图 26－4－2 所示，一艘渔船以 30 海里/时的速度由西向东航行．在 A 处看见小岛 C 在船北偏东 60°的方向上．40 min 后，渔船行驶到 B 处，此时小岛 C 在船北偏东 30°的方向上．已知以小岛 C 为中心，10 海里为半径的范围内是多暗礁的危险区．如果这艘渔船继续向东航行，有没有进入危险区的可能？

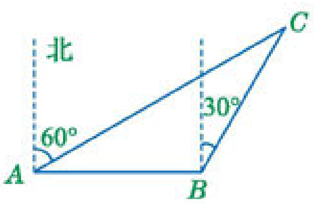


图 26－4－2

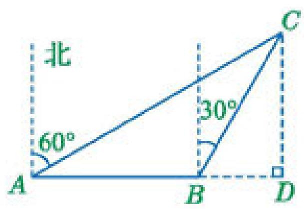


图 26－4－3

解：如图 26－4－3，过点 C 作 $CD\perp AB$，交 AB 的延长线于点 D，则

$\angle CBD=60^\circ$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\tan\angle CBD=\tan 60^\circ=\dfrac{CD}{BD}$.

若设 $CD=x$，则 $BD=\dfrac{CD}{\tan 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=30^\circ$，所以 $\tan\angle CAD=\tan 30^\circ=\dfrac{CD}{AD}$，

即 $AD=\dfrac{CD}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$.

$\because$ $AD-BD=AB$，$AB=30\times\dfrac{40}{60}=20$，

$\therefore$ $\sqrt{3}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=20$.

解得 $x=10\sqrt{3}$.

因为 $10<10\sqrt{3}$，所以，这艘渔船继续向东航行，不会进入危险区.

如图 26－4－4，在筑坝、开渠、挖河和修路时，设计图纸上都要注明斜坡的倾斜程度. 我们通常把坡面的垂直高度 h 和水平宽度 l 的比$\dfrac{h}{l}$叫做坡面的坡度(或坡比)，坡面与水平面的夹角 α 叫做坡角. 显然，$\tan\alpha=\dfrac{h}{l}$.

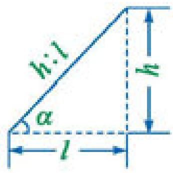


图 26－4－4

例 2 如图 26－4－5 所示，铁路路基的横断面为四边形 $ABCD$，其中，$BC/\!/AD$，$\angle A=\angle D$，根据图中标出的数据计算路基下底的宽和坡角（结果精确到 $1'$）.

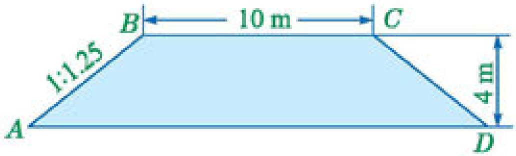


图 26－4－5

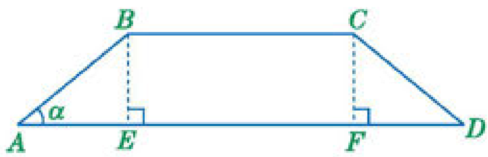


图 26－4－6

解：如图 26－4－6，作 $BE\perp AD$，$CF\perp AD$，垂足分别为 E，F.

在四边形 $BEFC$ 中，

$\because$ $BC/\!/AD$，$\angle AEB=\angle DFC=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $BEFC$ 为矩形.

$\therefore \quad BC=EF,\ BE=CF.$

在 Rt△ABE 和 Rt△DCF 中，

$\because \quad \angle A=\angle D,\ \angle AEB=\angle DFC,\ BE=CF,$

$\therefore \quad$ Rt△$ABE\cong$Rt△DCF.

$\therefore \quad AE=DF.$

在 Rt△ABE 中，$\tan\alpha=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{1.25}=\dfrac{4}{5}$，$BE=4$，

$\therefore \quad \alpha\approx 38°39'$，$AE=5$.

$\therefore \quad AD=AE+EF+FD=BC+2AE=10+2\times 5=20.$

即路基下底的宽为 20 m，坡角约为 38°39′.

做一做

如图 26-4-7，某水库大坝的横断面是四边形 $ABCD$，$DC/\!/AB$，坝顶宽 $CD=3$ m，斜坡 $AD=16$ m，坝高为 8 m，斜坡 BC 的坡度为$\dfrac{1}{3}$. 求斜坡 AD 的坡角 α 和坝底的宽 AB(结果精确到 0.01 m).

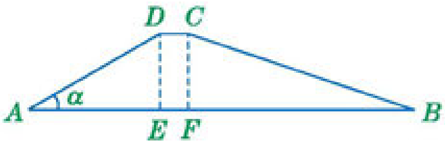
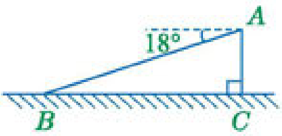


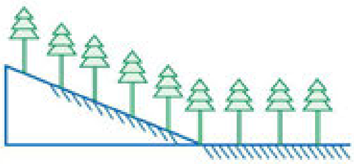
图 26-4-7

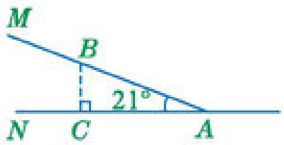
练　习

1. 如图所示，某飞机在空中 A 处时的高度 $AC=1\ 500$ m，此时，从飞机上看地面目标 B 的俯角为 18°. 求 A，B 两点间的距离. (结果精确到 1 m)



(第 1 题)





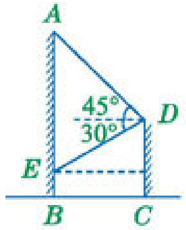
(第 2 题)

2. 如图，在山坡上植树时，要求株距(相邻两树间的水平距离)为 5 m. 现测得斜坡的坡角为 21°. 求相邻两树间的坡面距离. (结果精确到 0.1 m)

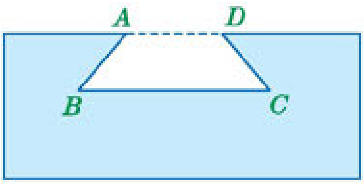
习题

A 组

1. 如图，在建筑物 AB 上，挂着 30 m 长的宣传条幅 AE，从另一建筑物 CD 的顶部 D 处看条幅顶端 A，仰角为 45°，看条幅底端 E 处，俯角为 30°. 求两建筑物间的距离 BC.（结果精确到 0.1 m）



（第 1 题）

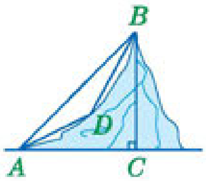


（第 2 题）

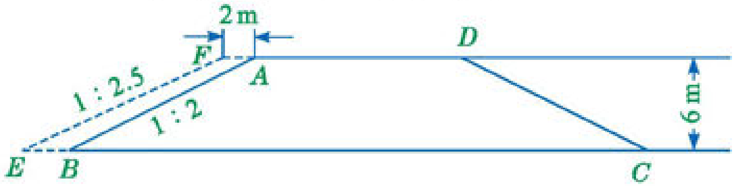
2. 如图，燕尾槽的横断面为四边形 $ABCD$，其中，$AD // BC$，$\angle B=\angle C=50^\circ$，$AD=100$ mm，燕尾槽的深度是 60 mm. 求 BC 的长.（结果精确到 1 mm）

B 组

1. 如图，测量人员在山脚 A 处观测山顶 B 的仰角为 45°. 他们沿着倾斜角为 30°的斜坡前进 1 000 m 到达 D 处，再看山顶，仰角为 60°. 求山高 BC.（注：点 A，B，C，D 在同一平面内，结果精确到 0.1 m）



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，有一段水库拦水坝，坝高 6 m，坝长 50 m，$AD // BC$. 沿水库拦水坝的背水坡将坝顶加宽 2 m，坡度由原来的 1∶2 变成 1∶2.5.

(1) 求加宽部分横截面的面积.

(2) 完成这一工程需要多少立方米的土?

数学活动

测量电视转播塔的高度

如图，在学校可以看到电视转播塔的全貌，但教学楼与电视转播塔的水平距离不能直接测量. 怎样测量建在学校对面山顶上电视转播塔的高度呢？

活动一：分组准备

1. 与同学自由结组，每 4 人～6 人为一个小组.
2. 各自准备，画出测量草图，提出测量方案.
3. 小组讨论各自测量方案的可行性，统一认识后，确定一套最佳方案.

活动二：实地测量

1. 准备相应的测量工具，根据设计方案进行合理分工.
2. 择日(最好是星期天)进行实地测量.
3. 记录实地测量的数据(用字母表示的量要说明其意义).

活动三：计算与小结

1. 计算电视转播塔的高度，写出测量和计算过程.
2. 完成活动内容报告，并谈谈你的收获与感想.
3. 收集每个小组的活动报告，举办优秀活动报告展览.

备注：

1. 对于不具备情境条件的，可选择类似情境完成实地测量.
2. 在进行实地测量时，要注意安全.

回顾与反思

一、知识结构

二、总结与反思

本章内容的重点是锐角三角函数的概念和利用锐角三角函数解决简单的实际问题. 在建立锐角三角函数概念时，关注了从特殊到一般的归纳方法，充分体现了锐角三角函数的抽象过程，其目的是为了让同学们感悟和理解锐角三角函数的意义，更好地用锐角三角函数解决实际问题.

1. 锐角三角函数.

锐角三角函数的概念建立在直角三角形相似的基础上. 如果有一个锐角确定，那么这个直角三角形的形状就随之确定了，从而这个锐角的对边与斜边、邻边与斜边以及对边与邻边的比都是一个确定值.

在 Rt$\triangle ABC$($\angle C=90^\circ$)中，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 的意义各是什么？

2. 已知锐角(三角函数值)求其三角函数值(锐角).

(1) 30°，45°，60°的三角函数值分别为：

$\sin 30^\circ=$________，$\sin 45^\circ=$________，$\sin 60^\circ=$________；

$\cos 30^\circ=$________，$\cos 45^\circ=$________，$\cos 60^\circ=$________；

$\tan 30^\circ=$________，$\tan 45^\circ=$________，$\tan 60^\circ=$________.

(2) 除上述三个特殊角外，对于一般的锐角 α，求其三角函数值，或已知三角函数值求锐角，需要借助计算器完成.

3. 解直角三角形.

(1) 已知两边求第三边，可以用勾股定理.

(2) 已知一锐角求另一锐角，可以用直角三角形“两锐角互余”的性质.

(3) 已知一锐角和一边求其他两边，以及已知两边求两锐角，可以用锐

角三角函数，并借助计算器求值.

利用直角三角形的这些边角关系，可以解决许多实际问题.

三、注意事项

1. 对有些待求的线段或角，如果它们不在同一个直角三角形中，那么需要构造与已知边角有关的直角三角形.

2. 在解直角三角形或解决相关的实际问题时，应按需要或要求取近似值.

复习题

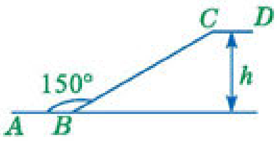
A 组

1. 填空：

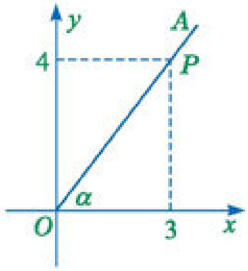
(1) $\sin^2 30°+\cos^2 30°=$________；$\sin 45°+\cos 45°=$________；

$\tan 30°\tan 60°=$________；$\tan 60°\sin 30°=$________.

(2) 某商场一楼与二楼之间的手扶电梯如图所示，其中 AB，CD 分别表示一楼、二楼地面的水平线，$\angle ABC=150°$，BC 的长为 8 m. 乘电梯从点 B 到点 C 上升的高度 h 为________m.



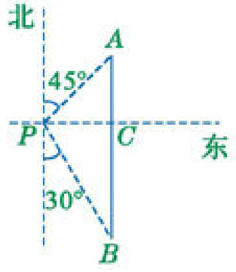
（第 1(2)题）



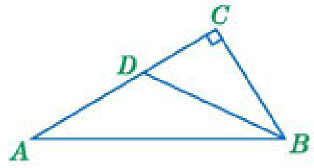
（第 1(3)题）

(3) 如图，点 P 在$\angle\alpha$ 的边 OA 上，且点 P 的坐标为(3，4). $\sin\alpha=$________.

(4) 如图，一艘海轮位于灯塔 P 的东北方向、距离灯塔 $40\sqrt{2}$ 海里的 A 处，它沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 P 的南偏东 30°方向上的 B 处. 海轮行驶的路程 AB 为________海里.（结果保留根号）



（第 1(4)题）



（第 1(5)题）

(5) 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle ABC=60°$，BD平分$\angle ABC$. 若$AD=6$，则$CD=$________.

(6) 某海域有相距 10 海里的两个小岛 A 和 B，另有一小岛 C，测量得$\angle BAC=60°$，$\angle ABC=90°$. A，C 两岛的距离为________.

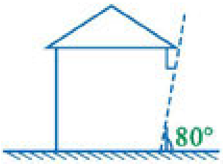
2. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，根据下列条件解直角三角形.（计算结果中，边长精确到 0.01，角度精确到 $1''$）

(1) $b=5$，$c=5\sqrt{5}$；　　(2) $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$；

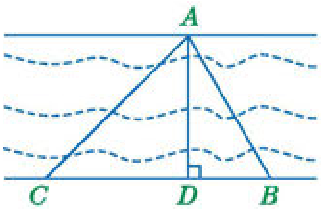
(3) $\angle A=21°$，$a=8$；　　(4) $\angle B=42°$，$c=12$.

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，CH为AB上的高，且$CH=\dfrac{3}{5}AB$，$BC=\sqrt{10}$. 求$\tan B$的值和CH的长.

4. 如图，某地夏天中午，当太阳移到屋顶上方偏南时，光线与地面成 80°的角，房屋朝南的窗子高 1.8 m. 要在窗子外面上方安装一个挡光板，使午间光线不能直接射入室内，挡光板的宽度应为多少米？



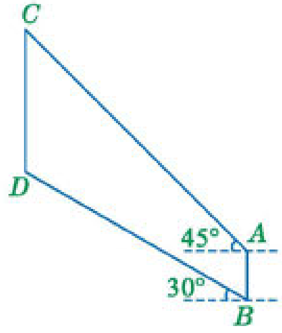
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，为测量某段河流的宽度，在河的北岸选择了点 A，在河的南岸选取了相距 200 m 的 B，C 两点，分别测得$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=45°$. 求这段河宽 AD.（结果精确到 0.1 m）

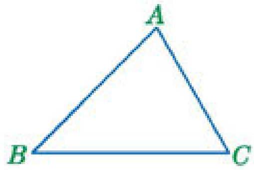
6. 如图，$AB // CD$，$AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，AB 与 CD 间的距离是 $3\sqrt{3}$. 求 AC，BD 和 CD 的长.



（第 6 题）

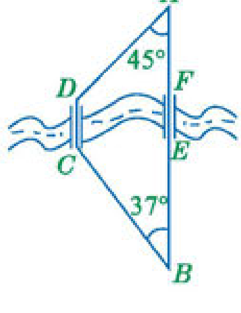
B 组

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$AB=6$. 求 BC 的长.

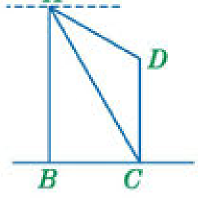


（第 1 题）

2. 如图，A，B 两地之间有一条河，原来从 A 地到 B 地需要经过桥 CD，行驶路线为 $A \to D \to C \to B$. 现在新建了桥 EF，可直接沿直线 AB 从 A 地到达 B 地. 已知 $BC=11$ km，$\angle A=45°$，$\angle B=37°$，CD 和 EF 平行且相等，则现在从 A 地到 B 地比原来少走多少路程？（结果精确到 0.1 km）



（第 2 题）



（第 3 题）

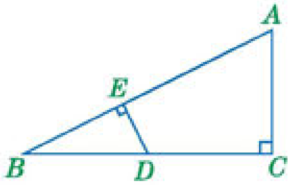
3. 如图，两建筑物的水平距离 BC 为 24 m，从点 A 测得点 D 的俯角为 $30°$，测得点 C 的俯角为 $60°$. 求 AB 和 CD 两座建筑物的高.（结果保留根号）

C 组

1. 甲船在 A 点测得乙船在北偏东 $60°$ 方向上，两船相距 $2a$ km. 乙船以

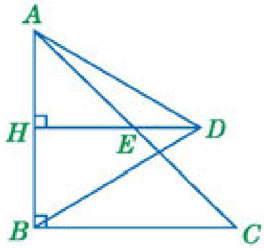
a km/h的速度向正北方向行驶，甲船以$\sqrt{3}a$ km/h 的速度向乙船追去．甲船沿什么方向前进，才能在最短时间内追上乙船？

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，D 为 BC 边的中点，$DE\perp AB$，垂足为 E，$AE=7$，$\tan B=\frac{1}{2}$．求 DE 的长．



（第 2 题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ABC=90^\circ$，D 为$\triangle ABC$ 外一点，连接 AD，BD，过点 D 作 $DH\perp AB$，垂足为 H，交 AC 于点 E．已知 $AD=BD=2$．



（第 3 题）

(1) 若$\triangle ABD$ 是等边三角形，求 DE 的长．

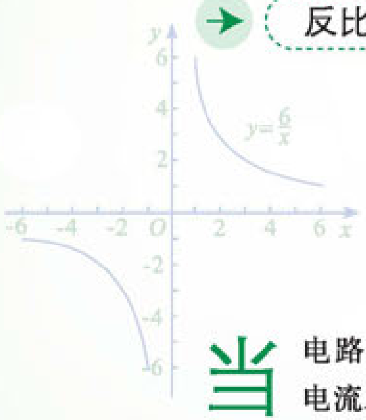
(2) 若 $\tan\angle HDB=\frac{3}{4}$，求 DE 的长．

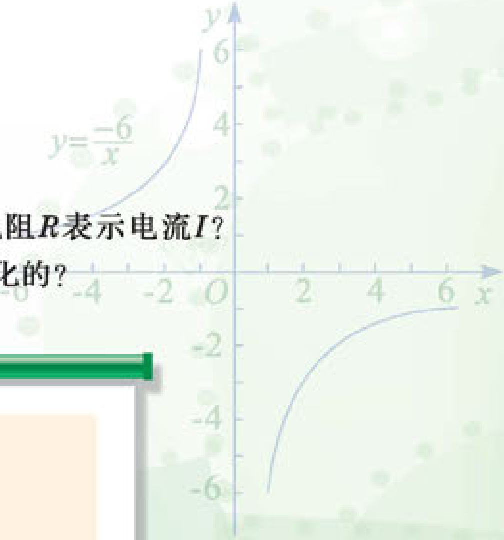
第二十七章

反比例函数

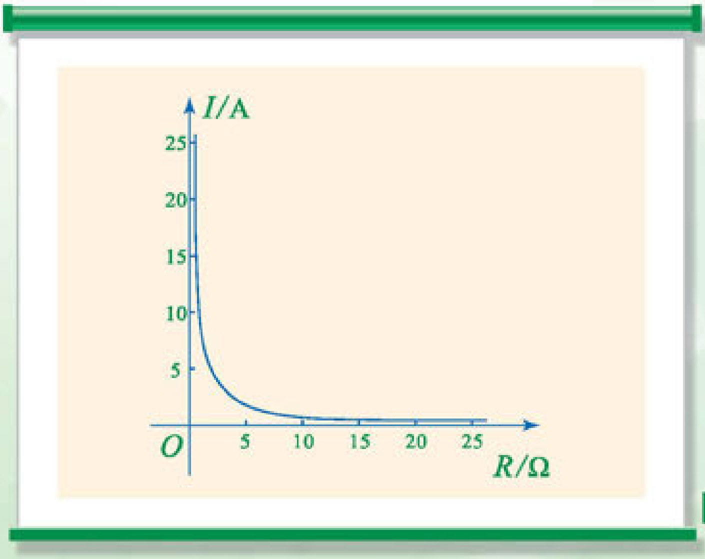
在本章中，我们将学习

- 反比例函数
- 反比例函数的图像和性质
- 反比例函数的应用





当电路中的电压一定时，怎样用电阻R表示电流I？电流I是怎样随电阻R的变化而变化的？



27.1 反比例函数

若将成正比例的两个量视为变量，则这两个量之间具有正比例函数关系. 那么，当将两个成反比例的量视为变量时，它们之间又具有怎样的函数关系呢？

做一做

1. 要制作容积为 15 700 cm^3 的圆柱形水桶，水桶的底面积为 S cm^2，高为 h cm，则 $Sh=$________，用 h 表示 S 的函数表达式为________.

2. 自行车运动员在长为 10 000 m 的路段上进行骑车训练，行驶全程所用时间为 t s，行驶的平均速度为 v m/s，则 $vt=$________，用 t 表示 v 的函数表达式为________.

3. y 与 x 的乘积为 -2，用 x 表示 y 的函数表达式为____________.

大家谈谈

1. 上述三对量之间每对量都成反比例吗？
2. 这些函数表达式具有怎样的共同特征？
3. 请再举出几个具有这种特征的例子.

一般地，如果变量 y 和变量 x 之间的函数关系可以表示成 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的形式，那么称 y 为 x 的**反比例函数**（inverse proportional function），k 称为比例系数.

容易看出，在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是不等于 0 的实数.

例 1 写出下列问题中 y 与 x 之间的函数关系式，指出其中的正比例函数和反比例函数，并写出它们的比例系数 k.

(1) y 与 x 互为相反数.

(2) y 与 x 互为负倒数.

(3) y 与 $2x$ 的积等于 a(a 为常数，且 $a\neq0$).

解：(1) 因为 $y+x=0$，即 $y=-x$，

所以 y 是 x 的正比例函数，比例系数 $k=-1$.

(2) 因为 $xy=-1$，即 $y=\dfrac{-1}{x}$，

所以 y 是 x 的反比例函数，比例系数 $k=-1$.

(3) 因为 $2xy=a$，即 $y=\dfrac{a}{2x}$，

所以 y 是 x 的反比例函数，比例系数 $k=\dfrac{1}{2}a$.

例 2 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=4$ 时，$y=6$.

(1) 写出这个反比例函数的表达式.

(2) 当 $x=-2$ 时，求 y 的值.

解：(1) 设 $y=\dfrac{k}{x}$.

把 $x=4$，$y=6$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $k=24$.

所以这个反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{24}{x}$.

(2) 当 $x=-2$ 时，$y=\dfrac{24}{-2}=-12$.

练 习

1. 指出下列函数中，哪些是正比例函数，哪些是反比例函数.

(1) $y=\dfrac{8}{x}$；　(2) $y=2x$；　(3) $y=\dfrac{-5}{x}$；

(4) $y=\dfrac{1}{4}x$；　(5) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$；　(6) $y=\dfrac{x}{5}$.

2. 星星电子集团接到了生产 4 000 个计算机零部件的任务，请写出生产这批零部件所需时间 t (h)与每小时生产零部件数量 n(个)之间的函数

关系式.

3. 举出几个生活中具有反比例函数关系的实例.

习 题

A 组

1. 下列函数是反比例函数吗？如果是，请指出比例系数 k 的值.

(1) $y=\frac{12}{x}$；　　(2) $y=\frac{1}{2x}$；

(3) $y=-\frac{3}{x}$；　　(4) $y=0.5x+3$.

2. 已知 m 辆汽车可运载货物 1 500 t，每辆汽车运载货物 b t. 写出用 b 表示 m 的函数表达式.

3. 已知$\triangle ABC$ 的面积为 20，底边长为 a，高为 h.

(1) 写出用 h 表示 a 的函数表达式.

(2) 当 $h=2$ 时，求 a 的值.

B 组

1. 某地区有人口 x 人，该地区的水资源总量为 18 亿立方米，水资源人均占有量为 W m^3.

(1) 写出用 x 表示 W 的函数表达式.

(2) 如果该地区有人口 900 万人，那么水资源人均占有量为多少立方米？

2. 已知 $y=(m-2)x^{m^2-5}$.

(1) 当 m 为何值时，y 是 x 的正比例函数？

(2) 当 m 为何值时，y 是 x 的反比例函数？当 $y=8$ 时，求 x 的值.

27.2 反比例函数的图像和性质

在本节中，我们来探究反比例函数的图像和性质.

大家谈谈

在直角坐标系中，由函数表达式画函数图像的主要步骤有哪些？

我们来画反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像.

（1）列表：

x	…	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	…
$y=\frac{6}{x}$	…	-1	-1.5	-2	-3	-6	6	3	2	1.5	1	…

（2）描点：以表中各组对应值作为点的坐标，在图 27－2－1 所示的直角坐标系中描出相应的点.

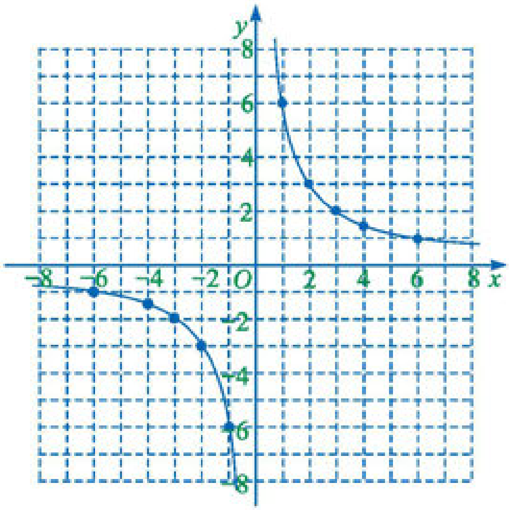


图 27－2－1

（3）连线：用平滑的曲线顺次连接各点，就得到反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像.

观察与思考

1. 观察画出的反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像，它与坐标轴有交点吗？为什么？

2. 仅凭两个点的坐标，能画出反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像吗？谈谈你的看法，并与大家交流.

做一做

1. 在直角坐标系中，画出反比例函数 $y=\frac{-6}{x}$ 的图像.

2. 比较反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 与 $y=\frac{-6}{x}$ 的图像，指出它们的共同特征.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的图像由分别位于两个象限内的两条曲线组成，这样的曲线叫做**双曲线**（hyperbola）.

例 1 已知点 $P(-6,\ 8)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上.

（1）求这个反比例函数的表达式.

（2）判断点 $M(4,\ -12)$ 和 $N(2,\ 24)$ 是否在这个反比例函数的图像上.

解：（1）把点 $P(-6,\ 8)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $8=\frac{k}{-6}$.

解得 $k=-48$.

所以这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{-48}{x}$.

（2）当 $x=4$ 时，$y=\frac{-48}{4}=-12$.

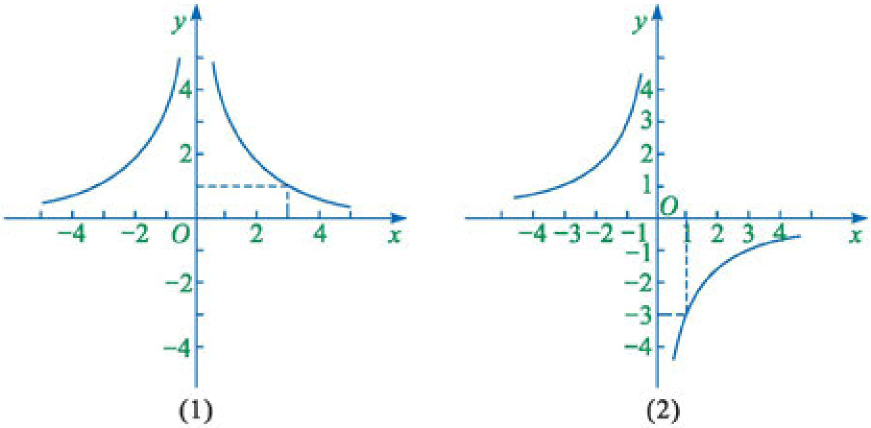
当 $x=2$ 时，$y=\frac{-48}{2}=-24\neq24$.

所以，点 $M(4,\ -12)$ 在这个反比例函数的图像上，点 $N(2,\ 24)$ 不在这个反比例函数的图像上.

练　习

1. 在直角坐标系中，画出反比例函数 $y=\dfrac{-4}{x}$ 的图像.

2. 在如图所示的两个函数图像中，哪个是反比例函数的图像？请确定出相应的反比例函数的表达式.



（第 2 题）

习　题

A　组

1. 画出反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 和 $y=\dfrac{-2}{x}$ 的图像，并分别指出它们位于直角坐标系中的哪两个象限.

2. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,\ -5)$.

   (1) 求这个反比例函数的表达式.

   (2) 画出这个反比例函数的图像.

B　组

1. 已知反比例函数 $y=\dfrac{-8}{x}$.

   (1) 画出这个函数的图像.

   (2) 设 A 为这个函数图像上的一点，AB 垂直 x 轴于点 B，AC 垂直 y 轴于点 C. 试求矩形 $OBAC$ 的面积.

2. 已知点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，点 A 与点 B 关于原点对称，点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上吗？请说明理由.

反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，$y=\frac{-6}{x}$，$y=\frac{2}{x}$，$y=\frac{-2}{x}$ 的图像如图 27-2-2 所示.

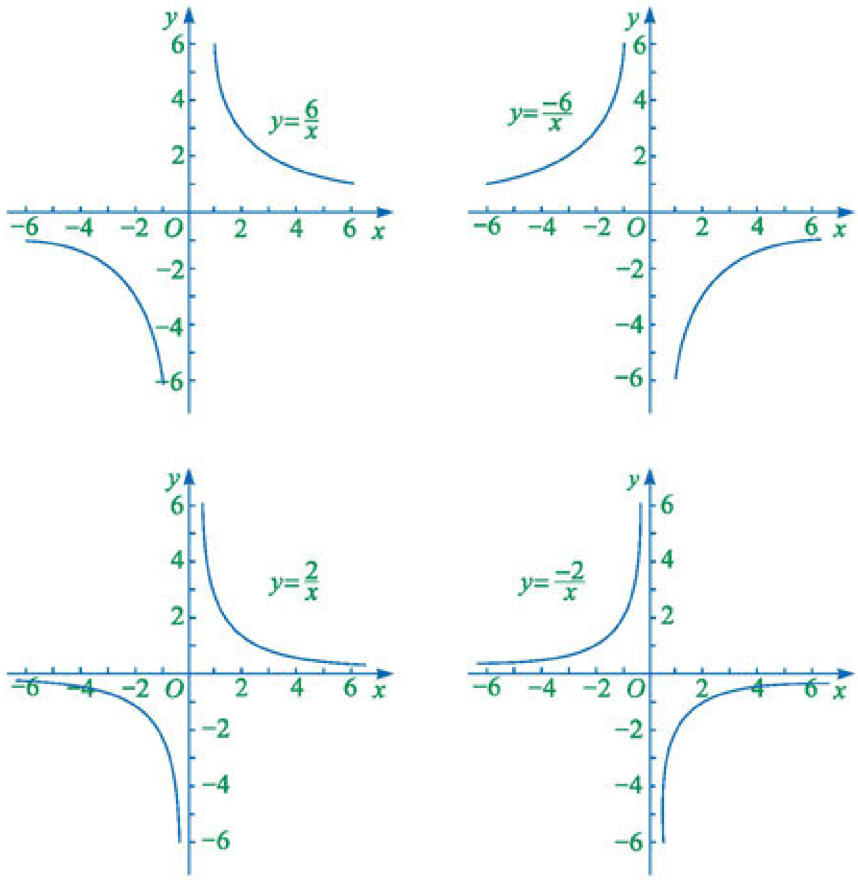


图 27-2-2

一起探究

1. 根据反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 和 $y=\frac{-6}{x}$ 的表达式及图像，探究下列问题：

表达式	图像的位置	y 随 x 的变化情况
$y=\frac{6}{x}$	图像在第____、____象限内	在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而____
$y=\frac{-6}{x}$	图像在第____、____象限内	在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而____

2. 对于函数 $y=\frac{2}{x}$ 和 $y=\frac{-2}{x}$，指出它们的图像所在象限，并说明 y 的值随 x 的值的变化而变化的情况.

对于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，当 $k>0$ 时，它的图像位于第一、三象限，在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小；当 $k<0$ 时，它的图像位于第二、四象限，在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而增大.

例 2 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像如图 27-2-3 所示.

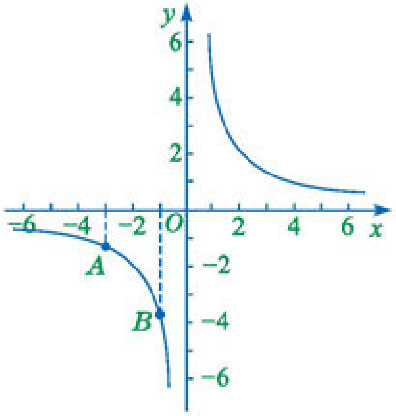


图 27-2-3

（1）判断 k 为正数还是负数.

（2）如果 $A(-3,\ y_1)$ 和 $B(-1,\ y_2)$ 为这个函数图像上的两点，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是怎样的?

解：（1）因为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像在第一、三象限，

所以 $k>0$.

（2）由 $k>0$ 可知，在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小.

$\because\ -3<-1$，

$\therefore\ y_1>y_2$.

练 习

1. 指出反比例函数 $y=\dfrac{k^2}{x}$的图像所在的象限.

2. 指出下列反比例函数的图像所在的象限，并说明在每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而变化的情况.

（1）$y=\dfrac{3}{x}$；　　（2）$y=\dfrac{-1}{x}$；

（3）$y=-\dfrac{10}{x}$；　　（4）$y=\dfrac{3}{2x}$.

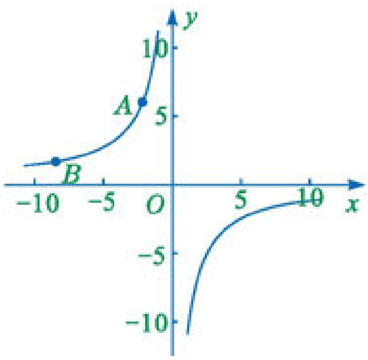
习 题

A 组

1. 分别指出下列反比例函数的图像所在的象限，并说明在每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而变化的情况.

（1）$y=\dfrac{-4}{x}$；　　（2）$y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$；　　（3）$y=-\dfrac{5.7}{x}$.

2. 如图，已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过 A（-2，m），B（-8，n）两点.



（第 2 题）

(1) 判断 k 为正数还是负数.

(2) 比较 m 与 n 的大小.

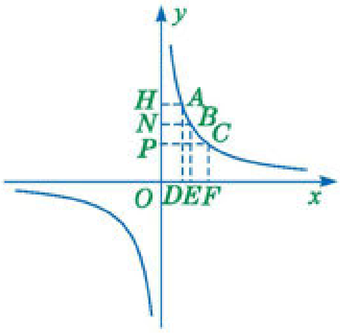
3. 对于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$.

(1) 指出它的图像所在的象限.

(2) 设 $0<x_1<x_2$，且 x_1 和 x_2 对应的函数值分别为 y_1 和 y_2，判断 y_1 与 y_2 的大小关系.

B 组

1. 如图，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 为反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像在第一象限的分支上的三点，且 $x_1<x_2<x_3$.



(第 1 题)

(1) 比较 y_1，y_2，y_3 的大小.

(2) 过 A，B，C 三点分别作两坐标轴的垂线，D，E，F 和 H，N，P 为垂足，矩形 $ADOH$，$BEON$，$CFOP$ 的面积 S_1，S_2，S_3 之间有怎样的数量关系？为什么？

2. 已知 $M(a_1, b_1)$，$N(a_2, b_2)$ 为反比例函数 $y=-\frac{\sqrt{3}}{x}$ 图像上的两点，并且 $a_1<a_2$. 判断 b_1 与 b_2 之间的大小关系.

27.3 反比例函数的应用

反比例函数有着广泛的应用．利用反比例函数的图像和性质可以解决一些简单的实际问题．

在一段长为 45 km 的高速公路上，规定汽车行驶的速度最低为 60 km/h，最高为 110 km/h.

一起探究

1．在这段高速公路上，设汽车行驶的速度为 v(km/h)，时间为 t(h)，写出 v 与 t 之间的函数关系式．

2．某司机开车用了 25 min 匀速通过了这段高速公路，请你判断这辆汽车是否超速，并说明理由．

3．某天，由于天气原因，汽车通过这段高速公路时，要求行驶速度不得超过 75 km/h．此时，汽车通过该路段最少要用多长时间？

大家谈谈

在上述“一起探究”问题 1 中，速度 v(km/h)与时间 t(h)的函数图像有什么特点？

例 气体的密度是指单位体积(m^3)内所含气体的质量(kg)．现有某种气体 7 kg.

(1) 某储气罐的容积为 V(m^3)，将这 7 kg 的气体注入该容器后，该气体的密度为 ρ($\mathrm{kg/m}^3$)，写出用 V 表示 ρ 的函数表达式．

(2) 当把这些气体装入容积为 4 m^3的储气罐中时，它的密度为多大？

(3) 要使气体的密度 $\rho=2\ \mathrm{kg/m}^3$，需把这些气体装入容积是多少立方米的容器中？

(4) 在图 27－3－1 所示的直角坐标系中，画出这个函数的图像，并根

据图像回答：

①当这些气体的体积增大时，它的密度将怎样变化？

②把这些气体装入容积不超过 2 m^3 的容器中，气体的密度 ρ 在什么范围内？

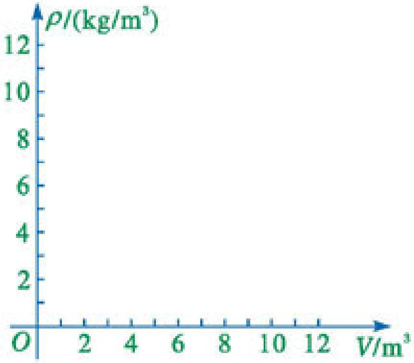


图 27－3－1

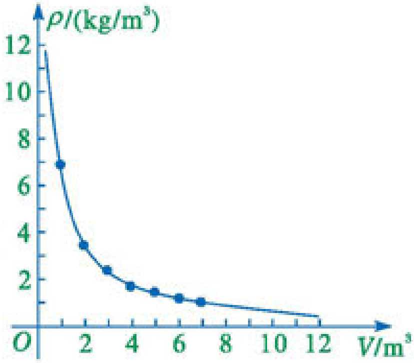


图 27－3－2

解：(1) 用 V 表示 ρ 的函数表达式为：$\rho=\dfrac{7}{V}$.

(2) 当 $V=4$ m^3时，$\rho=\dfrac{7}{V}=\dfrac{7}{4}=1.75(kg/m^3)$.

(3) 当 $\rho=2$ kg/m^3时，$2=\dfrac{7}{V}$，解得 $V=3.5(m^3)$.

(4) 函数 $\rho=\dfrac{7}{V}$的图像如图 27－3－2 所示.

①由反比例函数的图像可以看出，当这些气体体积增大时，它的密度减小.

②把这些气体装入容积不超过 2 m^3 的容器中，气体的密度 $\rho\geqslant 3.5$ kg/m^3.

做一做

厨师将一定质量的面团做成粗细一致的拉面时，面条的总长度 y(m)是面条横截面面积 S(mm^2)的反比例函数，其图像经过 $A(4,32)$，$B(m,80)$ 两点(如图 27－3－3 所示).

(1) 写出 y 与 S 的函数关系式.

(2) 求出 m 的值，并解释 m 的实际意义.

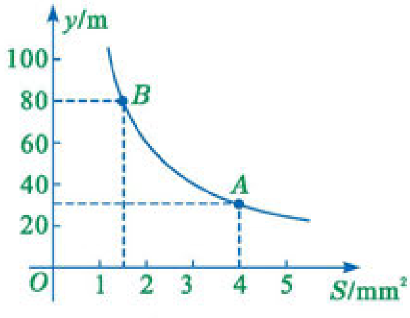


图 27－3－3

（3）如果厨师做出的面条最细时的横截面面积能达到 3.2 mm^2，那么面条总长度不超过多少米？

练习

1. 小明家买了 1 000 度电，设平均每天用电 x 度，这些电能够使用 y 天.

（1）写出 y 与 x 之间的函数关系式.

（2）当平均每天用电 5 度时，这些电可以用多少天？

（3）如果这些电用了 250 天，那么平均每天用电多少度？

2. 一块重约为 30 N 的物体，放在地面上.

（1）写出用这块物体的受力面积 $S(m^2)$ 表示它对地面的压强 $p(Pa)$ 的函数表达式.

（2）画出这个函数的图像.

（3）如果这个物体是长方体形的，长、宽、高分别为 24 cm，12 cm 和 6 cm，求放置方式不同时，这个物体对地面的压强分别是多大.

习题

A 组

1. 某蓄水池的蓄水量为 48 m^3，当排水速度为 v m^3/h 时，t h 可将满池水全部排空.

（1）写出 v 与 t 之间的函数关系式.

（2）如果在 4 h 内将满池水排空，那么每小时至少排水多少立方米？

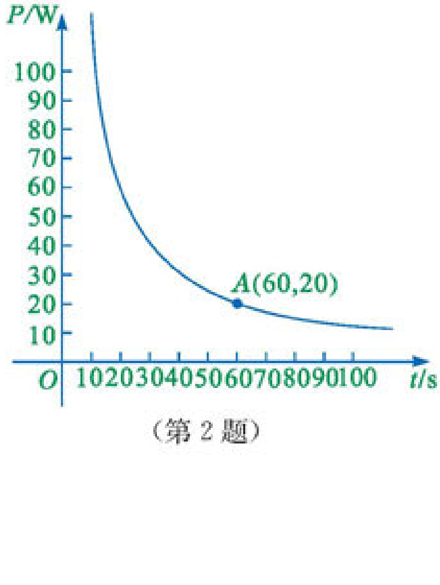
（3）已知最大排水速度为16 m^3/h，那么最少用多长时间可将满池水全部排空？

2. 当功 $W(J)$ 一定时，功率 $P(W)$ 是做功的时间 $t(s)$ 的反比例函数，其图像如图所示.

（1）写出用 t 表示 P 的函数表达式.

（2）当 $t=2\ 400$ s 时，求功率 P.

（3）当功率 $P=8\ 000$ W 时，求做功所用的时间 t.



（第 2 题）

B 组

1. 某电路中的电压为 220 V.

(1) 写出用电阻 $R(\Omega)$ 表示电流 $I(\text{A})$ 的函数表达式.

(2) 某电烙铁的电阻为 176 Ω，接入电路后，通过它的电流是多大？

(3) 某家用电器，当通过它的电流为 0.6 A 时，才能正常工作. 这件家用电器的电阻是多大？

(4) 如果电路中有一滑动变阻器，怎样操作才能使电路中的电流 I 随电阻 R 的变化而逐渐增大？

2. 工人师傅要在刚刚浇注过的水平水泥地面上进行作业，为了不破坏地面，常常要在地面上铺垫一些木板. 有一个人的体重是 600 N，不计木板的重力.

(1) 写出用受力面积 $S(\text{m}^2)$ 表示压强 $p(\text{Pa})$ 的函数表达式.

(2) 如果这个人站立时双脚与地面的接触面积约是 $5\times10^{-2}\ \text{m}^2$，那么他对地面的压强约是多大？

(3) 如果木板的面积是 $1\ \text{m}^2$，这个人站在木板上对地面的压强是多大？

(4) 为什么工人师傅铺垫木板后，地面就不容易被破坏？请说明理由.

回顾与反思

一、知识结构

二、总结与反思

反比例函数也是反映现实世界中两个变量之间关系的重要数学模型，它在实际生活中具有广泛的应用．通过对反比例函数的图像和性质的研究，我们进一步体会了数形结合的思想方法，加深了对函数本质特征的认识和理解．

1．反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像是双曲线，它的两个分支分布在两个象限内．

当 $k>0$ 时，双曲线的两个分支分别位于________象限，在每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而________；当 $k<0$ 时，双曲线的两个分支分别位于________象限，在每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而________．

反比例函数的图像为中心对称图形，原点为它的对称中心．因此，在画反比例函数的图像时，也可以先画出它的一支，再根据它的中心对称性画出另一支．

2．求反比例函数的表达式，主要有两条途径：

①根据问题中两个变量间的数量关系直接写出．

②运用待定系数法求出．

3．在利用反比例函数解决简单的实际问题时，借助反比例函数的图像，往往比较直观、方便．

三、注意事项

1．在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，x 与 y 的取值均不能为 0．因此，反比例函数的图像与坐标轴没有交点．

2．在实际问题中，反比例函数的自变量取值范围常常是大于 0 的，因此它的图像仅是双曲线在第一象限内的一个分支或其中一部分．

复习题

A 组

1. 在下列函数中，哪些是反比例函数？

(1) $y=\frac{3}{x}$； (2) $y=-\frac{3}{5x}$；

(3) $y=2x+3$； (4) $y=x^2+5x+4$.

2. 下列各点，哪些在反比例函数 $y=-\frac{1}{2x}$ 的图像上？

$A(1,\ \frac{1}{2})$，$B(-1,\ \frac{1}{2})$，$C(\frac{1}{2},\ -1)$，$D(0,\ -\frac{2}{3})$.

3. 分别指出下列反比例函数的图像所在的象限.

(1) $y=\frac{56}{x}$； (2) $y=\frac{-3.5}{x}$； (3) $y=-\frac{2}{3x}$.

4. 下列函数在其图像所在的象限内，哪些是 y 的值随 x 的值的增大而增大的？

(1) $y=\frac{8}{x}$； (2) $y=-\frac{1}{3}x$； (3) $y=-\frac{10}{x}$.

5. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，当 $x=-3$ 时，$y=-4$. 求这个反比例函数的表达式.

6. 已知点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{32m}{x}$ 的图像上，当 $x_1<x_2<0$ 时，$y_1>y_2$. 求 m 的取值范围.

7. 下表是某同学做物理实验时，记录下的电阻 $R(\Omega)$ 与电流 $I(\mathrm{A})$ 的几组对应值：

R/Ω	1	2	3	4
I/A	6	3	2	1.5

(1) 求出用 R 表示 I 的函数表达式，并画出图像.

(2) 当电阻为 5 Ω 时，电流为多少安培？

8. 长方体的体积为 50 cm^3，它的底面积为 S cm^2，高为 h cm.

(1) 写出用 S 表示 h 的函数表达式.

(2) 画出这个函数的图像.

B 组

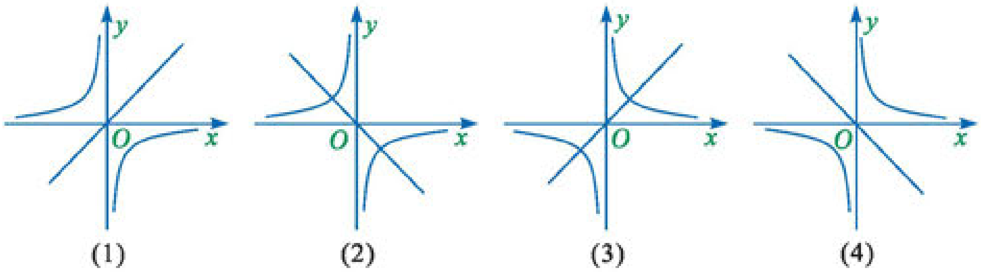
1. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$和正比例函数 $y=-2x$ 的图像的一个交点为$(-2, a)$.

(1) 求 a 的值.

(2) 求反比例函数的表达式.

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$和一次函数 $y=3x+b$ 都经过点 $A(2, 3)$. 求这两个函数的表达式.

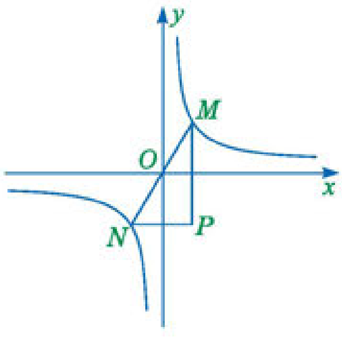
3. 若对于一次函数 $y=kx+1$, y 的值随 x 的值的增大而减小, 则正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$在同一坐标系内的大致图像是下列哪个?



(第 3 题)

C 组

1. 如图, M, N 是函数 $y=\frac{1}{x}$图像上的两点, 且线段 MN 过原点 O, MP 平行于 y 轴, NP 平行于 x 轴. 求$\triangle MNP$ 的面积.



(第 1 题)

2. 已知函数 $y=-\frac{8}{x}$与 $y=-x+2$ 的图像相交于点 A, B.

(1) 求点 A, B 的坐标.

(2) 求$\triangle AOB$ 的面积.

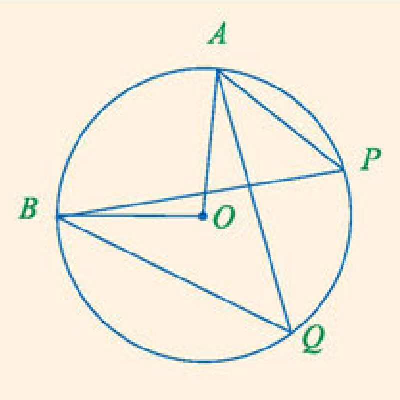
第二十八章

圆

在本章中，我们将学习

- 圆的概念及性质
- 过三点的圆
- 圆心角与圆周角
- 垂径定理*
- 弧长和扇形面积的计算

如图，点 A，B，P，Q 在 $\odot O$ 上．$\angle APB$ 与 $\angle AOB$ 具有怎样的数量关系？$\angle APB$ 与 $\angle AQB$ 具有怎样的数量关系？

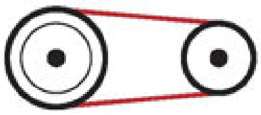


28.1 圆的概念及性质

圆是现实生活中最常见的图形，许多物体都具有圆的形象. 圆有哪些性质呢？

在实际生活中，电动自行车的车轮、皮带传动轮、茶几面和管道的横截面等，都给我们一种圆的形象.

电动车车轮



皮带传动轮

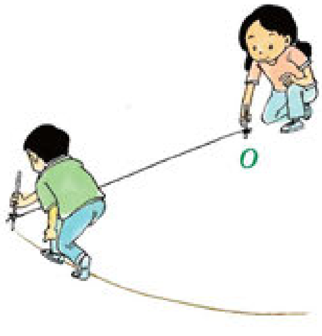
茶几面

管道横截面

观察与思考

小惠与小亮合作，按下面的方法画圆.

首先，小惠把绳子的一端固定在操场上的某一点 O 处，小亮在绳子的另一端拴上一小段竹签，然后，小亮将绳子拉紧，再绕点 O 转一圈，竹签划出的痕迹就是圆.



观察小惠与小亮画圆的过程，你认为圆上任意一点到圆心的距离相等吗？

平面上，到定点的距离等于定长的所有点组成的图形，叫做**圆**(circle)，这个定点叫做**圆心**(center of a circle)，这条定长叫做圆的**半径**(radius). 如图 28－1－1，它是以点 O 为圆心，OA 的长为半径的圆，记作"$\odot O$"，读作"圆 O". 线段 OA 也称为$\odot O$ 的半径.

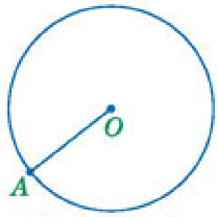


图 28－1－1

由圆的概念以及轴对称和中心对称的意义，容易得到：

圆是轴对称图形，过圆心的每一条直线都是它的对称轴. 圆也是中心对称图形，圆心是它的对称中心.

实际上，圆绕圆心旋转任意角度后都与自身重合.

为进一步认识圆的有关性质，我们先了解关于圆的一些概念.

圆上任意两点间的线段叫做这个圆的一条**弦**(chord). 过圆心的弦叫做这个圆的**直径**(diameter).

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**(circular arc)，简称弧. 圆的直径将这个圆分成能够完全重合的两条弧，这样的一条弧叫做**半圆**(semicircle).

大于半圆的弧叫做**优弧**(major arc)，小于半圆的弧叫做**劣弧**(minor arc).

如图 28－1－2，点 A，B，C，D 在$\odot O$ 上. 线段 AB 为$\odot O$ 的一条弦，AC 为$\odot O$ 的直径. 直径 AC 所分的两个半圆分别为半圆 ADC 和半圆 ABC. 以 AB 为端点的弧有两条，其中劣弧用$\overset{\frown}{AB}$来表示，读作"弧 AB"，优弧用$\overset{\frown}{ADB}$来表示，读作"弧 ADB".

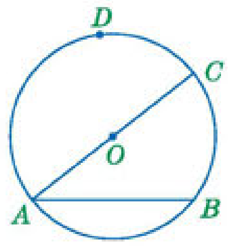


图 28－1－2

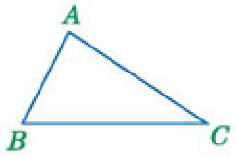
能够完全重合的两个圆叫做**等圆**. 能够完全重合的两条弧叫做**等弧**.

练 习

1. 请用圆规和直尺画出一个半径为 2 cm 的圆，并在这个圆中分别画出

长为 2 cm，3 cm 和 4 cm 的弦.

2. 如图，将$\triangle ABC$绕点 C 顺时针旋转 180°.



（第 2 题）

（1）请在图中画出旋转后的三角形.

（2）请分别画出点 A，B 所经过的路径.

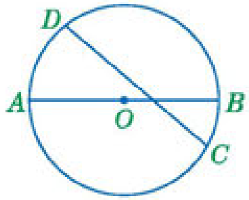
习 题

A 组

1.（1）如图，按标注的字母，说出图中的圆心、弦、半径、直径和半圆，并把表示它们的符号填在下面的表格中.

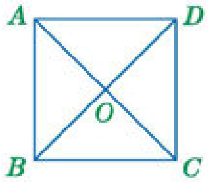
名称	圆心	弦	半径	直径	半圆
符号					

（2）找出图中所有的优弧和劣弧，并用字母表示.



（第 1 题）

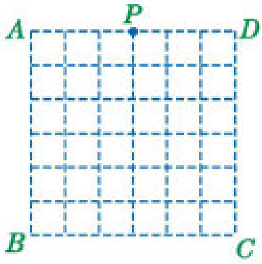
2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O. 以点 O 为圆心，OA 为半径画圆. 点 B，C，D 在不在这个圆上？为什么？



（第 2 题）

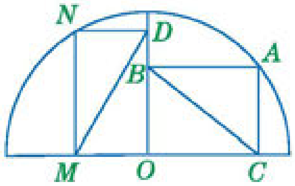
B 组

1. 如图，正方形 $ABCD$ 为一个 6×6 的网格电子屏示意图，位于 AD 中点处的光点 P 按如下的方式移动：依次绕点 A，B，C，D 顺时针旋转 $90°$. 请你在图中画出光点 P 所经过的路径.



（第 1 题）

2. 如图，点 A，N 在半圆 O 上，四边形 $ABOC$，$DNMO$ 均为矩形，$BC=a$，$MD=b$. a 与 b 的大小关系是怎样的？



（第 2 题）

28.2 过三点的圆

两点能够确定一条直线．那么，两个点能确定一个圆吗？三个点呢？

容易知道，经过一点可以画无数个圆．经过几点可以确定一个圆呢？

一起探究

1．如图 28－2－1(1)，平面上有两点 A，B，过点 A，B 的圆有多少个？这些圆的圆心到点 A，B 的距离具有怎样的关系？圆心是否在线段 AB 的垂直平分线上？

2．如图 28－2－1(2)，平面上三点 A，B，C 不在一条直线上．过点 A，B，C 的圆是否存在？如果存在，这样的圆有多少个？你能确定经过 A，B，C 三点的圆的圆心及半径吗？说出你的想法并和同学进行交流．

图 28－2－1

大家谈谈

当点 A，B，C 在同一条直线上时，过这三点的圆是否存在？

我们发现：过两点 A，B 的圆也有无数个，这些圆的圆心都在线段 AB 的垂直平分线上．过不在同一条直线上三点 A，B，C 的圆有且只有一个，这个圆的圆心为线段 AB，BC 的垂直平分线的交点．过在同一条直线上三点的圆不存在．

不在同一条直线上的三点确定一个圆．

试着做做

过不在同一条直线上的三点画圆.

例 用尺规作过三角形三个顶点的圆.

已知：如图 28－2－2，$\triangle ABC$.

求作：$\odot O$，使它过三点 A，B，C.

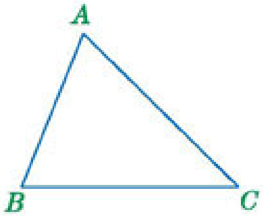


图 28－2－2

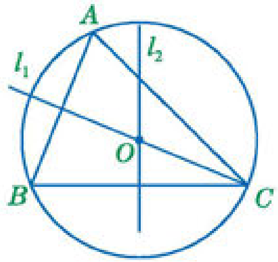


图 28－2－3

作法：如图 28－2－3.

(1) 分别作线段 AB 和 BC 的垂直平分线 l_1 和 l_2. 设 l_1 与 l_2 相交于点 O.

(2) 以点 O 为圆心，OA 为半径画圆.

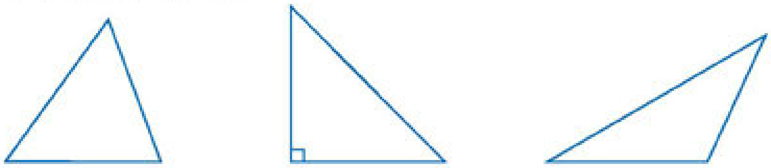
$\odot O$ 即为所求.

我们把经过三角形三个顶点的圆，叫做三角形的**外接圆**(circumcircle)，外接圆的圆心叫做三角形的**外心**(circumcenter).

练 习

1. 三角形的外心到三角形各顶点的距离都相等吗？为什么？

2. 请分别画出下面三个三角形的外接圆，并说明外心的位置与三角形的形状之间具有怎样的关系.



锐角三角形　直角三角形　钝角三角形

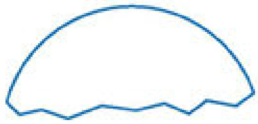
（第 2 题）

习题

A 组

1. 已知直角三角形的两条直角边为 5 cm 和 12 cm. 求这个直角三角形的外接圆半径.

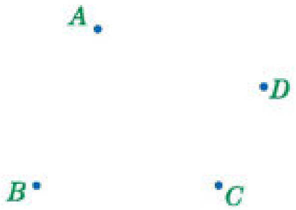
2. 有一个残破的圆形轮子如图所示. 现在要浇铸一个和它半径一样的轮子，需要确定它的圆心. 请在图中用尺规作出它的圆心.



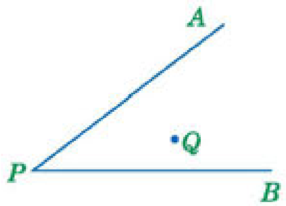
（第 2 题）

B 组

1. 如图，在四点 A，B，C，D 中，任意三点都不在同一条直线上. 作过 A，B，C 三点的圆，并判断这个圆是否过点 D.



（第 1 题）



（第 2 题）

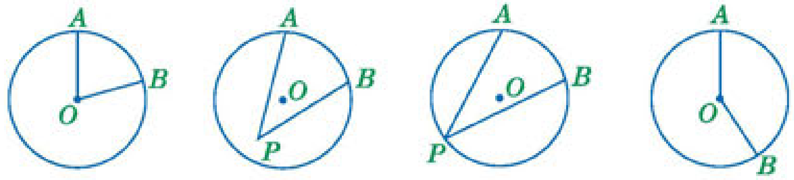
2. 如图，已知$\angle APB$ 和点 Q. 过点 P，Q，且圆心在$\angle APB$ 的边上的圆有几个？请将它们画出来.

28.3 圆心角和圆周角

圆心角和圆周角是圆中两种特殊的角，它们具有什么性质，相互之间又有什么关系呢？

顶点在圆心的角叫做**圆心角**(central angle).

如图 28－3－1，(1)和(4)所示的$\angle AOB$为$\odot O$的圆心角，(2)和(3)所示的$\angle APB$不是$\odot O$的圆心角.



(1) (2) (3) (4)

图 28－3－1

圆的每一个圆心角都对应一条弦和一条弧. 相等的两个圆心角所对应的两条弦之间以及两条弧之间具有怎样的关系呢？

一起探究

如图 28－3－2，在$\odot O$中，$\angle AOB=\angle COD$.

(1) 猜想弦 AB，CD 以及$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$之间各具有怎样的关系.

(2) 请用图形的旋转说明你的猜想.

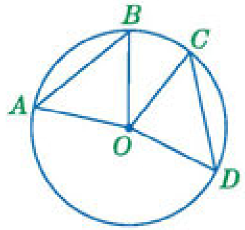


图 28－3－2

事实上，设$\angle AOC=\alpha$，将$\triangle AOB$顺时针旋转α，则 AO 与 CO 重合，BO 与 DO 重合. 从而 AB 与 CD 重合，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$重合. 所以 $AB=CD$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦相等，所对的弧也相等.

大家谈谈

在同圆或等圆中，若两条弧（或弦）相等，则它们所对的圆心角是否相等，所对的弦（或弧）是否相等？试说明理由.

在同圆或等圆中，两个圆心角及其所对应的两条弦和所对应的两条弧这三组量中，只要有一组量相等，其他两组量就分别相等.

例 1 已知：如图 28－3－3，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 M，N 分别在 AO，BO 上，$CM \perp AB$，$DN \perp AB$，分别交 $\odot O$ 于点 C，D，且 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.

求证：$CM=DN$.

证明：如图 28－3－4，连接 OC，OD.

$\because$ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，即 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CMO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DNO$ 中，

$\because$ $CM \perp AB$，$DN \perp AB$，

$\therefore$ $\angle CMO=\angle DNO=90°$.

又 $\because$ $OC=OD$，$\angle MOC=\angle NOD$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle CMO \cong \mathrm{Rt}\triangle DNO$.

$\therefore$ $CM=DN$.

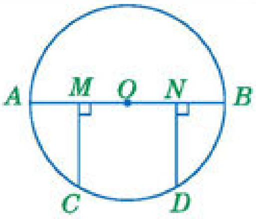


图 28－3－3

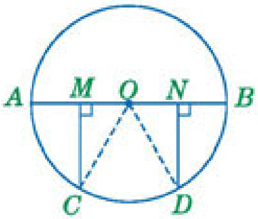
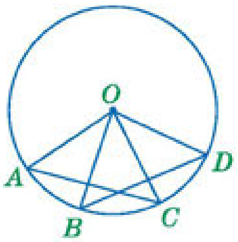


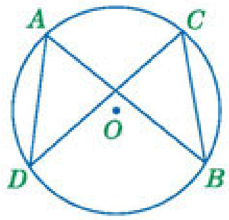
图 28－3－4

练　习

1. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. 求证：$AC=BD$.



（第 1 题）



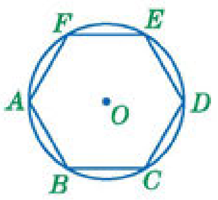
（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，$AD=BC$. 求证：$AB=CD$.

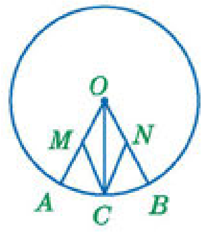
习题

A 组

1. 如图，在半径为 5 的$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$. 求弦 AB 的长.



（第 1 题）

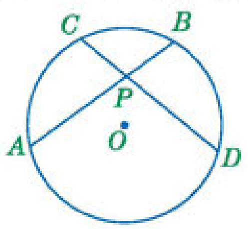


（第 2 题）

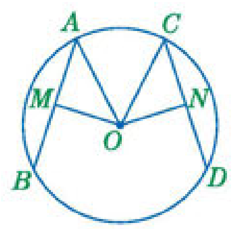
2. 已知：如图，OA，OB，OC 为$\odot O$的三条半径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$M$，$N$ 分别为 OA，OB 的中点. 求证：$MC=NC$.

B 组

1. 已知：如图，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，弦 AB 与弦 CD 相交于点 P. 求证：圆心 O 到弦 AB，CD 的距离相等.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，AB，CD 是$\odot O$的两条弦，且 $AB=CD$，M，N 分别为 AB，CD 的中点. 求证：$\angle AOM=\angle CON$.

顶点在圆上，两边都与圆相交的角叫做**圆周角**（angle in a circular segment）.

如图 28 - 3 - 5，图（1）中$\angle APB$是圆周角，图（2）和图（3）中$\angle AQB$，$\angle ARB$不是圆周角，图（4）中的$\angle ASB$是圆周角，而$\angle ASC$不是圆周角.

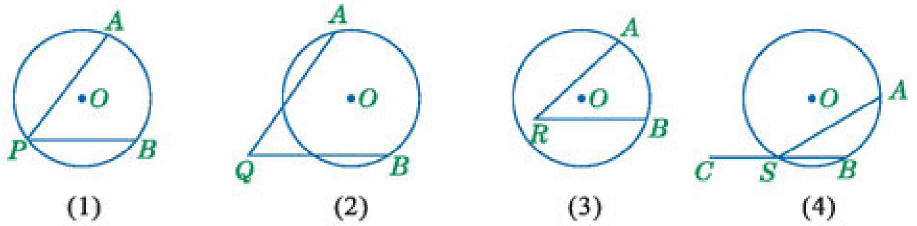


图 28-3-5

一起探究

如图 28-3-6，$\angle AOB$ 和 $\angle APB$ 分别是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角和圆周角.

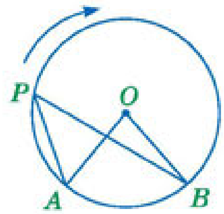


图 28-3-6

（1）当点 P 在圆上按顺时针方向移动时（点 P 与点 B 不重合），按照圆心 O 和圆周角的位置关系，可以分为几种不同的情形？说出你的判断并画出相应的图形.

（2）当圆心 O 落在 $\angle APB$ 的一条边上时，$\angle AOB$ 与 $\angle APB$ 具有怎样的大小关系？说明理由.

（3）当圆心 O 在 $\angle APB$ 的内部和外部时，(2)中的结论还成立吗？和同学进行交流.

通过探究，我们发现，当圆心 O 在 $\angle APB$ 的一条边上时，如图 28-3-7，$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

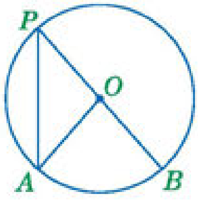


图 28-3-7

∵ $OP=OA$，

∴ $\angle OPA=\angle OAP$.

又∵ $\angle AOB=\angle OPA+\angle OAP$，

∴ $\angle AOB=2\angle APB$，即 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

对于圆心 O 在 $\angle APB$ 内部的情形，如图 28-3-8，连接 PO 并延长交⊙O 于点 D，

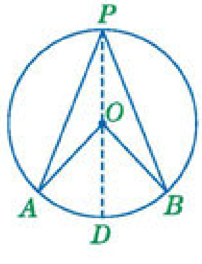


图 28-3-8

∵ PD 过圆心 O，

∴ $\angle APD=\frac{1}{2}\angle AOD$，$\angle BPD=\frac{1}{2}\angle BOD$.

$\therefore\ \angle APD+\angle BPD=\frac{1}{2}\angle AOD+\frac{1}{2}\angle BOD.$

$\therefore\ \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB.$

做一做

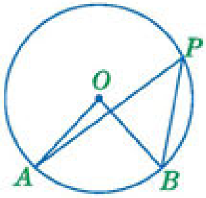


图 28-3-9

如图 28-3-9，对于圆心 O 在圆周角$\angle APB$ 外部的情形，证明$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

圆周角定理

圆上一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

例 2 如图 28-3-10，点 A，B，C 均在$\odot O$ 上，$\angle OAB=46°$. 求$\angle ACB$ 的度数.

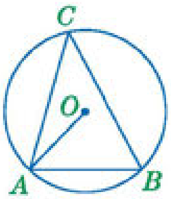


图 28-3-10

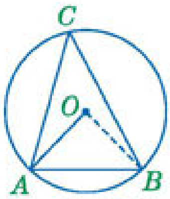


图 28-3-11

解：如图 28-3-11，连接 OB.

$\because\ OA=OB$，

$\therefore\ \angle OAB=\angle OBA.$

$\because\ \angle OAB=46°$，

$\therefore\ \angle AOB=180°-2\angle OAB=180°-2\times46°=88°.$

$\therefore\ \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=44°.$

大家谈谈

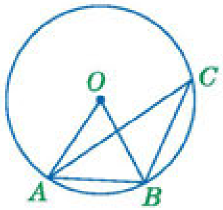
1. 直径所对的圆周角是多少度？请说明理由.
2. 90°的圆周角所对的弦是直径吗？请说明理由.

直径所对的圆周角是直角.

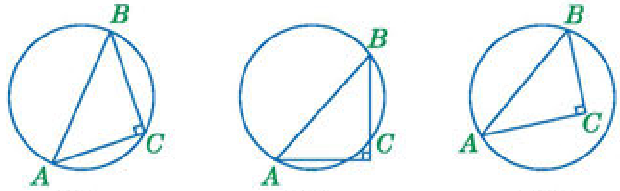
90°的圆周角所对的弦是直径.

练习

1. 如图，点 A，B，C 在$\odot O$上，$\triangle AOB$ 为等边三角形. 求$\angle ACB$ 的度数.



（第 1 题）



(1) (2) (3)

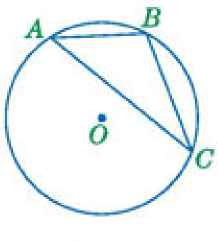
（第 2 题）

2. 如图，指出哪个图形中的线段 AB 是圆的直径，并说明理由.

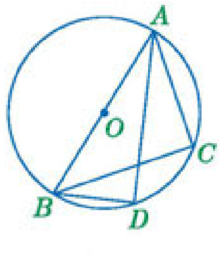
习题

A 组

1. 如图，在$\odot O$中，弦 $AB=1.8$ cm，点 C 在$\odot O$上，$\angle ACB=30^\circ$. 求$\odot O$的半径.



（第 1 题）

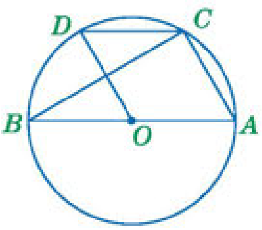


（第 2 题）

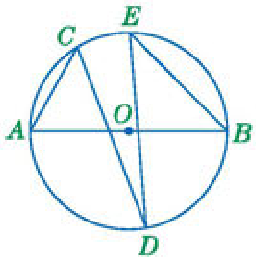
2. 如图，AB 为$\odot O$的直径，点 C 在$\odot O$上，$\angle BAC$ 的平分线交$\odot O$于点 D，$\angle ABC=40^\circ$. 求$\angle ABD$ 的度数.

B 组

1. 如图，在$\odot O$中，$\angle ABC=30^\circ$，OD 为半径，且 $OD\perp BC$. 求$\angle DCB$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C，E，D 在 $\odot O$ 上，$\angle BED=40^\circ$. 求 $\angle ACD$ 的度数.

在圆上，同弧所对的圆周角有很多，每两个圆周角之间有怎样的关系呢？

做一做

如图 28－3－12，$\angle ACB$ 与 $\angle ADB$ 分别为 $\odot O$ 上同一条弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的两个圆周角.

（1）$\angle ACB$ 与 $\angle ADB$ 之间具有怎样的大小关系？把你的猜想和大家进行交流.

（2）试证明你的猜想.

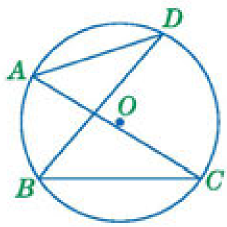


图 28－3－12

同弧所对的圆周角相等.

下面，我们探究四边形与圆的关系.

四个顶点都在同一个圆上的四边形叫做**圆内接四边形**，这个圆叫做**四边形的外接圆**.

如图 28－3－13，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 的外接圆.

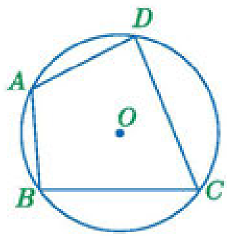


图 28－3－13

观察与思考

如图 28－3－13，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形.

(1) $\overset{\frown}{ABC}$和$\overset{\frown}{ADC}$所对的圆心角之和等于多少度？$\angle ABC$ 和$\angle ADC$ 之间具有怎样的关系？

(2) $\angle BAD$ 和$\angle BCD$ 之间具有怎样的关系？

提出你的猜想，并和大家进行交流.

我们发现：圆内接四边形的对角互补.

下面我们对它进行证明.

已知：如图 28－3－14，四边形 $ABCD$ 为$\odot O$ 的内接四边形.

求证：$\angle BCD+\angle BAD=180°$，$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

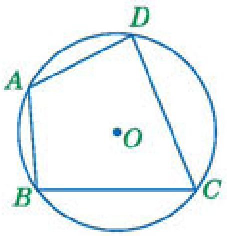


图 28－3－14

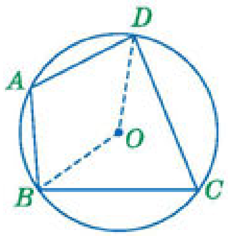


图 28－3－15

证明：如图 28－3－15，连接 OB，OD.

∵ $\overset{\frown}{BAD}$与$\overset{\frown}{BCD}$所对的圆心角之和为 360°，

$\angle BCD$ 和$\angle BAD$ 分别为$\overset{\frown}{BAD}$和$\overset{\frown}{BCD}$所对的圆周角，

∴ $\angle BCD+\angle BAD=180°$.

同理可证，$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

圆内接四边形的对角互补.

例 3 已知：如图 28－3－16，四边形 $ABCD$ 为$\odot O$ 的内接四边形，$\angle DCE$ 为四边形 $ABCD$ 的一个外角.

求证：$\angle DCE=\angle BAD$.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 为$\odot O$ 的内接四边形，

∴ $\angle BAD+\angle BCD=180°$.

∵ $\angle BCD+\angle DCE=180°$，

∴ $\angle DCE=\angle BAD$.

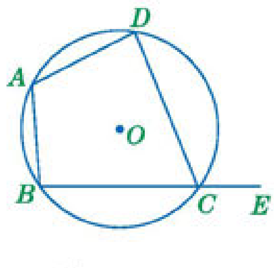
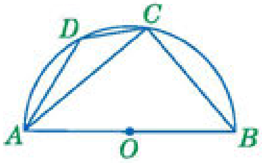


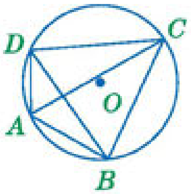
图 28－3－16

练　习

1. 如图，AB 为半圆 O 的直径，$\angle BAC=40^\circ$，D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上任意一点. 求 $\angle D$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 A，B，C，D 都在 $\odot O$ 上.

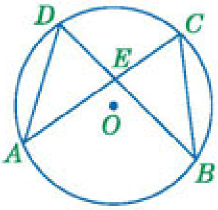
（1）找出四对分别相等的圆周角.

（2）如果 $\angle DAC=\angle BAC=60^\circ$，证明 $\triangle BCD$ 为等边三角形.

习　题

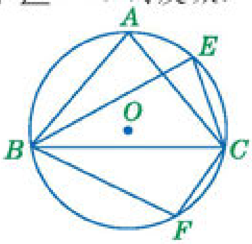
A　组

1. 已知：如图，AD，BC 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $AD=BC$，AC 与 BD 相交于点 E. 求证：$\triangle ADE \cong \triangle BCE$.



（第 1 题）

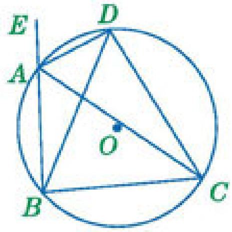
2. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB=AC$，点 E，F 分别在 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 上，$\angle ABC=50^\circ$. 求 $\angle BEC$ 和 $\angle BFC$ 的度数.



（第 2 题）

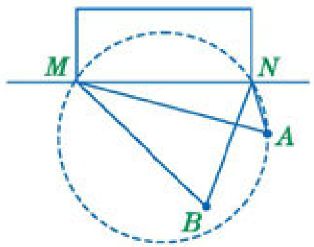
B 组

1. 已知：如图，$\odot O$为$\triangle ABC$的外接圆，AD为$\triangle ABC$的外角$\angle EAC$的平分线，AD与$\odot O$相交于点D. 求证：$\triangle DBC$为等腰三角形.



（第 1 题）

2. 如图，在足球场上，甲、乙两名队员互相配合向对方球门MN进攻. 当甲带球到点A处时，点A，M，N恰在一个圆上，此时乙在点B处. 当点B分别在圆的内部、圆上和圆的外部时，只考虑射门角度的大小，由谁射门较好？



（第 2 题）

28.4 垂径定理*

利用圆的轴对称性，我们还可以发现圆的一些性质.

一起探究

如图 28－4－1，在⊙O 中，CD 为直径，AB 为弦，且 $CD \perp AB$，垂足为 E.

如果将⊙O 沿 CD 所在的直线对折，哪些线段重合，哪些弧重合？由此你能得出什么结论？

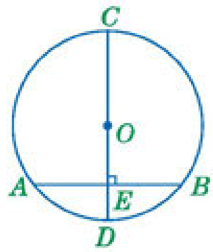


图 28－4－1

通过探究，我们发现：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

下面我们对这个结论进行证明.

已知：如图 28－4－1，在⊙O 中，CD 为直径，AB 为弦，且 $CD \perp AB$，垂足为 E.

求证：$AE=BE$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

证明：如图 28－4－2，连接 OA，OB.

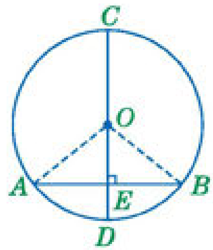


图 28－4－2

在△OAB 中，

∵ $OA=OB$，$OE \perp AB$，

∴ $AE=BE$，$\angle AOE=\angle BOE$.

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

∵ $\angle AOC=180°-\angle AOE$，$\angle BOC=180°-\angle BOE$，

∴ $\angle AOC=\angle BOC$.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

大家谈谈

如图 28-4-3，在⊙O中，直径 CD 与弦 AB(非直径)相交于点 E.

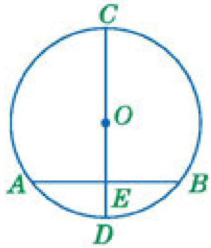


图 28-4-3

(1) 若 $AE=BE$，能判断 CD 与 AB 垂直吗？$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{BD}$(或$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$)相等吗？说明你的理由.

(2) 若$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$（或$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$)，能判断 CD 与 AB 垂直吗？AE 与 BE 相等吗？说明你的理由.

在⊙O中，设直径 CD 与弦 AB(非直径)相交于点 E. 若把 $AE=BE$，$CD\perp AB$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$中的一项作为条件，则可得到另外两项结论.

例 已知：如图 28-4-4，CD 为⊙O 的直径，AB 为弦，且 $AB\perp CD$，垂足为 E. 若 $ED=2$，$AB=8$，求直径 CD 的长.

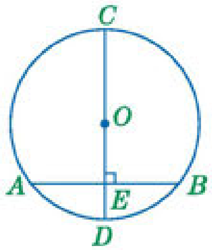


图 28-4-4

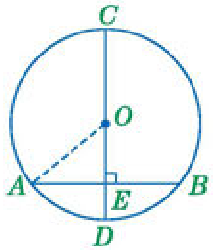


图 28-4-5

解：如图 28-4-5，连接 OA.

设⊙O 的半径为 r.

∵ CD 为⊙O 的直径，$AB\perp CD$，

∴ $AE=BE$.

∵ $AB=8$，

∴ $AE=BE=4$.

在 Rt△OAE 中，

$$OA^2=OE^2+AE^2,\ OE=OD-ED,$$

即

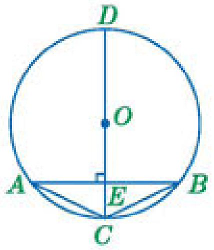
$$r^2=(r-2)^2+4^2.$$

解得 $r=5$，从而 $2r=10$.

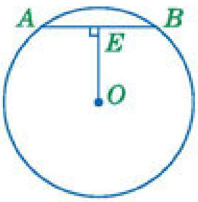
所以直径 CD 的长为 10.

练习

1. 已知：如图，CD 为 $\odot O$ 的直径，AB 为 $\odot O$ 的弦，$CD \perp AB$，垂足为 E. 求证：$AC = BC$.



（第 1 题）



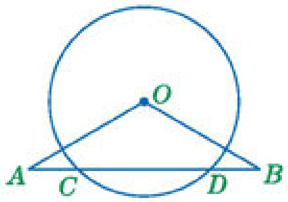
（第 2 题）

2. 如图，$\odot O$ 的半径为 5，弦 $AB = 6$，$OE \perp AB$，垂足为 E. 求 OE 的长.

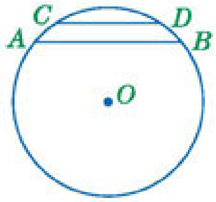
习题

A 组

1. 已知：如图，线段 AB 与 $\odot O$ 相交于点 C，D，且 $OA = OB$. 求证：$AC = BD$.



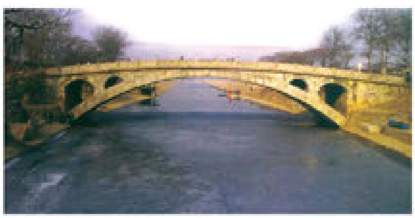
（第 1 题）



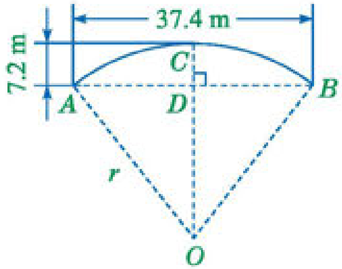
（第 2 题）

2. 如图，$\odot O$ 的半径为 5，AB，CD 为两条平行的弦，且在圆心的同侧，$AB = 8$，$CD = 6$. 求这两条平行弦之间的距离.

3. 如图，在河北省赵县境内，有一座建于隋代的石拱桥——赵州桥，其桥拱是圆弧形，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.2 m，跨度（弧所对弦的长）为 37.4 m.



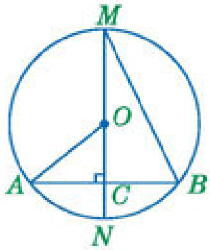
求桥拱的半径.（结果精确到 0.1 m）



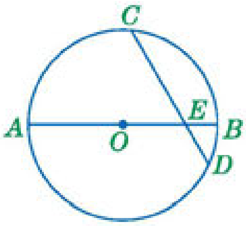
（第 3 题）

B 组

1. 如图，在⊙O 中，MN 为直径，AB 为弦，且 $MN \perp AB$，垂足为 C. 若 $OA=5$ cm，$AB=8$ cm，则 BM 的长是多少？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在⊙O 中，弦 CD 与直径 AB 相交于点 E，$\angle AEC=60^\circ$，且 $AE=5$ cm，$EB=1$ cm. 求 CD 的长.

28.5 弧长和扇形面积的计算

已知圆的半径，可以求出圆的周长和圆的面积. 在本节，我们将探究求弧长及扇形面积的问题.

一条弧和经过这条弧端点的两条半径所组成的图形叫做**扇形**(sector).

如图 28－5－1，在⊙O 中，由半径 OA，OB 和$\overset{\frown}{AB}$所组成的图形为一个扇形. 由半径 OA，OB 和$\overset{\frown}{ACB}$所组成的图形也是一个扇形.

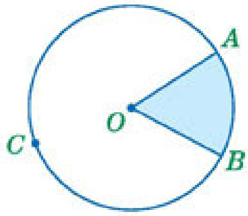


图 28－5－1

在同一个圆中，一个扇形对应一个圆心角，反过来，一个圆心角对应一个扇形.

做一做

半径为 r 的⊙O，它的周长为 $2\pi r$，面积为 πr^2，圆心角为 360°. 按下表给定的圆心角，计算所对的弧长以及扇形的面积，填写下表：

给定的圆心角	1°	90°	n°
所对的弧长			
扇形面积			

1°圆心角所对弧的长为$\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$，所对扇形的面积为$\frac{\pi r^2}{360}$.

若设 n°圆心角所对弧的长为 l，所对扇形的面积为 S，则

$$l=n\cdot\frac{\pi r}{180}=\frac{n\pi r}{180},\ S=n\cdot\frac{\pi r^2}{360}=\frac{n\pi r^2}{360}.$$

这就是计算弧长和扇形面积的公式.

因为 $S=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\times\frac{n\pi r}{180}\times r=\frac{1}{2}lr$，所以扇形的面积公式还可以表示为

$$S=\frac{1}{2}lr.$$

例 如图 28－5－2，⊙O 的半径为 10 cm.

（1）如果$\angle AOB=100°$，求$\overset{\frown}{AB}$的长及扇形 AOB 的面积.（结果保留一位小数）

（2）已知$\overset{\frown}{BC}=25$ cm，求$\angle BOC$ 的度数.（结果精确到 1°）

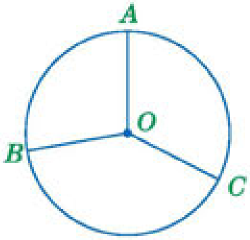


图 28－5－2

解：（1）$r=10$ cm，$\angle AOB=100°$，由弧长和扇形面积公式，得

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{n\pi r}{180}=\frac{100\times\pi\times10}{180}\approx\frac{100\times3.14\times10}{180}\approx17.4(\text{cm}),$$

$$S_{扇形AOB}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{100\times\pi\times10^2}{360}\approx\frac{100\times3.14\times100}{360}\approx87.2(\text{cm}^2).$$

所以$\overset{\frown}{AB}$的长约为 17.4 cm，扇形 AOB 的面积约为 87.2 cm^2.

（2）$r=10$ cm，$l_{\overset{\frown}{BC}}=25$ cm，由弧长公式，得

$$n=\frac{180l_{\overset{\frown}{BC}}}{\pi r}\approx\frac{180\times25}{3.14\times10}\approx143.$$

所以$\angle BOC$ 约为 143°.

圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线叫做圆锥的**母线**(generating line). 圆锥的顶点与底面圆心之间的线段叫做圆锥的**高**.

如图 28－5－3，PA 为圆锥的一条母线，PO 为圆锥的高. 将圆锥的侧面沿母线 PA 展开成平面图形，该图形为一个扇形，扇形的半径长等于圆锥的母线长.

反过来，扇形也可以围成一个圆锥.

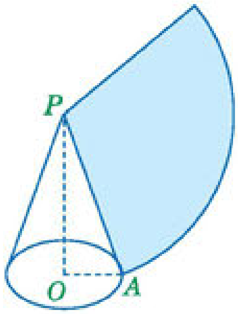


图 28－5－3

做一做

已知扇形的圆心角为 120°，弧长为 20π cm. 如果用这个扇形围成一个圆锥，那么这个圆锥的侧面积是多少？

练　习

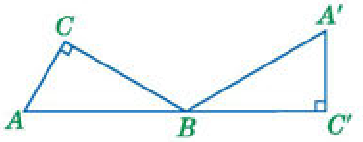
1. 已知扇形的弧长为 240π，半径为 180. 求这个扇形的圆心角的度数.

2. 已知一个扇形的圆心角为 150°，弧长是 20π cm. 求这个扇形的面积.

习 题

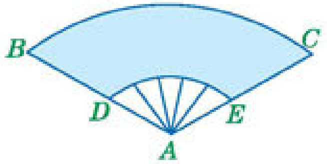
A 组

1. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=\sqrt{3}$ cm，将$\triangle ABC$ 绕点 B 旋转到$\triangle A'BC'$的位置，使 A，B，C'三点在同一直线上. 点 A 经过路径的长是多少？



（第 1 题）

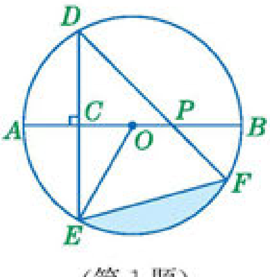
2. 已知圆锥的底面半径为 40 cm，母线长为 90 cm. 求这个圆锥的侧面积.
3. 如图，扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB，AC 的夹角为 120°，AD 的长为 10 cm，DB 的长为 15 cm. 求扇面(阴影部分)的面积.



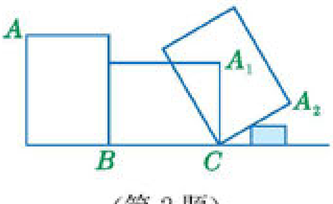
（第 3 题）

B 组

1. 如图，AB 为$\odot O$ 的直径，弦 DE 垂直平分半径 OA，垂足为 C，弦 DF 与半径 OB 相交于点 P. 连接 EF，EO. 若 $DE=2\sqrt{3}$，$\angle DPA=45^\circ$，求图中阴影部分的面积.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，有一长为 4 cm，宽为 3 cm 的长方形木板在桌面上做无滑动的翻滚(顺时针方向)，木板上顶点 A 的位置变化为 $A\to A_1\to A_2$，其中第二次翻滚时被桌面上一小木块挡住，使木板边沿 A_2C 与桌面成 30°角. 求点 A 翻滚到 A_2位置时所经过的路径长.

读一读

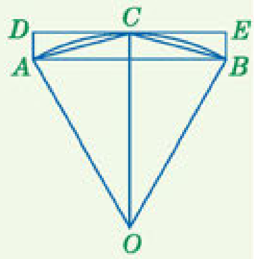
割圆术

很久以前，人们就发现了圆的周长与直径的比是一个定值．后来把这个定值叫做圆周率，并记作 π.

在公元 3 世纪，我国古代数学家刘徽用“割圆术”求得 π 的近似值为 $\frac{157}{50}=3.14$．在公元 5 世纪，数学家祖冲之又进一步求得 π 的值在 3.141 592 6与 3.141 592 7 之间．这是当时世界上领先的科学成果．

刘徽的“割圆术”是用圆的内接正多边形(顶点都在圆上，各边都相等的多边形)的面积逼近圆的面积，并依此求得 π 的近似值．

在图中，设圆的半径为 1，这时圆的面积 $S=\pi$．设 AC，CB 为圆内接正 $2n$ 边形的两条边，AB 为圆内接正 n 边形的一条边，又设正 n 边形、正 $2n$ 边形的面积分别为 S_n，S_{2n}，则



$$S_{2n}<S<S_{2n}+n(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BEC}).$$

因为

$$\begin{aligned}&S_{2n}+n(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BEC})\\=&S_{2n}+nS_{\triangle ACB}\\=&S_{2n}+(S_{2n}-S_n)\\=&2S_{2n}-S_n,\end{aligned}$$

所以 $S_{2n}<S<2S_{2n}-S_n$，即

$$S_{2n}<\pi<2S_{2n}-S_n.$$

不难得到：在半径为 1 的圆中，如果圆内接正 n 边形的边长为 a_n，那么圆内接正 $2n$ 边形的边长 $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$．

刘徽由圆内接正六边形算起，逐渐增加边数算出正十二边形、正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形……的面积．边数越多，算出的正多边形的面积越接近圆的面积，从而求出了圆周率的近似值．

刘徽说：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣．”所谓“割圆术”，就是用圆的内接正多边形来逼近圆．

我们还可以用其他的方法来求圆周率 π，如用多边形的周长与直径的比来近似地求圆周率．现在利用电子计算机，已有人把 π 的值计算到小数点后几十亿位．

数学活动

管道的横截面为什么都是圆形的?

你知道储油罐和各种管道的横截面为什么都是圆形的吗?

活动一：如果一个正多边形(各边相等、各角相等的多边形)和一个圆的周长相等，那么哪个图形的面积较大?

以图形的周长都是 60 cm 为例，用计算器计算下表中各图形的面积，并将结果填入表中.

图形	面积/cm^2	图形	面积/cm^2
正三角形		正六边形	
正方形		正八边形	
圆			

根据计算结果，猜想周长相等的正多边形和圆，哪个图形的面积较大.

活动二：如果一个正多边形和一个圆的面积相等，那么哪个图形的周长较小?

以图形的面积都是 100 cm^2 为例，用计算器计算下表中各图形的周长，并将结果填入表中.

图形	周长/cm	图形	周长/cm
正三角形		正六边形	
正方形		正八边形	
圆			

根据计算结果，猜想面积相等的正多边形和圆，哪个图形的周长较小.

由以上两个活动，谈谈管道的横截面为什么都是圆形的.

活动三：某工厂准备用某型号的铁板加工底面面积为 1 m^2，高度为 1 m 的无盖储水箱. 现有两种可选方案.

方案一：把底面加工成正方形.

方案二：把底面加工成圆形.

(1) 采用哪种方案更省料?

(2) 分别计算用两种方案加工一个储水箱所用铁板的面积.

(3) 如果加工 100 个储水箱，采用省料的方案，比用另一种方案可节省铁板多少平方米?

回顾与反思

一、知识结构

- 圆
  - 概念
    - 圆心、半径、直径、弦、弧
    - 圆心角、圆周角、三角形的外接圆
  - 性质
    - 轴对称性、中心对称性
    - 圆周角定理
    - 垂径定理
  - 计算
    - 弧长公式、扇形面积公式

二、总结与反思

圆是特殊的几何图形，它既是轴对称图形，又是中心对称图形，同时，圆绕圆心旋转任意一个角度后都能与它自身重合. 圆的周长与直径的比值恒为常数. 圆的这些特性，决定了弦(直径)、弧(半圆)、圆心角和圆周角之间具有十分密切的联系. 我们在探究同弧所对的圆心角和圆周角之间的关系时，充分利用了“化归”的方法，这对我们基本活动经验的积累、基本思想方法的形成，具有重要意义和促进作用.

1. 圆.

圆是由到定点距离等于定长的所有点构成的图形.

圆的位置和大小，由圆心的位置和半径的大小来确定.

不在同一条直线上的三点确定一个圆.

2. 弦、弧、圆心角和圆周角.

(1) 概念.

弦、弧、圆心角和圆周角是由圆衍生出来的概念，这些概念都是指某个圆的弦、弧、圆心角和圆周角.

________________叫做弦；________________叫做弧；________________叫做圆心角；________________叫做圆周角.

(2) 关系.

①弦与弧之间的关系.

在“直径垂直于弦、直径平分弦和直径平分弦所对的弧”中，只要把其中的一条作为条件，就可以推出另外两条结论.

垂径定理就是由“垂直于弦的直径”得出“平分这条弦和这条弦所对的两条弧”这个结论.

②弦、弧与圆心角之间的关系.

在同圆或等圆中，等弧所对的弦________，所对的圆心角__________；相等的圆心角所对的弦________，所对的弧________；等弦所对的圆心角________，所对的优弧(或劣弧)________.

③圆周角与圆心角之间的关系.

圆周角定理：圆上一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

半圆(或直径)所对的圆周角为______；$90°$的圆周角所对的弦为________；同弧所对的圆周角________；圆内接四边形的对角________.

3. 圆的有关计算.

(1) 弧长的计算公式为____________.

(2) 扇形面积的计算公式为____________或____________.

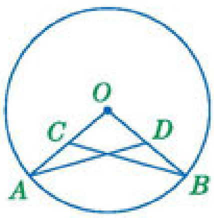
三、注意事项

扇形面积公式有两种表示：$S=\frac{n\pi r^2}{360}$和$S=\frac{1}{2}lr$. 前者是由半径和圆心角度数表示的，后者是由半径和弧长表示的，在解题时，要根据具体问题灵活使用.

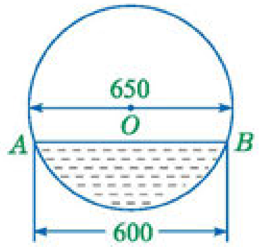
复 习 题

A 组

1. 已知：如图，OA，OB 为$\odot O$ 的半径，C，D 分别为 OA，OB 的中点. 求证：$AD=BC$.



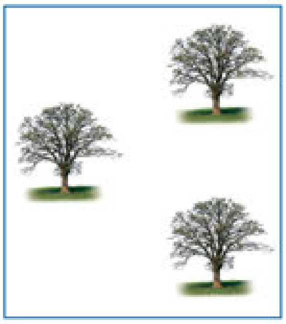
(第 1 题)



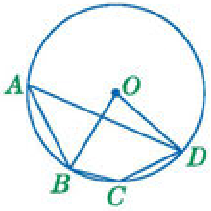
(第 2 题)

2. 在直径为 650 mm 的圆柱形输油管内匀速流淌着石油，其横截面如图所示. 已知油面宽 $AB=600$ mm，求油的最大深度.
3. 求证：菱形各边的中点在同一个圆上.
4. 如图，在某居民小区的一片空地上有三棵古树，现准备在这片空地上建一个圆形广场. 为使古树不被破坏，设计时要求古树恰好在圆形广场的

边缘上．如果由你来设计这个圆形广场，你会怎样确定这个圆形广场的圆心呢？



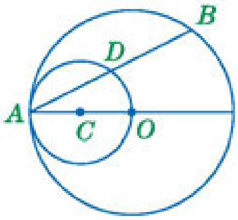
（第 4 题）



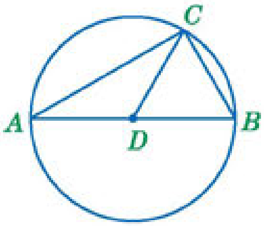
（第 5 题）

5. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$\angle BOD=80^\circ$，求$\angle BAD$ 和$\angle BCD$ 的度数．

6. 已知：如图，OA 为$\odot O$ 的半径，以 OA 为直径的$\odot C$ 与$\odot O$ 的弦 AB 相交于点 D．求证：D 为 AB 的中点．



（第 6 题）

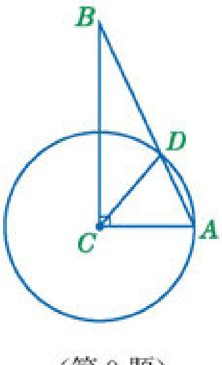


（第 7 题）

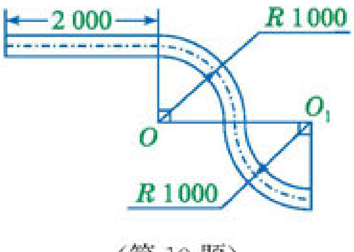
7. 已知：如图，CD 为$\triangle ABC$ 的中线，$AB=2CD$，$\angle B=60^\circ$．求证：$\triangle ABC$ 的外接圆的半径等于 CB．

8. 求证：以等腰三角形一腰为直径的圆与底边的交点为底边的中点．

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle B=25^\circ$，以点 C 为圆心，CA 为半径的圆交 AB 于点 D．求弦 AD 所对圆心角的度数．



（第 9 题）

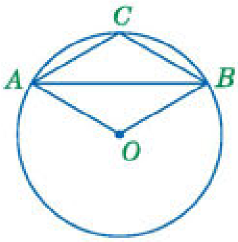


（第 10 题）

10. 一段管道如图所示，已知$\angle O=\angle O_1=90°$，中心线的两条圆弧半径都为 1 000 mm. 求管道的长(中心虚线的长，精确到 1 mm).

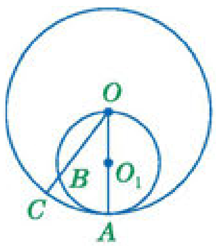
B 组

1. 如图，在$\odot O$中，C为$\overset{\frown}{AB}$的中点，$\angle AOB=120°$. 四边形$OACB$是一个怎样的四边形？为什么？



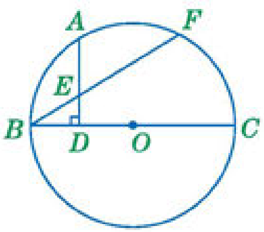
(第 1 题)

2. 已知：如图，$\odot O$的半径OA为$\odot O_1$的直径，$\odot O$的半径OC交$\odot O_1$于点B. 求证：$\overset{\frown}{AB}$的长等于$\overset{\frown}{AC}$的长.



(第 2 题)

3. 已知：如图，BC为$\odot O$的直径，BF为弦，A为$\overset{\frown}{BF}$的中点，$AD\perp BC$，垂足为D，AD和BF相交于点E. 求证：$AE=BE$.

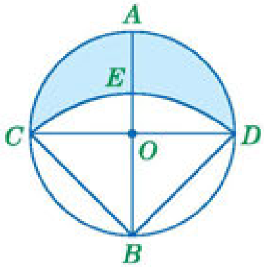


(第 3 题)

C 组

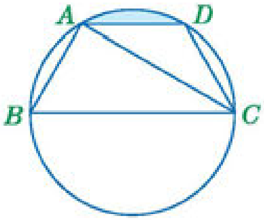
1. 已知：锐角三角形 ABC 的高 AD，BE 相交于点 H，AD 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 G. 求证：D 为 HG 的中点.

2. 如图，$\odot O$ 的半径为 r，AB 和 CD 为互相垂直的直径. 以点 B 为圆心，BC 为半径作 $\overset{\frown}{CD}$，交 AB 于点 E. 求图中阴影部分的面积.



（第 2 题）

3. 如图，点 A，B，C，D 均在圆上，$AD \parallel BC$，AC 平分 $\angle BCD$，$\angle ADC=120^\circ$，四边形 $ABCD$ 的周长为 10 cm. 求图中阴影部分的面积.



（第 3 题）

综合与实践一

利用花瓣特征对花分类

如图，对比两个不同品种的郁金香花瓣，你一定会发现：同一品种的花瓣有大小之别，但形状却比较相似；而不同品种的花瓣形状和大小有明显的差异.

A

B

一、问题

我们随机选取了A，B两个不同品种的郁金香花瓣各10个，测量花瓣的长x和宽y，数据(单位：cm)如下表所示：

A	x	4.9	4.7	5.4	4.4	5.0	5.1	5.3	4.5	5.2	5.5
	y	3.7	3.8	4.2	3.6	4.0	4.3	4.3	3.6	4.1	4.4
B	x	6.8	6.0	5.1	6.6	5.5	6.3	5.2	6.2	6.5	5.8
	y	3.9	3.6	3.1	4.0	3.5	3.8	3.4	3.7	3.6	3.4

如何利用花瓣的形状特征对花进行分类呢？已知花瓣的长和宽，能判别它属于A，B哪个品种吗？

二、解决方案

1. 考虑到花瓣的长和宽有近似的正比例关系，用长与宽之比描述花瓣的形状特征比较合理.

2. 分别计算两组花瓣的长与宽之比$\dfrac{x}{y}$：

$$a_1, a_2, \cdots, a_{10};$$
$$b_1, b_2, \cdots, b_{10}.$$

3. 分别计算两组样本数据的平均数$\overline{a}$，$\overline{b}$和方差s_A^2，s_B^2，由此估计总体的平均数和方差，并描述长与宽之比的分布集中位置和离散程度.

4. 分别确定两个区间：$[\overline{a}-2s_A, \overline{a}+2s_A]$，$[\overline{b}-2s_B, \overline{b}+2s_B]$.

若花瓣的长与宽之比落在$[\overline{a}-2s_A, \overline{a}+2s_A]$内，则判定它属于品种A；

若花瓣的长与宽之比落在$[\overline{b}-2s_B, \overline{b}+2s_B]$内，则判定它属于品种B.

5. 对给定的20个花瓣，验证分类标准是否合理.

6. 四个未知品种的郁金香花瓣的长和宽(横坐标为长，纵坐标为宽)数

据为(5.5，3.5)，(6.7，3.8)，(5.2，4.2)，(5.8，4.6)，分别判断它们各属于A，B哪个品种.

三、可参考的知识与方法

1. 样本采集：选择每种花瓣的大小要接近些，以保证样本具有较好的代表性. 确定适当的样本容量，一般来说，样本容量越大，得出的结论越可信. 取样本容量为20～30比较合适.

2. 数据分析：根据花瓣长与宽之比的数据的具体情况，选择合理的代表值，除了常用的平均数外，也可以用中位数或众数.

3. 用样本的平均数(方差)估计总体的平均数(方差).

4. 一般地，如果花瓣的长与宽之比的平均数估计值为$\bar{r}$，方差的估计值为s^2，那么大约68%的比值落在区间$[\bar{r}-s, \bar{r}+s]$中，大约95%的比值落在区间$[\bar{r}-2s, \bar{r}+2s]$中. 其中，$s=\sqrt{s^2}$.

5. 如果当地自然条件不具备，建议选择树木的“树叶”为样本，按上面的方案，利用树叶的特征对树木进行分类.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

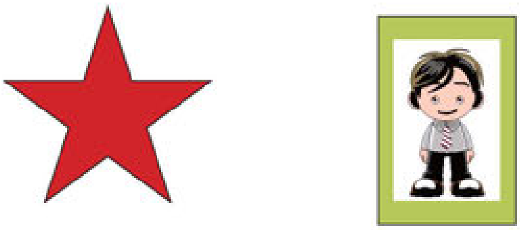
综合与实践二

图形的放大与缩小

一、问题

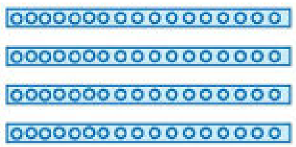
我们知道，利用位似的方法可以把一个多边形进行放大或缩小. 对于不规则的图形，如何将其放大或缩小呢？

1. 如图(1)，欲将五角星和卡通人物图片放大到原来的 2 倍，应怎么办？怎样又可将这两张图片缩小到原来的$\frac{1}{2}$？

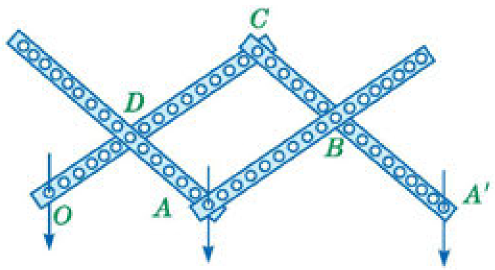


(1)

2. 制作放缩尺，利用放缩尺可以将原图形放大或缩小. 请以小组为单位按下列说明制作放缩尺.



(2)



(3)

(1) 如图(2)所示，取 4 根长和宽完全相同的长方形木条，在木条上等距地打上一些圆孔.

(2) 如图(3)所示，将 4 根长方形木条在点 A，B，C，D 处用螺栓固定(根据需要可调整位置)，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $AD=OD$，$A'B=AB$. 这样，一个放缩尺就制作好了.

3. 画图. 将放缩尺上的点 O 固定(可用钉子)在平面上，在点 A 处装上细针(可用直别针)，点 A'处装上画笔. 当点 A 处的细针沿给定图形的轮廓移动时，点 A'处的画笔就可画出原图形的放大图形(图(3)现在的状态下).

交换细针与画笔的位置，就可画出原图形的缩小图形.

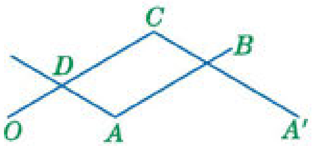
改变点 B 和点 D 的位置(仍保持四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $AD=OD$，$A'B=AB$)，就可改变将图形放大或缩小的比例了.

4. 说明放缩尺放大或缩小图形的道理.

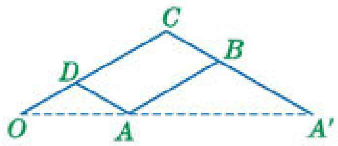
5. 完成上面第 1 个问题. 另将地理课本上中国行政区域图放大到原来的 2 倍.

二、解决方案

1. 如图(4)，为说明放缩尺能将图形放大或缩小的道理，将放缩尺抽象为几何图形.



(4)



(5)

2. 如图(5)，在▱$ABCD$ 中，延长 CD 到点 O，使 $OD=AD$，延长 CB 到点 A'，使 $A'B=AB$. 证明点 O，A，A' 在一条直线上，且 $\dfrac{OA}{AA'}=\dfrac{AD}{AB}$.

三、可参考的知识及方法

1. 平行四边形的性质.

2. 相似形和位似图形.

3. 提示：证明 $\angle OAD+\angle DAB+\angle BAA'=180°$.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

编写后记

2001年，国家正式启动了义务教育阶段的新一轮课程改革。有感于时代的召唤，我们这群研究和从事数学教育的工作者，满怀共同的梦想，成立了编写组，尝试进行义务教育七年级至九年级数学教科书的建设与编写。

2001年3月份，编写组正式向教育部提出了编写立项申请。经专家评审，当年12月通过了立项。编写组从此开始编写工作。

2003年3月，这套依据《全日制义务教育教学课程标准(实验稿)》编写的教科书，经全国中小学教材审定委员会审查通过，并公布于当年的订书目录中，作为义务教育课程标准实验教科书，供实验区选用。

2010年10月，这套教科书开始修订准备。

2011年12月，七年级上册和七年级下册的修订工作完成。

2012年3月，按照《义务教育数学课程标准(2011年版)》修订后的七年级上册和七年级下册，经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过。2013年3月，八年级上、下册和九年级上、下册也顺利通过教育部基础教育课程教材专家工作委员会的审查。现在与大家见面的这本教科书就是修订后的九年级上册。

我们在编写教科书的过程中，得到了众多的专家、学者、数学教师的大力支持和热情帮助，特别是下面这些老师，更是我们应当感谢的：

王宝仓、杨志坚、孟庆林、张庆、仇岷、陈雪梅、石凌等，都是这套教科书原实验版本的编者，为教科书的编写作出了很大贡献；

刘璐、许艳秋、潘新学、王春丽、李春祥、魏元洪、张玲等，对这套教科书的实验给予了大力的支持和帮助；

穆怀宇、郭辉、章巍、许春英、张燕飞、李永强、滕杰、张晓娴、牛翠英、杨金钗、刘建锋、靳春会、陈彦敏、徐在荣、王建华、张素平等，在这套教科书的修订过程中，参与讨论并提出了许多宝贵意见。

我们深知，教科书的编写和建设是一个长期的任务，更是一个不断完善、不断发展的过程。我们会继续努力，朝着精品教科书的建设目标奋力进取。我们也诚挚地希望广大的数学教师继续关注和支持这套教科书，使它越来越好。

编者

2014年3月