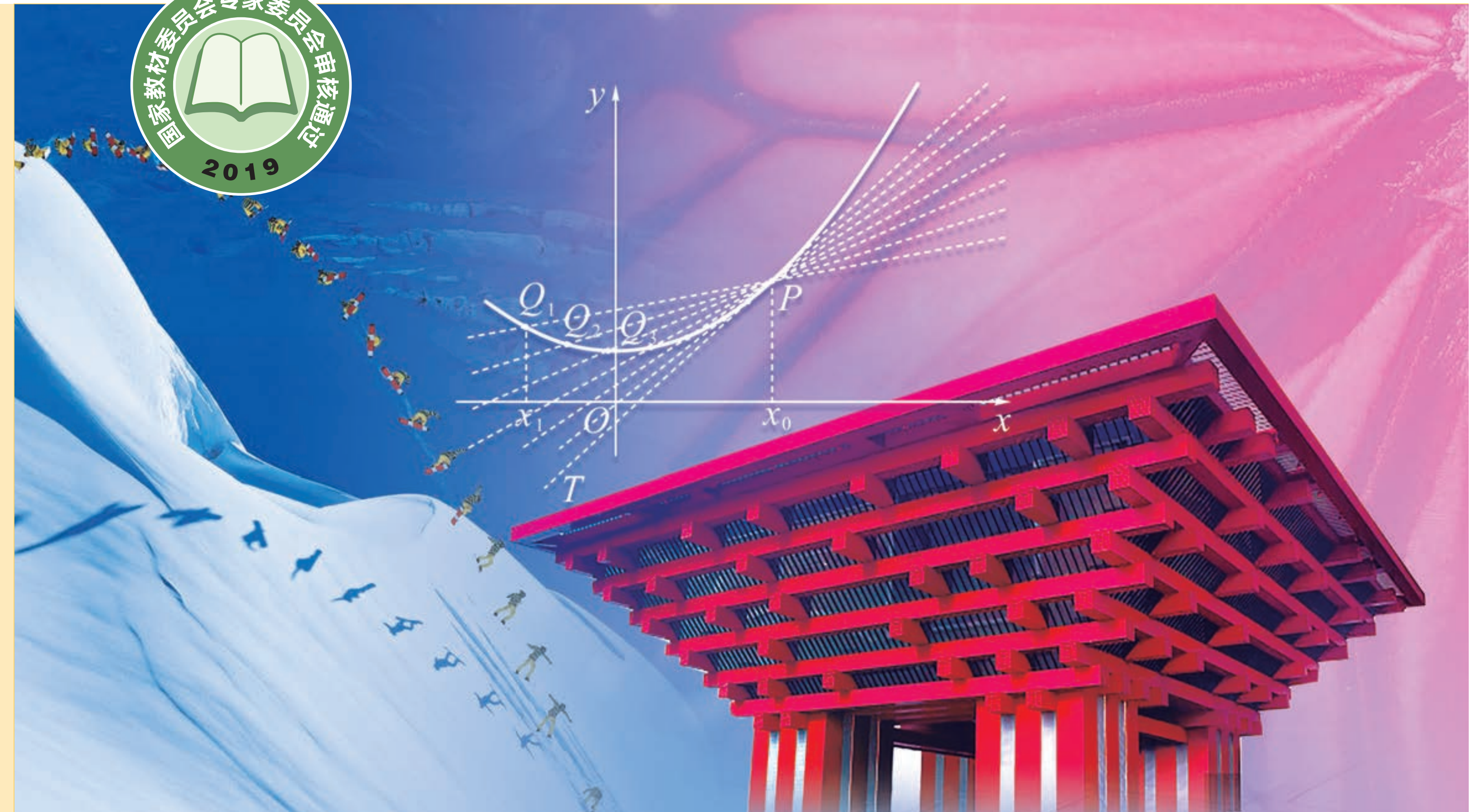


普通高中教科书

数学

选择性必修 第二册 SHUXUE

湖南教育出版社

普通高中教科书 数学 选择性必修 第二册
湖南教育出版社

S H U X U E

ISBN 978-7-5539-3970-4
9 787553 939704 >
定价：14.92 元

绿色印刷产品

普通高中教科书

数学

选择性必修 第二册 SHUXUE

湖南教育出版社

主　　编　张景中　黄步高
执行主编　李尚志
副 主 编　何书元　朱华伟

本册主要编者　张景中　李尚志　何书元　成礼智
胡　旺　邹楚林

前言

2013年12月14日，中国“嫦娥三号”月球探测器成功登陆月球.

这件举世瞩目的大事背后，数学扮演了不可缺少的重要角色.

要让“嫦娥三号”飞近月球，并把探测车放到月球上，必须知道它们之间的相对位置，准确控制探测器的姿态. 为此就需要描述和测算空间物体的位置和形态，平面几何不够，还要立体几何.

用空间向量，可以方便地表达和处理立体几何的问题. 它是平面向量的直接推广. 除了坐标中的两个数变成了三个数，一切都是轻车熟路，可以得心应手. 用综合法处理空间图形较难；用了向量，空间与平面差别不大，基本思路都是用向量模型描述几何性质，用向量的运算解决问题，再翻译为几何的语言. 这时，你将体验到向量法更大的威力.

月球在不停地绕地球运动；地球在不停地绕太阳运动；“嫦娥三号”升空后先是绕地球飞行，后来还要绕月球飞行. 为此就需要描述和测算运动和变化中的现象，常量的数学不够，还要变量的数学.

变量的数学叫作微积分. 微积分的创立是数学发展中的一座里程碑. 大量的几何问题和物理问题，从计算面积体积到确定天体运动轨道，被微积分摧枯拉朽般地清算了. 微积分的出现，开辟了数学的新天地. 一系列内容丰富、思想深刻、应用广泛的数学分支在微积分的基础上诞生成长. 导数是微积分的核心概念之一. 我们将通过若干实例，理解导数的奥妙；在研究函数的单调性和极值等性质的过程中，感受微积分对人类文化发展的价值.

月球和地球运行的轨道，卫星的轨道，飞机的航线，都是确定的，可以准确预知的. 但世界上还有很多重要的事情难以完全准确地预知，例如雷雨的时间和强度，台风的形成和路线，疾病的发生和痊愈，等等. 这类难以准确预知的事情叫随机现象. 认识随机现象，需要概率与统计的数学理论和方法.

在科学研究、工农业生产、新产品开发、产品质量的提高乃至政治、教育、社会科学等各个领域，使用统计方法和不使用统计方法取得的效果大不相

同．用统计方法从数据中提取信息，可以帮助人们制定更加合理的决策和行为规则，减少决策的盲目性和有偏性．这就是让数据说话．时至今日，概率与统计的基础知识已经是公民必备的知识．

我们生活在不停变化和运动的四维时空之中．空间向量和立体几何是我们认识三维空间的基本工具．微积分则给了我们认识运动和变化的方法．为了认识大千世界的过去、现在和未来，需要概率统计来处理大量数据．

“天下难事，必作于易；天下大事，必作于细．”让我们静下心来，从最基本的事例和概念起步，踏上新的征程．

目录 MULU

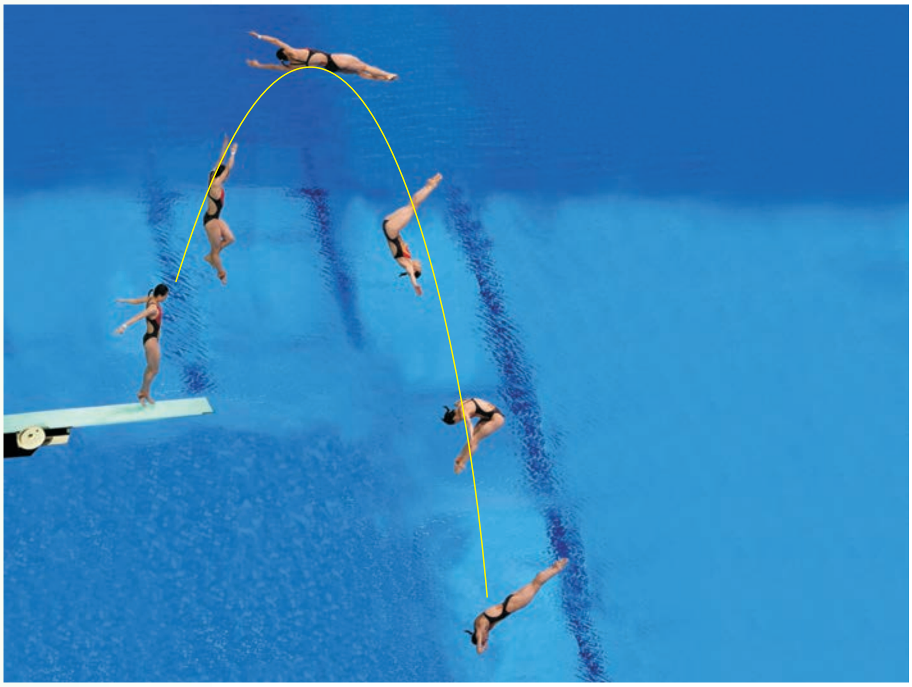
第 3 章　概　　率　108

第 4 章　统　　计　161

1

第1章

导数及其应用



如何求曲线上任一点处的切线，如何求运动物体在每一时刻的瞬时速度，这些问题好像是无穷无尽，永远做不完的．但是，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破，一个新的数学领域出现了．所以恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利．

导数是微积分的核心概念之一．本章我们将通过若干内容丰富、思想深刻的实例引入导数，理解导数的意义；学习导数的基本运算法则，利用导数研究函数的单调性、极值等性质，并解决一些实际问题，体会导数的思想及其丰富的内涵．

1.1 导数概念及其意义

自由落体的速度时时刻刻在变化，该如何计算呢？

我们早就会作圆的切线，二次函数曲线的切线怎么作呢？

正如莱布尼茨所说，过去很多饱学之士百思不解的问题，有了新的数学思路，普通人都能按部就班地手到擒来了.

1.1.1 函数的平均变化率

每条直线上都可以建立一根数轴，则直线上每一点 P 的位置均可用一个实数 x 表示.

若在这条直线上运动的动点 P 在任何时刻 t 的位置均可用 $f(t)$ 表示，则从时刻 a 到时刻 b 的位移为 $f(b)-f(a)$. 因为所花时间为 $b-a$，所以在时间段 $[a, b]$ 内动点 P 的平均速度为 $v_{[a,b]}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

例 1 设数轴上动点 P 在任何时刻 t 的位置均可用函数 $f(t)=0.5t+1$ 表示，求该点 P 在时间段 $[a, b]$ 内的平均速度 $v_{[a,b]}$.

解 由于 $v_{[a,b]}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(0.5b+1)-(0.5a+1)}{b-a}=0.5$，

所以点 P 在时间段 $[a, b]$ 内的平均速度为 0.5.

由例 1 可知，该动点在任何一个时间段 $[a, b]$ 内的平均速度都等于 0.5，是常数. 由此可见，该动点做匀速运动，且在任何时刻的速度都是 0.5.

画出例 1 中函数 $y=f(t)=0.5t+1$ 的图象，如图 1.1-1，则该图象是一条直线的一部分. 而平均速度 $v_{[a,b]}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 就是图象上两点 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$ 之间的线段 AB 的斜率，也是函数 $y=0.5t+1$ 的图象（直线）的斜率.

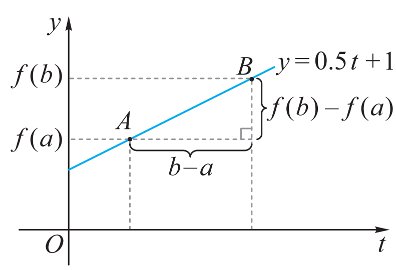


图 1.1-1

如果 $y=f(t)$ 不是一次函数，则其图象不是直线而是曲线．但图象上任意两点 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$ 之间的线段 AB 的斜率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 仍然等于动点在时间段 $[a, b]$ 内的平均速度 $v_{[a,b]}$，如图 1.1－2.

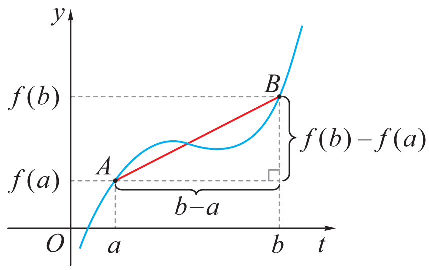


图 1.1－2

例 2 某物体做自由落体运动，其运动方程为 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 t 为下落的时间(单位：s)，g 为重力加速度，大小为 9.8 m/s^2．求它在时间段 $[1, 3]$ 内的平均速度.

解 物体在时间段 $[1, 3]$ 内的平均速度为

$$\frac{s(3)-s(1)}{3-1}=\frac{9g-g}{4}=2g=19.6(\mathrm{m/s}).$$

一般地，函数 $y=f(x)$ 的自变量有可能不是时刻，因变量有可能不表示位置，因而 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 就不一定是平均速度，但仍然反映了因变量 y 随自变量 x 变化的快慢和变化方向(增减)，因此我们把 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内的**平均变化率**.

例 3 如图 1.1－3，在正弦曲线 $f(x)=\sin x$ 上取两点 $A\left(\dfrac{\pi}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，$B(\pi, f(\pi))$，求直线 AB 的斜率.

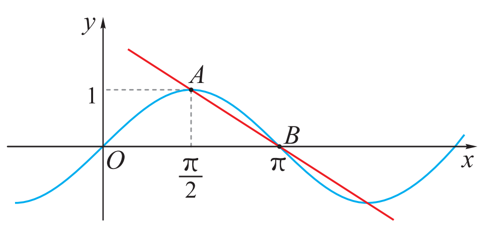


图 1.1－3

解 直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{f(\pi)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{\pi-\dfrac{\pi}{2}}=\frac{\sin\pi-\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}=\frac{0-1}{\dfrac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

在各种实际问题中，常常用函数的平均变化率对事物的发展过程进行评价.

例 4 充满气的气球近似为球体. 在给气球充气时，我们都知道，开始充气时气球膨胀较快，随后膨胀速度逐渐缓慢下来，气球膨胀实际上就是气球半径增大，表面积增大，体积增大. 试描述气球的半径相对于体积的平均变化率.

分析 由生活事实可知，随着气球的体积增大，半径的增长越来越缓慢，我们可以用平均变化率来描述这一过程.

解 设气球的半径为 r，体积为 V，则 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，所以 $r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

例如，当 $0.5\leqslant V\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{半径 } r \text{ 的平均变化率}&=\frac{r(1)-r(0.5)}{1-0.5}\\&=\frac{1}{0.5}\left[\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1.5}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\&\approx 0.26.\end{aligned}$$

当 $1\leqslant V\leqslant 1.5$ 时，

$$\begin{aligned}\text{半径 } r \text{ 的平均变化率}&=\frac{r(1.5)-r(1)}{1.5-1}\\&=\frac{1}{0.5}\left[\left(\frac{4.5}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\&\approx 0.18.\end{aligned}$$

由以上两个结果可以看出，气球体积由 0.5 增至 1，再由 1 增至 1.5，二者都增大了 0.5，但 r 的平均变化率却由 0.26 变成 0.18，变小了. 也就是说，随着气球体积的逐渐增大，它的半径的平均变化率逐渐变小.

例 5 已知函数 $f(x)=3x+2$，$g(x)=x^2$，分别计算它们在区间$[-2,\ -1]$，$[1,\ 5]$上的平均变化率.

解 函数 $f(x)=3x+2$ 在$[-2,\ -1]$上的平均变化率为

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{(-1)-(-2)}=\frac{[3\times(-1)+2]-[3\times(-2)+2]}{1}=3.$$

函数 $f(x)=3x+2$ 在$[1,\ 5]$上的平均变化率为

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=3.$$

函数 $g(x)=x^2$ 在$[-2,\ -1]$上的平均变化率为

$$\frac{g(-1)-g(-2)}{(-1)-(-2)}=-3.$$

函数 $g(x)=x^2$ 在$[1,\ 5]$上的平均变化率为

$$\frac{g(5)-g(1)}{5-1}=6.$$

练习

1. 小球在光滑斜面上向下滚动，从开始滚动算起时间 t 内所经过的距离为 $s(t)=at^2$，求小球在时间段 $[2, 2+h]$ 内的平均速度.

2. 在函数 $f(x)=2x^3-x-5$ 的图象上取两点 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$，求直线 AB 的斜率.

3. 求函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $\left[\dfrac{23}{12}, 2\right]$ 和 $\left[2, \dfrac{25}{12}\right]$ 上的平均变化率.

4. 已知某化学物质在溶液中反应时的浓度随时间变化而变化(温度不变)，下表记录了某温度下该化学物质在溶液中反应时不同时刻 t 的浓度 $c(t)$.

t	0	2	4	6	8
$c(t)$	0.080 0	0.057 0	0.040 8	0.029 5	0.021 0

试根据上表求下列时间段内的平均反应速率：

(1) $2\leqslant t\leqslant 6$；　(2) $2\leqslant t\leqslant 4$；　(3) $0\leqslant t\leqslant 2$.

1.1.2 瞬时变化率与导数

一 问题探索——求运动物体的瞬时速度

伽利略通过实验和推理发现了自由落体的运动定律：物体下落的距离 s 和所用的时间 t 的平方成正比. 如果距离单位用 m，时间单位用 s，实验测出它们之间近似地有以下函数关系：

$$s=s(t)=4.9t^2.$$

直接让物体从空中下落，它落得很快，不便观察测量. 伽利略是让小球从光滑的斜面上由静止滚下来，以便于观察测量.

伽利略发现，小球在斜面上滚下的距离 s(m)和所用的时间 t(s)之间，有函数关系 $s=s(t)=at^2$，这叫作小球的运动方程. 这里，a 是与斜面的坡度有关的常数.

伽利略看到，重力作用下在斜面上向下滚的小球，随着时间的推移越滚越快. 但是，他只知道如何计算一个时间段内的平均速度，却不知道如何计算小球在某一个时刻的速度，即瞬时速度.

百年后，牛顿给出了瞬时速度的概念和计算方法，回答了伽利略的问题. 下面问题的分析与解答展示了他的创意.

设小球在某个斜面上向下滚动的运动方程是 $s(t)=3t^2$.

要计算小球在 2 s 时运动的瞬时速度，不妨先看看它在 2 s 到 2.1 s 之间的平均速度，即在区间[2，2.1]上的平均速度：

$$\frac{s(2.1)-s(2)}{2.1-2}=\frac{13.23-12}{0.1}=12.3(\mathrm{m/s}).$$

同样，运用计算器可以分别求出更短时间区间内的平均速度(见下表).

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2，2.1]	0.1	12.3	[1.9，2]	0.1	11.7
[2，2.01]	0.01	12.03	[1.99，2]	0.01	11.97
[2，2.001]	0.001	12.003	[1.999，2]	0.001	11.997
[2，2.000 1]	0.000 1	12.000 3	[1.999 9，2]	0.000 1	11.999 7
[2，2.000 01]	0.000 01	12.000 03	[1.999 99，2]	0.000 01	11.999 97
…	…	…	…	…	…

从计算结果可以发现，当时间间隔越来越小时，无论 t 从小于 2 的一边，还是从大于 2 的一边趋近于 2，对应的平均速度都趋近于 12 m/s.

但是，时间间隔的缩小是一个无穷无尽的过程. 有限的几次计算，能得出 12 m/s 这个确定的结果吗?

用字母代替数，可以将这无穷多次运算一次完成.

设 d 是一个绝对值很小的非零数，在[2，$2+d$](或[$2+d$，2])这段时间内，小球运动的平均速度是

$$\frac{3(2+d)^2-3\times2^2}{d}=\frac{3(4d+d^2)}{d}$$
$$=(12+3d)(\mathrm{m/s}).$$

$d>0$ 时，$2+d$ 在 2 之后；$d<0$ 时，$2+d$ 在 2 之前.

当 d 越来越趋近于 0 时，这个平均速度确实越来越趋近于 12 m/s.

用数学语言来说，就是“时间段的长度趋近于 0 时，这段时间内的平均速度以 12 m/s 为极限”.

这个极限数值，就是小球在 2 s 时的瞬时速度.

若物体的运动方程为 $s=f(t)$，则物体在任意时刻 t 的**瞬时速度** $v(t)$，就是平均速度 $v(t, d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋近于 0 时的极限.

这个极限记为 $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$.

应注意的是，这里用“趋近于 0”来表述，是因为我们研究的是平均速度趋近于某一时刻的变化过程，在这个过程中，时间间隔 d 虽然越来越短，但始终不能为 0.

例 6 运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的. 设起跳 t s 后运动员相对水面的高度(单位：m)为

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

计算在 2 s 时运动员的瞬时速度.

解 运动员在$[2, 2+d]$(或$[2+d, 2]$)这个时间区间内的平均速度为

$$\frac{H(2+d)-H(2)}{d}=\frac{-4.9d^2-13.1d}{d}=-13.1-4.9d.$$

在平均速度表达式 $-13.1-4.9d$ 中，当 d 趋近于 0 时，$-13.1-4.9d$ 趋近于 -13.1.

因此，在 2 s 时运动员的瞬时速度是 -13.1 m/s.

如何表示例 6 中运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度?

下表是运用计算器求出的例 6 的一些平均速度：

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2, 2.1]	0.1	−13.59	[1.9, 2]	0.1	−12.61
[2, 2.01]	0.01	−13.149	[1.99, 2]	0.01	−13.051
[2, 2.001]	0.001	−13.104 9	[1.999, 2]	0.001	−13.0951
[2, 2.000 1]	0.000 1	−13.100 49	[1.999 9, 2]	0.000 1	−13.099 51
[2, 2.000 01]	0.000 01	−13.100 049	[1.999 99, 2]	0.000 01	−13.099 951
…	…	…	…	…	…

从上表可看出，当时间间隔趋近于 0 时，运动员的平均速度趋近于 -13.1 m/s，这与前面推导的结论是一致的.

练习

1. 已知自由落体运动的方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$（g 为常数），求：

（1）落体在 t_0 到 t_0+d 这段时间内的平均速度；

（2）落体在 $t=10$ s 这一时刻的瞬时速度.

2. 已知某物体走过的路程 s(m)与时间 t(s)之间的函数关系式为 $s=t^2-1$. 通过平均速度估计物体在下列各时刻的瞬时速度：

（1）$t=0$ s；　　（2）$t=2$ s；　　（3）$t=4$ s.

二　函数的瞬时变化率——导数

从平均速度出发，通过极限过程得到了瞬时速度. 这样思考和解决问题的方法，在数学史以及科学史上开启了新的篇章，即微积分的篇章.

回顾一下我们上节课思考和解决问题的过程：

（1）一个函数 $y=f(x)$，既可以描述运动过程，也可以描述其他过程或现象.

（2）函数值之差 $f(u+d)-f(u)$ 与对应的自变量之差 d 的比 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$，既可以是运动物体在某个时段内的平均速度，也可以是其他过程中某个量变化的平均值. 一般说来，它是函数 $f(u)$ 在区间 $[u,\ u+d]$（或 $[u+d,\ u]$）上的平均变化率.

（3）函数 $y=f(x)$ 作为运动方程时，若平均速度 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在区间长 d 趋近于 0 时趋近于一个极限值，则这个数值就叫作该运动物体在 $x=u$ 处的瞬时速度.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的平均变化率 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在 d 趋近于 0 时，有确定的极限值，则称这个值为该函数在 $x=u$ 处的**瞬时变化率**.

函数的瞬时变化率，数学上叫作函数的导数或微商.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间上有定义，在 d 趋近于 0 时，如果比值 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 趋近于一个确定的极限值，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**或**微商**，记作 $f'(x_0)$.

这时我们就说 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数存在，或者说 $f(x)$ 在点 x_0 处可导或可微.

上述定义可以简单地表述为：

$$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}\to f'(x_0)\ (d\to 0),$$

读作“d 趋近于 0 时，$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 趋近于 $f'(x_0)$”.

若 $y=f(x)$在定义区间中任一点的导数都存在，则 $f'(x)$(或 y')也是 x 的函数，我们把 $f'(x)$(或 y')叫作 $y=f(x)$的**导函数**或一阶导数.

既然导函数 $f'(x)$也是函数，若 $f'(x)$在定义区间中任一点处都可导，则它的导数叫作 $f(x)$的二阶导数，记作 $f''(x)$. 类似地，可以定义三阶导数 $f'''(x)$等等.

例 7 投石入水，水面会产生圆形波纹区，且圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大(如图 1.1-4). 计算：

(1) 半径 r 从 a 增大到 $a+d$ 时，圆面积 S 相对于 r 的平均变化率；

(2) 半径 $r=a$ 时，圆面积 S 相对于 r 的瞬时变化率.

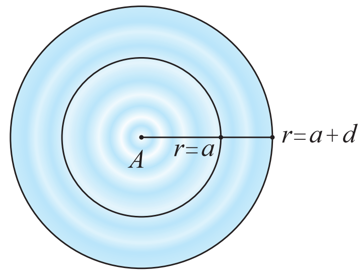


图 1.1-4

解 (1) 圆面积相对于半径 r 的平均变化率为

$$\frac{\pi[(a+d)^2-a^2]}{d}=\frac{\pi(2ad+d^2)}{d}=\pi(2a+d).$$

(2) 在表达式 $\pi(2a+d)$中，让 d 趋近于 0，得到圆面积 S 相对于 r 的瞬时变化率为 $2\pi a$，恰为此时圆的周长.

例 8 在初速度为零的匀加速直线运动中，路程 s 和时间 t 的关系为

$$s=s(t)=\frac{1}{2}at^2.$$

(1) 求 s 关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

(2) 求运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义.

解 (1) s 关于 t 的瞬时变化率就是函数 $s(t)=\frac{1}{2}at^2$ 的导数$s'(t)$. 按定义计算：

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{\frac{1}{2}a(t+d)^2-\frac{1}{2}at^2}{d}=\frac{a\left(td+\frac{1}{2}d^2\right)}{d}=at+\frac{1}{2}ad.$$

当 $d\to 0$ 时，$at+\frac{1}{2}ad\to at$，因此 $s'(t)=at$.

从物理学上看，s 关于 t 的瞬时变化率 at 就是运动物体的瞬时速度.

(2) 运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，实际上就是函数 $s'(t)=at$ 的导数 $s''(t)$. 按定义计算：

$$\frac{s'(t+d)-s'(t)}{d}=\frac{a(t+d)-at}{d}=\frac{ad}{d}=a.$$

当 $d\to 0$ 时，a 还是 a，所以 $s''(t)=a$.

从物理学上看，运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率就是运动物体的加速度.

练 习

1. 求函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率.

2. 将原油精炼为汽油、柴油等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加热. 如果在第 x h 时，原油的温度(单位:℃)为 $f(x)=x^2-7x+15(0\leqslant x\leqslant 8)$. 计算第 2 h 和第 6 h 时，原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

3. 有一边长为 10 cm 的正方形铁板(此时铁板温度为 0 ℃)，加热后铁板会膨胀，已知铁板温度为 t ℃$(t>0)$时，其边长膨胀为 $10(1+at)$ cm，其中 a 为常数，求铁板面积对温度 t 的瞬时膨胀率.

1.1.3 导数的几何意义

斜抛或平抛的物体，例如在运动过程中的炮弹，其速度方向时刻都在变化. 由物理常识可知，这时物体运动的轨迹是抛物线，而速度的方向线正是抛物线的切线.

怎样作出抛物线的切线呢?

如图 1.1-5，P，Q_1 是曲线 $y=f(x)$ 上的两个点，直线 PQ_1 是曲线的一条割线，PT 是曲线的一条切线. 让点 Q_1 沿曲线趋近于点 P，割线 PQ_1 如果趋近于一条直线，这条直线不就是曲线在点 P 处的切线吗?

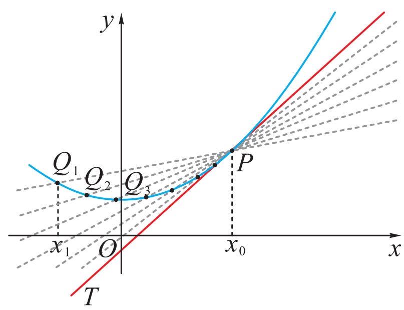


图 1.1-5

尝试利用计算机软件展示图 1.1-5 中 PQ_n 的动态变化过程.

由平面解析几何知识可知，割线 PQ_1 的斜率 $k_{PQ_1}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

在图 1.1-5 中，让点 Q_1 沿曲线趋于点 P，可以发现，割线 PQ_2 比 PQ_1 更逼近曲线 $y=f(x)$，PQ_3 比 PQ_2 更逼近曲线，…，当点 Q_n 沿曲线逼近于点 P 时，直线 PQ_n 最终成为在点 P 处最逼近曲线的切线 PT.

那么割线 $PQ_n(n=1, 2, 3, \cdots)$的斜率与切线 PT 的斜率 k 有什么关系呢?

割线 PQ_n 的斜率是

$$k_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0},$$

当点 Q_n 逼近点 P 时，k_n 趋近于切线 PT 的斜率．因此，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k，即 $k=f'(x_0)$．

我们看到，求切线斜率的思路和过程，与求瞬时速度的思路和过程，在数学上是完全一致的．当函数 $s=f(t)$ 表示运动方程时，其导数 $f'(t)$ 的物理意义是该运动物体在时刻 t 的瞬时速度；而当函数 $y=f(x)$ 表示曲线方程时，其导数 $f'(x)$ 的几何意义就是该曲线在点 $(x, f(x))$ 处的切线的斜率．

切线的本质，是在切点附近最接近曲线的直线．在这一点附近，比起用其他直线，用切线近似地代替曲线，误差最小．函数的表达式千变万化，但只要可导，就可以在一点附近用一次函数近似地代替，而使误差很小．这就是微积分中重要的思想方法——以直代曲．

中国古代数学家刘徽在运用"割圆术"求圆的周长时，在圆内作正多边形，用多边形的周长近似代替圆的周长，随着边数的增加，正多边形的周长也越来越接近于圆的周长，如图 1.1－6．刘徽通过此方法推导出了圆的周长公式，这是最早出现的"以直代曲"的例子．

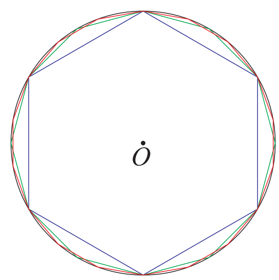


图 1.1－6

计算机画曲线时，有一种方法就是用许多线段代替曲线．如图 1.1－7，左边的曲线由 10 节线段组成，还看得出分段的痕迹，而右边的曲线用 100 节线段组成，看起来就是光滑的曲线了．

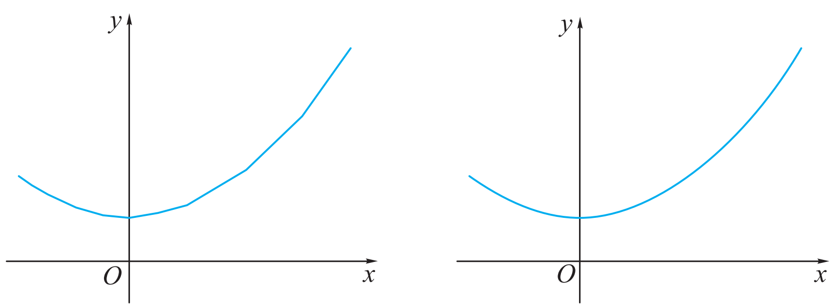


图 1.1－7

历史上，牛顿在研究瞬时速度的计算时发现了导数，而莱布尼茨则是在寻求切线作图方法时发现了导数，可谓殊途同归．

例 9 求函数 $f(x)=x^2-3x+c$ 的图象上点 $P(u, f(u))$ 处切线的斜率．

解 在曲线上另取一点 $Q(u+d, f(u+d))$．

因为
$$k_{PQ}=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$$
$$=2u-3+d,$$

在所求得的斜率表达式中，

当 $d \to 0$ 时，$k_{PQ} \to 2u-3$.

因此，所求切线的斜率 $k=2u-3$.

也可以借助图形（图 1.1－8）来帮助我们理解例 9 的解答.

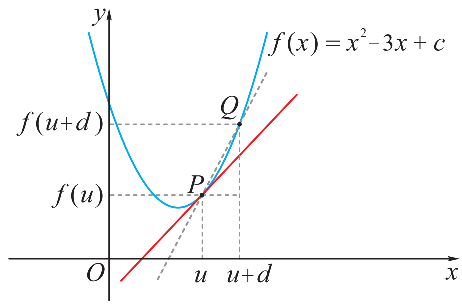


图 1.1－8

例 10 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ 处切线的斜率.

解 如图 1.1－9，在曲线上另取一点 $B\left(\frac{1}{2}+d, \sqrt{\frac{1}{2}+d}\right)$.

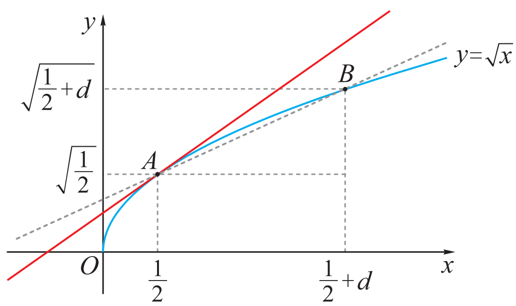


图 1.1－9

因为

$$k_{AB}=\frac{f\left(\frac{1}{2}+d\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{d}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+d}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{d}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+d}+\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

在所求得的斜率表达式中，

当 $d \to 0$ 时，$k_{AB} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此，所求切线的斜率 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 11 判断曲线 $y=x^3$ 是否存在斜率为 1 的切线？若存在，试求出切线方程；若不存在，试说明理由.

解 存在. 设曲线 $y=x^3$ 在点(x_0, x_0^3)处切线的斜率为 1.

因为

$$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}=\frac{(x_0+d)^3-x_0^3}{d}=3x_0^2+3x_0d+d^2,$$

所以，当 $d\to 0$ 时，$3x_0^2+3x_0d+d^2\to 3x_0^2$.

又切线的斜率为 1，

所以 $3x_0^2=1$，解得 $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以在点$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$处切线的斜率为 1.

由点斜式方程可得切线方程为 $y=x-\frac{2\sqrt{3}}{9}$和 $y=x+\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

练 习

1. 设 $P(x_0, y_0)$是曲线 $y=3-x^2$ 上一点，求曲线在点 P 处切线的斜率.

2. 判断曲线 $y=x+\frac{1}{x}$在点 $P(1, 2)$处是否有切线？若有，求出切线的斜率；若没有，试说明理由.

3. 求曲线 $y=x^2$ 过点 $P(1, 1)$的切线方程.

习题 1.1

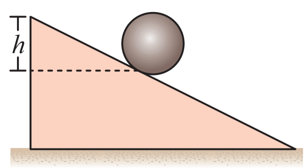
学而时习之

1. 已知函数 $f(x)=-x^2+1$，分别计算 $f(x)$在下列区间上的平均变化率.

(1) $[1, 1.01]$； (2) $[0.9, 1]$；

(3) $[0.99, 1]$； (4) $[1, 1.001]$.

2. 如图，一球沿某一斜面自由滚下，测得滚下的垂直距离 h(m)与运动时间 t(s)之间的函数关系为 $h=t^2$. 求 $t=4$ s 时此球在垂直方向的瞬时速度.



（第 2 题）

3. 通过平均变化率估计函数 $y=2x^2$ 在下列各点处的瞬时变化率：

（1）$x=1$；　　（2）$x=-1$；　　（3）$x=0$.

4. 求函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率.

5. 求下列曲线在给定点处切线的斜率.

（1）$y=3x-5$，点$(2, 1)$；

（2）$y=x^2+1$，点$(1, 2)$.

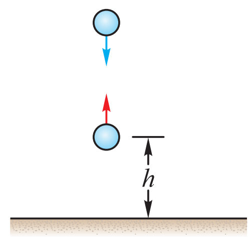
6. 计算抛物线 $y=x^2-4x+3$ 上任一点 $P(u, v)$ 处的切线的斜率，并求过点$(3, 0)$的切线方程.

温故而知新

7. （1）当圆的半径 r 变化时，圆面积 S 关于 r 的瞬时变化率有什么几何意义？

（2）当圆的直径 d 变化时，圆周长 C 关于 d 的瞬时变化率有什么几何意义？

8. 如图，根据竖直上抛物体的运动方程 $h(t)=h+vt-\dfrac{1}{2}gt^2$，计算该物体在时刻 t 的瞬时速度. 再应用机械能守恒定律，分析物体运动过程中动能和势能的相互转化，用数学方法计算出的瞬时速度是否和物理现象相符.



（第 8 题）

9. 已知曲线 $y=2x^2+1$，试在曲线上找一点 $P(x_0, y_0)$，使得曲线在点 P 处的切线平行于直线 $y=6x+1$.

10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，求：

（1）函数从 $x_1=1$ 到 $x_2=3$ 的平均变化率；

（2）函数在 $x=2$ 处的瞬时变化率；

（3）当 x 为何值时，函数在 x 处的瞬时变化率等于从 x_1 到 x_2 的平均变化率？

1.2 导数的运算

为了求运动物体的瞬时速度，要计算函数的导数.

为了作出曲线在一点处的切线，要计算函数的导数.

为了知道和评价事物变化的快慢和方向，要计算函数的导数.

在科学研究和工程技术活动中，大量问题的解决离不开导数的计算.

函数导数①的计算既然如此有用，如此重要，我们就应该熟悉一些常用函数的导数，掌握求导数的运算法则等，以便广泛应用.

1.2.1 几个基本函数的导数

一 常见幂函数的导数

让我们根据函数的导数的定义，先计算几个常见函数的导数.

(1) 最简单的函数是常数函数，即 $f(x)=c$.

这时有

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{c-c}{d}=\frac{0}{d}=0.$$

当 $d\to 0$ 时，0 当然还是 0，这表明 $f'(x)=(c)'=0$.

即
$$(c)'=0.$$

想一想，$(c)'=0$ 这个等式的实际意义是什么？

(2) 若 $f(x)=x$，则

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{(x+d)-x}{d}=\frac{d}{d}=1,$$

即
$$(x)'=1.$$

$(x)'=1$ 的几何意义是直线 $y=x$ 的斜率为 1.

(3) 若 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{(x+d)^2-x^2}{d}=\frac{2xd+d^2}{d}=2x+d.$$

当 $d\to 0$ 时，$2x+d\to 2x$，这表明

$$(x^2)'=2x.$$

① 一般地，在高中阶段研究与导数有关的问题中，涉及的函数都是可导函数.

（4）若 $f(x)=x^3$，则

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{(x+d)^3-x^3}{d}=\frac{3x^2d+3xd^2+d^3}{d}=3x^2+3xd+d^2.$$

当 $d\to 0$ 时，$3x^2+3xd+d^2\to 3x^2$，所以

$$(x^3)'=3x^2.$$

（5）若 $f(x)=\frac{1}{x}$，则

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{\frac{1}{x+d}-\frac{1}{x}}{d}=\frac{x-(x+d)}{x(x+d)d}=-\frac{1}{x(x+d)}.$$

当 $d\to 0$ 时，$-\frac{1}{x(x+d)}\to -\frac{1}{x^2}$，所以

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

（6）若 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\begin{aligned}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}&=\frac{\sqrt{x+d}-\sqrt{x}}{d}\\&=\frac{(\sqrt{x+d}-\sqrt{x})(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})d}\\&=\frac{(x+d)-x}{(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})d}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+d}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

当 $d\to 0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x+d}+\sqrt{x}}\to \frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

我们将上述(1)～(6)的结论总结如下，以后可以直接使用.

（1）常数函数导数为 0：$(c)'=0$；

（2）恒等函数导数为 1：$(x)'=1$；

（3）$(x^2)'=2x$；

（4）$(x^3)'=3x^2$；

（5）$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$；

（6）$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

如果你发现了这些公式的共同点 $(x^k)'=kx^{k-1}$ $\left(k=1，2，3，-1，\frac{1}{2}\right)$，就很容易记住它们了.

例 1 不饱和食盐溶液蒸发到一定程度时，会慢慢析出氯化钠晶体. 已知氯化钠晶体为立方体形状，当立方体的棱长 x 变化时，其体积关于 x 的变化率是立方体表面积的多少?

解 立方体的体积 $V(x)=x^3$，表面积 $S(x)=6x^2$.

因为 $V'(x)=(x^3)'=3x^2$，

所以其体积关于 x 的变化率为 $3x^2$，是立方体表面积的$\frac{1}{2}$.

例 2 写出过点 $A(-4, 2)$，并且和曲线 $xy-1=0$ 相切的直线方程.

解 由于点 A 不在曲线 $xy-1=0$ 上，

所以可设所求的切线和曲线切于点 $B(u, v)$.

又曲线的方程可写成函数 $y=\frac{1}{x}$，则 $y'=-\frac{1}{x^2}$.

故曲线在点 B 处切线的斜率 $k=-\frac{1}{u^2}$.

所以曲线在点 B 处的切线方程为

$$y-v=-\frac{1}{u^2}(x-u).$$

由题意可得，

$$2-v=-\frac{1}{u^2}(-4-u). \qquad ①$$

又点 B 在曲线 $xy-1=0$ 上，

所以 $v=\frac{1}{u}$，

于是，$\begin{cases} u=-1, \\ v=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=2, \\ v=\frac{1}{2}. \end{cases}$

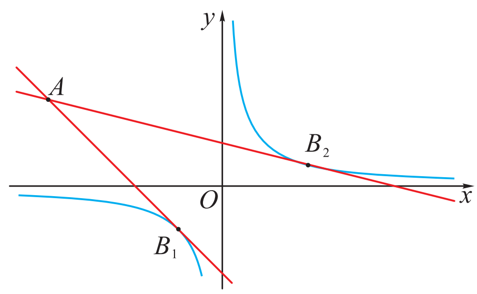


图 1.2－1

因此，过点 A 有两条切线，方程分别为 $y+1=-(x+1)$ 和 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$，即分别为 $x+y+2=0$ 和 $x+4y-4=0$，如图 1.2－1 所示.

练习

1. 正方形的边长 x 变化时，其面积关于 x 的变化率是正方形周长的多少?
2. 求曲线$\sqrt{x}-y=0$ 在点$(4, 2)$处的切线方程.
3. 求曲线 $y=\frac{1}{x}$在点$(-1, -1)$处的切线方程.

二 一些基本初等函数的导数

我们已经知道了 x，x^2，x^3，$\dfrac{1}{x}$和$\sqrt{x}$这几个幂函数的导数，那么，一般的幂函数的导数如何计算呢？

我们学过指数函数、对数函数和三角函数，它们的导数又如何计算呢？

前人早已为我们解决了这些函数的求导问题，将来你学习了更多的数学知识，也会掌握这些函数求导的原理．现在，为便于应用，我们把这些基本初等函数的求导公式介绍如下：

(1) $(c)'=0$；

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\neq 0)$；

(3) $(e^x)'=e^x$；

(4) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,\ a\neq 1)$；

(5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(6) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,\ a\neq 1)$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；

(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

公式对函数定义域内的自变量 x 有效，其中公式(7)(8)(9)中的自变量 x 的单位是弧度.

例 3 用基本初等函数的导数公式计算：

(1) $(\sqrt[3]{x^2})'$；　(2) $(\log_2 x)'$；　(3) $(2^x)'$；　(4) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$.

解　(1) $(\sqrt[3]{x^2})'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.　(2) $(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$.

(3) $(2^x)'=2^x\ln 2$.　(4) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

例 4 (1) 求曲线 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2) 利用切线的斜率求 $\sin 1°$的近似值.

解　(1) $y'=(\sin x)'=\cos x$.

当 $x=0$ 时，切线的斜率 $k=y'=\cos 0=1$.

又当 $x=0$ 时，$y=\sin 0=0$，

故所求切线方程为 $y=x$，如图 1.2－2.

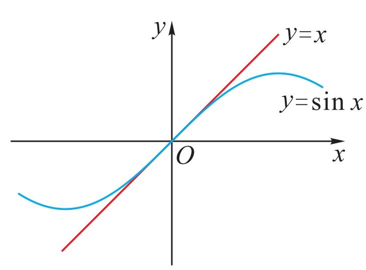


图 1.2－2

（2）记 $f(x)=\sin x$.

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sin x}{x}\to f'(0)=\cos 0=1$.

这说明：当$|x|$很小时，有近似公式 $\sin x\approx x$.

因此，$\quad \sin 1^\circ=\sin\dfrac{\pi}{180}\approx\dfrac{\pi}{180}\approx 0.017\ 45$.

观察图 1.2-2 可以发现，曲线 $y=\sin x$ 在原点 O 附近与切线 $y=x$ 非常接近，也说明 $\sin x\approx x$. 注意：x 是弧度而不是角度.

练习

1. 求下列函数在指定点处的导数.

（1）$f(x)=x^\pi$，$x=1$；（2）$f(x)=\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$.

2.（1）求曲线 $y=\sin x$ 在点 $A\left(\dfrac{\pi}{2}，1\right)$，$B(\pi，0)$处的切线方程.

（2）曲线 $y=\cos x$ 在哪些点处切线的斜率为 1？在哪些点处的切线平行于 x 轴？

1.2.2 函数的和差积商求导法则

我们已经知道了几个基本初等函数的导数. 从这几个函数出发，经过加、减、乘、除，可以得到更多的函数. 相应地，新得到的这些函数的导数，能否通过对基本初等函数的导数进行加、减、乘、除而得到呢？

一 函数和差积的求导法则

（1）前面计算过函数 $y=x^2$ 的导数，类似地，我们由导数的定义可以计算出函数 $y=3x^2$ 的导数，并发现后者的导数恰好是前者导数的 3 倍. 这里是不是有更一般的规律呢？$F(x)=cf(x)$的导数是不是 $f'(x)$和实数 c 的乘积呢？

由于$\dfrac{cf(x+d)-cf(x)}{d}=c\cdot\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$，且当 $d\to 0$ 时，$\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}\to f'(x)$，因而 $c\cdot\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}\to cf'(x)$.

由此可见，函数常数倍的导数，等于常数乘函数的导数，即

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

（2）前面计算过函数 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 在 $t=2$ 处的导数，其结果是否等于$-4.9t^2$，$6.5t$ 和 10 这三项在 $t=2$ 处的导数之和呢？你发现了什么？

一般地，和函数 $u(x)=f(x)+g(x)$ 的导数，等于两函数的导数和.

这是因为：

$$\frac{u(x+d)-u(x)}{d}=\frac{f(x+d)+g(x+d)-(f(x)+g(x))}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)-f(x)}{d}+\frac{g(x+d)-g(x)}{d},$$

当 $d\to 0$ 时，$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\to f'(x)$，$\frac{g(x+d)-g(x)}{d}\to g'(x)$，

于是，$(f(x)+g(x))'\to f'(x)+g'(x)$.

即两函数之和的求导法则为

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

类似地，两函数之差的求导法则为

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x).$$

例 5 求曲线 $f(x)=2x^3-x^2-3x+1$ 在与直线 $x=1$ 相交处的切线方程.

解 由基本初等函数的导数公式及运算法则可得

$$f'(x)=6x^2-2x-3.$$

将 $x=1$ 代入得

$$f'(1)=6-2-3=1.$$

所以该曲线在与直线 $x=1$ 相交处切线的斜率 $k=1$.

由 $f(1)=-1$ 可知，切线方程为 $y-(-1)=x-1$，

即
$$y=x-2.$$

（3）设 $F(x)=f(x)g(x)$，则

$$\frac{F(x+d)-F(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)+f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)}{d}+\frac{f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=f(x+d)\cdot\frac{g(x+d)-g(x)}{d}+g(x)\cdot\frac{f(x+d)-f(x)}{d}.$$

当 $d\to 0$ 时，

$$f(x+d)\to f(x),\quad \frac{g(x+d)-g(x)}{d}\to g'(x),\quad \frac{f(x+d)-f(x)}{d}\to f'(x),$$

所以
$$F'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

即函数乘积的求导法则为

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

例 6 求函数 $f(x)=x^3\sin x$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^3\sin x)'\\&=(x^3)'\sin x+x^3(\sin x)'\\&=3x^2\sin x+x^3\cos x.\end{aligned}$$

练 习

1. 求曲线 $f(x)=3x^3-3x^2+x-2$ 平行于 x 轴的切线方程.

2. 求下列函数的导数：

(1) $S(t)=3\sin t-6t+100$；　　(2) $f(x)=5+3x-2^x$；

(3) $g(x)=x^4\cos x$.

二　函数的倒数与商的求导法则

(4) 设 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}\,(f(x)\neq 0)$，则

$$\frac{F(x+d)-F(x)}{d}=\frac{\dfrac{1}{f(x+d)}-\dfrac{1}{f(x)}}{d}$$
$$=\frac{1}{f(x+d)f(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x+d)}{d}.$$

当 $d\to 0$ 时，$\dfrac{1}{f(x+d)f(x)}\to\dfrac{1}{(f(x))^2}$，$\dfrac{f(x)-f(x+d)}{d}\to -f'(x)$，

所以
$$F'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

即函数的倒数的求导法则为

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

例 7 求函数 $y=\dfrac{1}{\cos x}$ 的导数.

解 $y'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

（5）把前面的（3）、（4）结合起来，得到两函数之商的求导法则为

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}.$$

例 8 求下列函数的导数.

（1）$y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$；　　（2）$y=\dfrac{x+1}{x-1}$；

（3）$y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

解 （1）$y'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

结果和前面公式表中 $\tan x$ 的导数一致.

（2）$y'=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'=\dfrac{(x-1)(x+1)'-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

（3）$y'=\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\dfrac{(e^x-1)(e^x+1)'-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\dfrac{(e^x-1)e^x-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

练习

1. 求下列函数的导数：

（1）$g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$；

（3）$W(u)=\dfrac{u^2}{\ln u}$.

2. 求 $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$ 的导数.

3. 求曲线 $y=\dfrac{x}{\sin x}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

1.2.3 简单复合函数的求导

我们已经会求 $\sin x$ 的导数，你会求函数 $y=\sin(2x+1)$ 的导数吗？

我们先来分析这个函数的结构特点．可以发现，若设 $u=2x+1$，则 $y=\sin u$．函数 $y=\sin(2x+1)$ 可看作是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x+1$"复合"得到的，即 y 可以通过中间变量 u 表示为自变量 x 的函数．

如果把 y 与 u 的关系记作 $y=f(u)$，u 和 x 的关系记作 $u=g(x)$，那么这个"复合"的过程可以表示为

$$y=f(u)=f(g(x))=\sin(2x+1).$$

一般地，设 $y=f(u)$ 是关于 u 的函数，$u=g(x)$ 是关于 x 的函数，则 $y=f(g(x))$ 是关于 x 的函数，称为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**．

我们来考虑复合函数 $y=F(x)=f(g(x))$ 如何对 x 求导．

记 $u=g(x)$，则

$$\begin{aligned}\frac{F(x+d)-F(x)}{d}&=\frac{f(g(x+d))-f(g(x))}{d}\\&=\frac{f(u+h)-f(u)}{d}\\&=\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\cdot\frac{h}{d}，其中 h=g(x+d)-g(x).\end{aligned}$$

令 $d\to 0$，则 $h\to 0$，上式中

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\to f'(u)\ (f'(u)是 y 对 u 的导数，记作 y'_u)，$$

$$\frac{h}{d}=\frac{g(x+d)-g(x)}{d}\to g'(x)\ (g'(x)是 u 对 x 的导数，记作 u'_x)，$$

于是得

$$F'(x)=f'(u)\cdot g'(x).$$

也可以记作

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x，$$

即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积．

具体到函数 $y=\sin(2x+1)$ 的求导，设 $u=2x+1$，

则 $y'_u=(\sin u)'=\cos u$，$u'_x=(2x+1)'=2$，

于是 $y'_x=\cos(2x+1)\cdot 2=2\cos(2x+1)$．

又如，$y=f(ax+b)$，设 $u=ax+b$，

则 $y'_x=y'_u\cdot(ax+b)'=y'_u\cdot a$．

例 9 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+3)^{10}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{2x+1}$；

(3) $y=\ln(3x-2)$.

解 (1) 函数 $y=(2x+3)^{10}$ 可以看作 $y=u^{10}$ 与 $u=2x+3$ 复合而成，根据复合函数求导法则有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^{10})'\cdot(2x+3)'=10u^9\cdot 2=20(2x+3)^9.$$

(2) 函数 $y=\mathrm{e}^{2x+1}$ 可以看作 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=2x+1$ 复合而成，根据复合函数求导法则有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\mathrm{e}^u)'\cdot(2x+1)'=\mathrm{e}^u\cdot 2=2\mathrm{e}^{2x+1}.$$

(3) 函数 $y=\ln(3x-2)$ 可以看作 $y=\ln u$ 与 $u=3x-2$ 复合而成，根据复合函数求导法则有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(3x-2)'=\frac{1}{u}\cdot 3=\frac{3}{3x-2}\left(x>\frac{2}{3}\right).$$

注意：如果函数表达式中有不止一个字母变量，求导时通常用下标指明是对哪个字母变量求导．例如，$(u^2+t)'_u=2u$，而 $(u^2+t)'_t=1$.

练习

求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $g(x)=(8-3x)^7$；

(3) $p(x)=5\cos(2x-3)$；　　(4) $w(x)=\ln(5x+6)^2$.

习题 1.2

学而时习之

1. 某质点的运动方程是 $s=t^3$，求该质点在 $t=3$ 时的瞬时速度.
2. 求过点 $P(3,5)$ 且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程.
3. 曲线 $y=x^4$ 在点 P 处切线的斜率为 4，求点 P 的坐标及切线方程.
4. 写出过点 $A(-5,3)$ 并且和曲线 $xy=1$ 相切的两条直线的方程.
5. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=3-2x$；　　(2) $H(t)=-2t^2+6t-5$；

(3) $g(x)=3x^3-\dfrac{1}{4x}$；

(4) $F(u)=u-\sqrt{u}$；

(5) $u(x)=3e^x+2\tan x$；

(6) $f(x)=\log_2 x+5^x$.

6. 求下列函数在指定点处的导数.

(1) $f(x)=2^x$，$x=0$；

(2) $g(x)=\lg x$，$x=1$.

7. 计算：

(1) $(x^3\ln x)'$；

(2) $(e^x\sin x)'$；

(3) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'$；

(4) $\left(\dfrac{\cos x}{e^x}\right)'$.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\cos(3x+4)$；

(2) $y=4^{2x-1}$；

(3) $y=(2x-1)^5$；

(4) $y=\log_3(5x-1)$.

9. 曲线 $y=x^2+1$ 在点(x_0, y_0)处的切线 l 平行于直线 $y=2x+1$.

(1) 求切点坐标(x_0, y_0)；

(2) 求切线 l 的方程.

温故而知新

10. (1) 求曲线 $y=e^x$ 在点 $A(0, 1)$处的切线方程.

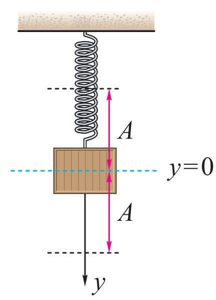
(2) 利用(1)中的切线方程求 $e^{0.0001}$ 的近似值.

11. 已知 $P(u, v)$是曲线$(1+x^2)y-x=0$ 上的一点. 写出该曲线在点 P 处的切线方程，并分别求出切线斜率为 1 和切线平行于 x 轴时切点 P 的坐标.

12. 如图，一个物体挂在铅直的弹簧下面，已知其位移 $y=A\sin\omega t$，其中 t 为时间，A 为振幅，ω 为常数.

(1) 求物体的速度与加速度关于时间的函数；

(2) 试讨论物体的位移、速度与加速度的关系.



(第 12 题)

13. 已知偶函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的图象过点 $P(0, 1)$，且在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-2$，求函数 $f(x)$的解析式.

数学实验

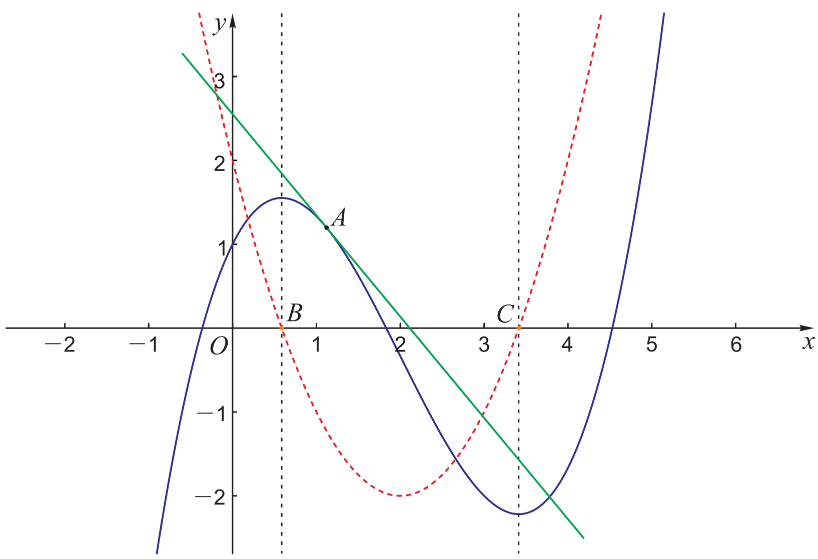
曲线的切线与函数的导数

访问网络画板，点击“开始作图”按钮打开一个空白页面，在下方第八组工具栏中点击“自定义坐标系”，再在该工具栏中选择“ f(x) y=f(x) ”，在弹出的对话框中输入“x ^ 3/3－2 ∗ x ^ 2＋2 ∗ x＋1”，点击“确定”，绘出函数 $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+2x+1$ 的图象.

点击左侧的点工具按钮“ • ”，在函数图象上作出半自由点 A，切换到箭头工具，同时选中点 A 和曲线，在下方第三组工具栏中选择切线工具“ 切线|公切线 ”作出曲线在点 A 处的切线.

利用同样的方法作出原函数的导函数 $y=x^2-4x+2$ 的图象，通过右键修改属性，调整抛物线的线型为虚线.

点击抛物线和 x 轴交点处，分别作出抛物线和 x 轴的两个交点 B，C，同时选中点 B 和 y 轴，在下方第三组工具栏中选择平行线工具“ 平行线 ”，作出过交点 B 且平行于 y 轴的直线，同理作出过 C 点且与 y 轴平行的直线(如图所示).



两条平行的直线分别把两条曲线分成三段，仔细观察，原函数图象的三段有何特点？其导函数图象的三段有何特点？拖动点 A，观察原函数图象在点 A 处切线的变化，你能发现它们之间的联系吗？

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

函数的单调性是函数的重要性质之一.

以往我们是从单调性的定义出发去判断一个函数在区间(a, b)上的单调性，但当函数的解析式较复杂时，对于$x_1 \neq x_2$，要想对$f(x_1)$与$f(x_2)$的大小关系或对平均变化率$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$的正负作出一个明确的判断，不是一件容易的事情. 现在，导数给我们提供了一种解决此类问题的有效方法.

我们先通过例子来观察函数的单调性与函数的导数之间的关系.

在图 1.3－1 中，画出了函数$f(x)=x^2$和它的导函数$f'(x)=2x$的图象.

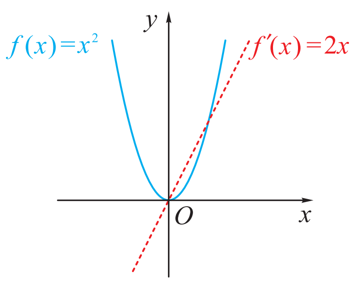


图 1.3－1

观察图 1.3－1 可以发现：在y轴的右边，$f(x)=x^2$单调递增，其导数为正；在y轴的左边，$f(x)=x^2$单调递减，其导数为负.

函数$f(x)=\sin x$和它的导函数$f'(x)=\cos x$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$上的图象如图 1.3－2 所示.

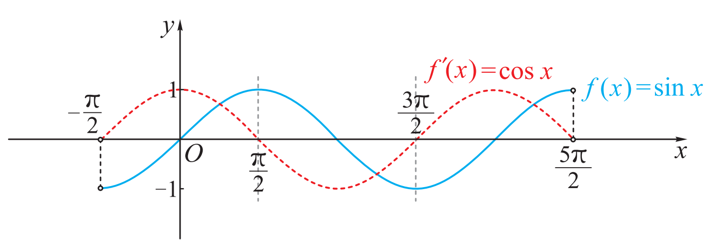


图 1.3－2

如图 1.3－2，过这段导函数曲线和 x 轴的两个交点分别作平行于 y 轴的直线，则这两条直线把 $f(x)=\sin x$ 及其导函数的图象分成了左、中、右三部分．分别观察每部分中的两段曲线，可以发现函数和它的导函数的性质之间有如下关联：

左边，函数单调递增，导数为正；

中间，函数单调递减，导数为负；

右边，函数单调递增，导数还是为正．

是不是函数的单调性和它的导数的正负之间有确定的联系呢？

让我们观察更多的例子．

图 1.3－3(1)是函数 $f(x)=e^x-x$ 和它的导函数 $f'(x)=e^x-1$ 的图象．

图 1.3－3(2)是函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-2x^2+2x+1$ 和它的导函数 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-4x+2$ 的图象．

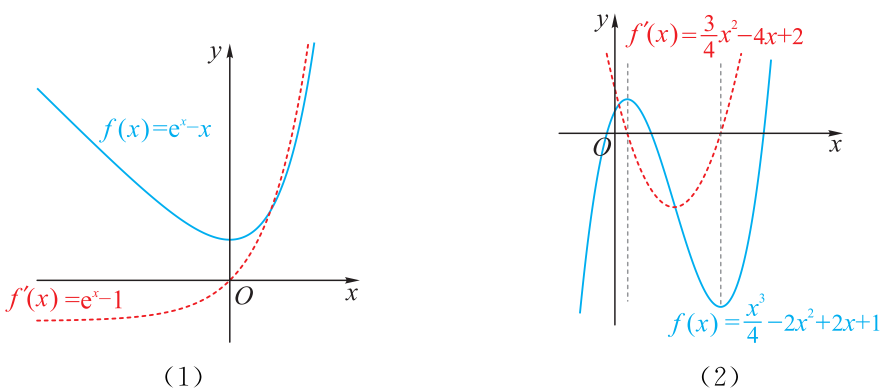


图 1.3－3

通过对这些例子的观察，我们发现，对于一般函数，其单调性与其导数的正负之间有如下法则：

若在区间(a, b)内，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$在此区间内单调递增，(a, b)为 $f(x)$的单调递增区间；

若在区间(a, b)内，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$在此区间内单调递减，(a, b)为 $f(x)$的单调递减区间．

直观地看，导数为正表明切线的斜率为正，这是增函数曲线的几何特征．从代数方面看，导数是平均变化率的极限，导数为正，说明在很小的区间上平均变化率为正．任意的有限区间可以分成很多小区间，每个小区间上的平均变化率为正，合起来的平均变化率也为正，因而递增．

例 1 用导数研究二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的单调性.

解 对该二次函数求导得 $f'(x)=2ax+b$.

令 $f'(x)=2ax+b>0$，则当 $a>0$ 时，$x>-\dfrac{b}{2a}$，当 $a<0$ 时，$x<-\dfrac{b}{2a}$.

令 $f'(x)=2ax+b<0$，则当 $a>0$ 时，$x<-\dfrac{b}{2a}$，当 $a<0$ 时，$x>-\dfrac{b}{2a}$.

故 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$上单调递减，在$\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$上单调递增；

$a<0$ 时，$f(x)$在$\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$上单调递减.

虽然二次函数的情形比较简单，不用导数也能说清楚函数单调性，但对于许多其他情形，导数的优势就很明显了.

例 2 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$；　　(2) $f(x)=x+\mathrm{e}^x$.

解 (1) 由题意可知，函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

对 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$求导得 $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$.

令 $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-2$.

故函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$的单调递增区间为$(-\infty,\ -2)$和$(2,\ +\infty)$.

令 $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}<0$，解得$-2<x<0$ 或 $0<x<2$.

故函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$的单调递减区间为$(-2,\ 0)$和$(0,\ 2)$.

(2) 由题意可知，函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$.

对 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$ 求导得 $f'(x)=1+\mathrm{e}^x$.

因为 $\mathrm{e}^x>0$ 恒成立，所以 $f'(x)=1+\mathrm{e}^x>0$.

故函数 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上单调递增.

导数的正负对应于函数的增减，导数的绝对值大小和函数的性态又有什么关系呢?

位移对时间的导数是瞬时速度. 瞬时速度的绝对值大说明跑得快，绝对值小说明跑得慢. 函数的导数就是函数值关于自变量的瞬时变化率. 变化率的绝对值大说明函数值变得快，绝对值小说明函数值变得慢.

从函数的图象上来看，导数是切线的斜率. 斜率的绝对值大说明切线陡，曲线也就陡；斜率的绝对值小说明切线较平，曲线也就平缓一些.

例 3 如图 1.3－4，圆 C 和直角三角形 AOB 的两边相切，射线 OP 从 OA 处开始，绕点 O 匀速旋转(到 OB 处为止)时，所扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致为(　　)

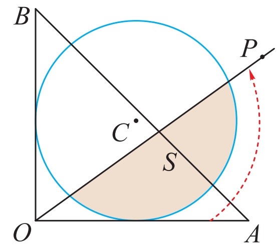
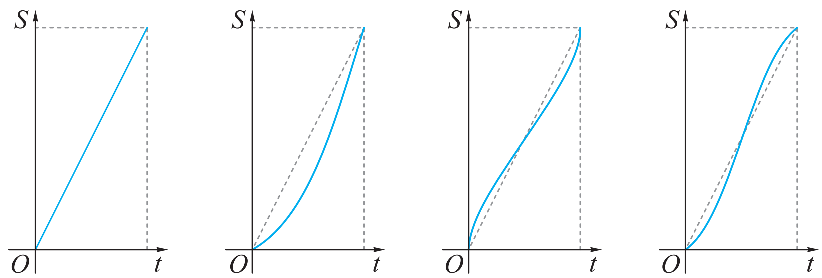


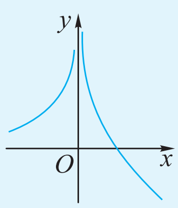
图 1.3－4

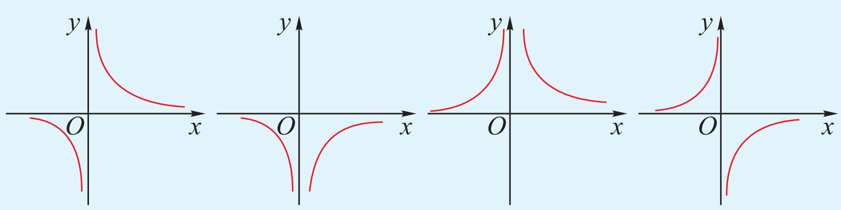

(A)　(B)　(C)　(D)

解　当直线匀速转动时，若某时刻直线被圆所截得的弦较长，则 S 的瞬时变化率就较大，此处的导数也较大，图象中这里的切线较陡，曲线就较陡. 所以曲线开始由平缓变陡；待过程进行到一半时，截得的弦最大，曲线最陡；以后弦又渐渐变短，曲线由陡变缓. 只有选项(D)中的图象具有上述特点，所以选(D).

练习

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则 $y=f'(x)$ 的图象可能是(　　)


(第 1 题)


(A)　(B)　(C)　(D)

2. 用导数判断下列函数的单调性，并求出单调区间.

(1) $f(x)=3-2x$；　(2) $f(x)=x^2-2x-3$；

(3) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}$；　(4) $f(x)=\sin x-x$，$x\in(0,\pi)$.

3. 已知 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足下列条件：

(1)当 $1<x<4$ 时，$f'(x)>0$；

(2)当 $x>4$ 或 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；

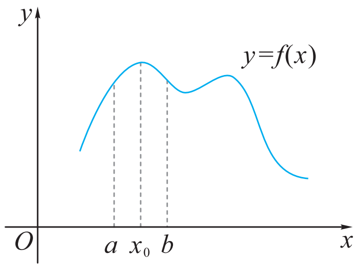
(3)当 $x=4$ 或 $x=1$ 时，$f'(x)=0$.

试根据上述条件画出函数 $y=f(x)$ 图象的大致形状.

1.3.2 函数的极值与导数

除函数的单调性外，一个函数由增到减(或由减到增)的转折点也很重要.

如图 1.3-5(1)，设函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，x_0是区间(a, b)内的一个点，若点 x_0 附近的函数值都小于或等于 $f(x_0)$(即 $f(x)\leqslant f(x_0)$)，就说 $f(x_0)$是函数$y=f(x)$的一个**极大值**，此时 x_0称为 $f(x)$的一个**极大值点**.



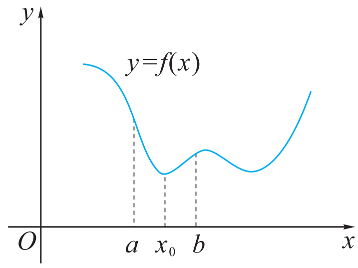


图 1.3-5

如图 1.3-5(2)，设函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，x_0是区间(a, b)内的一个点，若点 x_0 附近的函数值都大于或等于 $f(x_0)$(即 $f(x)\geqslant f(x_0)$)，就说 $f(x_0)$是函数$y=f(x)$的一个**极小值**，此时 x_0称为 $f(x)$的一个**极小值点**.

极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**.

简言之，极值是局部开区间上的最值.

极值是函数在某些区间内的局部性质，如图 1.3-6，x_1，x_3，x_5 都是函数 $y=f(x)$的极大值点，x_2，x_4 都是函数 $y=f(x)$的极小值点. 从图 1.3-6 中还可以看出，函数的某些极大值有时比其他极大值小，如 $f(x_1)<f(x_3)$，甚至可能比一些极小值还小，如 $f(x_1)<f(x_4)$.

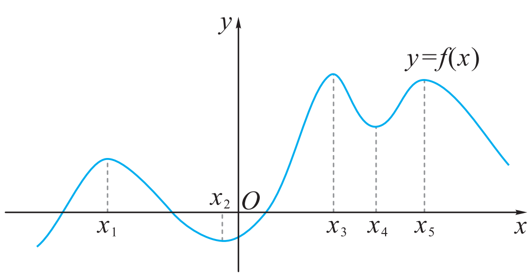


图 1.3-6

在 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 五个极值点附近，$y=f(x)$的导数的符号有什么规律?

如何求一个函数的极值呢? 观察上面诸图，可以得到以下结论：

若 $y=f(x)$在$(a, x_0]$上单调递增，在$[x_0, b)$上单调递减，则 x_0是极大值点，$f(x_0)$是极大值；

若 $y=f(x)$在$(a, x_0]$上单调递减，在$[x_0, b)$上单调递增，则 x_0是极小值点，$f(x_0)$是极小值.

由导数的正负可以判断函数的增减．下面我们研究如何利用导数求函数的极值和极值点．

观察图 1.3－1 到图 1.3－3，这些函数的极值点是导函数的什么点？原来都是导函数的零点．这是不是一般法则呢？

观察图 1.3－7，我们可以看到，如果函数在某个区间内有极大值，将一条平行于 x 轴的直线从曲线的上方渐渐向下平移，直到碰上曲线（在这个区间上的一段）就停下来．这样，直线停下来时的高度，也就是曲线在这个区间内所达到的最高点，这时这条直线就是曲线在这个局部最高点处的切线．

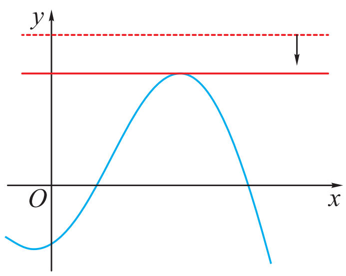


图 1.3－7

也就是说，如果函数曲线在极值点处有切线，则该切线应和 x 轴平行（或重合）．换句话说，**函数在极值点的导数为 0**．

反过来，导函数的零点是否一定是函数的极值点呢？

例如，函数 $f(x)=x^3$ 的导函数 $f'(x)=3x^2$ 有零点，但 $f(x)=x^3$ 是增函数，没有极值点，如图 1.3－8．可见，**导函数的零点可能不是函数的极值点**．

也就是说，若 $f'(c)$ 存在，则 $f'(c)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极值的必要条件，但不是充分条件．

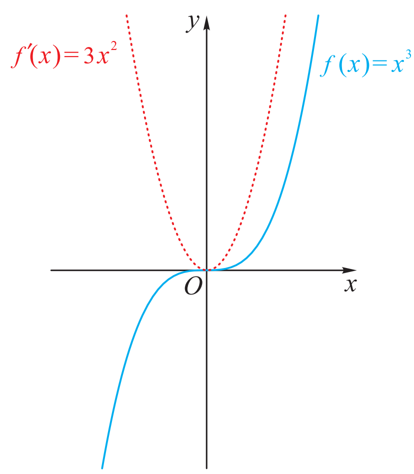


图 1.3－8

若 $f'(c)=0$，则 $x=c$ 叫作函数 $f(x)$ 的**驻点**．

驻点，就是驻扎下来稍事休息之点．至于休息之后继续前进还是后退，是另一回事．

如果一个函数的导数在驻点的两侧变号，则该驻点就是此函数的一个极值点．

因此，如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间内有导数，就可按下列步骤求它的极值：

（1）求导数 $f'(x)$．

（2）求 $f(x)$ 的驻点，即求方程 $f'(x)=0$ 的解．

（3）对于方程 $f'(x)=0$ 的每一个解 x_0，分析 $f'(x)$ 在 x_0 左右两侧的符号（即讨

论 $f(x)$的单调性)，确定极值点：

①若 $f'(x)$在 x_0两侧的符号为“左正右负”，则 x_0为极大值点；

②若 $f'(x)$在 x_0两侧的符号为“左负右正”，则 x_0为极小值点.

(4) 求出各极值点的函数值，就得到函数 $y=f(x)$的全部极值.

例 4 试求下列函数的驻点，判断函数的导数在驻点左右两侧附近的符号，并判断驻点是否为极值点.

(1) $f(x)=x^4$； (2) $f(x)=x^5$.

解 (1) 对 $f(x)$求导得 $f'(x)=4x^3$.

令 $f'(x)=0$，即 $4x^3=0$，解得 $x=0$，它是此函数的唯一驻点.

当 $x<0$ 时 $f'(x)=4x^3<0$，此时函数 $f(x)$单调递减；

当 $x>0$ 时 $f'(x)=4x^3>0$，此时函数 $f(x)$单调递增.

因此 $x=0$ 为此函数的极小值点.

(2) 对 $f(x)$求导得 $f'(x)=5x^4$.

令 $f'(x)=0$，即 $5x^4=0$，解得 $x=0$，它是此函数的唯一驻点.

当 $x<0$ 时 $f'(x)=5x^4>0$，此时函数 $f(x)$单调递增；

当 $x>0$ 时仍有 $f'(x)=5x^4>0$，此时函数 $f(x)$也单调递增.

因此 $x=0$ 不是此函数的极值点.

例 5 求函数 $g(x)=x^2(3-x)$的极大值和极小值.

解 求导得 $g'(x)=6x-3x^2$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 变化时，$g'(x)$和 $g(x)$的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	递减↘	0	递增↗	4	递减↘

故 $g(x)$有极大值点 $x=2$，对应的极大值为 $g(2)=4$；

$g(x)$有极小值点 $x=0$，对应的极小值为 $g(0)=0$.

上述结论也可从 $g(x)=x^2(3-x)$的图象(图 1.3 - 9)得到直观验证.

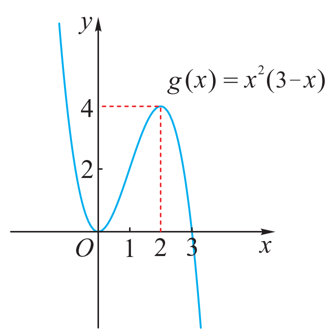


图 1.3 - 9

练习

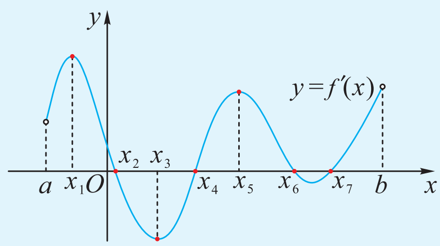
1. 求下列函数的驻点，并判断其是否为极值点．若是，求出对应的极值．

（1）$f(x)=2x^2-6x+1$；　　（2）$g(x)=\cos x+\dfrac{x}{2}(x\in[0,\ 2\pi])$；

（3）$f(x)=2x^3+3x^2+6x-7$；　　（4）$h(x)=x^2\mathrm{e}^x$．

2. 已知函数 $f(x)=x^3+3mx^2+nx+m^2$ 在 $x=-1$ 处有极值 0，求 m，n 的值．

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(a,\ b)$，且其导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，试找出函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内的极大值点和极小值点．



（第 3 题）

多知道一点

用二阶导数判断极值

能不能用一个简单的条件来判断导函数的图象是穿过 x 轴，还是碰一下就回头？如果碰一下就回头，那触碰点就成了导函数的极值点了，导函数的导函数在这一点就应当为 0．反过来，如果导函数的导函数在此点处非零，此点就不是导函数的极值点，导函数的图象会在这里穿过 x 轴．

上面的讨论说明：函数 $f(x)$ 在驻点 c 处的导数 $f'(c)=0$ 而 $f''(c)\neq0$，则 $x=c$ 是 $f(x)$ 的极值点．

若 $f''(c)>0$，则 $f'(x)$ 在 $x=c$ 附近递增到 $f'(c)=0$ 再递增，由负变正，所以 $f(x)$ 由递减变为递增，在 $x=c$ 处取到极小值．

若 $f''(c)<0$，则 $f'(x)$ 在 $x=c$ 附近递减到 $f'(c)=0$ 再递减，由正变负，所以 $f(x)$ 由递增变为递减，在 $x=c$ 处取到极大值．

以函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$ 为例．

由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1=0$ 得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=0$．

$f''(x)=\mathrm{e}^x>0$，说明导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 附近递增（穿 x 轴而过），即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 附近由负变正，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(0)=0$ 为极小值．

进一步，我们还可以得出 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x\geqslant f(0)=0$ 恒成立，当且仅当 $x=0$ 时等号成立．因此，$\mathrm{e}^x>1+x$ 对所有 $x\neq0$ 均成立．

1.3.3 三次函数的性质：单调区间和极值

我们曾经用配方法和导数法探讨过二次函数的性质，其中导数法最为简便快捷.

利用函数的导数来研究函数的性质，不但便捷，而且具有一般性. 只要能算出函数的导数并求出导函数的零点，便能把该函数的单调区间和极值点一一列出，做到一目了然.

三次函数的导数是二次函数，二次函数的零点是容易求出的，所以用导数方法可以彻底了解三次函数的增减变化和极值点.

下面我们来讨论一般的三次多项式函数.

设 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，则 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$ 是二次函数. 可能有以下三种情形：

情形 1 函数 $F'(x)$ 没有零点，$F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不变号，如图 1.3－10.

(1) 若 $a>0$，则 $F'(x)$ 恒为正，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增.

(2) 若 $a<0$，则 $F'(x)$ 恒为负，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减.

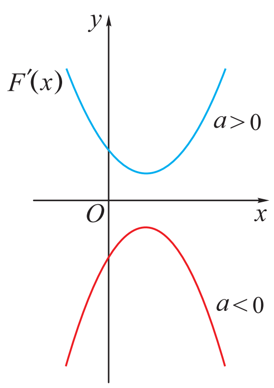


图 1.3－10

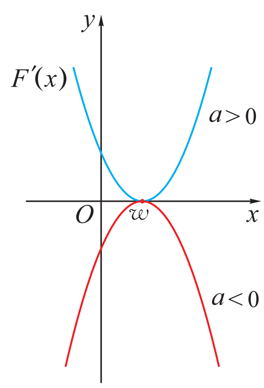


图 1.3－11

情形 2 函数 $F'(x)$ 有一个零点 $x=w$，如图 1.3－11.

(1) 若 $a>0$，则 $F'(x)$ 在 $(-\infty, w)\cup(w, +\infty)$ 上恒为正，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增.

(2) 若 $a<0$，则 $F'(x)$ 在 $(-\infty, w)\cup(w, +\infty)$ 上恒为负，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减.

情形 3 函数 $F'(x)$ 有两个零点 $x=u$ 和 $x=v$，设 $u<v$，如图 1.3－12，根据二次函数的性质可得：

(1) 若 $a>0$，则 $F'(x)$ 在 $(-\infty, u)$ 和 $(v, +\infty)$ 上为正，在 (u, v) 上为负，对应地，$F(x)$ 在 $(-\infty, u)$ 上递增，在 (u, v) 上递减，在 $(v, +\infty)$ 上递增.

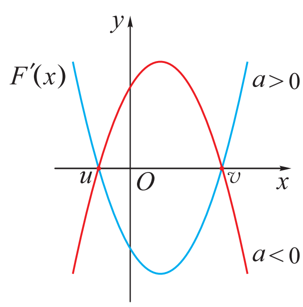


图 1.3－12

可见 $F(x)$在 $x=u$ 处取极大值，在 $x=v$ 处取极小值.

(2) 若 $a<0$，则 $F'(x)$在$(-\infty, u)$和$(v, +\infty)$上为负，在(u, v)上为正，对应地，$F(x)$在$(-\infty, u)$上递减，在(u, v)上递增，在$(v, +\infty)$上递减.

可见 $F(x)$在 $x=u$ 处取极小值，在 $x=v$ 处取极大值.

例 6 求下列三次函数的单调区间和极值.

(1) $f(x)=x^3-x^2+2x+1$；

(2) $h(x)=-2x^3+9x^2-12x+5$.

解 (1) 因为 $f'(x)=3x^2-2x+2=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}$，

所以 $f'(x)$恒为正，$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递增，

因此 $f(x)$没有极值.

(2) $h'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x^2-3x+2)=-6(x-1)(x-2)$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$.

1 和 2 将区间$(-\infty, +\infty)$分为三个区间，列表如下：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	递减↘	极小值 0	递增↗	极大值 1	递减↘

故 $h(x)$在$(-\infty, 1)$和$(2, +\infty)$上单调递减，在$(1, 2)$上单调递增，因而极大值为 1，极小值为 0.

例 6 的结论，也可以分别从 $f(x)=x^3-x^2+2x+1$ 的图象(图 1.3－13)和 $h(x)=-2x^3+9x^2-12x+5$ 的图象(图 1.3－14)得到直观验证.

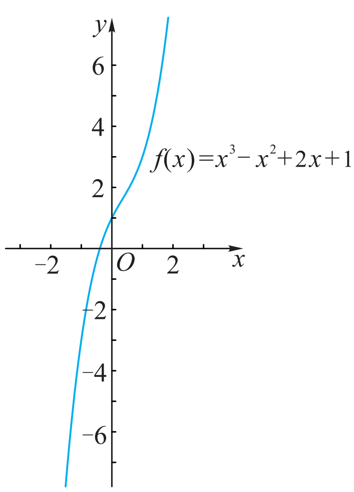


图 1.3－13

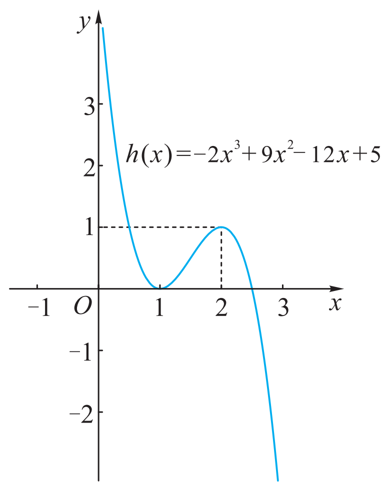


图 1.3－14

利用导数可以求出函数在某区间上的极值，但在解决实际问题或研究函数的性

质时，我们往往更关心函数在某区间上哪个值最大，哪个值最小．如何求函数在某闭区间上的最大值或最小值？

如图 1.3－15，一般地，如果在闭区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，那么该函数在$[a,b]$上必有最大值和最小值．

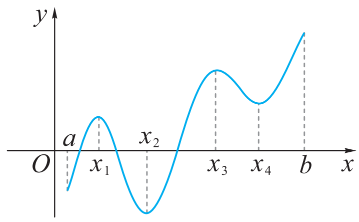


图 1.3－15

显然，函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上的最值(最大值和最小值的统称)必在极值点或区间端点处取得，因此在实际计算中，我们只要把函数$y=f(x)$的所有极值连同端点的函数值求出并进行比较，就可以求出函数在该闭区间上的最大值与最小值．

例 7 求函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 在区间$[-2,1]$上的最大值和最小值．

解 求导得 $f'(x)=3x^2+x-2$．令 $f'(x)=0$，则 $x_1=-1$，$x_2=\frac{2}{3}$．

由于 x_1和 x_2都在区间$[-2,1]$内，所以可列表如下：

x	$[-2,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},1\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	递增↗	极大值$\frac{5}{2}$	递减↘	极小值$\frac{5}{27}$	递增↗

又 $f(-2)=-1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，将它们与极值比较可得，该函数在$[-2,1]$上的最大值为$\frac{5}{2}$，最小值为-1．

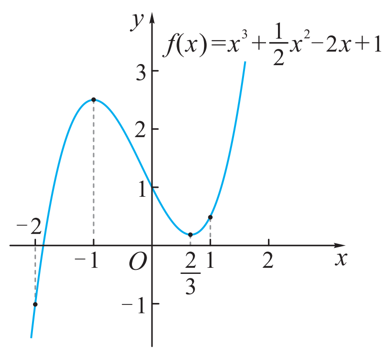


图 1.3－16

上述结论也可从函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 的图象(图 1.3－16)得到直观验证．

一般地，求函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的最值的步骤为：

(1) 求函数 $y=f(x)$在(a,b)内的极值；

(2) 求函数 $y=f(x)$在端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$；

(3) 将函数 $y=f(x)$的各极值与 $f(a)$，$f(b)$比较，其中最大者是最大值，最小者是最小值．

练习

1. 求下列三次函数的单调区间和极值.

(1) $u(x)=-x^3+27x+7$；　　(2) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$；

(3) $g(x)=-3x^3+5x^2-4x+11$；　　(4) $h(x)=42-45x-3x^2+x^3$.

2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在区间$[-3,2]$上的最大值和最小值.

1.3.4 导数的应用举例

在日常生活、生产建设和科技活动中，做一件事总要付出一定的代价，也总想取得一定的效果. 在付出代价一定的条件下，我们总想取得最好的效果；在预期效果确定的情形下，我们总想只付出最小的代价.

例如，投入一定的成本如何获得最大的利润？制作满足一定要求的器皿如何使用料最省？完成一项任务如何使工效最高？这类问题都叫作优化问题.

不少优化问题，可化为求函数的最值问题，而导数是解决这类问题的有效工具.

例 8 某企业要生产容积为 V m^3 的圆柱形密闭容器(如图 1.3-17)，已知该容器侧面耗材为 1 元/m^2，上下底面的耗材为 1.5 元/m^2. 问：如何设计圆柱的高度 h m 和上下底面的半径 r m，使得费用最少？

图 1.3-17

解 由题意可得，所需费用为

$$C=2\pi rh\times1+2\pi r^2\times1.5=2\pi rh+3\pi r^2.$$

由于容器的容积为 $V=\pi r^2 h$，从而 $\pi rh=\frac{V}{r}$，因此

$$C(r)=\frac{2V}{r}+3\pi r^2.$$

对 $C(r)$关于 r 求导，得 $C'(r)=-\frac{2V}{r^2}+6\pi r$.

令 $C'(r)=0$，解得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

当 $r\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}\right)$ 时，$C'(r)<0$，则 $C(r)$单调递减；

当 $r\in\left(\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}},+\infty\right)$ 时，$C'(r)>0$，则 $C(r)$单调递增.

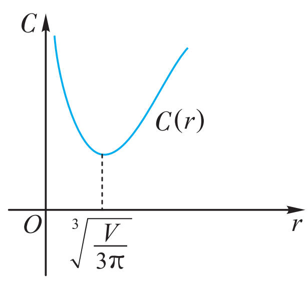


图 1.3-18

因此，$C(r)$在 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$处取到极小值，也是最小值(如图 1.3-18).

由 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$和 $V=\pi r^2 h$，得 $h=3r=3\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

因此，当圆柱上下底面半径 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$，高 $h=3r$ 时，所需费用最少.

例 9 如图 1.3－19，让一个木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端. 斜面两端的水平距离为 d，如何选择斜面和水平面之间的角度 x，使木块从上端滑到下端所用的时间最短?

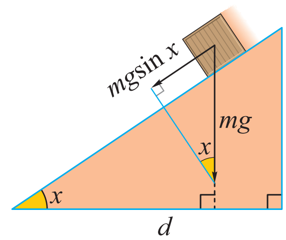


图 1.3－19

分析 木块在光滑斜面上自由下滑，可看作是初速度为零的匀加速直线运动，其运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}at^2$，其中 a 是加速度.

解 如图 1.3－19，由于木块在前进方向所受的力大小为 $mg\sin x$（g 是重力加速度），所以它的加速度大小为 $a=g\sin x$.

由此得到木块的运动方程为$s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2\sin x$.

又木块从上端到下端经过的路程为 $s=\dfrac{d}{\cos x}$，

于是
$$\frac{d}{\cos x}=\frac{1}{2}gt^2\sin x.$$

解得
$$t=\sqrt{\frac{2d}{g\sin x\cos x}}.$$

由题意，要求的是上式右端关于变量 x 的最小值点，也就是函数

$$f(x)=\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\ \left(x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

的最大值点.

令 $f'(x)=\cos 2x=0$，解得 $x=\dfrac{\pi}{4}$.

当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$.

因此，$f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{4}$处取到极大值，也是最大值.

因此，当斜面和水平面之间的角度 $x=\dfrac{\pi}{4}$时，木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端所用的时间最短.

例 10 江轮逆水上行 300 km，水速为 v km/h，船在静水中的速度为 x km/h. 已知行船时每小时的耗油量为 cx^2 L，即与船在静水中的速度的平方成正比. 问：x 多大时，全程的耗油量 $H(x)$最小?

解 船的实际速度为$(x-v)$ km/h，故全程用时为$\dfrac{300}{x-v}$ h，

所以全程的耗油量

$$H(x)=\frac{300cx^2}{x-v}(c>0,\ x>v>0).$$

对 $H(x)$ 关于 x 求导，得

$$H'(x)=\frac{300c[2x(x-v)-x^2]}{(x-v)^2}$$

$$=\frac{300cx(x-2v)}{(x-v)^2}.$$

令 $H'(x)=0$，

可得 $H'(x)$在$(v,\ +\infty)$上有唯一零点 $x_0=2v$.

又$H'(x)$在$(v,\ 2v)$上为负，在$(2v,\ +\infty)$上为正，

故 $H(x)$在 $x=2v$ 处取到极小值，也是最小值(图 1.3-20).

因此，当$x=2v$时，全程的耗油量最小.

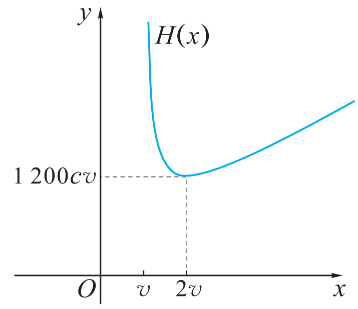
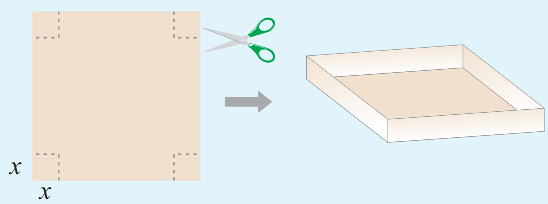


图 1.3-20

实际上，行船时还有其他开支，船还应当在预定的时间内到达目的地，不能把耗油量最小作为唯一的决策因素.

练习

1. 如图，有一边长为 a 的正方形纸片，纸片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒，求 x 多大时，方盒的容积 V 最大.



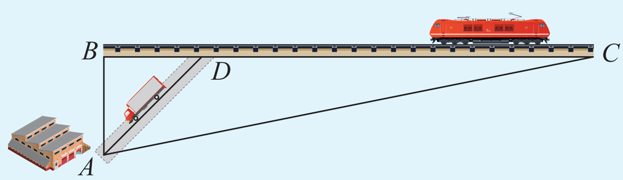
（第 1 题）

2. 某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料. 瓶子的制造成本是 $0.8\pi r^2$ 分，其中 r(cm)是瓶子的半径，已知每出售1 mL 的饮料，制造商可获利 0.2 分(不含瓶子成本)，且制造商能制作的瓶子的最大半径为 6 cm.

(1) 瓶子半径多大时，每瓶饮料的利润最大?

(2) 瓶子半径多大时，每瓶饮料的利润最小?

3. 如图，工厂 A 到铁路专用线的距离 $AB=20$ km，在铁路专用线上距离 B 100 km 的地方有一个配件厂 C，现在准备在专用线的 BC 段选一处 D 铺设一条公路(向着 A)，为了使得配件厂到工厂 A 的运费最省，那么 D 处应如何选址?(已知每千米的运费铁路是公路的 60%)

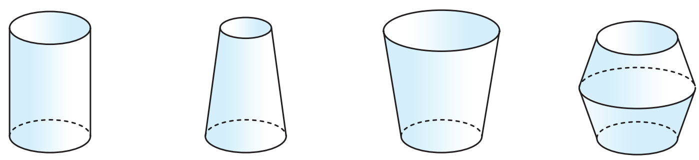


（第 3 题）

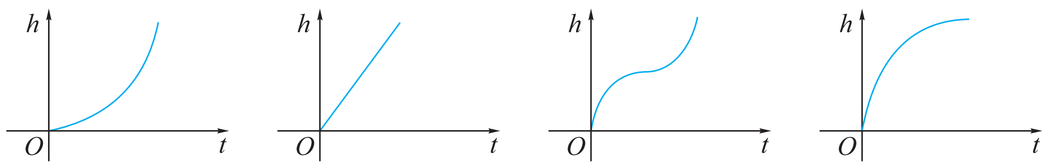
习题 1.3

学而时习之

1. 如图，水以恒速(即单位时间内注入水的体积相同)注入下面四种底面积相同的容器中，试分别找出与各容器对应的水面高度 h 与时间 t 的函数图象.



（1）　（2）　（3）　（4）



（A）　（B）　（C）　（D）

（第 1 题）

2. 用导数判断下列函数的单调性，并求出单调区间.

（1）$f(x)=x^2-4x+5$；　（2）$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$.

3. 证明：函数 $f(x)=x+\dfrac{16}{x}$ 在区间$(0, 4)$上单调递减，在$[4, +\infty)$上单调递增.

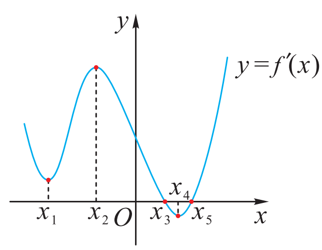
4. 已知函数 $y=f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示，在标记的点中：

（1）在哪一点处导函数 $y=f'(x)$取到极大值?

（2）在哪一点处导函数 $y=f'(x)$取到极小值?

（3）在哪一点处函数 $y=f(x)$取到极大值?

（4）在哪一点处函数 $y=f(x)$取到极小值?



（第 4 题）

5. 求下列函数的极值：

（1）$f(x)=x^{36}$；　（2）$f(x)=x-\dfrac{1}{x}+5$；

（3）$g(x)=x^2-2x-3$；　（4）$f(x)=\ln x+x$.

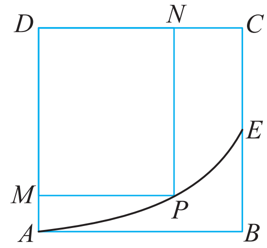
6. 求下列三次函数在给定区间上的最大值和最小值：

（1）$F(x)=2x^3+x^2-4x+1$，$[-2, 1]$；

(2) $G(x)=x^3-\dfrac{3x^2}{2}$，$[-1,\ 2]$.

7. 若函数 $y=\dfrac{ax^3}{3}-\dfrac{ax^2}{2}-2ax(a\neq0)$在$[-1,\ 2]$上为增函数，求 a 的取值范围.

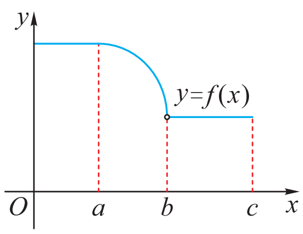
8. 如图，四边形 $ABCD$ 是一块边长为 4 km 的正方形地域，地域内有一条河流从 A 流到 E，且河流是以 A 为顶点、开口向上的一段抛物线弧(河流宽度忽略不计)，其中 E 为 BC 的中点. 某公司准备投资建设一个大型矩形游乐园 $PMDN$，问：如何修建才能使游乐园的面积最大？并求出最大面积.



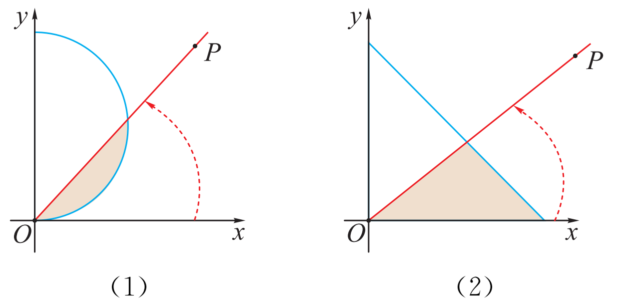
(第 8 题)

温故而知新

9. 函数 $y=f(x)$的图象如图所示，试分别画出$[a,\ b)$和$(b,\ c]$上导函数 $f'(x)$图象的大致形状.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 若把图 1.3-4 中的圆改成如图(1)所示的半圆，阴影部分的面积关于时间 t 的函数图象是哪个？如果改成图(2)中的三角形呢？

11. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处取得极值 10，求 $f(2)$的值.

12. 已知 $f(x)$的导函数的图象是一条直线 l，且 l 与 x 轴的交点坐标为$(1,\ 0)$，试比较 $f(0)$与 $f(3)$的大小.

13. 设函数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b(a>0)$在$[1,\ 4]$上有最大值 23，最小值 3，求 a，b 的值.

14. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a=0$，求 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $a>0$，求最大的常数 a 使 $\mathrm{e}^x\geqslant1+x+ax^2$ 对所有 $x\geqslant0$ 成立.

数学文化

微积分的故事

把数学比成一棵大树，算术、代数、几何、解析几何等就是树根，而树干的主要部分是微积分；其他繁多的数学分支，好比是枝叶.

没有微积分，科学研究和工程技术中的大量问题就无法解决. 恩格斯甚至认为，微积分的创立是“人类精神的伟大胜利”.

有了代数与几何相结合而产生的解析几何，就能够直观而又定量地表述事物的运动和变化. 在解析几何搭建的舞台上，才出现了变量的数学. 它的基础就是微积分.

微积分的思想萌芽，特别是积分学，早在公元前 200 多年就已经出现. 自古以来，面积和体积的计算一直是人们感兴趣的问题. 为了计算某些特殊的曲线包围的面积或曲面包围的体积，古希腊的阿基米德(前 287—前 212)，古代中国的刘徽、祖冲之，都有过出色的贡献.

微分学的起源则要晚得多. 刺激微分学发展的主要问题是，求曲线的切线、求变速运动的瞬时速度、变化中的事物的瞬时变化率以及求函数的极值. 虽然求切线的问题也是古已有之(阿基米德给出过作螺线和圆锥曲线的方法)，但古代的数学家并没有从运动和变化的角度来表述和研究它. 一直到 17 世纪上半叶，天文学、力学、光学的发展和工业技术的需要，使得对切线问题、瞬时变化率问题以及函数极值问题的研究成为不能回避的当务之急. 同时，工业和科技的发展，使人们对积分学基本问题(面积、体积、曲线长、重心等的计算)的兴趣被重新激发出来. 那时，几乎所有的科学大师都致力于寻求解决这些难题的新的数学方法，大家的努力促进了数学的迅速发展，发现了微分学和积分学的联系(牛顿-莱布尼茨公式，也就是微积分基本定理)，这标志着微积分的诞生.

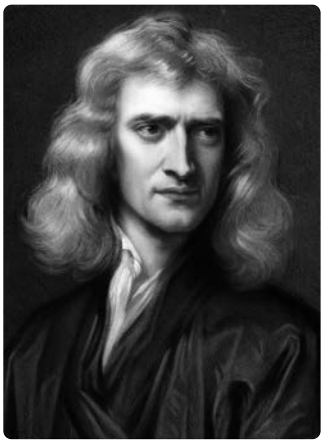
近代微积分诞生前，经历了半个世纪的酝酿；诞生后，又经历了 150 多年的发展完善，才成为一门丰富而严谨的数学学科. 在这 200 多年间，有数十位卓越的科学家为此做出了永垂青史的贡献. 这里包含着一系列激动人心的故事. 一本仅仅讲述微积分概念发展史的书，就有 300 多页.

微积分酝酿时期，有几项具有标志性的工作：

1615 年，德国天文学家、物理学家和数学家开普勒(1571—1630)出版了《测量酒桶的新立体几何》一书，提出了求抛物线弓形旋转体体积的问题挑战同行；1635 年，意大利数学家卡瓦列里(1598—1647)在新书《用新方法促进的连续不可分量的几何学》中，提出了著名的求体积的“卡瓦列里原理”，并用自己的方法回答了开普勒的问题. 这些工作可以看成是阿基米德、刘徽、祖冲之求面积体积研究的发展，为积分学的形成在几何方面做了准备. 1637 年，解析几何的创始人笛卡儿(1596—

1650)和费马(1601—1665)，分别将坐标法用于求切线和极值，这是微分学的开端. 英国数学家沃利斯(1616—1703)在1655年出版的《无穷算术》一书中，获得一系列积分公式，为将解析方法引入微积分做出了突出贡献；之后，牛顿(1643—1727)的老师巴罗(1630—1677)在1670年出版的《几何学讲义》中用“特征三角形”求切线，比笛卡儿的“圆法”更便捷，更接近后来的微分学. 巴罗实际上已经在个别情形下发现了微分和积分的互逆关系，可惜他对此未加重视，失去了创建微积分的机会.

在半个世纪众多研究成果的基础上，特别是在深入研读笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》后，牛顿以运动学为背景，在1666年写成了论文《流数简论》并在同事中传阅. 这在数学史上被看作微积分诞生的标志.


牛顿

牛顿关于微积分的公开表述，最早见于1687年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》. 而在三年前，即1684年，德国哲学家和数学家莱布尼茨(1646—1716)发表了他的第一篇微积分论文《一种求极大与极小值和求切线的新方法》.

与牛顿的运动学背景不同，莱布尼茨创立微积分首先基于几何问题的思考. 他深入地研究了巴罗的“特征三角形”及有关工作，发现了求面积和求切线之间的互逆关系，在1677年的手稿中明确陈述了微积分基本定理. 这比牛顿晚11年.

莱布尼茨为微积分创立了一套方便的符号，一直沿用到今天.

在牛顿和莱布尼茨之间，有过微积分发明优先权的争端. 这被认为是“科学史上最不幸的一章”. 为此，英国数学家拒绝使用莱布尼茨引入的方法和符号，这使他们的数学研究在几十年间落后于德国和法国等欧洲大陆国家.

牛顿和莱布尼茨的微积分是不严密的，他们说不清极限或无穷小. 新生的微积分受到以贝克莱主教为代表的许多人的非议乃至攻击，引发了“第二次数学危机”，但是数学家们没有因此止步不前，正如达朗贝尔的名言，“向前进，你就会产生信念”. 18世纪微积分进一步深入发展，并获得广泛的应用. 微积分刺激和推动了许多数学新分支的产生，如变分法、微分方程、微分几何等，形成了数学分析这个丰富广阔的新领域，并出现了以伟大的欧拉(1707—1783)为代表的一批杰出的数学家. 这个世纪被称为分析的时代，是数学走向现代化的重要过渡时期.

经过百年的尝试和酝酿，将微积分严谨化的努力终见成效. 捷克的波尔察诺在1817年发表的论文《纯粹分析证明》是其先声；法国数学家柯西1821年出版的《分析教程》，特别是其后德国的魏尔斯特拉斯以及康托尔、戴德金的实数理论，完全消除了微积分中不断出现的各种异议和混乱，实现了微积分的严谨化，形成了今天的微积分.

小结与复习

一、 知识结构图

- 导　数
  - 导数的概念
    - 导数的实质
      函数的平均变化率 ⟶ 函数的瞬时变化率
    - 导数的物理意义
      运动的平均速度 ⟶ 运动的瞬时速度
    - 导数的几何意义
      曲线的割线斜率 ⟶ 曲线的切线斜率
  - 导数的运算
    - 基本初等函数求导
    - 导数的四则运算法则
    - 简单复合函数的求导
  - 导数的应用
    - 函数的单调性
    - 函数的极值与最值
    - 最优化问题

二、 回顾与思考

1. 现实世界中的大量实际问题的数量关系可以用变量和函数的数学模型来刻画．自由落体的速度时刻在变化，该如何计算呢？曲线的切线怎么作呢？牛顿和莱布尼茨在研究变量和函数的过程中创立了微积分，使得这些问题迎刃而解．微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，它的发展和应用标志着近代数学时期的到来．

2. 导数是微积分的核心概念之一，它有着极其丰富的实际背景和广泛的应用．试通过对具体实例的分析，经历由函数的平均变化率过渡到瞬时变化率的

过程，体会导数的思想和内涵.

3. 求瞬时速度，求切线斜率，求函数的导数，计算工作是在一个无穷逼近过程中完成的. 这叫作极限运算，它不同于以往的四则运算和函数运算，这种充满思维突破的数学运算给数学注入了新的力量和新的思想. 你能够根据定义推导一些基本初等函数的导数吗？试结合一些函数实例，运用导数公式表和导数的四则运算法则求简单函数的导数.

4. 导数是函数的导数. 导数概念一旦形成，就在研究函数的性质中显示出巨大的威力. 我们曾经用不同的方法讨论函数的单调性和极值问题，导数方法则提供了最一般的简洁有力的解决方案. 试结合函数实例，运用导数研究函数的性质（如函数的单调性、极值和最值），并应用导数方法解决一些实际生活中提出的最优化问题.

5. 阅读课本上的材料，收集、阅读微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流，进一步体会导数的思想及其丰富的内涵，领略新的数学思想和方法在解决实际问题中的力量，感受微积分的创立与发展对人类文明的贡献.

复习题一

学而时习之

1. 根据所给的运动方程，先写出物体在时间段$[u, u+d]$和$[u-d, u]$上的平均速度，再让 d 趋于 0，求出它在 $t=u$ 处的瞬时速度.

(1) $s(t)=a+vt$；　　(2) $s(t)=2t^2-5t+c$.

2. 根据所给的函数表达式，先写出函数曲线过两指定点 P，Q 的割线的斜率，再让指定点 Q 沿曲线趋于点 P，求出曲线在点 P 处切线的斜率.

(1) $L(x)=\frac{x}{2}+1$，$P(2u, u+1)$，$Q(2u+h, L(2u+h))$；

(2) $f(x)=x-x^2$，$P(2, -2)$，$Q(2+h, f(2+h))$.

3. 写出下列几何量关于自变量在指定区间$[u, v]$上的平均变化率和在该区间两端点处的瞬时变化率.

(1) 边长为 x 的正方形的周长，$u=a$，$v=b(a<b)$；

(2) 半径为 x 的圆的面积，$u=1$，$v=R(R>1)$.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=3\sin x+2\cos x$；　　(2) $y=x^2(x^2-1)$；

(3) $y=(x-1)(x^2+x+1)$；　　(4) $f(x)=\sin(x+5t)$；

(5) $f(t)=t\ln(3t+2)$.

5. 用导数判断下列函数的单调性，并求出单调区间.

(1) $y=-2x^2+4x+5$；　　(2) $y=(x+1)(x^2-1)$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}$；　　(4) $y=\sqrt{1+x}-ax$.

6. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^3-3x^2-9x+5$；　　(2) $y=x^3-12x^2+21x+1$；

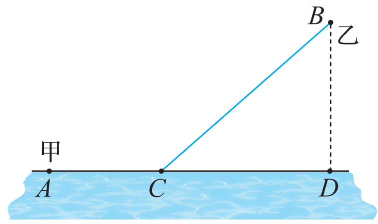
(3) $y=2-(x^2-1)^2$；　　(4) $y=x+\frac{a^2}{x}(a>0)$.

7. 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值：

(1) $y=2x^3-15x^2+36x-24$，$x\in[1, 4]$；

(2) $y=x^3-3x+5$，$x\in\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

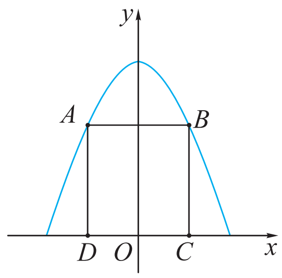
8. 如图，有甲、乙两个工厂，甲厂位于笔直河岸的岸边 A 处，乙厂与甲厂在河的同侧，位于离河岸 40 km 的 B 处，BD 垂直于河岸，垂足为 D 且与 A 相距 50 km. 两厂要在此岸边合建一个供水站 C，从供水站到甲厂和乙厂铺设水管的费用分别为每千米 $3a$ 元和 $5a$ 元，问：供水站 C 建在岸



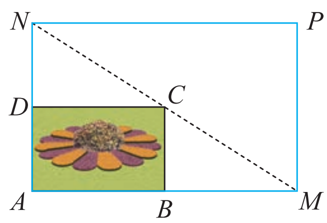
（第 8 题）

边何处才能使铺设水管的费用最省？

9. 如图，矩形的两个顶点位于 x 轴上，另两个顶点位于抛物线 $y=4-x^2$ 在 x 轴上方的曲线上，求矩形面积最大时的长和宽.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，将一矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求 B 在 AM 上，D 在 AN 上，且对角线 MN 过 C 点，已知 $|AB|=3$ m，$|AD|=2$ m. 若 3 m$\leqslant|AN|\leqslant$ 4 m，则当 AM，AN 的长度是多少时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小？并求出最小面积.

温故而知新

11. 曲线 $y=x^3-2x^2-3x+1$ 在某点处的切线的倾斜角大于 $\frac{\pi}{2}$，求坐标为整数的切点的个数.

12. 求下列函数的导数：

（1）$y=2(e^{\frac{x}{2}}+xe^{\frac{x}{2}})$；　　（2）$y=\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)$.

13. 求曲线 $y=5\sqrt{x}$ 与直线 $y=2x-4$ 平行的切线方程.

14. 已知函数 $f(x)=ax^{a+b}$ 的导数为 $f'(x)=6x^2$，求 a，b 的值.

15. 若函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot\cdots\cdot(x-2\ 021)$，求 $f'(2\ 021)$ 的值.

16. 求函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\frac{3}{a}$ 的单调区间.

17. 试问：a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？指出它是极大值还是极小值，并求此极值.

18. 如果 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，试证明 $f(x)$ 无极值.

19. 某工厂的某种产品的月产量 x(t)与每吨产品的价格 $P(x)$(元)之间的关系式为 $P(x)=24\ 200-\frac{x^2}{5}$，且生产 x t 产品的成本为 $C(x)=(50\ 000+200x)$元. 问：该产品每月生产多少吨时利润最大？最大利润为多少？

20. 若 $b>a>0$，求证：$\frac{2(b-a)}{a+b}<\ln b-\ln a<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

上下而求索

21. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

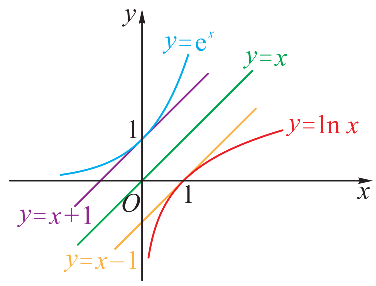
(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 b，c，记过两点 $B(b,\ f(b))$，$C(c,\ f(c))$ 的直线斜率为 k. 是否存在 a 使 $k=2-a$? 若存在，求 a 的值；若不存在，试说明理由.

22. (数学探究活动) 对数函数与指数函数的图象与性质.

(1) 求对数曲线 $y=\ln x$ 过点 $(1,\ 0)$ 的切线方程，并画出对数曲线和所求切线的图象.

(2) 观察(1)中的图象，你会发现切线 $y=x-1$ 在切点 $(1,\ 0)$ 附近非常接近曲线，也就是说，当 $|x-1|$ 趋近于 0 时，我们有近似公式__________，试用此近似公式计算 $\ln 1.000\ 1$ 以及 $\lg 1.000\ 1$ 的近似值.

(3) 再观察(1)中的图象，你可以发现切线 $y=x-1$ 在曲线 $y=\ln x$ 上方，即对所有的 $x>0$，我们有不等式__________恒成立. 试通过理论推导证明这个不等式. (提示：求函数 $g(x)=x-1-\ln x$ 的最小值)



(第 21 题)

(4) 对数曲线 $y=\ln x$ 关于直线 $y=x$ 的轴对称图形是什么函数的图象? 对数曲线 $y=\ln x$ 在 $(1,\ 0)$ 处的切线关于 $y=x$ 的轴对称图形是曲线 $x=\ln y$ 的切线吗? 试说明你的理由，并判断该切线是在曲线 $x=\ln y$ 的上方还是下方. 由此你能得出什么不等式?

(5) 若当 $t\to 0$，$(1+t)^{\frac{1}{t}}\to e=2.718\ 28\cdots$，试解释为什么对数曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,\ 0)$ 处的切线的斜率 k "正好" 等于 1?

试仿此求出曲线 $y=\lg x$ 在点 $(1,\ 0)$ 处的切线方程.

数学建模

易拉罐的优化设计

一　问题背景

在日常生活中，易拉罐是一种用于装饮料的常见器具．对于巨大的饮料市场而言，从用料最省的角度设计易拉罐的形状和尺寸，可以达到降低成本的目的．

针对现有市场上流行的易拉罐外形，下面从节约成本的角度出发，建立关于易拉罐形状和尺寸的优化设计的数学模型．

二　问题解析

企业在设计易拉罐时通常需要综合考虑诸多因素，例如，材料容积一定的条件下耗材最少，外观美丽以吸引顾客，稳定度高以保证顾客安全使用等．而节约成本是最重要的因素，下面以节约成本为目标建立易拉罐优化设计模型．

1．模型建立与求解

模型 1

将易拉罐近似看成圆柱体，并假设各部分板材厚度完全相同．在这种情况下，问题归结为：圆柱体的罐内容积一定，求其底面圆半径和高，使其表面积最小．

设罐内容积为 V(常数)，底面圆半径为 r，高为 h，则易拉罐的耗材为

$$S=2\pi rh+2\pi r^2, \tag{1}$$

而约束条件是罐内容积 V 一定，且

$$V=\pi r^2 h. \tag{2}$$

由(2)式得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，代入(1)式化简得到关于 r 的表达式

$$S(r)=\frac{2V}{r}+2\pi r^2.$$

对 $S(r)$ 关于 r 求导，得 $S'(r)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$．令 $S'(r)=0$，解得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$．

当 $r\in\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$ 时，$S'(r)<0$，则 $S(r)$ 单调递减；

当 $r\in\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}},+\infty\right)$ 时，$S'(r)>0$，则 $S(r)$ 单调递增.

因此，函数 $S(r)$ 在 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值，也是最小值. 此时，高 $h=2r$，即圆柱体的高等于底面直径.

上述讨论表明，在不考虑各部分厚度差别的条件下，底面直径和圆柱体高相等时，可使易拉罐表面积最小，从而用料最省.

模型 2

根据市场调查，我们发现市场上较通用的易拉罐的底部、顶部、侧壁的厚度是不一样的，例如，市场上有一种易拉罐各部分厚度(以千分之一英寸为单位，约 0.002 54 cm)大致为：底部厚 10，侧壁厚 4，顶部厚 9. 对于这种顶部与底部厚度差别较小的情形，仍然将易拉罐近似看成圆柱体，在底部与顶部板材厚度相同，侧壁厚度不同的假设条件下，建立耗材最省的数学模型.

设易拉罐的容积为 V(常量)，r 与 h 为易拉罐内部的半径和高，侧壁厚度为 a，其余部分厚度为 b，所用耗材体积为 G，则侧面耗材的体积为 $\pi(r+a)^2(h+2b)-\pi r^2(h+2b)$，顶部与底部耗材体积为 $2\pi r^2 b$，易拉罐容积为 $V=\pi r^2 h$.

由此可建立如下的数学模型：

$$G=\pi(r+a)^2(h+2b)-\pi r^2(h+2b)+2\pi r^2 b, \tag{3}$$

容积一定，且

$$V=\pi r^2 h. \tag{4}$$

由(4)式得

$$h=\frac{V}{\pi r^2}, \tag{5}$$

将(5)代入(3)式，化简得到 G 关于 r 的函数：

$$G(r)=\pi(r+a)^2\left(\frac{V}{\pi r^2}+2b\right)-V.$$

令 $G'(r)=0$，解得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{aV}{2\pi b}}$，$r=-a$(舍去).

从而 $h=\sqrt[3]{\dfrac{4b^2V}{\pi a^2}}$.

由此得到板材体积的最小值为

$$G_{\min}=\pi\left(a+\sqrt[3]{\frac{aV}{2\pi b}}\right)^2\left(2b+\sqrt[3]{\frac{4b^2V}{\pi a^2}}\right)-V.$$

2. 对模型的进一步讨论

在前面的模型中，都是在易拉罐为圆柱体、易拉罐底部与顶部厚度相同的假设前提下讨论的，但是，在实际生活中，我们见到的易拉罐，形状大多是由圆台和圆柱组成，同时易拉罐的顶部与底部厚度也不一定相同，因而自然会产生如下问题：是否可以设计出一种圆柱和圆台的组合体，比圆柱体易拉罐的成本更低？

下面就通过建立数学模型来解决该问题.

假设易拉罐上面为圆台、下面为圆柱，r_1，r_2 分别为内部圆台上下底面的半径，下部圆柱高为 h_1，上部圆台高为 h_2，容积 V 仍为常量.

由于各部分板材厚度存在差异，可设易拉罐顶部、底部以及侧壁厚度分别为 a，b，c，则底部板材的体积为 $V_1=\pi(r_2+c)^2b$，顶部板材的体积为 $V_2=\pi(r_1+c)^2a$，圆柱侧面部分的体积为

$$V_3=\pi\left[(r_2+c)^2-r_2^2\right]h_1=\pi(2r_2+c)ch_1.$$

顶部圆台侧面部分的体积为

$$\begin{aligned}V_4&=\frac{\pi}{3}\left[(r_2+c)^2+(r_2+c)(r_1+c)+(r_1+c)^2-(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)\right]h_2\\&=\pi(r_1+r_2+c)ch_2.\end{aligned}$$

因此，数学模型为总的耗材 $G=V_1+V_2+V_3+V_4$ 在约束条件

$$\pi r_2^2h_1+\frac{\pi}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)h_2-V=0$$

下的最小值.

对于圆台而言，当圆台的上、下底面半径相等时就变成圆柱，此时，圆台与圆柱的组合体退化为高度为 h_1+h_2 的圆柱，圆柱为圆台与圆柱的组合体的特殊情形，因此，圆台与圆柱的组合体的耗材不会多于圆柱所耗板材. 此时模型含有四个变量 r_1，r_2，h_1，h_2，而约束条件只有一个，这需要用到大学数学知识才有可能从理论上求出最优解. 但是，同学们可以通过使用计算机搜索的方法编制程序来得到所耗板材最小值的近似解.

三 问题研究

1. 我们知道，在体积一定的条件下，正方体、圆柱体以及球体的表面积满足 $S_{正方体}>S_{圆柱体}>S_{球体}$，那么为什么生活中很难见到形状含球体的易拉罐？你能根据自己的喜好对易拉罐的形状和尺寸进行优化设计吗？

2. 编制计算机程序，在容积一定的条件下，以耗材最少为目标，验证：将易拉罐设计成形状为圆台与圆柱的组合体优于圆柱体.

2

第 2 章

空间向量与立体几何

向量集数、形于一身，它既可以刻画几何对象，又可以像数一样进行运算，因此在解决几何问题的过程中发挥着极其重要的作用.

在本章，我们将把平面向量推广到空间向量，学习空间向量的概念、运算，了解空间向量基本定理并掌握其坐标表示，利用向量语言来刻画空间图形的位置关系与度量关系，运用向量方法解决立体几何问题，感悟向量是研究几何问题的有效工具.

2.1 空间直角坐标系

2.1.1 建立空间直角坐标系

在一条直线上可以建立数轴，将每点的位置用一个实数 x 来表示．在一个平面上可以建立平面直角坐标系，将每点的位置用两个实数组成有序实数组(x, y)来表示．在空间中怎样表示每个点的位置呢？

如图 2.1－1，如何刻画在海面上空飞行的飞机的位置 P？

图 2.1－1

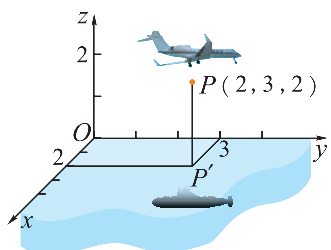


图 2.1－2

很自然地，我们会想到先说明飞机在海面上哪一点 P'的上空，再说明飞机在海面上的高度$|P'P|$．如图 2.1－2，将海面看成一个平面，从飞机在空中所在位置向海平面作垂线 PP'，垂足为 P'，则飞机在 P'上空．为了刻画 P'在海平面上的位置，在海平面上建立平面直角坐标系，则 P'可以由它在这个坐标系中的坐标(x, y)来刻画．又由于飞机在海平面上空的高度$|P'P|=z$是一个实数，因而将 x，y，z 这三个实数组成有序实数组(x, y, z)，它就刻画了飞机的位置 P，称之为点 P 的坐标．例如，$(x, y, z)=(2, 3, 2)$，单位长度为 1 km，就说明飞机在海平面坐标为$(2, 3)$的位置上空，高度为 2 km．用这个方法不但可以刻画空中飞机的位置，还可以刻画水下潜艇的位置．例如，潜艇坐标为$(2, 3, -0.5)$，就说明它位于海平面坐标为$(2, 3)$的位置正下方，且在海平面以下 0.5 km 处．

为了确定空间中的点的位置，我们可以在空间中任取一点 O，以 O 为原点，作三条两两垂直的有向直线 Ox，Oy，Oz，在这三条直线上选取共同的长度单位，分别建立坐标轴，依次称为 x 轴、y 轴、z 轴，从而组成了一个**空间直角坐标系** $O-xyz$，如图 2.1－3．

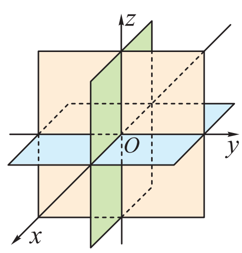


图 2.1－3

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，由两条坐标轴确定的平面叫**坐标平面**，分别称为 xOy 平面，yOz 平面，xOz 平面.

建立空间直角坐标系时，一般将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向通常符合右手螺旋法则，即伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴正方向，然后让四指沿握拳方向旋转 90°指向 y 轴正方向，此时大拇指的指向即为 z 轴正方向. 我们也称这样的坐标系为右手系(如图 2.1-4).

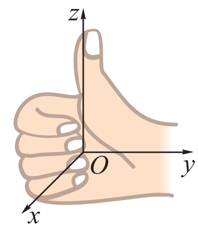


图 2.1-4

有了空间直角坐标系，我们就能够建立空间中任意点 P 与三个实数组成的有序实数组 (x, y, z) 之间的对应关系.

如图 2.1-5，若点 P 不在三个坐标平面内，则过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴、z 轴于点 A，B，C. 设交点 A，B，C 分别代表唯一的实数 x，y，z，将这三个实数按顺序排成 (x, y, z)，那么点 P 就对应唯一确定的有序实数组 (x, y, z).

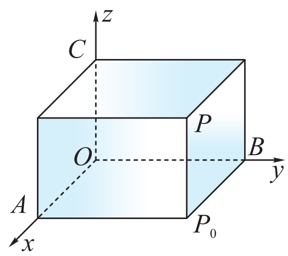


图 2.1-5

反过来，给定有序实数组 (x, y, z)，我们可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上依次选取坐标为 x，y，z 的点 A，B，C，过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，则这三个平面的唯一交点就是有序实数组 (x, y, z) 所确定的点 P.

这就建立了空间中的点 P 与有序实数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系.

此时，有序实数组 (x, y, z) 称为点 P 的**坐标**，记作 $P(x, y, z)$，其中 x 称为点 P 的**横坐标**，y 称为点 P 的**纵坐标**，z 称为点 P 的**竖坐标**.

在空间直角坐标系中，原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$，x 轴上的点的坐标为 $(x, 0, 0)$，y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$，z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$，xOy 平面内的点的坐标为 $(x, y, 0)$，yOz 平面内的点的坐标为 $(0, y, z)$，xOz 平面内的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

例 1 在空间直角坐标系中，描出下列各点：

(1) $A(0, 0, 4)$；

(2) $B(3, -3, 0)$；

(3) $C(1, 2, 3)$.

解 根据坐标与点的对应关系，描出各点，可得图 2.1-6.

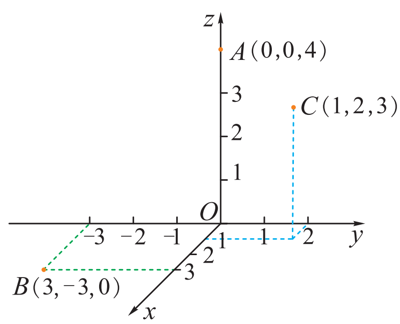


图 2.1-6

例 2 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的长、宽、高分别为 $|AB|=8$，$|AD|=3$，$|AA'|=5$. 建立适当的空间直角坐标系，并求顶点 A，B，C，D，A'，B'，C'，D' 的坐标.

解 如图 2.1-7，以 A 为原点，分别以有向直线 AB，AD，AA' 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，则点 A，B，C，D 都在平面 xAy 内，因而其竖坐标 z 都为 0，因此 A，B，C，D 的坐标分别是 $A(0, 0, 0)$，$B(8, 0, 0)$，$C(8, 3, 0)$，$D(0, 3, 0)$.

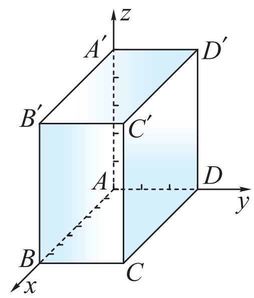


图 2.1-7

由于点 A'，B'，C'，D' 都在一个垂直于 z 轴的平面 $A'B'C'D'$ 内，又 $|AA'|=5$，所以这四点的竖坐标 z 都是 5. 又过 A'，B'，C'，D' 分别作 xAy 平面的垂线，垂足分别为 A，B，C，D，因此 A'，B'，C'，D' 的横坐标 x、纵坐标 y 分别与 A，B，C，D 的横坐标 x、纵坐标 y 相同.

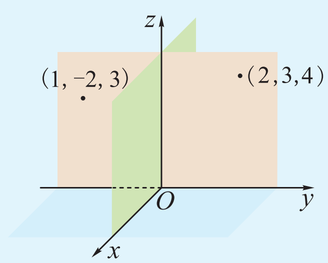
因此 A'，B'，C'，D' 的坐标分别是 $A'(0, 0, 5)$，$B'(8, 0, 5)$，$C'(8, 3, 5)$，$D'(0, 3, 5)$.

练习

1. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，标出下列各点：
$A(1, 1, 1)$，$B(1, 1, -1)$，$C(1, -1, 1)$，$D(1, -1, -1)$，
$E(-1, 1, 1)$，$F(-1, 1, -1)$，$G(-1, -1, 1)$，$H(-1, -1, -1)$.

2. 画一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，建立适当的空间直角坐标系，并求这个正方体各顶点和棱 CC_1 中点的坐标.

3. 如图，分别求点(2, 3, 4)，(1, −2, 3)关于各个坐标平面、坐标轴、原点对称的点的坐标.



（第 3 题）

2.1.2 空间两点间的距离

距离是几何空间基本的度量，给定了空间两点的坐标，就确定了它们的位置，也就确定了它们的距离．怎样根据它们的坐标求它们的距离？

我们先来求一个长方体的对角线的长度．

如图 2.1－8(1)，一个长方体的长、宽、高分别为 a，b，c.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理可知，

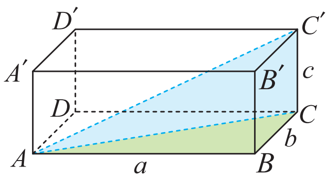
$$|AC|=\sqrt{a^2+b^2}\ (\text{如图}2.1-8(2)).$$

从而在 Rt△ACC' 中，

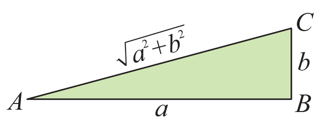
$$|AC'|=\sqrt{|AC|^2+|CC'|^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (\text{如图}\ 2.1-8(3)).$$

于是，若长方体的长、宽、高分别为 a，b，c，则其对角线长为

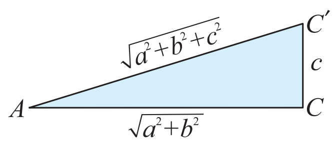
$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$



(1)



(2)



(3)

图 2.1－8

对于空间任意两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，我们以 AB 为对角线在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中作长方体，且长方体的所有棱分别与坐标轴平行，如图 2.1－9.

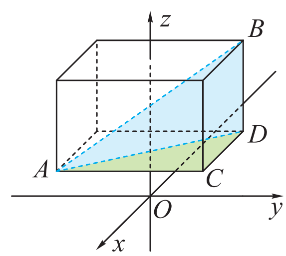


图 2.1－9

设长方体的三条棱分别为 AC，CD 和 DB，则点 C 的坐标为(x_1, y_2, z_1)，点 D 的坐标为(x_2, y_2, z_1)，于是有

$$|AC|=|y_2-y_1|,\quad |CD|=|x_2-x_1|,\quad |DB|=|z_2-z_1|.$$

由 $|AB|=\sqrt{|AC|^2+|CD|^2+|DB|^2}$ 可得

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

特别地，原点 O 到空间中任意一点 $P(x, y, z)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 3 已知两点 $P(1, 0, 1)$ 与 $Q(4, 3, -1)$.

(1) 求原点 O 到点 Q 的距离 $|OQ|$;

(2) 求点 P, Q 之间的距离;

(3) 在 z 轴上求一点 M, 使 $|MP|=|MQ|$.

解 (1) 由原点到空间任一点的距离公式得

$$|OQ|=\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$$

(2) 由空间两点间的距离公式得

$$|PQ|=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{22}.$$

(3) 由于点 M 在 z 轴上, 不妨设它的坐标为 $(0, 0, z)$, 则

$$|MP|^2=1^2+0^2+(1-z)^2=z^2-2z+2,$$

$$|MQ|^2=4^2+3^2+(-1-z)^2=z^2+2z+26.$$

又 $$|MP|=|MQ|,$$

所以 $$z^2-2z+2=z^2+2z+26.$$

解得 $$z=-6.$$

因此所求点 M 的坐标为 $M(0, 0, -6)$.

例 4 求证: 以 $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(7, 1, 2)$, $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

证明 因为 $$|M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},$$

$$|M_1M_3|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6},$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

所以 $$|M_1M_3|=|M_2M_3|.$$

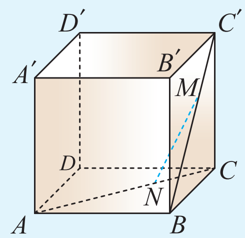
因此 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

练习

1. 求点 $P(4, -3, 5)$ 到坐标原点的距离.

2. 已知 $A(3, 3, 1)$, $B(1, 0, 5)$, 求到 A, B 两点距离相等的点 $P(x, y, z)$ 的坐标满足的条件.

3. 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a, $|AN|=2|CN|$, $|BM|=2|MC'|$, 求 MN 的长.



(第 3 题)

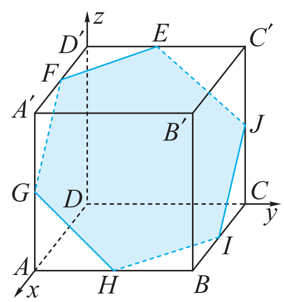
习题 2.1

学而时习之

1. 在空间直角坐标系中描出下列各点：

$A(0, 2, 4)$，$B(1, 0, 5)$，$C(0, 2, 0)$，$D(1, 3, 4)$.

2. 如图，正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，点 E，F，G，H，I，J 分别为棱 $C'D'$，$D'A'$，$A'A$，AB，BC，CC' 的中点，写出正六边形 $EFGHIJ$ 各顶点的坐标.



（第 2 题）

3. 求点 $A(1, 2, -1)$ 关于坐标平面 xOy 及 x 轴对称的点的坐标.

4. 求顶点为 $A(2, 1, 4)$，$B(3, -1, 2)$，$C(5, 0, 6)$ 的三角形各边的长.

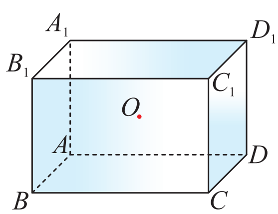
5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1, -1, 0)$，$B(-1, 3, 0)$，$C(3, 0, 0)$. 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

6. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点分别为 $A(0, 0, 0)$，$B(1, 0, 0)$，$D(0, 2, 0)$，$A_1(0, 0, 3)$，求其余各顶点的坐标以及对角线的长.

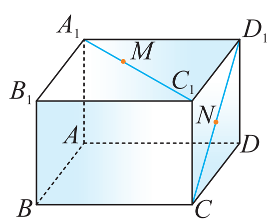
7. 在 yOz 平面内求一点 M，使它与三个已知点 $A(3, 1, 2)$，$B(4, -2, -2)$，$C(0, 5, 1)$ 等距离.

温故而知新

8. 如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对称中心为坐标原点 O，交于同一顶点的三个面分别平行于三个坐标平面，顶点 A 的坐标为 $(-2, -3, -1)$，求其他各顶点的坐标.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=|AD|=3$，$|AA_1|=2$，点 M 在 A_1C_1 上，且 $|MC_1|=2|A_1M|$，N 为 D_1C 的中点，求 M，N 两点间的距离.

2.2 空间向量及其运算

我们已经会用平面上的有向线段来表示平面向量，并利用平面向量的运算来解决一些平面图形的问题．类似地，我们也可以用空间中的有向线段来表示空间向量，并利用空间向量的运算来解决一些空间图形的问题．

一 空间向量的基本概念

类似于平面向量的定义，我们把空间中既有大小又有方向的量称为**空间向量**．

空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小(或长度)称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$．

要表示空间向量 $\boldsymbol{a}$，可以从空间中任意一点 A 出发作有向线段 $\overrightarrow{AB}$，使 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，长度与 $|\boldsymbol{a}|$ 相等，则有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$．通常把 A 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点，B 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点．$\overrightarrow{AB}$ 也表示从 A 到 B 的位移．

与平面向量相等的定义一样，从不同点出发的向量，只要它们的方向相同且长度相等，就称它们为**相等向量**．

同样，方向相反、长度相等的向量称为**相反向量**．

零向量的大小 $|\boldsymbol{a}|=0$，用长度为 0 的有向线段 $\overrightarrow{AA}$ 表示，记作 $\boldsymbol{0}$．零向量所表示的位移的起点与终点重合，即保持起点不动．

零向量的方向可以是任意的．

例 1 如图 2.2－1，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中：

(1) 向量 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{D'C'}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等吗？

(2) 向量 $\overrightarrow{C'D'}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BA}$ 与向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相反向量吗？

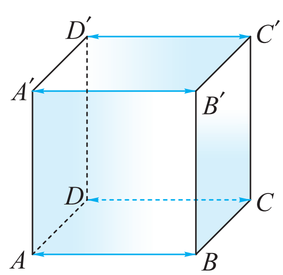


图 2.2－1

解 (1) 由于 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{D'C'}$ 均与 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相同、长度相等，因而它们均与 $\overrightarrow{AB}$ 相等．

(2) 由于 $\overrightarrow{C'D'}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BA}$ 的长度均与 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度相等，但方向相反，因而它们均是 $\overrightarrow{A'B'}$ 的相反向量．

二 空间向量的加减法

如图 2.2－2，对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，可以在空间任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，从而将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 用同一平面 OAB 内的两条有向线段 OA，OB 来表示．这说明，空间中任意两个向量都可以平移到同一平面内，成为同一平面内的两个向量．因此，我们可把平面两个向量的加减运算推广到空间两个向量，即平面向量求和的三角形法则和平行四边形法则对空间向量也成立．

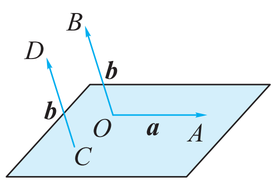


图 2.2－2

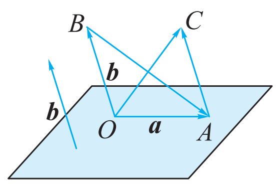


图 2.2－3

如图 2.2－3，对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}.$$

对于空间三个或更多的向量的求和，虽然不一定能同时将这些向量都用同一个平面上的有向线段来表示，但与平面内多个向量的加法类似，可将它们依次用首尾相接的折线来表示，从而得到它们的和．

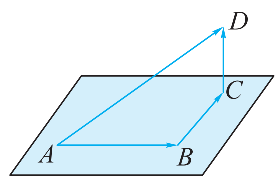


图 2.2－4

如图 2.2－4，三个向量的和$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，其总的效果就是从 A 到 D，因而$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$．

空间向量的加法满足如下运算律：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．（加法交换律）

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．（加法结合律）

> 你能证明空间向量的交换律及结合律吗？证明结合律时，与证明平面向量的结合律有何不同？

例 2 如图 2.2－5，已知平行六面体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，化简下列各式：

（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$；

（2）$\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$．

解 （1）因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$，

所以$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$．

（2）因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$．

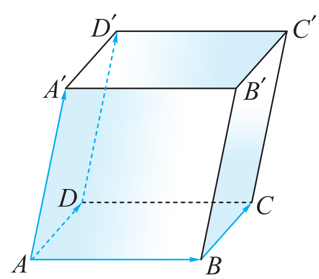


图 2.2－5

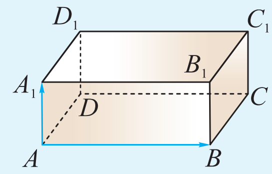
由例 2 可知，三个不共面的向量的和等于以这三个向量为邻边的平行六面体的对角线所表示的向量．

练 习

1. 如图，从长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点中任取两点作为向量的起点和终点：

(1) 写出所有与$\overrightarrow{AB}$相等的向量；

(2) 写出$\overrightarrow{AA_1}$的相反向量.



(第 1 题)

2. 已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$，化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$； (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{B'C'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{C'B}$.

三 向量与实数相乘

任何一个向量 $\boldsymbol{a}$ 都可看作某平面上的向量，它与实数 λ 相乘可类比平面向量数乘的法则进行，因而有

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 对于每个非零向量 $\boldsymbol{a}$，可得到与它方向相同的唯一单位向量 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 为实数，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ **共线**或**平行**，记作 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

零向量的方向可以任取，又 $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{0}$ 是任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的 0 倍，因此零向量与任意向量共线.

空间向量与实数的乘法满足如下运算律：

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (对向量加法的分配律)

$(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{a}$. (对实数加法的分配律)

例 3 如图 2.2-6，平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 M 在线段 $A'B$ 上，且$\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$，点 N 在线段 $A'C$ 上，且$\overrightarrow{A'N}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$.

求证：M，N，D' 三点在一条直线上.

证明 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，

则 $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

又 $\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$，

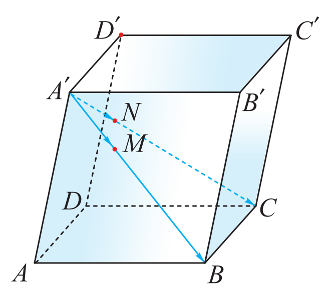


图 2.2-6

所以 $\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'B}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，

$$\overrightarrow{D'M}=\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{A'M}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

因为 $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$，

$$\overrightarrow{A'N}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}),$$

所以 $\overrightarrow{D'N}=\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{A'N}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$

所以 $\overrightarrow{D'M}=\frac{4}{3}\overrightarrow{D'N}.$

由两个非零向量平行的充要条件，可知 $\overrightarrow{D'M}/\!/\overrightarrow{D'N}$.

又 D' 是直线 $D'M$ 和 $D'N$ 的公共点，

故 $D'M$ 和 $D'N$ 重合，即 M，N，D' 三点在一条直线上.

四 向量的数量积

如图 2.2－7，由于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都可以平移到同一个平面 OAB 内，因此与平面向量夹角的定义一样，我们把 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，其取值范围为 $[0,\pi]$.

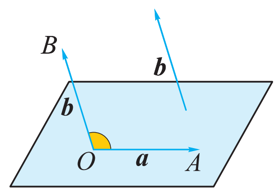


图 2.2－7

定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不为 $\boldsymbol{0}$ 时，它们有确定的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$.

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 可以在 $[0,\pi]$ 中任意选定，但总有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

特别地，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,\quad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}},$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

零向量与任意向量垂直. 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 得

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

空间向量的数量积满足如下运算律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda\in\mathbf{R}$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. （交换律）

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. （分配律）

？ 你能证明这些运算律吗？试一试.

如图 2.2-8，将空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平移到同一个平面内，可得 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\alpha$. 过点 B 作 $BB_1\perp OA$，垂足为点 B_1，则 $\overrightarrow{OB_1}$ 为 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的**投影向量**，投影向量的模 $|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB}||\cos\alpha|$ 称为**投影长**.

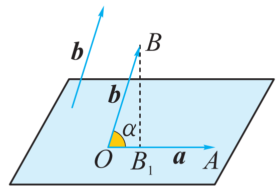


图 2.2-8

取 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 来度量投影向量 $\overrightarrow{OB_1}$，类比平面向量，可得 $\overrightarrow{OB_1}=(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}$，我们称 $|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$ 为 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的**投影**，其正负表示 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 方向相同还是相反.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 的乘积，也等于 $\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$ 的乘积.

例 4 如图 2.2-9，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $AB=4$，$AD=2$，$AA_1=2$.

(1) 求 $|\overrightarrow{AC_1}|$；

(2) 求 $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 所夹角 θ 的余弦值.

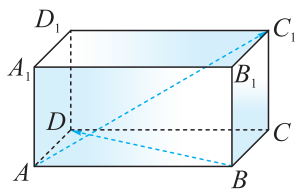


图 2.2-9

解 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则

$$|\boldsymbol{a}|=4,\quad |\boldsymbol{b}|=2,\quad |\boldsymbol{c}|=2,$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}.$$

(1) 因为
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC_1}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+0+|\boldsymbol{b}|^2+0+0+|\boldsymbol{c}|^2\\&=4^2+2^2+2^2=24,\end{aligned}$$

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=2\sqrt{6}$.

(2) 因为
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BD}|^2&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\&=|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|^2\\&=4^2+2^2=20,\end{aligned}$$

所以 $|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{5}$.

因为
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\&=|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\&=2^2-4^2\\&=-12,\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 所夹角 θ 的余弦值为

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{-12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

例 5 设 $ABCD$ 是空间四边形，求证：

$$AC\perp BD \Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

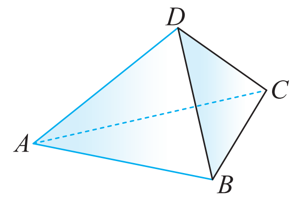


图 2.2-10

分析 如图 2.2-10，所要求证的结论中既有垂直关系，又有线段长度的平方关系，这很容易让人联想到向量的数量积及模．于是，我们可以从点 A 出发作向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，从而将题中所涉及的线段都用这三个向量表示出来，再运用向量的数量积等知识证明所要求证的结论．

证明 因为 $AB^2+CD^2-BC^2-DA^2$

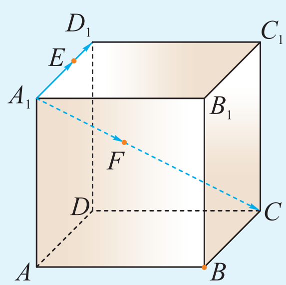
$$\begin{aligned}&=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2-\overrightarrow{AD}^2\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2\\&=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=2\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\&=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB},\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}AC\perp DB&\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\&\Leftrightarrow AB^2+CD^2-BC^2-DA^2=0\\&\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.\end{aligned}$$

例 5 有一个已知条件是“$ABCD$ 是空间四边形”，仔细检查证明过程，发现没有哪一步用到这个已知条件．将这个已知条件去掉，改为“$ABCD$ 是平面四边形”，证明过程仍然成立．

练习

1．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 在 A_1D_1 上，且$\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}$，$F$ 在对角线 A_1C 上，且$\overrightarrow{A_1F}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FC}$，求证：$E$，$F$，$B$ 三点共线．



（第 1 题）

2．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=30^\circ$，求$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$的值．

3．已知在空间四边形 $ABCD$ 中，$DA\perp BC$，$DB\perp AC$，求证：$DC\perp AB$．

习题 2.2

学而时习之

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O.

①$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$是一对相反向量;

②$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OD_1}$是一对相反向量;

③$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$是一对相反向量;

④$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$是一对相反向量.

上述结论中正确的有__________. (填写所有正确命题的序号)

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，化简下列各式:

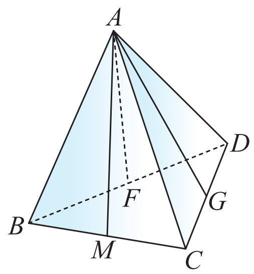
(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$;　　(2) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C}$;

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1D_1}$;　　(4) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1D}$.

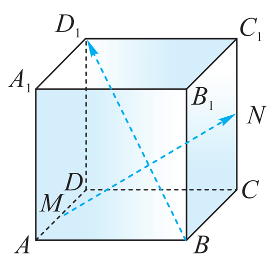
3. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，F，M，G 分别是 BD，BC，CD 的中点，化简下列各式:

(1) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$;　　(2) $\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$;

(3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{MB}$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 AD，CC_1 的中点，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试分别用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{BD_1}$，$\overrightarrow{MN}$.

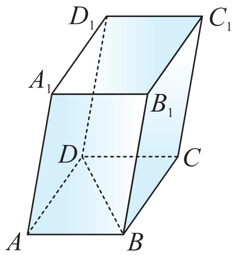
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$. 求证: A，B，C 三点共线.

6. 已知空间四边形 $ABCD$ 的边长和对角线长都为 2，E，F，G 分别为 AB，AD，DC 的中点，求下列数量积:

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;　　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$;

(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$;　　(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$.

7. 如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=3$，$AB=2$，$AD=4$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$，求 AC_1 的长.



（第 7 题）

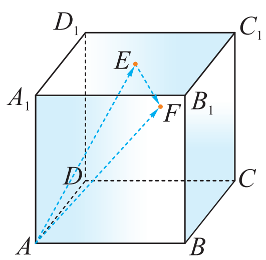
温故而知新

8. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和侧面 CC_1D_1D 的中心，分别求满足下列各式的 x，y，z 的值.

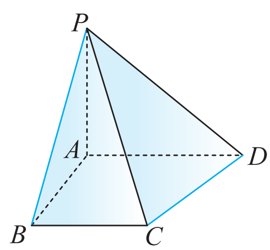
（1）$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$；

（2）$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$；

（3）$\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AB\perp AD$，且 $PA=AB=BC=\frac{1}{2}AD=1$，求 PB 与 CD 所成的角.

2.3 空间向量基本定理及坐标表示

我们知道，在平面上任取两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为基，可以把平面上所有的向量 $\boldsymbol{p}$ 唯一地表示成 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，并用$(x, y)$来表示向量 $\boldsymbol{p}$.

对于空间中的任一向量，是否也有类似的结论呢？

2.3.1 空间向量的分解与坐标表示

一 共面向量

空间中任意两个向量总是共面的，但空间中任意三个向量可能是共面的，也可能是不共面的，什么情况下三个空间向量共面呢？

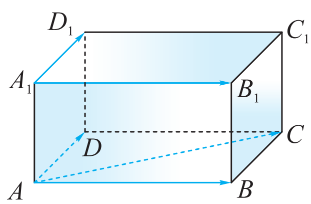


图 2.3－1

如图 2.3－1，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD}$，而$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$在同一平面内，此时，我们称$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_1D_1}$，$\overrightarrow{AC}$共面.

一般地，能平移到同一平面内的向量叫作**共面向量**.

对于空间两个不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，若空间任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面，则 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 这三个向量之间存在怎样的关系呢？

对于空间三个向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$（$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线），当 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面时，根据平面向量基本定理，存在唯一的有序实数组(x, y)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

反过来，对于空间三个向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，如果存在有序实数组(x, y)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面吗？

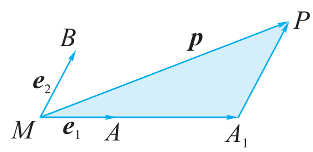


图 2.3－2

在空间中任取一点 M，作

$$\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{e}_1，\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{e}_2，\overrightarrow{MA_1}=x\boldsymbol{e}_1.$$

过点 A_1 作$\overrightarrow{A_1P}=y\boldsymbol{e}_2$（图 2.3－2），则

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1P}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{p}.$$

所以点 P 在平面 MAB 内，从而$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$共面，即向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面.

这样，我们得到以下结论：

如果两个向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是存在有序实数组 (x, y)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

这就是说，向量 $\boldsymbol{p}$ 可以用两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 线性表示.

在三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中，某个向量为 $\boldsymbol{0}$，或者某两个向量平行，则这三个向量共面.

例 1 如图 2.3－3，斜三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$. 在 AC' 和 BC 上分别取点 M 和 N，使 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}(0\leqslant k\leqslant 1)$.

求证：$\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面.

证明 因为 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC'}$

$$=k(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'})=k(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\\&=\boldsymbol{a}+k\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{a}+k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\boldsymbol{a}+k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\&=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{c}\\&=(1-k)\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

因此 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面.

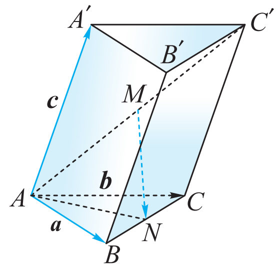


图 2.3－3

本例中若要求证点 A'，B，M，N 四点共面，如何证明？

二 空间向量基本定理

类似于平面向量基本定理，我们希望能将空间任一向量也表示成某几个向量的实数倍之和.

任取三个不共面向量 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$，$\boldsymbol{e}_3=\overrightarrow{OE_3}$，以及空间任一向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$，如图 2.3－4.

过 OE_1，OE_2 作平面 α. 过点 P 作直线 $PD/\!/\boldsymbol{e}_3$，交平面 α 于点 D，则 $\overrightarrow{DP}=z\boldsymbol{e}_3$ 对某个实数 z 成立.

连接 OD，则 OD 在平面 α 内，因而 $\overrightarrow{OD}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 对唯一有序实数组 (x, y) 成立. 于是

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3, \qquad (*)$$

即 $\overrightarrow{OP}$ 被分解成三个不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的实数倍之和.

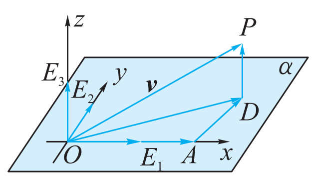


图 2.3－4

下面，我们来证明(*)式中的系数 x，y，z 唯一确定.

假设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3$.

若 $x\neq x'$，则有 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{y'-y}{x-x'}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{z'-z}{x-x'}\boldsymbol{e}_3$.

这表明 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 共面，与已知矛盾.

因此 $x=x'$.

同理可证 $y=y'$，$z=z'$.

这说明表达式(*)唯一. 由此得到**空间向量基本定理**：

> **设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是空间中三个不共面向量，则空间中任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 可以分解成这三个向量的实数倍之和：**
>
> $$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$
>
> **上述表达式中的系数 x，y，z 由 $\boldsymbol{p}$ 唯一确定，即**
>
> **若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3$，则**
>
> $$x=x',\ y=y',\ z=z'.$$

我们把 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 称为空间的一组**基**，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 叫作**基向量**. (x, y, z) 称为向量 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的坐标.

例 2 如图 2.3-5，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，G 为 $\triangle A'BD$ 的重心. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为一组基，求 $\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{AG}$ 在这组基下的坐标.

解 在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

因为 G 为 $\triangle A'BD$ 的重心，

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'G}&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'D})\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'})\\&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\\&=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

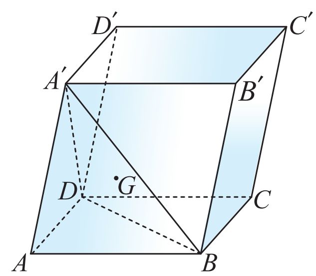


图 2.3-5

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=\boldsymbol{c}+\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}.$$

因此 $\overrightarrow{AC'}$ 和 $\overrightarrow{AG}$ 在基 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 下的坐标分别为 $(1, 1, 1)$，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

练习

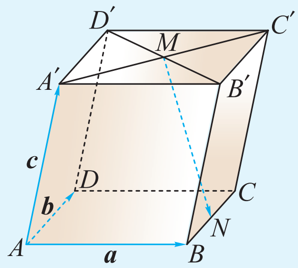
1. 已知 A，B，C 三点不共线，对空间任意一点 O，当 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 $x+y+z=1$）时，点 P 是否与 A，B，C 共面？

2. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量，下列能构成一组基的是（　　）

（A）$2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　（B）$2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}$

（C）$\boldsymbol{a}$，$2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　（D）$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，M 是 $\square A'B'C'D'$ 的对角线的交点，N 是棱 BC 的中点．设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，若以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为一组基，求 $\overrightarrow{MN}$ 在这组基下的坐标．



（第 3 题）

三　空间向量的直角坐标表示

空间任意三个两两垂直、长度均为 1 的向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 不共面，可将它们组成空间的一组基，我们把这组基称为**标准正交基**．

空间每个向量 $\boldsymbol{p}$ 都可以分解成基向量的实数倍之和：

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

系数 x，y，z 按顺序排成的实数组 (x, y, z)，称为向量 $\boldsymbol{p}$ 的**坐标**，记为 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$．

在空间中任意取一点 O 为原点，分别以标准正交基 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 中三个基向量的方向为三条坐标轴的正方向，以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系．将任意空间向量 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 用从原点 O 出发的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 表示，则有向线段的终点 P 对应于这个向量 $\boldsymbol{p}$．

下面我们证明：向量 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下的坐标 (x, y, z) 就是点 P 在这个直角坐标系中的坐标．

如图 2.3-6，以基向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的方向为坐标轴正方向，建立空间直角坐标系．作 $\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OR}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OS}=z\boldsymbol{k}$，则点 Q，R，S 的坐标分别为 $(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, z)$．

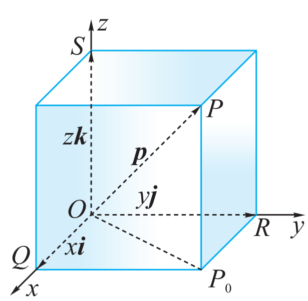


图 2.3-6

过点 Q 作平面垂直于 x 轴，过点 R 作平面垂直于 y 轴，过点 S 作平面垂直于 z 轴，三个平面交于一点 P，则 P 的坐标为(x, y, z)，而向量

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

故$\overrightarrow{OP}$在标准正交基$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$下的坐标$(x, y, z)$就是点 P 在这个坐标系中的坐标.

反过来，如果先建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，分别在三条坐标轴正方向上取长度为 1 的向量$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{k}$ 组成标准正交基，则空间任意一点 $P(x, y, z)$决定的向量 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$在这组标准正交基下的坐标等于点 P 的坐标(x, y, z).

标准正交基的基向量的坐标分别是 $\boldsymbol{i}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{j}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{k}=(0, 0, 1)$.

如果 P，Q 为空间直角坐标系内任意两点，那么向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标如何表示呢?

如图 2.3－7，设向量$\overrightarrow{PQ}$的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，则

$$\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \overrightarrow{OQ}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

因为
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

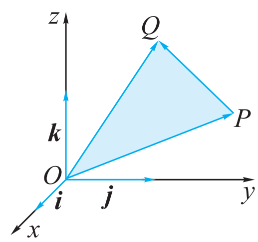


图 2.3－7

因此$\overrightarrow{PQ}$的坐标为$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

这就是说，**一个空间向量在空间直角坐标系中的坐标，等于表示这个空间向量的有向线段的终点的坐标减去它的起点的坐标.**

例 3 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，已知 $AB=4$，$AD=2$，$AA'=4$，建立适当的空间直角坐标系.

(1) 求点 C'的坐标；

(2) 求$\overrightarrow{A'D'}$的坐标.

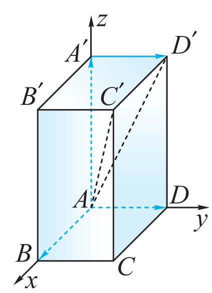


图 2.3－8

解 (1) 如图 2.3－8，以点 A 为原点，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$为标准正交基方向，均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

$$\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{AD}=2\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{AA'}=4\boldsymbol{k}.$$

又
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\\&=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

所以点 C'的坐标为$(4, 2, 4)$.

(2) 因为$\overrightarrow{AA'}=4\boldsymbol{k}$，所以点 A'的坐标为$(0, 0, 4)$.

又 $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，

所以点 D'的坐标为$(0, 2, 4)$.

?

能不能另外建立一个空间直角坐标系，使 C'的坐标为$(0, 0, 0)$，$\overrightarrow{A'D'}$的坐标仍为$(0, 2, 0)$? 试一试.

因此$\overrightarrow{A'D'}=(0,2,4)-(0,0,4)=(0,2,0)$.

结合图 2.3-6 思考：如何求向量 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$在三条坐标轴正方向上的投影？

由图可知，$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在三条坐标轴正方向上的投影向量$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OR}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OS}=z\boldsymbol{k}$，因此 $\boldsymbol{p}$ 在三条坐标轴正方向上的投影分别是 x，y，z. 由此可知：

向量在坐标轴正方向上的投影分别等于该向量在相应坐标轴上的坐标.

也可以通过向量 $\boldsymbol{p}$ 与三条坐标轴正方向的夹角 α，β，γ 来计算投影：

$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在 x 轴正方向上的投影为$|\boldsymbol{p}|\cos\alpha$，可知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{p}|\cos\alpha&=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{i}|\cos\alpha\\&=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{i}\\&=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}\\&=x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

又由于 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，

所以 $$|\boldsymbol{p}|\cos\alpha=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{i}=x.$$

同理，$|\boldsymbol{p}|\cos\beta=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}=y$，$|\boldsymbol{p}|\cos\gamma=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=z$.

因此 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$，它在标准正交基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标分别等于 $\boldsymbol{p}$ 与各个基向量的数量积.

> 特别地，单位向量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标分别等于 $\boldsymbol{p}$ 与各个基向量夹角的余弦：$\boldsymbol{p}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例 4 在标准正交基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，已知向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 上的投影.

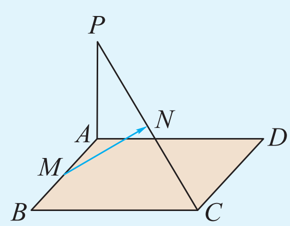
解 因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=-4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}\\&=-4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=-11\boldsymbol{i}-33\boldsymbol{j}-49\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 上的投影等于-11.

练习

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中建立空间直角坐标系，若正方体的棱长为 1，分别求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC_1}$，$\overrightarrow{B_1D}$的坐标.

2. 如图，PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，M，N 分别是 AB，PC 的中点，并且 $PA=AB=1$. 试建立适当的空间直角坐标系，求向量$\overrightarrow{MN}$的坐标.



（第 2 题）

3. 在标准正交基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,1)$，求向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 上的投影.

2.3.2 空间向量运算的坐标表示

类似平面向量的坐标运算，有了空间向量的坐标，我们就可以把空间向量运算转化为空间坐标的运算.

一 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$.

同理可得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$.

于是，我们有

> **两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和(或差)的坐标等于这两个向量相应坐标的和(或差)，即**
>
> $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1, y_1, z_1)\pm(x_2, y_2, z_2)\\&=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2).\end{aligned}$$

又 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1, y_1, z_1)=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}$，

故 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

于是，我们有

> **一个实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 乘积的坐标等于这个实数乘向量相应的坐标，即**
>
> $$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x, y, z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由向量的数乘可知，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 因此，若 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$(x_2, y_2, z_2)=\lambda(x_1, y_1, z_1)$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 即

> $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}&\Leftrightarrow(x_1, y_1, z_1)/\!/(x_2, y_2, z_2)\\&\Leftrightarrow x_2=\lambda x_1, y_2=\lambda y_1, z_2=\lambda z_1(\lambda\in\mathbf{R}).\end{aligned}$$

例 5 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,-4,8)$，$\boldsymbol{b}=(3,10,-4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(-1,-4,8)+(3,10,-4)\\&=(-1+3,-4+10,8-4)\\&=(2,6,4).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(-1,-4,8)-(3,10,-4)\\&=(-1-3,-4-10,8+4)\\&=(-4,-14,12).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}&=3(-1,-4,8)\\&=(-3,-12,24).\end{aligned}$$

例 6 已知空间四点 $A(-3,3,1)$，$B(3,-5,3)$，$C(10,0,10)$和 $D(7,4,9)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.

证明 依题意有 $\overrightarrow{AB}=(3+3,-5-3,3-1)=(6,-8,2)$.

同理 $\overrightarrow{DC}=(3,-4,1)$，$\overrightarrow{AD}=(10,1,8)$，$\overrightarrow{BC}=(7,5,7)$.

因为 $$(6,-8,2)=2(3,-4,1),$$

所以 $$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC},$$

则 $$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}，且|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{DC}|.$$

又 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，

所以四边形 $ABCD$ 是梯形.

例 7 如图 2.3-9，已知 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$两点，点 M 在直线 AB 上，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，$\lambda$ 为实数且 $\lambda\neq-1$，求点 M 的坐标.

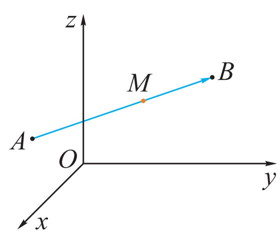


图 2.3-9

解 $M(x,y,z)$为直线 AB 上的点，则
$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

由已知 $$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB},$$

得 $$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

因而 $$x-x_1=\lambda(x_2-x)\Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y-y_1=\lambda(y_2-y)\Rightarrow y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z)\Rightarrow z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

因此点 M 的坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

我们称点 M 为有向线段$\overrightarrow{AB}$的**定比分点**.

练习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,\ -2,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\boldsymbol{c}=(3,\ 0,\ 2)$，求 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

2. 判断下列各小题中的两个向量是否平行：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ -6,\ 4)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-2,\ 0,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(8,\ 0,\ 20)$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(2,\ 2m-3,\ n+2)$，$\boldsymbol{b}=(4,\ 2m+1,\ 3n-2)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求实数 m，n 的值.

二 向量数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1,\ y_1,\ z_1)\cdot(x_2,\ y_2,\ z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

由 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)\cdot(x_1,\ y_1,\ z_1)=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 可得，向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$的模长为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$可得，向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$和 $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$所成角 α 的余弦值为

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

特别地，向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ 垂直的条件为

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例 8 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 DD_1，BD，BB_1 的中点.

（1）求证：$EF\perp CF$；

（2）求 EF 与 CG 所成角的余弦值；

（3）求 CE 的长.

解 如图 2.3－10，以 D 为原点，以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为标准正交基方向，均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

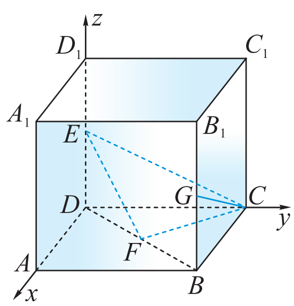


图 2.3－10

$D(0, 0, 0)$，$E\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$，$C(0, 1, 0)$，

$F\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$，$G\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$.

（1）$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

因为 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{CF}$，即 $EF\perp CF$.

（2）由 $\overrightarrow{CG}=\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ 及（1）得

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{2}\times1+\dfrac{1}{2}\times0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

又 $|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$|\overrightarrow{CG}|=\sqrt{1^2+0^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CG}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CG}|}=\dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

因此 EF 与 CG 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

（3）因为 $\overrightarrow{CE}=\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

练习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 1,\ -1)$，计算：

(1) $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|-3\boldsymbol{a}|$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1,\ 2)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，求 $\boldsymbol{b}$.

3. 已知空间三点 $A(-4,\ 0,\ 4)$，$B(-2,\ 2,\ 4)$，$C(-3,\ 2,\ 3)$. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1) 求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$；

(2) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

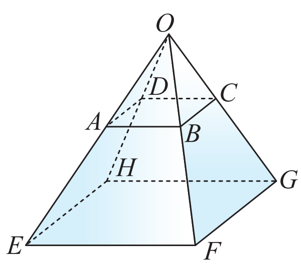
(3) 若向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求实数 k 的值.

4. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 AB，BC 上的动点，且 $AE=BF$. 求证：$A_1F\perp C_1E$.

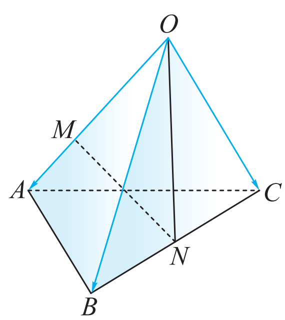
习题 2.3

学而时习之

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，过平面 AC 外一点 O 作射线 OA，OB，OC，OD，在四条射线上分别取点 E，F，G，H，并且使 $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OH}{OD}=k$. 求证：$E$，$F$，$G$，$H$ 四点共面.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点 M 在棱 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 中点. 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为基，求 $\overrightarrow{MN}$ 在这组基下的坐标.

3. 已知▱$ABCD$三个顶点的坐标分别为$A(4, 1, 3)$，$B(2, -5, 1)$，$C(-3, 7, -5)$，求顶点D的坐标.

4. 已知在标准正交基$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$下，向量$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{j}$上的投影.

5. 已知$A(1, 0, 1)$，$B(1, 2, 1)$，$C(2, 2, 4)$，求$\triangle ABC$的面积.

6. 若A，B两点的坐标分别为$A(\cos\alpha, \sin\alpha, 3)$，$B(2\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$，求$|\overrightarrow{AB}|$的取值范围.

7. 已知空间三点$A(0, 2, 3)$，$B(-2, 1, 6)$，$C(1, -1, 5)$.

(1)求以向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为一组邻边的平行四边形的面积S；

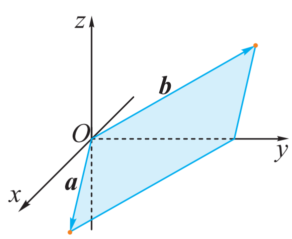
(2)若向量$\boldsymbol{a}$分别与向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$垂直，且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，求向量$\boldsymbol{a}$的坐标.

温故而知新

8. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是空间的一组单位正交基，向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是空间的另一组基. 若向量$\boldsymbol{p}$在基$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$下的坐标为$(1, 2, 3)$，求$\boldsymbol{p}$在基$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$下的坐标.

9. 设O为坐标原点，向量$\overrightarrow{OA}=(1, 2, 3)$，$\overrightarrow{OB}=(2, 1, 2)$，$\overrightarrow{OP}=(1, 1, 2)$，点$Q$在直线$OP$上运动，求$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$取得最小值时点$Q$的坐标.

10. 如图，已知$\boldsymbol{a}=(1, 0, -1)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 2, 1)$，试求以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的两条高的长.



（第 10 题）

11. 对任意实数x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2，试用向量知识证明下述结论：

$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$，

等号成立的条件是：$(x_1, y_1, z_1)=(0, 0, 0)$，或存在实数$a$使$(x_2, y_2, z_2)=a(x_1, y_1, z_1)$.

12. 如图，正方体$ABCD-EFGH$的棱长等于2，K为正方形$ABCD$的中心，M，N分别为棱BF，EF的中点. 试判断下列结论是否成立，并说明理由.

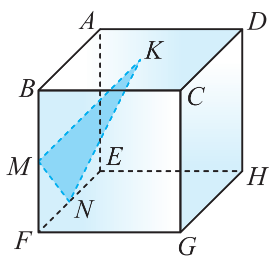
(1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$；

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$；

(3) $|\overrightarrow{KM}|=3$；

(4) $\triangle KMN$为直角三角形；

(5) $\triangle KMN$的面积为10.



（第 12 题）

多知道一点

n 维向量

空间中的向量$\overrightarrow{OP}$可以用几何线段表示，称为几何向量；可以用三个有序实数组成的坐标(x, y, z)来表示的向量，称为三维向量. 如果只讨论同一平面上的几何向量，可以只用两个有序实数组成的坐标(x, y)来表示，这样的向量称为二维向量.

n 个实数也可以组成有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，这称为 n 维向量. n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$也可以定义加、减、数乘、数量积运算：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b} &=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\pm(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\ &=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \cdots, a_n\pm b_n);\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),\ \lambda\in\mathbf{R};$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\ &=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.\end{aligned}$$

还可以利用数量积来定义 $\boldsymbol{a}$ 的长度

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

由

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$$

定义 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 α.

n 维向量虽然不能画成几何线段，但在现实生活中也有广泛的应用(参见第 4 章的“多知道一点：夹角余弦与文本分类”).

2.4 空间向量在立体几何中的应用

空间向量既能刻画几何对象，又能像数一样参与运算，这为我们解决空间几何图形的位置关系与度量关系问题提供了一种十分有效的工具.

2.4.1 空间直线的方向向量和平面的法向量

立体几何研究的基本对象是点、直线、平面以及由它们组成的空间图形，为了用空间向量解决几何问题，首先必须把点、直线、平面用向量表示出来.

如何用向量来确定一个点在空间的位置？

在空间中，取一定点 O 作为原点，那么空间中任意一点 P 的位置就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，$\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**位置向量**.

下面，我们来学习如何利用向量刻画直线与平面的方向和位置.

一 直线的方向向量

对于平面上的直线，可以用平面向量刻画其方向．对于空间直线，是否也可用空间向量来刻画其方向？

如图 2.4－1，在直线 l 上任取两个不同的点 A，B，则有向线段 AB 所代表的向量 $\overrightarrow{AB}$ 就表示直线的方向，称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量．自然，$\overrightarrow{BA}$ 也是直线 l 的方向向量.

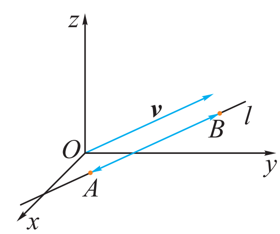


图 2.4－1

一般地，如果非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与直线 l 平行，就称 $\boldsymbol{v}$ 为 l 的**方向向量**.

已知空间直线 l 上一个定点 A 以及这条直线的一个方向向量，就可以确定这条空间直线的位置.

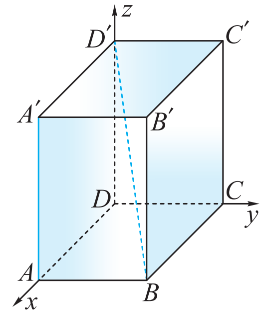


图 2.4－2

例 1 如图 2.4－2，已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长 $AB=2$，$AD=4$，$AA'=3$．以点 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD'}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，求下列直线的一个方向向量：

（1）AA'；　　（2）BD'.

解 由已知可得，长方体顶点 A，B，A'，D'的坐标分别为

$$A(4,0,0),\ B(4,2,0),\ A'(4,0,3),\ D'(0,0,3).$$

(1) 因为向量$\overrightarrow{AA'}=(0,0,3)$，所以直线 AA'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_{AA'}=(0,0,3)$.

(2) 因为向量$\overrightarrow{BD'}=(-4,-2,3)$，所以直线 BD'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_{BD'}=(-4,-2,3)$.

值得说明的是，一条直线有无穷多个方向向量，这些方向向量是相互平行的；直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 也是所有与 l 平行的直线的方向向量. 这个可根据直线方向向量的定义和平行直线的传递性推知.

二 平面的法向量

由直线上一点和直线的一个方向向量就可以确定一条直线的位置，这启发我们也希望通过一个点和一个向量来确定一个平面的位置.

为什么不用平面上的有向线段代表的向量来刻画平面的方向?

动手旋转一个圆盘陀螺(如图 2.4－3)，可以发现陀螺转动时，圆盘平面时而水平，时而倾斜，在不断改变方向. 陀螺的轴也随圆盘平面在不断改变方向，但始终与圆盘垂直.

我们可以用轴的方向来刻画陀螺圆盘平面的方向，也就是用与平面垂直的向量 $\boldsymbol{n}$ 来刻画圆盘平面的方向.

如果非零向量 $\boldsymbol{n}$ 所在直线与平面 α 垂直，则称 $\boldsymbol{n}$ 为**平面 α 的法向量.**

给定一点 A 和一个向量 $\boldsymbol{n}$，那么，过点 A，且以向量 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面是完全确定的.

图 2.4－3

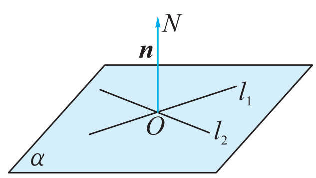


图 2.4－4

如何寻找平面的法向量 $\boldsymbol{n}$?

由于两条相交直线可以确定一个平面，因而若一个向量$\overrightarrow{ON}$垂直于平面 α 内的两条相交直线 l_1，l_2，就可以确定$\overrightarrow{ON}$是平面 α 的一个法向量，如图 2.4－4.

一个平面的法向量有无穷多个. 由于垂直于同一平面的直线是平行的，因而一个平面的所有法向量互相平行.

例 2 如图 2.4－5，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 A，B，D，A_1 的坐标分别为 $A(0,\ 0,\ 0)$，$B(a,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ a,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ a)$. 分别求平面 $ABCD$ 与平面 BDA_1 的一个法向量.

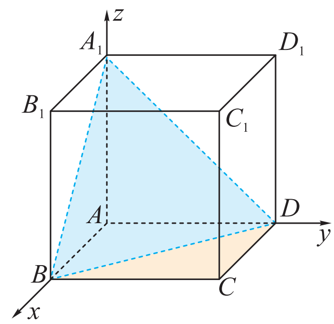


图 2.4－5

解 由于 z 轴垂直于平面 $ABCD$，而 z 轴可用方向向量 $\overrightarrow{AA_1}=(0,\ 0,\ a)$表示，因此$(0,\ 0,\ a)$是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$是平面 BDA_1 的法向量.

由已知得$\overrightarrow{BD}=(-a,\ a,\ 0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-a,\ 0,\ a)$，

因而$\begin{cases}(-a,\ a,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)=-ax+ay=0,\\(-a,\ 0,\ a)\cdot(x,\ y,\ z)=-ax+az=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=z=1$，

则 $\boldsymbol{n}=(1,\ 1,\ 1)$是平面 BDA_1 的一个法向量.

?

垂直于坐标轴的平面的法向量有什么特征?

例 2 中求平面 BDA_1 的法向量时，也可采用以下方法：

由 $0=-a+a=(-a,\ a,\ 0)\cdot(1,\ 1,\ z)$可凑出$(1,\ 1,\ z)\perp(-a,\ a,\ 0)$，再由$(-a,\ 0,\ a)\cdot(1,\ 1,\ z)=-a+az=0$ 解出 $z=1$，得到平面 BDA_1 的一个法向量为$(1,\ 1,\ 1)$.

直线的方向向量和平面的法向量为我们判定空间直线、平面之间的位置关系，以及计算直线、平面之间的距离、夹角等问题提供了有力工具.

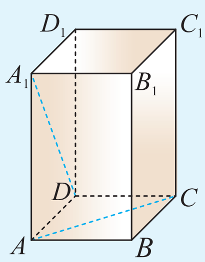
练习

1. 下列直线的方向向量的坐标具有什么特征?

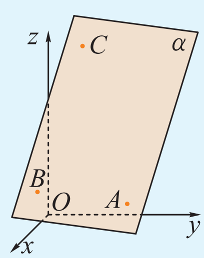
(1) 平行于各坐标轴的直线；

(2) 平行于 xOy 平面的直线(该直线与 x 轴、y 轴都不平行).

2. 如图，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3$，$AD=4$，$BB_1=5$，建立空间直角坐标系，分别求直线 DA_1 与 AC 的方向向量.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知平面 α 内有 $A(2,\ 3,\ 1)$，$B(4,\ 1,\ 2)$，$C(6,\ 3,\ 7)$三点，求平面 α 的法向量.

2.4.2 空间线面位置关系的判定

由直线上一点及直线的方向向量可以刻画直线的位置，由平面内一点及平面的法向量可以刻画平面的位置，那么就可以利用向量运算来判定直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系.

设空间两条直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{v}_2=(x_2, y_2, z_2)$，两个平面 α_1，α_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(a_2, b_2, c_2)$，则

位置关系	向量表示	向量运算	坐标运算
$l_1\perp l_2$	$\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
$l_1\perp\alpha_1$	$\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{n}_1$	$\boldsymbol{n}_1=k\boldsymbol{v}_1$	$a_1=kx_1$，$b_1=ky_1$，$c_1=kz_1$
$\alpha_1\perp\alpha_2$	$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$	$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$	$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$
$l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合	$\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_2=k\boldsymbol{v}_1$	$x_2=kx_1$，$y_2=ky_1$，$z_2=kz_1$
$l_1/\!/\alpha_1$ 或 $l_1\subset\alpha_1$	$\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{n}_1$	$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}_1=0$	$x_1a_1+y_1b_1+z_1c_1=0$
$\alpha_1/\!/\alpha_2$ 或 α_1 与 α_2 重合	$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$	$\boldsymbol{n}_2=k\boldsymbol{n}_1$	$a_2=ka_1$，$b_2=kb_1$，$c_2=kc_1$

上表中 k 为非零常数.

一 向量与垂直

1. 直线与直线垂直

如图 2.4－6，过点 P 作平面 α 的垂线，则称垂足 P_0 为点 P 在平面 α 内的**射影**.

射影也叫投影.

预先给定平面 α，空间任意一个图形的每一个点 P 在平面 α 上都有一个射影 P_0，所有这些 P_0 在平面 α 上组成的图形，称为这个图形在平面 α 上的射影.

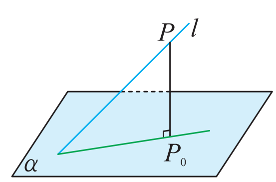


图 2.4－6

直线 l 在平面 α 上的射影是什么图形？

容易看出，如果直线 l 垂直于平面 α，那么 l 在 α 上的射影是一个点，就是 l 与 α 的交点. 如图 2.4－6，如果 l 与 α 不垂直，l 在 α 上的射影就是一条直线.

我们知道，与平面 α 相交但不垂直的直线是平面 α 的斜线. 关于平面 α 的斜线 l 的射影，有如下结论（三垂线定理）：

如果平面内的一条直线与平面的一条斜线在这个平面内的射影垂直，则它和这条斜线也垂直.

下面我们来证明三垂线定理.

例 3 已知 AB，AC 分别是平面 α 的垂线和斜线，BC 是 AC 在 α 内的射影，$l\subset\alpha$ 且 $l\perp BC$.

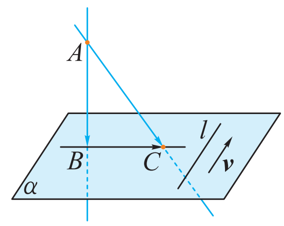


图 2.4－7

求证：$l\perp AC$.

证明 如图 2.4－7，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}$.

因为 $l\perp BC$，所以 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{BC}$.

因为 $AB\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，

所以 $AB\perp l$，即$\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{v}$.

又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{v}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}+\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

因此 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{AC}$，从而 $l\perp AC$.

你能运用向量知识证明三垂线定理的逆定理吗？试一试.

类似地，可以得到以下结论(三垂线定理的逆定理)：

如果平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直，则它和这条斜线在平面内的射影也垂直.

2. 直线与平面垂直

如果一条直线垂直于平面内的两条相交直线，那么这条直线与该平面垂直，这就是直线与平面垂直的判定定理. 下面我们运用向量知识来证明它.

例 4 设直线 l 同时垂直于平面 α 内两条相交的直线 a，b.

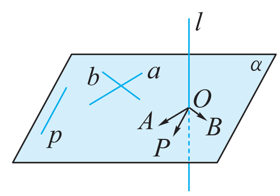


图 2.4－8

求证：$l\perp\alpha$.

证明 如图 2.4－8，设直线 l 与平面 α 相交于点 O，从点 O 出发在平面 α 内分别作有向线段 OA，OB，OP，使其分别代表直线 a，b，p 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}$，其中直线 p 是 α 内任一直线.

根据平面向量基本定理可得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中 x，y 是不全为 0 的实数.

任取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0，\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}&=\boldsymbol{v}\cdot(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})\\&=x(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})+y(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b})\\&=x\times0+y\times0\\&=0.\end{aligned}$$

例 4 中直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 与平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间有何关系？

这说明 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{p}$，从而 $l\perp p$.

由于直线 l 垂直于平面 α 内任一直线，由直线与平面垂直的定义可得 $l\perp\alpha$.

3. 平面与平面垂直

例 5 如图 2.4-9，已知平面 α，β，直线 $AB\perp$平面 α，且 $AB\subset$平面 β.

求证：平面 $\alpha\perp$平面 β.

证明 设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的法向量.

因为直线 $AB\perp$平面 α，

所以$\overrightarrow{AB}\perp$平面 α，即$\overrightarrow{AB}$是平面 α 的法向量.

因为 $AB\subset$平面 β，

所以$\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{n}$.

因此平面 $\alpha\perp$平面 β.

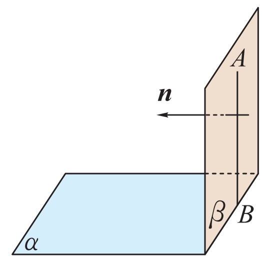


图 2.4-9

例 5 实质上是运用向量方法对平面与平面垂直的判定定理进行了证明.

例 6 在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，$BC=CD$，$\angle BCD=90°$，$\angle ADB=30°$，E，F 分别是 AC，AD 的中点.

求证：平面 $BEF\perp$平面 ABC.

证明 如图 2.4-10，以点 B 为原点，分别以$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BA}$为 y 轴、z 轴的正方向，并取相同的单位长度，建立空间直角坐标系.

设 $A(0,\ 0,\ a)$，则

$B(0,\ 0,\ 0)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)$，$D(0,\ \sqrt{3}a,\ 0)$，

$E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{a}{2}\right)$，$F\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2}\right)$.

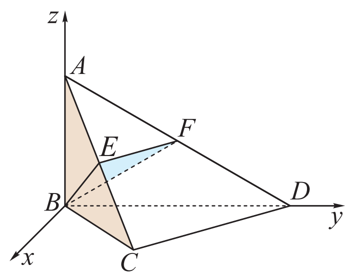


图 2.4-10

于是 $\overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ -a)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$是平面 ABC 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=-az_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}ax_1+\frac{\sqrt{3}}{2}ay_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=1$，得 $y_1=-1$，$z_1=0$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ -1,\ 0)$是平面 ABC 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$是平面 BEF 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{3}}{4}ax_2+\frac{\sqrt{3}}{4}ay_2+\frac{a}{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{\sqrt{3}}{2}ay_2+\frac{a}{2}z_2=0,\end{cases}$

试结合例 6 的解答过程，归纳运用坐标法（包含向量方法）证明两个平面垂直的方法与步骤.

取 $x_2=1$，得 $y_2=1$，$z_2=-\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}_2=(1, 1, -\sqrt{3})$是平面 BEF 的一个法向量.

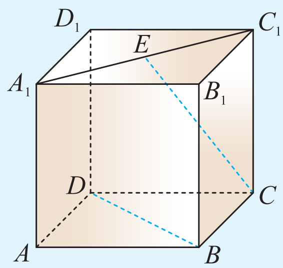
因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(1, -1, 0)\cdot(1, 1, -\sqrt{3})=0$，

所以平面 $BEF\perp$平面 ABC.

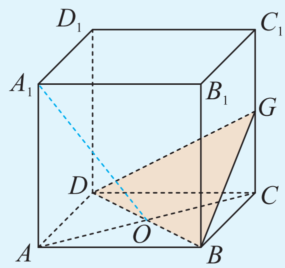
练习

1. 如图，已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 A_1C_1 的中点.

求证：$CE\perp BD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 O 为 AC 与 BD 的交点，G 为 CC_1 的中点.

求证：$A_1O\perp$平面 GBD.

3. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，CD 的中点.

求证：平面 $AED\perp$平面 A_1FD_1.

二 向量与平行

1. 直线与直线平行

例 7 已知两条不重合的直线 m，n 和平面 α 都垂直.

求证：$m/\!/n$.

证明 设 m，n 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$.

因为 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，

所以 $\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{v}_2/\!/\boldsymbol{n}$.

故存在非零实数 x，y，使 $\boldsymbol{v}_1=x\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}=y\boldsymbol{v}_2$，

则 $\boldsymbol{v}_1=(xy)\boldsymbol{v}_2$，因此 $\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2$.

又因为 m 与 n 不重合，所以 $m/\!/n$.

2. 直线与平面平行

我们已学过直线与平面平行的判定定理，下面运用向量知识来证明这一定理.

例 8 已知 $a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a/\!/b$.

求证：$a/\!/\alpha$.

证明 如图 2.4－11，设直线 a 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1$，直线 b 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$.

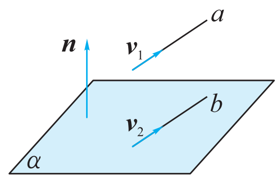


图 2.4－11

因为 $a/\!/b$，

所以 $\boldsymbol{v}_1=k\boldsymbol{v}_2$，$k$ 为非零常数.

因为平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，$b\subset\alpha$，

所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}_2$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2=0$.

又 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{n}\cdot(k\boldsymbol{v}_2)=k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)=0$，$a\not\subset\alpha$，

所以 $a/\!/\alpha$.

3. 平面与平面平行

例 9 已知平面 α_1，α_2，a 与 b 是平面 α_1 内两条相交的直线，且 $a/\!/\alpha_2$，$b/\!/\alpha_2$.

求证：$\alpha_1/\!/\alpha_2$.

证明 如图 2.4－12，设 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 分别为相交直线 a，b 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α_2 的法向量.

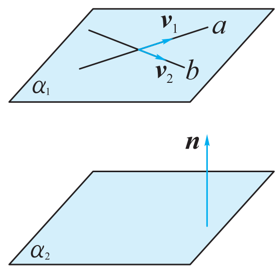


图 2.4－12

因为 $a/\!/\alpha_2$，$b/\!/\alpha_2$，

所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2=0$.

因此 $\boldsymbol{n}\perp a$，$\boldsymbol{n}\perp b$，即 $\boldsymbol{n}\perp\alpha_1$.

从而平面 α_1，α_2 有共同的法向量.

又两个平面不重合，因此 $\alpha_1/\!/\alpha_2$.

例 9 运用向量方法证明了平面与平面平行的判定定理.

例 10 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，M，N，E，F 分别是棱 A_1D_1，A_1B_1，D_1C_1，B_1C_1 的中点.

求证：平面 $AMN/\!/$平面 $BDEF$.

证明 如图 2.4－13，以点 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则 $D(0,\ 0,\ 0)$，$A(a,\ 0,\ 0)$，$B(a,\ a,\ 0)$，$M\left(\frac{a}{2},\ 0,\ a\right)$，$N\left(a,\ \frac{a}{2},\ a\right)$，$E\left(0,\ \frac{a}{2},\ a\right)$，$F\left(\frac{a}{2},\ a,\ a\right)$.

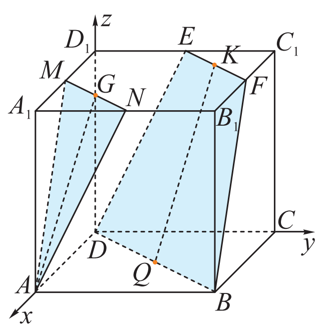


图 2.4－13

于是 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{a}{2},\ 0,\ a\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,\ \frac{a}{2},\ a\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$是平面 AMN 的法向量，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{a}{2}x_1+az_1=0, \\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{a}{2}x_1+\frac{a}{2}y_1=0, \end{cases}$

取 $z_1=1$，得 $x_1=2$，$y_1=-2$，则 $\boldsymbol{n}_1=(2, -2, 1)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$是平面 $BDEF$ 的法向量，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{a}{2}x_2+\frac{a}{2}y_2=0, \\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{a}{2}y_2+az_2=0, \end{cases}$

取 $z_2=1$，得 $y_2=-2$，$x_2=2$，则 $\boldsymbol{n}_2=(2, -2, 1)=\boldsymbol{n}_1$.

又平面 AMN 与平面 $BDEF$ 不重合，

故平面 AMN∥平面 $BDEF$.

试结合例 10 的解答过程，归纳运用坐标法(包含向量方法)证明两个平面平行的方法与步骤.

练 习

1. (1) 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是不重合的直线 l_1，l_2 的方向向量，判断 l_1，l_2 的位置关系.

①$\boldsymbol{a}=(2, 3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(-4, -6, 2)$；

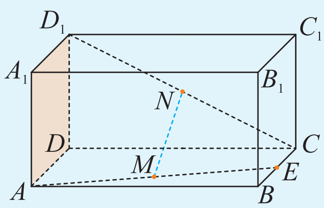
②$\boldsymbol{a}=(3, 0, -1)$，$\boldsymbol{b}=(0, 5, 0)$.

(2) 设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 分别是平面 α，β 的法向量，判断 α，β 的位置关系.

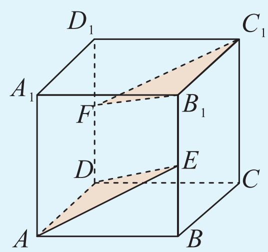
①$\boldsymbol{u}=(1, -1, 2)$，$\boldsymbol{v}=(3, 2, -0.5)$；

②$\boldsymbol{u}=(0, 2, 0)$，$\boldsymbol{v}=(0, -1, 0)$.

2. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，M，N 分别是 BC，AE，CD_1 的中点，$AD=AA_1=a$，$AB=2a$. 求证：MN∥平面 ADD_1A_1.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F 分别是 BB_1，DD_1 的中点，求证：

(1) FC_1∥平面 ADE；

(2) 平面 ADE∥平面 B_1C_1F.

2.4.3 向量与夹角

直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的垂直关系就是夹角为$\frac{\pi}{2}$的特殊情形，而它们之间的平行关系则是夹角为 0 或 π 的特殊情形．用方向向量代表直线的方向，用法向量代表平面的方向，直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角问题就转化成了向量的夹角问题．于是，我们常用空间向量的数量积来解决有关夹角问题．

1. 直线与直线的夹角

同一平面内两条直线的夹角可由平面向量的夹角公式求出．下面我们重点来解决不共面的两条直线（即异面直线）的夹角问题．

如图 2.4－14，设两条异面直线 a 与 b 所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$，它们的方向向量分别是 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 φ．根据异面直线所成角的定义，可知 θ 与 φ 的关系是

$$\theta=\begin{cases}\varphi & \left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{如图 } 2.4-14(1)),\\ \pi-\varphi & \left(\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right) \quad (\text{如图 } 2.4-14(2)).\end{cases}$$

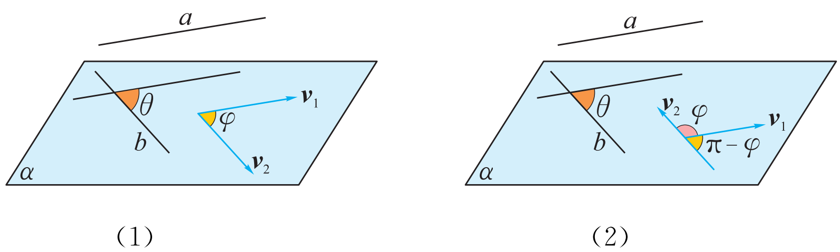


图 2.4－14

对于上述两种情况，均有 $\cos\theta=|\cos\varphi|=|\cos\langle\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$.

例 11 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，求 AD_1 与 EF 所成的角．

解 如图 2.4－15，以 A 为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

$A(0,\ 0,\ 0)$，$D_1(0,\ 1,\ 1)$，$B_1(1,\ 0,\ 1)$，

$C_1(1,\ 1,\ 1)$，$E\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$，$F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$.

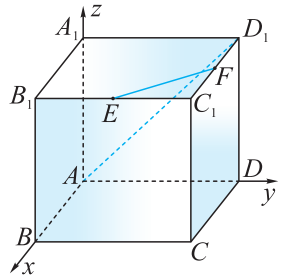


图 2.4－15

故 $\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

设直线 AD_1，EF 所成的角为 α，则

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=|\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{EF}|}\\&=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此直线 AD_1 与 EF 所成的角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

2. 直线与平面所成的角

当直线 l 与平面 α 平行或者在平面 α 内时，直线 l 与平面 α 所成角为 0°；当直线 l 与平面 α 垂直时，直线 l 与平面 α 所成角为 90°；当直线 l 与平面 α 相交，但不与平面 α 垂直时，如图 2.4－16 所示，直线 l 与该直线在平面 α 内的投影 l' 所成的角 θ 就是直线 l 与平面 α 所成的角，其取值范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

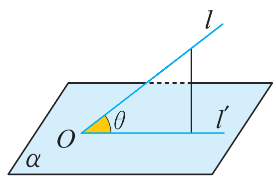


图 2.4－16

实际计算时，有时不容易确定 l 在平面 α 内的投影 l'，这时我们可以借助向量来解决.

如图 2.4－17，当直线 l 与平面 α 相交且不垂直时，设它们所成的角为 θ，$\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 φ，那么 θ 与 φ 有如下关系：

$$\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\varphi & \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{如图 } 2.4-17(1)),\\ \varphi-\frac{\pi}{2} & \left(\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right) \quad (\text{如图 } 2.4-17(2)).\end{cases}$$

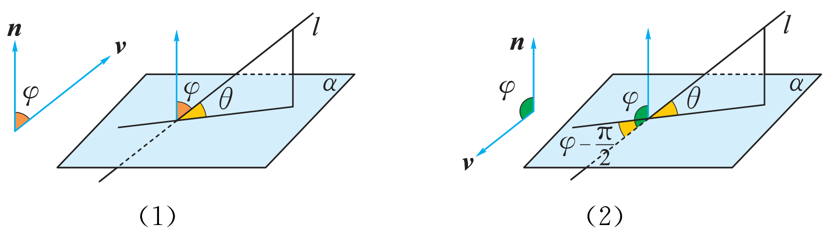


图 2.4－17

当 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$ 时，$\theta=0$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$；当 $l\perp\alpha$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=0$ 或 π.

对于上述情况，均有 $\sin\theta=|\cos\varphi|=|\cos\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|}$.

例 12 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，求直线 AB 与平面 A_1BD 所成角 θ 的正弦值.

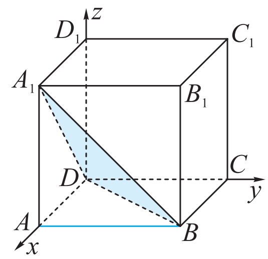


图 2.4-18

解 如图 2.4-18，以点 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

$D(0, 0, 0)$，$A(a, 0, 0)$，$B(a, a, 0)$，$A_1(a, 0, a)$，

于是 $\overrightarrow{BD}=(-a, -a, 0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(a, 0, a)$，$\overrightarrow{AB}=(0, a, 0)$.

取直线 AB 的方向向量 $\boldsymbol{v}=(0, 1, 0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$ 是平面 A_1BD 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-ax-ay=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=ax+az=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=-1$，$z=-1$，

则 $\boldsymbol{n}=(1, -1, -1)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量.

故

$$\begin{aligned}\sin\theta&=|\cos\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle|\\&=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|}\\&=\frac{|0\times1+1\times(-1)+0\times(-1)|}{1\times\sqrt{1^2+(-1^2)+(-1)^2}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

因此，直线 AB 与平面 BDA_1 所成角 θ 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 两个平面所成的角

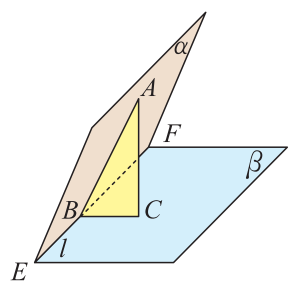


图 2.4-19

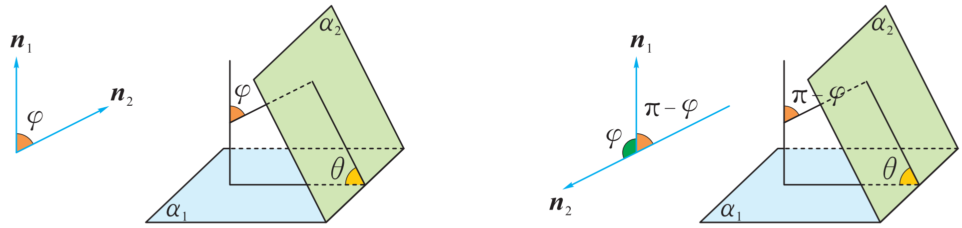
我们已经知道，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形为二面角. 二面角的大小可用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度，其取值范围一般约定为 $[0, \pi]$. 如图 2.4-19，$AB\perp EF$，$CB\perp EF$，则 $\angle ABC$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 或 $A-EF-C$ 的平面角.

两个平面相交会形成四个二面角，一般规定较小的二面角为两平面所成的角，由此可知两个平面所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 当两个平面平行时，它们所成的角为 0°.

实际操作中往往不容易确定二面角的平面角. 由于平面的方向可由法向量来刻画，于是我们可以借助两个平面的法向量来求这两个平面所成的角.

设两个平面 α_1 和 α_2 所成的角为 θ，平面 α_1，α_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，记 $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle=\varphi$，如图 2.4－20，则 θ 与 φ 有如下关系：

$$\theta=\begin{cases}\varphi & \left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right) \quad (\text{如图 } 2.4-20(1)),\\[2ex] \pi-\varphi & \left(\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi\right) \quad (\text{如图 } 2.4-20(2)).\end{cases}$$



（1）　　　　（2）

图 2.4－20

对于上述两种情况，均有 $\cos\theta=|\cos\varphi|=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle|$.

例 13　如图 2.4－21，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点坐标为 $A(2, 0, 0)$，$B(2, 2, 0)$，$C(0, 2, 0)$，$D(0, 0, 0)$，$A_1(2, 0, 2)$，$C_1(0, 2, 2)$，求二面角 $D-BC_1-C$ 的余弦值.

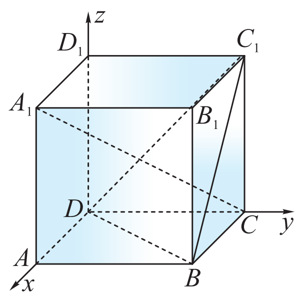


图 2.4－21

分析　先证 $\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{AB}$ 分别为平面 BC_1D，平面 BC_1C 的法向量，再求 $\langle\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{AB}\rangle$.

解　由题意可得 $\overrightarrow{A_1C}=(-2, 2, -2)$，$\overrightarrow{AB}=(0, 2, 0)$，$\overrightarrow{DB}=(2, 2, 0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0, 2, 2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2, 0, 2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2, 0, 0)$.

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 为平面 BC_1D 的一个法向量.

又因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

所以 $\overrightarrow{AB}$ 是平面 BC_1C 的一个法向量.

由于 $\cos\langle\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{AB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{A_1C}|\,|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

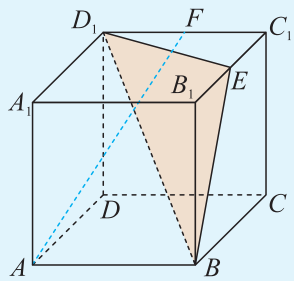
观察图形可知，二面角 $D-BC_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

试结合例 13 的解答过程，归纳运用坐标法（包含向量方法）求二面角的方法与步骤.

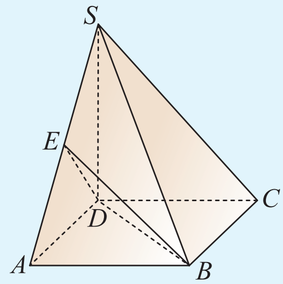
练习

1. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\sqrt{2}BB_1$，求 AB_1 与 C_1B 所成角的大小.

2. 如图，已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，试求 AF 与平面 BED_1 所成角的正弦值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SD\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形，且 $SD=AD=\sqrt{2}AB$，E 是 SA 的中点. 分别求平面 BED 与平面 SAB、平面 BED 与平面 SBC 所成角的大小.

2.4.4 向量与距离

空间中的距离问题包括两点间的距离、点到直线的距离、平行线之间的距离、点到平面的距离、与平面平行的直线到平面的距离、平行平面之间的距离、异面直线的距离等. 空间两点间的距离即为以这两点为起点和终点的向量的模长. 本节主要研究点到直线、点到平面、平行线之间、平行平面之间的距离，这些距离都可以通过求向量的投影长得到.

1. 点到直线的距离

如图 2.4－22，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}$，点 P 为直线 l 外一点，过点 P 作直线 l 的垂线交 l 于点 D，则 $|\overrightarrow{PD}|$ 即为点 P 到直线 l 的距离.

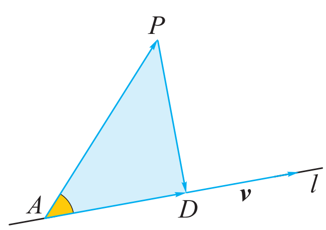


图 2.4－22

设 A 为直线 l 上任意一点，则$\overrightarrow{AD}$是$\overrightarrow{AP}$在 l 上的投影向量，所以投影长

$$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AP}|\,|\cos\angle PAD|=|\overrightarrow{AP}|\cdot\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\overrightarrow{AP}|\,|\boldsymbol{v}|}=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

于是，点 P 到已知直线 l 的距离

$$d=|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2}=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}\right)^2}.$$

例 14 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，求点 E 到直线 AF 的距离.

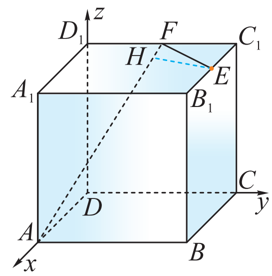


图 2.4－23

解　如图 2.4－23，以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

$A(1,0,0)$，$E\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，

于是 $\overrightarrow{FA}=\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

因此 $|\overrightarrow{FE}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

过点 E 作 FA 的垂线交 FA 于 H，则 $\overrightarrow{FH}$ 是 $\overrightarrow{FE}$ 在 $\overrightarrow{FA}$ 上的投影向量. 于是，

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{FH}|&=\frac{|\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{FA}|}\\
&=\frac{\left|\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times(-1)\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}\\
&=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

于是，点 E 到直线 AF 的距离

$$
|\overrightarrow{HE}|=\sqrt{|\overrightarrow{FE}|^2-|\overrightarrow{FH}|^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{6}.
$$

综上可知，求空间一点 P 到直线 $l(P\notin l)$ 的距离的算法程序如图 2.4－24 所示.

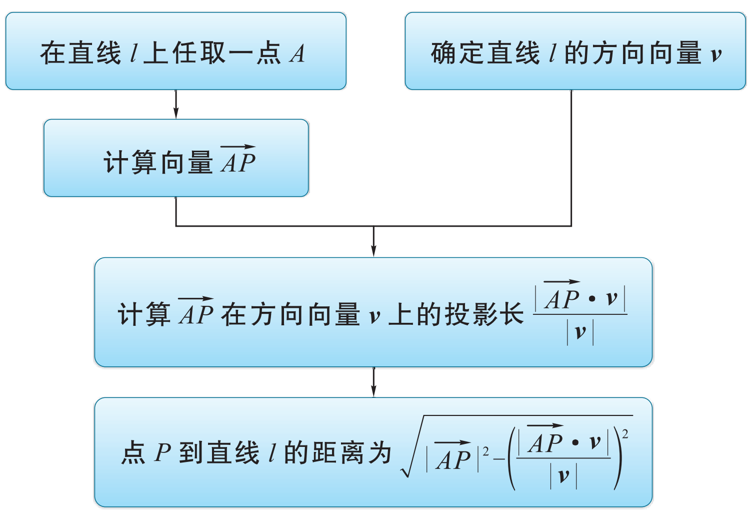


图 2.4－24

2. 点到平面的距离

按照点到平面的距离的定义，平面外一点 P 到平面 α 的距离 d 等于点 P 到平面 α 的垂线段 PB 的长度. 但在很多情形下垂足 B 不容易求得，下面给出一种求点到平面的距离的方法.

如图 2.4－25，在平面 α 内任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AP}$，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，则$\overrightarrow{AP}$在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长

$$|\overrightarrow{BP}|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

即为点 P 到平面 α 的距离 d.

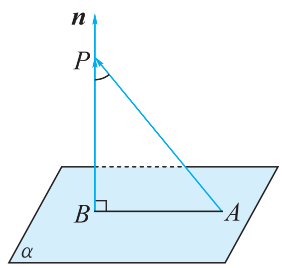


图 2.4－25

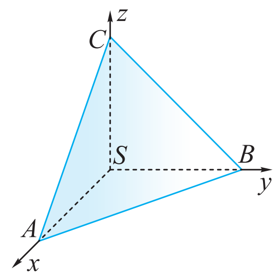


图 2.4－26

例 15 在三棱锥 $S-ABC$ 中，棱长 $SA=a$，$SB=b$，$SC=c$，$\angle ASB$，$\angle BSC$，$\angle CSA$ 都是直角，求点 S 到底面 ABC 的距离.

解 如图 2.4－26，以 S 为原点，分别以$\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系，则

$$S(0,\ 0,\ 0),\ A(a,\ 0,\ 0),\ B(0,\ b,\ 0),\ C(0,\ 0,\ c).$$

所以 $\overrightarrow{AB}=(-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,\ 0,\ c)$，$\overrightarrow{SA}=(a,\ 0,\ 0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$是平面 ABC 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-ax+by=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-ax+cz=0.\end{cases}$

取 $x=bc$，得 $y=ac$，$z=ab$，

则 $\boldsymbol{n}=(bc,\ ac,\ ab)$是平面 ABC 的一个法向量.

由于点 S 到底面 ABC 的距离等于向量$\overrightarrow{SA}$在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长，

因此，点 S 到底面 ABC 的距离

$$\begin{aligned}d&=\frac{|\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}\\&=\frac{|(a,\ 0,\ 0)\cdot(bc,\ ac,\ ab)|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}\\&=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.\end{aligned}$$

综上可知，求空间一点 P 到平面 $\alpha(P\notin\alpha)$ 的距离的算法程序如图 2.4－27 所示.

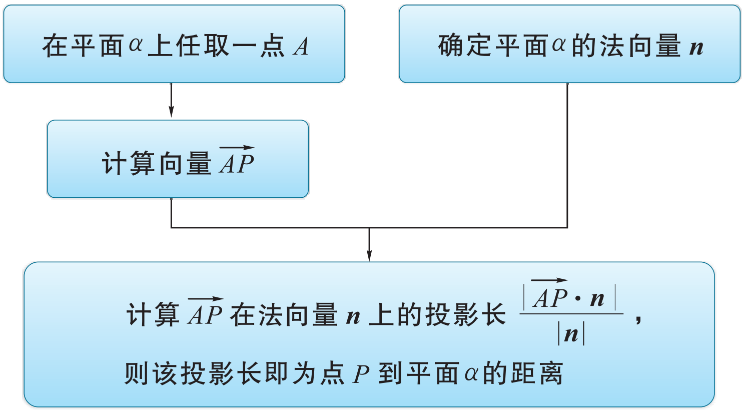
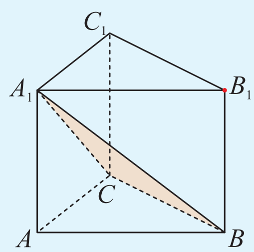


图 2.4－27

练 习

1. 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$，求点 B 到直线 $A'C$ 的距离.

2. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AA_1=\sqrt{2}$，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，求点 B_1 到平面 A_1BC 的距离.



（第 2 题）

3. 两平行线间的距离

我们知道两平行线间的距离处处相等，因而可以利用点到直线的距离来解决两平行线间的距离问题.

例 16 如图 2.4－28，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的顶点坐标为 $B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$A'(0,0,2)$，$B'(1,0,2)$，$D'(0,2,2)$，E 和 F 分别是棱 DD' 和 BB' 的中点，求 CE 与 $A'F$ 之间的距离.

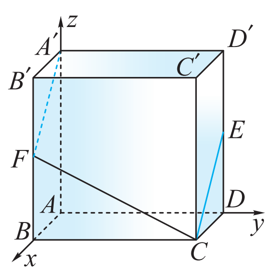


图 2.4－28

解 因为 E 和 F 分别是棱 DD' 和 BB' 的中点，

则 $E(0,2,1)$，$F(1,0,1)$.

又 $\overrightarrow{CE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A'F}=(1,0,-1)$，且直线 CE 与 $A'F$ 无公共点，

所以 $CE /\!/ A'F$.

因此点 F 到直线 CE 的距离即为平行线 CE 与 $A'F$ 之间的距离.

又因为 $\overrightarrow{CE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{FC}=(0,2,-1)$，

所以 $\overrightarrow{FC}$ 在 $\overrightarrow{CE}$ 上的投影长为

$$\frac{|\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{CE}|}=\frac{|0\times(-1)+2\times0+(-1)\times1|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以点 F 到直线 CE 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{FC}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

因此 CE 与 $A'F$ 之间的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

综上可知，求两平行线 m，n 间的距离的算法程序如图 2.4－29 所示.

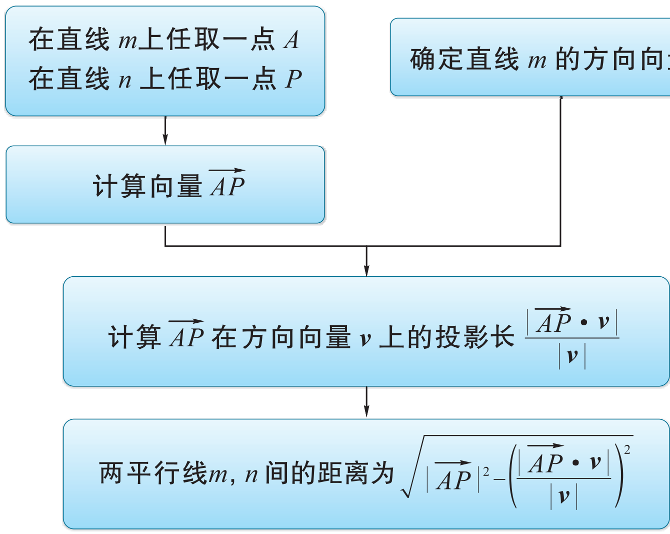


图 2.4－29

4. 两平行平面间的距离

两平行平面 α，β 之间的距离等于平面 α 上任一点 A 到平面 β 的距离，也等于两平面之间任一条线段 AB 在平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长.

如图 2.4－30，A，B 分别是平行平面 α，β 上的任意一点，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α，β 的一个法向量，则平面 α，β 之间的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

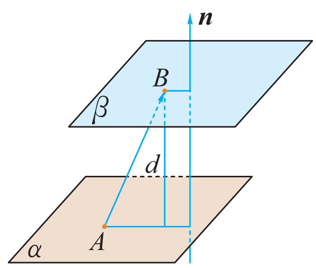


图 2.4－30

例 17 如图 2.4－31，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点坐标为 $A(1，0，0)$，$D(0，0，0)$，$A_1(1，0，1)$，$C_1(0，1，1)$，求平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的距离.

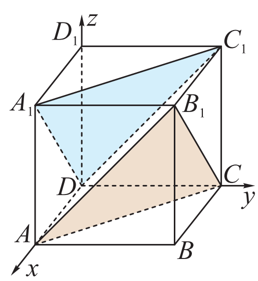


图 2.4－31

解 由题意可得 $\overrightarrow{AD}=(-1，0，0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1，0，1)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0，1，1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$为平面 A_1C_1D 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=y+z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得 $z=-1$，$y=1$，

则 $\boldsymbol{n}=(1, 1, -1)$是平面 A_1C_1D 的一个法向量.

由 $A_1C_1 /\!/ AC$，$C_1D /\!/ AB_1$ 可得，平面 $AB_1C /\!/$ 平面 A_1C_1D.

由于点 A，D 分别在平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 上，因而$\overrightarrow{AD}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长即为平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的距离 d.

因此，所求距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|(-1, 0, 0)\cdot(1, 1, -1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由上可知，求两平行平面 α，β 之间的距离的算法程序如图 2.4－32 所示.

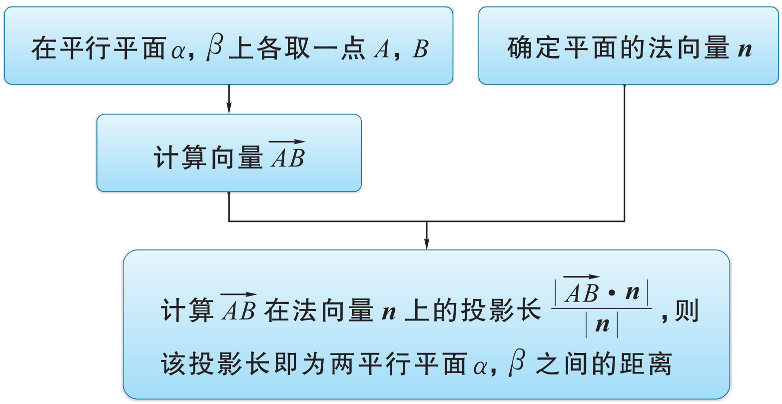
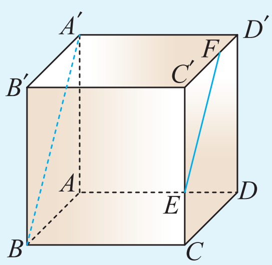


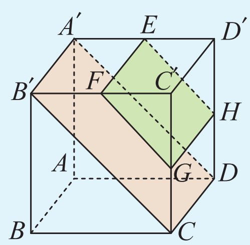
图 2.4－32

练习

1. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 E 为 CC' 上一点，且 $2CE=EC'$，在平面 $CDD'C'$ 内作 $EF /\!/ A'B$ 交 $C'D'$ 于点 F，求直线 EF 与 $A'B$ 之间的距离.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E，F，G，H 分别是棱 $A'D'$，$B'C'$，CC'，DD' 的中点.

（1）求证：平面 $EFGH /\!/$ 平面 $A'B'CD$；

（2）求平面 $EFGH$ 与平面 $A'B'CD$ 之间的距离.

多知道一点

平面方程

已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 和平面上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，求空间任意一点 $P(x, y, z)$ 在平面上的充要条件.

解 $P\in\alpha$ 的充要条件是 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$，等价于

$$0=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(A, B, C)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$
$$=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0),$$

即 $P(x, y, z)$ 在平面 α 上的充要条件是它的坐标满足方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

平面是这个方程的图象，因而这个方程称为这个平面的方程.

给定任意一个平面，总可以取平面的一个法向量 (A, B, C)，在平面上任取一点 (x_0, y_0, z_0)，得到以上形式的方程. 方程左边整理后具有形式 $Ax+By+Cz+D=0$，其中一次项系数组成法向量的坐标 (A, B, C). 因此，平面方程都是三元一次方程.

反过来，任给三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0(A^2+B^2+C^2\neq0)$，方程至少有一个解 (x_0, y_0, z_0). 法向量为 (A, B, C)，并且经过点 (x_0, y_0, z_0) 的平面方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 化简后就是 $Ax+By+Cz+D=0$.

可见：三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0(A^2+B^2+C^2\neq0)$ 都是平面方程.

习题 2.4

学而时习之

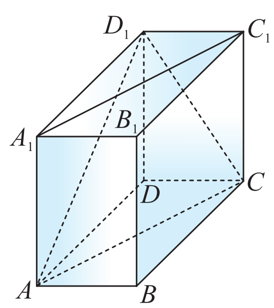
1. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，试建立适当的空间直角坐标系，写出下列直线的一个方向向量：

(1) AA'，AB，BC； (2) $B'A$，$B'C$，$B'D'$；

(3) $A'C$，DB'.

2. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 a，试建立空间直角坐标系，确定各棱所在直线的方向向量.

3. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD=6$，$AA_1=3$，建立适当的空间直角坐标系，求下列平面



(第 3 题)

的一个法向量：

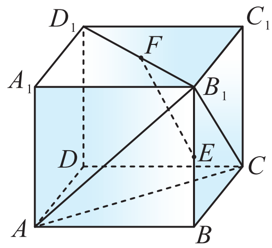
（1）平面 $ABCD$；　　（2）平面 ACC_1A_1；

（3）平面 ACD_1.

4. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 DD_1，BD 的中点.

求证：$EF\perp CF$.

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，D_1B_1 的中点. 求证：$EF\perp$平面 B_1AC.



（第 5 题）

6. 设平面 α 的一个法向量为$(1, 2, -2)$，平面 β 的一个法向量为$(-2, -4, k)$. 若 $\alpha\perp\beta$，求 k 的值.

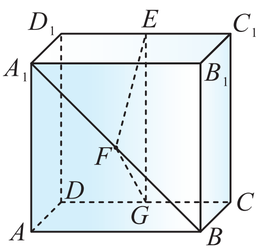
7. 已知 $\boldsymbol{a}=(2, 4, 5)$，$\boldsymbol{b}=(3, x, y)$分别是直线 l_1，l_2 的方向向量. 若 $l_1/\!/l_2$，求 xy 的值.

8. 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$AC\perp AB$，$AC=AB=4$，$AA_1=6$，点 E，F 分别为 CA_1，AB 的中点. 求证：$EF/\!/$平面 BCC_1B_1.

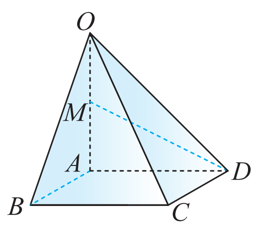
9. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为 C_1D_1，A_1B，DC 的中点，$AB=AA_1=2AD$. 求证：

（1）$EF/\!/$平面 BB_1C_1C；

（2）平面 $EFG/\!/$平面 BB_1C_1C.



（第 9 题）



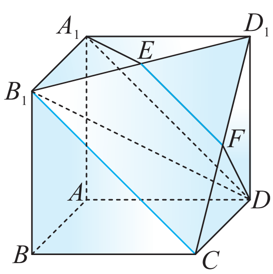
（第 10 题）

10. 如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$OA\perp$底面 $ABCD$，$OA=2$，M 为 OA 的中点，求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小.

11. 如图，在多面体 $A_1B_1D_1-ABCD$ 中，四边形 AA_1B_1B，AA_1D_1D，$ABCD$ 均为正方形，E 为 B_1D_1 的中点，过 A_1，D，E 的平面交 CD_1 于 F.

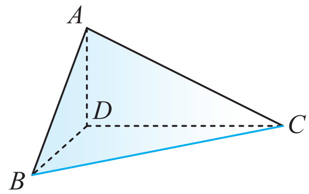
（1）求证：$EF/\!/B_1C$；

（2）求二面角 $E-A_1D-B_1$ 的余弦值.



（第 11 题）

12. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，DA，DB，DC 两两垂直，$DA=4$，$DB=6$，$DC=8$，求点 A 到直线 BC 的距离.



（第 12 题）

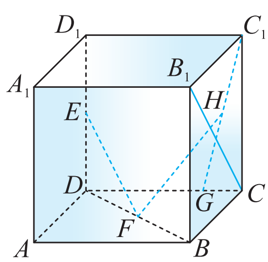
13. 四面体 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=BC=2a$，$SA=3a$，$\angle ABC=120°$，$SA\perp$ 平面 ABC，求点 A 到平面 SBC 的距离.

14. 已知高为 5，底面边长为 2 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O，O_1 分别为上下两底面的中心，求 OA_1 与 O_1C 之间的距离.

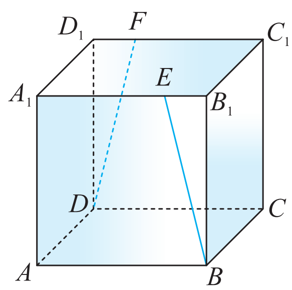
15. 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，DD_1 的中点，求平面 ADE 与平面 B_1C_1F 之间的距离.

温故而知新

16. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 DD_1，DB 的中点，G 在棱 CD 上，$CG=\dfrac{1}{4}CD$，H 是 C_1G 的中点，建立适当的空间直角坐标系，求线段 B_1C，EF，C_1G，FH 所在直线的一个方向向量.



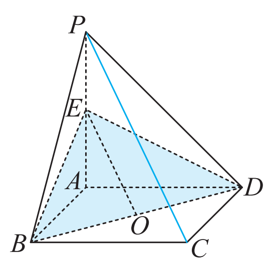
（第 16 题）



（第 17 题）

17. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在棱 A_1B_1，C_1D_1 上，且 $EB_1=\dfrac{1}{4}A_1B_1$，$D_1F=\dfrac{1}{4}D_1C_1$，尝试用不同的方法求 BE 与 DF 所成角的余弦值.

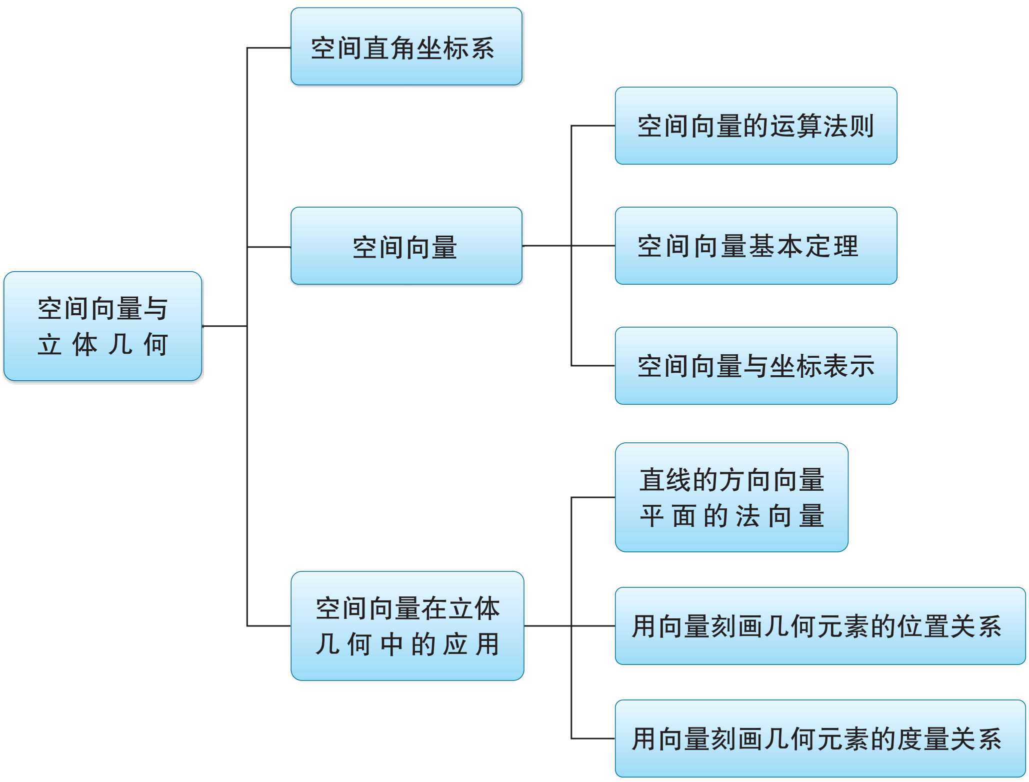
18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，O 是 BD 的中点，$AB=4$，$\angle ABC=60°$，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$ 且 $PA=4$，E 是 PA 的中点，求 PC 与 EO 之间的距离.



（第 18 题）

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．我们生活在三维的立体空间中．本章，我们从向量的角度来认识空间图形．为了刻画空间中点的位置，我们引入了空间直角坐标系，并用坐标来表示点的位置，如何建立空间直角坐标系？怎样刻画空间两点之间的距离？

2．将向量由二维向三维推广，就得到了空间向量．空间向量是具有大小和方向的量，其本质与平面向量是一致的．空间向量的运算律有哪些？它与平面向量的运算律是相同的吗？

3．为了将任意空间向量表示出来，我们首先学习了空间向量基本定理．该定理与平面向量基本定理有何不同？你了解它的意义吗？接着我们通过空间向量的单位正交分解，完成了从单位正交分解到空间直角坐标系的转换，并用直角坐标来刻画空间向量，这给空间向量的运算以及刻画空间几何元素带来极大的方便．

4．空间向量为我们解决立体几何问题提供了新的视角．作为解决问题的第一步，我们首先要关注如何借助空间向量来刻画点、直线、平面．什么是直线的方

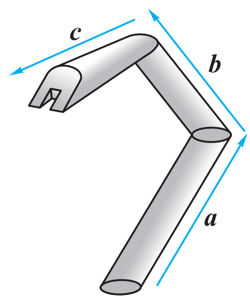
向向量？什么是平面的法向量？如何用向量来刻画空间直线以及平面的位置？

5．向量既能表示形，又能参与运算，这种数形合一的特征为刻画空间立体图形的位置关系与度量关系，并解决几何问题提供了强有力的工具．你能用向量语言来表述有关线线、线面、面面的垂直和平行关系吗？试结合实例，用向量的方法证明有关线面位置关系的一些重要定理，并解决一些线与线、线与面、面与面的夹角和距离问题．

6．通过本章的学习，你对向量方法在研究几何问题中的作用有怎样的认识？其解决几何问题的步骤是什么？需注意的是，在解决立体几何问题的过程中，我们要灵活选择向量方法和综合几何方法，更为重要的是，在理解基本思想方法的基础上提升我们的数学素养．

复习题二

学而时习之



（第 1 题）

1. 右图是一个机器人手臂的示意图．该手臂分为三段，分别可用向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{c}=(4,-1,-2)$代表．

（1）若用向量 $\boldsymbol{d}$ 代表整条手臂，求 $\boldsymbol{d}$；

（2）求 $\boldsymbol{d}$ 所代表的点与原点之间的距离．

2. 设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\mu\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{CD}=3\lambda\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-2\mu\boldsymbol{e}_3$，若 A，B，D 三点共线，求实数 λ 和 μ 的值．

3. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=60^\circ$．求证：$CC_1\perp BD$．

4. 平行六面体 $OABC-O'A'B'C'$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$．

（1）用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{AC'}$；

（2）设 G，H 分别是平面 $BB'C'C$ 和 $O'A'B'C'$ 对角线的交点，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{GH}$．

5. 已知 PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，M，N 分别是 AB，PC 的三等分点且 $PN=2NC$，$AM=2MB$，$PA=AB=1$，建立适当的坐标系，求$\overrightarrow{MN}$的坐标．

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2x,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2y,9)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 x，y 的值．

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(2m,m,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,m+1,-5)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的值．

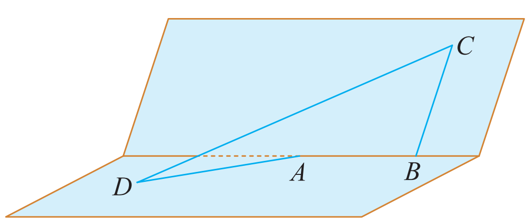
8. 已知空间两个动点 $A(1-x,1-x,x)$，$B(2,3-x,x)$，求$|\overrightarrow{AB}|$的最小值．

9. 已知 $A(0,1,1)$，$B(1,2,1)$，$C(1,1,2)$三点，求 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$的值．

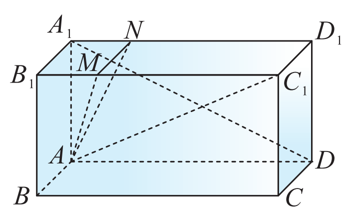
10. 已知空间两个不同的单位向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,0)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,0)$与 $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$的夹角都等于$\frac{\pi}{4}$．

（1）求 x_1+y_1 和 x_1y_1 的值；　（2）求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$．

11. 如图，甲站在水库底面上的点 D 处，乙站在水坝斜面上的点 C 处，测得从 D，C 到水库底面与水坝斜面的交线 AB 的距离分别为 $DA=10\sqrt{2}$ m，$CB=10$ m．又测得 AB 的长为10 m，CD 的长为 $10\sqrt{6}$ m．求水库底面与水坝斜面所成的二面角的大小．



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=8$，$AA_1=4$，M 为 B_1C_1 上

一点且 $B_1M=2$，点 N 在棱 A_1D_1 上，且 $A_1D\perp AN$.

（1）求直线 A_1D 与 AM 所成角的余弦值；

（2）求直线 AD 与平面 ANM 所成角的余弦值；

（3）求平面 ANM 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值.

13. 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E，F 分别为 AB，AD 的中点，$GC\perp$ 平面 $ABCD$，且 $GC=2$，求点 B 到平面 EFG 的距离.

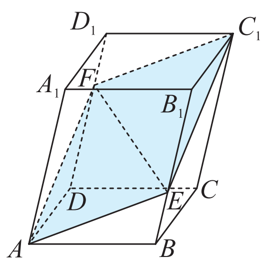
14. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别为 A_1D_1，A_1B_1，D_1C_1，B_1C_1 的中点，棱长为 4，求平面 MNA 与平面 $EFBD$ 之间的距离.

温故而知新

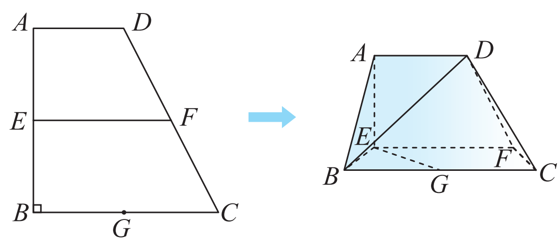
15. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别在棱 B_1B 和 D_1D 上，且 $BE=\frac{1}{3}BB_1$，$DF=\frac{2}{3}DD_1$.

（1）求证：A，E，C_1，F 四点共面；

（2）若 $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，求 $x+y+z$ 的值.



（第 15 题）



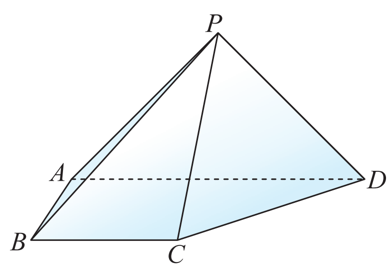
（第 16 题）

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AB=BC=2AD=2$，E，F 分别为边 AB，CD 上的动点，且 $EF/\!/BC$，G 是 BC 的中点，沿 EF 将梯形 $ABCD$ 翻折，使平面 $AEFD\perp$ 平面 $EBCF$.

（1）求 AE 为何值时，$BD\perp EG$；

（2）在(1)的条件下，求 BD 与平面 ABF 所成角的正弦值.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $BC/\!/AD$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$. 问：线段 AD 上是否存在点 Q，使得它到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$？若存在，求出 $\frac{AQ}{QD}$ 的值；若不存在，试说明理由.



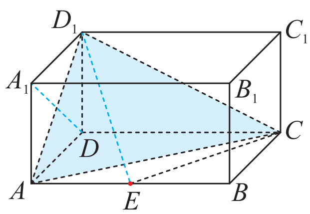
（第 17 题）

18. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，点 E 在棱 AB 上移动.

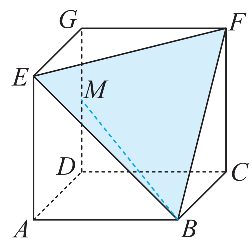
（1）求证：$D_1E\perp A_1D$；

（2）当点 E 为棱 AB 的中点时，求点 E 到平面 ACD_1 的距离；

（3）当 AE 为何值时，平面 D_1EC 与平面 $AECD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$？



（第 18 题）



（第 19 题）

19. 如图，已知四边形 $ABCD$，$CDGF$，$ADGE$ 均为正方形，且边长为 1，在棱 DG 上是否存在点 M，使得直线 MB 与平面 BEF 所成的角为 45°？若存在，求出点 M 的位置；若不存在，试说明理由.

上下而求索

20. 阅读“多知道一点：平面方程”，并解答下列问题：

（1）建立空间直角坐标系，已知 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$三点，而 $P(x, y, z)$是空间任意一点，求 A，B，C，P 四点共面的充要条件.

（2）试求过点 $A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, c)$的平面 ABC 的方程，其中 a，b，c 都不等于 0.

（3）已知平面 α 有法向量 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$，并且经过点$(1, 0, 0)$，求平面 α 的方程.

（4）已知平面 α 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 A，B，C 不同时为 0. 证明：$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$是平面 α 的法向量.

（5）①求点$(1, 1, 1)$到平面 $x+y+z=1$ 的距离；

②求证：点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

并将这个公式与“平面解析几何初步”中介绍的点到直线的距离公式进行比较.

第3章

3 概　率

我们对概率已经有了初步认识，但要描述随机现象在大量试验中的统计规律，还需要进一步学习一些概率知识.

对于一个随机试验而言，它每次试验可能出现这样或那样的结果. 人们常常将随机试验的结果数量化，用随机变量来表示随机试验的结果. 掌握随机变量所对应的概率，将使得我们能够更全面地了解随机现象的规律. 如果说函数是研究变量的数学，那么概率论是研究随机变量的数学.

3.1 条件概率与事件的独立性

3.1.1 条件概率

在实际生活中，有时会遇到在事件 A 发生的条件下计算事件 B 的概率问题. 怎样解决这类问题呢？我们先来考察下面两个问题.

问题 1 掷一个骰子，求掷出的点数为 3 的概率.

本次试验的样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，设 $B=$ “掷出的点数为 3”，则 B 中样本点个数为 1，由古典概型知识可得

$$P(B)=\frac{B\text{ 中样本点个数}}{\Omega\text{ 中样本点个数}}=\frac{1}{6}.$$

问题 2 掷一个骰子，已知掷出的点数为奇数，求这个奇数是 3 的概率.

设 $A=$ “掷出的点数为奇数”，事件 A 包含的结果只有 3 个，它们是 1，3，5. 因而样本空间已经不是 Ω，而变为 $A=\{1, 3, 5\}$，这时相对于问题 1，我们称试验的条件已经改变，称 A 是新的试验条件下的样本空间.

由于 A 中的 3 个样本点处于相等的地位，所以发生的可能性是相同的，用 B 表示“掷出点数 3”，B 是 A 的子集，A 中样本点个数是 3，B 中样本点个数是 1，则由古典概型知识可得

$$P(B)=\frac{B\text{ 中样本点个数}}{A\text{ 中样本点个数}}=\frac{1}{3}.$$

问题 2 与问题 1 都是求掷出点数 3 的概率，为什么结果不一样？

问题 1 的结果是在原有条件(即掷出点数 1，2，3，4，5，6 的等可能情形)下求得的，而问题 2 是一种新的提法，它的结果是在原有条件下又增加一个附加条件(A 发生)求得的.

一般地，有下面的定义：

如果事件 A，B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，则在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率叫作**条件概率**，记为 $P(B|A)$.

例 1 某校高中三个年级各派一名男生和一名女生参加市里的中学生运动会，每人参加一个不同的项目，且每人能否获得冠军是等可能的. 已知只有一名女生获

得冠军，求高一女生获得冠军的概率.

解 设 $A=$ “一名女生获得冠军”，$B=$ “高一女生获得冠军”. 已知 A 发生的条件下，A 成为试验的样本空间，A 中样本点具有等可能性，B 是 A 的子集，A 中样本点个数为 3，B 中样本点个数为 1.

因此，$$P(B|A)=\frac{B\text{ 中样本点个数}}{A\text{ 中样本点个数}}=\frac{1}{3}.$$

$A\cap B$ 也可记作 AB. $P(AB)$ 与 $P(A|B)$ 表示的意义有什么不同?

例 1 中因为 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，所以有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例 2 从一副扑克的 52 张牌（去掉两张王牌后）中任取 1 张，求抽到梅花的条件下，抽到的是梅花 5 的概率.

解 设 $A=$ “抽到梅花”，$B=$ “抽到梅花 5”. 已知 A 发生的条件下，A 成为试验的样本空间，A 中的样本点具有等可能性，B 是 A 的子集，所以

$$P(B|A)=\frac{B\text{ 中样本点个数}}{A\text{ 中样本点个数}}=\frac{1}{13}.$$

例 2 中，因为 $P(A)=\frac{13}{52}$，$P(AB)=\frac{1}{52}$，所以也有 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

一般地，在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率为：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\quad(P(A)>0).$$

我们可以借助图 3.1－1 来理解上述计算公式.

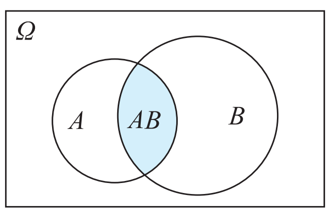


图 3.1－1

用 $n(A)$，$n(AB)$ 分别表示 A，AB 中的样本点个数，由条件概率的定义可知，在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，等于在事件 A 发生的条件下事件 A 和事件 B 同时发生的概率，即

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

类似地，如果 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

例 3 有圆形零件 100 个，其中有 98 个直径合格，有 96 个光洁度合格，两个指标都合格的有 94 个. 从这 100 个零件中，任意抽取 1 个.

（1）如果此零件光洁度合格，求直径也合格的概率(结果保留三位小数)；

（2）如果此零件直径合格，求光洁度也合格的概率(结果保留三位小数).

解 设 $A=\{$直径合格$\}$，$B=\{$光洁度合格$\}$，则

$$P(A)=\frac{98}{100},\ P(B)=\frac{96}{100},\ P(AB)=\frac{94}{100}.$$

（1）在光洁度合格的条件下直径也合格的概率是

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{94}{100}}{\frac{96}{100}}=\frac{94}{96}\approx 0.979.$$

（2）在直径合格的条件下光洁度也合格的概率是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{94}{100}}{\frac{98}{100}}=\frac{94}{98}\approx 0.959.$$

练 习

1. 有 16 件产品，其中有甲厂生产的，也有乙厂生产的，均有合格品与废品，其情况如下表：

厂　家	产品总数	合格品数
甲　厂	5	3
乙　厂	11	7

从这 16 件产品中任取 1 件，如果抽到的产品是甲厂生产的，求它是合格品的概率.

2. 根据历年气象统计资料，某地 4 月份的任一天刮东风的概率为 $\dfrac{3}{10}$，下雨的概率为 $\dfrac{11}{30}$，既刮东风又下雨的概率为 $\dfrac{4}{15}$. 求 4 月 7 日在刮东风的条件下下雨的概率.

3. 甲、乙、丙三人到三个景点旅游，每人只去一个景点. 设事件 $A=$“三个人去的景点各不相同”，$B=$“甲去了第一个景点”，如果甲、乙、丙互不相识，求 $P(A|B)$.

3.1.2 事件的独立性

由条件概率公式可知，在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率 $P(B|A)$ 和事件 B 发生的概率 $P(B)$ 一般不相等．这时，事件 A 的发生影响了事件 B 发生的概率．但是在某些特定的条件下，确实有 $P(B|A)=P(B)$ 的情况．该情况就是 $P(AB)=P(A)P(B)$，即在必修部分学习过的事件 A 与事件 B 独立．

举例来讲，用 A 表示投掷一枚硬币得到正面，用 B 表示投掷一枚骰子得到点数 6，则事件 A 与事件 B 独立．按条件概率公式得到

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B).$$

上述举例具有一般性．也就是说，若事件 A 与事件 B 独立，则事件 A 的发生不会影响事件 B 发生的概率，即有 $P(B|A)=P(B)$．反之，若 $P(B|A)=P(B)$ 成立，则

$$P(AB)=P(A)\frac{P(AB)}{P(A)}=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

独立性的概念可以推广到任意有限个事件的情形．

如果 $n(n>2)$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任何一个事件发生的概率都不受其余事件发生与否的影响，则称 A_1，A_2，…，A_n **相互独立**．

例如，三个事件 A_1，A_2，A_3 相互独立，当且仅当以下四个等式同时成立：

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

由上可知，当事件 A_1，A_2，A_3 相互独立时，有以下公式成立：

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

一般地，当 $n(n>2)$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立时，有以下公式成立：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n).$$

要注意的是，上式并不表示 A_1，A_2，…，A_n 相互独立．

独立性的概念在概率论的理论及应用中都有着重要作用．

例 4 某校高中每个年级三个班的羽毛球水平相当，各年级分别举办班级羽毛球比赛时，都是一班得冠军的概率是多少？

解 用 A_1，A_2，A_3 分别表示高一、高二、高三年级的一班获得冠军，则 $A=A_1\cap A_2\cap A_3$ 表示都是一班得冠军.

因为事件 A_1，A_2，A_3 相互独立，并且

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$

所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cap A_2\cap A_3)\\&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=\frac{1}{3^3}\\&=\frac{1}{27}.\end{aligned}$$

> 许多实际问题，根据其具体情况就可判断其独立性.

例 5 李浩的棋艺不如张岚，李浩每局赢张岚的概率只有 0.45. 假设他们下棋时各局的输赢是独立的，且只有输赢两种结果，现在他们对弈 6 局，计算：

(1) 李浩连输 6 局的概率(结果保留三位小数)；

(2) 李浩至少赢 1 局的概率(结果保留三位小数).

解 (1) 用 A_1，A_2，…，A_6 分别表示第 1 局，第 2 局，…，第 6 局李浩输，则 $A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6$ 表示李浩连输 6 局.

因为事件 A_1，A_2，…，A_6 相互独立，并且

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_6)=1-0.45=0.55,$$

所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_6)\\&=0.55^6\\&\approx0.028.\end{aligned}$$

(2) 若用 B 表示“李浩至少赢一局”，则 B 是 A 的对立事件.

所以

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(A)\\&\approx0.972.\end{aligned}$$

因此，对弈 6 局李浩至少赢 1 局的概率约为 0.972.

练习

1. 甲、乙两名篮球运动员分别投篮一次，如果两人投中的概率都是 0.6，计算：

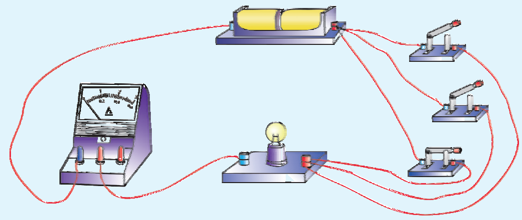
(1) 两人都投中的概率；

(2) 恰有一人投中的概率；

(3) 至少有一人投中的概率.

2. 生产某零件需要经过三道工序，在第一、二、三道工序中生产出废品的概率分别为 0.02，0.03，0.02. 假设每道工序生产出废品是独立事件，试求经过三道工序后得到的零件不是废品的概率(精确到 0.01).

3. 如图，在一段线路中并联着三个开关，只要闭合其中一个开关，线路就能正常工作. 若在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7，求在这段时间内线路正常工作的概率.



（第 3 题）

4. 一个均匀的正四面体，其第一面染红色，第二面染白色，第三面染黑色，而第四面染红、白、黑三种颜色. 若 A，B，C 分别表示投掷一次该四面体，底面有红、白、黑色的三个事件，试判断 A，B，C 是否两两独立，是否相互独立.

3.1.3 乘法公式

由条件概率的计算公式可知，对于两个事件 A，B，由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)，P(A)>0. \qquad (1)$$

特别地，当事件 A，B 相互独立时，有

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

我们还知道，当三个事件 A，B，C 相互独立时，有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

如果三个事件 A，B，C 不相互独立，又如何求 $P(ABC)$ 呢？

我们先来看一个问题.

问题 一个盒子里装有 2 个白球，3 个红球，不放回地随机摸球，每次摸出一个，事件 $A=$“第一次摸出红球”，事件 $B=$“第二次摸出红球”，事件 $C=$“第三次摸出红球”，求事件 $ABC=$“三次都摸出红球”的概率.

求事件“三次都摸出红球”的概率，实质上就是求从 5 个球中取到 3 个红球的概率. 这时样本空间的基本事件的总数 $n=\mathrm{C}_5^3=10$，“取 3 个红球”这一事件包含的基本事件数 $m=\mathrm{C}_3^3=1$，即有

$$P(ABC)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}.$$

上述问题我们也可以从条件概率的角度来分析.

由于 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_5^1}=\dfrac{3}{5}$，$P(B|A)=\dfrac{\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_4^1}=\dfrac{2}{4}$，$P(C|AB)=\dfrac{\mathrm{C}_1^1}{\mathrm{C}_3^1}=\dfrac{1}{3}$，则

$$P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}=P(ABC).$$

因此，若 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB). \quad (2)$$

例 6 一个盒子中装有 5 个电子产品，其中有 3 个一等品，2 个二等品，从中不放回地抽取产品，每次取 1 个，求：

(1) 取两次，两次都取得一等品的概率；

(2) 取三次，第三次才取得一等品的概率.

解 令 A_i 为第 $i(i=1, 2, 3)$次取得一等品.

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}.$$

(2) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{10}.$$

将(1)，(2)式推广到 n 个事件，则有：

若 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$为随机事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \quad (3)$$

(3)式常称为**概率的乘法公式**.

若事件 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$相互独立，则(3)式变为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n). \quad (4)$$

由此可知，(4)式实质上是(3)式的一种特殊情形. (4)式称为相互独立事件的概率乘法公式.

例 7 一场精彩的足球赛即将举行，5 个球迷好不容易才买到一张入场券. 大家都想去，只好用抽签的方法来决定. 准备 5 张同样的卡片，其中一张卡片的正面写有“入场券”，其余的什么也不写. 将它们背面朝上放在一起洗匀，让 5 个人依次不放回地抽取. 问后抽比先抽的吃亏吗?

解 我们用 A_i 表示“第 i 个人抽到入场券”（$i=1, 2, 3, 4, 5$），则 $\overline{A}_i$ 表示“第 i 个人未抽到入场券”.

由题意可得，$P(A_1)=\frac{1}{5}$，$P(\overline{A}_1)=\frac{4}{5}$.

也就是说，第 1 个人抽到入场券的概率是$\frac{1}{5}$.

若第 2 个人抽到了入场券，则第 1 个人肯定没抽到，即 $A_2=\overline{A}_1A_2$，由乘法公式 $P(A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$计算可得

$$P(A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}.$$

同理，第 3 个人要抽到入场券，必须第 1 个、第 2 个人都没有抽到，因此

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

同理可得 $P(A_4)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)$

$$\begin{aligned}&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=\frac{1}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_5)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5)\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(A_5|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

也就是说，每个人抽到入场券的概率都是$\frac{1}{5}$.

因此，抽签不必争先恐后.

练习

1. 对某批手机玻璃屏成品作抗摔试验时，发现手机屏第一次落地时打破的概率为$\frac{1}{2}$；若第一次落地未打破，则第二次落地打破的概率是$\frac{7}{10}$；若前两次未打破，则第三次落地打破的概率是$\frac{9}{10}$. 试求手机屏落地三次未打破的概率.

2. 10 件产品中有 7 件正品和 3 件次品，不放回地抽取 3 次，每次抽 1 件. 求 3 次至少抽到 1 件正品的概率.

3. 10 个考题中有 4 个难题，甲、乙、丙 3 人参加不放回抽题作答，甲先抽，乙第二个抽，丙最后抽. 求：

（1）甲抽到难题的概率；

（2）甲、乙都抽到难题的概率；

（3）甲没有抽到难题，而乙抽到难题的概率；

（4）甲、乙、丙都抽到难题的概率.

3.1.4 全概率公式

现在我们已经会求一些简单事件的概率，但经常会遇到求一些比较复杂事件的概率问题，这时我们可以将比较复杂的事件分解为 n 个子事件，然后综合运用概率的加法公式、乘法公式等予以解决.

观察图 3.1－2，根据我们所学集合知识可以知道，集合 M 的元素个数可以表示为集合 $M\cap A$ 与集合 $M\cap B$ 的元素个数之和.

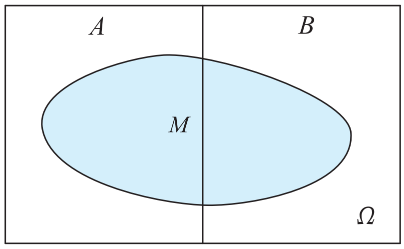


图 3.1－2

根据古典概型的计算方法知，事件 M 的概率可表示为两个积事件 MA，MB 的概率之和，即

$$P(M)=P(MA)+P(MB). \qquad (*)$$

由概率的乘法公式可知，上述结论可以写成：

$$P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B).$$

要使等式$(*)$成立，A，B 应该满足什么条件呢？

例 8 某天李老师计划 7:00 出发去参加 8:00 开始的教学会议. 根据以往经验，他骑自行车迟到的概率是 0.05，乘出租车迟到的概率是 0.50. 若他出发时首选自行车，发现自行车有故障时再选择出租车，且自行车有故障的概率是 0.01，则李老师迟到的概率是多少？

解 用 B 表示李老师迟到，用 A 表示自行车有故障，则 $P(B|A)$是乘出租车迟到的概率，$P(B|\overline{A})$是骑自行车迟到的概率. 根据题意

$$P(A)=0.01,\ P(B|\overline{A})=0.05,\ P(B|A)=0.50.$$

因为 A，$\overline{A}$ 互斥，所以 AB，$\overline{A}B$ 互斥.

利用概率的可加性得到

$$P(B)=P(AB\cup\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B).$$

因为 $P(A)>0$，$P(\overline{A})>0$，再由概率的乘法公式可知，李老师迟到的概率是

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=0.01\times0.50+(1-0.01)\times0.05\\&=0.054\ 5.\end{aligned}$$

例 9 利率变化是影响某金融产品价格的重要因素．经分析师分析，最近利率下调的概率为 60%，利率不变的概率为 40%．根据经验，在利率下调的情况下该金融产品价格上涨的概率为 80%，在利率不变的情况下价格上涨的概率为 40%．求该金融产品价格上涨的概率．

解 记事件 A 为“利率下调”，则事件 $\overline{A}$ 为“利率不变”．

记事件 B 为“金融产品价格上涨”，根据题意有

$$P(A)=0.6,\ P(\overline{A})=0.4,$$
$$P(B|A)=0.8,\ P(B|\overline{A})=0.4.$$

因为
$$P(B)=P(AB\cup\overline{A}B),$$

所以
$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=0.6\times0.8+0.4\times0.4\\&=0.64.\end{aligned}$$

因此该金融产品价格上涨的概率为 0.64．

例 8 与例 9 给出了一个计算概率的常用公式：

若将样本空间 Ω 分为 A，$\overline{A}$ 两部分，则事件 B 的概率

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A}).\tag{5}$$

若将样本空间 Ω 分为 n 部分，则可以推广得到以下结论：

设 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个事件，若满足

(1) $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

(3) $P(A_i)>0$，$i=1, \cdots, n$，

则对任一事件 B，有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).\end{aligned}\tag{6}$$

公式(6)称为**全概率公式**．全概率公式是计算概率的基本公式之一，它的直观意义是：

如图 3.1－3，B 发生的概率与 $P(BA_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 有关，且 B 发生的概率等于所有这些概率的和，即

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

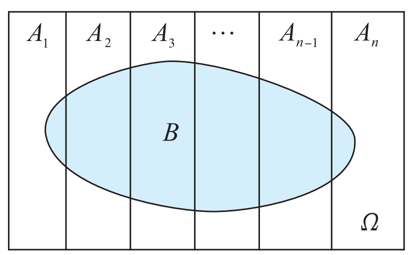


图 3.1－3

例 10 某公司有三个制造厂，全部产品的 40%由甲厂生产，45%由乙厂生产，15%由丙厂生产，而甲、乙、丙三厂生产的不合格品率分别为 1%，2%，3%. 求从该公司产品中随机抽出一件产品为不合格品的概率.

解 设 $A_1=$ “抽到甲厂的产品”，$A_2=$ “抽到乙厂的产品”，$A_3=$ “抽到丙厂的产品”，$B=$ “抽到不合格品”，

则 A_1，A_2，A_3 两两互斥，且 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$.

于是

$$B=B(A_1\cup A_2\cup A_3)=BA_1\cup BA_2\cup BA_3.$$

由题意可知 BA_1，BA_2，BA_3 两两互斥，因而有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3).$$

又 $$P(A_1)=0.4，P(A_2)=0.45，P(A_3)=0.15，$$

$$P(B|A_1)=0.01，P(B|A_2)=0.02，P(B|A_3)=0.03，$$

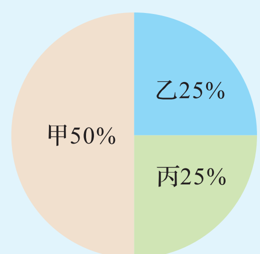
所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=0.4\times0.01+0.45\times0.02+0.15\times0.03\\&=0.017\,5.\end{aligned}$$

练习

1. 一枚深水炸弹轻创、重创一艘潜艇的概率分别是 $\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$，被轻创和重创的潜艇分别以 0.05 和 0.65 的概率失去战斗力，计算一枚深水炸弹就能使潜艇失去战斗力的概率.

2. 甲、乙、丙三家公司生产同一种产品，已知三家公司的市场占有率如图所示，且三家公司产品的次品率分别为 2%，1%和 3%. 试求市场上该产品的次品率.



（第 2 题）

3. 某射击小组共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 8 人，三级射手 8 人. 一、二、三级射手能通过选拔进入比赛的概率分别是 0.9，0.7，0.4. 求任选一名射手能通过选拔进入比赛的概率.

*3.1.5 贝叶斯公式

我们先来看一个问题.

问题 如图 3.1-4，甲盒里有 3 个黄球，2 个蓝球，乙盒里有 4 个黄球，1 个蓝球. 某人随机选择一个盒子并从中摸出了一个黄球，若此人选择甲盒或乙盒的概率相等，求这个黄球来自甲盒的概率.

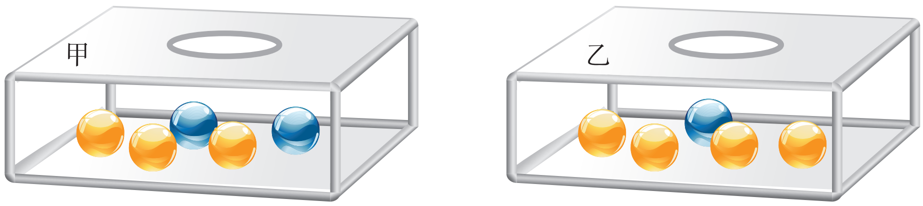


图 3.1-4

记事件 A 表示“摸出黄球”，事件 B 表示“摸出的球来自甲盒”.

根据古典概型可以计算出 $P(A)=\frac{7}{10}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{3}{10}$，因此 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{7}$.

从条件概率及全概率的角度来看，也可以这样考虑：

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\frac{P(AB)}{P(A)}\\&=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}\\&=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}\\&=\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

> ？ 若此人选择甲盒的概率为 0.4，选择乙盒的概率为 0.6，则 $P(B|A)$ 又该如何计算呢？

上面用到的公式 $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$ 称为**贝叶斯公式**(又称逆概率公式).

例 11 张宇去某地参加会议，他乘汽车或飞机去的概率分别为 0.6，0.4. 如果他乘汽车或飞机前去，迟到的概率如图 3.1-5 所示. 结果他迟到了，求张宇乘的是汽车的概率.

* 本小节为选学内容.

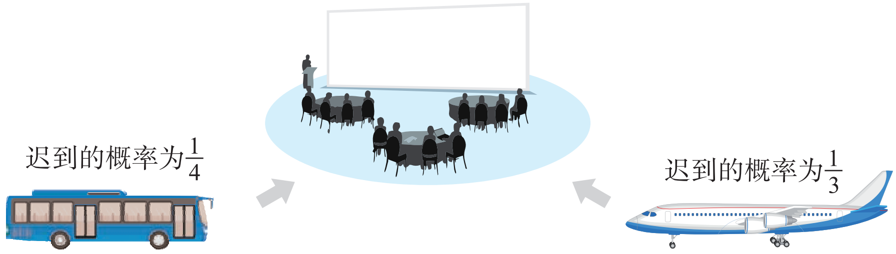


图 3.1－5

解 设 B＝“迟到”，A＝“乘汽车”，$\overline{A}$＝“乘飞机”．

根据题意，有

$$P(A)=0.6,\ P(\overline{A})=0.4,$$

$$P(B|A)=\frac{1}{4},\ P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}.$$

由贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}\\&=\frac{0.6\times\frac{1}{4}}{0.6\times\frac{1}{4}+0.4\times\frac{1}{3}}\\&=\frac{9}{17}.\end{aligned}$$

因此，张宇乘的是汽车的概率为$\frac{9}{17}$.

在上述例题中，假设张宇还可以乘高铁出行，他乘高铁、汽车、飞机去的概率分别为 0.5，0.3，0.2．他乘高铁前往迟到的概率为$\frac{1}{12}$，乘其他交通工具前往迟到的概率不变．若他迟到了，求他乘的是高铁的概率．

此时我们就需要将贝叶斯公式推广到更一般的情形．

设 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n=\Omega$．若 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B(其中 $P(B)>0$)，由条件概率及全概率公式，有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

设 B＝“迟到”，A_1＝“乘高铁”，A_2＝“乘汽车”，A_3＝“乘飞机”．

根据题意，有

$$P(A_1)=0.5,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_3)=0.2,$$

$$P(B|A_1)=\frac{1}{12},\ P(B|A_2)=\frac{1}{4},\ P(B|A_3)=\frac{1}{3}.$$

由贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned}P(A_1|B)&=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}\\&=\frac{0.5\times\frac{1}{12}}{0.5\times\frac{1}{12}+0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}}\\&=\frac{5}{22}.\end{aligned}$$

因此，张宇乘的是高铁的概率为$\frac{5}{22}$.

练 习

1. 某地区有0.5%的人患有某疾病，并且这种病的患者对某种试验反应是阳性的概率为0.95，而正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04. 现知道该地区某人的试验反应是阳性，问此人是患者的概率有多大(精确到0.01)?

2. 在回答有A，B，C，D四个选项的选择题时，全班有90%的学生能解出正确答案. 假设能解出答案的学生回答正确的概率是0.99，不能解出答案的学生随机猜测答案. 计算答题正确的学生是猜对答案的概率(精确到0.001).

习题 3.1

学而时习之

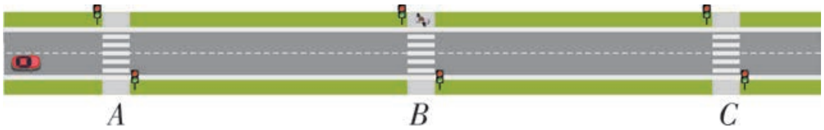
1. 以集合$A=\{2,4,6,7,8,11,12,13\}$中的任意两个元素分别为分子与分母构成分数，已知取出的一个数是12，求取出的数构成可约分数的概率.

2. 抛掷红、蓝两枚骰子，设事件A为“蓝色骰子的点数为3或6”，事件B为“两枚骰子的点数之和大于8”.

(1) 求$P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$；

(2) 若已知蓝色骰子点数为3或6，求两枚骰子的点数之和大于8的概率.

3. 在一条马路上的 A，B，C 三处设有交通信号灯，这三盏灯在 1 min 内开放绿灯的时间分别为 25 s，35 s，45 s. 某辆汽车在这条马路上行驶，求它在这三处都不停车的概率.



（第 3 题）

4. 某市决定在一个乡镇投资农产品加工、绿色蔬菜种植和水果种植三个项目. 据预测，三个项目成功的概率分别为 $\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{2}{3}$，且三个项目是否成功相互独立.

（1）求恰有两个项目成功的概率；

（2）求至少有一个项目成功的概率.

5. 小王要约小李 3 h 后见面，但是只用某种方式告知一次. 设小王用微信通知的概率是 0.3，用短信通知的概率是 0.7，而小李在 3 h 内查看微信的概率是 0.8，看到短信的概率是 0.9.

（1）计算小李看到通知的概率；

（2）如果看到通知的小李也有 5% 的概率不能前来见小王，计算小王不能按时见到小李的概率.

6. 河流 A 是水库 B 的主要水源之一. 每年的 3 月，只要河流 A 不缺水，则水库 B 就有 0.95 的概率不缺水；河流 A 缺水，水库 B 也有 0.45 的概率不缺水. 根据经验知道河流 A 不缺水的概率是 0.7，计算水库 B 不缺水的概率.

***7.** 以往大数据分析结果表明，当机器调试良好时，产品的合格率为 98%，而当机器发生故障时，其合格率为 55%. 每天早上机器开动时，机器调试良好的概率为 95%. 已知某日早上第一件产品是合格品时，试求机器调试良好的概率(精确到 0.01).

温故而知新

8. 从 1，2，3，…，15 中，甲、乙两人各任取一个数(不重复). 已知甲取到的数是 5 的倍数，求甲取到的数大于乙取到的数的概率.

9．一门某型号高射炮发射一发炮弹击中靶机的概率为 0.1．现有若干门高射炮同时向同一靶机各发射一发炮弹，问欲以 99%的把握击中靶机，至少需配置几门高射炮？($\lg 3 \approx 0.4771$)

10．要验收一批(100 件)乐器，验收方案如下：自该批乐器中随机取 3 件进行测试(设 3 件乐器的测试是相互独立的)，测试后只要有一件乐器被认为音色不纯，这批乐器就会被拒绝接收．设一件音色不纯的乐器经测试查出其音色不纯的概率为 0.95，而一件音色纯正的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01．若这 100 件乐器中恰有 4 件是音色不纯的，试问这批乐器被接收的概率是多少(精确到 0.01)？

***11**．市场供应的某种商品中，甲厂、乙厂和丙厂的产品分别占市场总量的 40%，35%和 25%．已知甲、乙、丙三厂产品的合格率分别为 95%，92%和 90%，求买到的一件合格品恰是甲厂生产的概率(精确到 0.01)．

3.2 离散型随机变量及其分布列

3.2.1 离散型随机变量及其分布

一 离散型随机变量

在必修部分，我们认识了许多随机现象. 例如：

（1）射击选手每次射击时，命中的环数是 0，1，…，10 中的某一个数；

（2）抛掷一枚骰子，朝上一面出现的点数是 1，2，…，6 中的某一个数；

（3）抛掷一枚硬币，可能出现正面朝上及反面朝上两种结果，如果我们用 1 表示正面朝上，用 0 表示反面朝上，那么抛硬币试验的结果是 0，1 中的某个数.

上述随机现象中，每一次随机试验的结果都对应一个实数. 为了数学上描述的方便，我们可以用一个变量来表示随机试验的结果.

如果随机试验每一个可能结果 e，都唯一地对应着一个实数 $X(e)$，则这个随着试验结果不同而变化的变量称为**随机变量**.

随机变量通常用 X，Y，ξ，η，…表示.

例如，在含有 6 件次品的 100 件产品中，任意抽取 4 件. 因为含有的次品件数 X 将随着抽取结果的不同而变化，所以 X 是一个随机变量，X 的取值范围构成集合 $\{0，1，2，3，4\}$.

如果随机变量 X 的所有取值都可以逐个列举出来，则称 X 为**离散型随机变量**. ①

引入随机变量后，随机事件就可以用随机变量来表示了. 例如，用 X 表示抛掷一枚骰子出现的点数，则 $\{X=1\}$，$\{X=2\}$，…，$\{X=6\}$ 分别表示骰子朝上一面出现 1 点，2 点，…，6 点. 而 $\{1<X\leqslant 3\}$ 表示“出现的点数大于 1 且小于或等于 3”. 这些表示方法，给我们研究随机现象带来了方便.

① 按照随机变量的特性，通常可把随机变量分为离散型随机变量和连续型随机变量.

二 离散型随机变量的分布列

对一个离散型随机变量而言，我们不仅要知道它可能取哪些值，更为重要的是要知道它取各个值的概率分别有多大，这样才能深入了解随机变量，从而准确刻画随机现象的规律.

在抛掷一枚质地均匀的骰子的随机试验中，用 X 表示骰子向上一面出现的点数，则 X 是一个随机变量，它的可能取值为 1，2，…，6. 它取每个值的概率均为 $\frac{1}{6}$，因而事件 $\{X=i\}(i=1,2,\cdots,6)$ 的概率为 $\frac{1}{6}$，记作

$$P(X=i)=\frac{1}{6}\ (i=1,2,\cdots,6).$$

下表列出了上述随机变量 X 可能的取值，以及 X 取这些值的概率.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

利用上表可以求出能由 X 表示的事件的概率. 例如，事件 $\{4\leqslant X\leqslant 5\}$ 表示掷出的点数是 4 或 5，于是有 $\{4\leqslant X\leqslant 5\}=\{X=4\}\cup\{X=5\}$，由互斥事件的概率加法公式得

$$P(4\leqslant X\leqslant 5)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

一般地，设离散型随机变量 X 的可能取值为 x_1，x_2，…，x_n，其相应的概率为 p_1，p_2，…，p_n，记

$$P(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,\cdots,n).\qquad (*)$$

或把 $(*)$ 式列成下表：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

上表或 $(*)$ 式称为离散型随机变量 X 的**概率分布列**(简称为 X 的**分布列**).

离散型随机变量的分布列还可以用图象来近似表示. 例如，在掷骰子试验中，得到的点数 X 的分布列的图象如图 3.2－1 所示. 从图中可以看出，X 的取值范围是 $\{1,2,3,4,5,6\}$，它取每个值的概率均为 $\frac{1}{6}$.

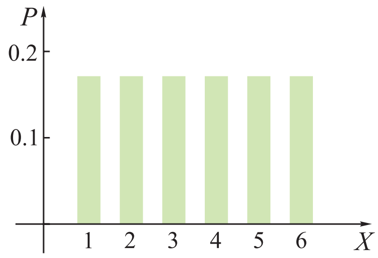


图 3.2－1

离散型随机变量的分布列具有如下性质：

(1) $p_i \geqslant 0$，$i=1$，2，3，…，n；

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

例 1 全班有 40 名学生，某次综合素质单项测评的成绩(满分 5 分)如下：

成绩	1	2	3	4	5
人数	4	20	12	3	1

现从该班中任选一名学生，用 X 表示这名学生的单项测评成绩，求随机变量 X 的分布列.

解 由题意可得

$$P(X=1)=\frac{4}{40}=0.1,\ P(X=2)=\frac{20}{40}=0.5,$$

$$P(X=3)=\frac{12}{40}=0.3,\ P(X=4)=\frac{3}{40}=0.075,$$

$$P(X=5)=\frac{1}{40}=0.025.$$

因此，随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3	4	5
P	0.1	0.5	0.3	0.075	0.025

例 2 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{c}{k(k+1)}$，$k=1$，2，3，4，其中 c 为常数，求 $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$的值.

解 由离散型随机变量分布列的性质可知

$$\frac{c}{1\times 2}+\frac{c}{2\times 3}+\frac{c}{3\times 4}+\frac{c}{4\times 5}=1,$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)c=1.$$

解得

$$c=\frac{5}{4}.$$

因此，$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{1\times2}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{2\times3}\times\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5}{6}.$$

练习

1. 写出下列各随机变量可能的取值，并说明随机变量的取值所表示的随机试验的结果：

（1）将 10 个质地、大小一样的球装入袋中，球上依次编号 1～10，现从袋中任取 1 个球，被取出的球的编号为 X；

（2）将 15 个质地、大小一样的球装入袋中，其中 10 个红球，5 个白球，现从中任取 4 个球，其中所含红球的个数为 X；

（3）投掷两枚骰子，所得点数之和为 X.

2. 用 X 表示某人进行 10 次射击击中目标的次数，分别说明下列随机事件的含义.

（1）$\{X=8\}$；（2）$\{1<X\leqslant10\}$；

（3）$\{X\geqslant1\}$；（4）$\{X<1\}$.

3. 离散型随机变量 X 的分布列如下表所示，求 p 的值.

X	0	1	2	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	p

4. 将 6 个质地、大小一样的球装入袋中，球上依次编号 1～6. 现从中任取 3 个球，以 X 表示取出球的最大号码.

（1）求 X 的分布列；

（2）求 $X>4$ 的概率.

3.2.2 几个常用的分布

在初步认识了离散型随机变量的分布列后，我们来介绍几类典型的离散型分布.

一 两点分布

如果随机变量 X 只取值 0 或 1，且其概率分布是

$$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p,\ p\in(0,\ 1),$$

则称随机变量 X 服从**两点分布**，记作 $X\sim B(1,\ p)$.

两点分布又称 0-1 分布，是我们在现实生活中经常会遇到的一种分布. 例如，检查产品是否合格，投篮是否命中，一粒种子是否发芽，等等. 当只考虑成功与否时，都可以用服从两点分布的随机变量来描述：

$$X=\begin{cases}1, & \text{当试验成功时；}\\ 0, & \text{当试验不成功时.}\end{cases}$$

例 3 设某项试验的成功率是失败率的 2 倍，若用随机变量 X 描述一次试验成功的次数，求 $P(X=0)$的值.

解 由题知此试验服从两点分布，因此可列下表：

X	0	1
P	$1-p$	p

因为试验的成功率是失败率的 2 倍，所以 $p=2(1-p)$，

解得 $p=\dfrac{2}{3}$，$1-p=\dfrac{1}{3}$.

因此 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$.

二 二项分布

在研究随机现象时，经常要在相同的条件下重复做大量试验来发现规律. 例如，研究抛掷一枚图钉出现结果的规律，就需要做大量的重复试验. 而在 n 次抛掷的过程中，每一次可能针尖朝上，也可能针尖朝下，并且每次针尖朝上的概率是相同的，同时各次试验的结果不会受其他试验结果的影响.

一般地，在相同条件下进行 n 次重复试验，如果每次试验只有两种可能的结果 A 与 $\overline{A}$，并且 $P(A)$保持不变，各次试验的结果相互独立，那么称这样的试验为**伯努利试验**，它也是一种 n 次独立重复试验.

例 4 10 个零件中有 3 个次品，从中每次抽检 1 个，验后放回，连续抽检 3 次. 求抽检的 3 个零件中恰有 2 个是次品的概率.

分析 由于 3 次抽检是相互独立的，并且每次抽检只有两个可能的结果，即"抽到正品"或"抽到次品"，因此，这是一个 3 次独立重复试验.

解 记抽到次品的概率为 p，抽到正品的概率为 q.

（方法一）设 $B=$ "3 次抽检，恰好有 2 个次品"，$A_i=$ "第 i 次抽到次品"（$i=1，2，3$），则 $\overline{A}_i=$ "第 i 次抽到正品"（$i=1，2，3$）.

因为 3 次抽检中恰有 2 个次品的事件共有 3 个，即 $A_1A_2\overline{A}_3$，$A_1\overline{A}_2A_3$，$\overline{A}_1A_2A_3$. 这三个事件是互斥的，并且 A_1，A_2，A_3 之间都是相互独立的. 由概率加法公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup \overline{A}_1A_2A_3)\\&=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)\\&=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)\\&=p^2q+p^2q+p^2q=3p^2q\\&=3\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\frac{7}{10}=0.189.\end{aligned}$$

（方法二）用 X 表示抽检次数，则 X 是一个随机变量. 设事件 A 为"抽检到次品". 事件 A 在 3 次试验中发生 2 次，共有 C_3^2 种情形，由试验的独立性可知，事件 A 在其中的 2 次发生时，其余的$(3-2)$次则不发生，其概率为 p^2q^{3-2}. 故事件 A 恰好发生 2 次的概率为

$$P(X=2)=C_3^2p^2q^{3-2}=3p^2q=3\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\frac{7}{10}=0.189.$$

对于例 4，类似地，我们还可求得 3 个零件中恰好有 0 个次品、1 个次品、3 个次品的概率分别为 $P(X=0)=C_3^0p^0q^{3-0}=q^3$，$P(X=1)=C_3^1p^1q^{3-1}=3pq^2$，$P(X=3)=C_3^3p^3q^{3-3}=p^3$.

一般地，在 n 次独立重复试验中，用 X 表示事件 A 出现的次数，设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则 X 有概率分布：

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}，k=0，1，\cdots，n，\text{其中 } q=1-p.$$

注意到 $C_n^kp^kq^{n-k}$正好是二项式$(p+q)^n$ 的展开式中的第$(k+1)$项，故称随机变量 X 服从**二项分布**，记作 $X\sim B(n，p)$，其中 n，p 为参数，p 为事件发生的概率.

显然，在二项分布中，$P(X=k)\geqslant 0(k=0，1，2，\cdots，n)$.

根据二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

故 $P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=k)+\cdots+P(X=n)=1$.

二项分布与两点分布有何联系？

二项分布在实践中有着广泛的应用，如有放回的摸球模型，n 次投掷硬币出现 k 次正面朝上的模型，都是二项分布模型的具体化.

例 5 某家庭装修公司和客户洽谈装修协议时，洽谈成功的概率是 0.4. 设一天内有 9 个客户前来洽谈装修协议，用 X 表示这天洽谈成功的客户数，求洽谈成功 5 个客户的概率(精确到 0.001).

解 X 服从二项分布 $B(9，0.4)$，于是

$$P(X=5)=C_9^5 0.4^5(1-0.4)^{9-5}\approx 0.167.$$

因此，洽谈成功 5 个客户的概率约为 0.167.

例 6 抛掷两枚骰子，取其中一枚的点数为点 P 的横坐标，另一枚的点数为点 P 的纵坐标，连续抛掷这两枚骰子三次，求点 P 在圆 $x^2+y^2=16$ 内的次数 X 的分布列.

分析 先求出一次试验中点 P 在圆 $x^2+y^2=16$ 内的概率 p，然后由题意可知 $X\sim B(3，p)$，从而求出其分布列.

解 由题意可知，P 点的坐标可能有 $6\times 6=36$(种)情况，而符合题意的点只有下列 8 个：(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，如图 3.2-2. 那么在抛掷骰子时，点 P 在圆 $x^2+y^2=16$ 内的概率为 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

由题意可知 $X\sim B\left(3，\frac{2}{9}\right)$，所以

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{9}\right)^0\times\left(\frac{7}{9}\right)^3=\frac{343}{729},$$

$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{9}\right)^1\times\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{98}{243},$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{9}\right)^2\times\left(\frac{7}{9}\right)^1=\frac{28}{243},$$

$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{9}\right)^3\times\left(\frac{7}{9}\right)^0=\frac{8}{729}.$$

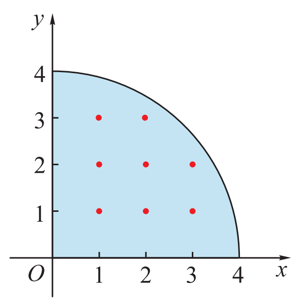


图 3.2-2

因此，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

练习

1. 将 10 个质地、大小一样的球装入袋中，其中 6 个白球，4 个红球. 现从袋中任取一个球，用 X 表示"取到白球"，即

$$X=\begin{cases}1, & \text{当取到白球时,}\\ 0, & \text{当取到红球时.}\end{cases}$$

求随机变量 X 的分布列.

2. 某车间共有 9 台车床，每台车床使用电力都是间歇性的，平均每小时中约有 12 min 使用电力. 假定车工们的工作是相互独立的，试问：在同一时刻有 7 台或 7 台以上的车床使用电力的概率是多少？

三 超几何分布

在商品合格性检验问题中，常常会遇到超几何分布.

例 7 假定一批产品共 100 件，其中有 5 件不合格品. 随机取出 10 件产品，求其中不合格品数 X 的概率分布.

解 从 100 件产品中随机抽取 10 件有 C_{100}^{10} 种等可能结果，假设$\{X=2\}$表示的随机事件是"取到 2 件不合格品和 8 件合格品"，则依据分步计数原理有 $C_5^2C_{95}^8$ 种结果，因此根据古典概型概率计算公式，得 $P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}$.

类似地，可以求得 X 取其他值时对应的随机事件的概率，从而得到不合格品数 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{C_5^0C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^1C_{95}^9}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^3C_{95}^7}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^4C_{95}^6}{C_{100}^{10}}$	$\dfrac{C_5^5C_{95}^5}{C_{100}^{10}}$

对一般情形，一批产品共 N 件，其中有 M 件不合格品，随机取出的 n 件产品中，不合格品数 X 的分布列如下表所示，其中 $l=\min\{M, n\}$，$n\leqslant N-M$.

X	0	1	2	…	l
P	$\dfrac{C_M^0C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^2C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^lC_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$

一般地，若 N 件产品中有 M 件次品，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则事件$\{X=k\}$发生的概率为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l,$$

其中 $l=\min\{M, n\}$，且 $M\leqslant N$，$n\leqslant N-M$，n，M，$N\in\mathbf{N}_+$，称分布列

X	0	1	$\cdots$	l
P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^{n}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^l C_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$

为**超几何分布列**．如果随机变量 X 的分布列为超几何分布列，就称 X 服从**超几何分布**，记作 $X\sim H(N, M, n)$．

?

超几何分布与二项分布有何区别？

例 8 鱼塘中只有 80 条鲤鱼和 20 条草鱼，每条鱼被打捞的可能性相同．捞鱼者一网打捞上来 4 条鱼，计算：

（1）其中有 1 条鲤鱼的概率（精确到 0.001）；

（2）4 条都是鲤鱼的概率（精确到 0.001）．

解 用 X 表示被打捞的 4 条鱼中鲤鱼的条数，则 $X\sim H(100, 80, 4)$．因此，

（1）$P(X=1)=\frac{C_{80}^1 C_{20}^3}{C_{100}^4}\approx 0.023$．

（2）$P(X=4)=\frac{C_{80}^4 C_{20}^0}{C_{100}^4}\approx 0.403$．

例 9 某商场为促销组织了一次幸运抽奖活动．袋中装有 18 个除颜色外其余均相同的小球，其中 8 个是红球，10 个是白球．抽奖者从中一次抽出 3 个小球，抽到 3 个红球得一等奖，抽到 2 个红球得二等奖，抽到 1 个红球得三等奖，抽到 0 个红球不得奖．求得一等奖、二等奖和三等奖的概率（精确到 0.000 1）．

解 从 18 个小球中抽取 3 个时，有 C_{18}^3 种等可能的结果．用 X 表示抽到的红球数，则 $X\sim H(18, 8, 3)$，并且

$$P(\text{得一等奖})=P(X=3)=\frac{C_8^3 C_{10}^0}{C_{18}^3}=\frac{56}{816}\approx 0.068\ 6.$$

$$P(\text{得二等奖})=P(X=2)=\frac{C_8^2 C_{10}^1}{C_{18}^3}=\frac{280}{816}\approx 0.343\ 1.$$

$$P(\text{得三等奖})=P(X=1)=\frac{C_8^1 C_{10}^2}{C_{18}^3}=\frac{360}{816}\approx 0.441\ 2.$$

因此，得一等奖的概率约为 0.068 6，得二等奖的概率约为 0.343 1，得三等奖的概率约为 0.441 2．

练习

1. 一批产品共 100 件，其中有 5 件次品，现在从中任取 10 件检查，求取到次品件数 X 的分布列.

2. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加数学竞赛.

(1) 求所选 3 人都是男生的概率；

(2) 求所选 3 人恰有 1 名女生的概率.

3. 某乒乓球队有 9 名队员，其中 2 名是种子选手，现挑选 5 名队员参加比赛，设 X 表示其中种子选手人数，求 X 的分布列.

3.2.3 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量的分布列完全描述了随机变量取值的概率规律．但是为了对随机变量有一个概括的认识，我们还需要了解刻画随机变量的某些特征数值．正如想了解两个班级学生某门课程的考试成绩一样，除了通过记分册查看每个学生的考试成绩外，还需要在记分册的基础上对学生的成绩进行一些加工整理，比如计算两个班级的平均分，看哪个班的平均成绩好一些.

随机变量的特征数值中最重要的是期望与方差．我们先来研究反映离散型随机变量平均取值大小的数字特征——期望.

问题 1 在一次考试中，统计某中学高二年级 300 名学生的某学科成绩后得到下表：

成绩 x_i/分	x_1	x_2	x_3	…	x_{29}	x_{30}
人数 n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_{29}	n_{30}

其中 $n=n_1+n_2+\cdots+n_{30}=300$.

现从这 300 人中任选一人，用 X 表示这名学生的分数，则 X 有概率分布：

$$P(X=x_1)=\frac{n_1}{n},\ P(X=x_2)=\frac{n_2}{n},\ \cdots,\ P(X=x_{30})=\frac{n_{30}}{n}.$$

将以上概率分布列表，得

X	x_1	x_2	x_3	…	x_{29}	x_{30}
P	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	…	$\frac{n_{29}}{n}$	$\frac{n_{30}}{n}$

由上表可以看出，随机变量 X 的概率分布就是全年级学生成绩的分布：

$$P(X=x_i)=p_i=\frac{n_i}{n},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 30.$$

经计算可知，全年级学生的平均成绩是

$$\mu=\frac{1}{n}(x_1n_1+x_2n_2+\cdots+x_{30}n_{30}).$$

由于 X 的分布是全年级学生成绩的分布，我们把全年级的平均成绩 μ 定义为 X 的均值，记作 $E(X)$，则

$$\begin{aligned}E(X)&=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\cdots+x_{30}\frac{n_{30}}{n}\\&=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_{30}p_{30}.\end{aligned}$$

再看一个例子.

问题 2　设离散型随机变量 X 有如下分布列：

X	1	100
P	0.01	0.99

作为随机变量 X 的可能值 1 和 100 的平均数，$\frac{1}{2}(1+100)=50.5$ 并不能真正体现 X 的取值的平均水平，因为 X 取值 100 的概率比取值 1 的概率大得多，所以应当用 $1\times0.01+100\times0.99=99.01$ 表示 X 的平均取值.

一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则称

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

为 X 的**数学期望**或**均值**.

离散型随机变量的数学期望刻画了这个离散型随机变量的平均水平.

可以发现，随机变量的均值是常数，而样本的均值依赖于样本的选择，是一个随机变量. 在大多数情况下，当样本量足够大时，样本均值会接近于总体均值. 因此，我们常用样本均值估计总体的均值.

例 10　甲击中目标的概率是 p，如果击中，得 1 分，否则得 0 分. 用 X 表示甲的得分，计算随机变量 X 的数学期望.

解　$\{X=1\}$的充分必要条件是击中目标，所以

$$P(X=1)=p.$$

$\{X=0\}$是$\{X=1\}$的对立事件，所以

$$P(X=0)=1-P(X=1)=1-p.$$

于是 $E(X)=1\times P(X=1)+0\times P(X=0)=1\times p+0\times(1-p)=p.$

因此甲合理的期望是得 p 分.

例 10 中的随机变量 X 服从两点分布．于是有

若 $X\sim B(1,\ p)$，则 $E(X)=p$.

设离散型随机变量 X 服从二项分布 $B(n,\ p)$，且 $q=1-p$，则由 $k\mathrm{C}_n^k=k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$可得

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\mathrm{C}_n^0p^0q^n+1\times\mathrm{C}_n^1p^1q^{n-1}+2\times\mathrm{C}_n^2p^2q^{n-2}+\cdots+n\mathrm{C}_n^np^nq^0\\&=np\mathrm{C}_{n-1}^0p^0q^{n-1}+np\mathrm{C}_{n-1}^1p^1q^{n-2}+\cdots+np\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}p^{n-1}q^0\\&=np(\mathrm{C}_m^0p^0q^m+\mathrm{C}_m^1p^1q^{m-1}+\cdots+\mathrm{C}_m^mp^mq^0)\\&=np(p+q)^m\\&=np.\end{aligned}$$

令 $m=n-1$.

于是有

若 $X\sim B(n,\ p)$，则 $E(X)=np$.

设一试验成功的概率为 p，将该试验独立重复 n 次，用 X 表示成功的次数，则 X 有数学期望 np．$E(X)=np$ 是 n 次独立重复试验中成功的平均次数，同时说明成功的平均次数既与 n 成正比，也与 p 成正比．因此，单次试验成功的概率越大，n 次独立重复试验中成功的平均次数就越多.

例 11 根据以往统计资料，某地车主购买甲种保险的概率为 0.5，购买乙种保险的概率为 0.3，由于两种保险作用类似，因而没有人同时购买．设各车主购买保险相互独立，用 X 表示该地 100 位车主中甲、乙两种保险都不购买的车主数，求 X 的数学期望.

解 设 A 表示甲、乙两种保险都不购买，则

$$P(A)=1-(0.5+0.3)=0.2.$$

由于各车主购买保险相互独立，根据题意可知，100 位车主中甲、乙两种保险都不购买的车主数 X 服从二项分布，即 $X\sim B(100,\ 0.2)$.

所以 $$E(X)=100\times0.2=20.$$

若离散型随机变量服从超几何分布 $H(N, M, n)$，由组合公式 $\sum\limits_{k=0}^{l} C_M^k C_{N-M}^{n-k} = C_N^n$ 可得

$$E(X)=\sum_{k=0}^{l} k \cdot \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \sum_{k=1}^{l} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = \frac{nM}{N}.$$

于是有

若 $X \sim H(N, M, n)$，则 $E(X)=\dfrac{nM}{N}$.

例 12 一袋中装有 50 个白球，45 个黑球，5 个红球，现从中随机抽取 20 个球，求取出的红球个数 ξ 的数学期望.

分析 将白球和黑球视为“正品”，红球视为“次品”，则所求问题转化为 100 件产品中有 5 件次品，随机从中抽取 20 件产品，且取出次品件数 ξ 服从超几何分布.

解 袋中球的总数为 $50+45+5=100$，根据题意可知，随机抽取的 20 个球中红球的个数 ξ 服从超几何分布，即 $\xi \sim H(100, 5, 20)$.

因为 $N=100$，$M=5$，$n=20$，所以 $E(\xi)=\dfrac{nM}{N}=\dfrac{20\times 5}{100}=1$.

例 13 已知离散型随机变量 X 有概率分布 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 若 $Y=aX+b$，其中 a，b 为常数，求 $E(Y)$.

解 由于 X 是离散型随机变量，那么 Y 也是离散型随机变量.

因为 $$P(Y=ax_i+b)=P(X=x_i), \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

所以 Y 的分布列为

Y	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_i+b	$\cdots$	ax_n+b
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

于是

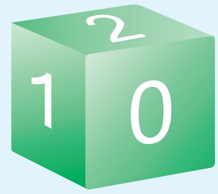
$$\begin{aligned} E(Y) &= (ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_n+b)p_n \\ &= a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n) \\ &= aE(X)+b. \end{aligned}$$

由上可得，对于离散型随机变量 X，

若 $Y=aX+b$，a，b 为常数，则 $E(Y)=aE(X)+b$.

练习

1. 一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标有数字 0，两个面上标有数字 1，一个面上标有数字 2. 将这个小正方体抛掷 2 次，求向上的数字之积的数学期望.



（第 1 题）

2. 甲、乙比赛时，甲每局赢的概率是 0.51，乙每局赢的概率是 0.49. 甲、乙一共进行了 10 局比赛. 已知各局比赛相互独立，计算甲平均赢多少局，乙平均赢多少局.

3. 袋中有 3 个红球，7 个白球. 从中无放回地任取 5 个，取到几个红球就得几分. 问平均得几分？

4. 一次单元测验由 20 道选择题构成，每道选择题有 4 个选项，其中仅有一个选项正确. 每道题选对得 5 分，不选或选错不得分，满分 100 分. 学生甲选对任意一题的概率为 0.9，学生乙对每道题都从各选项中随机地选择一个. 分别求学生甲和学生乙在这次测验中的成绩的数学期望.

3.2.4 离散型随机变量的方差

离散型随机变量的期望反映了随机变量取值的平均水平或集中趋势. 但只了解期望是不够的. 有时，我们还希望用一个特征数值来反映随机变量偏离期望值的程度，也就是考察随机变量的离散程度.

我们来看一个例子.

问题 甲、乙两名射手在同一条件下射击，所得环数 X_1，X_2的分布列分别为

X_1	6	7	8	9	10
P_1	0.16	0.14	0.42	0.1	0.18

X_2	6	7	8	9	10
P_2	0.19	0.24	0.12	0.28	0.17

容易验证 $E(X_1)=E(X_2)=8$. 从期望（均值）的角度看，分不出甲、乙两名射手的射击水平，不知道谁更优秀，但进一步观察分布列，可以发现甲有 42% 的成绩在 8 环，而乙仅有 12% 的成绩在 8 环，这说明甲成绩偏离均值小，乙成绩偏离均值大.

如何来刻画一个离散型随机变量与其期望的偏离程度呢？

很自然地想到，$|X-E(X)|$表示随机变量 X 与其期望 $E(X)$偏离的大小，可以用$E\{|X-E(X)|\}$表示平均偏离的大小. 但由于绝对值运算在数学处理上有许多不

便，人们便用 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 或 $\sqrt{E\{[X-E(X)]^2\}}$ 来刻画 X 与它的期望 $E(X)$ 的偏离程度.

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

由数学期望的公式可知

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2p_n,\end{aligned}$$

则称 $D(X)$ 为随机变量 X 的**方差**，并称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差**. 通常还用 σ^2 表示方差 $D(X)$，用 σ 表示标准差 $\sqrt{D(X)}$.

我们现在来计算上面问题中甲、乙两名射手射击成绩的方差：

$$\begin{aligned}D(X_1)&=(6-8)^2\times0.16+(7-8)^2\times0.14+(8-8)^2\times0.42+\\&\quad(9-8)^2\times0.1+(10-8)^2\times0.18\\&=1.6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X_2)&=(6-8)^2\times0.19+(7-8)^2\times0.24+(8-8)^2\times0.12+\\&\quad(9-8)^2\times0.28+(10-8)^2\times0.17\\&=1.96.\end{aligned}$$

由此可知，射手甲的射击成绩稳定性较好，稳定在 8 环左右，而射手乙的射击成绩稳定性略差.

方差或标准差越小，则随机变量的取值向数学期望集中得越好；反之，方差或标准差越大，则随机变量的取值就越分散.

随机变量的方差是常数，而样本的方差依赖于样本的选取，带有随机性，即样本方差是随机变量. 在大多数情况下，样本方差会接近于总体方差，因此，我们常用样本方差估计总体的方差.

例 14 若随机变量 X 的概率分布如下表所示，求方差 $D(X)$ 和标准差 $\sqrt{D(X)}$.

X	0	1
P	$1-p$	p

解 因为 $$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p,$$
所以
$$D(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p$$
$$=p(1-p),$$
$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{p(1-p)}.$$

于是，对于离散型随机变量 X，

> 若 $X\sim B(1,\ p)$，则 $D(X)=p(1-p)$.

根据方差的定义和数学期望的性质，对于离散型随机变量 X，我们还可以得到以下计算公式：

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2.\end{aligned}$$

> （1）若 $X\sim B(n,\ p)$，则 $D(X)=np(1-p)$；
> （2）若 $Y=aX+b$，a，b 为常数，则 $D(Y)=a^2D(X)$.

例 15 某厂一批产品的正品率是 98%，检验单位从中有放回地随机抽取 10 件，计算：

（1）抽出的 10 件产品中平均有多少件正品；

（2）抽出的 10 件产品中正品数的方差和标准差.

解 因为正品率是 98%，

所以任取一件产品时，得到正品的概率为 0.98.

用 X 表示抽得的正品数，由于是有放回的随机抽样，

所以 X 服从二项分布 $B(10,\ 0.98)$.

（1）$E(X)=10\times0.98=9.8$，

因此抽出的 10 件产品中平均有 9.8 件正品.

（2）$D(X)=10\times0.98\times(1-0.98)=0.196$，

标准差 $\sigma=\sqrt{D(X)}\approx0.44$.

例 16 某人欲投资 10 万元，有两种方案可供选择. 设 X 表示方案一所得收益（单位：万元），Y 表示方案二所得收益（单位：万元）. 其分布列分别为

X	-2	8
P	0.7	0.3

Y	-3	12
P	0.7	0.3

假定同期银行利率为 1.75%，该人征求你的意见，你通过分析会得到怎样的结论呢?

解　由期望和方差的计算公式，得

$E(X)=-2\times0.7+8\times0.3=1$,

$E(Y)=-3\times0.7+12\times0.3=1.5$,

$D(X)=(-2-1)^2\times0.7+(8-1)^2\times0.3=21$,

$D(Y)=(-3-1.5)^2\times0.7+(12-1.5)^2\times0.3=47.25$.

由于同期银行利率为 1.75%，所以若将 10 万元存入银行，可得利息(无风险收益)$10\times1.75\%=0.175$(万元). 从期望收益的角度来看，两种投资方案都可以带来额外的收益，但都要冒一定的风险. 方案一的期望收益小于方案二，但方案一的风险也小于方案二. 所以，如果想稳赚而不冒任何风险，就选择存入银行；如果想多赚点又不想风险太大就选择方案一；如果想多赚又不怕风险就选择方案二.

练习

1. 抛掷一枚质地均匀的骰子，求向上一面的点数 X 的方差和标准差.

2. 甲每次投篮命中的概率为 0.8，用 X 表示甲在 10 次相互独立的投篮中命中的次数，计算 $E(X)$和 $D(X)$.

3. 设随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $D\left(\frac{1}{4}X\right)$的值.

4. 已知投资项目 A 和 B 有如下资料可供投资者参考，试说明投资哪个项目较佳.

项目 A

投资回报率 x	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
概率 $P(x)$	0.05	0.1	0.15	0.4	0.15	0.1	0.05

项目 B

投资回报率 y	5.5%	6.5%	7.5%	8.5%
概率 $P(y)$	0.25	0.25	0.25	0.25

习题 3.2

学而时习之

1. (1) 下面是某学生求得的一个离散型随机变量 X 的分布列.

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

试说明该学生的计算结果是否正确.

(2) 设 ξ 是一个离散型随机变量，其分布列为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

①求 q 的值；②求 $P(\xi<0)$，$P(\xi\leqslant 0)$.

2. 设随机变量 X 的分布列为 $P\left(X=\frac{k}{5}\right)=ak(k=1,2,3,4,5)$.

(1) 求常数 a 的值；

(2) 求 $P\left(X\geqslant\frac{3}{5}\right)$和 $P\left(\frac{1}{10}<X<\frac{7}{10}\right)$.

3. 一个袋中有除颜色外其余完全相同的 3 个白球和 4 个红球.

(1) 从袋中任意摸出一球，用 0 表示摸出白球，用 1 表示摸出红球，则有 $X=\begin{cases}0, & \text{摸出白球},\\ 1, & \text{摸出红球},\end{cases}$ 求 X 的分布列；

(2) 从袋中任意摸出两个球，用“$Y=0$”表示两个球全是白球，用“$Y=1$”表

示两个球不全是白球，求 Y 的分布列.

4. 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个红绿灯口，假设在每个红绿灯口遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都为$\frac{1}{4}$. 记 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布列及至多遇到一次红灯的概率.

5. 从一批含有 13 件正品、2 件次品的产品中，不放回地任取 3 件，求取得次品数 ξ 的分布列.

6. 若 M 件产品中包含 m 件次品，$m\geqslant 3$，$M-m\geqslant 3$，从中任意取出 3 件，用 X 表示取出的次品数，列出 X 的分布列.

7. 在某次知识竞赛中，每名选手都要回答两个不同的问题，若都回答失败，则输 1 分，否则赢 0.3 分. 已知选手甲参与了此次知识竞赛，并且他回答每个问题正确的概率都为$\frac{1}{2}$，用 X 表示他的得分，计算 X 的分布列和数学期望.

8. 某人花 2 元钱买彩票，他抽中 100 元奖的概率是 0.1%，抽中 10 元奖的概率是 1%，抽中 1 元奖的概率是 20%，假设各种奖不能同时抽中，试求：

(1) 此人收益的概率分布；

(2) 此人收益的期望值.

9. 已知随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	-2	1	3
P	0.16	0.44	0.40

求 $E(X)$，$E(2X+5)$，$D(X)$，$D(2X+5)$.

10. 在某公司的一次投标工作中，中标可以获利 10 万元，没有中标会损失成本费 0.05 万元. 如果中标的概率是 0.4，计算：

(1) 该公司赢利的方差 $D(X)$；

(2) 该公司赢利的标准差(精确到 0.001).

11. 甲、乙两个野生动物保护区有相同的自然环境，且野生动物的种类和数量也大致相等，而两个保护区内每个季度发现违反野生动物保护法的事件次数的分布列分别为

ξ	0	1	2	3
P	0.3	0.3	0.2	0.2

η	0	1	2
P	0.1	0.5	0.4

试评定这两个保护区的管理水平.

温故而知新

12. 甲、乙两人参加一次英语口语考试，已知在备选的 10 道试题中，甲能答对其中的 6 道试题，乙能答对其中的 8 道试题. 规定每次考试都从备选试题中随机抽出 3 题进行测试，对于每道题，答对得 5 分，答错或不答得 0 分. 求：

（1） 甲答对试题数 X 的分布列；

（2） 乙所得分数 Y 的分布列.

13. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示：

一次购物量/件	1～4	5～8	9～12	13～16	17 及以上
顾客人数	x	30	25	y	10
结算时间/min	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

（1） 求 x，y 的值；

（2） 若将频率视为概率，求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列.

14. 体育课排球发球项目考试的规则是：每名学生最多发球 3 次，一旦发球成功，则停止发球，否则一直发到 3 次为止. 设学生一次发球成功的概率为 p，发球次数为 X，若 X 的数学期望 $E(X)>1.75$，求 p 的取值范围.

3.3 正态分布

前面我们已经初步认识了离散型随机变量及其分布，它们的可能值或者是有限个，或者是可数无穷多个，但在实践中，还有取值不是有限个或可数无穷多个的随机变量．在这类随机变量中，最常见的是连续型随机变量．下面我们来学习概率论中一种重要的连续型随机变量——正态分布．

很早以前，人们并不知道圆周率 π 的大小(我们也假设 π 是未知的)，于是可以通过研究圆的直径和周长的关系来了解圆周率的大小．

例如，对直径为 1 cm 的圆的周长进行测量．由于多种偶然因素的影响，测量出的数据是有差异的．若记 X 为测量出的数据，则 X 是一个随机变量．实际问题中需要关心 X 取值的概率分布．为了确定 X 的概率分布，我们记录了 90 次测量的数据(即样本点个数为 90)，把它们进行分组整理后得如下分组数据表：

组　号	分　组	组频数	组频率	组频率/组距
1	$[3.115, 3.120)$	4	$\frac{4}{90}$	8.889
2	$[3.120, 3.125)$	6	$\frac{6}{90}$	13.333
3	$[3.125, 3.130)$	8	$\frac{8}{90}$	17.777
4	$[3.130, 3.135)$	11	$\frac{11}{90}$	24.444
5	$[3.135, 3.140)$	14	$\frac{14}{90}$	31.111
6	$[3.140, 3.145)$	15	$\frac{15}{90}$	33.333
7	$[3.145, 3.150)$	12	$\frac{12}{90}$	26.667
8	$[3.150, 3.155)$	10	$\frac{10}{90}$	22.222
9	$[3.155, 3.160)$	6	$\frac{6}{90}$	13.333
10	$[3.160, 3.165)$	4	$\frac{4}{90}$	8.889

以测量出的数据为横坐标，以组频率/组距为纵坐标，就可以得到频率分布直方图(如图 3.3－1)．图 3.3－1 中每个小矩形的面积就是样本落在该分组区间内的频率.

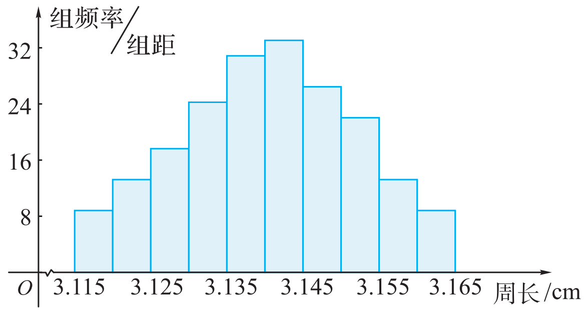


图 3.3－1

当样本点个数越来越大，分组数越来越多时(即组距无限缩小)，频率分布直方图的顶边会无限缩小乃至形成一条光滑的曲线(如图 3.3－2).

随机变量 X 在每个小区间内取值的频率，接近于 X 在那个区间中取值的概率，因此，我们把这条曲线称为 X 的**概率密度曲线**.

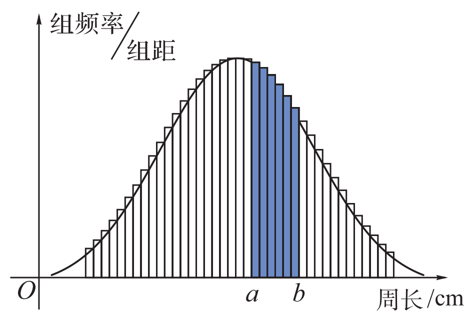


图 3.3－2

从图 3.3－2 可以看出，曲线呈现“中间高，两边低，左右大致对称”的特点，我们把具有这种特性的曲线叫作**正态分布密度曲线**，简称**正态曲线**，它的函数表达式为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

其中 μ 和 σ 为参数，且 $\sigma>0$，$\mu\in\mathbf{R}$．$p(x)$称为**概率密度函数**．此时，我们称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的**正态分布**，简记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

不同的 μ 和 σ 对应着不同的正态分布密度曲线(如图 3.3－3).

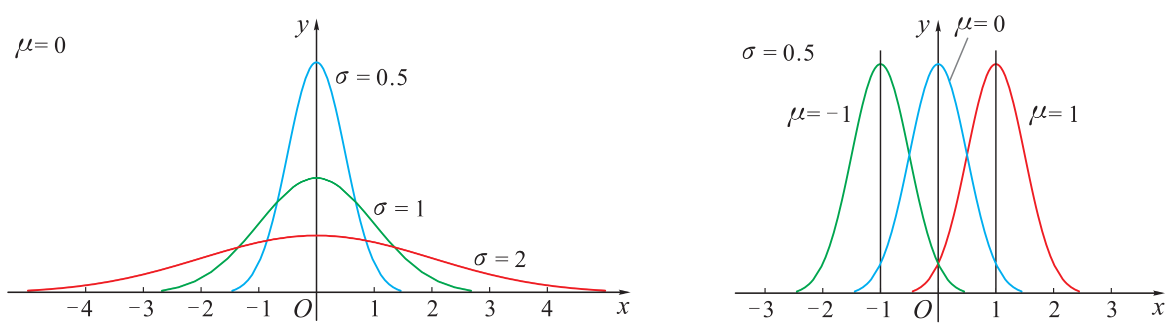


图 3.3－3

正态分布密度曲线具有如下特点：

1．曲线位于 x 轴上方，与 x 轴不相交；

2．曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称；

3. $p(x)$在 $x=\mu$ 处达到最大值$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

4. 当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移；

5. σ 越大，正态曲线越扁平，σ 越小，正态曲线越尖陡；

6. 曲线与 x 轴之间所夹区域的面积等于 1.

随机变量 X 落在区间$(a，b]$中的概率可以通过概率密度函数 $p(x)$来描述，即 $P(a<X\leqslant b)$恰好是由 $p(x)$对应的曲线和直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积(如图 3.3－4).

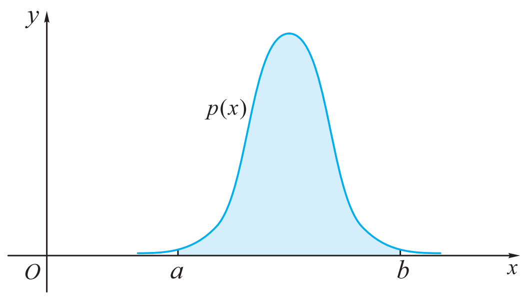


图 3.3－4

概率密度曲线能反映随机变量 X 的取值规律以及它取值在某个区间的概率，它所起到的作用与离散型随机变量分布列的作用是相同的.

对于离散型随机变量，如果 X 是从某个总体中随机抽取的个体，则 X 的数学期望 $E(X)$就是总体均值 μ；如果 X 的分布关于点 μ 对称，则 μ 便是 X 的数学期望. 现在，正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$的密度函数 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$关于点 μ 对称，所以 μ 是 X 的数学期望，即 $E(X)=\mu$.

随机变量 X 的方差 $D(X)$代表了随机变量 X 的离散程度. 当 X 的数学期望为 μ 时，$D(X)=E[(X-\mu)^2]$. 如果 X 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，则可以计算出 X 的方差 $D(X)=\sigma^2$. 于是，X 的标准差为 σ.

从图 3.3－3 也可以看出，标准差 σ 越大，正态曲线越扁平，说明 X 的取值越分散；σ 越小，正态曲线越尖陡，说明 X 的取值越集中在数学期望 μ 附近.

特别地，数学期望 $\mu=0$，方差 $\sigma^2=1$ 时的正态分布称为**标准正态分布**，其密度函数记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty),$$

其图象如图 3.3－5 所示，随机变量 X 服从标准正态分布，简记为 $X\sim N(0，1)$.

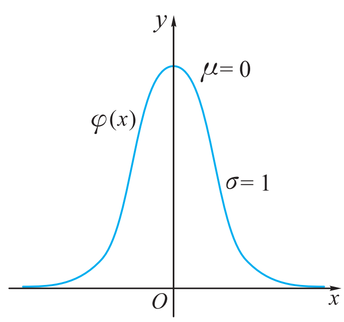


图 3.3－5

正态分布在概率和统计中占有重要的地位. 现实中，许多随机变量都服从正态分布或近似服从正态分布. 例如，只受随机因素影响的测量值、稳定生产条件

下的产品质量指标等都服从正态分布①；生物和动物的许多生理指标等，都服从或近似服从正态分布．甚至当 n 很大时，二项分布也可以用正态分布来近似描述．

若 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则随机变量 X 在 μ 的附近取值的概率较大，在离 μ 较远处取值的概率较小．

具体地，如图 3.3－6 所示，随机变量 X 取值

落在区间 $(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)$ 内的概率约为 68.27％，

落在区间 $(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$ 内的概率约为 95.45％，

落在区间 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 内的概率约为 99.73％．

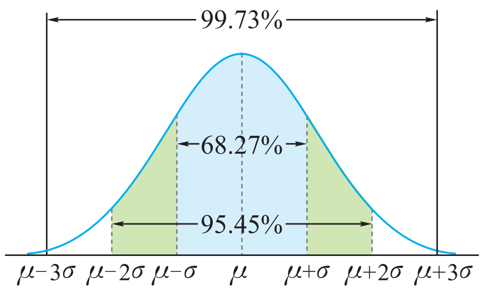


图 3.3－6

由图 3.3－6 可以看出，正态总体几乎总取值于区间 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 之内．而在此区间以外取值的概率不足 0.003，通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生．

在实际应用中，通常认为服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 之间的值，并简称为 3σ 原则．

例 在某次数学考试中，假设考生的成绩 ξ 服从正态分布 $\xi\sim N(90,\ 100)$．

（1）求考试成绩 ξ 位于区间 $(70,\ 110)$ 上的概率；

（2）若这次考试共有 2 000 名考生，试估计考试成绩在 $(80,\ 100)$ 间的考生大约有多少人．

解 因为 $\xi\sim N(90,\ 100)$，

所以 $\mu=90$，$\sigma=\sqrt{100}=10$．

（1）由正态分布的性质可知，考生成绩在 $\mu-2\sigma=90-2\times10=70$ 和 $\mu+2\sigma=90+2\times10=110$ 之间的概率约为 0.954 5．

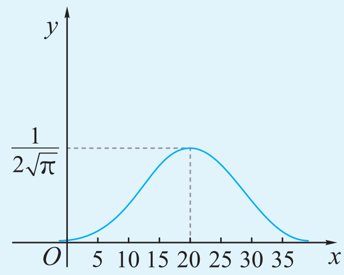
（2）由正态分布的性质可知，考生成绩在 $\mu-\sigma=80$ 和 $\mu+\sigma=100$ 之间的概率是 0.682 7．又因为一共有 2 000 名学生参加考试，因此考试成绩在 $(80,\ 100)$ 间的考生大约有 $2\ 000\times0.682\ 7\approx1\ 365$（人）．

① 数学上可以证明：如果某个随机变量是由大量相互独立的随机因素的综合影响所构成，而且每一因素在总影响中的作用是很微小的，那么这一随机变量就近似服从正态分布．

练习

1. 证明：当 $x=\mu$ 时，正态分布的概率密度函数取得最大值.

2. 如图是一条正态曲线，试根据图象写出其正态分布的概率密度函数的解析式，并求出总体随机变量的期望和方差.



（第 2 题）

3. 假设某市高二学生中男生的身高 X(cm)服从正态分布 $N(174, 9)$，若该市共有高二男生3 000 人，试估计该市高二男生的身高在$(174, 180]$范围内的人数.

习题 3.3

学而时习之

1. 标准正态分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x\in(-\infty, +\infty).$$

(1) 证明：$f(x)$是偶函数；

(2) 求 $f(x)$的最大值；

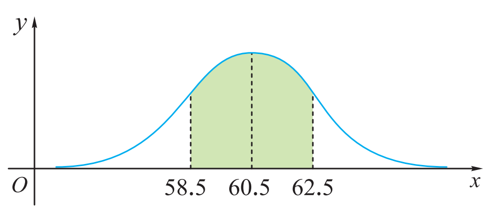
(3) 利用指数函数的性质说明 $f(x)$的增减性.

2. 已知某种零件的尺寸 ξ(mm)服从正态分布，其正态曲线在$(0, 80)$上是增函数，在$(80, +\infty)$上是减函数，且 $f(80)=\dfrac{1}{8\sqrt{2\pi}}$.

(1) 求正态分布的概率密度函数；

(2) 估计尺寸在 72～88 mm 间的零件大约占总数的百分之几.

3. 为了解某地区高三男生的身体发育状况，抽查了该地区 1 000 名年龄在 17.5 岁至 19 岁的高三男生的体重情况，抽查结果表明他们的体重 X(kg)服从正态分布 $N(\mu, 2^2)$，且正态分布密度曲线如图所示，若体重大于 58.5 kg 且不大于 62.5 kg 属于正常情况，试



（第 3 题）

估计这 1 000 名男生中属于正常情况的人数.

4. 某工厂制造的机械零件尺寸服从正态分布 $N\left(4, \frac{1}{9}\right)$，问：在一次正常的试验中，取1 000 个零件时，不属于区间(3，5)这个尺寸范围的零件大约有多少个？

温故而知新

5. 从某批材料中任取一件进行检测，测得材料的强度 X 服从正态分布 $N(200, 18^2)$.

(1) 计算取得的材料的强度不低于 182 的概率；

(2) 如果所用的材料要求以 98%的概率保证强度不低于 164，则这批材料是否符合这个要求？

6. 李明上学有时坐公交车，有时骑自行车. 他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间(样本数据)，经数据分析得到如下结果：

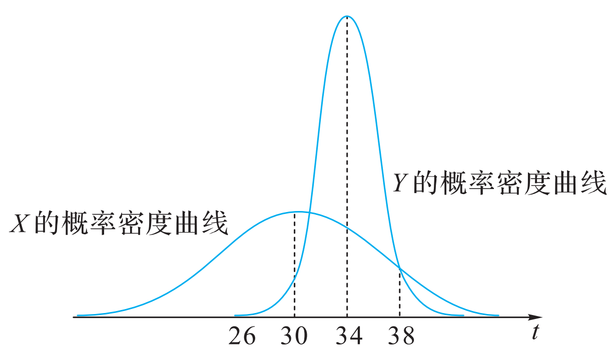
坐公交车：平均用时 30 min，方差为 16；

骑自行车：平均用时 34 min，方差为 4.

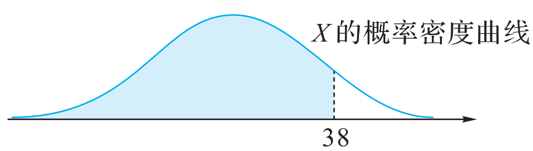
(1) 根据以上数据，李明平时选择哪种交通方式更稳妥？试说明理由.

(2) 分别用 X 和 Y 表示坐公交车和骑自行车上学所用的时间，X 和 Y 的概率密度曲线如图(a)所示，如果某天有 38 min 可用，他应选择哪种交通方式？如果仅有34 min 可用，又应该选择哪种交通方式？试说明理由.

(提示：(2)中 X 和 Y 的概率密度曲线分别反映的是 X 和 Y 的取值落在某个区间的随机事件的概率，例如，图(b)中阴影部分的面积表示的就是 X 取值不大于 38 min 时的概率.)



(a)



(b)

(第 6 题)

数学文化

高斯与正态分布

意大利科学家伽利略(1564—1642)可能是第一个提出随机误差概念的人．他在1632年出版的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》中提到了观测误差，并谈到了观测误差的以下性质：

(1) 所有的观测都可以有误差，其来源可能归因于观测者、观测仪器和观测条件；

(2) 观测误差对称地分布在0的两侧；

(3) 小误差比大误差出现得更频繁．

这里的观测误差实际上是今天我们所说的随机误差．

1809年，德国数学家高斯(1777—1855)发表了其数学和天体力学的名著《绕日天体运动的理论》．在此书末尾，他写了一节有关“数据结合”的问题，实际上涉及的就是随机误差分布的确定问题．

高斯的做法与拉普拉斯(1749—1827)相同．但再往下进行时，他提出了两个创新的想法．一是他不采取贝叶斯式的推理方式．由于测量误差由诸多因素形成，且影响不大的因素出现次数多些，因而按中心极限定理，其分布近似于正态分布是势所必然．其实，早在1780年左右，拉普拉斯就推广了棣莫弗(1667—1754)的结果，得到了中心极限定理的比较一般的形式．可惜的是，他未能把这一成果用到确定误差分布的问题上来．高斯的第二个创新的想法是：把问题的思考模式倒过来，先承认算术平均是一个好的估计，然后去找误差密度函数 f，使得误差分布导出的极大似然估计等于算术平均值．后经高斯证明，满足这一条件的就是正态分布密度函数．

正态分布是具有两个参数 μ 和 σ^2 的连续型随机变量的分布，第一参数 μ 是服从正态分布的随机变量的均值，第二个参数 σ^2 是此随机变量的方差，所以正态分布记作 $N(\mu, \sigma^2)$．服从正态分布的随机变量的概率规律为取 μ 邻近的值的概率大，而取离 μ 越远的值的概率越小；σ 越小，分布越集中在 μ 附近，σ 越大，分布越分散．正态分布的密度函数的特点是：关于 μ 对称，在 μ 处达到最大值，在正(负)无穷远处取值为0，在 $\mu\pm\sigma$ 处有拐点．它的形状是中间高两边低，图象是一条位于 x 轴上方的钟形曲线．

正态分布最早由棣莫弗在求二项分布的渐近公式中得到．高斯在研究测量误差时从另一个角度推导出了它．拉普拉斯和高斯研究了它的性质．

高斯对正态分布的研究工作对后世的影响极大，这也使得正态分布同时有了“高斯分布”的名称．

数学实验

利用计算机探究正态分布密度曲线

利用计算机软件来探究正态分布密度曲线给我们带来很大方便.

已知某课外兴趣小组关注某城市居民家庭使用天然气的量，调查了某地区100个居民家庭某年的月均用气量(单位：m^3)，数据如下：

4.1	3.6	3.0	3.0	2.6	2.2	2.6	2.8	2.9	2.6
4.4	3.8	3.2	3.2	2.5	2.2	1.2	1.4	2.3	2.4
4.2	3.7	3.3	3.1	2.6	2.5	4.7	2.5	1.5	4.8
4.3	3.8	3.3	3.2	2.7	2.3	4.6	2.7	1.6	5.1
4.2	3.9	3.4	3.3	2.8	2.4	4.5	2.9	1.8	5.3
4.0	3.9	3.4	3.4	2.9	2.6	2.4	2.8	1.7	3.0
3.5	3.8	3.3	3.3	2.8	2.3	2.3	2.6	1.9	3.3
3.6	3.7	3.4	3.1	2.7	2.4	2.2	2.5	1.5	3.4
3.5	3.6	3.3	3.1	2.6	2.0	2.0	2.7	1.8	3.4
3.8	3.5	3.2	3.0	2.5	2.0	2.2	2.8	1.6	3.2

先利用计算机软件，分析这些数据的具体分布情况，看看主要集中在什么范围内.

打开 GeoGebra 软件，在视图菜单中单击表格区，将上面10行10列数据输入 A1～J10 区域中，框选表格 A1～J10 中的数据，在动态工具栏中选择“单变量分析”工具，在弹出的对话框中点击“分析”按钮，得到这组数据的频率分布直方图(如图1).

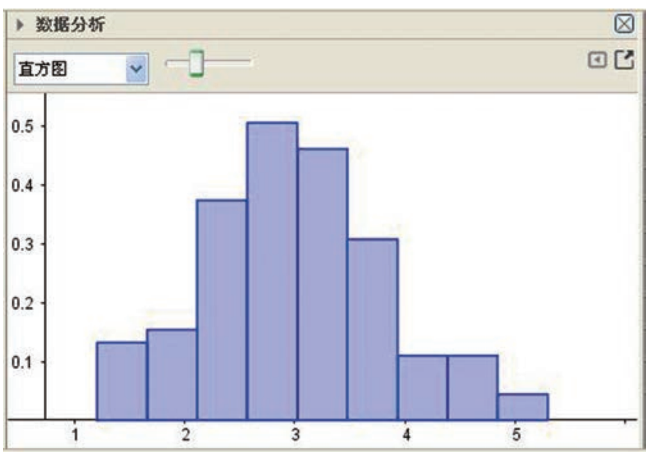


图 1

拖动分组滑块，改变组数，观察动态数据频率分布直方图的变化规律，体会组数与组距间的关系.

若样本点增至整个城市居民家庭月均用气量，所分组数越多，相应的组距越小，频率分布直方图顶边无限缩小乃至形成一条光滑曲线(倒扣的钟形对称曲线)，此即总体密度曲线.

点击直方图选项按钮，勾选“频数折线图”“正态曲线”(如图 2)，观察两条曲线的形状.

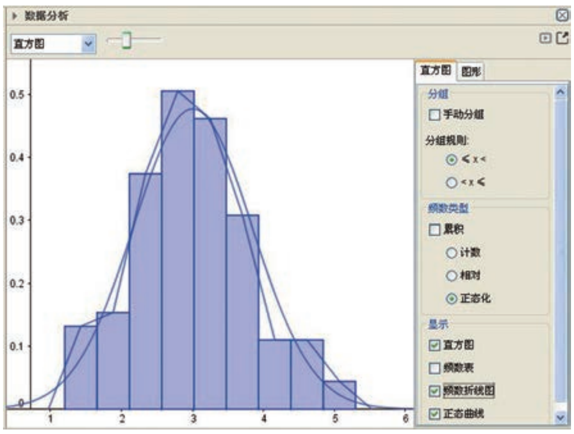


图 2

通过观察，正态分布密度曲线是由数据频率分布折线图抽象出来的，接下来我们继续利用软件来探究正态分布密度曲线的性质.

打开 GeoGebra 软件，在视图中勾选指令栏，在输入框中直接输入“正态分布(μ，σ，x)”指令①后回车，系统会弹出一个“创建滑动条”对话框，点击“创建滑动条”，再在输入框中直接输入“$x=\mu$”，作出对称轴(如图 3).

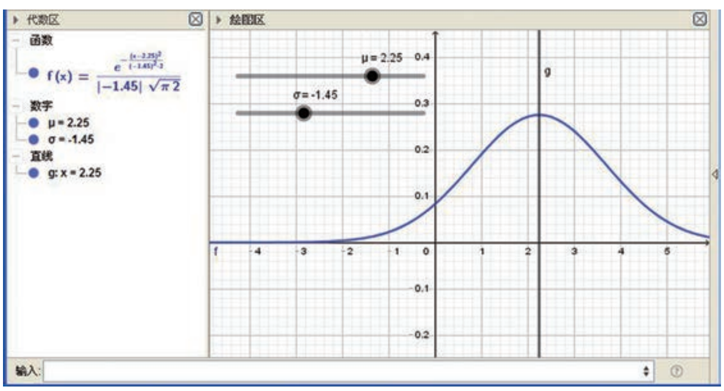


图 3

① 注意：1. 指令格式为“正态分布(〈平均数〉，〈标准差〉，x)”，指令中的 x 是正态分布密度函数的自变量；2. 指令中的逗号及括号都是半角字符；3. 绘图区 x 轴、y 轴比例设为 10∶1(在绘图区用鼠标右键可以调出设置菜单).

分别拖动滑条 μ，σ，观察正态分布密度曲线的位置与形状的变化，你能从中总结出什么规律?

实际上我们可以发现：

①正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称.

②当 σ 一定时，曲线的位置由 μ 确定，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移.

③当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定：σ 越大，正态曲线越扁平，表示总体的分布越分散；σ 越小，正态曲线越尖陡，表示总体的分布越集中.

利用 GeoGebra 软件的“概率计算”功能可以验证服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 取值的 3σ 原则.

在软件视图中选择“概率统计”工具，在弹出的对话框中，选择“正态分布”，输入平均数 $\mu=4$，标准差 $\sigma=2$(如图 4).

输入区间左右端点值，分别计算：

①$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=P(2\leqslant X\leqslant 6)$；

②$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=P(0\leqslant X\leqslant 8)$；

③$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=P(-2\leqslant X\leqslant 10)$.

系统直接计算得到：

①$P(2\leqslant X\leqslant 6)=0.682\ 7$；

②$P(0\leqslant X\leqslant 8)=0.954\ 5$；

③$P(-2\leqslant X\leqslant 10)=0.997\ 3$.

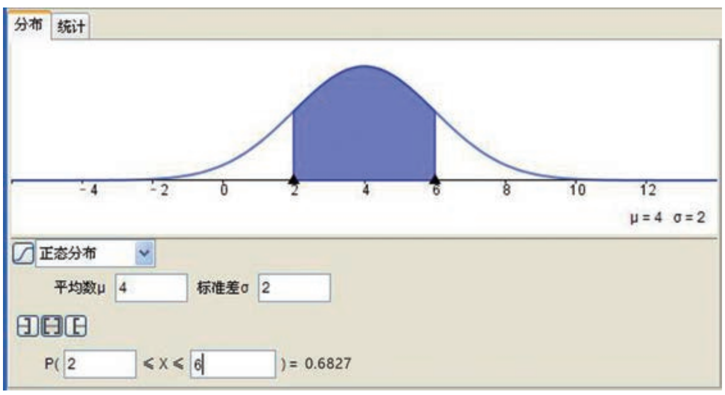


图 4

对于随机变量 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，尝试着改变 μ 和 σ 的几组值，并分别计算下列三组概率值：

①$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)$；

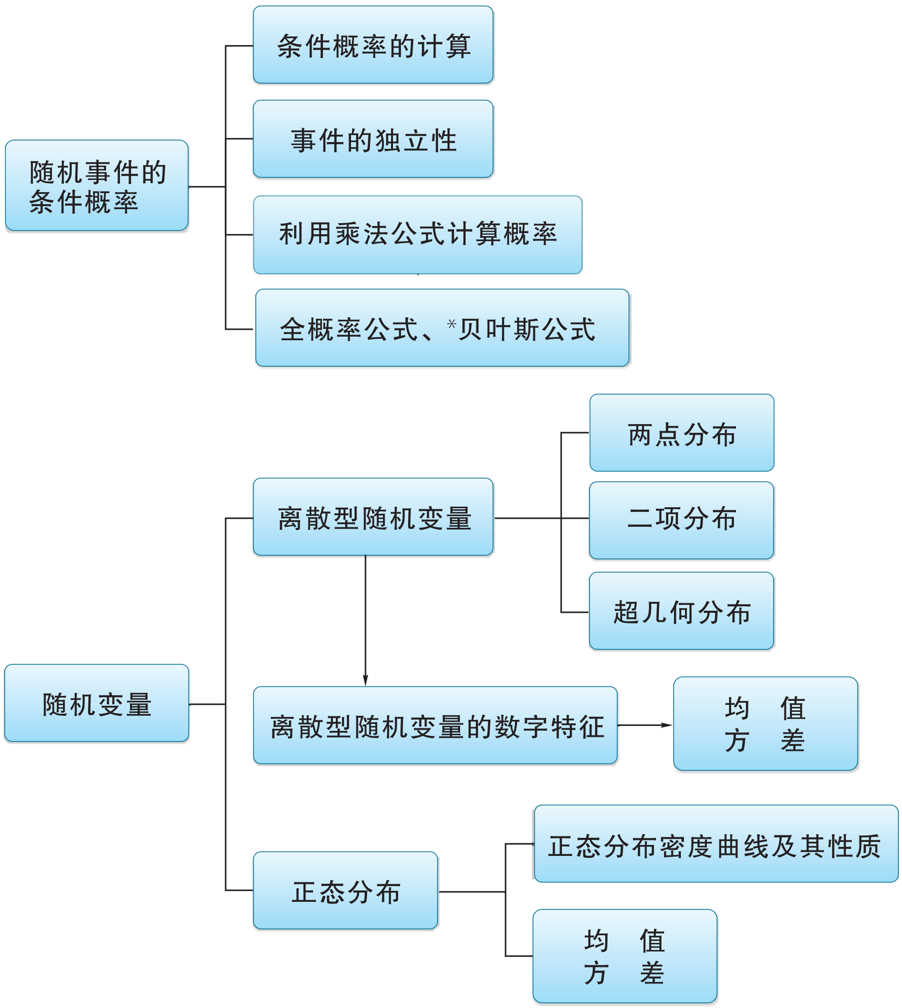
②$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)$；

③$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)$.

比较计算结果，你有什么发现?

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 我们知道，每一个随机试验都是在一定条件下进行的. 试结合古典概型，推导条件概率的计算公式，并结合实例计算简单随机事件的条件概率.

2. 在许多例子中，条件概率 $P(B|A)$ 一般不等于 $P(B)$，试结合古典概型，说明条件概率与独立性的关系.

3. 为解决更复杂的概率问题，我们还学习了几个很重要的概率计算公式，它们可以看作是概率加法公式和乘法公式的一般推广. 试结合古典概型，谈一谈这些概率计算公式的意义，并在此基础上解决一些实际问题.

4. 对于随机试验，只要了解它可能出现的结果，以及每一个结果发生的概率，我们也就基本把握了它的统计规律. 随机变量的引入，使得我们能够更全面地刻画随机现象. 本章重点学习离散型随机变量及其分布列. 你能举出一些离散型随机变量的实例，并列出其分布列吗?

5. 离散型随机变量有许多重要的概率分布，而二项分布和超几何分布是其中两个应用广泛的概率模型. 试结合实例，说明这两个概率模型的推导过程，并求其相关的数字特征.

6. 正态分布在概率和统计中占有特殊、重要的地位. 现实中，许多随机变量都服从正态分布或近似服从正态分布. 试收集本年级同学的身高数据，确定样本均值、方差，并借助计算机软件作一条正态曲线.

复习题三

学而时习之

1. 某地一农业科技实验站，对一批新水稻种子进行试验. 已知这批水稻种子的发芽率为 0.8，出芽后的幼苗成活率为 0.9，在这批水稻种子中，随机抽取一粒，求这粒水稻种子能成长为幼苗的概率.

2. 从 10 名学生(其中 6 女 4 男)中随机选出 3 人参加测验，每名女学生通过测验的概率均为$\frac{4}{5}$，每名男学生通过测验的概率均为$\frac{3}{5}$，求：

(1) 选出的 3 名学生中，至少有一名男学生的概率；

(2) 10 名学生中的女学生甲和男学生乙同时被选中且通过测验的概率.

3. 某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过三次而接通电话的概率. 若已知最后一位数字是奇数，那么此概率又是多少?

4. 市场上供应的某型号灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%，求市场上该型号灯泡的合格率，及买到的该型号合格灯泡是甲厂生产的概率.

5. 有三个同样的箱子，A 箱中有 4 个黑球 1 个白球，B 箱中有 3 个黑球 3 个白球，C 箱中有 3 个黑球 5 个白球. 现任取一箱，再从中任取一球，求此球是白球的概率.

***6.** 设验血诊断某种疾病的误诊率仅为 5%，即若用 A 表示验血阳性，B 表示受验者患病，则 $P(\overline{A}|B)=P(A|\overline{B})=5\%$. 若受检人群中仅有 0.5%患此病，即 $P(B)=0.005$，求一个验血阳性的人确患此病的概率(精确到 0.001).

7. 在每道单项选择题给出的 4 个备选答案中，只有一个是正确的. 若对 4 道选择题中的每一道都任意选定一个答案，求这 4 道题中：

(1) 恰有两道题答对的概率；

(2) 至少答对一道题的概率.

8. 某车间在两天内，每天生产 10 件某产品，其中第一天、第二天分别生产 1 件、2 件次品，而质检部每天要从生产的 10 件产品中随机抽取 4 件进行检查，若发现有次品，则当天的产品不能通过检查.

(1) 求第一天通过检查的概率；

(2) 求前两天全部通过检查的概率.

9. 有甲、乙两名学生，经统计，他们在解答同一份数学试卷时，各自成绩的概率分布如下表所示：

甲：

X	80	90	100
P	0.2	0.6	0.2

乙：

Y	80	90	100
P	0.4	0.2	0.4

试分析两名学生的成绩水平.

10. 在某项测量中，测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$，若 ξ 在 $(0,1)$ 内取值的概率为 0.4，求 ξ 在 $(0,2)$ 内取值的概率.

温故而知新

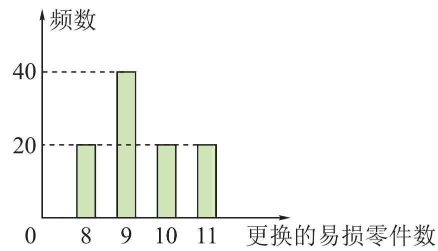
11. 已知甲箱产品中有 5 个正品和 3 个次品，乙箱产品中有 4 个正品和 3 个次品.

(1) 从甲箱中任取 2 个产品，求这 2 个产品都是次品的概率；

(2) 若从甲箱中任取 2 个产品放入乙箱中，然后再从乙箱中任取一个产品，求取出的这个产品是正品的概率.

12. 甲、乙、丙三人相互做传球训练，第 1 次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人. 求 n 次传球后球在甲手中的概率.

13. 某公司计划购买 2 台某型机器. 已知该型机器使用三年后将被淘汰，且有一易损零件. 若在购进机器时，同时购买这种易损零件作为备件，则每个只需 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个需 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买多少个易损零件作为备件，为此搜集并整理了 100 台该型机器在三年使用期内更换的易损零件数，得到下面的柱状图：



(第 13 题)

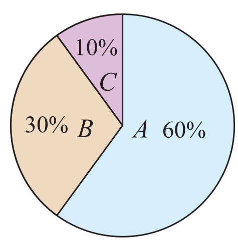
以这 100 台机器更换的易损零件数的频率作为每台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

(1) 求 X 的分布列；

(2) 若要求 $P(X\leqslant n)\geqslant 0.5$，确定 n 的最小值；

(3) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

14. 某保险公司针对一个拥有 20 000 人的企业推出一款意外险产品，每位职工每年只要交少量保费，发生意外后可一次性获得若干赔偿金. 保险公司把该企业的所有岗位分为 A，B，C 三类工种，从事三类工种的人数分布比例如图所示，根据历史数据统计出三类工种的赔付频率如下表所示(并以此估计赔付概率).



职工类别分布扇形图

(第 14 题)

工种类别	A	B	C
赔付频率	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{2}{10^5}$	$\frac{1}{10^4}$

A，B，C 工种职工每人每年的保费分别为 a 元，a 元，b 元，出险后获得的赔偿金额分别为 100 万元，200 万元，50 万元，保险公司在开展此项业务过程中的固定支出为每年 10 万元.

(1) 若保险公司要求利润的期望不低于保费的 20%，试确定保费 a，b 所要满足的条件.

(2) 现有如下两个方案供企业选择：方案一，企业不与保险公司合作，企业自行拿出与保险公司赔付金额相同的赔偿金付给出险职工；方案二，企业与保险公司合作，企业负责职工保费的 60%，职工个人负责保费的 40%，出险后赔偿金由保险公司赔付.

若企业选择方案二的支出期望(不包括职工支出)低于选择方案一的，求 a，b 所要满足的条件，并判断企业是否与保险公司合作(若企业选择方案二的支出期望低于方案一，且与(1)中保险公司所提条件不矛盾，则企业与保险公司合作).

15. 某景点电动车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过 1 h 免费，超过 1 h 的部分每小时收费 10 元(不足 1 h 的部分按 1 h 计算). 有甲、乙两人相互独立来该租车点租车游玩(各租一车次). 设甲、乙不超过 1 h 还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1 h 以上且不超过 2 h 还车的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，两人租车时间都不会超过 3 h.

(1) 求甲、乙两人所付的租车费用相同的概率；

(2) 设甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望 $E(\xi)$.

16. 某地准备建造一个以冰雪为主题的公园. 在建园期间，甲、乙、丙三个工作队负责从冰冻的江中采出尺寸相同的冰块. 在冰景制作过程中，需要对冰块进行雕刻，有时冰块会碎裂，假设冰块碎裂后整个冰块就不能再使用了. 定义：冰块利用率$=\dfrac{\text{使用的冰块数}}{\text{所采冰块总数}}$. 假设甲、乙、丙工作队所采冰块分别占采冰总量的 25%，35%，40%，各队采出的冰块利用率分别为 0.8，0.6，0.75.

(1) 在采出的冰块中有放回地抽取三块，其中由甲工作队采出的冰块数记为 ξ，求 ξ 的分布列及其数学期望；

(2) 在采出的冰块中任取一块，求它被利用的概率.

上下而求索

17. 某商店试销某种商品 20 天，获得如下数据：

日销售量/件	0	1	2	3
频　数	1	5	9	5

试销结束后(假设该商品的日销售量的分布规律不变)，设某天开始营业时有该商品 3 件，当天营业结束后检查存货，若发现存量少于 2 件，则当天进货补充至 3 件，否则不进货．将频率视为概率.

(1) 求当天商店不进货的概率；

(2) 记 X 为第二天开始营业时该商品的件数，求 X 的分布列.

18. 为了监控生产某种零件的一条生产线的生产过程，零件尺寸检验员每天需从该生产线上随机抽取一批零件，并测量其尺寸(单位：cm)，然后根据尺寸标准判断这条生产线是否正常.

假设这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

(1) 假设生产线的生产状态正常，记 X 为一天内抽取的 16 个零件中尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外的零件数，求 $P(X\geqslant 1)$及 X 的数学期望．($0.997\,3^{16}\approx 0.957\,7$)

(2) 一天内抽检的零件中，如果出现了尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外的零件，就认为这条生产线这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

①试说明上述监控生产过程的方法的合理性.

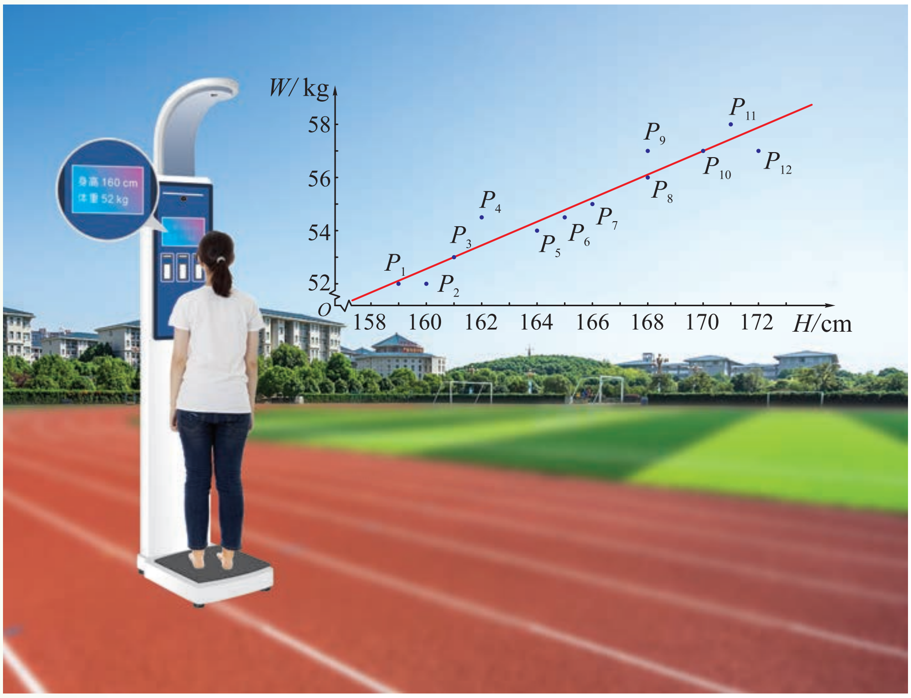
②下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx 0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1, 2, \cdots, 16$.

用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查．剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ(精确到 0.01，$\sqrt{0.008}\approx 0.09$).

4 第4章 统　计



在现实生活中，我们常常会遇到这样的问题：一个成人在体检时，当测量完体重及身高，医生有时会说你超重或太瘦了．身高与体重有关系吗？为什么医生会得出这样的结论？还比如，新闻报道中的新疫苗问世，将给人类预防疾病带来福音．那么科研人员怎么检验疫苗的有效性呢？

生活中的问题用统计学的眼光来看，就能找到答案．本章我们将通过对典型案例的讨论，学习相关与回归、独立性检验的思想，进一步体会统计思维方式及统计思想在帮助人们认识世界时所起到的重要作用．

4.1 成对数据的统计相关性

在科学实验、社会生产和经营活动中，经常要对变量之间的关系进行分析. 例如，在企业生产中，为控制成本，要对影响生产成本的各种因素进行分析；在农业生产中，为确定施肥量，需要研究农作物产量与施肥量之间的关系；在商业活动中，为了解广告费支出对销售量的影响，需要分析广告费支出与销售量之间的关系；等等.

统计分析的目的在于根据统计数据确定变量之间的关系及其相关的程度，并探索其内在规律.

函数关系是两个变量之间具有确定性的对应关系，但在实际问题中，两个变量之间的关系往往不那么简单.

例如，考察居民家庭储蓄与居民家庭收入这两个变量，它们之间就不存在完全确定的关系. 收入水平相同的家庭，他们的储蓄额不尽相同，储蓄额相同的家庭，他们的收入水平也可能不同，可见家庭储蓄并不完全由家庭收入所确定，还有一些其他的因素，如银行利率、消费水平等，也可能影响家庭储蓄. 正是由于影响一个变量的因素多，才造成了变量之间的不确定性.

对于关系不确定的两个变量，尽管不能用函数关系来描述，但这并不表示其无任何规律可循. 通过对大量数据的观测与研究，人们发现许多变量之间确实存在着一定的客观规律. 例如，父亲身高较高时，其子女的身高一般也较高；收入水平高的家庭，其家庭储蓄一般也较多.

一 散点图

为了研究两个变量之间的关系，我们通常借助图象来探究.

案例 某校高二(一)班同学为检验“个子高的人，体重一定也重”这句话的准确程度，随机从本班同学中抽取了 12 名女生，测量出她们的身高与体重，得到下表所示数据：

人物编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
身高 H_i/cm	159	160	161	162	164	165	166	168	168	170	171	172
体重 W_i/kg	52	52	53	54.5	54	54.5	55	56	57	57	58	57

如图 4.1－1，我们以身高的取值为横坐标，以体重的取值为纵坐标，建立直角坐标系，则每对数据(H_i, W_i)都可在直角坐标系中用一个点 $P_i(i=1, 2, \cdots, 12)$表示．这些点称为散点，由坐标系及散点形成的数据图叫作**散点图**.

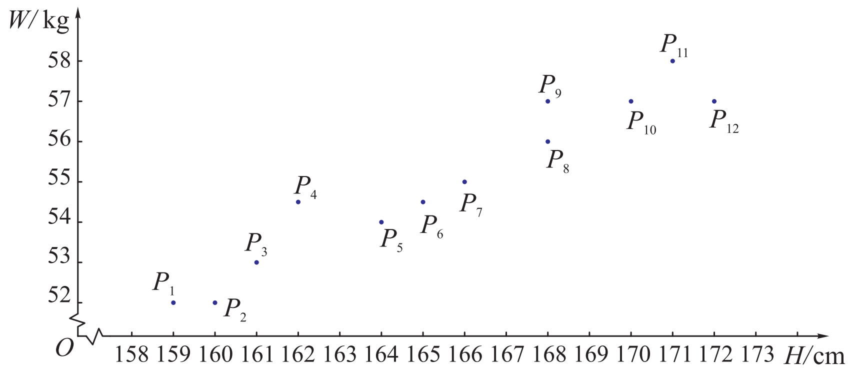


图 4.1－1　女生身高与体重的散点图

散点图直观地描述了变量之间的关系形态，如图 4.1－2 是不同形态的散点图.

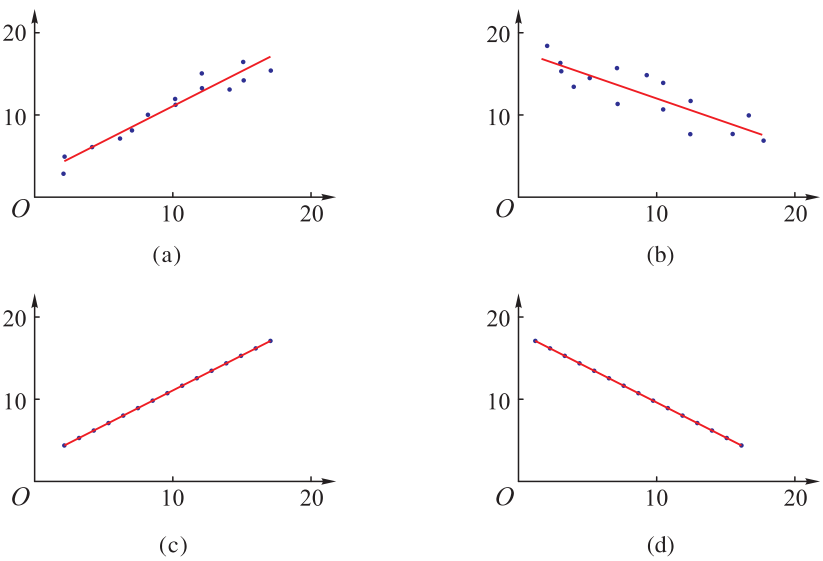


图 4.1－2

如果两个变量之间的关系近似地表现为一条直线，则称它们有线性相关关系，简称为相关关系，如图 4.1－2(a)(b)；

如果一个变量的取值完全依赖于另一个变量，各观测点落在一条直线上，则称它们线性相关，这实际上就是函数关系，如图 4.1 -2(c)(d).

由散点图 4.1－1 可以直观地看出，女生的体重随身高的增加而增加，并且这些散点大致在一条直线附近．也就是说，从大体上看，女生的身高与体重之间具有相关关系.

二 相关系数

通过散点图可以判断两个变量之间有无相关关系，但散点图不能准确反映变量之间的关系强度．因此，需要引入一个统计量——相关系数．

一般地，对 n 个成对观测数据 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$，我们用 $\{x_i\}$ 表示数据 x_1，x_2，…，x_n，$\{y_i\}$ 表示数据 y_1，y_2，…，y_n，用 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ 分别表示 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 的均值，用 $s_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$s_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$ 分别表示 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 的标准差．

> 其中对固定的 i，x_i 和 y_i 来自相同的个体或是同一次试验的观测数据．对 $i\neq j$，$(x_i,\ y_i)$ 和 $(x_j,\ y_j)$ 来自不同的个体或是不同试验的观测数据．

记 $s_{xy}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n}-\overline{x}\,\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$，

则当 $s_xs_y\neq0$ 时，我们称

$$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$$

为 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的**相关系数**．

> 当 $s_xs_y=0$ 时，会出现怎样的情形？

相关系数具有以下性质：

(1) r_{xy} 的取值范围是 $[-1,\ 1]$．当 $0<r_{xy}<1$ 时，称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ **正相关**；当 $-1<r_{xy}<0$ 时，称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ **负相关**；当 $r_{xy}=0$ 时，称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 不相关．

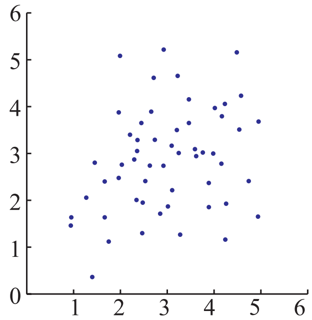
(2) $|r_{xy}|$ 越接近于 1，变量 x，y 的线性相关程度越高，这时数据 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$ 分散在一条直线附近．

(3) $|r_{xy}|$ 越接近于 0，变量 x，y 的线性相关程度越低．

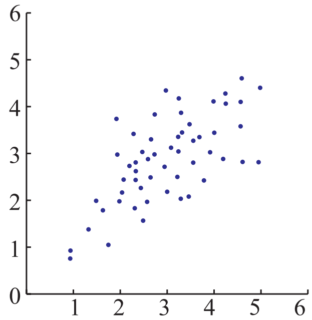
(4) r_{xy} 具有对称性，即 $r_{xy}=r_{yx}$．

(5) r_{xy} 仅仅是变量 x 与 y 之间线性相关程度的一个度量．$r_{xy}=0$ 只表示两个变量之间不存在线性相关关系，并不说明变量之间没有关系，它们之间可能存在非线性关系．

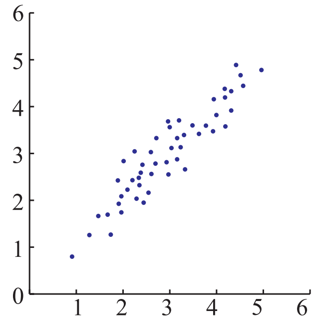
图 4.1－3 与图 4.1－4 分别是$\{x_i\}$和$\{y_i\}$之间正相关和负相关的例子，其中样本量都是 50.



相关系数 $r_{xy}=0.4$

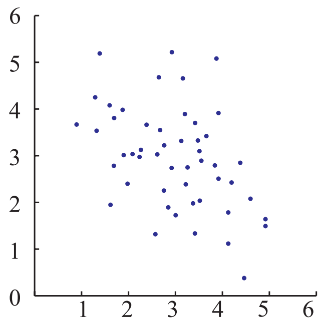


相关系数 $r_{xy}=0.8$

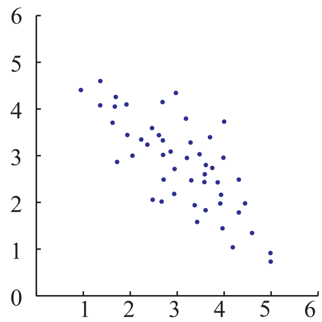


相关系数 $r_{xy}=0.95$

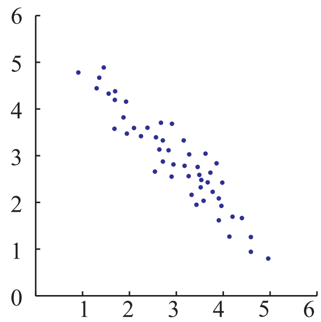
图 4.1－3　$r_{xy}>0$



相关系数 $r_{xy}=-0.4$



相关系数 $r_{xy}=-0.8$



相关系数 $r_{xy}=-0.95$

图 4.1－4　$r_{xy}<0$

统计经验告诉我们，当 $r_{xy}>0.8$ 时，y 有随着 x 的增加而增加的趋势，这时我们认为$\{x_i\}$和$\{y_i\}$是高度正相关的；当 $r_{xy}<-0.8$ 时，y 有随着 x 的增加而减少的趋势，这时我们称$\{x_i\}$和$\{y_i\}$是高度负相关的.

例 1　计算本节案例中身高 H 与体重 W 之间的相关系数(结果保留三位小数).

解　由题意可得
$$\overline{H}=165.5,\ \overline{W}=55,$$
$$s_H=\sqrt{\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(H_i-\overline{H})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{12}[(159-165.5)^2+(160-165.5)^2+\cdots+(172-165.5)^2]}\approx 4.213,$$
$$s_W=\sqrt{\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(W_i-\overline{W})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{12}[(52-55)^2+(52-55)^2+\cdots+(57-55)^2]}\approx 1.947,$$
$$s_{HW}=\frac{H_1W_1+H_2W_2+\cdots+H_{12}W_{12}}{12}-\overline{H}\,\overline{W}$$

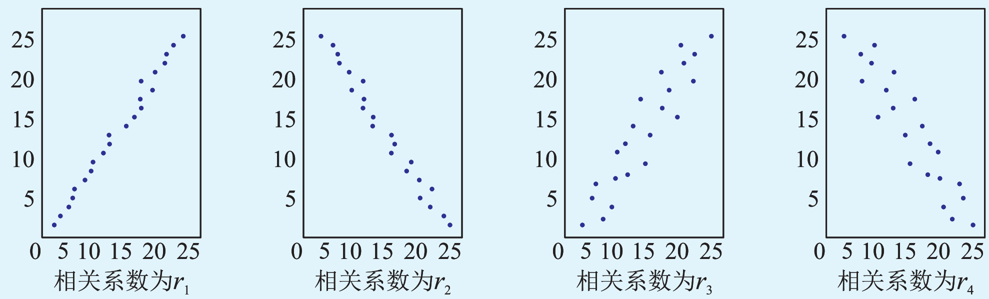
$$=\frac{1}{12}(159\times52+160\times52+\cdots+172\times57)-165.5\times55=7.875,$$

于是相关系数 $r_{HW}=\frac{s_{HW}}{s_H s_W}=\frac{7.875}{4.213\times1.947}\approx0.960>0.8.$

这说明身高 H 和体重 W 高度正相关，即高二女生体重随着身高的增高而增加.

练 习

1. 对四组数据进行统计，获得以下散点图(如图)，将四组数据相应的相关系数进行比较，正确的有（　　）



(第 1 题)

(A) $r_2<r_4<0<r_3<r_1$　　(B) $r_4<r_2<0<r_1<r_3$

(C) $r_4<r_2<0<r_3<r_1$　　(D) $r_2<r_4<0<r_1<r_3$

2. 在随机调查某校高三男生的身高和臂展时，得到下面的数据：

身高 x/cm	176	171	165	178	169	172	176	168	173	171	180	191	179
臂展 y/cm	169	162	164	170	172	170	181	161	174	164	182	188	182

(1) 绘制身高与臂展的散点图，初步判断二者之间的关系；

(2) 判断身高 x 与臂展 y 之间的相关关系(结果保留两位小数).

三　多组成对数据的相关性

在许多实际问题中，往往不止一个因素对变量的变化产生影响，这时我们需要对多组成对数据之间的相关性进行讨论. 一般情况下，我们可以考虑将其分成几个不同的两组数据分别进行相关性分析.

例 2 某研究者搜集了某种花的一些数据(见下表)，试分别判断花瓣长与花枝长之间、花瓣长与花萼长之间的相关关系(结果保留三位小数).

花瓣长 x	49	44	32	42	32	53	36	39	37	45	41	48	45	39	40	34	37	35
花枝长 y	27	24	12	22	13	29	14	20	16	21	22	25	23	18	20	15	20	13
花萼长 z	19	16	12	17	10	19	15	14	15	21	14	22	22	15	14	15	15	16

解 由题意可得 $\overline{x}\approx40.444$，$\overline{y}\approx19.667$，$\overline{z}\approx16.167$，

$$s_x^2=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(x_i-\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{18}[(49-40.444)^2+(44-40.444)^2+\cdots+(35-40.444)^2]\approx33.691,$$

$$s_y^2=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(y_i-\overline{y})^2$$

$$=\frac{1}{18}[(27-19.667)^2+(24-19.667)^2+\cdots+(13-19.667)^2]\approx23.889,$$

$$s_z^2=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(z_i-\overline{z})^2$$

$$=\frac{1}{18}[(19-16.167)^2+(16-16.167)^2+\cdots+(16-16.167)^2]\approx10.250,$$

$$s_{xy}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{18}y_{18}}{18}-\overline{x}\,\overline{y}$$

$$=\frac{1}{18}(49\times27+44\times24+\cdots+35\times13)-40.444\times19.667\approx27.093,$$

$$s_{xz}=\frac{x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_{18}z_{18}}{18}-\overline{x}\,\overline{z}$$

$$=\frac{1}{18}(49\times19+44\times16+\cdots+35\times16)-40.444\times16.167\approx14.815,$$

所以 $$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=\frac{27.093}{\sqrt{33.691}\times\sqrt{23.889}}\approx\frac{27.093}{5.804\times4.888}\approx0.955,$$

$$r_{xz}=\frac{s_{xz}}{s_xs_z}=\frac{14.815}{\sqrt{33.691}\times\sqrt{10.250}}\approx\frac{14.815}{5.804\times3.202}\approx0.797.$$

上述结果表明花瓣长与花枝长之间正相关程度高，花瓣长与花萼长之间呈正相关关系.

对于例 2，我们也可从它们的散点图(图 4.1－5)发现它们确实呈正相关关系.

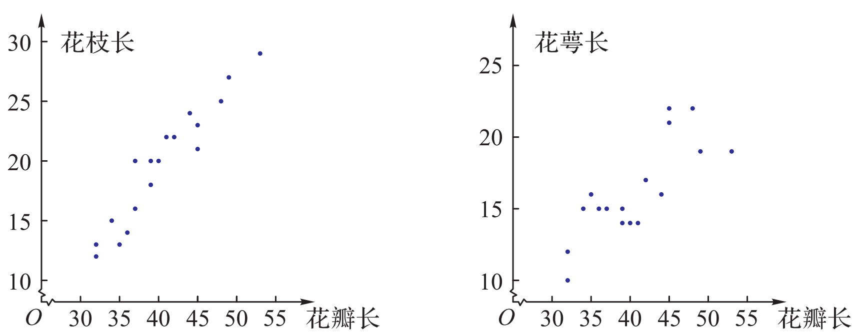


图 4.1－5

四 相关系数与向量夹角

在前面的统计案例中，我们通过引入相关系数，对成对数据进行分析，以刻画两个随机变量之间的相关性. 若我们把两组成对数据分别看作 n 维空间的两个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，而这两个向量的紧密程度可以从这两个向量的夹角大小来度量，因而我们可以设想一种度量方法，从夹角的大小来判断两组数据的相关程度.

由向量知识可知，向量夹角的大小可以用余弦来进行刻画，下面我们尝试着用余弦来刻画两个向量的相关关系. 为了两个向量表达的一致性，通常将向量的每个元素都减去均值①，形成

$$\boldsymbol{a}=(x_1-\overline{x}, x_2-\overline{x}, \cdots, x_n-\overline{x}), \boldsymbol{b}=(y_1-\overline{y}, y_2-\overline{y}, \cdots, y_n-\overline{y}),$$

从而有
$$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}.$$

由上可知，用两组成对数据表示的向量在原点处夹角的余弦值与相关系数公式本质上是一致的.

由向量知识可知，两向量夹角的取值范围为 $[0, \pi]$，其余弦值的取值范围为 $[-1, 1]$.

当夹角属于 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，余弦值越大表示两个向量的夹角越小，两组数据的正相关程度越高；余弦值越小表示两个向量的夹角越大，两组数据的正相关程度越低.

当夹角属于 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，余弦值越大表示两个向量的夹角越小，两组数据的负相关程度越低；余弦值越小表示两个向量的夹角越大，两组数据的负相关程度越高.

当夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，余弦值为 0，这说明两组数据不相关.

下面，我们借助这一思路来判断身高与体重案例中的两个随机变量的相关性. 身高与体重案例中的数据如下表所示：

人物编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
身高 H_i/cm	159	160	161	162	164	165	166	168	168	170	171	172
体重 W_i/kg	52	52	53	54.5	54	54.5	55	56	57	57	58	57

① 将原始数据都减去均值称为对原始数据进行均值化处理，这样可消除指标量纲和数量的影响.

由于 $\overline{H}=165.5$，$\overline{W}=55$，将上表中的两组数据分别减去 $\overline{H}$，$\overline{W}$，记

$$\boldsymbol{h}=(H_1-\overline{H},\ H_2-\overline{H},\ \cdots,\ H_{12}-\overline{H}),$$
$$\boldsymbol{w}=(W_1-\overline{W},\ W_2-\overline{W},\ \cdots,\ W_{12}-\overline{W}),$$

则可得

$$\boldsymbol{h}=(-6.5,\ -5.5,\ -4.5,\ -3.5,\ -1.5,\ -0.5,\ 0.5,\ 2.5,\ 2.5,\ 4.5,\ 5.5,\ 6.5),$$
$$\boldsymbol{w}=(-3,\ -3,\ -2,\ -0.5,\ -1,\ -0.5,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2),$$

于是有

$$\cos\langle\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{w}\rangle=\frac{(-6.5)\times(-3)+(-5.5)\times(-3)+\cdots+6.5\times 2}{\sqrt{[(-6.5)^2+(-5.5)^2+\cdots+6.5^2][(-3)^2+(-3)^2+\cdots+2^2]}}\approx 0.960.$$

由此可以看出，其余弦值接近 1，也就是两向量的夹角接近 0，这说明这两组数据正相关程度高.

练习

1. 某公司有 15 个分公司，它们的销售额 x(万元)、广告费 y(万元)、销售人员个数 z 的数据如下表所示：

编　号	1	2	3	4	5	6	7	8
销售额 x/万元	7 800	8 400	6 100	5 200	9 700	8 900	10 000	9 300
广告费 y/万元	21	19	18	15	21	20	22	24
销售人员个数 z	19	20	20	15	21	19	22	24
编　号	9	10	11	12	13	14	15	
销售额 x/万元	6 500	7 300	4 800	4 500	6 700	7 500	9 500	
广告费 y/万元	15	19	13	11	18	20	15	
销售人员个数 z	15	18	12	12	18	19	25	

试研究销售额与广告费之间、销售额与销售人员个数之间的相关关系(结果保留三位小数).

2. 用向量夹角来分析上题中两组数据之间的相关关系(结果保留三位小数).

多知道一点

夹角余弦与文本分类

在这个信息爆炸的大数据时代，我们每天都会接收到大量信息．传统的新闻报道，受众只是单纯地了解世界上新近发生的事情，而现在新闻网络平台则会根据读者的兴趣爱好，进行个性化的信息推送．这就涉及如何判断文章相似性的问题．

为了找出相似的文章，需要用到“余弦相似性”．下面，我们以一个简单的例子加以说明．

句子 A：我喜欢看电视，不喜欢看电影．

句子 B：我不喜欢看电视，也不喜欢看电影．

如何评判上面两句话的相似程度？

第一步，分词．

句子 A：我/喜欢/看/电视，不/喜欢/看/电影．

句子 B：我/不/喜欢/看/电视，也/不/喜欢/看/电影．

第二步，列出所有的词．

我，喜欢，看，电视，电影，不，也．

第三步，计算词频．

句子 A：我 1，喜欢 2，看 2，电视 1，电影 1，不 1，也 0．

句子 B：我 1，喜欢 2，看 2，电视 1，电影 1，不 2，也 1．

第四步，写出词频向量．

句子 A：$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 0)$．

句子 B：$(1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)$．

至此，问题转化为计算这两个向量的相似程度．

设两个向量的夹角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{1\times1+2\times2+\cdots+0\times1}{\sqrt{1^2+2^2+\cdots+0^2}\times\sqrt{1^2+2^2+\cdots+1^2}}=\frac{13}{\sqrt{12\times16}}\approx0.938.$$

向量夹角的余弦值越接近 1，就表明夹角越接近 0°，也就是两个向量越相似，这就叫“余弦相似性”．所以，上面的句子 A 和句子 B 是很相似的，事实上它们的夹角大约为 20.3°．

如果是人工编辑来判断，也会把句子 A 和句子 B 归为相似，因为这两句话虽然意思有差别，但讨论的都是对电视、电影的喜好．计算机来判断，可不管什么“喜好”，它不是“读”新闻，而是“算”新闻．由于计算机能不知疲倦地快速计算，在文本匹配、海量数据处理这些事情上，比人工更有优势．

数学家们在研究夹角的余弦时，恐怕想不到它还有这样的妙用！目前，文本相似度计算在信息检索、数据挖掘、机器翻译、文档复制检测等领域有着广泛的应用，给我们的工作、生活带来了很大的方便．

习题 4.1

学而时习之

1. 绘制以下数据的散点图.

年份 x	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
比萨斜塔倾斜量 y	642	644	656	667	673	688	696	689

2. 下表给出了某些地区鸟的种类数与这些地区的海拔数据．试根据这些数据分析鸟的种类数与海拔之间是否具有相关关系(结果保留三位小数).

地区编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
种类数	36	30	37	11	11	13	17	13	29	4	15
海拔/m	1 250	1 158	1 067	457	701	731	610	670	1 493	762	548

3. 下表为某十个地区某年 1 月平均气温与海拔及纬度的数据，试分析 1 月平均气温与海拔之间、1 月平均气温与纬度之间是否具有相关关系(结果保留三位小数).

平均气温 x_i/℃	0.84	2.22	3.42	4.92	6.9	8.58	9.54	9.9	11.7	12.66
海拔 y_i/m	4 650	4 420	4 220	3 970	3 640	3 360	3 200	3 140	2 840	2 680
纬度 z_i	35.3	33.8	35	33.8	32.2	38.9	37.1	38.4	36.3	36.8

4. 用向量夹角分析第 3 题中平均气温与海拔之间、平均气温与纬度之间的相关关系(结果保留三位小数).

温故而知新

5. 生活中有许多变量之间的关系值得我们去研究．例如，人们的身高与肩宽之间、身高与手掌长度之间是否存在某种相关性呢？试从你自己的班里抽取适当的样本，然后收集好数据，对它们的相关性进行讨论.

4.2 一元线性回归模型

4.2.1 回归直线方程

在 4.1 节身高与体重案例中，我们已经判断出身高和体重这两个变量之间具有线性相关关系，于是我们希望用一条直线或一个线性函数(图象为直线的函数)来反映所给出的散点图的分布趋势.

将一把直尺的一边在图 4.1-1 的散点之间移动，使它尽量经过或靠近尽可能多的散点，然后在这一位置上作一条直线，那么这条直线就大致反映了散点图的分布趋势，如图 4.2-1.

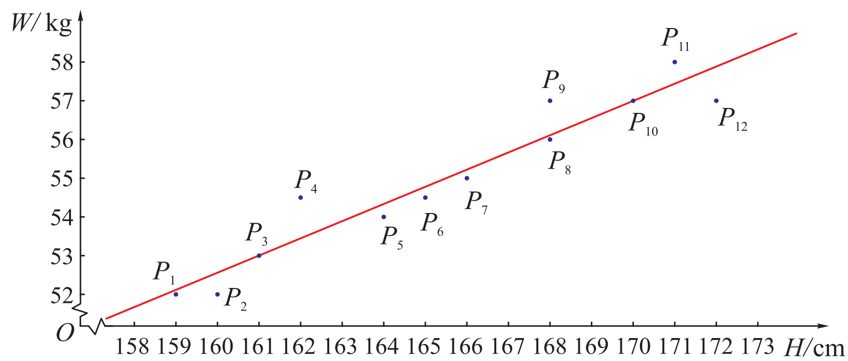


图 4.2-1

找出与散点图中各点散布趋势相似的直线，使各点经过或充分靠近该直线，这样所得到的直线就可以比较科学地反映实际问题中两个变量之间的相关关系. 这条直线叫作**回归直线**，这条直线的方程叫作**回归直线方程**. 有了回归直线方程，就可以由一些变量的值去估计或预测另一些变量的值.

由散点图求出回归直线并进行统计推断的过程叫作**回归分析**.

在回归分析中，被预测或被解释的变量称为因变量，用 y 表示. 用来预测或解释因变量的变量称为自变量，用 x 表示.

对于具有相关关系的两个变量，可以用一个线性方程来表示它们之间的关系.

如果具有相关关系的两个变量 x，y 可用方程

$$y=a+bx \tag{1}$$

来近似刻画，则称(1)式为 y 关于 x 的**一元线性回归方程**，其中 a，b 称为**回归系数**.

由于我们是利用样本数据(一组观测值)去估计总体的回归直线方程，因而根据样本数据$(x_i，y_i)(i=1，2，\cdots，n)$估计出来的回归系数一般不同于(1)式中的 a，b，于是我们在 a，b 的上方加记号“ˆ”，以示区别．同样，当自变量 x 取值 $x_i(i=1，2，\cdots，n)$时，其相应的因变量(实际观测值)y_i 与根据(1)式估计出的对应于 x_i 的纵坐标 y_i 之间一般是有区别的，因而也在 y_i 的上方加记号“ˆ”．此时得到估计的回归直线方程形式为

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x， \tag{2}$$

它是根据样本数据求出的回归方程的估计.

由于受测量等各种因素的影响，估计值与实际观测值往往不相同．当自变量 x 取值 $x_i(i=1，2，\cdots，n)$时，我们将根据回归直线方程估计出的$\hat{y}_i$ 与实际观测值 y_i 的误差，即 $y_i-\hat{y}_i=y_i-(\hat{a}+\hat{b}x_i)(i=1，2，\cdots，n)$，称为随机误差，记作 e_i，如图 4.2－2.

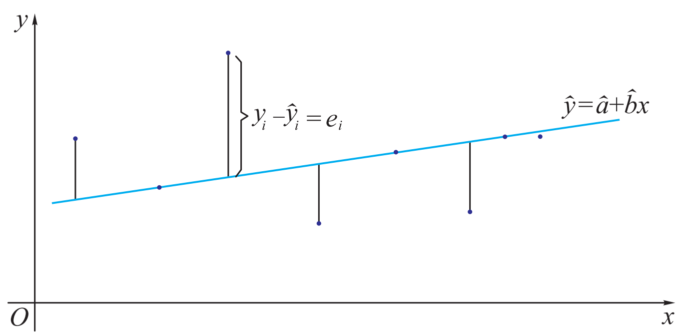


图 4.2－2

我们把$y_i=\hat{a}+\hat{b}x_i+e_i(i=1，2，\cdots，n)$这一描述因变量 y 如何依赖于自变量 x 和随机误差 e_i 的方程称为**一元线性回归模型**.

由于用于描述 n 对观测值$(x_i，y_i)(i=1，2，\cdots，n)$的直线有多条，究竟用哪条，需要一个明确的原则．我们自然会想到，应找一条与实际观测值之间的随机误差最小的直线.

德国著名数学家高斯提出用随机误差的平方和即 $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)^2$ 作为总随机误差来刻画各估计值与实际值之间的误差．若总随机误差最小，则这条直线就是所要求的回归直线．由于平方又叫二乘方，所以这种使“随机误差平方和最小”的方法叫作**最小二乘法**.

经计算可知，若令 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，则 Q 取最小值时$\hat{a}$，$\hat{b}$ 的计算公式为

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

此时，用最小二乘法得到的回归直线方程为$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$，其中$\hat{a}$是回归直线在 y 轴上的截距，$\hat{b}$是回归直线的斜率.

$(\overline{x},\overline{y})$称为样本中心，回归直线一定过样本中心.

例 1 某班 5 名学生的数学和物理成绩如下表：

学生	A	B	C	D	E
数学成绩 x/分	88	76	73	66	63
物理成绩 y/分	78	65	71	64	61

（1）画出散点图；

（2）求物理成绩 y 关于数学成绩 x 的回归直线方程(回归系数保留三位小数).

解 （1）散点图如图 4.2－3 所示.

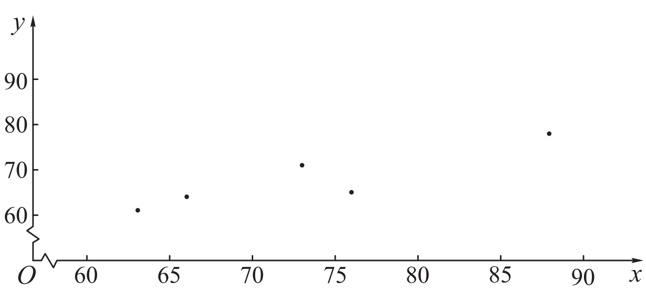


图 4.2－3

（2）因为 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(88+76+73+66+63)=73.2$，

$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(78+65+71+64+61)=67.8$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=88\times78+76\times65+73\times71+66\times64+63\times61=25\ 054$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=88^2+76^2+73^2+66^2+63^2=27\ 174$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}\approx0.625$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx 67.8-0.625\times 73.2=22.050$.

因此 y 关于 x 的回归直线方程为$\hat{y}=22.050+0.625x$.

求一组成对数据的回归直线方程往往涉及较大的运算量，我们可以借助计算器或计算机软件来实现这一目的.

例 2 设成对变量 x，y 有如下观测数据：

x	154	157	158	159	160	161	162	163
y	155	156	159	162	161	164	165	166

使用函数型计算器求 y 关于 x 的回归直线方程(回归系数保留三位小数).

解 直接按键，顺次键入

“菜单” → “▶” → “=” → “2” →

“154” → “=” → “157” → “=” →

“158” → “=” → “159” → “=” →

“160” → “=” → “161” → “=” →

“162” → “=” → “163” → “=” →

“▼” → “▶” → “155” → “=” →

“156” → “=” → “159” → “=” →

“162” → “=” → “161” → “=” →

“164” → “=” → “165” → “=” →

“166” → “=” → “OPTN” → “4”

不同的计算器，操作方法可能不同.

得到结果 $\hat{a}\approx -53.118$，$\hat{b}\approx 1.345$.

因此，y 关于 x 的回归直线方程为$\hat{y}=-53.118+1.345x$.

练习

为研究某灌溉渠道水的流速 y 与水深 x 之间的相关关系，测得如下数据：

水深 x/m	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10
流速 y/(m·s^{-1})	1.70	1.79	1.88	1.95	2.03	2.10	2.16	2.21

求 y 关于 x 的回归直线方程(回归系数保留三位小数).

4.2.2 一元线性回归模型的应用

一元线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 在一定程度上描述了变量 x 与 y 之间的数量关系，根据这一方程，可依据自变量 x 来估计或预测因变量 y 的取值，这就是回归分析的主要目的.

例 3 一个车间为了估计加工某种新型零件所花费的时间，进行了 10 次试验，测得的数据如下：

零件个数 x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
加工时间 y/min	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

（1）y 与 x 之间是否具有相关关系？

（2）如果 y 与 x 之间具有相关关系，求回归直线方程.

（3）据此估计加工 110 个零件所用的时间.

解 （1）$\bar{x}=\dfrac{10+20+30+40+50+60+70+80+90+100}{10}$

$=55$，

$\bar{y}=\dfrac{62+68+75+81+89+95+102+108+115+122}{10}$

$=91.7$.

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=38\ 500,\quad \sum_{i=1}^{10}y_i^2=87\ 777,\quad \sum_{i=1}^{10}x_iy_i=55\ 950.$$

于是 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2\right)}}$

$=\dfrac{55\ 950-10\times55\times91.7}{\sqrt{(38\ 500-10\times55^2)(87\ 777-10\times91.7^2)}}$

$\approx0.999\ 8$，

因此 y 与 x 之间具有显著的正相关关系.

（2）设所求的回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\frac{55\ 950-10\times55\times91.7}{38\ 500-10\times55^2}\approx0.668,$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=91.7-0.668\times55=54.96,$$

即所求的回归直线方程为$\hat{y}=0.668x+54.96$.

（3）当 $x=110$ 时，y 的估计值$\hat{y}=0.668\times110+54.96=128.44$.

因此，估计加工 110 个零件所用的时间为 128.44 min.

一般地，运用一元线性回归模型思想解决实际问题的基本步骤为：

（1）确定研究对象，明确哪个变量是因变量，哪个变量是自变量；

（2）运用相关系数的计算公式，分析自变量与因变量之间的关系；

（3）运用最小二乘原理估计一元线性回归方程的系数，建立一元线性回归方程；

（4）根据一元线性回归方程进行预测.

例 4 实验中获得了某化学品的化学反应时间和转化率的数据，见表 4－1，试建立转化率 y 关于反应时间 x 的回归方程(回归系数保留三位小数).

表 4－1

时间 x/min	60	80	100	120	140	150	160	170
转化率 y/%	6.13	9.99	15.02	20.92	31.11	38.85	47.25	55.05

解 根据收集的数据作散点图(图 4.2－4).

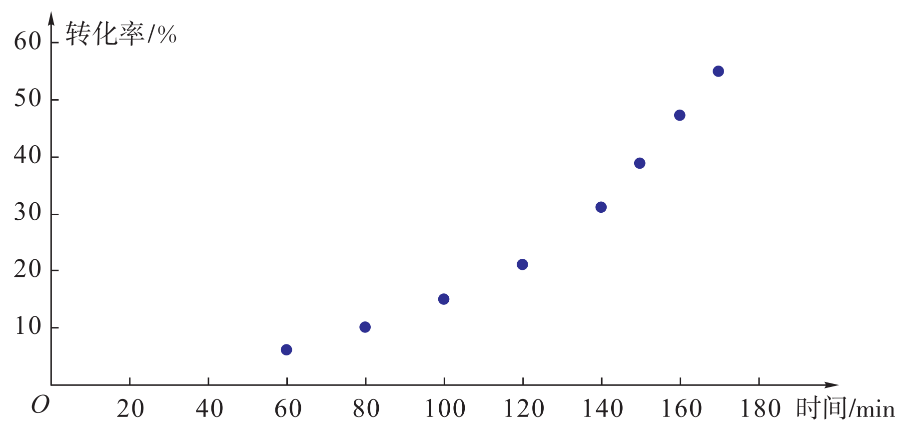


图 4.2－4

观察散点图可知，样本点并没有分布在某条直线附近，因而变量 y 与 x 之间没有明显的线性相关关系，所以不能直接利用线性回归模型来刻画这两个变量之间的关系. 根据已有的数学知识，可以认为样本点分布在指数型曲线 $y=c_1\mathrm{e}^{c_2x}$ 的附近，其中 c_1 和 c_2 是待定参数.

为估计参数 c_1 和 c_2，在 $y=c_1\mathrm{e}^{c_2x}$的两端取对数，得到

$$\ln y=\ln c_1+c_2x.$$

再令 $z=\ln y$，$a=\ln c_1$，$b=c_2$，则得到直线方程

$$z=bx+a.$$

将表 4－1 中的数据进行代换，得到的数据见表 4－2.

表 4－2

x	60	80	100	120	140	150	160	170
$z(=\ln y)$	1.813	2.302	2.709	3.041	3.438	3.660	3.855	4.008

图 4.2－5 是根据表 4－2 中数据作出的散点图.

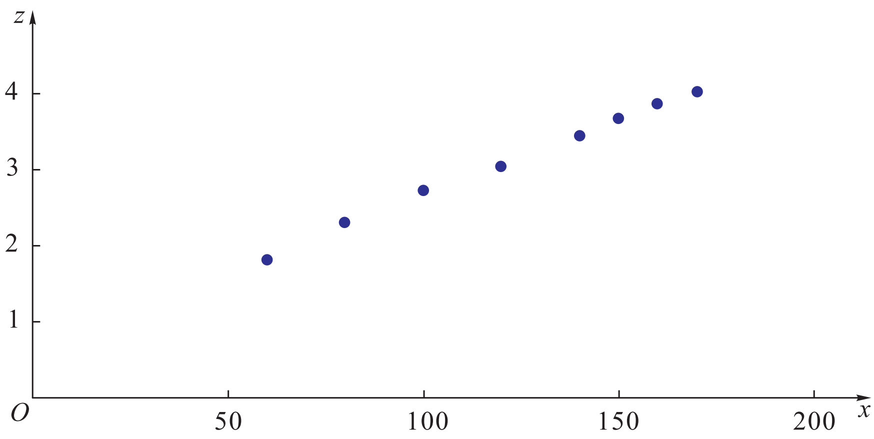


图 4.2－5

从图 4.2－5 中可以看出，变换后的样本点分布在一条直线的附近，说明 z 和 x 之间具有线性相关关系，因此可以用线性回归方程来拟合.

对表 4－2 中的数据，用最小二乘法可得线性回归方程为

$$\hat{z}=0.019x+0.686.$$

再利用 $y=e^{z}$ 可得到转化率 y 关于反应时间 x 的非线性回归方程①为

$$\hat{y}=e^{0.686}\cdot e^{0.019x}\approx 1.986e^{0.019x}.$$

当数据量较大时，可采用计算器或者数学软件来求回归方程.

在实际问题中，如果从数据的散点图可以看出两个变量之间有明显的非线性关系，就需要选择一个合适的曲线方程，按照这个曲线方程对原始数据进行代换. 目的是把变量间的非线性关系转化为近似的线性关系，然后用建立线性回归方程的方法确定未知参数.

① 当回归方程不是形如 $y=bx+a$ 时，我们称之为非线性回归方程.

练习

1. 某单位对每立方米某型混凝土的水泥用量 x(kg)与凝固 28 天后该型混凝土的抗压强度 y (kg/cm²)进行了一次抽查，得到了如下数据：

x	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260
y	56.9	58.3	61.6	64.6	68.1	71.3	74.1	77.4	80.2	82.6	86.4	89.7

(1) 如果 y 与 x 之间具有相关关系，求回归直线方程；

(2) 据此估计凝固 28 天后 $x=270$ kg 时该型混凝土的抗压强度.

2. 某产业园区对园区企业的人均资本 x(万元)与人均产出 y(万元)进行了一次抽样调查，下表是这次抽查中所得到的各企业的数据：

人均资本 x/万元	3	4	5.5	6.5	7	8	9	10.5	11.5	14
人均产出 y/万元	4.12	4.67	8.68	11.01	13.04	14.43	17.50	25.46	26.66	45.20

(1) 若 y 与 x 之间具有近似关系 $y=ax^b$(a，b 为常数)，试根据表中数据估计 a 和 b 的值(结果保留三位小数)；

(2) 据此估计当企业人均资本为 13 万元时的人均产出为多少万元.

习题 4.2

学而时习之

1. 为研究质量 x(g)对弹簧拉伸长度 y(cm)的影响，将不同质量的砝码悬挂在竖直弹簧下端，静止时测量弹簧长度，得到如下数据：

x	5	10	15	20	25	30
y	7.25	8.02	8.92	9.91	10.9	11.7

(1) 画出散点图；

(2) 若散点图中的各点大致在一条直线的附近，求 y 关于 x 的回归直线方程(回归系数保留三位小数).

2. 一家物流公司的管理人员想研究货物的运送距离和运送时间之间的关系.

为此，他抽取该公司最近 10 辆卡车的运货记录作为随机样本，得到如下数据：

运送距离 x/km	825	215	1 070	550	480	920	1 350	325	670	1 215
运送时间 y/天	3.5	1.0	4.0	2.0	1.0	3.0	4.5	1.5	3.0	5.0

(1) 绘制运送距离和运送时间的散点图，判断二者之间的关系形态；

(2) 计算相关系数，说明这两个变量之间的相关程度(结果保留三位小数)；

(3) 利用最小二乘法求出这两个变量之间的回归直线方程.

3. 随机抽取 10 家航空公司，对其最近一年的航班正点率和顾客投诉次数进行了调查，所得数据如下：

航空公司编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
航班正点率/%	81.8	76.6	76.6	75.7	73.8	72.2	71.2	70.8	91.4	68.5
顾客投诉次数	21	58	85	68	74	93	72	122	18	125

(1) 绘制散点图，说明二者之间的关系形态；

(2) 若顾客投诉次数与航班正点率之间具有相关关系，求回归直线方程(回归系数保留三位小数)；

(3) 如果航班正点率为 80%，试据此估计顾客投诉次数.

温故而知新

4. 下表是我国某地区近七年农村居民人均可支配收入的统计表：

年　份	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年
人均可支配收入/元	9 157	10 196	11 602	14 997	17 538	20 317	23 123

试用回归分析法预测该地区第 10 年农村居民人均可支配收入(结果保留整数).

5. 某出版社单册图书的印制成本 y(元)与印刷册数 x(千册)有关，经统计得到数据如下：

x	1	2	3	5	7	10	11	20	25	30
y	9.02	5.27	4.06	3.03	2.59	2.28	2.21	1.89	1.80	1.75

(1) 根据以上数据画出散点图(可借助统计软件)，并根据散点图判断：$y=ax+b$ 与 $y=\dfrac{a}{x}+b$ 中哪一个适宜作为回归方程模型？

(2) 根据(1)的判断结果，试建立单册图书印制成本 y 关于印刷册数 x 的回归方程(回归系数保留三位小数).

(3) 利用回归方程估计印刷 26 000 册图书的单册成本(结果保留两位小数).

数学实验

用计算机探究线性回归模型

利用计算机软件可以直接求线性回归模型.

下表是随机选取的某学校高中三年级 8 名女生的身高和体重数据：

编　号	1	2	3	4	5	6	7	8
身高 x/cm	165	165	157	170	175	165	155	170
体重 y/kg	48	57	50	54	64	61	43	59

打开 GeoGebra 软件，在软件视图中打开表格区，将表中数据输入 A1～H2 区域，框选表格中 A1～H2 的数据(如图 1).

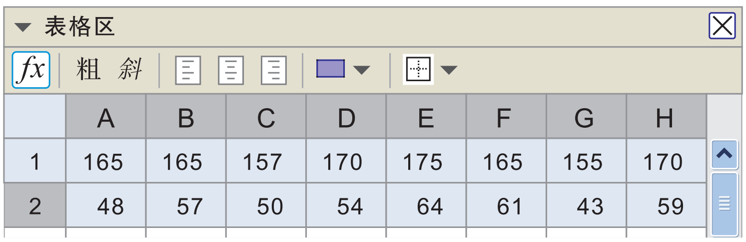


图 1

在动态工具栏中选择“双变量回归分析”工具，点击弹出对话框中的“分析”按钮绘制出散点图，选择“线性”回归模型，系统自动得到回归方程$\hat{y}=0.85x-85.71$(如图 2).

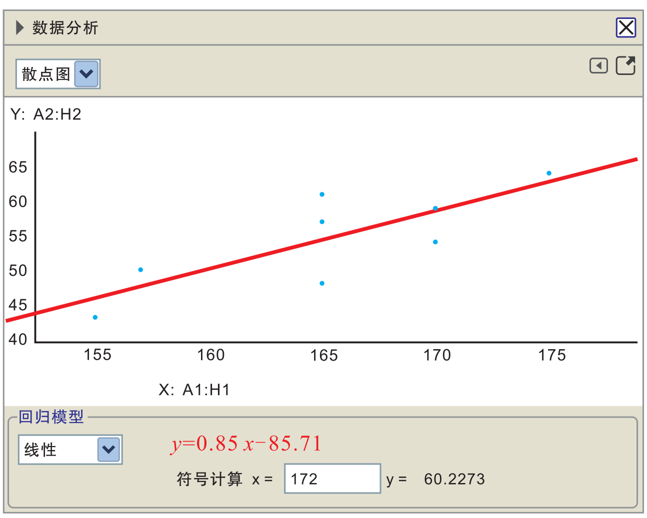


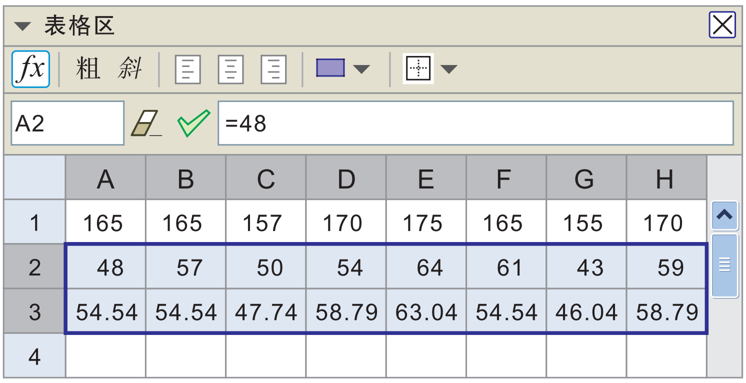
图 2

在符号计算栏“$x=$”后面方框内输入 172，计算机自动算出 $y=60.2273$，你知道这里 $y=60.2273$ 的含义是什么吗？

实际上，我们是通过得到的线性回归模型 $\hat{y}=0.85x-85.71$，预测一个身高为 172 cm 的女生的体重为 60.227 3 kg.

输入一个你熟悉的高三女生的身高数据，看看系统预测的体重是否与该女生的实际体重相符，你从中体会到什么？

在 A3 单元格中输入公式“$=0.85*\mathrm{A1}-85.71$”后回车，并将公式自动填充至 H3，得到一组新的数据，如图 3 所示.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	165	165	157	170	175	165	155	170
2	48	57	50	54	64	61	43	59
3	54.54	54.54	47.74	58.79	63.04	54.54	46.04	58.79
4								

图 3

观察表格区第二行 A2～H2 的数据与第三行 A3～H3 的数据，你能合理解释它们之间的差异吗？

事实上，一个人的体重除了和身高这个重要的因素有关外，还和年龄、健康状况、饮食情况、是否喜好运动以及遗传等诸多因素有关. 由于这些因素的关系，实际体重与预测值之间存在一定差异，反映到散点图中，就是实际值与回归直线的偏离程度.

请你尝试对身边的某个问题，确定两个变量，并收集相关数据，利用软件分析收集到的数据，看是否可以用线性回归模型来表示它们之间的关系，并作出相应的预测.

4.3 独立性检验

在许多实际问题中，我们需要考察两个分类变量①之间是否有关系．例如，考察患肺癌与吸烟之间是否有关系，考察儿童语言能力与他们的性别之间是否有关系等．

案例 患肺癌与吸烟之间是否有关系？

为了了解患肺癌与吸烟之间的关系，某医疗机构调查了其他条件都基本相同的100个人，调查结果如下表（表中 X 表示“是否吸烟”，Y 表示“是否患肺癌”）．

表 4－3 **吸烟与患肺癌的调查数据** 单位：人

X \ Y	患肺癌	未患肺癌	合　计
吸　烟	39	15	54
不吸烟	21	25	46
合　计	60	40	100

像上表这样，将两个（或两个以上）分类变量进行交叉分类得到的频数分布表称为**列联表**；称 X，Y 为分类变量，其中变量 X 有两个变量值——“吸烟”和“不吸烟”，变量 Y 有两个变量值——“患肺癌”和“未患肺癌”．

由于所涉及的两个分类变量 X，Y 均有两个变量值，所以称上表为 2×2 列联表．

从表 4－3 可以得出，在 54 个吸烟的人中有 39 人患肺癌，患者占 $39/54\approx 72.22\%$；在不吸烟的 46 人中，有 21 人患肺癌，患者占 $21/46\approx45.65\%$．吸烟者中患肺癌的比例比不吸烟者中患肺癌的比例高出约

$$72.22-45.65=26.57(\text{个百分点}).$$

这种差异似乎已经说明吸烟与患肺癌有很大关系．但仔细想想，由于这 100 人是随机选取的，会不会是由于随机抽样的误差，使得所抽取的 60 名肺癌患者中碰到了较多的吸烟者，而在 40 名未患肺癌者中碰到了较多的不吸烟者？这样也可能导致吸烟者中肺癌患者的比例比不吸烟者中肺癌患者的比例高．

于是，我们还需进一步用统计方法来检验，因为单凭随机抽样的误差可能还不

① 分类变量是说明事物类别的一个名称，其取值是分类数据．如“性别”是一个分类变量，其变量值为“男”或“女”．

足以造成如此大的差异.

为了讨论的方便我们引入以下记号：

变量 X：A=吸烟，$\overline{A}$=不吸烟；

变量 Y：B=患肺癌，$\overline{B}$=未患肺癌.

我们将表 4－3 中的数字用字母代替得到如下列联表：

表 4－4 **吸烟与患肺癌的调查数据** 单位：人

Y \ X	患肺癌(B)	未患肺癌($\overline{B}$)	合　计
吸烟(A)	a	b	$a+b$
不吸烟($\overline{A}$)	c	d	$c+d$
合　计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

在本案例中，$n=a+b+c+d=100$，

$a=39$，$b=15$，$c=21$，$d=25$，

$a+b=54$，$c+d=46$，$a+c=60$，$b+d=40$.

为分析 X，Y 是否有关系，我们先提出假设 H_0：X，Y 之间没有关系(独立)，也就是假设“吸烟(A)”与“患肺癌(B)”独立. 这时 A 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

于是　$P(A\cap B)=P(A)P(B)$，$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)$，

$P(A\cap \overline{B})=P(A)P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$.

根据概率与频率的关系，知道 $P(A\cap B)$的估计值为 $p_{AB}=\dfrac{a}{n}=0.39$，$P(\overline{A}\cap B)$的估计值为 $p_{\overline{A}B}=\dfrac{c}{n}=0.21$，$P(A\cap \overline{B})$的估计值为 $p_{A\overline{B}}=\dfrac{b}{n}=0.15$，$P(\overline{A}\cap \overline{B})$的估计值为 $p_{\overline{A}\overline{B}}=\dfrac{d}{n}=0.25$.

又 $P(A)$的估计值为 $p_A=\dfrac{a+b}{n}=0.54$，$P(\overline{A})$的估计值为 $p_{\overline{A}}=\dfrac{c+d}{n}=0.46$，$P(B)$的估计值为 $p_B=\dfrac{a+c}{n}=0.6$，$P(\overline{B})$的估计值为 $p_{\overline{B}}=\dfrac{b+d}{n}=0.4$.

因为假设 X，Y 独立，所以 $\mu_{AB}=|p_{AB}-p_Ap_B|$，$\mu_{\overline{A}B}=|p_{\overline{A}B}-p_{\overline{A}}p_B|$，$\mu_{A\overline{B}}=|p_{A\overline{B}}-p_Ap_{\overline{B}}|$，$\mu_{\overline{A}\,\overline{B}}=|p_{\overline{A}\,\overline{B}}-p_{\overline{A}}p_{\overline{B}}|$都相应比较小，我们用 χ^2(读作“卡方”)表示 μ_{AB}，$\mu_{\overline{A}B}$，$\mu_{A\overline{B}}$，$\mu_{\overline{A}\,\overline{B}}$的总体大小，记

$$\chi^2=\frac{n\mu_{AB}^2}{p_Ap_B}+\frac{n\mu_{\overline{A}B}^2}{p_{\overline{A}}p_B}+\frac{n\mu_{A\overline{B}}^2}{p_Ap_{\overline{B}}}+\frac{n\mu_{\overline{A}\,\overline{B}}^2}{p_{\overline{A}}p_{\overline{B}}}$$
$$=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.\tag{1}$$

当 χ^2 的取值较小时，表示假设 H_0 成立，当 χ^2 的取值较大时，表示假设 H_0 不成立.

在本案例中，经过计算得到 χ^2 的观测值为

$$\chi^2=\frac{100(39\times25-15\times21)^2}{54\times46\times60\times40}\approx7.307.$$

那么，$\chi^2=7.307$ 这个取值是较大还是较小呢？

统计学家已经有明确的结论：如果 2×2 列联表中的两个分类变量 X，Y 是独立的，即在 H_0 成立的情况下，且当随机调查的数据 a，b，c，d 都不小于 5 时，随机事件“$\chi^2\geqslant6.635$”发生的概率约为 0.01，即

$$P(\chi^2\geqslant6.635)\approx0.01. \tag{2}$$

也就是说，在 H_0 成立的情况下，χ^2 的观测值大于或等于 6.635 的概率非常小，近似于 0.01. 即在 H_0 成立的情况下，观测值超过 6.635 的概率不大于 0.01.

在本案例中，由抽样数据所得到的 $\chi^2\approx7.307>6.635$，这表明这一事件发生的概率不大于 0.01，这是一个小概率事件. 因此，我们有 $[1-P(\chi^2\geqslant6.635)]\times100\%=99\%$ 的把握认为 H_0 不成立，于是否定假设 H_0，从而认为吸烟与患肺癌之间有关系.

值得指出的是，我们在作出上述判断时也有可能犯错误，因为吸烟与患肺癌没有关系时，χ^2 的观测值仍有可能超过 6.635. 但是这一事件发生的概率不超过 0.01，也就是说，我们犯错误的概率不会超过 0.01.

上面这种利用统计量 χ^2 来确定在多大程度上可以认为“两个分类变量有关系”的方法，称为两个分类变量的**独立性检验**.

例 1 研究者发现多看电视易使人变冷漠，下表数据（单位：人）是一个调查机构对此现象的调查结果：

	冷　漠	不冷漠	合　计
多看电视	68	42	110
少看电视	20	38	58
合　计	88	80	168

试根据上述数据判断“多看电视”与“人变冷漠”是否有关系.

解 先提出统计假设 H_0：多看电视与人变冷漠没有关系.

根据列联表中的数据，可以求得

$$\chi^2=\frac{168\times(68\times38-42\times20)^2}{110\times58\times88\times80}\approx11.377.$$

由于 $11.377>6.635$，故否定假设 H_0，所以认为多看电视与人变冷漠有关系.

练习

1. 某工厂冶炼某种金属可以用旧设备和改造后的新设备，为了检验用这两种设备生产的产品中所含杂质高低的关系，该工厂进行了一项调查，结果如下：

	杂质高	杂质低
旧设备	37	121
新设备	22	202

试根据以上数据判断含杂质的高低与设备改造有无关系.

2. 某企业人力资源部为了研究企业员工工作积极性和对待企业改革态度的关系，随机抽取了 72 名员工进行调查，所得数据(单位：人)如下表所示：

	积极支持企业改革	不太赞成企业改革	合　计
工作积极性高	28	8	36
工作积极性一般	16	20	36
合　　计	44	28	72

对于人力资源部研究的问题，根据上述数据你能得出什么结论?

前面我们用独立性检验的方法研究了吸烟与患肺癌之间是否有关系的问题.

独立性检验的统计思想是：要研究“两个分类变量有关系”这一结论的可靠程度，首先假设该结论不成立，即假设“H_0：两个分类变量没有关系(指独立)”成立. 在该假设下构造统计量 χ^2，如果由抽样数据计算得到的 χ^2 的观测值 $x_0 \geqslant 6.635$，则有$[1-P(\chi^2 \geqslant 6.635)]\times 100\%$的概率说明 H_0 不成立.

独立性检验的思想类似于反证法，试比较它们之间的异同.

我们把 $P(\chi^2 \geqslant 6.635)$中的数据 6.635 称为一个判断可靠程度的临界值. 在实际应用中，常用的临界值如表 4－5 所示(称为**临界值表**).

表 4－5

$P(\chi^2 \geqslant x_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

一般地，对于两个分类变量 X 和 Y，X 有两类取值，即类 A 和类 B(如吸烟与不吸烟)；Y 也有两类取值，即类 1 和类 2(如患肺癌与未患肺癌). 经过统计调查，我们得到如下 2×2 列联表(表 4－6)所示的抽样数据：

①表 4－6

X \ Y	类 1	类 2	合　计
类 A	a	b	$a+b$
类 B	c	d	$c+d$
合　计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

利用独立性检验推断“X 与 Y 有关系”，可按下面的步骤进行：

(1) 提出统计假设 H_0：X 与 Y 之间没有关系；

(2) 根据 2×2 列联表与公式(1)计算 χ^2 的观测值；

(3) 查临界值表(表 4－5)确定临界值 x_0，然后作出判断.

例如：(1) 如果 $\chi^2>10.828$，就有不少于 99.9%的把握认为“X 与 Y 之间有关系”；

(2) 如果 $\chi^2>6.635$，就有不少于 99%的把握认为“X 与 Y 之间有关系”；

(3) 如果 $\chi^2>3.841$，就有不少于 95%的把握认为“X 与 Y 之间有关系”，

如果 $\chi^2\leqslant3.841$，就认为还没有充分的证据显示“X 与 Y 之间有关系”.

独立性检验在生物统计、医学统计等领域应用很广泛. 在处理调查社会问题得到的数据时，也常常使用独立性检验，下面我们举例说明.

例 2 为了考察某种新疫苗预防疾病的作用，科学家对动物进行试验，所得数据(单位：只)如下表所示：

	发　病	没发病	合　计
接种疫苗	8	15	23
没接种疫苗	18	9	27
合　计	26	24	50

能否作出接种疫苗与预防疾病有关的结论?

解 提出统计假设 H_0：接种疫苗与预防疾病无关.

根据列联表中的数据，可以求得

$$\chi^2=\frac{50\times(8\times9-15\times18)^2}{23\times27\times26\times24}\approx5.059,$$

由于 $5.024<5.059<6.635$，查临界值表可知，我们至少有 97.5%的把握认为接种疫苗与预防疾病有关，即疫苗有效.

① 使用统计量 χ^2 做 2×2 列联表的独立性检验时，要求样本量必须足够大，一般要求每个单元中的频数都要大于 5. 当观测数据 a，b，c，d 中有小于 5 的数时，需采用很复杂的精确的检验方法.

例 3 为了解某挑战赛中是否接受挑战与受邀者的性别是否有关系(假设每个人是否接受挑战互不影响)，某机构进行了随机抽样调查，得到如下调查数据(单位：人)：

	接受挑战	不接受挑战	合　计
男　性	45	15	60
女　性	25	15	40
合　计	70	30	100

根据表中数据，能否认为“比赛中是否接受挑战与受邀者的性别有关”?

解　提出统计假设 H_0：是否接受挑战与受邀者的性别无关.

根据列联表中的数据，可以求得

$$\chi^2=\frac{100\times(45\times15-15\times25)^2}{60\times40\times70\times30}=\frac{25}{14}\approx1.786.$$

因为 $1.786<3.841$，所以没有充分的证据显示比赛中是否接受挑战与受邀者的性别有关.

练习

1. 某观影平台对新近上映的某部影片的观众评价情况进行调查，得到如下数据(单位：人)：

	评价高	评价一般	合　计
男　性	40	60	100
女　性	35	55	90
合　计	75	115	190

能否作出观影评价与性别有关的结论?

2. 为了解高中生作文水平与课外阅读量之间的关系，某研究机构随机抽取了 60 名高中生，通过问卷调查，得到如下调查数据(单位：人)：

	作文水平较高	作文水平一般	合　计
课外阅读量较大	22	10	32
课外阅读量一般	8	20	28
合　计	30	30	60

根据上表，有多大的把握认为课外阅读量与作文水平之间有关系?

习题 4.3

学而时习之

1. 在一次“三级风浪”的航程中，调查了男女乘客在船上晕船的情况：男乘客晕船的有 24 人，不晕船的有 31 人；女乘客晕船的有 8 人，不晕船的有 26 人. 你有多大的把握认为在这次航程中男性比女性更容易晕船?

2. 为了解休闲方式是否和性别有关，共调查了 124 人，其中女性 70 人，男性 54 人. 女性中有 43 人主要的休闲方式是看电视，另外 27 人主要的休闲方式是运动；男性中有 21 人主要的休闲方式是看电视，另外 33 人主要的休闲方式是运动.

(1) 根据以上数据建立一个 2×2 列联表；

(2) 根据列联表进行独立性检验，你能得出什么结论?

3. 某高校对选学“统计学初步”课程的一些学生情况进行了调查，具体数据(单位：人)如下表：

专业 性别	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

根据表中数据，能否认为选学“统计学初步”课程的学生专业与性别之间有关系?

4. 根据一则新闻报道或你周围的事例构造一个列联表，说明这个列联表中两个分类变量的关系，并提出需要检验的问题.

5. 用两种检验方法对某食品做沙门氏菌检验，结果如下：

	阳　性	阴　性	合　计
荧光抗体法	160	5	165
常规培养法	26	48	74
合　计	186	53	239

(1) 提出假设；

(2) 计算 χ^2 的观测值(结果保留两位小数)；

(3) 你有多大把握认为荧光抗体法在沙门氏菌检验中有效?

温故而知新

6. 通过随机询问 80 名不同性别的大学生在购买食品时是否看营养说明，得到如下调查结果：

	看营养说明	不看营养说明	合　计
男	12	28	40
女	18	22	40
合　计	30	50	80

根据表中数据(单位：人)分析，是否看食品营养说明与性别有关吗?

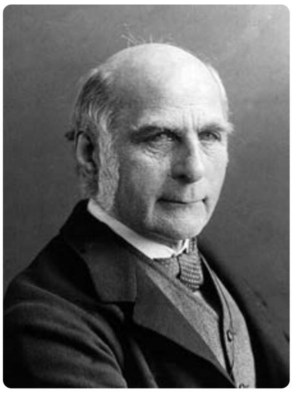
7. 判断两个分类变量是否有关系，还可以借助下面的方法来进行粗略判断.其方法为：在 2×2 列联表中，若$\dfrac{a}{a+b}$与$\dfrac{c}{c+d}$相差越大，则两个分类变量有关系的可能性就越大.

已知某校对高三学生进行了调查，发现：在平时的模拟考试中，性格内向的 426 名学生中有 332 人在考前心情紧张，性格外向的 594 名学生中有 213 人在考前心情紧张.

试分别用本题所述方法以及独立性检验方法来分析考前心情紧张与性格类别的关系.

数学文化

高尔顿与回归



高尔顿

英国生物学家、统计学家高尔顿(1822—1911)被誉为现代回归和相关技术的创始人．早在1875年，高尔顿就利用豌豆实验来确定尺寸的遗传规律．他挑选了7组不同尺寸的豌豆，并说服他在英国不同地区的朋友每一组种植10粒种子，最后他把原始的豌豆种子(父代)与新长的豌豆种子(子代)进行尺寸比较，发现子代的变化会逐步近似父代．

豌豆实验所发现的遗传规律具有普遍性吗？1885年，高尔顿收集了很多对父母及其子女的身高数据，并展开研究．其中的一项研究是父子的身高关系．他发现，若用x表示父亲身高，Y表示儿子身高，把所收集的数据标在坐标纸上，散点图大致呈直线状，也就是说，总的趋势是父亲的身高增高时，儿子的身高也倾向于增高．他还算出x与Y之间存在线性相关关系：

$$Y=33.73+0.516x\text{(单位为英寸)},$$

借助此式，可以通过父亲的身高来预测儿子的身高．

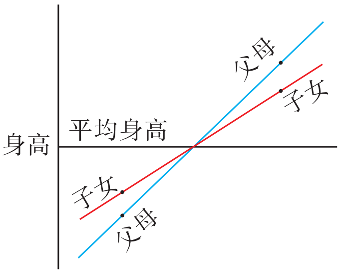


图 1

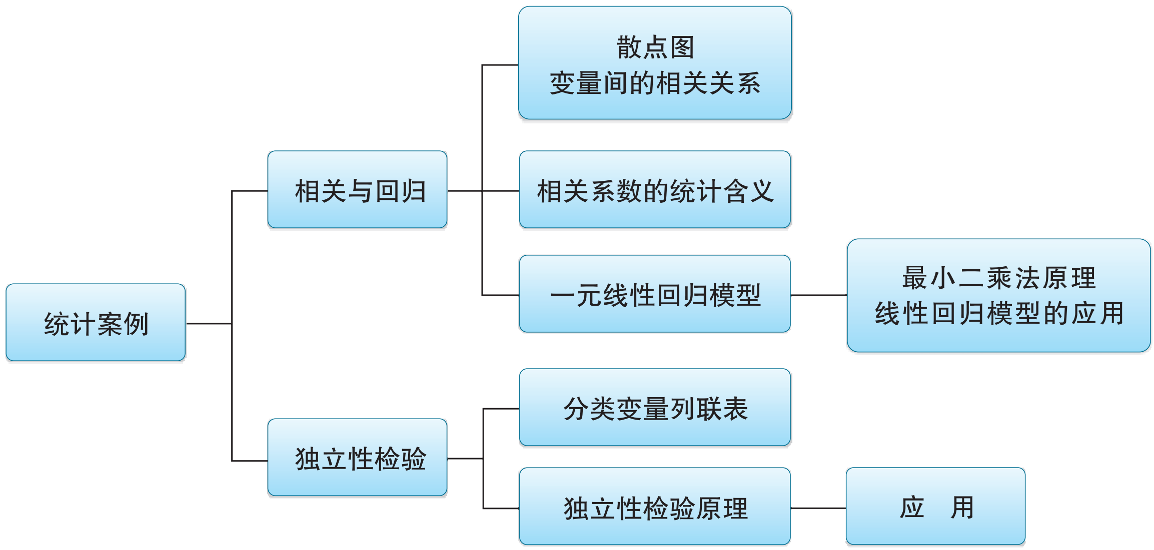
高尔顿对收集的数据进一步分析，发现了一个很有趣的现象．他对所有父母的身高数据求得一个平均值(例如68.25英寸)，如图1，如果父母的身高高于平均值，那么他们的孩子就更可能矮一些；而如果父母身高比平均值要矮，则他们的孩子更可能高一些，也就更接近整体均值．高尔顿把这一现象叫作“向平均数方向的回归”．这就是统计学上最初出现“回归”时的含义．

因为回归现象的存在，高尔顿认为群体特征的分布总是会返回一个原始的分布，而且均值不会改变．在身高上这意味着，人类身高的分布不会在遗传进化中发生变化，因为这些特征会向均值回归．但是高尔顿忽略了自然选择会改变分布的形态，会产生新的中心均值．

高尔顿和他的学生经过20多年的努力，取得了统计史上最伟大的成就之一——相关与回归的发现，由此拉开了现代统计学的大幕．事实上，高尔顿的学术成就远不止这一项，还遍及地理学、气象学、心理学、人类学、遗传学、指纹学等诸多领域，他被后人称为“维多利亚式的天才”．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 在现实生活中，人们常常要对变量之间的关系进行分析．在统计问题中，对于不满足函数关系的两个变量之间的关系，我们用相关关系来描述与测量．例如，借助散点图来直观呈现两个变量之间的关系形态，计算相关系数来度量两个变量之间的关系强度．试结合实例回顾散点图的作法，计算两个变量的相关系数，并解释两个变量之间的相关性强弱．

2. 回归分析是确定两种或两种以上变量间相互依赖定量关系的一种统计分析方法．最小二乘法原理是什么？如何求出一元线性回归模型的参数？请你结合身边的某个问题，确定两个变量，收集数据，计算相关系数，然后分析能否用线性回归模型来拟合它们之间的关系，并在此基础上作出预测．

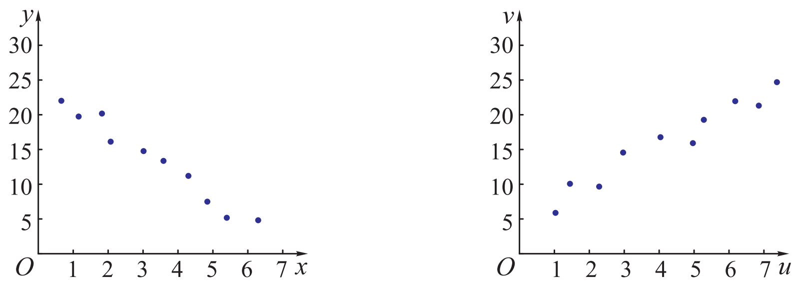
3. 在实际问题中，我们经常会遇到两个分类变量是否存在联系的问题，例如吸烟是否使患肺癌的概率增大，新研发疫苗对于预防某种疾病是否有效，等等．对于类似问题，我们不能仅凭主观意愿得出结论，而应该通过试验收集数据，并依据独立性检验原理来作出合理的判断．试结合实例阐述独立性检验原理，并与小组同学合作收集身边感兴趣的实例数据，提出假设、计算 χ^2 值（借助统计软件）并进行推断，体会统计思想的作用．

4. 身处大数据时代，统计无处不在．我们掌握系统的统计方法，领悟其思想，目的是从数据中找出规律、推断结果的合理性并解决实际问题，有意义地推动信息化社会的发展．请同学们结合生活实际提出一些统计问题，并运用所学的知识去解决问题，体会统计的作用与价值．

复习题四

学而时习之

1. 在某种实验中，对变量(x, y)有观测数据$(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 10)$，可得散点图(1)；对变量$(u, v)$有观测数据$(u_i, v_i)(i=1, 2, \cdots, 10)$，可得散点图(2). 由这两个散点图可以判断(   )



(1)　　　　(2)

（第 1 题）

(A) 变量 x 与 y 正相关，u 与 v 正相关

(B) 变量 x 与 y 正相关，u 与 v 负相关

(C) 变量 x 与 y 负相关，u 与 v 正相关

(D) 变量 x 与 y 负相关，u 与 v 负相关

2. 变量 x 与 y 相对应的一组数据为(10, 1)，(11.3, 2)，(11.8, 3)，(12.5, 4)，(13, 5)，其相关系数记为 r_{xy}. 变量 u 与 v 相对应的一组数据为(10, 5)，(11.3, 4)，(11.8, 3)，(12.5, 2)，(13, 1)，其相关系数记为 r_{uv}. 试判断 r_{xy}，r_{uv}与 0 三者之间的大小关系.

3. 为了找到向日葵空壳率与开花期大气湿度的关系，研究人员做了一组观察试验，结果如下：

大气湿度 X/%	45	57	59	60	68	66
空壳率 Y/%	18	14	21	18	27	25
大气湿度 X/%	69	70	72	77	88	80
空壳率 Y/%	26	29	31	32	37	33

试求向日葵空壳率与大气湿度之间的回归直线方程(回归系数保留三位小数).

4. 某公司近几年来的科研费用支出 x 与公司所获利润 y 的统计数据如下表：

科研费用支出 x/万元	5	11	4	5	3	2
利润 y/万元	31	40	30	34	25	20

根据上表求利润 y 关于科研费用支出 x 的回归直线方程.

5. 某便利店的一位经理想统计配送部门送货效率的情况，分别从送货距离是 2 km，5 km，10 km，15 km 的订单中随机选了三份，共 12 份订单进行统计，得到商品配送时间如下表：

订单编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
距离/km	2	2	2	5	5	5	10	10	10	15	15	15
时间/min	10.2	14.6	18.2	20.1	22.4	30.6	30.8	35.4	50.6	60.1	68.4	72.1

(1) 根据上表数据画出散点图；

(2) 如果配送时间和距离具有相关关系，求回归直线方程(回归系数保留三位小数)；

(3) 据此估计运送一件商品到距离便利店 8 km 的顾客手中所需时间.

6. 某文学杂志社为了解读者是否喜欢阅读与其文化程度(指学历)的关系，随机调查了 200 位读者，得到如下数据：

	高中以上学历(含高中)	高中以下学历	合　计
喜欢阅读	82	29	111
不喜欢阅读	18	71	89
合　计	100	100	200

试判断喜欢阅读与否和读者学历是否有关系.

温故而知新

7. 已知在某次试验中获得的数据如下：

n	1	2	3	4
x_n	12	17	21	28
y_n	5.4	y_2	9.3	13.5

其中不慎将数据 y_2 丢失，但知道这四组数据高度正相关且求得线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+\hat{a}$，求 $\hat{a}$，并估算 y_2.

8. 某农科所对冬季大棚内的昼夜温差与某反季节大豆新品种发芽率之间的关系进行分析研究，他们分别记录了2018年1月1日至1月5日大棚内的昼夜温差与每天每100颗种子中的发芽数，得到如下资料：

日　期	1月1日	1月2日	1月3日	1月4日	1月5日
温差 x/℃	10	11	13	12	8
发芽数 y/颗	23	24	30	27	16

该农科所确定的研究方案是：先从这5组数据中选取2组，用剩下的3组数据求线性回归方程，再用被选取的2组数据进行检验.

(1) 求选取的2组数据恰好是相邻2天数据的概率；

(2) 若选取的是1月1日与1月5日的两组数据，试根据1月2日至1月4日的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(3) 若由线性回归方程得到的估计数据与所选出的检验数据的误差均不超过2颗，则认为求得的线性回归方程是可靠的，试问：(2)中所得的线性回归方程是否可靠？

9. 一台机器由于连续使用时间较长，它按不同的转速生产出的零件有一些会有缺陷. 每小时生产有缺陷零件的多少，随机器转速而变化，下表为抽样试验结果：

转速 x/(r/s)	16	14	12	8
每小时生产有缺陷的零件数 y/个	11	9	8	5

(1) 如果 y 与 x 之间具有相关关系，求回归直线方程(回归系数保留三位小数)；

(2) 若实际生产中，允许每小时最多生产10个有缺陷的零件，那么机器的转速应控制在什么范围内？

10. 某地服装企业新推出衬衫个性化设计服务，为使服装设计更贴近本地顾客实情，随机地测量了27名成年男子的身高和臂展数据(单位：cm)，如下表所示：

身高 X	176	171	165	178	169	172	176	168	173	171	180	191	179	162
臂展 Y	169	162	164	170	172	170	181	161	174	164	182	188	182	153
身高 X	164	180	170	172	172	174	187	178	181	180	182	173	173	
臂展 Y	160	168	180	170	170	177	175	173	183	178	180	176	175	

如何利用这组数据为企业设计衬衫提供参考？

上下而求索

11. 阅读 4.1 节“多知道一点——夹角余弦与文本分类”，采取小组合作形式，收集近期一些个性化体育新闻标题，就文章相似性做一个统计调查，你有哪些发现？试利用计算标准化数据向量夹角的方法来判断文章相似程度.

12. （数学探究活动）与同学们一起分别收集周围一些成年人的脚掌长度、身高、体重数据，分别作出脚掌长度与身高之间、脚掌长度与体重之间的散点图，并判断两组变量之间是否线性相关，若线性相关，求出它们的回归直线方程. 另外收集几个成年人的身高和体重数据，根据所求出的回归直线方程预测这几人的脚掌长度，并与他们的实际脚掌长度进行对比，分析预测结果的准确性. 思考：警察办案时，为什么希望能提取到犯罪嫌疑人的脚印？

体重与脉搏的数据拟合模型

一 问题背景

医学研究发现，人体血管血流量、心跳脉搏率与体重等指标可作为人体健康的重要指标．研究者关心血流量、脉搏率与体重之间存在怎样的关系，由此产生的问题是：是否可以定量地近似描述出血流量、脉搏率与体重之间的关系呢？

下面我们通过建立数学模型来解决上述问题．

二 问题解析

对于处于休息状态下的恒温动物而言，不考虑其他因素导致的热量损失，可以认为它的全部热量都用于维持体温，此时，动物产生的热量近似等于散热量．在上述假设基础上，还需要下面几条假设：

（1）动物密度均匀，动物体积与体重成正比；

（2）心脏体积与动物自身体积成正比；

（3）消耗的能量与通过心脏的血流量成正比；

（4）心脏每次收缩挤压出来的血流量与动物的体重(体积)成正比．

1．模型建立与求解

因为动物体温通过身体表面散发热量，表面积越大，散发的热量越多，保持体温需要的能量也就越大，所以动物体内消耗的能量 E 与身体的表面积 S 以及单位时间内通过心脏的血流量 Q 均成正比，因此有 $E=p_1S=p_2Q$ 成立，从而得到 $Q=pS$，其中 p_1，p_2 与 p 均为正的比例系数．

另一方面，因为体积 V 与体重 W 成正比，故可以表示为 $V=r_1W$．球体或立方体的表面积 S 与体积 V 的 $\frac{2}{3}$ 次方成正比，受此启发，可以认为存在 $0<\alpha<1$，使得 S 与体积 V 的 α 次方成正比，即 $S=r_2V^{\alpha}$(其中 α 为待求的参数)，因此得到 $S=rW^{\alpha}$，其中 r_1，r_2，r 为正的比例系数．由此得到血流量与体重的关系式：$Q=k_1W^{\alpha}$，其中 k_1 为正的比例系数．根据定义，脉搏率 $f=\frac{Q}{q}$，其中，q 为心脏每次

收缩挤压出来的血流量，而由生物学假设有 $q=cW$（c 为正的比例系数），利用前面的表达式，得到脉搏率与体重的数学模型为

$$f=\frac{Q}{q}=\frac{k_1W^{\alpha}}{cW}=kW^{\beta}, \tag{1}$$

其中 $k>0$，$-1<\beta<0$ 均为需要拟合的参数.

下面利用所给数据，采用数据拟合的方法求出参数 k，β，从而得到脉搏率与体重的关系.

表 1 给出了一些动物体重与脉搏率对应的数据.

表 1

动物名称	鼠	大鼠	豚鼠	兔	小狗	大狗	羊	马
体重 W/g	25	200	300	2 000	5 000	30 000	50 000	450 000
脉搏率 f/(次/min)	670	420	300	205	120	85	70	38

利用表中的数据作出脉搏率 f 与体重 W 的散点图，从图 1 的结果来看，散点图与数学模型(1)相符.

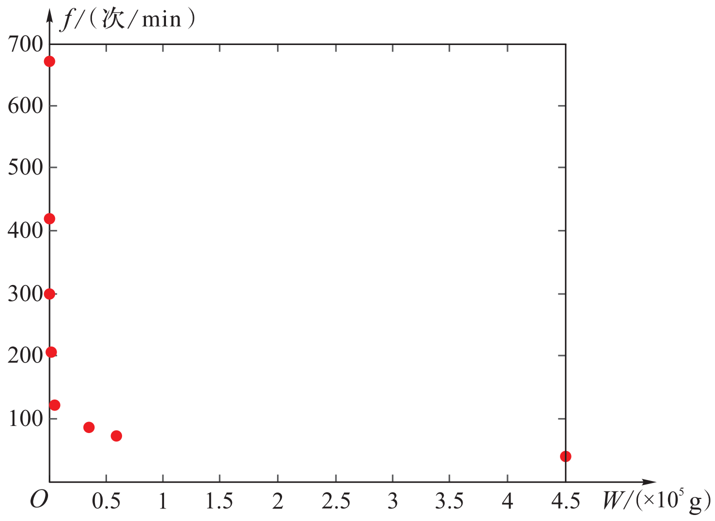


图 1　脉搏率 f 与体重 W 的散点图

为了求出拟合系数 k，β，需将(1)式变换为一次函数的形式，因此，对(1)式两端同时取对数，变成下面的线性拟合数学模型：

$$y=ax+b \tag{2}$$

其中 $y=\ln f$，$b=\ln k$，$a=\beta$，$x=\ln W$.

利用线性回归对数据进行拟合，求出 a，b 后，再取 $k=e^b$，$\beta=a$ 得 k，β.

图 2 是以 $\ln f$ 和 $\ln W$ 为坐标的散点图. 可以看出，数据取对数之后满足线性相关关系，这说明(2)式所建立的数学模型是有效的.

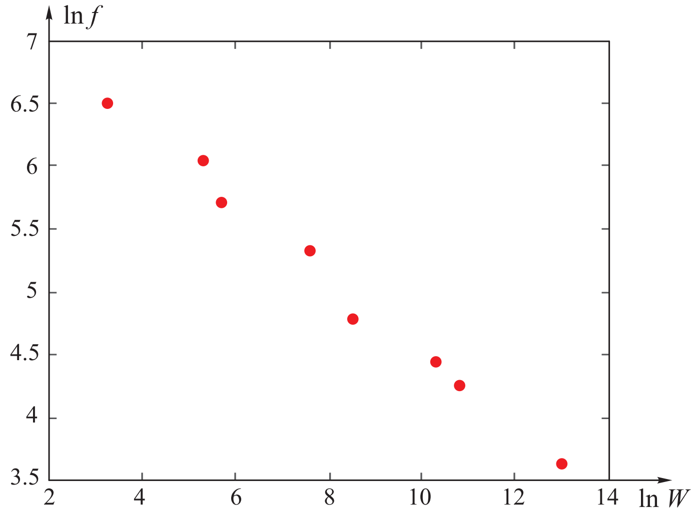


图 2　$\ln f$ 与 $\ln W$ 的散点图

利用数据拟合方法得到参数 $k=1\,831.5$，$\beta=-0.302$，脉搏率 f 与体重 W 的关系可以近似地表示为 $f=1\,831.5W^{-0.302}$.

根据表 1 的数据及求得的数学模型，我们可以利用计算机作出拟合曲线，如图 3 所示.

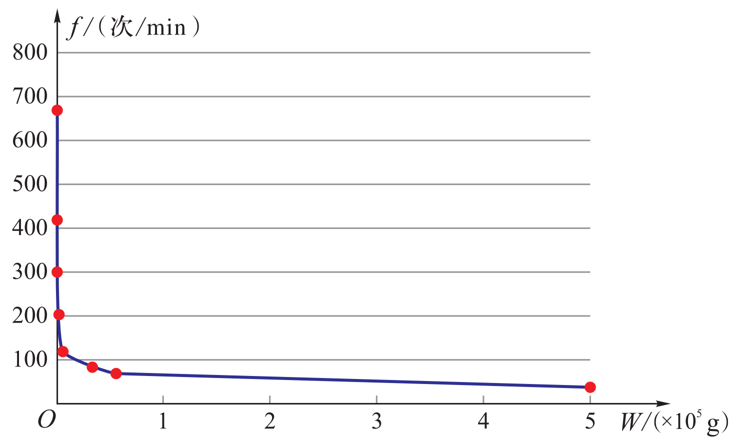


图 3

2. 模型的进一步讨论

上面所建立的体重与脉搏率拟合模型并不是直接通过线性回归方法得到，而需要对脉搏率 f 与体重 W 分别取对数，绘制出 $\ln f$ 与 $\ln W$ 的散点图，发现 $\ln f$ 与 $\ln W$ 具有线性相关关系，然后再利用线性回归求出体重与脉搏率的关系.

这种对数据进行变换，然后转化为线性回归模型的方法是一种常见的数据处理方法.

许多情况下，由于受到某些限制，会出现难以根据现有知识确定曲线类型的情况，此时，需要绘制出散点图，分析散点的分布，选择相近的曲线类型来进行拟合.

除了前面的幂函数拟合外，对于不满足线性相关关系的散点(x_i, y_i) $(x_i\neq 0, y_i\neq 0, i=1, 2, 3, \cdots, n)$，下面给出两种常用的拟合函数类型：

(1) 随着 x 增大，从某时刻起 y 增长的速度快于幂函数增长速度或趋近于 0 时，可考虑采用 $y=ke^{ax}$ 进行拟合，其中 k，a 为拟合系数. 为了将其转化为线性回归模型拟合，需要对所给数据进行取对数的处理.

(2) 当 x 增大到一定时刻后，散点都位于非坐标轴的水平线附近，则可以考虑采用模型 $y=\dfrac{x}{bx+a}$ 或 $y=be^{\frac{a}{x}}(a>0)$进行拟合，其中 a，b 为拟合系数. 在将其转化为线性拟合问题时，两种模型的变换方式是不同的，根据拟合数据，分别做变换$\begin{cases}Y=\dfrac{1}{y},\\X=\dfrac{1}{x},\end{cases}$以及$\begin{cases}Y=\ln y,\\X=\dfrac{1}{x},\end{cases}$则模型均转化为形如 $Y=mX+n$ 的形式.

如果出现(2)所描述的情况，两种模型都可以用来拟合数据时，选择哪一种拟合模型更合适呢？一般做法是选择误差平方的平均值 $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2\right)$ 较小者作为最终模型，其中 $\hat{y}_i$ 是根据拟合模型得到的预测值.

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英文名	页码
平均变化率	average rate of change	3
瞬时速度	instantaneous velocity	7
导　数	derivative	8
导函数	derived function	9
复合函数	composite function	23
极　值	extrema	31
空间向量	space vector	60
共面向量	coplanar vector	68
方向向量	direction vector	81
法向量	normal vector	82
条件概率	conditional probability	109
贝叶斯公式	Bayes formula	120
随机变量	random variable	125
离散型随机变量	discrete random variable	125
分布列	distribution series	126
伯努利试验	Bernoulli trial	130
二项分布	binomial distribution	130
超几何分布	hypergeometric distribution	133
数学期望	mathematical excpectation	135
正态分布	normal distribution	146
标准正态分布	standardized normal distribution	147
散点图	scatterplot	163
相关系数	coefficient of correlation	164
线性回归	linear regression	173
独立性检验	test of independence	185

后　记

为全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，加快实现教育现代化和建设教育强国的宏伟目标，并为学生的终身发展奠定良好基础，我们依据教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，组织专家编写出《普通高中教科书·数学》，现将本书热忱地奉献给广大读者.

本书的编写遵循《普通高中数学课程标准(2017 年版)》确立的基本理念和目标要求，以发展学生数学核心素养为导向，通过选取体现时代发展、科技进步和符合学生生活经验的素材，采取符合学生认知发展规律的呈现方式，帮助学生在获得必要的基础知识和基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验的过程中，进一步发展其思维能力、实践能力和创新意识. 在教科书编写过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧. 一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订编写提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的谢意！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期而艰巨的任务. 我们真诚地希望广大师生在使用本书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成数学教科书建设这一光荣的使命！

教材编写委员会

普通高中教科书
数　学
选择性必修　第二册
责任编辑：邹楚林　李漫滋
湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路 443 号）
电子邮箱：hnephmath@126.com
客服电话：0731－85486796
湖南出版中心代印
广东省新华书店经销
湖南天闻新华印务邵阳有限公司印装
890 mm×1240 mm　16 开　印张：13　字数：284 000
2019 年 11 月第 1 版　2020 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5539－3970－4
定价：14.92 元
批准文号：粤发改价格〔2017〕434 号·举报电话：12315
如有质量问题，影响阅读，请与湖南出版中心联系调换。
联系电话：0731－88388986　0731－88388987